Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Ю.А. Лавров

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: ПРЕДЕЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2021

УДК 517.1 :517.2
ББК 22.161.1
Л13

Рецензенты:
Член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, научный руководитель ИПМаш РАН, директор ВШ МПУ СПбПУ
Д. А. Индейцев
Член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор ВШ ТМ СПбПУ
А. М. Кривцов

Лавров Ю. А. **Математический анализ: пределы и производные** : учеб. пособие / Ю. А. Лавров. – СПб., 2021. – 82 с.

В учебном пособии представлены материалы раздела "Математический анализ", изложенные в соответствии с действующими в СПбПУ образовательными стандартами. Учебное пособие представляет собой набор теоретических сведений и описание практических методов, необходимых для успешного освоения учебной дисциплины, для подготовки к контрольным работам и экзаменам.

Учебное пособие предназначено для бакалавров направления «Экономика и управление».

Табл. 3. Ил. 8. Библиогр.: 2 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

Функция

Определение

Функция – это правило, по которому каждому элементу одного множества (например, множества X) ставится в соответствие один элемент другого множества (например, множества Y).

Обозначение: $f : X \to Y$.

Замечание

Для множества X используются названия:

— область определения функции;

— область задания функции (принято говорить: функция f задана на множестве X, принято писать: $X = D(f)$);

— область допустимых значений (ОДЗ), то есть, множество таких значений, для которых функция может быть вычислена;

— область отправления.

Для множества Y используются названия:

— область значений функции;

— область изменения функции;

— область прибытия.

Символическое равенство $f(X) = Y$ означает: множество Y состоит из всех таких и только таких элементов $y \in Y$, для каждого из которых найдётся элемент $x \in X$, подчиняющийся равенству $y = f(x)$.

Пример

Функция $f(x) = \sqrt{x}$ каждому элементу множества $X = [0, +\infty)$ ставит в соответствие число из множества $Y = [0, +\infty)$.

Пример

Функция $f(x) = \sin x$ каждому элементу множества $X = (-\infty, +\infty)$ ставит в соответствие число из множества $Y = [-1, +1]$.

Пример

Функция f каждому элементу множества студентов группы $X = \{$"Андреев", "Борисов", "Викторов", ... , "Яковлев"$\}$ ставит в соответствие экзаменационную оценку из множетва $Y = \{$"Отлично", "Хорошо", "Удовлетворительно", "Неудовлетворительно"$\}$.

Определение

Последовательность – это функция, заданная на множестве $\mathbb{N}$.
Обозначение: $f : \mathbb{N} \to Y$.

Определение

Числовая последовательность – это заданная на множестве $\mathbb{N}$ функция, принимающая вещественные численные значения.
Обозначение: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Примеры представления последовательностей

1) $\{a_1,\, a_2,\, a_3,\, \dots\, , a_n,\, \dots\, \}$.
2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
3) $\dfrac{1}{2}\,, \dfrac{2}{3}\,, \dfrac{3}{4}\,, \; \dots \; , \dfrac{n}{n+1}\,, \; \dots \; .$
4) $1\,, \dfrac{1}{4}\,, \dfrac{1}{9}\,, \dfrac{1}{16}\,, \dfrac{1}{25}\,, \; \dots \; .$
5) $1\,, 1\,, 2\,, 3\,, 5\,, 8\,, 13\,, \; \dots$ (последовательность Фибоначчи).

Фигурные скобки, которыми охвачено множество значений последовательности (Примеры 1–2), нередко опускаются (Примеры 3–5).

Последовательность может быть явно задана с помощью формулы общего члена (Пример 3), либо эта формула может быть угадана (Пример 4).

В последовательности из Примера 5 формулу общего члена угадать трудно. Эта формула существует,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right),$$

однако, она громоздка, требует вещественнозначной (а стало быть, медленной) компьютерной арифметики, хотя все члены последовательности – целые числа. Чаще для вычисления первых членов последовательности Фибоначчи применяются т.н. рекуррентные соотношения: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n \geq 3$.

Попутно заметим, что число $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ в технических науках называется "золотым сечением"; $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\Phi}$.

Предел последовательности

Определение конечного предела последовательности

Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет предел, равный числу A, если $\forall\,\varepsilon > 0$ найдётся число $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $n > N(\varepsilon)$ следует справедливость неравенства $|a_n - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, или $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$.

Определение

Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет предел, равный $+\infty$, если $\forall\,\varepsilon > 0$ найдётся число $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $n > N(\varepsilon)$ следует справедливость неравенства $a_n > \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, или $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Определение

Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет предел, равный $-\infty$, если $\forall\,\varepsilon > 0$ найдётся число $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $n > N(\varepsilon)$ следует справедливость неравенства $a_n < -\varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, или $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Определение

Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет предел, равный ∞, если $\forall\,\varepsilon > 0$ найдётся число $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $n > N(\varepsilon)$ следует справедливость неравенства $|a_n| > \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$, или $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Замечание

Последние четыре определения похожи друг на друга. Отличие имеется лишь в тех местах, которые выделены синим цветом. Возникает закономерный вопрос: а нельзя ли четыре определения заменить одним, универсальным?

Замечание

Непосредственно из определений пределов следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \infty\,.$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \infty\,.$$

Обратное неверно.

Пример

Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1\,.$

Доказательство

$a_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}\,,\;\; A=1\,.$ Зададим $\varepsilon > 0\,.$ Строим целевое неравенство

$$|a_n - A| < \varepsilon \iff \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon\,,$$

и стараемся "решить" его относительно номера n равносильными преобразованиями. Как это делалось в средней школе, преобразования ведутся цепью, без объяснений:

$$\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon \iff 1 - \frac{n^2}{n^2+1} < \varepsilon \iff \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n^2 + 1 \iff$$

$$\frac{1}{\varepsilon} - 1 < n^2 \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \iff n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}\,. \tag{1}$$

1. Пусть $\varepsilon \le 1\,.$ Подкоренное выражение в (1) неотрицательно, корень квадратный существует. Можно взять $N(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}\,,$ и тогда из неравенства $n > N(\varepsilon)$ вытекает, согласно цепи равносильных неравенств (1), целевое неравенство $|a_n - A| < \varepsilon\,.$

2. Пусть $\varepsilon > 1\,.$ Подкоренное выражение в (1) отрицательно. Однако, согласно (1),

$$\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon \quad \iff \quad \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon\,. \tag{2}$$

Знаменатель последней дроби в (2) строго больше числителя при $n \in \mathbb{N}$, следовательно,

$$\frac{1}{n^2+1} < 1\,, \quad 1 < \varepsilon\,, \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon\,,$$

что означает $|a_n - A| < \varepsilon\,,\;\; \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$

Пример

Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cdot(-1)^n = \infty$.

Доказательство

$a_n = n\cdot(-1)^n$. Строим целевое неравенство

$$|a_n| > \varepsilon \iff |n\cdot(-1)^n| > \varepsilon\,,$$

и стараемся "решить" его относительно номера n равносильными преобразованиями. Цепь преобразований:

$$|n\cdot(-1)^n| > \varepsilon \iff |n|\cdot|(-1)^n| > \varepsilon \iff n > \varepsilon\,. \tag{3}$$

Можно взять $N(\varepsilon) = \varepsilon$, и тогда из неравенства $n > N(\varepsilon)$ вытекает, согласно цепи равносильных неравенств (3), целевое неравенство $|a_n| > \varepsilon$.

Замечание

Если последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет предел, равный конечному числу A, принято говорить, что последовательность сходится. Если предел равен $+\infty$, или $-\infty$, или ∞, или не существует вообще, принято говорить, что последовательность расходится.

Определение

Пусть $\varepsilon > 0$.

Открытый промежуток $(A-\varepsilon,\, A+\varepsilon)$ называется ε–окрестностью конечного числа A (точки A на числовой прямой).

Обозначение: $(A-\varepsilon,\, A+\varepsilon) = U_\varepsilon(A)$.

Промежуток $(+\varepsilon,\, +\infty)$ называется ε–окрестностью точки $+\infty$.

Обозначение: $(+\varepsilon,\, +\infty) = U_\varepsilon(+\infty)$.

Промежуток $(-\infty,\, -\varepsilon)$ называется ε–окрестностью точки $-\infty$.

Обозначение: $(-\infty,\, -\varepsilon) = U_\varepsilon(-\infty)$.

Множество $(-\infty,\, -\varepsilon) \cup (+\varepsilon,\, +\infty)$ называется ε–окрестностью точки ∞.

Обозначение: $(-\infty,\, -\varepsilon) \cup (+\varepsilon,\, +\infty) = U_\varepsilon(\infty)$.

Определение ε–окрестностей нужно для того, чтобы построить "Универсальное" определение предела последовательности.

Определение произвольного предела последовательности

Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет предел, равный B, если $\forall\,\varepsilon > 0$ найдётся число $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall\, n\ :\ n > N(\varepsilon) \implies a_n \in U_\varepsilon(B)$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = B$.

Замечание

Данное определение предела последовательности равносильно четырём предыдущим определениям предела последовательности, соответственно при B конечном, $B = +\infty$, $B = -\infty$, $B = \infty$.

Данное определение компактно записывается, но прямое доказательство конкретного предела всё-таки требует рассмотрения неравенств, записанных в предыдущих определениях предела.

Теорема

Если $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

Если $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

Если $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$.

Доказательство предоставляется слушателям.

Теорема об арифметических действиях над пределами последовательностей

Если существуют и конечны пределы $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$, то:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = A + B$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n - \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = A - B$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = A \cdot B$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n} = \dfrac{A}{B}$.

Доказательство приводится только для Пункта 1

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, а это значит, что $\forall\,\varepsilon_1 > 0$ существует $N_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что из неравенства $n > N_1(\varepsilon_1)$ следует $|a_n - A| < \varepsilon_1$, а это неравенство с модулем равносильно двойному неравенству $-\varepsilon_1 < a_n - A < \varepsilon_1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$, а это значит, что $\forall\,\varepsilon_2 > 0$ существует $N_2(\varepsilon_2) > 0$ такое, что из неравенства $n > N_2(\varepsilon_2)$ следует $|b_n - B| < \varepsilon_2$, а это неравенство с модулем равносильно двойному неравенству $-\varepsilon_2 < b_n - B < \varepsilon_2$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$.
Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2$, и пусть $N(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon/2),\, N_2(\varepsilon/2))$.

Тогда при $n > N(\varepsilon)$ выполняются неравенства

$$-\varepsilon/2 < a_n - A < \varepsilon/2\,,$$
$$-\varepsilon/2 < b_n - B < \varepsilon/2\,,$$

а следовательно, из сложения этих двух неравенств вытекает верность неравенства

$$-\varepsilon < (a_n + b_n) - (A + B) < \varepsilon \quad\Longleftrightarrow\quad |(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon\,,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = A + B = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Следствие из Пункта 3

Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n\to+\infty}(B \cdot a_n) = B \cdot \lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$

Замечание

Результаты теоремы об арифметических действиях можно распространить и на некоторые случаи, когда один или оба из пределов бесконечны. Однако, теорема теряет силу при следующих "арифметических результатах": $[\infty+\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[+\infty+(-\infty)]$, $[-\infty+(+\infty)]$, $[+\infty-(+\infty)]$, $[-\infty-(-\infty)]$, $[0\cdot(+\infty)]$, $[0\cdot(-\infty)]$, $[0\cdot\infty]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, при любых знаках либо при отсутствии знаков при "бесконечностях" в последней дроби.

Каждое из показанных здесь некорректных сочетаний нулей и бесконечностей принято заключать в квадратные скобки и называть словом "неопределённость". Предел в ситуации, порождающей "неопределённость", может быть и конечным числом, и бесконечным, а может и не существовать вовсе.

В целях краткости принято указывать только такие неопределённости:

$$[\infty - \infty]\,, \qquad \left[\frac{0}{0}\right], \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \qquad [0 \cdot \infty]\ .$$

Определение

Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена сверху, если $\exists\, M \in \mathbb{R}$ такое, что $a_n < M, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена снизу, если $\exists\, M \in \mathbb{R}$ такое, что $a_n > M, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Определение

Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена, если она ограничена сверху и снизу.

Определение (альтернативное)

Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена, если $\exists\, M \in \mathbb{R}\,, \ \ M > 0\,,$ такое, что $|a_n| < M, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Определение

Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется монотонно возрастающей, если $a_{n+1} \geq a_n\,, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется монотонно убывающей, если $a_{n+1} \leq a_n\,, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется монотонной, если она монотонно возрастающая, или монотонно убывающая.

Теорема о предельном переходе в неравенствах

1. Пусть последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет конечный предел
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A\,,$
и пусть существуют постоянные числа $A_0\,,\ N_0$ такие, что $a_n < A_0\,,$ $\forall\, n > N_0\,.$
Тогда $A \leq A_0\,.$

2. Пусть последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет конечный предел

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$,

и пусть существуют постоянные числа A_0, N_0 такие, что $a_n > A_0$, $\forall\, n > N_0$.

Тогда $A \geq A_0$.

Доказательство приводится только для Пункта 1.

Применяется метод от противного. Предположим, что

$$A > A_0 . \tag{4}$$

Пусть $\varepsilon_0 = (A - A_0)/2$. Из (4) следует, что $\varepsilon_0 > 0$.

По определению предела, существует $N = N(\varepsilon_0) > 0$ такое, что из неравенства $n > N(\varepsilon_0)$ следует

$$|a_n - A| < \varepsilon_0 \quad\Longleftrightarrow\quad -\varepsilon_0 < a_n - A < \varepsilon_0 \quad\Longleftrightarrow\quad A - \varepsilon_0 < a_n < A + \varepsilon_0 . \tag{5}$$

Воспользуемся левой половиной последнего двойного неравенства в (5), справедливого $\forall\, n > N(\varepsilon_0)$:

$$A - \frac{A - A_0}{2} < a_n \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{A + A_0}{2} < a_n . \tag{6}$$

По условию теоремы, существует $N_0 > 0$ такое, что из неравенства $n > N_0$ следует

$$a_n < A_0 . \tag{7}$$

Но тогда, для $n > \max(N(\varepsilon_0),\, N_0)$ неравенства (6) и (7) выполняются вместе:

$$\frac{A + A_0}{2} < a_n < A_0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{A + A_0}{2} < A_0 \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad A + A_0 < 2A_0 \quad\Longrightarrow\quad A < A_0 . \tag{8}$$

Неравенства (8) и (4) противоречат друг другу. Следовательно, сделанное в (4) предположение $A > A_0$ неверно. Остаётся принять, что $A \leq A_0$. Пункт 1 теоремы доказан.

Доказательство для Пункта 2 предоставляется слушателям.

Теорема Вейерштрасса

Если последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, то она имеет конечный предел.

Если последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно убывает и ограничена снизу, то она имеет конечный предел.

Если последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ монотонна и ограничена, то она имеет конечный предел.

Теорема формулируется без доказательства.

<u>Лемма 1</u> (Лемма Бернулли, неравенство Бернулли)

$$(1+x)^n \geq 1+nx\,, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}\,, \quad \forall\, x>-1\,.$$

Доказательство строится методом математической индукции

1. База индукции. $n=1$. Неравенство принимает вид

$$1+x \geq 1+x\,,$$

который не вызывает сомнений.

2. Индуктивное предположение. Предположим, что мы уже доказали справедливость неравенства при $n=k$, то есть, что мы уже имеем верное неравенство

$$(1+x)^k \geq 1+kx\,. \tag{9}$$

3. Индуктивный переход. Докажем, что из неравенства (9) вытекает справедливость неравенства

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x\,. \tag{10}$$

Строим цепь очевидных равенств и обоснованных неравенств:

$$(1+x)^{k+1} = \underbrace{(1+x)^k}_{\geq(1+kx)}\cdot(1+x) \geq (1+kx)\cdot(1+x) = 1+(k+1)x+\underbrace{kx^2}_{\geq 0} \geq 1+(k+1)x\,.$$

Неравенство (10) доказано. Лемма 1, таким образом, тоже доказана.

<u>Лемма 2</u>

Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, монотонно возрастает.

Доказательство

Можно было бы доказать, что $a_{n+1}\geq a_n$ при $n\geq 1$. Однако, удобнее и проще доказывать неравенство $a_m \geq a_{m-1}$ при $m\geq 2$, где $m=n-1$.

Построим цепь равносильных неравенств:

$$a_m \geq a_{m-1} \iff \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \geq \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \iff$$

$$\iff \left(\frac{m+1}{m}\right)^m \geq \left(\frac{m}{m-1}\right)^{m-1} \iff$$

$$\iff \left(\frac{m+1}{m}\right)^m \geq \left(\frac{m}{m-1}\right)^m \left(\frac{m}{m-1}\right)^{-1} \iff$$

$$\iff \left(\frac{m+1}{m}\right)^m \left(\frac{m-1}{m}\right)^m \geq \left(\frac{m-1}{m}\right) \iff$$

$$\iff \left(\frac{m+1}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\right)^m \geq \frac{m-1}{m} \iff \left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)^m \geq \frac{m-1}{m} \iff$$

$$\iff \left(1-\frac{1}{m^2}\right)^m \geq 1-\frac{1}{m}\,. \tag{11}$$

Последнее из равносильных неравенств в (11) справедливо в силу Леммы Бернулли при $x=-\frac{1}{m^2}$. Заметим, что $-\frac{1}{m^2} > -1$, поскольку $m \geq 2$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3

Последовательность $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, монотонно убывает.

Доказательство

Можно было бы доказать, что $b_{n+1} \leq b_n$ при $n \geq 1$. Однако, удобнее и проще доказывать неравенство $b_m \leq b_{m-1}$, или $b_{m-1} \geq b_m$, при $m \geq 2$, где $m = n-1$.

Построим цепь равносильных неравенств:

$$b_{m-1} \geq b_m \iff \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m \geq \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} \iff$$

$$\iff \left(\frac{m}{m-1}\right)^m \geq \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1} \iff$$

$$\iff \left(\frac{m}{m-1}\right)^{m+1} \geq \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1} \left(\frac{m}{m-1}\right) \iff$$

$$\iff \left(\frac{m}{m-1}\right)^{m+1}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1} \ge \frac{m}{m-1} \iff$$

$$\iff \left(\frac{m}{m-1}\cdot\frac{m}{m+1}\right)^{m+1} \ge \frac{m}{m-1} \iff \left(\frac{m^2}{m^2-1}\right)^{m+1} \ge \frac{m}{m-1} \iff$$

$$\iff \left(1+\frac{1}{m^2-1}\right)^{m+1} \ge 1+\frac{1}{m-1}\,. \qquad (12)$$

Неравенство (12) справедливо в силу леммы Бернулли при $m+1=n$ и при $x=\dfrac{1}{\underbrace{m^2}_{\ge 4}-1} > 0 > -1$:

$$\left(1+\frac{1}{m^2-1}\right)^{m+1} \ge 1+(m+1)\cdot\frac{1}{m^2-1} = 1+\frac{(m+1)}{(m-1)(m+1)} = 1+\frac{1}{m-1}\,. \qquad (13)$$

Лемма 3 доказана.

Теорема о втором замечательном пределе (для последовательностей)

Существует и конечен предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Имеет место грубая оценка: $2 \le \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \le 4\,.$

Доказательство

Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, монотонно возрастает (по Лемме 2) $\implies a_n > a_1 = 2\,,\ \forall\, n > 1\,.$

Последовательность $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, монотонно убывает (по Лемме 3) $\implies b_n < b_1 = 4\,,\ \forall\, n > 1.$

Справедливо неравенство $(\forall\, n \in \mathbb{N})$

$$a_n < b_n \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \iff 1 < 1+\frac{1}{n} \iff 0 < \frac{1}{n}\,.$$

Таким образом, $a_n < b_n \le b_1 = 4$, то есть $a_n < 4$.

Только что показано, что последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена сверху, по Лемме 2 последовательность монотонно возрастает, следовательно, по теореме Вейерштрасса последовательность имеет предел.

Этот предел принято называть вторым замечательным пределом, и обозначать его буквой e:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

Поскольку $2 < a_n < 4\,,\ \ \forall\, n > 1\,,$ по теореме о предельном переходе в неравенствах

$$2 \le e = \lim_{n\to+\infty} a_n \le 4\,.$$

Теорема доказана.

Теорема о двух полицейских (для последовательностей)

Пусть даны три последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,,$ элементы которых $\forall\, n\in\mathbb{N}$ связаны соотношениями

$$a_n \le b_n \le c_n\,. \tag{14}$$

Пусть существуют, конечны и равны пределы

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = A\,.$$

Тогда существует и конечен предел $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n\,,$ причём, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = A\,.$

Доказательство

Зададим произвольное $\varepsilon > 0\,.$

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A\,,$ а это значит, что существует $N_1(\varepsilon) > 0$ такое, что из $n > N_1(\varepsilon)$ следует $|a_n - A| < \varepsilon\,,$ и это неравенство с модулем равносильно двойному неравенству

$$A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon\,. \tag{15}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = A\,,$ а это значит, что существует $N_2(\varepsilon) > 0$ такое, что из $n > N_2(\varepsilon)$ следует $|c_n - A| < \varepsilon\,,$ и это неравенство с модулем равносильно двойному неравенству

$$A-\varepsilon < c_n < A+\varepsilon\,. \tag{16}$$

Из (15) и (14) следует, что $\forall\, n > N_1(\varepsilon)$

$$A-\varepsilon < a_n\,,\quad a_n < b_n \quad\Longrightarrow\quad A-\varepsilon < b_n\,. \tag{17}$$

Из (14) и (16) следует, что $\forall\, n > N_2(\varepsilon)$

$$b_n < c_n\,, \quad c_n < A + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad b_n < A + \varepsilon\,. \tag{18}$$

Пусть $N(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon),\, N_2(\varepsilon))$. Тогда $\forall\, n > N(\varepsilon)$ будут выполнены неравенства (17) и (18) вместе:

$$A - \varepsilon < b_n\,, \quad b_n < A + \varepsilon \;\Longrightarrow\; A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon \;\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad -\varepsilon < b_n - A < \varepsilon \;\Longrightarrow\; |b_n - A| < \varepsilon\,. \tag{19}$$

Выполнение неравенства (19) $\forall\, n > N(\varepsilon)$ по определению предела означает, что

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = A\,.$$

Теорема доказана.

Замечание

Напомним, что последовательность – это функция, заданная на множестве $\mathbb{N}$. Множество $\mathbb{N}$ принято называть дискретным. Элементы множества $\mathbb{N}$ отделены друг от друга расстояниями, не меньшими, чем единица.

Противовесом дискретному множеству является Континуум, то есть, сплошное множество чисел, заполняющих некоторый промежуток на вещественной оси. Континуумом является и промежуток $[0,\,1]$, и любой другой сплошной промежуток на вещественной оси, и даже вся вещественная ось (множество $\mathbb{R}$).

Работу с последовательностями мы пока приостанавливаем.

Далее будут рассматриваться функции, заданные на континуумах. Для краткости будем их называть просто словом "функции".

Предел функции

Определение конечного предела функции в конечной точке

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет в конечной точке a предел, равный конечному числу A, если $\forall\, \varepsilon > 0$ существует такое значение $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $|x - a| < \delta(\varepsilon)$ вытекает справедливость неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, или $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A$.

Определение произвольного предела функции в произвольной точке

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет в точке b предел, равный значению B, если $\forall \varepsilon > 0$ существует значение $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $x \in U_{\delta(\varepsilon)}(b) \implies f(x) \in U_{\varepsilon}(B)$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to b} f(x) = B$, или $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} B$.

Замечание

Последнее ("универсальное") определение предела функции написано "на языке окрестностей". Предпоследнее ("конечное") определение предела написано на языке "Эпсилон–Дельта".

Последнее ("универсальное") определение предела функции равносильно предпоследнему ("конечному") при конечном b и конечном B. Если выписать все возможные определения пределов при всех возможных сочетаниях конечных и бесконечных b и B, таких определений накопится, ни много ни мало, 16.

Определение правостороннего предела функции в конечной точке

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет в конечной точке a правосторонний предел, равный конечному числу A, если $\forall \varepsilon > 0$ существует значение $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $0 < x - a < \delta(\varepsilon)$ вытекает справедливость неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$, или $f(x) \underset{x \to a+0}{\longrightarrow} A$.

Определение левостороннего предела функции в конечной точке

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет в конечной точке a левосторонний предел, равный конечному числу A, если $\forall \varepsilon > 0$ существует значение $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $-\delta(\varepsilon) < x - a < 0$ вытекает справедливость неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$, или $f(x) \underset{x \to a-0}{\longrightarrow} A$.

Замечание

Предыдущие два определения пределов даны только для конечных величин. Обобщение на случай бесконечных величин предоставляется слушателям.

Теорема о связи предела с односторонними пределами

Следующие два утверждения равносильны.

1. Существуют и равны односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

2. Существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Без доказательства.

Пример

Нетрудно доказать, что $\lim\limits_{x\to +0} \sqrt{x} = 0$. Ещё легче доказать, что $\lim\limits_{x\to -0} \sqrt{x}$ не существует.

Теорема о предельном переходе в неравенствах (для функций)

1. Пусть функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, и существуют постоянные числа A_0, ε_0 такие, что $f(x) < A_0$, для всех x, подчиняющихся неравенству $|x-a| < \varepsilon_0$.
Тогда $A \le A_0$.

2. Пусть функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, и существуют постоянные числа A_0, ε_0 такие, что $f(x) > A_0$, для всех x, подчиняющихся неравенству $|x-a| < \varepsilon_0$.
Тогда $A \ge A_0$.

Без доказательства.

Определение бесконечно малой (функции) в произвольной точке

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке a.

Определение бесконечно большой (функции) в произвольной точке

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то функция $f(x)$ называется бесконечно большой в точке a.

Определение ограниченной функции в окрестности точки

Если $\exists M > 0$ и $\exists \delta > 0$ такие, что из неравенства $|x - a| < \delta$ следует справедливость неравенства $|f(x)| < M$, то функция $f(x)$ называется ограниченной в окрестности точки a.

Замечание

Выше дано определение функции, ограниченной вблизи конечной точки. Слушателям предлагается самостоятельно дать определение функции, ограниченной в окрестности бесконечности.

Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой

Пусть $f(x)$ – бесконечно малая в точке a.
Тогда $1/f(x)$ – бесконечно большая в точке a.

Пусть $g(x)$ – бесконечно большая в точке a.
Тогда $1/g(x)$ – бесконечно малая в точке a.

Без доказательства.

Теорема о произведении бесконечно малой на ограниченную

Пусть $f(x)$ – бесконечно малая в точке a, и $g(x)$ – ограничена в некоторой окрестности точки a.
Тогда $f(x) \cdot g(x)$ – бесконечно малая в точке a.

Доказательство

Зададим $\varepsilon > 0$.

Функция $f(x)$ – бесконечно малая в точке a, следовательно, $\forall \varepsilon_1 > 0$ существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что из неравенства $|x-a| < \delta_1(\varepsilon_1)$ вытекает $|f(x)| < \varepsilon_1$.

Функция $g(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки a, следовательно, $\exists M > 0$, $\exists \delta_2 > 0$, такие, что из неравенства $|x - a| < \delta_2$ вытекает $|g(x)| < M$.

Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon/M$, и пусть $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon/M), \delta_2)$. Тогда, из неравенства $|x - a| < \delta(\varepsilon)$ вытекает справедливость неравенств $|x - a| < \delta_1(\varepsilon/M)$,

$|x-a|<\delta_2$, а значит, и справедливость неравенства

$$|f(x)\cdot g(x)-0| = |f(x)|\cdot|g(x)| < (\varepsilon/M)\cdot M = \varepsilon\,,$$

что, по определению, и означает

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = 0\,.$$

Доказательство закончено.

Теорема о двух полицейских (для функций)

Пусть даны три числовые функции $f\colon X \to Y$, $g\colon X \to Y$, $h\colon X \to Y$, значения которых $\forall\, x \in X$ связаны соотношениями $f(x) \le g(x) \le h(x)$.

Пусть существуют и конечны пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$.

Тогда существует и конечен предел $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, причём, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Без доказательства.

Замечание

Теорема сохраняет силу, если все обычные пределы в ней заменены правосторонними, или если все обычные пределы в ней заменены левосторонними.

Теорема об арифметических действиях над пределами функций

Пусть существуют и конечны пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$.

Тогда

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = A+B$.
2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = A-B$.
3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A\cdot B$.
4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Доказательство приводится только для Пункта 3

1. Случай 1: $A>0$, $B>0$.

   Зададим $\varepsilon>0$.

Не умаляя общности, поставим ограничение

$$\varepsilon < AB\,. \tag{20}$$

Выпишем целевое неравенство

$$|f(x)\cdot g(x) - AB| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x)\cdot g(x) - AB < +\varepsilon\,. \tag{21}$$

По условию $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, а это значит, что $\forall\,\varepsilon_0 > 0$ существует $\delta_1(\varepsilon_0) > 0$ такое, что из $|x-a| < \delta_1(\varepsilon_0)$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon_0$, а это неравенство с модулем равносильно двойному неравенству

$$A - \varepsilon_0 < f(x) < A + \varepsilon_0\,. \tag{22}$$

По условию $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, а это значит, что $\forall\,\varepsilon_0 > 0$ существует $\delta_2(\varepsilon_0) > 0$ такое, что из $|x-a| < \delta_2(\varepsilon_0)$ следует $|g(x) - B| < \varepsilon_0$, а это неравенство с модулем равносильно двойному неравенству

$$B - \varepsilon_0 < g(x) < B + \varepsilon_0\,. \tag{23}$$

Поставим два дополнительных ограничения:

$$A - \varepsilon_0 > 0 \iff \varepsilon_0 < A\,, \tag{24}$$

$$B - \varepsilon_0 > 0 \iff \varepsilon_0 < B\,. \tag{25}$$

Позже будет показано, что выполнение требований (24)–(25) при $A > 0$, $B > 0$ автоматически следует из (20).

В силу (24)–(25), все три части неравенства (22) и все три части неравенства (23) положительны, следовательно, эти два неравенства можно друг на друга умножить, в результате чего будет справедливо неравенство

$$\begin{gathered}(A-\varepsilon_0)(B-\varepsilon_0) < f(x)g(x) < (A+\varepsilon_0)(B+\varepsilon_0) \iff \\ \iff AB - (A+B)\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 < f(x)g(x) < AB + (A+B)\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 \iff \\ \iff -(A+B)\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 < f(x)g(x) - AB < (A+B)\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2\,. \end{gathered} \tag{26}$$

Пусть $\delta(\varepsilon_0) = \min\left(\delta_1(\varepsilon_0),\, \delta_2(\varepsilon_0)\right)$. Тогда при $|x-a| < \delta(\varepsilon_0)$ справедливы неравенства (22), (23), следовательно, выполняется и (26).

Пусть

$$\varepsilon_0 = \frac{2\,\varepsilon}{A + B + \sqrt{(A+B)^2 + 4\,\varepsilon}}\,. \tag{27}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что

$$(A+B)\varepsilon_0+\varepsilon_0^2=\varepsilon\,. \tag{28}$$

Собственно, представление (27) найдено решением квадратного уравнения (28) относительно ε_0 .

Кроме того, нетрудно доказать неравенство

$$-(A+B)\varepsilon_0+\varepsilon_0^2>-\varepsilon\,. \tag{29}$$

Тогда при $|x-a|<\delta(\varepsilon_0)=\delta\left(\dfrac{2\,\varepsilon}{A+B+\sqrt{(A+B)^2+4\,\varepsilon}}\right)$ выполняется неравенство

$$\underbrace{-\varepsilon<-(A+B)\varepsilon_0+\varepsilon_0^2}_{(29)}<f(x)\cdot g(x)-AB<\underbrace{(A+B)\varepsilon_0+\varepsilon_0^2=+\varepsilon}_{(28)}\implies$$

$$\implies -\varepsilon<f(x)\cdot g(x)-AB<+\varepsilon\,. \tag{30}$$

то есть, на этом доказательство для случая $A>0$, $B>0$ закончено.

Осталось "раздать" немногочисленные долги.

Докажем неравенство (29):

$$-(A+B)\varepsilon_0+\varepsilon_0^2>-\varepsilon \iff -(A+B)\varepsilon_0+\varepsilon_0^2+\varepsilon>0 \iff$$

$$\iff \frac{8\varepsilon^2}{\left(A+B+\sqrt{(A+B)^2+4\varepsilon}\right)^2}>0\,. \tag{31}$$

Справедливость последнего из неравенств не вызывает сомнений, поскольку числитель и знаменатель в левой части (31) строго положительны.

Докажем неравенство (24):

$$\frac{2\,\varepsilon}{A+B+\sqrt{(A+B)^2+4\,\varepsilon}}<A \iff$$

$$\iff 2\,\varepsilon<A\cdot\left(A+B+\sqrt{(A+B)^2+4\,\varepsilon}\right) \iff$$

$$\iff 2\,\varepsilon-A^2-AB<A\cdot\sqrt{(A+B)^2+4\,\varepsilon}\,. \tag{32}$$

Если левая часть в (32) строго меньше нуля, то справедливость неравенства очевидна (поскольку правая часть строго положительна) следовательно, и справедливость (24) доказана.

Если левая часть в (32) неотрицательна, цепь равносильных преобразований должна быть продолжена:

$$\Longleftrightarrow \quad 2\,\varepsilon - A^2 - AB < A\cdot\sqrt{(A+B)^2+4\,\varepsilon} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(2\,\varepsilon - A^2 - AB\right)^2 < A^2\cdot\left(\sqrt{A^2+2AB+B^2+4\,\varepsilon}\right)^2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 4\,\varepsilon^2 + A^4 + A^2B^2 - 4\,\varepsilon A^2 - 4\,\varepsilon AB + 2A^3B < A^4 + 2A^3B + A^2B^2 + 4A^2\varepsilon \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 4\,\varepsilon^2 + -4\,\varepsilon A^2 - 4\,\varepsilon AB < +4A^2\varepsilon \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 4\,\varepsilon^2 < 8A^2\varepsilon + 4\,\varepsilon AB \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon^2 < 2A^2\varepsilon + \varepsilon AB \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varepsilon < 2A^2 + AB\,. \tag{33}$$

Таким образом, осталось доказать (33). Согласно договорённости (20)

$$\varepsilon < AB\,, \quad AB < AB + \underbrace{2A^2}_{>0} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon < AB + 2A^2\,.$$

Неравенство (24) доказано. Доказательство неравенства (25) строится аналогично.

2. Случай 2: $A < 0\,, \ B < 0\,.$

Воспользуемся двумя вспомогательными функциями $f_1(x) = -f(x)\,,$ $g_1(x) = -g(x)\,.$ Тогда

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = (-A) > 0\,, \qquad \lim_{x\to a} g_1(x) = (-B) > 0\,.$$

В соответствии со Случаем 1,

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a}\left((-f_1(x))\cdot(-g_1(x))\right) = \lim_{x\to a}\left(f_1(x)\cdot g_1(x)\right) =$$

$$= (-A)\cdot(-B) = AB\,.$$

3. Случаи $A < 0\,, \ B > 0$ и $A > 0\,, \ B < 0$ предлагается изучить самостоятельно.

Теорема о замене переменной под знаком предела для функций

Пусть существуют и конечны пределы $\lim_{y\to B} f(y) = A$ и $\lim_{x\to a} g(x) = B\,.$

Тогда существует и конечен предел $\lim_{x\to a} f(g(x)) = A\,.$

Доказательство

$\lim\limits_{y\to B} f(y) = A$, следовательно, $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $|y - B| < \delta_1(\varepsilon)$ следует справедливость неравенства $|f(y) - A| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, следовательно, $\forall\,\varepsilon_2 > 0$ (если для любого ε_2, то и для $\varepsilon_2 = \delta_1(\varepsilon)$) $\exists\,\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2) = \delta_2(\delta_1(\varepsilon_1)) > 0$ такое, что из неравенства $|x - a| < \delta_2(\varepsilon_2) = \delta_2(\delta_1(\varepsilon_1))$ следует справедливость неравенства $|g(x) - B| < \varepsilon_2 = \delta_1(\varepsilon)$.

Итак, при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое значение функции $\delta_2(\delta_1(\varepsilon))$, благодаря которому справедлива цепь следований

$$|x - a| < \delta_2(\delta_1(\varepsilon)) \implies |\underbrace{g(x)}_{=y} - B| < \delta_1(\varepsilon) \implies |f(\underbrace{g(x)}_{=y}) - A| < \varepsilon,$$

что, по определнию предела, означает $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = A$.

Непрерывность функции

Определение непрерывности функции в точке

Если функция $f\colon X \to Y$ имеет в конечной точке $a \in X$ конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$,
и существует конечное значение функции $f(a)$ в этой точке,
и при этом $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$,
то принято говорить, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a.

Замечание

Иногда удобнее пользоваться вторым, равноценным первому определением непрерывности функции в точке. Если существует конечное значение $f(x)$, и $\lim\limits_{\Delta x\to 0} (f(x + \Delta x) - f(x)) = 0$, то функция непрерывна в точке x.

Определение непрерывности функции на множестве

Если функция $f\colon X \to Y$ непрерывна $\forall\, x \in X$,
то принято говорить, что функция f непрерывна на множестве X.

Замечание

Непрерывность функции f на промежутке $[a, b]$ геометрически выражается тем, что график функции $y = f(x)$ для $x \in [a, b]$ выглядит, как сплошная нить, не разорванная на несколько кусков.

Теорема о непрерывности элементарных функций

Все элементарные функции непрерывны на всей области своего задания. Непрерывны также комбинации элементарных функций, построенные с помощью обычных арифметических операций.
К элементарным функциям относятся:
— степенная функция,
— показательная функция,
— логарифмическая функция,
— тригонометрические функции,
— обратные тригонометрические функции.

Без доказательства.

Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции (теорема Коши́)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$.
Если $f(a) < f(b)$, то $\forall\, C \in [f(a), f(b)]$ $\exists\, c \in [a, b]$ такое, что $f(c) = C$.
Если $f(a) > f(b)$, то $\forall\, C \in [f(b), f(a)]$ $\exists\, c \in [a, b]$ такое, что $f(c) = C$.

Без доказательства.

Следствие о существовании корня функции на промежутке

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$,
и пусть $f(a) \cdot f(b) < 0$ (значения функции на концах промежутка имеют противоположные знаки).
Тогда $\exists\, c \in (a, b)$ такое, что $f(c) = 0$.

Определение (классификация) разрывов функции

1. Если существует и конечен предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, но $f(a) \neq A$, либо $f(a)$ не существует, то принято говорить, что функция $f(x)$

терпит в точке $x = a$ устранимый разрыв.

2. Если существуют и конечны односторонние пределы $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = B$, но $A \neq B$, то принято говорить, что функция $f(x)$ терпит в точке $x = a$ разрыв 1–го рода.

3. Если не существует или бесконечен хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, то принято говорить, что функция $f(x)$ терпит в точке $x = a$ разрыв 2–го рода.

Пример

Несколько позже будет доказано, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Значение функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ не существует при $x = 0$. Это означает, что функция $f(x)$ терпит устранимый разрыв в точке $x = 0$. "Устранить" разрыв можно, если определить искусственную функцию

$$\tilde{f}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{array} \right| .$$

Пример

В математике применяется стандартная функция "Сигнум", определяемая так:

$$\operatorname{sign} x = \left\{ \begin{array}{ll} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{array} \right| .$$

Очевидно, что $\lim\limits_{x \to -0} \operatorname{sign} x = -1$, $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{sign} x = +1$, следовательно, функция терпит в точке $x = 0$ разрыв первого рода.

Асимптоты функции

Определение вертикальной асимптоты функции

Если существует и бесконечен хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, то принято говорить, что функция $f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = a$.

Замечание

Аналитически вертикальная асимптота $x = a$ выражает себя тем, что функция $f(x)$ терпит разрыв второго рода при $x = a$.

Геометрически вертикальная асимптота $x = a$ выражает себя тем, что при $x \to a \pm 0$ расстояние между асимптотой и графиком функции $y = f(x)$ стремится к нулю.

Пример

В средней школе изучалась функция $f(x) = 1/x$.

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = +\infty$, следовательно:

а) функция терпит в точке $x = 0$ разрыв второго рода;

б) функция имеет вертикальную асимптоту $x = 0$.

Определение

Наклонной асимптотой функции $f(x)$ в направлении $x \to +\infty$ называется прямая $y = \alpha_{\oplus}x + \beta_{\oplus}$, коэффициенты для которой находятся по формулам

$$\alpha_{\oplus} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad \beta_{\oplus} = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - \alpha_{\oplus}x). \tag{34}$$

Если хотя бы один из пределов в (34) не существует или бесконечен, наклонной асимптоты в направлении $x \to +\infty$ нет.

Наклонной асимптотой функции $f(x)$ в направлении $x \to -\infty$ называется прямая $y = \alpha_{\ominus}x + \beta_{\ominus}$, коэффициенты для которой находятся по формулам

$$\alpha_{\ominus} = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad \beta_{\ominus} = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - \alpha_{\ominus}x). \tag{35}$$

Если хотя бы один из пределов в (35) не существует или бесконечен, наклонной асимптоты в направлении $x \to -\infty$ нет.

Замечания

1. Горизонтальная (в случае $\alpha_{\oplus} = 0$ или в случае $\alpha_{\ominus} = 0$) асимптота рассматривается как частный случай наклонной асимптоты.

2. Функция $f(x)$ может иметь две наклонные асимптоты (и в направлении $x \to +\infty$, и в направлении $x \to -\infty$) или только одну (в одном из этих направлений), или не иметь ни одной.

Замечание

Геометрически наклонная асимптота $y = \alpha x + \beta$ выражает себя тем, что при $x \to \pm\infty$ расстояние между асимптотой и графиком функции $y = f(x)$ стремится к нулю.

Пример

Наклонные асимптоты функции $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ задаются уравнениями $y = x + \frac{1}{2}$ и $y = -x - \frac{1}{2}$, соответственно, в направлении $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Уравнения построены с применением формул (34) и (35).

Геометрические ожидания от асимптот подтверждены результатом обращения к сайту WolframAlpha.com (Рис. 1).

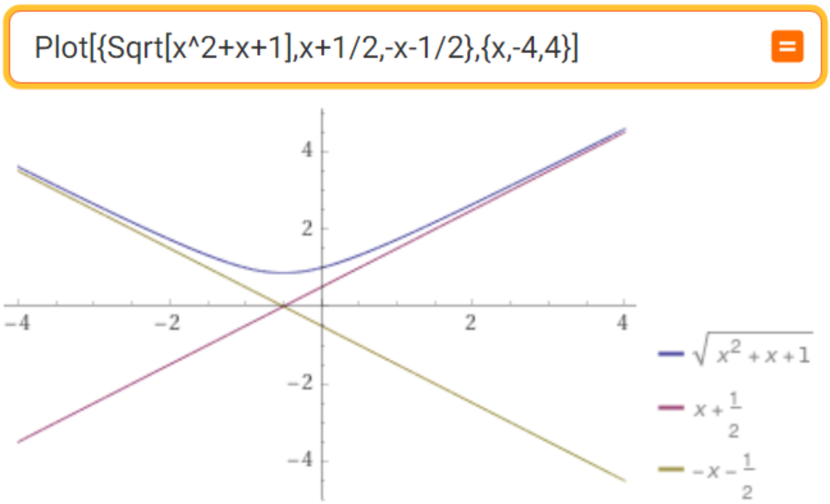

Рис. 1

Замечательные пределы

Замечание

Вычисление пределов необходимо при решении многих инженерно–технических и инженерно–экономических задач. Большинство таких пределов сводится к комбинации пяти стандартных пределов, названных замечательными, поскольку выведены эти пределы трудом замечательных учёных.

Теорема о первом замечательном пределе

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Доказательство

Сначала найдём правосторонний предел $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\sin x}{x}$.

Будем считать, что $0 < x < \pi/2$, и у круга радиуса R нас интересует только первая его четверть. Отмеряем угол x от горизонтальной оси против часовой стрелки (Рис. 2) Единица измерения углов – радиан.

Обозначим следующие точки: O – центр окружности, A – пересечение окружности с горизонтальной осью, C – точка на окружности, соответствующая углу x , B – точка на окружности, расположенная между A и C, D – основание перпендикуляра, опущенного из точки C на отрезок OA, E – точка пересечения касательной к окружности (в точке касания C) с горизонтальной осью. $CE \perp OC$, так как касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

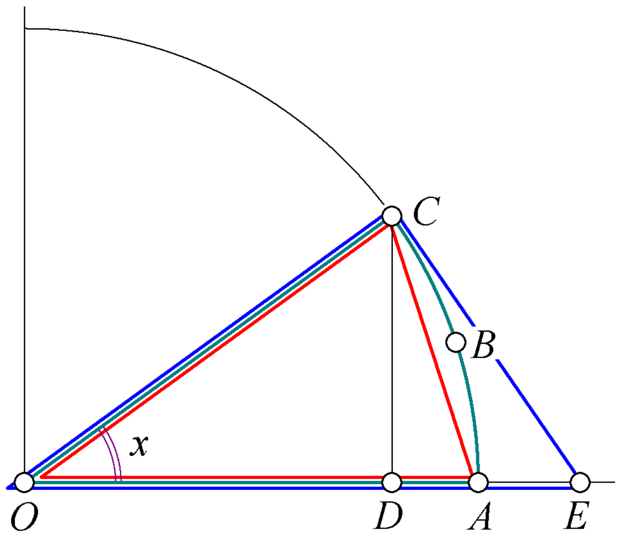

Рис. 2

Рассмотрим три фигуры: треугольник ΔOAC, сектор $OABC$, и треугольник ΔOCE. Найдём площади этих фигур:

$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin x,$

$S_{OABC} = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot x,$

$S_{\Delta OCE} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \operatorname{tg} x.$

Очевидно, что $\Delta OAC \subset OABC \subset \Delta OCE$, следовательно, $S_{\Delta OAC} < S_{OABC} < S_{\Delta OCE}$, что равносильно неравенствам

$$\frac{1}{S_{\Delta OCE}} < \frac{1}{S_{OABC}} < \frac{1}{S_{\Delta OAC}} \iff \frac{2}{R^2 \cdot \operatorname{tg} x} < \frac{2}{R^2 \cdot x} < \frac{2}{R^2 \cdot \sin x} \iff$$

$$\iff \quad \frac{1}{\operatorname{tg} x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x} \quad \iff \quad \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{\sin x}{\sin x} \quad \iff$$

$$\iff \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1\,. \tag{36}$$

Справедливость последнего неравенства в (36), а также равенств $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ (в силу непрерывности функции $\cos x$), $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, даёт право применить теорему о двух полицейских, следовательно,

$$\lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Теперь найдём левосторонний предел

$$\lim_{y\to -0} \frac{\sin y}{y} = \boxed{\begin{array}{c} y = -x\,, \\ x = -y\,, \\ x \to +0 \end{array}} = \lim_{x\to +0} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x\to +0} \frac{-\sin x}{-x} = \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Поскольку оба односторонних предела существуют и равны единице, по теореме о связи предела с односторонними пределами, мы вправе утверждать, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Доказательство закончено.

Теорема о втором замечательном пределе (для функций)

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$$

$$= \lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e\,.$$

Без доказательства.

Теорема о третьем замечательном пределе

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,.$$

Доказательство

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1\,.$$

Теорема о четвёртом замечательном пределе

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\,.$$

Доказательство

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\boxed{\begin{matrix} y=e^x-1 \\ x=\ln(1+y) \\ y\to 0\end{matrix}}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{y\to 0}1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{1}=1\,.$$

Теорема о пятом замечательном пределе

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu\,.$$

Доказательство

Введём новую переменную $y=(1+x)^\mu-1$. Тогда $y\to 0$ при $x\to 0$,

$$y=(1+x)^\mu-1 \iff 1+y=(1+x)^\mu \iff \ln(1+y)=\ln(1+x)^\mu \iff$$

$$\iff \ln(1+y)=\mu\ln(1+x) \iff \frac{\mu\ln(1+x)}{\ln(1+y)}=1\,.$$

Вернёмся к вычислению предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{y}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{y}{x}\cdot\frac{\mu\ln(1+x)}{\ln(1+y)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mu\ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mu\ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\ln(1+y)}{y}}=$$

$$=\mu\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{y\to 0}1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}}=\mu\cdot 1\cdot\frac{1}{1}=\mu\,.$$

Сравнение бесконечно малых

Определение "O"–симво́лики

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, и $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$,

то есть, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые в точке $x=x_0$.

1. Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=0\,,$$

то принято говорить, что $\alpha(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$, и принято обозначать это короткой записью

$$\alpha(x)\underset{x\to x_0}{=}o\,(\beta(x))$$

(следует произносить: "о–малое").

2. Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=K\,,$$

где $K\neq 0$, $K\neq\infty$, то принято говорить, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малые одного порядка малости, и принято обозначать это короткой записью

$$\alpha(x)\underset{x\to x_0}{=}O\,(\beta(x))$$

(следует произносить: "О–большое").

3. Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=1\,,$$

то принято говорить, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть эквивалентные бесконечно малые, и принято обозначать это короткой записью

$$\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\beta(x)\,. \qquad (37)$$

Замечание

Эквивалентность бесконечно малых и отношение (37) не следует понимать, как тождественное равенство функций.

Пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=1\cdot 1=1\,,$$

следовательно, $\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\boxed{\begin{array}{l} y=\frac{x}{2}\,,\quad y\to 0\,,\\ x=2y\end{array}}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2 y}{(2y)^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 y}{y^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{\sin y}{y}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\right)\cdot\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}\,,$$

следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1\,,\qquad 1-\cos x\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2}{2}\,.$$

Замечание

На основе двух последних примеров, а также на основе доказанных ранее замечательных пределов строится первая таблица эквивалентных (Табл. 1).

$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x\,.$
$\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\exp x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
$1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$	$(1+x)^\mu-1 \underset{x\to 0}{\sim} \mu\cdot x$

Табл. 1

Замечание

Если $\gamma(x)$ – бесконечно малая в точке x_0, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\gamma(x)}{\gamma(x)}=\boxed{\begin{array}{c} y=\gamma(x)\\ y\to 0\end{array}}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1\,,$$

следовательно, $\sin\gamma(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \gamma(x)$. На основе такого рода рассуждений строится вторая таблица эквивалентных (Табл. 2).

$\sin\gamma(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \gamma(x)$	$\ln(1+\gamma(x)) \underset{x\to x_0}{\sim} \gamma(x)\,.$
$\operatorname{tg}\gamma(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \gamma(x)$	$\exp\gamma(x) - 1 \underset{x\to x_0}{\sim} \gamma(x)$
$1-\cos\gamma(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \frac{\gamma(x)^2}{2}$	$(1+\gamma(x))^{\mu} - 1 \underset{x\to x_0}{\sim} \mu\cdot\gamma(x)$

Табл. 2

Теорема о замене бесконечно малых на эквивалентные в произведении и в частном под знаком предела

Если $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \alpha_1(x)$, и $\beta(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \beta_1(x)$,
то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\,.$$

Доказательство

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\alpha_1(x)}{\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}\cdot\beta_1(x)} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}}{\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\right) =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \frac{1}{1}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\,.$$

Доказательство закончено.

Пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin(2x)}-\sqrt[3]{1-4x^2}}{x\cdot\operatorname{tg}(3x)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left((1+x\sin(2x))^{\frac{1}{2}}-1\right)-\left((1+(-4x^2))^{\frac{1}{3}}-1\right)}{x\cdot 3x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x\sin(2x))^{\frac{1}{2}}-1}{3x^2} - \lim_{x\to 0}\frac{(1+(-4x^2))^{\frac{1}{3}}-1}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sin(2x)}{3x^2} - \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\cdot(-4x^2)}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\cdot x\cdot 2x}{3x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}\cdot(-4)}{3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\cdot 2}{3} - \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}\cdot(-4)}{3} = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}.$$

Замечание

Заменять под знаком предела бесконечно малые на эквивалентные в сумме и в разности, вообще говоря, нельзя.

В последнем примере, во избежание такой замены, сначала предел разности был заменён на разность пределов, и только затем в каждом из двух пределов замена на эквивалентные в числителе дроби была произведена на законных основаниях. При замене предела разности на разность пределов есть риск появления неопределённости $[\infty - \infty]$, но в данном случае риск оправдался: неопределённость не появилась.

Дифференцирование функции

Определение производной функции в точке

Функция $f : X \to Y$ имеет в конечной точке x производную, если существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

В данном пределе Δx – переменная, x – постоянное значение.

Понятия "функция имеет производную в точке" и "функция дифференцируема в точке" равноценны.

Обозначения:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Замечание

Обозначение $\dfrac{df(x)}{dx}$ предложено Лейбницем.

Обозначение $f'(x)$ предложено Лагранжем.

Замечание

Очевидно, что производная константы есть ноль.

Определение правосторонней производной функции в точке

$$f'(x+0) = \frac{df(x+0)}{dx} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\,.$$

Определение левосторонней производной функции в точке

$$f'(x-0) = \frac{df(x-0)}{dx} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\,.$$

Теорема о связи производной с односторонними производными

Следующие два утверждения равносильны.

1. Существуют и равны друг другу односторонние производные $f'(x-0)$, $f'(x+0)$.
2. Существует производная $f'(x)$.

Без доказательства.

Замечание

Очевидно, что если одно из двух утверждений этой теоремы верно, то

$$f'(x) = f'(x-0) = f'(x+0)\,,$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(x-0)}{dx} = \frac{df(x+0)}{dx}\,.$$

Определение дифференцируемости функции на множестве

Если функция $f : X \to Y$ дифференцируема $\forall\, x \in X$, то принято говорить, что функция f дифференцируема на множестве X.

Замечание

Иногда, во избежание путаницы, для значения производной в точке используются обозначения:

$$f'(x)|_{x=a} \quad \text{вместо} \quad f'(a)\,, \qquad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} \quad \text{вместо} \quad \frac{df(a)}{dx}\,.$$

Аналогичные обозначения применяются и для односторонних производных.

Пример

$$(x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1\,.$$

Пример

Обозначение $\left(\sqrt{+0}\right)'$ в принцие верно, но неудобно: не совсем понятно, что здесь имеется в виду. Лучше записать так:

$$\left(\sqrt{x}\right)'\Big|_{x=+0} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\sqrt{\Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty$$

(по теореме о связи бесконечно малой и бесконечно большой). Мы показали, что правосторонняя производная функции $\sqrt{x}$ в точке 0 существует, но бесконечна. Нетрудно догадаться, что левосторонняя производная функции $\sqrt{x}$ в точке 0 не существует.

Теорема о достаточном условии непрерывности функции в точке

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть $f(x)$ имеет конечное значение и конечную производную в точке x.

Тогда

$f(x)$ непрерывна в точке x.

Доказательство

Существование конечной производной функции в точке означает, что существует и конечен предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = A\,.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(f(x+\Delta x) - f(x)\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{=A \neq \infty} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x}_{=0} = A \cdot 0 = 0\,.$$

Доказательство закончено.

Теорема об арифметических действиях над производными функций

Если существуют и конечны производные $u'(x)$ и $v'(x)$, то:

1. $(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$.
2. $(u(x)-v(x))' = u'(x)-v'(x)$.
3. $(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$.
4. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$.

Доказательство приводится только для Пункта 3

$$(u(x)\cdot v(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)+u(x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)\right) + \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\cdot u(x)\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0} u(x) =$$

$$= u'(x)\cdot v(x)+v'(x)\cdot u(x).$$

Использовано равенство $\lim\limits_{\Delta x\to 0} u(x) = u(x)$. Оно верно, поскольку под знаком предела нет зависимости от Δx.

Использовано, также, равенство $\lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) = v(x)$, которое верно, если функция непрерына. Непрерывность следует из дифференцируемости по предыдущей теореме.

Замечание

В следующей теореме неудобно было бы пользоваться обозначением $f'(a)$.

Обозначение $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$ намного удобнее.

Теорема о производной сложной функции

Если существуют и конечны производные $\left.\dfrac{df(y)}{dy}\right|_{y=g(x)}$ и $\dfrac{dg(x)}{dx}$,

то существует и конечна производная $\dfrac{df(g(x))}{dx}$,

причём, вычисляется она по формуле $\dfrac{df(g(x))}{dx} = \left.\dfrac{df(y)}{dy}\right|_{y=g(x)} \cdot \dfrac{dg(x)}{dx}$.

Доказательство

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \cdot 1 =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{g(x+\Delta x) - g(x)} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx} =$$

$$= \boxed{\begin{matrix} y = g(x) & \Delta y = g(x+\Delta x) - g(x) & g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta y = y + \Delta y \\ \Delta x \to 0 & \Delta y \to 0 & \end{matrix}} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(y+\Delta y) - f(y))}{\Delta y} \cdot \frac{dg(x)}{dx} = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=g(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}.$$

Доказательство закончено.

Теорема о производной степенной функции

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Доказательство

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n \cdot \left(\frac{(x+\Delta x)^n}{x^n} - 1\right)}{\Delta x} = x^n \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(x+\Delta x)^n}{x^n} - 1}{\Delta x} =$$

$$= x^n \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^n - 1}{\Delta x} = x^n \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1}{\Delta x} = \frac{x^n}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1}{\frac{\Delta x}{x}} =$$

$$= \boxed{\begin{matrix} \frac{\Delta x}{x} = y \\ y \to 0 \end{matrix}} = \frac{x^n}{x} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^n - 1}{y} = x^{n-1} \cdot n\,.$$

Теорема о производной логарифмической функции

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\,; \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0\,,\ a \neq 1).$$

Доказательство

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \boxed{\begin{matrix} \frac{\Delta x}{x} = y \\ y \to 0 \end{matrix}} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}\,;$$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}\,.$$

Теорема о производной показательной функции

$$(e^x)' = e^x\,; \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (a > 0\,,\ a \neq 1).$$

Доказательство

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^x \cdot \left(\frac{e^{x+\Delta x}}{e^x} - 1\right)}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{e^x \cdot e^{\Delta x}}{e^x} - 1}{\Delta x} =$$

$$= e^x \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \boxed{\begin{matrix} \Delta x = y \\ y \to 0 \end{matrix}} = e^x \cdot \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = e^x \cdot 1 = e^x\,;$$

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln a}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a} \cdot (x \ln a)' = e^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a\,.$$

Теорема о производных тригонометрических функций

$$(\sin x)' = \cos x\,; \qquad (\cos x)' = -\sin x\,;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\,; \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\,.$$

Доказательство

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{0}{2}\right) =$$

$$= \boxed{\begin{array}{c} \frac{\Delta x}{2} = y \\ y \to 0 \end{array}} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \cos x = 1 \cdot \cos x = \cos x\,;$$

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x\,;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,;$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' =$$
$$= \frac{1}{\sin^2 x} \cdot (-1) = \frac{-1}{\sin^2 x}\,.$$

Замечание о геометрическом смысле производной

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат xOy построен график функции $y = f(x)$. Зафиксируем на кривой точку $M_0 = (x_0,\, f(x_0))$, а также обозначим "плавающую" точку $M_1 = (x_0 + \Delta x,\, f(x_0 + \Delta x))$, и проведём прямую (секущую) через эти две точки (Рис. 3, части (а) и (б)).
Уравнение секущей прямой имеет вид

$$y = f(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\,. \tag{38}$$

По мере стремления Δx к нулю и сближения точки M_1 с точкой M_0 прямая (38) стремится занять некое предельное положение (Рис. 3, часть (в))

$$y = f(x_0) + a \cdot (x - x_0)\,,$$

где a – некий постоянный (при фиксированном x_0) кожффициент. Ну а если это положение секущей является предельным, читателя ничуть не удивит то, что

$$a = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\,, \tag{39}$$

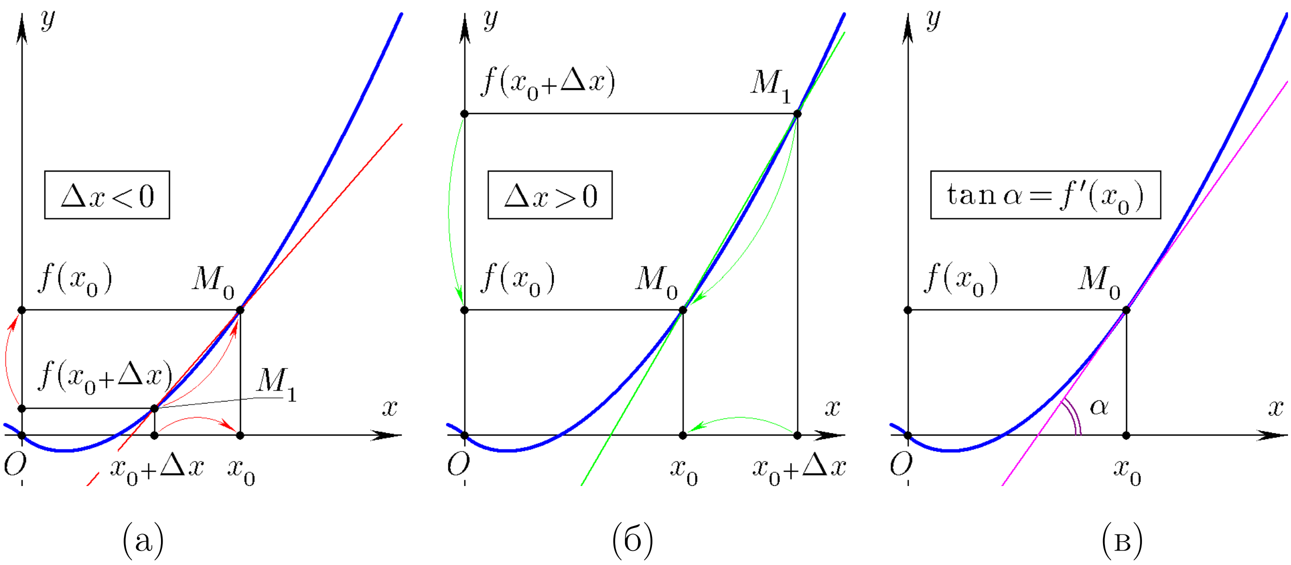

Рис. 3

по определению производной. Важно отметить, что предел в (39) и положение касательной (Рис. 3, часть (в)) не должно зависеть от того, стремится Δx к нулю слева (Рис. 3, часть (а)) или справа (Рис. 3, часть (б)).

Если выражаться языком вежливых автомобилистов, значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 – это "крутизна подъёма" при "движении" вдоль по касательной к графику функции в точке x_0. Более определённо, это тангенс угла (на Рис. 3, часть (в), тангенс угла α) наклона касательной к положительному направлению оси Ox. Угол α подчиняется неравенству $-\pi/2 \le \alpha \le +\pi/2$.

Читателю предлагается самостоятельно подумать над вопросом, каким будет график в окрестности точки x_0, если

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \ne \lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Монотонная функция

Определение

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Функция $f(x)$ строго возрастает на промежутке (a,b), если $\forall\, x_1,x_2\in(a,b)$, таких, что $x_1<x_2$, можно доказать справедливость неравенства $f(x_1)<f(x_2)$.
Обозначение: $f(x)\uparrow$ на промежутке (a,b).

Определение

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Функция $f(x)$ нестрого возрастает на промежутке (a,b), если $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$, таких, что $x_1 < x_2$, можно доказать справедливость неравенства $f(x_1) \le f(x_2)$.
Обозначение: $f(x) \nearrow$ на промежутке (a,b).

Определение

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Функция $f(x)$ строго убывает на промежутке (a,b), если $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$, таких, что $x_1 < x_2$, можно доказать справедливость неравенства $f(x_1) > f(x_2)$.
Обозначение: $f(x)\downarrow$ на промежутке (a,b).

Определение

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Функция $f(x)$ нестрого убывает на промежутке (a,b), если $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$, таких, что $x_1 < x_2$, можно доказать справедливость неравенства $f(x_1) \ge f(x_2)$.
Обозначение: $f(x) \searrow$ на промежутке (a,b).

Замечание

В дальнейшем, для краткости, вместо двух слов "строго возрастает" будет применяться одно слово "возрастает", а вместо двух слов "строго убывает" будет применяться одно слово "убывает".

Предлагаемое сокращение вполне оправдано, поскольку все элементарные (и даже все специальные) функции либо строго возрастают на некоем подмножестве области своего задания, либо строго убывают на нём. Нестрого убывающими либо нестрого возрастающими могут быть только выдуманные кусочно-однородные (и кусочно-константные) функции, например, $\operatorname{sign} x$.

Определение

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Функция $f(x)$ монотонна на промежутке (a,b), если она либо возрастает на всём промежутке (a,b), либо убывает на нём.

Определение

Пусть $f: X \to Y$.
Функция f называется взаимно-однозначной на множестве X, если $\forall x_1 \in X$, $\forall x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
Для взаимно-однозначной функции есть и другое название: биективная функция (биекция).

Примеры

1. Функция $f(x) = x^7 + x - 1$ является взаимно-однозначной.
Действительно, пусть $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, и пусть $x_1 < x_2 \implies x_1^7 < x_2^7$, тогда, по правилу сложения неравенств и равенств,

$$+\left\{\begin{array}{l} x_1^7 < x_2^7 \\ x_1 < x_2 \\ -1 = -1 \end{array}\right| \implies x_1^7 + x_1 - 1 < x_2^7 + x_2 - 1 .$$

2. Функция $f(x) = x^2$ не является взаимно-однозначной.
Действительно: $f(+1) = f(-1) = 1$, но $+1 \neq -1$.

3. Функция $f(x) = \sin x$ не является взаимно-однозначной.
Действительно: $f(\pi/6) = f(5\pi/6) = 1/2$, но $\pi/6 \neq 5\pi/6$.

Теорема

Пусть $f: X \to Y$. Если X – промежуток, и если функция $f(x)$ монотонна на X, то она взаимно-однозначна на нём.

Без доказательства.

Обратная функция

Определение

Пусть $f: X \to Y$, и пусть $g: Y \to X$.
Функция g является обратной к функции f, и функция f является обратной к функции g, если $f(g(y)) = y$, $\forall y \in Y$, и $g(f(x)) = x$, $\forall x \in X$. Обозначение: $g(y) = f^{-1}(y)$, $f(x) = g^{-1}(x)$.
Если для функции f существует обратная функция, то f называется обратимой функцией.

Замечание

$f^{-1}(y) \neq 1/f(y)$.

В школьной программе допускались обозначения в стиле $\cos^2 x = (\cos x)^2$, но даже там никогда не допускалось $\cos^{-1} x = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}$.

Обозначения $f^{-1}(y)$ и $f^{(-1)}(y)$ (а это вовсе не одно и то же) нельзя отнести к разряду удачных. Но лучше пока не придумали.

Пример

Пусть $f(x) = e^x$, $f\colon (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty)$. Тогда знакомая по школьной программе функция $g(y) = \ln y$, $g\colon (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$, является обратной по отношению к функции $f(x)$.
Действительно, $e^{\ln y} = y$, $\forall\, y \in (0, +\infty)$, и $\ln(e^x) = x$, $\forall\, x \in (-\infty, +\infty)$.

Пример

Пусть $f(x) = \sin x$, $f\colon (-\infty, +\infty) \to [-1, +1]$. Такая функция не имеет обратной функции, поскольку не является взаимно-однозначной.

Пример

Пусть $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f\colon (-\infty, +\infty) \setminus \{\pi/2 \pm \pi n\}_{n\in\mathbb{N}} \to (-\infty, +\infty)$. Такая функция не имеет обратной функции, поскольку не является взаимно-однозначной.

Определение

Пусть $f\colon X \to Y$. Пусть $Z \subset X$.

Функция F называется сужением функции f на множество Z, если

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x) = f(x)\,, \text{ для всех } x \in Z \\ F(x) \text{ не существует для всех } x \notin Z \end{array} \right| .$$

Обозначение: $F = f|_Z$, или $F = f \mid Z$.

Пример

Пусть

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x) = \sin x\,, \text{ для всех } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ F(x) \text{ не существует для всех } x \notin [-\pi/2, \pi/2] \end{array} \right| .$$

Тогда знакомая по школьной программе функция $g(y) = \arcsin y$, $g\colon [-1, +1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, является обратной по отношению к функции $F(x)$.

Действительно, $F(g(y)) = \sin(\arcsin y) = y$, $\forall\, y \in [-1, +1]$, и $g(F(x)) = \arcsin(\sin x) = x$, $\forall\, x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Пример

Пусть

$$\left\{\begin{array}{l} F(x) = \operatorname{tg} x\,, \ \text{для всех} \ x \in (-\pi/2, \pi/2) \\ F(x) \ \text{не существует для всех} \ x \notin (-\pi/2, \pi/2) \end{array}\right| .$$

Тогда знакомая по школьной программе функция $g(y) = \operatorname{arctg} y$, $g\colon (-\infty, +\infty) \to (-\pi/2, \pi/2)$, является обратной по отношению к функции $F(x)$.

Действительно, $F(g(y)) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = y$, $\forall\, y \in (-\infty, +\infty)$, и $g(F(x)) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, $\forall\, x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Теорема о производной обратной функции

Пусть $f(x)$ есть функция, обратная по отношению к функции $g(y)$.
Тогда

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{\left.\dfrac{dg(y)}{dy}\right|_{y=y_0=f(x_0)}} . \tag{40}$$

Без доказательства.

Замечание

В литературе встречаются "аналоги" формулы (40), которые выглядят так:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}\,, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} . \tag{41}$$

Формулы в стиле (41) легко запоминаются (особенно, вторая из них), но по их внешнему виду не вполне понятно, как ими пользоваться на практике.

Замечание

Формула производной обратной функции (40) используется тогда, когда функция $f(x)$ является аналитическим решением уравнения

$$x = g(y)$$

относительно y, но это аналитическое решение получить затруднительно либо невозможно. Что касается величины $y_0 = f(x_0)$, стоящей в правой части (40), то её можно (и нужно) находить, как численное решение уравнения

$$x_0 = g(y_0)$$

относительно неизвестного y_0.

Пример

Функция $y = f(x)$ есть решение уравнения

$$y^7 + y - x = 0 \tag{42}$$

относительно y. Найти $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=2}$, а также $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=3}$.

Решение

Ясно, что $g(y) = y^7 + y$. Подставляем $x = 2$ в (42). Получаем:

$$y^7 + y - 2 = 0\,. \tag{43}$$

Из школьной математики известно: если алгебраическое уравнение с целочисленными коэффициентами имеет целочисленные корни, то искать их нужно среди делителей свободного члена. В данном случае таких делителей всего четыре: $y = \pm 1$ и $y = \pm 2$. Нам повезло: корнем является $y = 1$. Итак,

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=2} = \frac{1}{\left.\dfrac{dg(y)}{dy}\right|_{y=1}} = \frac{1}{(7y^6 + 1)|_{y=1}} = \frac{1}{8}\,.$$

Далее подставляем $x = 3$ в (42). Получаем:

$$y^7 + y = 3 \iff g(y) = 3\,. \tag{44}$$

Целочисленных решений уравнение (44) не имеет. Проведём несложную оценку числа корней уравнения (44). Это нужно, скорее, для закрепления пройденного материала. Возьмём любые два вещественных числа y_1 и y_2 такие, что $y_1 < y_2$. Справедлива цепь утверждений:

$$y_1 < y_2 \quad \Longrightarrow \quad y_1^7 < y_2^7 \quad \Longrightarrow \quad y_1^7 + y_1 < y_2^7 + y_2\,,$$

означающая, что функция $g(y) = y^7 + y$ – возрастающая при росте y. Пусть y_0 – корень уравнения (44), то есть $g(y_0) = 3$. Тогда для любого y_1 такого, что $y_1 < y_0$, справедливо

$$g(y_1) < g(y_0) = 3 \quad \Longrightarrow \quad g(y_1) < 3$$

то есть, y_1 не является корнем (44). Далее, для любого y_2 такого, что $y_0 < y_2$ справедливо

$$3 = g(y_0) < g(y_2) \quad \Longrightarrow \quad g(y_2) > 3$$

то есть, y_2 также не является корнем (44). Следовательно, если веществeнний корень у уравнения (44) есть, то только один.

Заметим, что $g(0) = 0 < 3$, $g(2) = 130 > 3$. Тогда, по теореме Коши́ о промежуточных значениях функции, и её следствию о существовании корня функции на промежутке, можно утверждать, что на промежутке $[0,\,2]$ корень уравнения (44) есть, так как $3 \in [g(0),\,g(2)]$. Численно найти его поможет сайт WolframAlpha.com. Результат обращения к сайту:

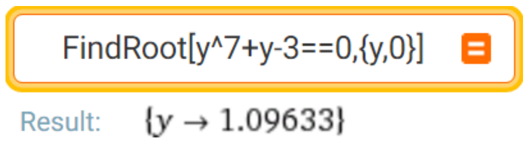

Рис. 4

Итак,

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=3} = \frac{1}{\left.\dfrac{dg(y)}{dy}\right|_{y=1.09633}} = \frac{1}{(7y^6+1)|_{y=1.09633}} =$$

$$= \frac{1}{(7\cdot 1.09633^6 + 1)} = 0.0760179\,.$$

<u>Теорема</u> о производных обратных тригонометрических функций

1. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Доказательство

1. $y = \arcsin x \implies x = \sin y$.

По теореме о производной обратной функции,

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

В данной теореме, равенство $\cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y}$ содержит знак $+$, поскольку, по определению функции "арксинус", $y = \arcsin x \in [\pi/2, +\pi/2]$, тогда как, по свойствам функции "косинус", $\cos y \geq 0$, $\forall y \in [\pi/2, +\pi/2]$.

2. $\arccos x = \pi/2 - \arcsin x$. По теореме о производной разности,

$$(\arccos x)'_x = (\pi/2 - \arcsin x)'_x = 0 - (\arcsin x)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

3. $y = \operatorname{arctg} x \implies x = \operatorname{tg} y$.

По теореме о производной обратной функции,

$$(\operatorname{arctg} x)'_x = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2} .$$

4. $\operatorname{arcctg} x = \pi/2 - \operatorname{arctg} x$. По теореме о производной разности,

$$(\operatorname{arcctg} x)'_x = (\pi/2 - \operatorname{arctg} x)'_x = 0 - (\operatorname{arctg} x)'_x = -\frac{1}{1+x^2} .$$

Функция, заданная параметрически

Определение

Пусть $f: X \to Y$, $\varphi: Z \to X$, $\psi: Z \to Y$.

Функция $y = f(x)$ называется функцией, заданной параметрически, если взаимосвязь между переменными x и y организована с использованием третьей переменной t в системе соотношений

$$\left\{\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right| , \qquad t \in Z \, .$$

Замечание

Если бы уравнение $x = \varphi(t)$ удалось решить относительно переменной t, иначе говоря, удалось бы найти обратную к φ функцию и записать соотношение $t = \varphi^{-1}(x)$, то имелась бы явная зависимость $y = f(x)$, где $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Проблема состоит в том, что во многих случаях найти в явном виде $t = \varphi^{-1}(x)$ затруднительно либо невозможно.

Теорема о производной функции, заданной параметрически

Пусть для функции $f(x)$ имеется параметрическое задание

$$\left\{\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right| .$$

Тогда

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{\dfrac{d\psi(t)}{dt}}{\dfrac{d\varphi(t)}{dt}} \right|_{t=\varphi^{-1}(x_0)} . \tag{45}$$

Без доказательства.

Замечание

В литературе встречаются "аналоги" формулы (45), которые выглядят так:

$$y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} \, , \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \, , \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \, . \tag{46}$$

Формулы в стиле (46) легко запоминаются (особенно, третья из них), но по их внешнему виду не вполне понятно, как ими пользоваться на практике.

Пример

Функция $y = f(x)$ задана параметрически:

$$\left\{\begin{array}{l} x = t^7 + t \\ y = \sin(\pi t) \end{array}\right| . \tag{47}$$

Найти $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=2}$, а также $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=3}$.

Решение

Ясно, что $\varphi(t) = t^7 + t$, $\psi(t) = \sin(\pi t)$.

Подставляем $x = 2$ в первое уравнение (47). Получаем:

$$t^7 + t - 2 = 0 . \tag{48}$$

Уравнение (48) совпадает с (43), различие кроется только в имени, но не в значении искомой переменной. Решением уравнения является $t = 1$. Итак,

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=2} = \left.\frac{\dfrac{d\psi(t)}{dt}}{\dfrac{d\varphi(t)}{dt}}\right|_{t=1} = \left.\frac{\pi\cos(\pi t)}{(7t^6+1)}\right|_{t=1} = -\frac{\pi}{8} .$$

Подставляем $x = 3$ в первое уравнение (47). Получаем:

$$t^7 + t - 3 = 0 . \tag{49}$$

Решением уравнения (49), совпадающего с уравнением (44), является $t = 1.09633$. Итак,

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=3} = \left.\frac{\dfrac{d\psi(t)}{dt}}{\dfrac{d\varphi(t)}{dt}}\right|_{t=1.09633} = \frac{\pi\cdot\cos(\pi\cdot 1.09633)}{(7\cdot 1.09633^6+1)} = -0.227964 .$$

Функция, заданная неявно

Определение

Функция двух переменных – это правило, по которому каждой паре элементов из двух множеств (например, множеств X, Y) ставится в соответствие один элемент третьего множества (например, множества Z).

Обозначение: $f: X \times Y \to Z$.

Пример

Функция $f(x, y) = \log_y x$ каждой паре чисел из множеств $X = (0,\ +\infty)$, $Y = (1,\ +\infty)$, ставит в соответствие число из множества $Z = (-\infty,\ +\infty)$.

Пример

Функция $f(x, y) = y^x$ каждой паре чисел из множеств $X = (-\infty,\ +\infty)$, $Y = (1,\ +\infty)$, ставит в соответствие число из множества $Z = (0,\ +\infty)$.

Определение частной производной функции двух переменных

Функция $f: X \times Y \to Z$ имеет в двумерной точке с координатами $(x\,,\ y)$ конечную частную производную по переменной x, если существует и конечен предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x}\,.$$

В данном пределе Δx – переменная, x, y – постоянные значения.

Обозначение: $f'_x(x,\ y) = \dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x}$.

Функция $f: X \times Y \to Z$ имеет в двумерной точке с координатами $(x\,,\ y)$ конечную частную производную по переменной y, если существует и конечен предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y}\,.$$

В данном пределе Δy – переменная, x, y – постоянные значения.

Обозначение: $f'_y(x,\ y) = \dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y}$.

Замечание

Следует обратить внимание на знак ∂ частной производной. В отличие от знака обычной производной d, который принято называть "дэ прямое", знак частной производной ∂ принято называть "дэ круглое".

Замечание

На практике частную производную по переменной x следует брать теми же способами, что обычную производную, но только все прочие переменные, кроме x, следует условно считать константами. Например, при взятии частной производной

$$\frac{\partial\left(2y^2x^2+\sqrt{y}+x^4\sin y\right)}{\partial x}=2y^2\cdot 2x+0+4x^3\cdot\sin y=4xy^2+4x^3\cdot\sin y$$

все величины, показанные синим цветом, рассматриваются, как константы.

Частную производную по переменной y следует брать теми же способами, что обычную производную, но только все прочие переменные, кроме y, следует условно считать константами. Например, при взятии частной производной

$$\frac{\partial\left(2y^2x^2+\sqrt{y}+x^4\sin y\right)}{\partial y}=2\cdot 2y\cdot x^2+\frac{1}{2\sqrt{y}}+x^4\cdot\cos y=4x^2y+\frac{1}{2\sqrt{y}}+x^4\cdot\cos y$$

все величины, показанные синим цветом, рассматриваются, как константы.

Определение

Пусть $f: X\to Y$, $F: X\times Y\to Z$.

Функция $y=f(x)$ называется функцией, заданной неявно, если взаимосвязь между переменными x и y организована с использованием уравнения $F(x,\,y)=0$, $(x,\,y)\in X\times Y$.

Замечание

Если бы уравнение $F(x,\,y)=0$ удалось решить относительно переменной y, то имелась бы явная зависимость $y=f(x)$. Проблема состоит в том, что во многих случаях найти в явном виде $y=f(x)$ затруднительно либо невозможно.

Теорема о производной функции, заданной неявно

Пусть для функции $y=f(x)$ имеется неявное задание

$$F(x,\,y)=0\,.$$

Тогда

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = -\left.\frac{\dfrac{\partial F(x,\,y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x,\,y)}{\partial y}}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0=f(x_0)}} . \tag{50}$$

Без доказательства.

Пример

Функция $y = f(x)$ задана неявно:

$$x^7 + xy + y^7 - 3 = 0\,. \tag{51}$$

Найти $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=1}$, а также $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=2}$.

Решение

Подставляем $x = 1$ в (51). Получаем:

$$y^7 + y - 2 = 0\,. \tag{52}$$

Уравнение (52) совпадает с (43), решением уравнения является $y = 1$. Итак,

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=1} = -\left.\frac{\dfrac{\partial F(x,\,y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x,\,y)}{\partial y}}\right|_{\substack{x=1\\ y=1}} = -\left.\frac{\dfrac{\partial(x^7+xy+y^7-3)}{\partial x}}{\dfrac{\partial(x^7+xy+y^7-3)}{\partial y}}\right|_{\substack{x=1\\ y=1}} =$$

$$= -\left.\frac{7x^6+y}{x+7y^6}\right|_{\substack{x=1\\ y=1}} = -1\,. \tag{53}$$

Подставляем $x = 2$ в (51). Получаем:

$$y^7 + 2y + 125 = 0\,. \tag{54}$$

Пусть $g(y) = y^7 + 2y + 125$ – левая часть уравнения (54). Нетрудно убедиться, что функция $g(y)$ – возрастающая, значит, если уравнение (54) имеет корень, то только один. Поскольку $g(-2) = -7 < 0$, $g(-1) = 122 > 0$, в соответствии со следствием о существовании корня функции на промежутке, корень уравнения находится внутри промежутка $[-2,\,-1]$. Численно найти его поможет сайт WolframAlpha.com.

Результат обращения к сайту:

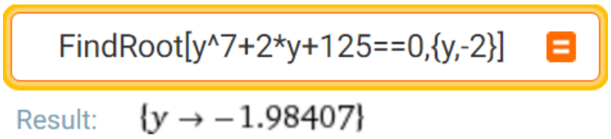

Рис. 5

Итак,
$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=2} = -\left.\frac{7x^6+y}{x+7y^6}\right|_{\substack{x=2\\ y=-1.98407}} = -1.03963\,. \tag{55}$$

Экстремум функции

Определение

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Функция $f(x)$ достигает локального минимума в точке $x_0\in\mathbb{R}$, если $\exists\,\delta>0$, такое, что $\forall\,x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $x\neq x_0$, справедливо неравенство $f(x)>f(x_0)$ (или, что равносильно, $f(x)-f(x_0)>0$).

Обозначение: $f(x_0)=\min f(x)$, или $f(x_0)=\min\limits_{x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)} f(x)$.

Определение

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Функция $f(x)$ достигает локального максимума в точке $x_0\in\mathbb{R}$, если $\exists\,\delta>0$, такое, что $\forall\,x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $x\neq x_0$, справедливо неравенство $f(x)<f(x_0)$ (или, что равносильно, $f(x)-f(x_0)<0$)

Обозначение: $f(x_0)=\max f(x)$, или $f(x_0)=\max\limits_{x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)} f(x)$.

Определение

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Функция $f(x)$ имеет в точке $x_0\in\mathbb{R}$ локальный экстремум, если она достигает в этой точке локального минимума либо локального максимума.

Пример

Доказать, что функция $f(x)=x^3$ не имеет локальных минимумов.

Доказательство

Зададим произвольную точку $x_0\in\mathbb{R}$ и любое сколь угодно малое $\delta>0$.

Возьмём любое x из δ–окрестности точки x_0, но такое, что $x < x_0$. Возведение строгого неравенства в куб есть равносильное преобразование, следовательно,

$$x < x_0 \implies x^3 < x_0^3 \implies f(x) < f(x_0) .$$

Последнее (синее) неравенство противоречит (зелёному) неравенству $f(x) > f(x_0)$ в определении минимума.

Аналогично можно доказать, что $f(x) = x^3$ не имеет локальных максимумов.

Теорема о достижении наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции (вторая теорема Вейерштрасса)

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. и пусть $f(x)$ непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$. Тогда:
$\exists\, x_1 \in [a, b]$ такое, что $f(x) \geq f(x_1)$, $\forall\, x \in [a, b]$;
$\exists\, x_2 \in [a, b]$ такое, что $f(x) \leq f(x_2)$, $\forall\, x \in [a, b]$.

Без доказательства.

Замечание

Во второй теореме Вейерштрасса точка x_1 обеспечивает наименьшее, точка x_2 обеспечивает наибольшее значение функции на замкнутом промежутке $[a, b]$.

Для незамкнутых промежутков (то есть, для множеств $[a, b)$, (a, b), $(a, b]$) утверждение теоремы было бы, вообще говоря, неверным.

Замечание

Наибольшее/наименьшее значение и локальный максимум/минимум – это, вообще говоря, не одно и то же.

Четыре французских теоремы

Теорема Ферма́ (о необходимом условии экстремума)

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть функция $f(x)$:
1) дифференцируема в точке x_0,
2) имеет локальный экстремум в точке x_0.

Тогда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство

Предположим, $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум. Это, по определению минимума, означает: $\exists\, \delta > 0$ такое, что $f(x) - f(x_0) > 0$, $\forall\, x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$.

Левосторонняя производная

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{>0}}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} = \lim_{x \to x_0 - 0} \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}_{<0} \leq 0\,,$$

неположительна по теореме о предельном переходе в неравенствах (для функций).

Правосторонняя производная

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{>0}}{\underbrace{x - x_0}_{>0}} = \lim_{x \to x_0 + 0} \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}_{>0} \geq 0\,.$$

неотрицательна по той же теореме.

По теореме о связи производной с двумя односторонними производными

$$f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Совместить последнее равенство с неравенствами $f'(x_0 - 0) \leq 0$ и $f'(x_0 + 0) \geq 0$ возможно только при $f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0) = 0$.

Доказательство закончено.

Случай локального максимума рассматривается аналогично.

Замечание

В теореме Ферма́ формулируется необходимое условие экстремума. Это условие не является достаточным. Например, для функции $f(x) = x^3$ справедливо равенство $f'(0) = 3x^2\big|_{x=0} = 0$, однако, данная функция не имеет экстремумов.

Теорема Ролля

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть $f(x)$:

1) непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$,

2) дифференцируема на открытом промежутке (a, b),

3) $f(a) = f(b)$.

Тогда $\exists\, c \in (a, b)$ такое, что $f'(c) = 0$.

Доказательство

По второй теореме Вейерштрасса $\exists\, x_1, x_2 \in (a, b)$ (точки наименьшего и наибольшего значений) такие, что

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)\,, \qquad \forall\, x \in [a, b]\,. \tag{56}$$

Далее возможны только следующие два случая.

1. Пусть $f(x_1) = f(x_2)$. В этом случае неравенство (56) принимает вид $f(x_1) \le f(x) \le f(x_1)$, $\forall\, x \in [a, b]$, и оно означает, что функция $f(x) \equiv f(x_1)$ есть тождественная константа на промежутке $[a, b]$. Тогда $\forall\, c \in (a, b)$ (например, для $c = (a + b)/2$) справедливо равенство $f'(c) = 0$.

2. Пусть $f(x_1) < f(x_2)$. В этом случае хотя бы одна из точек x_1, x_2 лежит не на конце промежутка $[a, b]$, иначе (по условию (3) формулировки данной теоремы) это был бы случай 1. Пусть, например, $x_1 \ne a$, $x_1 \ne b$, то есть, $a < x_1 < b$, точка x_1 является внутренней для промежутка $[a, b]$.

Случай $x_2 \ne a$, $x_2 \ne b$ может быть рассмотрен аналогично.

2а. Предположим, что существует такой промежуток $[\alpha, \beta]$ (полностью входящий в промежуток $[a, b]$), что $f(x) \equiv f(x_1)$, $\forall\, x \in [\alpha, \beta]$. Причём, совсем не обязательно ставить требование $x_1 \in [\alpha, \beta]$. Тогда $\forall\, c \in (\alpha, \beta)$ (например, для $c = (\alpha + \beta)/2$) справедливо равенство $f'(c) = 0$.

2б. Предположим, что названный в пункте 2а промежуток $[\alpha, \beta]$ не существует. Но тогда точка $c = x_1$ является точкой локального минимума. Действительно, x_1 – точка наименьшего значения на промежутке $[a, b]$, следовательно, $f(x) > f(x_1)$, $\forall\, x \in (x_1 - \delta,\, x_1 + \delta)$, $x \ne x_1$, (где можно взять $\delta = \min(x_1 - a,\, b - x_1)$), что означает: x_1 – точка локального минимума. А в точке минимума, точке $c = x_1$, согласно теореме Ферма́, производная равна нулю, $f'(c) = f'(x_1) = 0$.

Доказательство закончено.

Теорема Лагранжа.

Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть $f(x)$:

1) непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$,

2) дифференцируема на открытом промежутке (a, b).

Тогда $\exists\, c \in (a, b)$ такое, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

которая:

1) непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$,

2) дифференцируема на открытом промежутке (a, b), причём,

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

3) подчиняется требованию $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Таким образом, функция $\varphi(x)$ подчиняется условиям теоремы Ролля. Согласно этой теореме, существует такое $c \in (a, b)$, что $\varphi'(c) = 0$. Но тогда

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

следовательно,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказательство закончено.

Теорема Коши́

Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$:

1) непрерывны на замкнутом промежутке $[a, b]$;

2) дифференцируемы на открытом промежутке (a, b);

3) $g(b) \neq g(a)$;

4) на открытом промежутке (a, b) нет точки, в которой производные $f'(x)$, $g'(x)$ обращались бы в ноль одновременно.

Тогда $\exists\, c \in (a, b)$ такое, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - g(x) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

которая:

1) непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$,
2) дифференцируема на открытом промежутке (a, b), причём,

$$\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

3) $\varphi(a) = \varphi(b) = \dfrac{g(b)f(a) - g(a)f(b)}{g(b) - g(a)}$.

Таким образом, функция $\varphi(x)$ подчиняется условиям теоремы Ролля. Согласно этой теореме, существует такое $c \in (a, b)$, что $\varphi'(c) = 0$. Но тогда

$$\varphi'(c) = f'(c) - g'(c) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = 0,$$

следовательно,

$$f'(c) = g'(c) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, \qquad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Доказательство закончено.

Достаточные условия монотонности и экстремума

Теорема о достаточном условии возрастания функции на открытом промежутке

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть:

1) $f(x)$ дифференцируема на открытом промежутке (a, b);
2) $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in (a, b)$.

Тогда $f(x) \uparrow$ на промежутке (a, b).

Доказательство

Дифференцируемость функции $f(x)$ в любой точке промежутка (a, b), согласно теореме о достаточном условии непрерывности функции, означает и непрерывность функции в любой точке этого промежутка.

Возьмём любые такие два числа x_1, $x_2 \in (a, b)$, что $x_1 < x_2$. На промежутке $[x_1, x_2]$ для функции $f(x)$ выполнены условия теоремы Лагранжа. Следовательно, $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ такое, что $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, или, что то же самое, $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$. Заметим, что $c \in (a, b)$, стало быть, $f'(c) > 0$. Но тогда

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{>0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)\,.$$

Доказательство закончено.

<u>Замечание</u>

Сформулировать и доказать теорему о достаточном условии убывания функции на открытом промежутке слушателям предстоит самостоятельно.

<u>Теорема</u> о первом достаточном условии локального минимума функции в точке

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть:

1) $f(x)$ дифференцируема на промежутке $(x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$ (то есть, в δ–окрестности точки x_0);

2) $f'(x_0) = 0$;

3) $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in (x_0 - \delta\,,\, x_0)$;

4) $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in (x_0\,,\, x_0 + \delta)$.

Тогда $f(x)$ достигает локального минимума в точке x_0.

Доказательство

Дифференцируемость функции $f(x)$ во всех точках промежутка (a, b) означает и непрерывность её во всех точках промежутка (a, b).

Рассмотрим произвольную точку $x_1 \in (x_0 - \delta\,,\, x_0)$. По теореме Лагранжа существует точка $c_1 \in (x_1\,,\, x_0)$ такая, что $f'(c_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$, следовательно,

$$f(x_0) - f(x_1) = \underbrace{f'(c_1)}_{<0} \cdot \underbrace{(x_0 - x_1)}_{>0} < 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_0)\,, \qquad \forall\, x_1 \in (x_0 - \delta\,,\, x_0)\,.$$

Рассмотрим произвольную точку $x_2 \in (x_0\,,\, x_0 + \delta)$. По теореме Лагранжа существует точка $c_2 \in (x_0\,,\, x_2)$ такая, что $f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$, следовательно,

$$f(x_2)-f(x_0)=\underbrace{f'(c_2)}_{>0}\cdot\underbrace{(x_2-x_0)}_{>0}>0 \implies f(x_2)>f(x_0)\,, \quad \forall\, x_2\in(x_0\,,\,x_0+\delta)\,.$$

Из двух фиолетовых неравенств следует, что $f(x)>f(x_0)$, $\forall\, x\in(x_0-\delta\,,\,x_0+\delta)$, $x\neq x_0$, а это, по определению, и означает наличие минимума функции $f(x)$ в точке $x=x_0$.

Доказательство закончено.

Замечание

Сформулировать и доказать теорему о первом достаточном условии существования локального максимума функции в точке слушателям предстоит самостоятельно.

Правило Лопиталя

Теорема о первом правиле Лопиталя

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$:

1) непрерывны на полуоткрытом промежутке $[a,c)$,
2) дифференцируемы на открытом промежутке (a,c),
3) $f(a)=g(a)=0$,
4) $g'(x)\neq 0$ на открытом промежутке (a,c),
5) существует и конечен предел $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

Тогда существует, конечен и принимает такое же значение предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=A\,.$$

Замечание к формулировке теоремы

Предел отношения двух функций, дающий неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$, равен пределу отношения производных этих функций. Краткая запись утверждения теоремы:

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Доказательство теоремы

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A\,,$$

то существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, такое, что из неравенства $0 < x - a < \delta_1(\varepsilon)$ вытекает справедливость неравенства

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon\,.$$

Если теперь взять функцию $\delta(\varepsilon)$ в виде $\delta(\varepsilon) = \min\left(\delta_1(\varepsilon),\, c - a\right)$, то и подавно верно следование

$$|x - a| < \delta(\varepsilon) \implies \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon\,. \tag{57}$$

Функции $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $[a, b]$, где $b = a + \frac{1}{2}\cdot\delta(\varepsilon)$, удовлетворяют условию теоремы Коши. Согласно этой теореме,

$$\frac{f(b) - \overbrace{f(a)}^{=0}}{g(b) - \underbrace{g(a)}_{=0}} = \frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c(b))}{g'(c(b))}\,, \tag{58}$$

причём, согласно этой же теореме, $a < c(b) < b$, следовательно,

$$a < c(b) < a + \frac{\delta(\varepsilon)}{2} \implies |c(b) - a| < \frac{\delta(\varepsilon)}{2} \implies \left|\frac{f'(c(b))}{g'(c(b))} - A\right| < \varepsilon \implies$$

(согласно (58))

$$\implies \left|\frac{f(b)}{g(b)} - A\right| < \varepsilon$$

Доказательство закончено.

Доказательство для левостороннего предела

$$\lim_{x\to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

строится аналогично.

Доказательство для обычного предела

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

рассматривается как совокупность доказательств для двух односторонних пределов.

Замечание

Иногда для нахождения предела, дающего неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, приходится продлять цепь замен функций на их производные:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot 2x+\sin x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}\cdot 2x+\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot 2x\cdot 2x+e^{x^2}\cdot 2+\cos x}{2}=\frac{0+2+1}{2}=\frac{3}{2}\,.$$

Справедливости ради следует отметить, что данный предел до взятия вторых производных можно и не доводить. Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot 2x+\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(e^{x^2}+\frac{\sin x}{2x}\right)=\lim_{x\to 0}e^{x^2}+\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\,.$$

Теорема о втором правиле Лопиталя

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$:

1) непрерывны на открытом промежутке (a,b),

2) дифференцируемы на открытом промежутке (a,b),

3) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0}g(x)=\infty$,

4) $g'(x)\neq 0$ на открытом промежутке (a,b),

5) существует и конечен предел $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

Тогда существует, конечен и принимает такое же значение предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=A\,.$$

Замечание к формулировке теоремы

Предел отношения двух функций, дающий неопределённость $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, равен пределу отношения производных этих функций. Краткая запись утверждения теоремы:

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Теорема формулируется без доказательства

Производные высоких порядков. Формула Тейлора

Определение

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Вторая производная функции $f(x)$ есть производная её производной.

Обозначение: $f''(x) = (f'(x))'$, или $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)$.

Третья производная функции $f(x)$ есть производная её второй производной.

Обозначение: $f'''(x) = (f''(x))'$, или $\dfrac{d^3f(x)}{dx^3} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}\right)$.

n–я производная функции $f(x)$ (иными словами, производная порядка n) есть производная её $(n-1)$–й производной.

Обозначение: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, или $\dfrac{d^nf(x)}{dx^n} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}}\right)$.

"Нулевая" производная функции $f(x)$ есть сама функции $f(x)$.

Обозначение: $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Примеры

$(x^k)' = kx^{k-1}$.

$(x^k)'' = (x^k)^{(2)} = ((x^k)')' = (kx^{k-1})' = k(k-1)x^{k-2}$.

$(x^k)''' = (x^k)^{(3)} = ((x^k)'')' = (k(k-1)x^{k-2})' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$.

$(x^k)'''' = (x^k)^{(4)} = ((x^k)''')' = (k(k-1)(k-2)x^{k-3})' =$
$= k(k-1)(k-2)(k-3)x^{k-4}$.

Круглые скобки в верхнем индексе (в данном случае, синие) ставятся для того, чтобы порядок производной не путать с показателем степени. Нельзя сказать, что это всегда безупречно помогает. Вместо $f^{(n)}(x)$ удобнее писать

$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$. Удобнее, понятнее, но длиннее.

Если k – натуральное число, то все производные функции x^k порядка $(k+1)$ и выше тождественно равны нулю.

Определение

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть $n \in \mathbb{N}$.
Говорят, что функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0, если в этой точке существуют и конечны производные всех порядков начиная от первого и заканчивая n–м.
Говорят, что функция $f(x)$ n раз дифференцируема на промежутке, если она n раз дифференцируема в каждой точке промежутка.

Определение

$1! \stackrel{\text{def}}{=} 1$,
$2! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 = 2$,
$3! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$,
$4! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$,
$\ldots$
$n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = (n-1)! \cdot n$,
$0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Теорема о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть $f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема на открытом промежутке $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ (где $\delta > 0$).
Тогда
$\forall\, x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \setminus \{\, x_0 \,\}$,
$\exists\, c \in (x_0, x)$ (если $x > x_0$), либо $\exists\, c \in (x, x_0)$ (если $x < x_0$) такое, что

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)\,, \tag{59}$$

где $R_n(x)$ – т.н. остаточный член в форме Лагранжа,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

<u>Замечания</u> к формулировке теоремы

Величина c зависит от x_0 и от x, поэтому иногда пишут $c = c(x_0\,, x)$.

Поскольку $0! = 1$, $(x - x_0)^0 = 1$, $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, формулу Тейлора иногда пишут в свёрнутом виде,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{=R_n(x)}. \qquad (60)$$

Равенство (60) равноценно соотношению

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \qquad (61)$$

Доказательство теоремы

Зафиксируем величины x_0 и x (временно будем считать их константами).

Рассмотрим две вспомогательные функции новой переменной t.

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k, \qquad g(t) = (x - t)^{n+1}.$$

С помощью (61), (59) можно убедиться в том, что $\varphi(x_0) = R_n(x)$, $\varphi(x) = 0$.

Найдём производную первой из вспомогательных функций. Это потребует внимания и аккуратности.

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k \right)'_t =$$

$$= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x - t)^k + \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot k \cdot (x - t)^{k-1} \cdot (-1) \right) =$$

$$= -f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x - t)^k + \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x - t)^{k-1} \right) =$$

(в развёрнутом виде)

$$
\begin{gathered}
= -f'(t) + \\
+ \left(-\frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t)^1 + \frac{f^{(1)}(t)}{0!}(x-t)^0 \right) + \\
+ \left(-\frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t)^1 \right) + \\
+ \left(-\frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3 + \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 \right) + \\
+ \cdots + \\
+ \left(-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!}(x-t)^{n-2} \right) + \\
+ \left(-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \right) = \\
= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n .
\end{gathered}
$$

Члены, выделенные одинаковыми цветами, взаимно уничтожаются.

Найдём производную второй из вспомогательных функций.

$$g'(t) = (n+1)\cdot(x-t)^n \cdot (-1) = -(n+1)\cdot(x-t)^n.$$

По теореме Коши, на промежутке с концами x_0, x существует такое значение c, что

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{g'(c)},$$

$$\frac{0-R_n(x)}{0-(x-x_0)^{n+1}} = \frac{-\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n}{-(n+1)\cdot(x-c)^n},$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!\cdot(n+1)},$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}.$$

Доказательство закончено.

Замечание

Существует вариант формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right). \tag{62}$$

Замечание

Частный случай формулы Тейлора при $x_0 = 0$ носит название формулы Маклорена:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + o\left(x^n\right). \tag{63}$$

На практике важны формулы Маклорена для элементарных функций:

$$e^x = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ \ldots\ + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right),$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ \ldots\ + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right),$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ \ldots\ + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right),$$

$$(1+x)^m = 1 + m \cdot x + \frac{m(m-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \cdot x^3 + \ \ldots\ +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} \cdot x^n + o\left(x^n\right),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ \ldots\ + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right).$$

Замечание

Члены, предшествующие остаточному члену, будем называть главными.

Каждый из главных членов можно вычислить точно, тогда как в остаточном члене присутсвует значение c, найти которое точно не представляется возможным. Правда, что искать его и не нужно.

На практике формулы Маклорена (и Тейлора) применяются с сохранением "нужного" количества главных членов и с отбрасыванием остаточного члена. Что такое "нужное" количество, станет ясным после изучения темы "степенные ряды".

Рассмотрим функции

$$f_2(x) = x - \frac{x^3}{6}\,, \qquad f_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\,, \qquad f_4(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}\,,$$

где индекс k функции $f_k(x)$ есть количество взятых из формулы Маклорена для $f(x) = \sin x$ главных членов. Изобразим на Рис. 6 графики функций $y = f_k(x)$ совместно с графиком функции $y = \sin x$:

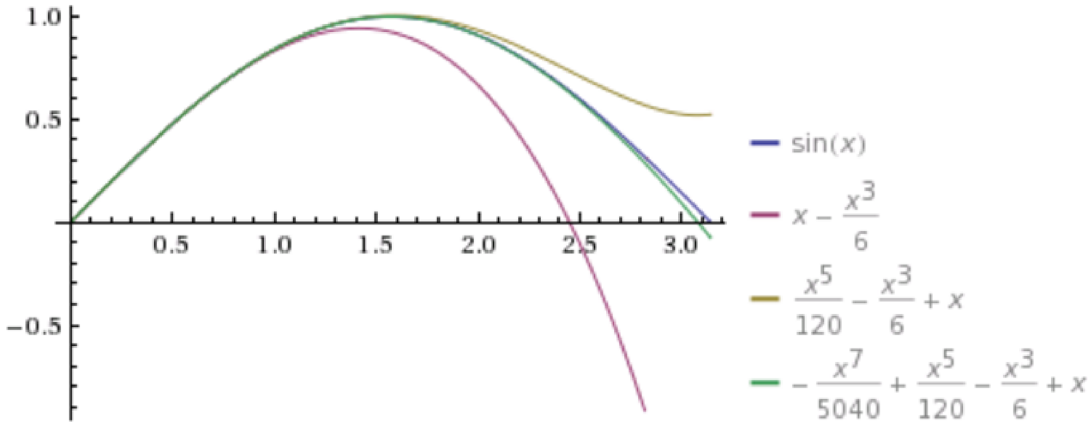

Рис. 6

Графики показывают, что сумма главных членов формулы Маклорена тем точнее представляет функцию $\sin x$, чем больше слагаемых сохранено в этой сумме.

Выпуклость функции. Перегиб

<u>Определение</u> выпуклости функции (классическое)

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Функция $f(x)$ выпукла вверх на промежутке (a, b),

если $\forall\, x_1, x_2 \in (a, b)$, $\forall\, \lambda \in (0, 1)$ можно доказать справедливость неравенства

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\,. \tag{64}$$

Функция $f(x)$ выпукла вниз на промежутке (a, b),

если $\forall\, x_1, x_2 \in (a, b)$, $\forall\, \lambda \in (0, 1)$ можно доказать справедливость неравенства

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\,. \tag{65}$$

Замечание

Если параметр λ пробегает все значения от 0 до 1, то выражение $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ в левой части (64) и (65) пробегает все значения от x_1 до x_2. Это означает, что точка с координатами $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2))$, при изменении λ от 0 до 1, перемещается ("скользит") вдоль графика функции $y = f(x)$ (Рис. 7).

Если параметр λ пробегает все значения от 0 до 1, то выражение $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ в правой части (64) и (65) пробегает все значения от $f(x_1)$ до $f(x_2)$. Это означает, что точка с координатами

$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\ \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2))$,

при изменении λ от 0 до 1, перемещается ("скользит") вдоль отрезка прямой, соединяющего точки с координатами $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$ (Рис. 7).

Геометрический смысл (Рис. 7(а)) выпуклости вверх на промежутке (a, b) таков: линия графика функции $y = f(x)$ на промежутке (x_1, x_2) проходит строго выше хорды, соединяющей точки $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$, причём, это справедливо $\forall\, x_1, x_2 \in (a, b)$.

Геометрический смысл (Рис. 7(б)) выпуклости вниз на промежутке (a, b) таков: линия графика функции $y = f(x)$ на промежутке (x_1, x_2) проходит строго ниже хорды, соединяющей точки $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$, причём, это справедливо $\forall\, x_1, x_2 \in (a, b)$.

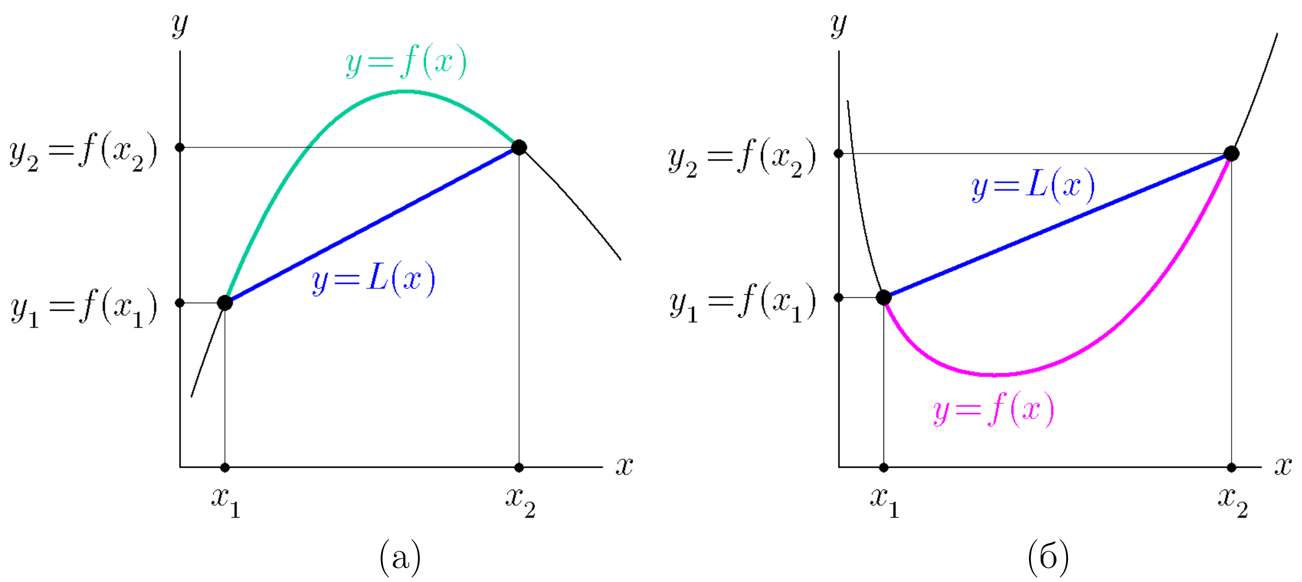

Рис. 7

Слушателям следует обратить внимание на то, что здесь не используется понятие "выпуклость" (без указания, куда именно) и понятие "вогнутость".

Замечание

Из курса аналитической геометрии известно, что уравнение прямой, проходящей через точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), имеет вид $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, или $y = \frac{y_2 \cdot (x-x_1) - y_1 \cdot (x-x_2)}{x_2-x_1}$. Применительно к Рис. 7 это уравнение принимает вид $y = L(x)$, где

$$L(x) = \frac{f(x_2) \cdot (x-x_1) - f(x_1) \cdot (x-x_2)}{x_2 - x_1}.$$

Определение выпуклости функции (альтернативное)

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Функция $f(x)$ выпукла вверх на промежутке (a, b), если $\forall\, x_1, x_2 \in (a, b)\ :\ x_1 < x_2$, $\forall\, x \in (x_1, x_2)$ можно доказать справедливость неравенства

$$f(x) - L(x) > 0, \tag{66}$$

означающего, что график функции $f(x)$ на промежутке $(x_1,\, x_2)$ всюду выше графика функции $L(x)$.

Функция $f(x)$ выпукла вниз на промежутке (a, b), если $\forall\, x_1, x_2 \in (a, b)\ :\ x_1 < x_2$, $\forall\, x \in (x_1, x_2)$ можно доказать справедливость неравенства

$$f(x) - L(x) < 0, \tag{67}$$

означающего, что график функции $f(x)$ на промежутке $(x_1,\, x_2)$ всюду ниже графика функции $L(x)$.

Замечание

Можно строго доказать, что классическое и альтернативное определения выпуклости вверх / вниз эквивалентны.

Альтернативное определение облегчает доказательство следующей теоремы.

Теорема о достаточном условии выпуклости вверх / вниз

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема во всех точках промежутка (a, b).

Тогда

если $f''(x) < 0$, $\forall\, x \in (a, b)$, то $f(x)$ выпукла вверх на промежутке (a, b);

если $f''(x) > 0$, $\forall\, x \in (a, b)$, то $f(x)$ выпукла вниз на промежутке (a, b).

Доказательство будет построено только для случая выпуклости вверх и для $x_1 < x_2$.

Пусть $f''(x) < 0$, $\forall\, x \in (a, b)$.

Возьмём произвольные x_1, x_2 такие, что $a < x_1 < x_2 < b$. Пусть $x \in (x_1,\, x_2)$.

Нужно доказать неравенство (66), то есть $f(x) - L(x) > 0$. Итак,

$$f(x) - L(x) = f(x) \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_2) \cdot (x - x_1) - f(x_1) \cdot (x - x_2)}{x_2 - x_1} =$$

$$= f(x) \cdot \frac{(x - x_1) - (x - x_2)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_2) \cdot (x - x_1) - f(x_1) \cdot (x - x_2)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{\big(f(x) \cdot (x - x_1) - f(x_2) \cdot (x - x_1)\big) - \big(f(x) \cdot (x - x_2) - f(x_1) \cdot (x - x_2)\big)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{(x - x_1)\,\big(f(x) - f(x_2)\big) - (x - x_2)\,\big(f(x) - f(x_1)\big)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{(x_2 - x)\,\big(f(x) - f(x_1)\big) - (x - x_1)\,\big(f(x_2) - f(x)\big)}{x_2 - x_1}. \tag{68}$$

По теореме Лагранжа существует $c_1 \in (x_1,\, x)$ такое, что

$$f(x) - f(x_1) = f'(c_1) \cdot (x - x_1).$$

По теореме Лагранжа существует $c_2 \in (x,\, x_2)$ такое, что

$$f(x_2) - f(x) = f'(c_2) \cdot (x_2 - x).$$

Продолжим цепь преобразований (68):

$$f(x) - L(x) = \frac{(x_2 - x)\,\big(f(x) - f(x_1)\big) - (x - x_1)\,\big(f(x_2) - f(x)\big)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{(x_2 - x) \cdot f'(c_1) \cdot (x - x_1) - (x - x_1) \cdot f'(c_2) \cdot (x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \cdot \big(f'(c_1) - f'(c_2)\big) =$$

$$= -\frac{(x-x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1} \cdot \left(f'(c_2) - f'(c_1)\right) . \tag{69}$$

Очевидно, что $c_1 < c_2$. По теореме Лагранжа существует $c_0 \in (c_1, c_2)$ такое, что

$$f'(c_2) - f'(c_1) = f''(c_0) \cdot (c_2 - c_1) .$$

Продолжим цепь преобразований (68)–(69):

$$f(x) - L(x) = -\frac{(x-x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1} \cdot \left(f'(c_2) - f'(c_1)\right) =$$

$$= -\frac{\overbrace{(x-x_1)}^{>0} \cdot \overbrace{(x_2-x)}^{>0}}{\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}} \cdot \underbrace{f''(c_0)}_{<0} \cdot \underbrace{(c_2-c_1)}_{>0} > 0 . \tag{70}$$

Доказательство закончено.

Определение

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема в точке x_0.

Пусть $\exists\, \delta > 0$ такое, что функция $f(x)$ имеет одно направление выпуклости $\forall\, x \in (x_0 - \delta\,,\, x_0)$, и прямо противоположное направление выпуклости $\forall\, x \in (x_0\,,\, x_0 + \delta)$.

Тогда точка x_0 называется точкой перегиба.

Теорема о стабилизации знака

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, причём, $A > 0$.

Тогда $\exists\, \delta > 0 :\ f(x) > 0\,,\ \ \forall\, x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)\,,\ \ x \neq x_0$.

Доказательство

По определению предела, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \implies |f(x) - A| < \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon = A/2$. Тогда $\exists\, \delta = \delta(A/2) > 0$:

$$x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - A| < A/2 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad -A/2 < f(x) - A < A/2 \quad \Longrightarrow \quad -A/2 < f(x) - A \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad -A/2 + A < f(x) - A + A \quad \Longrightarrow \quad A/2 < f(x) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) > A/2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) > 0\,.$$

Доказательство закончено.

Теорема о необходимом условии перегиба

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Пусть:

1) $\exists\, \delta > 0$ такое, что $f(x)$ дважды дифференцируема $\forall\, x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)\,;$

2) $f''(x)$ непрерывна в точке $x_0\,;$

3) $f(x)$ имеет перегиб в точке $x_0\,.$

Тогда $f''(x_0) = 0$.

Доказательство ведётся методом от противного

Предположим, что $f''(x_0) \neq 0\,,$ Пусть, например, $f''(x_0) > 0\,.$ Функция $f''(x)$ непрерывна в точке $x_0\,,$ следовательно, по теореме о стабилизации знака, $\exists\, \delta_1 > 0$ такое, что

$$f''(x) > 0\,, \qquad \forall\, x \in (x_0 - \delta_1\,,\, x_0 + \delta_1)\,. \tag{71}$$

Наличие перегиба в точке x_0 означает, что выпуклость функции $f(x)$ слева и справа от x_0 прямо противоположна.

Вместе с этим, существование второй производной в окрестности $(x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta)$ означает, по теореме о достаточном условии выпуклости, что эта вторая производная имеет противоположные знаки слева и справа от $x_0\,.$ Но тогда становится невозможной предусмотренная в (71) положительность $f''(x)$ слева и справа от $x_0\,.$ Полученное противоречие отвергает возможность неравенства $f''(x_0) > 0\,.$

Аналогично доказывается и невозможность неравенства $f''(x_0) < 0\,.$

Доказательство закончено.

Теорема о достаточном условии перегиба

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть:

1) $\exists\,\delta > 0$ такое, что $f(x)$ дважды дифференцируема $\forall\, x \in (x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta)\,;$

2) $f''(x) < 0\,,\ \ \forall\, x \in (x_0 - \delta\,,\, x_0)\,,$ и $f''(x) > 0\,,\ \ \forall\, x \in (x_0\,,\, x_0 + \delta)\,,$ либо, наоборот,

$f''(x) > 0\,,\ \ \forall\, x \in (x_0 - \delta\,,\, x_0)$ и $f''(x) < 0\,,\ \ \forall\, x \in (x_0\,,\, x_0 + \delta)$ (то есть, вторая производная меняет знак при переходе через точку x_0)

Тогда в точке x_0 функция $f(x)$ имеет перегиб.

Доказательство предоставляется слушателям.

Теорема о втором достаточном условии локального минимума функции в точке

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть:

1) $f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке $(x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$ (то есть, в δ–окрестности точки x_0);

2) $f'(x_0) = 0\,;$

3) $f''(x) > 0\,,\ \ \forall\, x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)\,.$

Тогда $f(x)$ достигает локального минимума в точке x_0.

Доказательство

Возьмём произвольное $x_1 \in (x_0 - \delta\,,\, x_0)$. По теореме Лагранжа, $\exists\, c_1 \in (x_1,\, x_0)$ такое, что $f'(x_0) - f'(x_1) = f''(c_1)(x_0 - x_1)$. Тогда

$$\underbrace{f'(x_0)}_{=0} - f'(x_1) = \underbrace{f''(c_1)}_{>0} \cdot \underbrace{(x_0 - x_1)}_{>0} \implies -f'(x_1) > 0 \implies$$

$$\implies +f'(x_1) < 0\,,\quad \forall\, x_1 \in (x_0 - \delta\,,\, x_0)\,. \tag{72}$$

Возьмём произвольное $x_2 \in (x_0\,,\, x_0 + \delta)$. По теореме Лагранжа, $\exists\, c_2 \in (x_0\,,\, x_2)$ такое, что $f'(x_2) - f'(x_0) = f''(c_2)(x_2 - x_0)$. Тогда

$$f'(x_2) - \underbrace{f'(x_0)}_{=0} = \underbrace{f''(c_2)}_{>0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_0)}_{>0} \implies f'(x_2) > 0\,,\quad \forall\, x_2 \in (x_0\,,\, x_0 + \delta)\,. \tag{73}$$

Обратимся к теореме о первом достаточном условии локального минимума в точке. Все четыре условия теоремы выполнены, в частности, третье и четвёртое условия соблюдены в силу (72) и (73).

Доказательство закончено.

Замечание

Сформулировать и доказать теорему о втором достаточном условии существования локального максимума функции в точке слушателям предстоит самостоятельно.

Полное исследование функции

Определение

Полным исследованием функции с построением графика принято называть следующий набор действий.

1. Нахождение области определения функции.
2. Нахождение точек пересечения графика с осями координат.
3. Исследование поведения функции на границе области определения, нахождение вертикальных асимптот, нахождение невертикальных асимптот.
4. Исследование функции на четность или нечетность, на периодичность.
5. Нахождение промежутков возрастания и убывания функции, точек экстремума.
6. Нахождение промежутков выпуклости вверх, выпуклости вниз, точек перегиба.
7. Построение графика.

Пример № 1513 из сборника задач [2]

Провести полное исследование функции $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Решение

1. Область определения функции может быть всей вещественной осью, если она не "урезана" требованиями неотрицательности подкоренного выражения или положительности того, от чего зависит логарифм.

$\sqrt{x^2+1}$ существует при любом вещественном x, поскольку $x^2+1>0$.

Докажем, что $x+\sqrt{x^2+1}>0$, что будет означать: логарифм выражения $x+\sqrt{x^2+1}$ также существует при любом вещественном x.

1.1. $x>0 \implies \underbrace{x}_{>0} + \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{>0} > 0$.

1.2. $x < 0 \implies -x > 0$. Если известно, что обе части неравенства положительны, то возведение такого неравенства в квадрат есть равносильное преобразование.

$$x < 0 \implies x + \sqrt{x^2+1} > 0 \iff \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{>0} > \underbrace{-x}_{>0} \iff$$

$$\iff x^2 + 1 > (-x)^2 \iff x^2 + 1 > x^2 \iff 1 > 0\,.$$

Последнее неравенство бесспорно, следовательно, и равносильное ему при $x < 0$ исходное неравенство $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ также верно.

1.3. $x = 0 \implies 0 + \sqrt{0^2+1} > 0 \implies 1 > 0\,.$

Итак, $D(f) = (\infty, +\infty)\,.$

2. Точки пересечения графика с координатными осями договоримся называть характерными точками нулевой группы и обзначать красным цветом: M_{01}, M_{02}, и т.д.

2.1. Точка пересечения графика с осью Oy есть начало координат:

$$x = 0 \implies y = f(0) = \ln\left(0 + \sqrt{0^2+1}\right) = \ln 1 = 0 \implies M_{01} = (0,0)\,.$$

2.2. Точки пересечения графика с осью Ox :

$$y = f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = 0 \iff x + \sqrt{x^2+1} = 1 \iff$$

$$\iff \sqrt{x^2+1} = 1 - x \iff x^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 \iff$$

$$\iff 0 = -2x \iff x = 0\,,$$

то есть, по факту, при возведении уравнения в квадрат "лишних" корней не добавилось, и нами ещё раз найдена "старая" точка $M_{01} = (0,0)$. Других точек нулевой группы у исследуемой функции нет.

3.1. Поведение функции у границ области определения:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = +\infty\,, \tag{74}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = -\infty\,. \tag{75}$$

3.2. Вертикальных асимптот у функции нет, поскольку выражение $x + \sqrt{x^2+1}$, от которого зависит логарифм, в ноль никогда не обращается (доказано в Пункте 1).

3.3. Наклонные асимптоты, если только они есть, задаются уравнениями $y = \alpha_\oplus x + \beta_\oplus$ и $y = \alpha_\ominus x + \beta_\ominus$, где

$$\alpha_\oplus = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x} = 0\,,$$

$$\alpha_\ominus = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x} = 0\,.$$

Найденные пределы существуют и конечны, что даёт надежду на существование горизонтальных (поскольку $\alpha_\oplus = \alpha_\ominus = 0$) асимптот в направлении $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Далее,

$$\beta_\oplus = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha_\oplus x) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 0\cdot x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \tag{76}$$

$$\beta_\ominus = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - \alpha_\ominus x) = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - 0\cdot x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,. \tag{77}$$

Пределы в (76)–(77) совпадают с пределами в (74)–(75), оба предела бесконечны, следовательно, наклонных асимптот у исследуемой функции нет.

4.1. Докажем, что функция нечётна:

$$f(x) = -f(-x) \quad\Longleftrightarrow\quad \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = -\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right) \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) + \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 0 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \ln\left(\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right) = 0 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \ln\left(x^2+1-x^2\right) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \ln 1 = 0\,.$$

Последнее равенство бесспорно, следовательно, верно и равносильное ему исходное равенство $f(x) = -f(-x)$.

5. Попытаемся найти характерные точки первой группы, то есть, точки, в которых может быть экстремум. В таких точках первая производная равна нулю либо не существует.

$$f'(x) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x \in \emptyset\,.$$

Получается, что первая производная всюду существует и всюду положительна. Положительность производной означает, что на всей вещественной оси исследуемая функция возрастает, характерных точек первой группы у неё нет.

6. Попытаемся найти характерные точки второй группы, то есть, точки, в которых может быть перегиб, либо при переходе через которые может произойти смена направления выпуклости. В таких точках вторая производная равна нулю либо не существует.

$$f''(x) = 0 \iff \frac{-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = 0 \iff x = 0 \iff M_{21} = (0, f(0)) = (0, 0)\,.$$

Вторая производная существует при любых вещественных x, следовательно, точка M_{21} – единственная характерная точка второй группы, причём, $M_{21} = M_{01}$. Очевидно, что при $x < 0$ функция выпукла вниз, поскольку $f''(x) > 0$, а при $x > 0$ функция выпукла вверх, поскольку $f''(x) < 0$.

Построим сводную таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	Перегиб	$\nearrow$
		0	

Табл. 3

7. WolframAlpha.com поможет построить график функции:

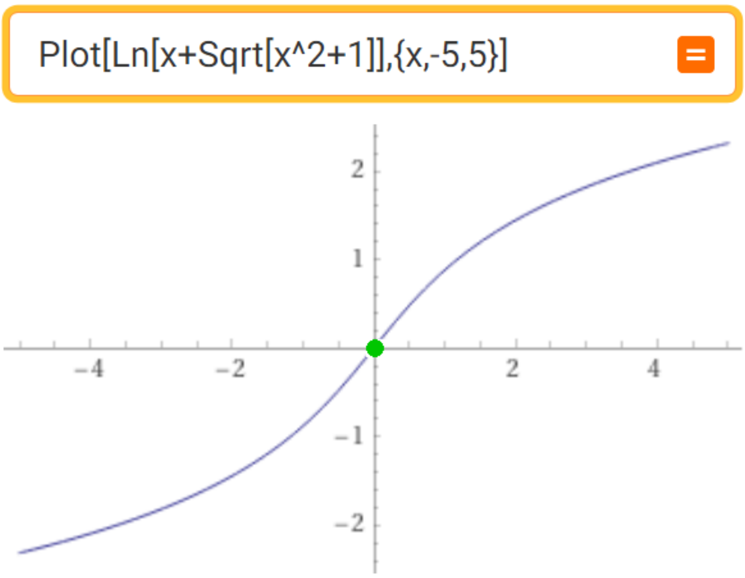

Рис. 8

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Том 1 — М.: Книга по Требованию, 2013. 608 с.

2. Б.П.Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу – СПб.: Издательство «Лань», 2019. 624 с.