Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Ю.А. Лавров

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2021

УДК 512.64
ББК 22.143
Л13

Рецензенты:
Член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, научный руководитель ИПМаш РАН, директор ВШ МПУ СПбПУ
Д. А. Индейцев
Член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор ВШ ТМ СПбПУ
А. М. Кривцов

Лавров Ю. А. **Линейная алгебра** : учеб. пособие / Ю. А. Лавров. – СПб., 2021. – 86 с.

В учебном пособии представлены материалы раздела "Линейная алгебра", изложенные в соответствии с действующими в СПбПУ образовательными стандартами. Учебное пособие представляет собой набор теоретических сведений и описание практических методов, необходимых для успешного освоения учебной дисциплины, для подготовки к контрольным работам и экзаменам.

Учебное пособие предназначено для бакалавров направления «Экономика и управление».

Табл. 0. Ил. 16. Библиогр.: 2 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

Система обозначений

В математике применяется ряд специальных знаков, позволяющих делать изложение материала более кратким. Ниже показаны некоторые из них.

$\forall$ – для любого, для любой, для любых.

$\exists$ – существует, $\nexists$ – не существует,

! – единственный, единственная.

$\neg$ – отрицание.

$\emptyset$ – пустое множество.

$\in$ – принадлежит. Пример: $2 \in (1,\ 3)$.

$\subset$ – содержится. Пример: $[2,\ 3] \subset (1,\ 4)$.

$\supset$ – содержит. Пример: $(1,\ 4) \supset [2,\ 3]$.

$\cup$ – объединение множеств. Пример: $[1,\ 2] \cup (2,\ 3) = [1,\ 3)$.

$\cap$ – пересечение множеств. Пример: $[1,\ 3] \cap (2,\ 4) = (2,\ 3]$.

$\setminus$ – удаление из множества. Пример: $[1,\ 3] \setminus [2,\ 4] = [1,\ 2)$.

$\Rightarrow$, $\Longrightarrow$ – следовательно. Пример: $2 \in [2,\ 3] \implies 2 \in (1,\ 4)$.

$\Leftarrow$, $\Longleftarrow$ – достаточно. Пример: $x < y \impliedby \sqrt{x} < \sqrt{y}$.

$\Leftrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ – равносильно. Пример: $x < y \iff x^3 < y^3$.

$\stackrel{\text{def}}{=}$ – равно по определению. Пример: $|x| \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{cc} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{array} \right|$.

$\uparrow$ – строго возрастает, $\nearrow$ – нестрого возрастает.

$\downarrow$ – строго убывает, $\searrow$ – нестрого убывает.

$\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел.

$\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел.

$\mathbb{Q}$ – множество всех рациональных чисел.

$\mathbb{A}$ – множество всех алгебраических чисел.

$\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел.

$\mathbb{C}$ – множество всех комплексных чисел.

Математический ресурс сети интернет

Значительную помощь в изучении математики может оказать специализированный математический сайт WolframAlpha.com. Пример обращения к сайту:

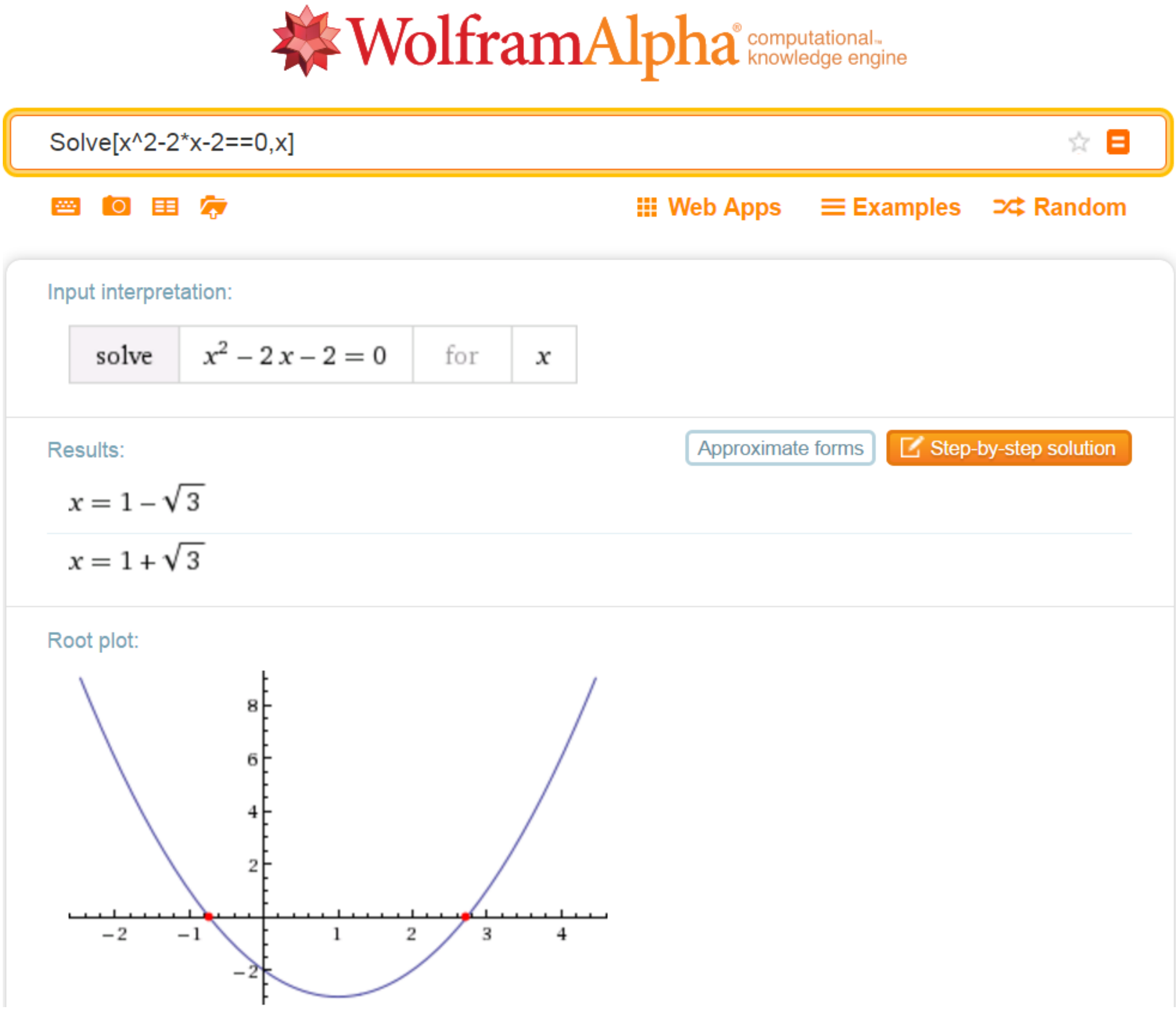


Рис. 1

Общение с сайтом ведётся на языке специальных команд, которые размещаются внутри оранжевой рамки. Язык команд WolframAlpha.com мы будем постепенно изучать на примерах.

Матрицы и арифметические операции над ними

Определение

Матрица – это прямоугольная таблица чисел. Важны как числа, заполняющие матрицу, так и её размеры: число строк и число столбцов.

Например, матрица $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ имеет две строки и два столбца, матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & -9 \end{pmatrix}$ имеет три строки и четыре столбца.

Замечание

Для обозначения матриц обычно применяются заглавные буквы латинского алфавита. Иногда это одиночные буквы, иногда они снабжены нижним индексом, который выражает размеры матрицы. Например, две показанные выше матрицы могут быть обозначены, соответственно, как $C_{2\times 2}$ и $B_{3\times 4}$. Знак умножения "$\times$" обязателен.

Для обозначения "пользовательских" матриц нежелательно применять буквы E, I, J, поскольку этими буквами обозначаются специальные матрицы.

Набор чисел, заполняющих матрицу, слева и справа охватывается высокими круглыми скобками. Если матрица состоит из единственного элемента, надобность в скобках отпадает. Числа отделены друг от друга пробелами, разделительных символов (запятых и т.п.) между ними нет.

Применяется развёрнутое представление для матрицы общего вида,

$$A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

содержащей m строк и n столбцов, где m и n – натуральные числа.

Применяются и сокращённые представления для матрицы общего вида,

$$A = \{a_{ij}\}\,, \qquad A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}\,,$$

последнее из них более предпочтительно.

Обычно элементы матрицы выражаются малой латинской буквой с тем же именем, что и большая буква для всей матрицы.

Первый и второй индексы элемента матрицы выражают соответственно номер строки и номер столбца, занимаемого элементом в таблице. Нумерация начинается с единицы. Для показанной выше матрицы B элемент третьей строки четвёртого столбца есть $b_{34} = -9$. Индексы читаются как "три, четыре", но ни в коем случае, не как "тридцать четыре". Вообще-то между индексами (если их два) может ставиться запятая ($b_{3,4}$), но, во имя краткости, ставится она только если её отсутствие внесло бы полную неразбериху (например, $b_{i-1,\,j+2}$).

Определение

Две матрицы равны тогда и только тогда, когда равны их размеры и попарно равны элементы, занимающие одинаковые места в матрицах.

Замечание

Между матрицами возможны только отношения "равно" или "не равно". Отношения "больше", "меньше", "больше либо равно", "меньше либо равно" для матриц не определены.

Определение

Суммой двух матриц, имеющих одинаковые размеры, называется матрица того же размера, каждый элемент которой есть сумма элементов слагаемых матриц, занимающих одинаковые места.

Более формально:

если $\{a_{ij}\}_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}\,, \quad B = \{b_{ij}\}_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}\,,$

то $A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\}_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}\,.$

В развёрнутом виде:

если

$$A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B = B_{m\times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

то

$$A + B = (A+B)_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, тогда

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+(-1) & 3+4 \\ 4+(-2) & 5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Определение

Произведением матрицы на число называется матрица того же размера, каждый элемент которой есть произведение элемента (умножаемой матрицы) на число.

Более формально:

если $\quad A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}$,

то $\quad \lambda \cdot A = \{\lambda \cdot a_{ij}\}_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}$.

В развёрнутом виде:

если

$$A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

<u>Теорема</u> о свойствах линейных операций над матрицами

1. $A + B = B + A$ (коммутативность).
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (ассоциативность).
3. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ (дистрибутивность).
4. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ (дистрибутивность).

Без доказательства.

<u>Определение</u>

Произведением матрицы $A_{\ell\times m} = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,2,\dots,\ell \\ j=1,2,\dots,m}}$

на матрицу $B_{m\times n} = \{b_{jk}\}_{\substack{j=1,2,\dots,m \\ k=1,2,\dots,n}}$

называется матрица $C_{\ell\times n} = \{c_{ik}\}_{\substack{i=1,2,\dots,\ell \\ k=1,2,\dots,n}}$,

элементы которой вычисляются по формуле $c_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jk}$,

$i = 1, 2, \dots, \ell$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Для того, чтобы произведение двух матриц существовало, необходимо, чтобы число столбцов первой матрицы было равно числу строк второй.

<u>Пример</u>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot1 + 2\cdot5 + 7\cdot6 & 3\cdot7 + 3\cdot2 + 7\cdot3 \\ 4\cdot1 + 2\cdot5 + 6\cdot6 & 4\cdot7 + 2\cdot2 + 6\cdot3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 55 & 46 \\ 50 & 50 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot3 + 7\cdot4 & 1\cdot2 + 7\cdot2 & 1\cdot7 + 7\cdot6 \\ 5\cdot3 + 2\cdot4 & 5\cdot2 + 2\cdot2 & 5\cdot7 + 2\cdot6 \\ 6\cdot3 + 3\cdot4 & 6\cdot2 + 3\cdot2 & 6\cdot7 + 3\cdot6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 31 & 16 & 49 \\ 23 & 14 & 47 \\ 30 & 18 & 60 \end{pmatrix}.$$

Пример подтверждает, что $A \cdot B \neq B \cdot A$. Это означает, что произведение матриц, вообще говоря, некоммутативно.

В данном случае, по крайней мере, существует и произведение $A \cdot B$, и произведение $B \cdot A$. Для матриц $C_{2\times3}$ и $D_{3\times3}$ произведение $C \cdot D$ существует, а произведение $D \cdot C$ – нет.

Разумеется, встречаются такие матрицы A и B, что $A \cdot B = B \cdot A$, но это редкое исключение, а не постоянное правило.

Теорема о свойствах произведения матриц

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (ассоциативность)
2. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивность)
3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (дистрибутивность)

Без доказательства.

Определение

Нулевая матрица – это матрица, все элементы которой – нули.
Обозначение для нулевой матрицы: 0.

Квадратная матрица – это матрица, число строк которой равно числу столбцов.
Порядок квадратной матрицы – это число её строк или столбцов.

Главная диагональ квадратной матрицы $A_{n\times n}$ – это множество тех её элементов, два индекса которых равны друг другу: a_{11}, a_{22}, a_{33}, $\ldots$, a_{nn}.
Если применяется слово "диагональ" (без уточнения: "главная" или "побочная"), имеется в виду главная диагональ.

Побочная диагональ квадратной матрицы $A_{n\times n}$ – это множество тех её элементов, суммы двух индексов которых равны $n+1$: a_{1n}, $a_{2,n-1}$, $a_{3,n-2}$, $\ldots$, a_{n1}.

Верхняя треугольная матрица – это квадратная матрица, все элементы которой, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю. Иначе говоря, $a_{ij}=0$, если $i>j$.

Нижняя треугольная матрица – это квадратная матрица, все элементы которой, расположенные выше главной диагонали, равны нулю. Иначе говоря, $a_{ij}=0$, если $i<j$.

Диагональная матрица – это квадратная матрица, все элементы которой, расположенные вне главной диагонали, равны нулю.

Единичная матрица – это квадратная матрица, диагональные элементы которой – единицы, прочие элементы – нули.
Обозначение для единичной матрицы: E.
Физики предпочитают обозначение I.

Редкозаполненная матрица – это квадратная матрица порядка n (где n, как правило, велико, более тысячи), в которой отличны от нуля только диагональные элементы, а также некоторые другие элементы, количество которых превосходит число n лишь в несколько раз (уж точно, не в сотни раз).

Замечание

Если нулевая матрица сплошь состоит из нулей, то единичная матрица содержит не только единицы. Примеры единичных матриц:

$$E_{2\times2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad E_{3\times3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$E_{4\times4}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad E_{n\times n}=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}.$$

Единичной матрица называется потому, что для любой матрицы A_{mn} справедливо равенство

$$A_{m\times n}\cdot E_{n\times n}=E_{m\times m}\cdot A_{m\times n}=A_{m\times n}\,.$$

Ясно, что для любой матрицы $A_{m\times n}$ нулевая матрица подчиняется равенству

$$A_{m\times n}+0_{m\times n}=0_{m\times n}+A_{m\times n}=A_{m\times n}\,.$$

Замечание

Операции сложения матриц, умножения матрицы на число и умножения матрицы на матрицу – это т.н. бинарные операции, то есть они производятся над двумя объектами. Существуют и т.н. унарные операции, производимые над одним объектом. Следующая операция именно такова.

Определение

Операция транспонирования матрицы – это операция замены строк матрицы её столбцами (или наоборот).

Более формально:

если $A_{m\times n}=\{a_{ij}\}_{\substack{i=1,2,\dots,m\\ j=1,2,\dots,n}}$, то $(A^T)_{n\times m}=\{a_{ji}\}_{\substack{j=1,2,\dots,n\\ i=1,2,\dots,m}}$.

Верхний индекс T – знак транспонирования.

Примеры

$$A=\begin{pmatrix}3&2&7\\4&2&6\end{pmatrix},\qquad A^T=\begin{pmatrix}3&4\\2&2\\7&6\end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Замечание

Букву "T" справа вверху от имени матрицы принято называть знаком транспонирования. Этот знак является верхним индексом, а не показателем степени.

Замечание

"Двойное" транспонирование возвращает матрице её исходный вид:

$$(A^T)^T = A\,.$$

Теорема о транспонировании произведения матриц

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Без доказательства.

Определители и методы их вычисления

Замечание

Кроме уже рассмотренных операций над матрицами, существуют функции от матриц. Простейшими являются функции, возвращающие число, зависящее от элементов матрицы. Первыми такими функциями будут определитель и ранг матрицы.

Определение

Определитель "квадратной" матрицы первого порядка $A = (\,a_{11})$ есть тот единственный элемент матрицы, число a_{11}, из которого она состоит.

Обозначение: $\det A = |A| = \det(\,a_{11}) = |\,a_{11}| = a_{11}\,.$

Две вертикальные линии ($|\ \ |$) здесь есть признак определителя матрицы, но не знаки модуля.

Определитель квадратной матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ есть число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Обозначение:

$$\det A = |A| = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \,. \qquad (1)$$

Определение

Определитель квадратной матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

есть число

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Обозначение:

$$\det A = |A| = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \,. \qquad (2)$$

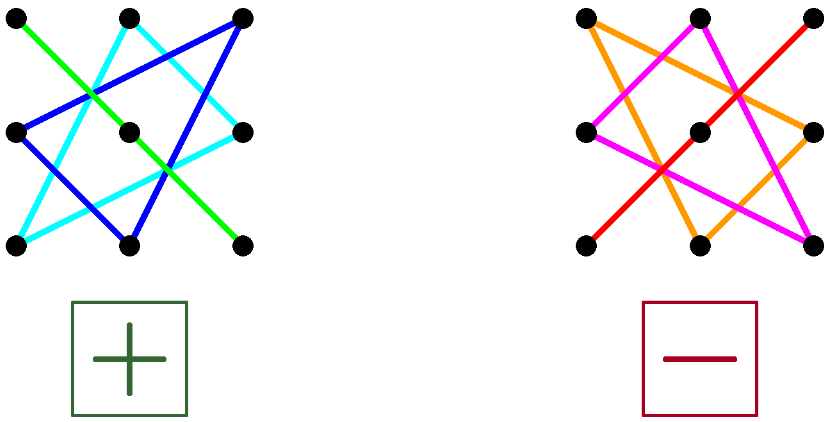


Рис. 2

На Рис. 2 показаны шаблоны для сбора элементов матрицы, произведение которых входит (на правах слагаемого) в определитель со "своим" знаком (левый шаблон) и с противоположным знаком (правый шаблон).

Замечания

Вертикальные линии, применяемые в обозначении определителя, к модулю отношения не имеют. Определитель матрицы первого порядка $\det(a_{11}) = |a_{11}| = a_{11}$ внешне похож на модуль числа, но таковым не является. Путаница возникает редко, поскольку определитель матрицы порядка 1 практически не применяется.

Вместо слова "определитель" иногда применяется слово "детерминант".

Замечание

Определитель 1–го порядка содержит $1! = 1$ слагаемое.

Определитель 2–го порядка содержит $2! = 1 \cdot 2 = 2$ слагаемых.

Определитель 3–го порядка содержит $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ слагаемых.

Определитель 4–го порядка содержит $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ слагаемых.

Определитель n–го порядка содержит $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ слагаемых.

Определение

Матрица, состоящая из двух строк и n столбцов (n – натуральное число)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ n_1 & n_2 & n_3 & \ldots & n_n \end{pmatrix}$$

называется подстановкой, если среди элементов её второй строки (чисел $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_n$) по одному разу встречается каждое из чисел $1, 2, 3, \ldots, n$.

Матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

называется тождественной подстановкой.

Примеры подстановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определение

Инверсия – преобразование подстановки, при котором два элемента второй строки обмениваются значениями.

Примеры инверсий

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определение

Подстановка называется чётной, если её можно преобразовать в тождественную подстановку чётным количеством инверсий.
Подстановка называется нечётной, если её можно преобразовать в тождественную подстановку нечётным количеством инверсий.

Пример

Подстановка
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
является нечётной, поскольку сведение её к тождественной подстановке требует трёх (нечётное количество) инверсий:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример

Подстановка
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
является чётной, поскольку сведение её к тождественной подстановке требует двух (чётное количество) инверсий:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Замечание

Сводить подстановку к тождественной можно разными последовательностями инверсий. Однако, чётная подстановка перейдёт в тождественную только в результате чётного количества инверсий. Нечётная – только в результате нечётного количества инверсий.

Определение

Определитель $\det A$ квадратной матрицы A порядка n равен сумме всех таких произведений, содержащих n из её элементов, что в каждом произведении представлено по одному элементу из каждой строки и по одному элементу из каждого столбца, и каждое произведение входит в сумму либо со своим знаком, либо со знаком противоположным.

Количество произведений, участвующих в сумме, есть $n!$.

Каждое произведение (в силу коммутативности) может быть представлено в виде $a_{1,n_1} \cdot a_{2,n_2} \cdot a_{3,n_3} \cdot \ \ldots \ \cdot a_{n,n_n}$, то есть, первый индекс каждого сомножителя равен его порядковому номеру в произведении. При этом представлении произведению ставится в соответствие его подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ n_1 & n_2 & n_3 & \ldots & n_n \end{pmatrix}.$$

Если подстановка чётная, произведение входит в сумму со своим знаком. Если подстановка нечётная, произведение входит в сумму с противоположным знаком.

Пример

Определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

содержит 24 слагаемых, запоминать их все нет ни возможности, ни необходимости.

Одно из этих слагаемых есть $-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$, поскольку соответствующая подстановка – нечётная (стр. 16).

Другое из этих слагаемых есть $+a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$, поскольку соответствующая подстановка – чётная (стр. 16).

Замечание

Ясно, что строгое определение определителя произвольного порядка, как правило, представляет ценность только для будущих профессионалов–математиков. В данном материале будет сформулирован другой, более удобный для практики способ вычисления определителя произвольного порядка.

Определение

Минор порядка k из элементов матрицы $A_{m\times n}$ – это определитель квадратной матрицы, элементы которой расположены на пересечении выбранных в этой матрице k строк и k столбцов.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 6 & 9 \\ 2 & \boxed{3} & 6 & 8 & \boxed{7} & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 1 & 7 & 2 & 4 & 8 \\ 5 & \boxed{2} & 8 & 9 & \boxed{4} & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Один из миноров порядка 2 состоит из элементов, стоящих на пересечении красных строк (второй и четвёртой) и зелёных столбцов (второго и пятого):

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 7\cdot 2 = -2.$$

В рассмотренном примере взят лишь один из всех возможных миноров 2-го порядка для данной матрицы. На элементах данной матрицы можно построить 126 миноров 2-го порядка, 140 миноров 3-го порядка, 35 миноров 4-го порядка. Закономерен вопрос, как все эти миноры обозначить, и как все перебрать. Ответ прост: как правило, все перебирать и не нужно.

Определение

Минор M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы $A_{n\times n}$ – это определитель матрицы, которая получится из матрицы $A_{n\times n}$ удалением (вычёркиванием) из неё i–й строки и j–го столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы определяется формулой $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Замечание

Обозначение для минора M_{ij} из элементов квадратной матрицы использует не один индекс (порядок минора), а два индекса (номера вычеркнутых строки и столбца). Путаница с обозначением для миноров, как правило, не возникает, поскольку "двухиндексный" минор применяется гораздо чаще.

Знак "$\times$" в обозначении матрицы $A_{n\times n}$ позволяет избежать путаницы с алгебраическим дополнением, с числом A_{ij} .

Теорема о разложении определителя по строке или столбцу

Для квадратной матрицы третьего порядка справедливы соотношения:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \,, \tag{3.1}$$

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \,, \tag{3.2}$$

$$\det A = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \,. \tag{3.3}$$

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \,, \tag{3.4}$$

$$\det A = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \,, \tag{3.5}$$

$$\det A = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \,. \tag{3.6}$$

Кроме того, следующие два соотношения справедливы при $i \neq j$:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = 0 \,, \tag{3.7}$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + a_{3i}A_{3j} = 0 \,. \tag{3.8}$$

Без доказательства. Но следует заметить, что доказательство очень простое.

Замечание

Принято говорить, что формула (3.1) даёт разложение определителя по первой строке, (3.2) – по второй строке, (3.3) – по третьей строке, (3.4) – по первому столбцу, (3.5) – по второму столбцу, (3.6) – по третьему столбцу. Таким образом, вместе с формулой (2), имеется уже семь способов вычисления определителя 3–го порядка.

<u>Определение</u>

Символом Кронекера называется величина $\delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{array} \right| .$

<u>Замечание</u>

Символ Кронекера можно использовать для представления единичной матрицы:

$$E_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}, \qquad E_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix},$$

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix} = \{\delta_{ij}\}_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n}} .$$

Таким образом, квадратная матрица, заполненная "символами Кронекера", есть единичная матрица.

<u>Замечание</u>

Формулы (3.1)–(3.8) можно обобщить на случай квадратной матрицы $A_{n\times n}$ произвольного порядка n:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \delta_{ik} \cdot \det A\,, \tag{4.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \delta_{jk} \cdot \det A\,. \tag{4.2}$$

В частности, при $n = 4$, $k = i$, формула (4.1), принимающая вид

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4}\,, \tag{5}$$

даёт способ вычислить определитель 4-го порядка разложением его по i–й строке. Величины A_{ij} $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4\,,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ выражаются через определители 3–го порядка, вычислять которые мы уже умеем.

Теорема об определителе произведения матриц

$$\det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B\,.$$

Без доказательства.

Теорема

Определитель верхней (или нижней) треугольной матрицы равен произведению её диагональных элементов.

Доказательство

Для случая $n=2$ из формулы (1) следует, что

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\,,$$

второе слагаемое в (1) обращается в нуль, так как $a_{21}=0$.

Для случая $n=3$ из формулы (2) следует, что

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\,,$$

прочие пять слагаемых в (2) обращаются в нуль, так как в каждом из них имеется нулевой сомножитель.

Для случая $n=4$ из формулы (5) при $i=4$ следует, что

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{41}}_{=0}A_{41} + \underbrace{a_{42}}_{=0}A_{42} + \underbrace{a_{43}}_{=0}A_{43} + a_{44}A_{44} = a_{44}A_{44} =$$

$$= a_{44}\cdot\underbrace{(-1)^{4+4}}_{=+1}\cdot M_{44} = a_{44}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{44}\cdot a_{11}a_{22}a_{33}\,.$$

Аналогично определитель верхней треугольной матрицы порядка $n=5$ выражается через определитель верхней треугольной матрицы порядка $n=4$, и так далее.

Доказательство для случая нижней треугольной матрицы предоставляется слушателям.

Пример

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot 6 = 144\,.$$

Замечание

Возникает естественный вопрос: а можно ли что-нибудь с матрицей сделать такое, чтобы определитель её не изменился, а сама она стала верхней треугольной? Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема об элементарных преобразованиях строк определителя

Пусть дана матрица $A_{n\times n}$.

1. При умножении всех элементов одной из строк матрицы A на число λ определитель $\det A$ также умножается на число λ. Практическую ценность имеет только случай $\lambda \neq 0$.
2. При обмене двух строк матрицы A местами знак определителя $\det A$ меняется на противоположный.
3. Если ко всем элементами одной строки матрицы A прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на некий общий множитель λ, определитель $\det A$ не изменится.

Без доказательства.

Замечание

Пункт 1 теоремы может быть истолкован так: общий множитель строки может быть вынесен за знак определителя.

Всё, что сказано в теореме о строках, сохраняет силу и для столбцов.

Замечание

Метод Гаусса позволяет преобразовать матрицу к треугольному виду с помощью элементарных преобразований строк. Считаем, что в матрице n строк и n столбцов.

Идея метода состоит в следующем.

Пусть i есть номер "текущей" строки. Поначалу $i = 1$.

Шаг 1. Элемент a_{ii} делается равным единице. Проще всего этого достичь с помощью Преобразования 1, но иногда есть смысл в использовании и двух других преобразований.

Шаг 2. Если $i < n$, элементы a_{ki} $(k = i+1,\, i+2,\, \ldots,\, n)$ делаются равными нулю с помощью Преобразования 3.

Шаг 3. Если $i < n$, то i следует увеличить на единицу и вернуться к Шагу 1. Но если $i = n$, работа метода заканчивается, поскольку матрица уже стала верхней треугольной.

Отметим, что метод Гаусса разъяснён здесь не полностью. То, о чём рассказано, составляет лишь т.н. прямой ход метода Гаусса. Для вычисления определителя прямого хода вполне достаточно.

Замечание

При исполнении Шага 1 может оказаться, что $a_{ii} = 0$. Тогда под этим элементом, в одном с ним столбце, следует найти ненулевой элемент, то есть, найти такое число k (где $i < k \le n$), что $a_{ki} \ne 0$, затем обменять местами строки с номерами i и k (то есть, совершить Преобразование 2), и продолжить исполнение метода Гаусса.

Но может оказаться и так, что

$$a_{ii} = a_{i+1,i} = a_{i+2,i} = \ldots = a_{ni} = 0\,,$$

то есть, элемент a_{ii} сделать равным единице методом Гаусса невозможно. Тогда вычисление определителя следует прекратить, поскольку для такого случая можно доказать, что определитель равен нулю.

Задача

Методом Гаусса найти определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение

Элементарное преобразование № 3 применяется несколько раз для того, чтобы свести матрицу к верхней треугольной. Каждый раз к элементам одной строки прибавляются соответствующие элементы другой, красной строки, умноженные на одно и то же, бирюзовое число.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+(-1)\cdot 2 & 4+(-1)\cdot 3 & 5+(-1)\cdot 6 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2+(-2)\cdot 1 & 3+(-2)\cdot 1 & 6+(-2)\cdot(-1) \\ 4+(-4)\cdot 1 & 2+(-4)\cdot 1 & 3+(-4)\cdot(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0+2\cdot 0 & -2+2\cdot 1 & 7+2\cdot 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 23 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 1\cdot 23 = 23\,.$$

Первым шагом организована единица на первой позиции в первой строке. Заметим, что эту единицу можно было получить и иным способом – вынесением "общего" множителя "3" за знак определителя (элементарное преобразование № 1). Но после такого действия первая строка содержала бы числа $\left(1 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{3}\right)$, и далее пришлось бы работать с дробными числами, что менее приятно (в силу бо́льшей вероятности ошибки).

Обращение матриц

Определение

Пусть дана квадратная матрица $A = A_{n\times n}$.

Квадратная матрица $B = B_{n\times n}$ называется обратной по отношению к матрице A, если $A\cdot B = B\cdot A = E$.

Обозначение: $B = A^{-1}$.

Построение матрицы, обратной к данной матрице, принято называть обращением матрицы.

Определение

Пусть дана матрица $A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,n}}$.

Матрица $B = \{b_{ij}\}_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,n}}$ называется присоединённой по отношению

к матрице A, если $b_{ij} = A_{ji}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$.
Обозначение: $B = \tilde{A}$.

Замечание

Напомним, что A_{ij} есть алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.
Объяснение присоединённой матрице можно дать так. Если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \ldots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \ldots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \ldots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \ldots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Иными словами, чтобы из матрицы сделать присоединённую, нужно все её элементы заменить их алгебраическими дополнениями, а затем полученную таким образом матрицу транспонировать.

Определение

Пусть дана матрица $A_{n \times n}$. Если $\det A = 0$, то матрица A называется особенной, или вырожденной.

Теорема об обратной матрице

Если квадратная матрица A не является вырожденной,

то $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$.

Доказательство

Для получения элемента с индексами i, k матрицы $A \cdot A^{-1}$ следует, по правилам перемножения матриц, i–ю строку матрицы A умножить на k–й столбец матрицы A^{-1}. Выделим цветом в матрицах эту строку и этот столбец:

$$A\cdot A^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{\det A}A_{11} & \dots & \frac{1}{\det A}A_{k1} & \dots & \frac{1}{\det A}A_{n1}\\ \frac{1}{\det A}A_{12} & \dots & \frac{1}{\det A}A_{k2} & \dots & \frac{1}{\det A}A_{n2}\\ \frac{1}{\det A}A_{13} & \dots & \frac{1}{\det A}A_{k3} & \dots & \frac{1}{\det A}A_{n3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{\det A}A_{1n} & \dots & \frac{1}{\det A}A_{kn} & \dots & \frac{1}{\det A}A_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots\\ \dots & a_{i1}\frac{1}{\det A}A_{k1}+a_{i2}\frac{1}{\det A}A_{k2}+a_{i3}\frac{1}{\det A}A_{k3}+\dots+a_{in}\frac{1}{\det A}A_{kn} & \dots\\ \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots\\ \dots & \frac{1}{\det A}\left(a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+a_{i3}A_{k3}+\dots+a_{in}A_{kn}\right) & \dots\\ \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}\underbrace{=}_{(4.1)}$$

$$\underbrace{=}_{(4.1)}\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots\\ \dots & \frac{1}{\det A}(\delta_{ik}\det A) & \dots\\ \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots\\ \dots & \delta_{ik} & \dots\\ \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}=$$

$$=\{\delta_{ij}\}_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,n}}=E_{n\times n}=E\,.$$

Нами проверено равенство $A\cdot A^{-1}=E$ на основе соотношения (4.1). Аналогично проверяется равенство $A^{-1}\cdot A=E$ на основе соотношения (4.2).

Задача

Пусть $A=\begin{pmatrix}5&1&7\\3&6&5\\2&8&4\end{pmatrix}$. Найти A^{-1}.

Решение

Найдём миноры.

$$M_{11}=\begin{vmatrix}6&5\\8&4\end{vmatrix}=-16\,,\qquad M_{12}=\begin{vmatrix}3&5\\2&4\end{vmatrix}=2\,,\qquad M_{13}=\begin{vmatrix}3&6\\2&8\end{vmatrix}=12\,,$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}1&7\\8&4\end{vmatrix}=-52\,,\qquad M_{22}=\begin{vmatrix}5&7\\2&4\end{vmatrix}=6\,,\qquad M_{23}=\begin{vmatrix}5&1\\2&8\end{vmatrix}=38\,,$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}1&7\\6&5\end{vmatrix}=-37\,,\qquad M_{32}=\begin{vmatrix}5&7\\3&5\end{vmatrix}=4\,,\qquad M_{33}=\begin{vmatrix}5&1\\3&6\end{vmatrix}=27\,.$$

Вычислим алгебраические дополнения.

$$A_{11} = M_{11} = -16, \qquad A_{12} = -M_{12} = -2, \qquad A_{13} = M_{13} = 12,$$

$$A_{21} = -M_{21} = 52, \qquad A_{22} = M_{22} = 6, \qquad A_{23} = -M_{23} = -38,$$

$$A_{31} = M_{31} = -37, \qquad A_{32} = -M_{32} = -4, \qquad A_{33} = M_{33} = 27.$$

Найдём определитель матрицы A разложением по первой, второй и третьей строкам:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 5 \cdot (-16) + 1 \cdot (-2) + 7 \cdot 12 = 2\,,$$

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 3 \cdot 52 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot (-38) = 2\,,$$

$$\det A = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = 2 \cdot (-37) + 8 \cdot (-4) + 4 \cdot 27 = 2\,.$$

Совпадене трёх результатов свидетельствует в пользу их верности.

Построим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 52 & -37 \\ -2 & 6 & -4 \\ 12 & -38 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 26 & -\frac{37}{2} \\ -1 & 3 & -2 \\ 6 & -19 & \frac{27}{2} \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 26 & -\frac{37}{2} \\ -1 & 3 & -2 \\ 6 & -19 & \frac{27}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot (-8) + 1 \cdot (-1) + 7 \cdot 6 & 5 \cdot 26 + 1 \cdot 3 + 7 \cdot (-19) & 5 \cdot (-\frac{37}{2}) + 1 \cdot (-2) + 7 \cdot \frac{27}{2} \\ 3 \cdot (-8) + 6 \cdot (-1) + 5 \cdot 6 & 3 \cdot 26 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot (-19) & 3 \cdot (-\frac{37}{2}) + 6 \cdot (-2) + 5 \cdot \frac{27}{2} \\ 2 \cdot (-8) + 8 \cdot (-1) + 4 \cdot 6 & 2 \cdot 26 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot (-19) & 2 \cdot (-\frac{37}{2}) + 8 \cdot (-2) + 4 \cdot \frac{27}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Системы линейных алгебраических уравнений

Замечание

Система Линейных Алгебраических Уравнений – словосочетание, часто применяемое и весьма длинное. Далее, для уменьшения этой длины, мы будем пользоваться аббревиатурой СЛАУ, которая широко распространена в литературе.

Определение

n–мерный столбец, или n–мерный вектор – это матрица, состоящая из n строк и одного столбца.

При обозначении элементов столбца обычно сохраняется только один индекс (второй, заведомо равный единице, не нужен).

Примеры

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– сответственно двумерный, трёхмерный и четырёхмерный векторы, а также, сответственно, двумерный, трёхмерный и четырёхмерный нулевые векторы.

Определение

Пусть дана СЛАУ

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{32}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_3 \\ & \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right| . \qquad (6)$$

Тогда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей коэффициентов системы, или главной матрицей системы,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

– столбцом правых частей системы,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

– столбцом неизвестных,

$$A \cdot X = B \tag{7}$$

– матричной формой записи СЛАУ.

Теорема о матричном способе решения СЛАУ

Если СЛАУ (7) содержит n уравнений относительно n неизвестных, и если $\det A \neq 0$,

то решение системы выражается формулой $X = A^{-1} \cdot B$.

Доказательство

$$A \cdot X = B \implies A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \implies (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies$$

$$\implies E \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies X = A^{-1} \cdot B\,.$$

Задача

Найти решения двух СЛАУ с одинаковыми коэффициентами при неизвестных в левых частях уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} 5u_1 + u_2 + 7u_3 = 8 \\ 3u_1 + 6u_2 + 5u_3 = 1 \\ 2u_1 + 8u_2 + 4u_3 = -2 \end{array}\right| , \qquad \left\{\begin{array}{l} 5v_1 + v_2 + 7v_3 = -2 \\ 3v_1 + 6v_2 + 5v_3 = 5 \\ 2v_1 + 8v_2 + 4v_3 = 8 \end{array}\right| .$$

Решение

Матрица коэффициентов A ранее уже была рассмотрена (стр. 26–27), обратная матрица для неё уже найдена:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 26 & -\frac{37}{2} \\ -1 & 3 & -2 \\ 6 & -19 & \frac{27}{2} \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

откуда $u_1 = -1,\ u_2 = -1,\ u_3 = 2,\ \ v_1 = -2,\ v_2 = 1,\ v_3 = 1.$

Замечание

Матричный способ решения системы выгоден тогда, когда требуется решить несколько (или много) СЛАУ с одинаковыми наборами коэффициентов в левых частях уравнений и разными правыми частями. Для одной конкретной системы матричный способ излишне трудоёмок.

Теорема Крамера

Если СЛАУ (7) содержит n уравнений относительно n неизвестных, то она имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$.

При этом решение выражается формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \ldots \quad, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \tag{8}$$

Формулы (8) называются формулами Крамера. В них: $\Delta = \det A$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \; \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & b_n \end{vmatrix},$$

то есть Δ_j получается из Δ заменой j–го столбца на столбец правых частей системы уравнений.

Без доказательства.

Замечание

Метод Крамера менее трудоёмок, чем метод обратной матрицы, но и он на практике применяется нечасто. Во всяком случае, если СЛАУ содержит тысячи уравнений, метод Крамера невозможно реализовать даже на самой ультрасовременной вычислительной технике.

Определение

Ранг матрицы – это наивысший порядок минора, построенного из элементов матрицы, не равного нулю.
Если число r есть ранг матрицы A, то существует хотя бы один ненулевой минор порядка r из элементов матрицы A, а все миноры более высокого порядка равны нулю.
Обозначение: $r = \operatorname{rang} A$, или $r = \operatorname{rank} A$.

Всякий ненулевой минор (из элементов матрицы) порядка, равного рангу матрицы, называется базисным минором.

Замечание

Если заниматься простым перебором всех возможных миноров 2–го порядка (а их, как в примере на стр. 17, может оказаться очень много), чтобы только самый последний из них оказался отличным от нуля, а потом перебирать все возможные миноры 3–го порядка с таким же конечным результатом, и так далее, то объём работы по выяснению ранга матрицы может оказаться ужасающе большим. На практике ранг матрицы непосредственно по определению не вычисляют.

Теорема об элементарных преобразованиях строк матрицы

Пусть дана матрица $A_{m\times n}$. Следующие преобразования строк матрицы, называемые элементарными, не изменяют ранга матрицы.

1. Умножение всех элементов одной из строк матрицы A на общий множитель $\lambda \neq 0$.
2. Обмен двух строк матрицы A местами.
3. Прибавление к каждому из элементов одной строки матрицы A соответствующего элемента другой строки, умноженного на некий общий множитель λ.
4. Удаление (вычёркивание) нулевой строки (строки, содержащей только нулевые элементы).
5. Удаление (вычёркивание) одной из двух пропорциональных друг другу строк.

Без доказательства.

Пример

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ методом Гаусса.

Решение

Элементарное преобразование № 3 применяется несколько раз для того, чтобы свести матрицу к верхней треугольной. Каждый раз к элементам одной строки прибавляются соответствующие элементы другой, красной строки, умноженные на одно и то же, бирюзовое число.

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3+(-1)\cdot 2 & 4+(-1)\cdot 3 & 5+(-1)\cdot 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+(-2)\cdot 1 & 3+(-2)\cdot 1 & 4+(-2)\cdot 1 \\ 4+(-4)\cdot 1 & 3+(-4)\cdot 1 & 2+(-4)\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0+0 & -1+1 & -2+2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2\,.$$

Ранг равен двум потому, что минор второго порядка, элементы которого показаны синим цветом, отличен от нуля (равен единице), а минор порядка три и выше невозможно построить из элементов матрицы, в которой только две строки.

Минор второго порядка, о котором шла речь, является базисным.

Замечание

Язык общения с сайтом WolframAlpha.com состоит из команд, тексты которых пользователь набирает в командной строке сайта, то есть, внутри рамки оранжевого цвета .

Будем называть этот язык словом Mathematica, поскольку он почти без изменений взят из широко известного программного пакета Mathematica, производимого компанией Wolfram Research.

Команда представляет собой обращение к одной из стандартных функций языка, либо к нескольким командам (к суперпозиции нескольких команд).

Имя функции принято начинать заглавной буквой латинского алфавита. Параметры функции принято размещать в квадратных (а не в круглых) скобках, и отделять друг от друга запятыми.

Ранг матрицы можно вычислить в среде WolframAlpha.com с помощью функции Rank:

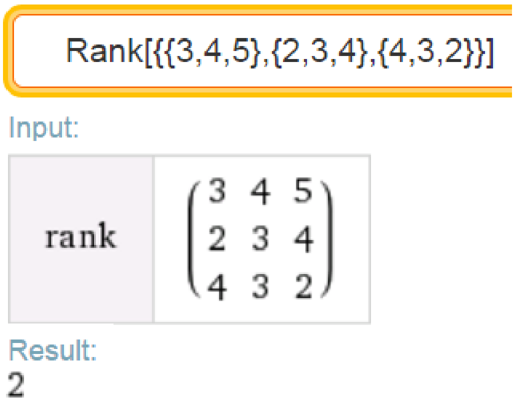


Рис. 3

Определение

СЛАУ (6) (или (7)) называется совместной, если она имеет решение. СЛАУ называется несовместной, если она не имеет решения.

Примеры

Система уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{array}\right|$$

несовместна, поскольку первое и второе уравнения явно противоречат друг другу.

Система уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3 \\ 4x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 5 \end{array}\right| \tag{9}$$

также несовместна, но противоречие "зарыто" несколько глубже и в глаза не бросается. Если первое уравнение в (9) умножить на 5, второе уравнение умножить на (-2), и полученные уравнения сложить, получится уравнение $4x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 4$, которое противоречит третьему уравнению в (9).

Определение расширенной матрицы

Пусть дана СЛАУ, состоящая из m уравнений относительно n неизвестных

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right| . \qquad (10)$$

Тогда матрица

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

называется расширенной матрицей СЛАУ.

Теорема Кронекера–Капелли

СЛАУ (10) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов левых частей (главной матрицы системы) равен рангу расширенной матрицы.

Без доказательства.

Определение метода Гаусса решения СЛАУ

Алгоритм Гаусса решения СЛАУ представляет собой цепь элементарных преобразований строк расширенной матрицы системы. Каждое элементарное преобразование строки означает равносильное преобразование СЛАУ.

Целью преобразований является построение единичной матрицы слева от вертикальной черты и одновременное вычисление ранга матрицы A и ранга матрицы $\overline{A}$.

Алгоритм содержит два крупных этапа – прямой ход и обратный ход.

Далее будет рассмотрен только случай "хорошей" расширенной матрицы, то есть такой, что число строк в ней совпадает с рангом и с числом столбцов главной матрицы, а также с рангом расширенной матрицы.

При совершении прямого хода создаются единицы на главной диагонали главной матрицы системы и нули в столбцах под этими единицами.

При совершении обратного хода создаются нули в столбцах над "диагональными" единицами.

Прямой ход.

Пусть i есть номер "текущей" строки. Поначалу $i = 1$.

Шаг 1. Элемент a_{ii} делается (элементарными преобразованиями строк) равным единице.

При решении задач в тетради или на доске для этого, чаще всего, к строке с номером i прибавляется какая-нибудь k–я строка (где $k > i$), умноженная на "подходящее число" (Элементарное Преобразование 3).

При решении задачи на компьютере (а если $i = m$, то и при решении в тетради) i–я строка умножается на число $\frac{1}{a_{ii}}$ (Элементарное Преобразование 1). Если $a_{ii} = 0$, то среди строк, расположенных ниже "текущей", разыскивается такая k–я строка ($k > i$), в которой $a_{ki} \neq 0$, и эта строка обменивается местами с i–й строкой (Элементарное Преобразование 2).
После такого обмена домножение i–й строки на число $\frac{1}{a_{ii}}$ становится возможным.

Если $a_{ki} = 0$, $\forall k \geq i$, то i–й столбец матрицы объявляется проблемным, и разговор о такой ситуации будет вестись позже.

Шаг 2. Элементы a_{ki} (для каждого k такого, что $i < k \leq n$) делаются (с помощью Элементарного Преобразования 3) равными нулю. Для этого к строке с номером k прибавляется строка с номером i, умноженная на общий множитель $(-a_{ki})$. . Шаг 3. Если $i < n$, то i следует увеличить на единицу и вернуться к Шагу 1. Но если $i = n$, прямой ход метода Гаусса заканчивается.

Обратный ход.

Пусть i есть номер "текущей" строки. Поначалу $i = n$.

Шаг 4. Элементы a_{ki} (для каждого k такого, что $1 \le k < i$) делаются (с помощью Элементарного Преобразования 3) равными нулю. Для этого к строке с номером k прибавляется строка с номером i, умноженная на общий множитель $(-a_{ki})$.

Шаг 5. Если $i > 2$, то i следует уменьшить на единицу и вернуться к Шагу 4. Но если $i = 2$, обратный ход метода Гаусса заканчивается.

По завершении работы метода Гаусса слева от вертикальной черты располагается единичная матрица, а справа от черты – столбец, дающий решение СЛАУ.

Базисный минор "хорошей" расширенной матрицы равен единице, поскольку берётся от единичной матрицы.

Замечание

Если расширенная матрица не является "хорошей", то ранг главной матрицы меньше числа её столбцов. В таком случае СЛАУ либо несовместна, либо имеет бесконечное множество решений.

Каждый раз, когда в расширенной матрице появляется возможность выполнить Элементарные Преобразования 4 или 5, их следует безотлагательно выполнять, уменьшая тем самым число строк матрицы.

Если возникает ситуация, когда число строк в главной матрице можно было бы уменьшить (Элементарными Преобразованиями 4 или 5), а в расширенной матрице этого сделать нельзя, это означает неравенство ранга главной матрицы и ранга расширенной матрицы, то есть, по теореме Кронекера–Капелли, означает несовместность СЛАУ.

Далее можно обсуждать только совместные СЛАУ.

Пусть r есть ранг главной и расширенной матриц, а n есть число искомых неизвестных (число столбцов главной матрицы).

В простейшем (для совместной СЛАУ) случае, методом Гаусса можно создать единичную матрицу из первых r столбцов главной матрицы. В результате расширенная матрица обретает вид

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1,r+1} & a_{1,r+2} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_{2,r+1} & a_{2,r+2} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & a_{3,r+1} & a_{3,r+2} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{r,r+1} & a_{r,r+2} & \dots & a_{rn} & b_r \end{array}\right),$$

означающий СЛАУ

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + a_{1,r+1}x_{r+1} + a_{1,r+2}x_{r+2} + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ x_2 + a_{2,r+1}x_{r+1} + a_{2,r+2}x_{r+2} + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ x_3 + a_{3,r+1}x_{r+1} + a_{3,r+2}x_{r+2} + \ldots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & \dots & \\ x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + a_{r,r+2}x_{r+2} + \ldots + a_{rn}x_n & = & b_r \end{array}\right|. \qquad (11)$$

Теперь, если положить

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{r+1} & = & C_1 \\ x_{r+2} & = & C_2 \\ x_{r+3} & = & C_3 \\ & \dots & \\ x_n & = & C_{n-r} \end{array}\right|, \qquad (12)$$

где C_1, C_2, C_3, ... , C_{n-r} – произвольные константы, то систему (11) можно будет переписать в виде

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & b_1 - a_{1,r+1}C_1 - a_{1,r+2}C_2 - \ldots - a_{1n}C_{n-r} \\ x_2 & = & b_2 - a_{2,r+1}C_1 - a_{2,r+2}C_2 - \ldots - a_{2n}C_{n-r} \\ x_3 & = & b_3 - a_{3,r+1}C_1 - a_{3,r+2}C_2 - \ldots - a_{3n}C_{n-r} \\ & \dots & \\ x_r & = & b_r - a_{r,r+1}C_1 - a_{r,r+2}C_2 - \ldots - a_{rn}C_{n-r} \end{array}\right|. \qquad (13)$$

Набор соотношений (12)–(13) даёт так называемое общее решение СЛАУ.

Теорема об общем решении системы линейных алгебраических уравнений

Пусть набор чисел $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$, ... , $\tilde{x}_n$ удовлетворяет СЛАУ (10). Пусть набор соотношений (12)–(13) получен из СЛАУ (10) методом Гаусса.

Тогда существует такой набор чисел $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, $\tilde{C}_3$, ..., $\tilde{C}_{n-r}$, что при подстановке в (12)–(13) вместо произвольных констант C_1, C_2, C_3, ..., C_n он порождает в левых частях (13) и (12) набор чисел $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$, ..., $\tilde{x}_n$.

Без доказательства.

Замечание

Набор чисел $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$, ..., $\tilde{x}_n$, удовлетворяющий СЛАУ (10), принято называть частным решением СЛАУ.

Теорема об общем решении СЛАУ утверждает, казалось бы, простую истину: всякое частное решение есть частный случай общего решения.

Замечание

В случае, когда для совместной СЛАУ методом Гаусса нельзя создать единичную матрицу из первых r столбцов главной матрицы (то есть, невозможно собрать базисный минор из первых r столбцов), её можно создать из каких-то других r столбцов. В частности, проблемный столбец (который не удаётся превратить в столбец с единицей на главной диагонали и нулями во всех позициях ниже того единичного диагонального элемента) не должен входить в базисный минор.

Эти r базисных столбцов совсем не обязательно будут начинаться первым столбцом и совсем не обязательно будут следовать подряд.

Определение

Пусть r есть ранг главной и расширенной матриц, а n есть число искомых неизвестных (число столбцов главной матрицы) СЛАУ (10). Тогда число $d = n - r$ принято называть дефектом СЛАУ.

Замечание

Дефект системы уравнений – это количество произвольных констант в её общем решении.

При решении практических задач, порождающих системы уравнений, решение, в большинстве случаев, должно быть единственным. Дефект системы уравнений – это количество "недостающих" условий в постановке практической задачи.

При решении практических задач бывает методически выгодно сначала построить общее решение "неполной" системы, и только затем применять к нему дополнительные условия. Таким образом, неравенство $d > 0$ вовсе не означает некорректность постановки практической задачи.

Линейное пространство

Определение

Множество $\mathcal{E}$ называется линейным пространством, если определены операции сложения двух его элементов и умножения его элемента на число, и эти операции подчиняются следующим двум требованиям.

1. Если $X \in \mathcal{E}$ и $Y \in \mathcal{E}$, то $X + Y \in \mathcal{E}$.
2. Если $X \in \mathcal{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda \cdot X \in \mathcal{E}$.

Нулевым элементом 0 линейного пространства $\mathcal{E}$ называется элемент, обладающий свойствами:

1. $X + 0 = X$, $\forall X \in \mathcal{E}$.
2. $0 \cdot X = 0$, $\forall X \in \mathcal{E}$.

Замечание

Результатом операций сложения двух матриц размера $m \times n$ и умножения матрицы размера $m \times n$ на число является матрица того же размера $m \times n$. Следовательно, множество матриц размера $m \times n$ является линейным пространством.

Замечание

Бинарные операции сложения двух элементов и умножнения элемента на число принято называть линейными операциями.

Замечание

В записи операции умножения элемента на число, также, как в записи операции перемножения чисел, знак умножения $\cdot$ нередко опускается.

Замечание

Нет смысла для нулевого элемента линейного пространства вводить новое, особенное обозначение. Отличие такого нулевого элемента от числового нуля будет далее выражаться, разве что, цветом. По контексту всегда можно определить, идёт ли речь об обычном нуле, или о нулевом элементе, так что и выделение цветом будет проводиться только на первых порах.

Определение

Пусть $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k$ – элементы линейного пространства $\mathcal{E}$, и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ – числа. Величину

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \ldots + \lambda_k X_k$$

принято называть линейной комбинацией элементов $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k$. Линейная комбинация называется тривиальной, если все её числовые коэффициенты равны нулю: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_k = 0$. Линейная комбинация называется нетривиальной, если найдётся индекс i $(1 \le i \le k)$ такой, что $\lambda_i \ne 0$.

Определение

Пусть $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k$ – элементы линейного пространства $\mathcal{E}$. Если из равенства

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \ldots + \lambda_k X_k = 0$$

неминуемо следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_k = 0$, то элементы $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k$ принято называть линейно независимыми.
Если равенство

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \ldots + \lambda_k X_k = 0$$

возможно при не всех $\lambda_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$, то элементы $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k$ принято называть линейно зависимыми.

Определение

Пусть $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ – элементы линейного пространства $\mathcal{E}$, и пусть они подчиняются требованиям:

1. $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ – линейно независимы.
2. $\forall X \in \mathcal{E}$ существует набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ такой, что

$X = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \ \ldots \ + \lambda_n E_n$.

Тогда набор элементов E_1 , E_2 , E_3 , ... , E_n есть базис пространства $\mathcal{E}$, а число n есть размерность пространства.

Замечание

С помощью операций сложения матриц и умножения матрицы на число можно определить такую конструкцию, как линейная комбинация матриц:

$$\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 + \lambda_3 \cdot A_3 + \ldots + \lambda_\ell \cdot A_\ell \,,$$

где A_1 , A_2 , A_3 , ... , A_ℓ – матрицы одного размера, λ_1 , λ_2 , λ_3 , ... , λ_ℓ – вещественные числа, ℓ – количество матриц.

В частности, если $\ell = 2$, то комбинация $1 \cdot A_1 + (-1) \cdot A_2 = A_1 - A_2$ позволяет определить разность двух матриц. Разумеется, можно дать отдельное определение разности двух матриц, похожее на определение их суммы.

Замечание

Базисом линейного пространства матриц размера 2×2 может служить набор элементов

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, любая матрица размера 2×2 может быть представлена в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} E_1 + a_{12} E_2 + a_{21} E_3 + a_{22} E_4 \,.$$

Линейную независимость элементов E_1 , E_2 , E_3 , E_4 предлагается доказать слушателям.

Определение

СЛАУ, состоящая из m уравнений относительно n неизвестных, и имеющая все нулевые правые части,

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n & = & 0 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right| , \tag{14}$$

называется однородной. Если в правой части хотя бы одного из уравнений присутствует ненулевое значение, СЛАУ называется неоднородной.

Замечание

Однородная СЛАУ совместна, поскольку т.н. тривиальное (нулевое) решение $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ у такой системы есть.

Теорема о пространстве решений однородной системы линейных алгебраических уравнений

Множество решений однородной СЛАУ есть линейное пространство. Размерность этого пространства есть d, где d – дефект СЛАУ.

Доказательство

Требуется доказать три утверждения:

1. Если $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ и $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ – решения системы (14), то $\{u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \ldots, u_n + v_n\}$ – также решение системы (14).

2. Если $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ – решение системы (14), то $\{\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3, \ldots, \lambda u_n\}$ – также решение системы (14).

3. Размерность пространства решений есть d.

Утверждение 1 докажем для первого из уравнений (14).
Набор чисел $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ есть решение системы (14), то есть,

$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + \ldots + a_{1n}u_n = 0\,. \tag{15}$$

Набор чисел $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ есть решение системы (14), то есть,

$$a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 + \ldots + a_{1n}v_n = 0\,. \tag{16}$$

Сложим уравнения (15) и (16). Получим:

$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + \ldots + a_{1n}u_n + a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 + \ldots + a_{1n}v_n =$$

$$= (a_{11}u_1 + a_{11}v_1) + (a_{12}u_2 + a_{12}v_2) + (a_{13}u_3 + a_{13}v_3) + \ldots + (a_{1n}u_n + a_{1n}v_n) =$$

$$= a_{11}(u_1+v_1)+a_{12}(u_2+v_2)+a_{13}(u_3+v_3)+\ldots+a_{1n}(u_n+v_n) = 0+0 = 0\,. \quad (17)$$

Равенство (17) подтверждает: набор чисел $\{u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \ldots,$ $u_n + v_n\}$ есть решение первого уравнения системы (14).

Для остальных уравнений системы (14) доказательство аналогично.

Утверждение 2 слушателям предлагается доказать самостоятельно.

Утверждение 3 принимается без доказательства.

Теорема о необходимом и достаточном условии линейной зависимости элементов линейного пространства

Для того, чтобы элементы Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_k линейного пространства $\mathcal{E}$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из них выражался линейной комбинацией остальных.

Доказательство

1. Необходимость ($\Longrightarrow$).

Элементы, составляющие набор Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_k, линейно зависимы, следовательно, существует равенство

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3 Y_3 + \ldots + \lambda_i Y_i + \ldots + \lambda_n Y_n = 0\,, \quad (18)$$

в котором присутствует коэффициент $\lambda_i \neq 0$. Домножим равенство (18) на число $\frac{1}{\lambda_i}$,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_i} Y_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_i} Y_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_i} Y_3 + \ldots + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} Y_{i-1} + 1 \cdot Y_i + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} Y_{i+1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda_i} Y_n = 0\,, \quad (19)$$

перенесём все слагаемые левой части (19), кроме i—го, в правую часть равенства. Получим:

$$Y_i = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right) Y_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_i}\right) Y_2 + \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_i}\right) Y_3 + \ldots +$$

$$+\left(-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\right)Y_{i-1}+\left(-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)Y_{i+1}+\ldots+\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_i}\right)Y_n\,. \tag{20}$$

Равенство (20) означает, что элемент Y_i выражается линейной комбинацией остальных элементов набора.

2. Достаточность ($\Longleftarrow$).

Элемент Y_i есть линейная комбинация остальных элементов набора,

$$Y_i=\mu_1Y_1+\mu_2Y_2+\mu_3Y_3+\ldots+\mu_{i-1}Y_{i-1}+\mu_{i+1}Y_{i+1}+\ldots+\mu_nY_n\,. \tag{21}$$

Перенесём элемент Y_i из левой части (21) в правую:

$$0=\mu_1Y_1+\mu_2Y_2+\mu_3Y_3+\ldots+\mu_{i-1}Y_{i-1}+(-1)\cdot Y_i+\mu_{i+1}Y_{i+1}+\ldots+\mu_nY_n\,. \tag{22}$$

В равенстве (22) линейная комбинация, равная нулю, содержит слагаемое с ненулевым коэффициентом (-1). А это означает, что элементы, составляющие набор, линейно зависимы.

Доказательство закончено.

Замечание

Среди линейно независимых элементов нет нулевого элемента. Действительно, если в наборе имеется нулевой элемент, то он может быть выражен тривиальной линейной комбинацией остальных элементов набора, а это, по предыдущей Теореме, означает линейную зависимость элементов набора.

Замечание

Напомним, что на страницах 41–42 дано определение базиса линейного пространства.

Для совокупности всех элементов базиса договоримся применять сокращённое обозначение:

$$\{E_i\}=\{E_i\}_{i=1,2,3,\ldots,n}=\{E_1\,,\ E_2\,,\ E_3\,,\ \ldots\,,\ E_n\}.$$

Теорема о единственности разложения по базису

Если $\{E_i\}=\{E_1\,,\ E_2\,,\ E_3\,,\ \ldots\,,\ E_n\}$ – базис линейного пространства

$\mathcal{E}$, и если одновременно

$$Y = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \ldots + \alpha_n E_n \,,$$

$$Y = \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 + \beta_3 E_3 + \ldots + \beta_n E_n \,,$$

то

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_2 \\ \alpha_3 = \beta_3 \\ \ldots \\ \alpha_n = \beta_n \end{array}\right| \,.$$

Доказательство

Вычтем равенство

$$Y = \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 + \beta_3 E_3 + \ldots + \beta_n E_n$$

из равенства

$$Y = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \ldots + \alpha_n E_n \,.$$

Получим:

$$0 = (\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \ldots + \alpha_n E_n) - (\beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 + \beta_3 E_3 + \ldots + \beta_n E_n) \,,$$

$$0 = (\alpha_1 E_1 - \beta_1 E_1) + (\alpha_2 E_2 - \beta_2 E_2) + (\alpha_3 E_3 - \beta_3 E_3) + \ldots + (\alpha_n E_n - \beta_n E_n) \,,$$

$$(\alpha_1 - \beta_1)\, E_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\, E_2 + (\alpha_3 - \beta_3)\, E_3 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\, E_n = 0 \,. \qquad (23)$$

Элементы E_1 , E_2 , E_3 , $\ldots$, E_n линейно независимы (по определению базиса), следовательно, из равенства нулю их линейной комбинации (23) неминуемо следует равенство нулю всех коэффициентов линейной комбинации (23), то есть

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ \alpha_3 - \beta_3 = 0 \\ \ldots \\ \alpha_n - \beta_n = 0 \end{array}\right| \,,$$

а это и означает

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_2 \\ \alpha_3 = \beta_3 \\ \ldots \\ \alpha_n = \beta_n\end{array}\right| .$$

Доказательство закончено.

Замечание

Иногда, для экономии бумаги, в учебниках и сборниках задач многомерные векторы записываются не в виде столбцов, а "в одну строчку":

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)\,, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (y_1, y_2, y_3)\,,$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = (z_1, z_2, \ \ldots\ , z_n)\,.$$

Определение

Множество всех $n-$мерных векторов называется $n-$мерным векторным пространством.

Замечание

$n-$мерное векторное пространство является линейным пространством, поскольку сумма двух $n-$мерных векторов есть $n-$мерный вектор, и произведение $n-$мерного вектора на число есть $n-$мерный вектор.

Замечание

Двумерным и трёхмерным векторам можно придать геометрический смысл.

Двумерный вектор $X = (x_1\,,\, x_2)$ в двумерной декартовой прямоугольной системе координат Ox_1x_2 есть направленный отрезок с началом в точке O (в начале координат) и концом в точке M, имеющей координаты $(x_1\,,\, x_2)$ (Рис. 4(a)).

Трёхмерный вектор $X = (x_1\,, x_2\,, x_3)$ в трёхмерной декартовой прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ есть направленный отрезок с началом в точке O (в начале координат) и концом в точке M, имеющей координаты $(x_1\,, x_2\,, x_3)$ (Рис. 4(б)).

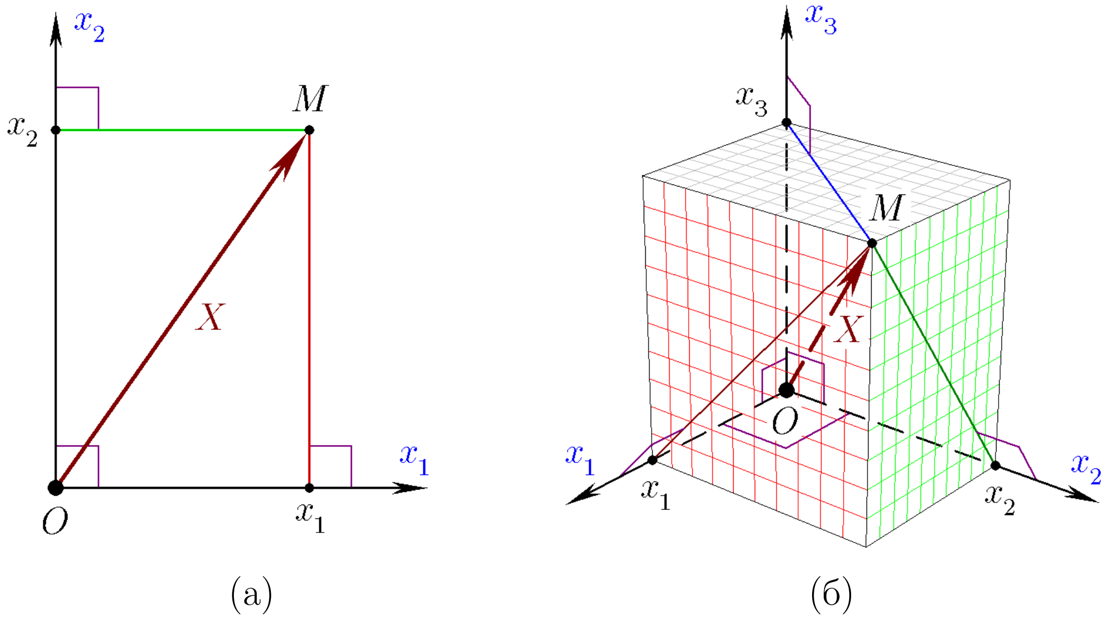


Рис. 4

Векторы размерности большей, чем 3, геометрического смысла не имеют.

<u>Определение</u>

Пусть $\{E_i\} = \{E_i\}_{i=1,2,3,\ldots,n} = \{E_1\,, E_2\,, E_3\,,\ \ldots\,, E_n\}$ – базис линейного пространства $\mathcal{E}$,

и пусть $\{G_i\} = \{G_i\}_{i=1,2,3,\ldots,n} = \{G_1\,, G_2\,, G_3\,,\ \ldots\,, G_n\}$ – ещё один базис того же линейного пространства $\mathcal{E}$.

Всякий элемент линейного пространства, а значит, и каждый элемент каждого из базисов, может быть разложен по другому базису.

Пусть такие разложения уже выполнены:

$$\left\{\begin{array}{ccc} G_1 & = & \alpha_{11}E_1 + \alpha_{21}E_2 + \alpha_{31}E_3 + \ldots + \alpha_{n1}E_n \\ G_2 & = & \alpha_{12}E_1 + \alpha_{22}E_2 + \alpha_{32}E_3 + \ldots + \alpha_{n2}E_n \\ G_3 & = & \alpha_{13}E_1 + \alpha_{23}E_2 + \alpha_{33}E_3 + \ldots + \alpha_{n3}E_n \\ \ldots & & \ldots \\ G_n & = & \alpha_{1n}E_1 + \alpha_{2n}E_2 + \alpha_{3n}E_3 + \ldots + \alpha_{nn}E_n \end{array}\right| ,$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} E_1 & = & \beta_{11}G_1 + \beta_{21}G_2 + \beta_{31}G_3 + \ldots + \beta_{n1}G_n \\ E_2 & = & \beta_{12}G_1 + \beta_{22}G_2 + \beta_{32}G_3 + \ldots + \beta_{n2}G_n \\ E_3 & = & \beta_{13}G_1 + \beta_{23}G_2 + \beta_{33}G_3 + \ldots + \beta_{n3}G_n \\ \ldots & & \ldots \\ E_n & = & \beta_{1n}G_1 + \beta_{2n}G_2 + \beta_{3n}G_3 + \ldots + \beta_{nn}G_n \end{array}\right| .$$

Тогда

$$S_{G\to E} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей перехода от базиса $\{G_i\}$ к базису $\{E_i\}$,

$$S_{E\to G} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \ldots & \beta_{2n} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \ldots & \beta_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \beta_{n3} & \ldots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей перехода от базиса $\{E_i\}$ к базису $\{G_i\}$.

Теорема о взаимной связи матриц перехода

$$S_{E\to G} = (S_{G\to E})^{-1}, \qquad S_{G\to E} = (S_{E\to G})^{-1}.$$

Без доказательства.

Определение

Пусть $\{E_i\} = \{E_i\}_{i=1,2,3,\ldots,n} = \{E_1, E_2, E_3, \ \ldots, E_n\}$ – базис линейного пространства $\mathcal{E}$,

и пусть $\{G_i\} = \{G_i\}_{i=1,2,3,\ldots,n} = \{G_1, G_2, G_3, \ \ldots, G_n\}$ – ещё один базис линейного пространства $\mathcal{E}$.

Пусть X – произвольный элемент линейного пространства $\mathcal{E}$.

Всякий элемент линейного пространства, а значит, и элемент X, может быть разложен по любому из базисов.

Пусть такие разложения уже выполнены:

$$X = x_{1E}E_1 + x_{2E}E_2 + x_{3E}E_3 + \ldots + x_{nE}E_n\,,$$
$$X = x_{1G}G_1 + x_{2G}G_2 + x_{3G}G_3 + \ldots + x_{nG}G_n\,,$$

где x_{1E}, x_{2E}, x_{3E}, $\ldots$, x_{nE} – коэффициенты разложения элемента X по базису E, а x_{1G}, x_{2G}, x_{3G}, $\ldots$, x_{nG} – коэффициенты разложения элемента X по базису G.

Тогда

$$X_E = \begin{pmatrix} x_{1E} \\ x_{2E} \\ x_{3E} \\ \vdots \\ x_{nE} \end{pmatrix}_E , \qquad X_G = \begin{pmatrix} x_{1G} \\ x_{2G} \\ x_{3G} \\ \vdots \\ x_{nG} \end{pmatrix}_G$$

есть столбцы (векторы) разложения элемента X по базисам $\{E_i\}$ и $\{G_i\}$ соответственно.

Замечание

Нельзя утверждать, что $X_E = X_G$, поскольку базисы $\{E_i\}$ и $\{G_i\}$, вообще говоря, различны.

Нельзя утверждать, что $X = X_E$, хотя бы потому, что элемент X вовсе не обязан быть элементом линейного векторного пространства. Аналогично, нельзя утверждать, что $X = X_G$.

Определение

Набор векторов n–мерного линейного векторного пространства

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

будем называть простейшим базисом.

Замечание

Разложение n–мерного вектора

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_E$$

по векторам простейшего базиса, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$X = x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3 + \ldots + x_n E_n \,,$$

следовательно, для простейшего базиса

$$X_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X.$$

Теорема о назначении матриц перехода

$$X_G = S_{E\to G} \cdot X_E \,, \qquad X_E = S_{G\to E} \cdot X_G \,. \tag{24}$$

Без доказательства.

Теорема о линейной независимости n $n-$мерных векторов

Пусть даны $n-$мерные векторы

$$G_1 = \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ g_{31} \\ \vdots \\ g_{n1} \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \\ g_{32} \\ \vdots \\ g_{n2} \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} g_{13} \\ g_{23} \\ g_{33} \\ \vdots \\ g_{n3} \end{pmatrix}, \quad \ldots\,, \quad G_n = \begin{pmatrix} g_{1n} \\ g_{2n} \\ g_{3n} \\ \vdots \\ g_{nn} \end{pmatrix},$$

и пусть матрица

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \dots & g_{2n} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \dots & g_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \qquad (25)$$

составлена из этих векторов, как из столбцов.

В этом случае векторы G_1, G_2, G_3, $\dots$, G_n линейно независимы тогда и только тогда, когда

$$\det G \neq 0\,.$$

Доказательство

Рассмотрим равенство нулю линейной комбинации

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 + \ldots + \lambda_n G_n = 0\,, \qquad (26)$$

которое равносильно однородной системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g_{11}\lambda_1 + g_{12}\lambda_2 + g_{13}\lambda_3 + \ldots + g_{1n}\lambda_n & = & 0 \\ g_{21}\lambda_1 + g_{22}\lambda_2 + g_{23}\lambda_3 + \ldots + g_{2n}\lambda_n & = & 0 \\ g_{31}\lambda_1 + g_{32}\lambda_2 + g_{33}\lambda_3 + \ldots + g_{3n}\lambda_n & = & 0 \\ \ldots & & \\ g_{n1}\lambda_1 + g_{n2}\lambda_2 + g_{n3}\lambda_3 + \ldots + g_{nn}\lambda_n & = & 0 \end{array} \right| \qquad (27)$$

с главным определителем $\det G$. Тривиальное решение у системы (27) есть всегда.

Если $\det G \neq 0$, то, по теореме Крамера, это тривиальное решение является и единственным, то есть, обеспечить выполнение равенства (26) возможно только тривиальной линейной комбинацией $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0)$.

И наоборот: теорема Крамера гласит, что если система (27) имеет единственное (а значит, тривиальное) решение, то главный определитель её отличен от нуля, $\det G \neq 0$.

Доказательство закончено.

Теорема о базисе из n $n-$мерных векторов

Набор из n линейно независимых $n-$мерных векторов

$$G_1 = \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ g_{31} \\ \vdots \\ g_{n1} \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \\ g_{32} \\ \vdots \\ g_{n2} \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} g_{13} \\ g_{23} \\ g_{33} \\ \vdots \\ g_{n3} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad G_n = \begin{pmatrix} g_{1n} \\ g_{2n} \\ g_{3n} \\ \vdots \\ g_{nn} \end{pmatrix},$$

является базисом линейного пространства $n-$мерных векторов.

Доказательство

Возьмём произвольный $n-$мерный вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Покажем, что этот вектор может быть разложен по базису, то есть, представлен в виде линейной комбинации

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 + \ldots + \lambda_n G_n = X\,. \tag{28}$$

Разложение (28) равносильно неоднородной системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g_{11}\lambda_1 + g_{12}\lambda_2 + g_{13}\lambda_3 + \ldots + g_{1n}\lambda_n & = & x_1 \\ g_{21}\lambda_1 + g_{22}\lambda_2 + g_{23}\lambda_3 + \ldots + g_{2n}\lambda_n & = & x_2 \\ g_{31}\lambda_1 + g_{32}\lambda_2 + g_{33}\lambda_3 + \ldots + g_{3n}\lambda_n & = & x_3 \\ \ldots & & \\ g_{n1}\lambda_1 + g_{n2}\lambda_2 + g_{n3}\lambda_3 + \ldots + g_{nn}\lambda_n & = & x_n \end{array} \right| . \tag{29}$$

Согласно предыдущей теореме, главный определитель этой системы отличен от нуля, $\det G \neq 0$, следовательно, по теореме Крамера, решение системы (29) – набор искомых коэффициентов λ_1, λ_2, λ_3, $\ldots$, λ_n – существует, это решение единственно, и оно выражается формулами Крамера.

Доказательство закончено.

Теорема о линейной независимости k (где $k < n$) $n-$мерных векторов

Пусть даны $n-$мерные векторы

$$G_1 = \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ g_{31} \\ \vdots \\ g_{n1} \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \\ g_{32} \\ \vdots \\ g_{n2} \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} g_{13} \\ g_{23} \\ g_{33} \\ \vdots \\ g_{n3} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad G_k = \begin{pmatrix} g_{1k} \\ g_{2k} \\ g_{3k} \\ \vdots \\ g_{nk} \end{pmatrix},$$

и пусть матрица

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1k} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{2k} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \cdots & g_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \cdots & g_{nk} \end{pmatrix}$$

составлена из этих векторов, как из столбцов.

В этом случае векторы G_1, G_2, G_3, $\ldots$, G_k линейно независимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы G равен k.

Без доказательства

Теорема о линейной зависимости $(n+1)$ $n-$мерных векторов

$n-$мерные векторы

$$G_1 = \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ g_{31} \\ \vdots \\ g_{n1} \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \\ g_{32} \\ \vdots \\ g_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad G_n = \begin{pmatrix} g_{1n} \\ g_{2n} \\ g_{3n} \\ \vdots \\ g_{nn} \end{pmatrix}, \quad G_{n+1} = \begin{pmatrix} g_{1,n+1} \\ g_{2,n+1} \\ g_{3,n+1} \\ \vdots \\ g_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

линейно зависимы.

Доказательство

1. Пусть векторы G_1, G_2, G_3, $\ldots$, G_n линейно зависимы. Тогда существует нетривиальная (содержащая хотя бы один ненулевой коэффициент λ_i)

линейная комбинация этих векторов, равная нулю:

$$\lambda_1 G_1 + \ldots + \lambda_{i-1} G_{i-1} + \underbrace{\lambda_i}_{\neq 0} \cdot G_i + \lambda_{i+1} G_{i+1} + \ldots + \lambda_n G_n = 0\,. \qquad (30)$$

Добавим в левую часть (30) нулевое слагаемое $0 \cdot G_{n+1}$, которое не изменит левую часть (25) и не нарушит равенство:

$$\lambda_1 G_1 + \ldots + \lambda_{i-1} G_{i-1} + \underbrace{\lambda_i}_{\neq 0} \cdot G_i + \lambda_{i+1} G_{i+1} + \ldots + \lambda_n G_n + 0 \cdot G_{n+1} = 0\,. \quad (31)$$

(31) есть равенство нулю такой линейной комбинации $n+1$ векторов, в которой присутствует ненулевой коэффициент λ_i. Следовательно, векторы линейно зависимы.

2. Пусть векторы $G_1\,, G_2\,, G_3\,, \ldots\,, G_n$ линейно независимы. Тогда существует разложение вектора G_{n+1} по базису из векторов $G_1\,, G_2\,, G_3\,, \ldots\,, G_n\,,$

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_1 G_2 + \lambda_1 G_3 + \ldots + \lambda_n G_n = G_{n+1}\,. \qquad (32)$$

Равенство (32) можно переписать в виде

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_1 G_2 + \lambda_1 G_3 + \ldots + \lambda_n G_n + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} \cdot G_{n+1} = 0\,. \qquad (33)$$

(33) есть равенство нулю такой линейной комбинации $n+1$ векторов, в которой присутствует ненулевой коэффициент (-1). Следовательно, векторы линейно зависимы.

Нормированное пространство

Определение

Скалярным произведением двух n–мерных векторов (столбцов)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

называется число

$$(X,\, Y) = X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots + x_n y_n\,.$$

Всюду далее для скалярного произведения будет использоваться обозначение $X \cdot Y$.

Теорема о свойствах скалярного произведения векторов

1. $X \cdot X = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0$, причём, $X \cdot X = 0 \iff X = 0$.
2. $X \cdot Y = Y \cdot X$ (коммутативность).
3. $(\lambda X) \cdot Y = \lambda \cdot (X \cdot Y)$ (ассоциативность).
4. $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$ (дистрибутивность).

Без доказательства.

Определение

Нормой вектора $\|X\|$, или, что то же самое, модулем вектора $|X|$, называется число $\|X\| = |X| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}$.
Нормированным называется такой вектор, норма (модуль) которого есть единица.
Для ненулевого вектора X построение вектора $\frac{1}{\|X\|} \cdot X$ называется нормировкой вектора, поскольку её результатом является нормированный вектор. Нормировать нулевой вектор невозможно.
$n-$мерное векторное пространство, в котором определена норма, принято называть нормированным.

Определение

Векторы X и Y называются ортогональными, если $X \cdot Y = 0$.
Векторы из набора $n-$мерных векторов $E_1\,,\, E_2\,,\, E_3\,,\, \ldots\,,\, E_n$ называются попарно ортогональными, если $E_i \cdot E_j = 0$, при $i \neq j$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Теорема о попарно ортогональных векторах

Если k $(k \leq n)$ ненулевых $n-$мерных векторов $E_1\,,\, E_2\,,\, E_3\,,\, \ldots\,,\, E_k$ попарно ортогональны, то они линейно независимы.

Доказательство

Докажем, что из равенства нулю линейной комбинации

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_{i-1} E_{i-1} + \lambda_i E_i + \lambda_{i+1} E_{i+1} + \ldots + \lambda_k E_k = 0 \qquad (34)$$

неминуемо следует, что она тривиальна.

Домножим левую и правую части (34) скалярно на вектор E_i . Получим:

$$(\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_{i-1} E_{i-1} + \lambda_i E_i + \lambda_{i+1} E_{i+1} + \ldots +$$

$$+ \ \lambda_{k-1} E_{k-1} + \lambda_k E_k) \cdot E_i = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_1 \cdot \underbrace{(E_1 \cdot E_i)}_{=0} + \lambda_2 \cdot \underbrace{(E_2 \cdot E_i)}_{=0} +$$

$$+ \underbrace{\ldots}_{=0} + \lambda_{i-1} \cdot \underbrace{(E_{i-1} \cdot E_i)}_{=0} + \lambda_i \cdot \underbrace{(E_i \cdot E_i)}_{>0} + \lambda_{i+1} \cdot \underbrace{(E_{i+1} \cdot E_i)}_{=0} + \underbrace{\ldots}_{=0} +$$

$$+ \lambda_{k-1} \cdot \underbrace{(E_{k-1} \cdot E_i)}_{=0} + \lambda_k \cdot \underbrace{(E_k \cdot E_i)}_{=0} = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_i \cdot \underbrace{(E_i \cdot E_i)}_{>0} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_i = 0 \, . \qquad (35)$$

Равенство (35) справедливо для всякого i ($i = 1, 2, 3, \ \ldots \ , k$), то есть, все коэффициенты нулевой линейной комбинации (34) равны нулю, следовательно, линейная комбинация (34) тривиальна.

Определение

Базис из n–мерных векторов $E_1 \, , \, E_2 \, , \, E_3 \, , \ \ldots \ , \ E_n$ называется ортонормированным, если элементы этого базиса нормированы и попарно ортогональны.

Теорема о матрицах перехода между двумя ортонормированными базисами

Если базисы $\{E_i\} = \{E_1 \, , \, E_2 \, , \, E_3 \, , \ \ldots \ , \ E_n\}$ и $\{G_i\} = \{G_1 \, , \, G_2 \, , \, G_3 \, , \ \ldots \ ,$
оба являются ортонормированными, то

$$(S_{E \to G})^{-1} = (S_{E \to G})^T, \qquad (S_{G \to E})^{-1} = (S_{G \to E})^T.$$

Без доказательства.

Собственные числа и собственные векторы матрицы

Определение

Пусть дана квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если существует такое число λ и такой ненулевой n–мерный вектор

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

что

$$A \cdot X = \lambda \cdot X\,, \tag{36}$$

то число λ принято называть собственным числом матрицы A, а вектор X принято называть собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному числу λ.

Замечания

1. Нулевой вектор $X = (0, 0, 0, \dots, 0)$ обращает уравнение (36) в верное равенство, однако, нулевой вектор, по определению, не пригоден в качестве собственного.

2. Если вектор X в (36) заменить на $\mu \cdot X$ (где μ – любое число, не равное нулю), равенство сохранит силу. Принято говорить, что собственный вектор определяется с точностью до постоянного множителя. Из всего множества таких взаимно пропорциональных векторов чаще всего выбирается один, нормированный вектор ($|X| = 1$).

3. Разным собственным числам соответствуют разные нормированные собственные векторы. Имеется в виду, что каждый из этих векторов не является линейной комбинацией остальных.

4. Одному собственному числу может соответствовать несколько разных линейно независимых нормированных собственных векторов.

Теорема о поиске собственных чисел и собственных векторов матрицы

Собственные числа матрицы A являются корнями уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0\,, \tag{37}$$

(E – единичная матрица), а для каждого собственного числа λ_i собственные векторы находятся, как решения однородной системы уравнений

$$(A - \lambda_i E) \cdot X = 0\,. \tag{38}$$

Доказательство теоремы несложно и предоставляется слушателям.

Замечание

Уравнение (37), которое принято называть характеристическим, имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0\,. \tag{39}$$

Матрица, от которой берётся определитель в (39), отличается от исходной матрицы A тем, что из каждого диагонального элемента матрицы вычитается искомое λ.

Замечание

Уравнение (37), так же, как и (39), есть алгебраическое уравнение степени n относительно искомого λ. Количество корней такого уравнения не превышает n. Некоторые из корней могут быть комплексными.

Задача

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Решение

Строим уравнение

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-7)(\lambda-1)-16=\lambda^2-8\lambda-9=0\,,$$

из которого можно найти пару собственных чисел: $\lambda_1=-1\,,\ \lambda_2=9\,.$

Поскольку матрица имеет размер $2\times 2\,,$ искомые векторы следует разыскивать в виде

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

1. $\lambda_1=-1\,.$ Система уравнений (38) принимает вид

$$\left\{\begin{array}{rcl} 8x_1-4x_2 & = & 0 \\ -4x_1+2x_2 & = & 0 \end{array}\right|\,. \tag{41}$$

Второе уравнение пропорционально первому, и поэтому должно быть отброшено, так как не несёт новой информации после первого. Дефект системы равен единице, поэтому в общем решении системы (41) должна присутствовать одна произвольная константа. Пусть C – имя этой произвольной константы.

Общее решение системы (41) имеет вид $x_1=C,\ \ x_2=2C,$ позволяющий выписать собственный вектор

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C \\ 2C \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Во многих практически важных случаях собственный вектор нормируется, то есть, находится такое $C,$ при котором норма (модуль) собственного вектора обращается в единицу. В данном случае

$$G_1=\frac{1}{|X|}\cdot X=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Обозначение G_1 применено для нормированного собственного вектора, соответствующего числу $\lambda_1\,.$

2. $\lambda_2=9.$ Система уравнений (38) принимает вид

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x_1-4x_2 & = & 0 \\ -4x_1-8x_2 & = & 0 \end{array}\right|\,. \tag{42}$$

Второе уравнение пропорционально первому и поэтому отбрасывается. Общее решение системы (42) имеет вид $x_1 = -2C$, $x_2 = C$, позволяющий выписать собственный вектор

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Результатом нормировки будет

$$G_2 = \frac{1}{|X|} \cdot X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Обозначение G_2 применено для нормированного собственного вектора, соответствующего собственному числу λ_2.

Замечание

Векторы G_1, G_2 ортогональны, $G_1 \cdot G_2 = 0$, и это не случайно.

Определение

Квадратная матрица $A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,n}}$ называется симметричной, если $a_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Примеры симметричных матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 9 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 4 & 6 \\ -3 & 19 & 9 & -1 \\ 4 & 9 & -8 & 9 \\ 6 & -1 & 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Теорема о собственных числах и собственных векторах симметричной матрицы

Пусть квадратная матрица A симметрична и состоит только из вещественных элементов.

Тогда:

1. Все собственные числа матрицы A вещественны.
2. Собственные векторы матрицы A, соответствующие разным собственным числам, попарно ортогональны.

Без доказательства.

Замечание

Если собственное число – простой корень уравнения (37) (то есть, кратность корня равна единице), то дефект системы уравнений (38) равен единице, и общее решение системы содержит одну произвольную константу. Конкретное значение константе можно придать при нормировке вектора.

Среди собственных чисел матрицы – корней уравнения (37) – могут быть кратные. Если λ_i – собственное число кратности $k_i > 1$, то дефект системы уравнений (38) равен k_i, и общее решение системы содержит k_i произвольных констант. Из этого общего решения всегда можно (но всегда с трудозатратами) "сконструировать" k_i попарно ортогональных (а следовательно, линейно независимых) нормированных векторов, каждый из которых будет соответствовать собственному числу λ_i.

Таким образом, из собственных векторов квадратной матрицы порядка n можно "собрать" ортонормированный базис множества всех $n-$мерных векторов.

Квадратичные формы

Определение

Функция

$$
\begin{gathered}
f(x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ \ldots\,,\ x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + \\
+ 2 \cdot a_{12}x_1x_2 + 2 \cdot a_{13}x_1x_3 + 2 \cdot a_{14}x_1x_4 + \ldots + 2 \cdot a_{1n}x_1x_n + \\
+ 2 \cdot a_{23}x_2x_3 + 2 \cdot a_{24}x_2x_4 + \ldots + 2 \cdot a_{2n}x_2x_n + \\
+ \ldots + 2 \cdot a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \qquad (43)
\end{gathered}
$$

(где a_{ij} – постоянные числа) называется квадратичной формой. Каждое слагаемое квадратичной формы содержит либо квадрат одной из переменных, либо смешанное произведение первых степеней двух разных переменных.

Симметричная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{44}$$

называется матрицей квадратичной формы (43).

Замечание

Квадратичная форма (43) может быть записана в виде

$$f(x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\,,\, \dots\,,\, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\cdot \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_ix_j\,. \tag{45}$$

Представление (45) менее наглядно, чем (43), но более компактно.

Замечание

Поскольку запись $(x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\,,\, \dots\,,\, x_n)$ есть "строчное" обозначение для n–мерного вектора

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

далее, для краткости, вместо записи $f(x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\,,\, \dots\,,\, x_n)$ иногда будет применяться $f(X)$.

Определение матричного представления квадратичной формы

Представление квадратичной формы в виде

$$f(X) = X^T\cdot A\cdot X\,. \tag{46}$$

есть матричное представление квадратичной формы.

Пример

$$f(x_1,\, x_2,\, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 + 14x_1x_3 + 2x_2x_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 \cdot (2x_1 + 4x_2 + 7x_3) + x_2 \cdot (4x_1 + 5x_2 + x_3) + x_3 \cdot (7x_1 + x_2 + 3x_3) =$$

$$= 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_1x_3 + 4x_2x_1 + 5x_2^2 + x_2x_3 + 7x_3x_1 + x_3x_2 + 3x_3^2 =$$

$$= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 + 14x_1x_3 + 2x_2x_3\,.$$

Замечание

Формула (46) позволяет представить квадратичную форму не только с использованием матрицы (44). Пригодна и любая другая матрица $A' = \{a'_{ij}\}_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n}}$, отвечающая требованию $a'_{ij} + a'_{ji} = 2a_{ij}$.

Однако, ценность имеет именно симметричная матрица квадратичной формы.

Замечание

Пусть дан простейший базис $\{E_i\} = \{E_1\,,\, E_2\,,\, E_3\,,\, \dots\,,\, E_n\}$. Тогда для всякого n–мерного вектора (столбца) X справедливо $X_E = X$, а значит, квадратичную форму $f(X) = X^T A X$ можно представить в виде $f(X_E) = X_E^T A_E X_E$, в котором матрицу $A_E = A$ будем называть матрицей квадратичной формы в простейшем базисе.

Теорема об изменении матрицы квадратичной формы при смене базиса

Пусть даны n–мерные векторы (столбцы) X_E и X_G , выражающие коэффициенты разложения по базисам $\{E_i\} = \{E_1\,,\, E_2\,,\, E_3\,,\, \dots\,,\, E_n\}$ и $\{G_i\} = \{G_1\,,\, G_2\,,\, G_3\,,\, \dots\,,\, G_n\}$ некоторого вектора X .

Тогда

$$X_E^T A_E\, X_E = X_G^T A_G\, X_G\,, \tag{47}$$

где используется обозначение $A_G = S_{G\to E}^T A_E\, S_{G\to E}$; A_G называется матрицей квадратичной формы в базисе $\{G_i\}$.

Доказательство

$$X_E^T A_E X_E = (S_{G\to E}\, X_G)^T A_E\, (S_{G\to E}\, X_G) = X_G^T\, S_{G\to E}^T\, A_E\, S_{G\to E}\, X_G =$$

$$= X_G^T\, \underbrace{(S_{G\to E}^T\, A_E\, S_{G\to E})}_{=A_G}\, X_G = X_G^T A_G\, X_G\,.$$

Замечание

Формула (47) позволяет перейти от матрицы квадратичной формы "в чистом виде" (в простейшем базисе $\{E_i\}$) к матрице квадратичной формы в произвольном базисе $\{G_i\}$.

При доказательстве (47) не использовалось то, что $\{E_i\}$ является простейшим базисом. Следовательно, далее формула (47) позволяет переходить от матрицы квадратичной формы в одном произвольном базисе к матрице квадратичной формы в другом произвольном базисе.

Теорема о симметричной матрице в базисе из собственных векторов

1. Набор собственных чисел симметричной матрицы квадратичной формы A_E в одном базисе $\{E_i\}$ не изменяется при переходе к симметричной матрице квадратичной формы A_G, в другом базисе $\{G_i\}$.

2. Если ортонормированный базис $\{G_i\}$ построен из собственных векторов симметричной матрицы квадратичной формы, и все собственные числа матрицы λ_1, λ_2, λ_3, ..., λ_n отличны друг от друга, то матрица A_G имеет диагональный вид,

$$A_G = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Без доказательства.

Определение

Квадратичная форма $f(X) = X^T \cdot A \cdot X$ называется положительно определённой, если $f(X) > 0\,,\ \forall\, X \neq 0\,.$

Квадратичная форма $f(X) = X^T \cdot A \cdot X$ называется отрицательно определённой, если $f(X) < 0$, $\forall X \neq 0$.

Теорема о свойстве квадратичной формы

Пусть $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ – соответственно, наименьшее и наибольшее из собственных чисел матрицы A.
Тогда $\lambda_{\min} \cdot \|X\|^2 \leq X^T \cdot A \cdot X \leq \lambda_{\max} \cdot \|X\|^2.$

Без доказательства.

Теорема о положительной (отрицательной) определённости квадратичной формы

Если все собственные числа матрицы A положительны, то квадратичная форма $f(X) = X^T \cdot A \cdot X$ положительно определена.
Если все собственные числа матрицы A отрицательны, то квадратичная форма $f(X) = X^T \cdot A \cdot X$ отрицательно определена.

Без доказательства. Данная теорема есть следствие предыдущей.

Замечание

Теорема о положительной (отрицательной) определённости квадратичной формы найдёт применение при изучении раздела "Функции многих переменных".

Замечание

Последующая часть документа содержит указания к исполнению задачи о построении кривой второго порядка в декартовой прямоугольной системе координат Ox_1x_2 по заданному уравнению этой кривой.

Уравнение произвольной кривой второго порядка имеет вид

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0\,, \tag{49}$$

a_{11}, a_{22}, a_{12}, b_1, b_2, c – постоянные коэффициенты.

Перед решением демонстрационной задачи следует сформулировать ряд определений и замечаний.

Метрическое эвклидово пространство

Определение

Множество всех упорядоченных пар чисел $(x_1,\, x_2)$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, называется двумерным точечным пространством, а каждая из таких пар называется точкой пространства.

Обозначения: $\mathbb{R}^2$, $(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Множество всех упорядоченных троек чисел $(x_1,\, x_2,\, x_3)$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_3 \in \mathbb{R}$, называется трёхмерным точечным пространством. а каждая из таких троек называется точкой пространства.

Обозначения: $\mathbb{R}^3$, $(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Множество всех упорядоченных наборов из n чисел $(x_1,\, x_2,\, x_3\, ,\, \ldots\, ,\, x_n)$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_3 \in \mathbb{R}$, $\ldots$, $x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, называется $n-$мерным точечным пространством. а каждый из таких наборов называется точкой пространства.

Обозначения: $\mathbb{R}^n$, $(x_1,\, x_2,\, x_3\, ,\, \ldots\, ,\, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Замечание

Точечное пространство, в отличие от векторного, не является линейным. Две точки нельзя складывать, одну точку нельзя умножать на число.

Определение

Метрикой на множестве W называется числовая функция двух переменных $\varrho(w_1, w_2)$ (где $w_1 \in W$, $w_2 \in W$), подчиняющаяся требованиям:

1. $\varrho(w_1, w_2) \geq 0$, причём, $\varrho(w_1, w_2) = 0 \iff w_1 = w_2$ (аксиома тождества).
2. $\varrho(w_1, w_2) = \varrho(w_2, w_1)$ (аксиома симметрии).
3. $\varrho(w_1, w_2) \leq \varrho(w_1, w_3) + \varrho(w_3, w_2)$ (аксиома треугольника).

Определение

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots , x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, \ldots , y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Функция $\varrho_n(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$ называется эвклидовой метрикой на $\mathbb{R}^n$.

Совокупность точечного пространства и эвклидовой метрики $(\mathbb{R}^n,\ \varrho_n)$ принято называть $n-$мерным метрическим эвклидовым пространством.

Кривые второго порядка

Определение

Эллипсом называется геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение эллипса в системе координат Ox_1x_2 имеет вид

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1\,. \tag{50}$$

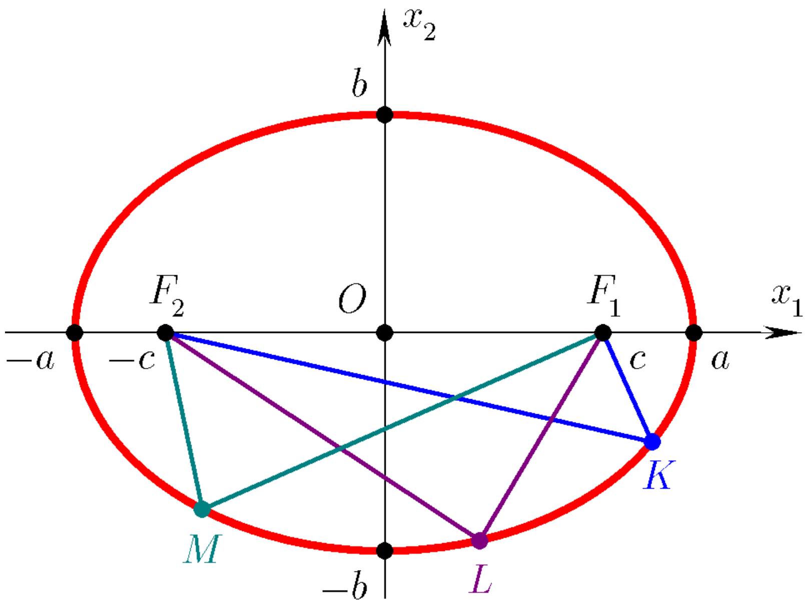


Рис. 5

Замечания

1. В литературе чаще всего рассматривается случай эллипса, вытянутого вдоль оси Ox_1 (Рис. 5), что означает $a > b$. В таком случае a – большая полуось эллипса, b – малая полуось, фокусы эллипса находятся в точках $F_1 = (c,\ 0)$, $F_2 = (-c,\ 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

По определению эллипса, $F_1K + KF_2 = F_1L + LF_2 = F_1M + MF_2 = 2a$ (Рис. 5).

Величина

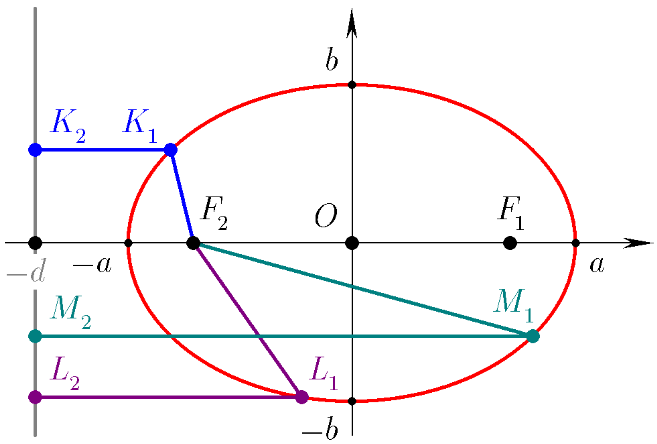
$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

называется эксцентриситетом эллипса, причём, $0 < e < 1$ при $a > b$.

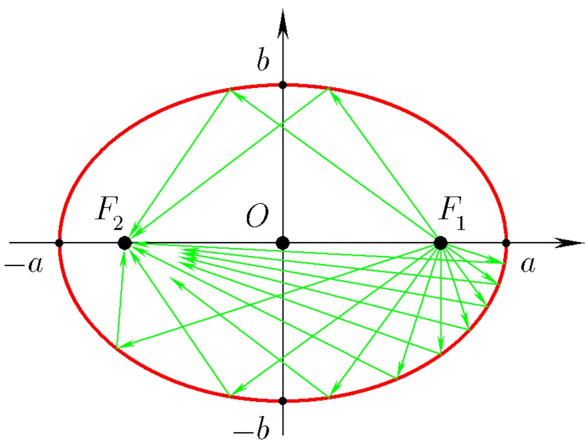
2. Эллипс имеет две директрисы, а именно, прямые $x = d$ и $x = -d$, где $d = a/e$. Расстояние от любой точки эллипса до фокуса $F_2 = (-c,\, 0)$ есть расстояние от этой точки эллипса до ближайшей к фокусу директрисы $x = -d$, умноженное на e. На Рис. 6(а), по свойству директрисы,

$$\frac{F_2K_1}{K_1K_2} = \frac{F_2L_1}{L_1L_2} = \frac{F_2M_1}{M_1M_2} = e\,.$$

Аналогично, расстояние от любой точки эллипса до фокуса $F_1 = (c,\, 0)$ есть расстояние от этой точки эллипса до ближайшей к фокусу директрисы $x = d$, умноженное на e.



(а)



(б)

Рис. 6

3. Интересное свойство, которым обладает эллипс: если из одного фокуса по всем направлениям расходятся световые лучи, то после отражения от эллипса все они сходятся во втором фокусе (Рис. 6(б)).

4. Согласно первому закону Кеплера, каждая из планет солнечной системы вращается вокруг солнца по орбите в форме эллипса, в одном из фокусов которого располагается солнце. Разумеется, от этого закона имеются небольшие отклонения, причиной которых служит взаимное влияние планет.

5. В случае, если в уравнении (50) $b > a$ (Рис. 7(а)), эллипс вытянут вдоль оси Ox_2, фокусы эллипса располагаются на оси Ox_2, в точках $F_1 = (0,\, c)$, $F_2 = (0,\, -c)$, где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, а директрисами служат прямые

$y = d$ и $y = -d$, где $d = b/e$, $e = c/b = \sqrt{1 - a^2/b^2}$. Эксцентриситет e подчиняется неравенству $0 < e < 1$.

6. В случае, если в уравнении (50) $b = a$, эллипс вырождается в окружность (Рис. 7(б)). Принято считать, что эксцентриситет окружности равен нулю, $e = 0$. Директрис у окружности нет.

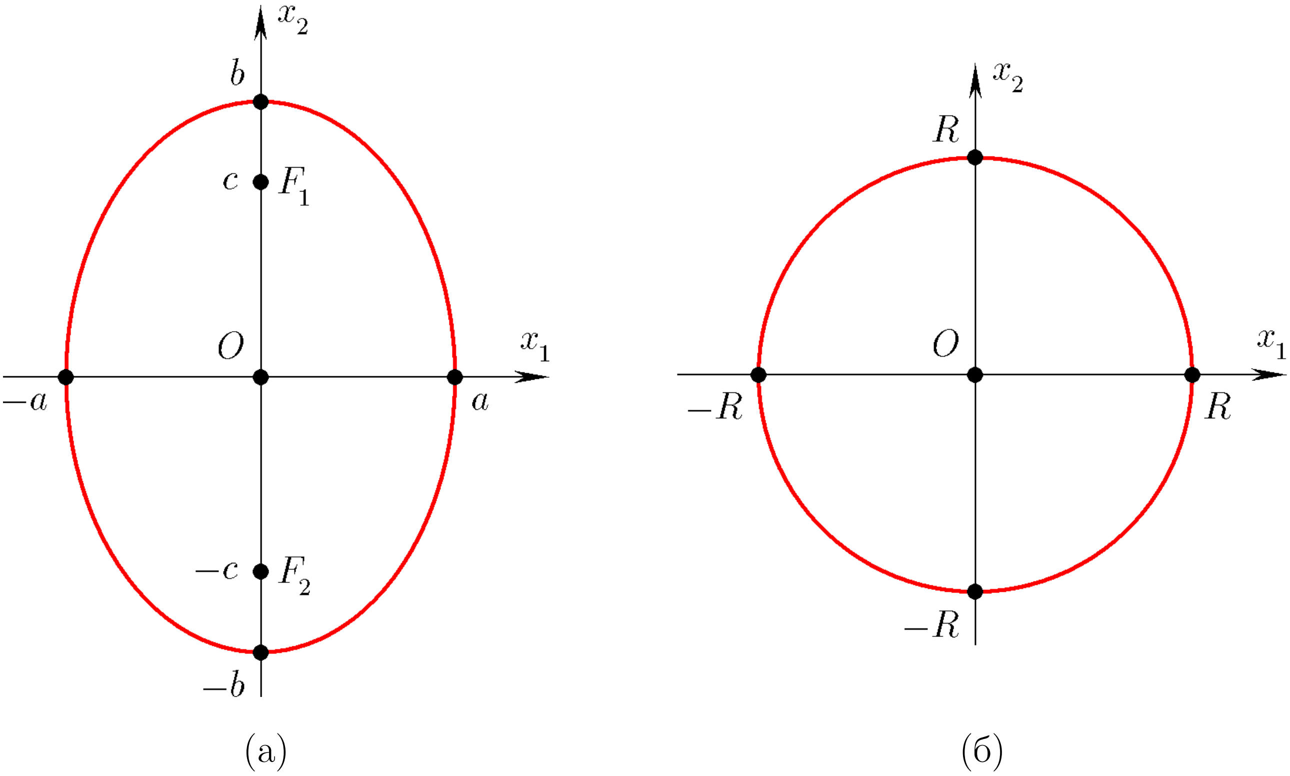


Рис. 7

Определение

> Параболой называется геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой.

Каноническое уравнение параболы в системе координат Ox_1x_2 имеет вид

$$x_2^2 = 2px_1 \,. \tag{51}$$

Замечания

1. Фокус параболы (51) находится в точке $F = (p/2, 0)$, а директриса есть прямая $x = -p/2$.

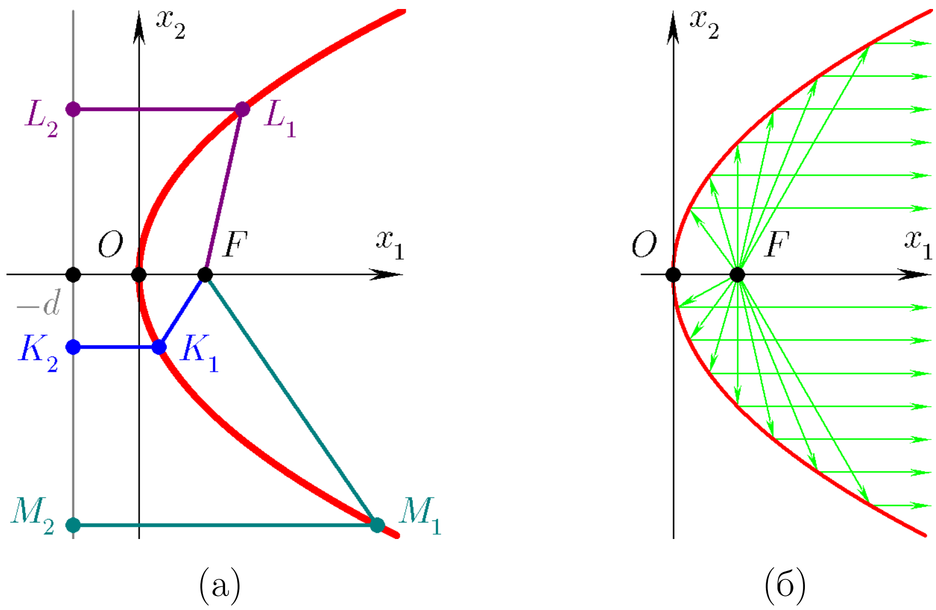


Рис. 8

По определению параболы, $FK_1 = K_1K_2$, $FL_1 = L_1L_2$, $FM_1 = M_1M_2$ (Рис. 8(а)).

2. Полезное свойство, которым обладает парабола: если из фокуса выходит световой луч в стороону параболы, то после отражения от неё луч направляется параллельно оси параболы (Рис. 8(б)). Данное свойство используется в отражателях осветительных приборов направленного действия (карманных фонарях, автомобильных фарах, прожекторах), осевое сечение которых имеет параболическую форму.

3. Парабола может, также, задаваться одним из альтернативных уравнений:

$$x_2^2 = -2px_1\,, \qquad x_1^2 = 2px_2\,, \qquad x_1^2 = -2px_2\,.$$

Слушателям предлагается самостоятельно разобраться, как в этих случаях выглядит график. Тем более, что в средней школе параболе уделялось достаточно много внимания.

Определение

> Гиперболой называется геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение гиперболы в системе координат Ox_1x_2 имеет

вид
$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1\,. \tag{52}$$

Замечания

1. Фокусы гиперболы (52) находятся в точках $F_1 = (c,\, 0)$, $F_2 = (-c,\, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Рис. 9).

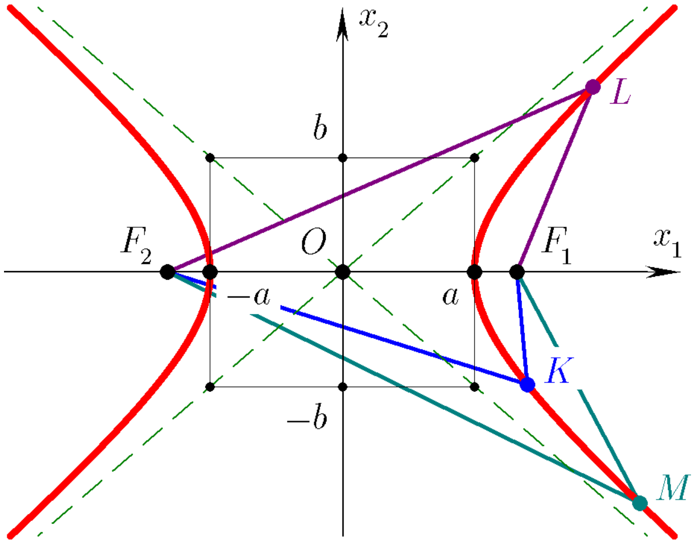


Рис. 9

По определению гиперболы, $F_2K - F_1K = F_2L - F_1L = F_2M - F_1M = 2a$ (Рис. 9).

Величина
$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$
назыается эксцентриситетом гиперболы, причём, $e > 1$.

2. Гипербола (52) состоит из двух ветвей, осью симметрии для каждой из них служит ось Ox_1. Ближайшие друг к другу точки ветвей – точки $(a,\, 0)$ и $(-a,\, 0)$.

3. Ветви гиперболы прижимаются к прямым $x_2 = \frac{b}{a} \cdot x_1$ и $x_2 = -\frac{b}{a} \cdot x_1$ при движении вдоль этих ветвей прочь от начала координат.

4. Гипербола (52) имеет две директрисы, а именно, прямые $x = d$ и $x = -d$, где $d = a/e$. Расстояние от любой точки гиперболы до фокуса $F_1 = (c,\, 0)$ есть расстояние от этой точки гиперболы до ближайшей к фокусу директрисы $x = d$, умноженное на e. На Рис. 10(a), по свойству директрисы,
$$\frac{F_1K_1}{K_1K_2} = \frac{F_1L_1}{L_1L_2} = \frac{F_1M_1}{M_1M_2} = e\,.$$

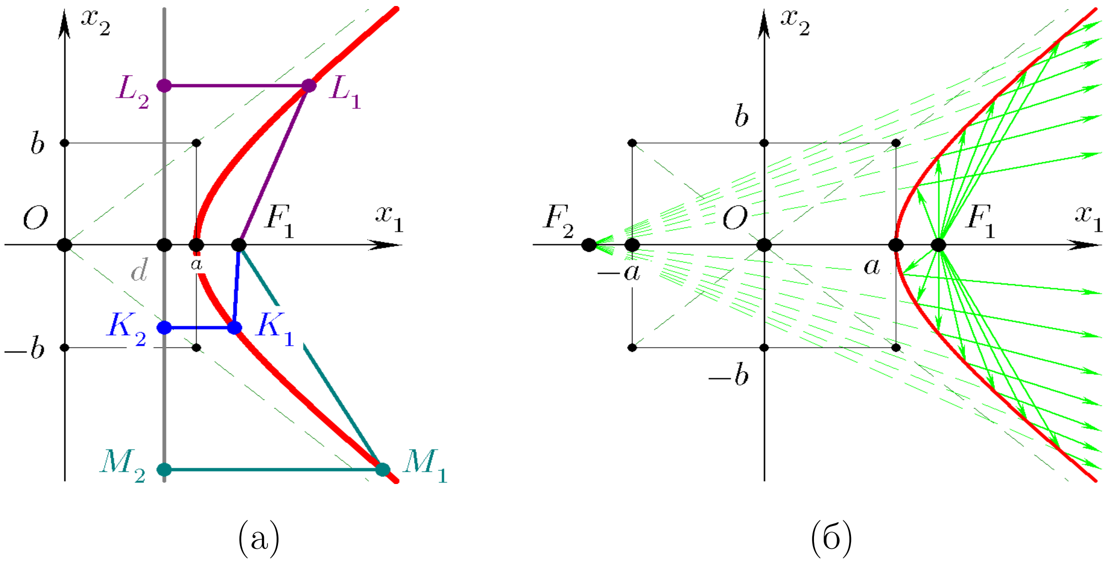


Рис. 10

Аналогично, расстояние от любой точки гиперболы (52) до фокуса $F_2 = (-c,\, 0)$ есть расстояние от этой точки гиперболы до ближайшей к фокусу директрисы $x = -d$, умноженное на e.

5. Интересное свойство, которым обладает гипербола: если из одного фокуса по всем направлениям расходятся световые лучи, то после отражения от гиперболы они направлены так, будто источником всех этих лучей служил второй фокус (Рис. 10(б)).

Альтернативное каноническое уравнение гиперболы в системе координат Ox_1x_2 имеет вид

$$-\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1\,. \tag{53}$$

Замечания

1. Фокусы гиперболы (53) находятся в точках $F_1 = (0,\, c)$, $F_2 = (0,\, -c)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Рис. 11). Эксцентриситетом гиперболы (53) считается величина

$$e = \frac{c}{b} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}\,,$$

причём, $e > 1$.

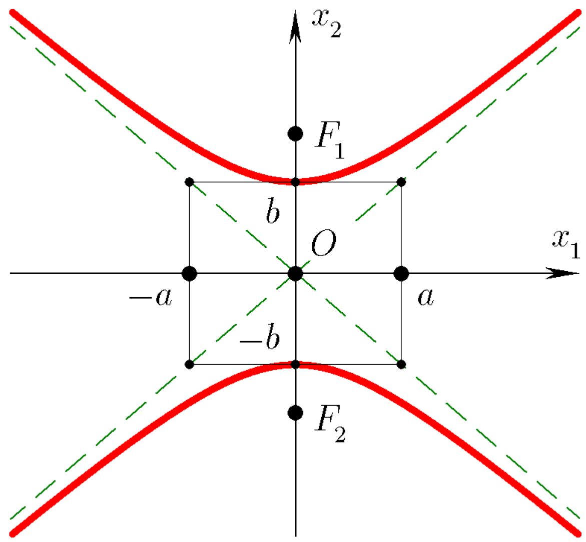


Рис. 11

2. Гипербола (53) состоит из двух ветвей, осью симметрии для каждой из них служит ось Ox_2. Ближайшие друг к другу точки ветвей – точки $(0,\, b)$ и $(0,\, -b)$.

3. Ветви гиперболы прижимаются к прямым $x_2 = \frac{b}{a} \cdot x_1$ и $x_2 = -\frac{b}{a} \cdot x_1$ при движении вдоль этих ветвей прочь от начала координат.

4. Гипербола (53) имеет две директрисы, а именно, прямые $y = d$ и $y = -d$, где $d = b/e$. Расстояние от любой точки гиперболы до фокуса $F_1 = (0,\, c)$ есть расстояние от этой точки гиперболы до ближайшей к фокусу директрисы $y = d$, умноженное на e.

Замечания

Канонические уравнения (50)–(53) отличаются от общего уравнения кривой второго порядка (49) тем, что квадратичные формы в них не содержат смешанного произведения $2a_{12}x_1x_2$ и не содержат линейной комбинации $b_1x_1 + b_2x_2$.

Распознать разновидность кривой второго порядка по общему уравнению (49) затруднительно. Перейти от общего уравнения кривой к одному из канонических уравнений (50)–(53) позволят два последовательных преобразования координат – поворот (который избавляет от смешанного произведения) и параллельный перенос (который избавляет от линейной комбинации).

Поворот

Пусть на одной плоскости совмещены своими началами в общей точке O две декартовы прямоугольные системы координат: первая, синяя система $Ox_{1E}x_{2E}$, и вторая, фиолетовая система $Ox_{1G}x_{2G}$, которая повёрнута относительно первой на угол γ против часовой стрелки (Рис. 12).

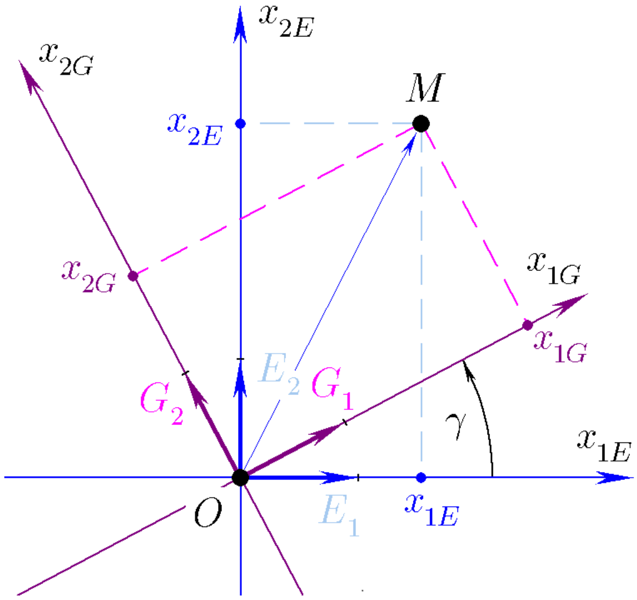


Рис. 12

Пусть имеется некая точка M, известная своими координатами $M_E = (x_{1E},\, x_{2E})$ в первой, и $M_G = (x_{1G},\, x_{2G})$ во второй системах. Тогда взаимосвязь между координатами задаётся соотношениями

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1E} = x_{1G}\cos\gamma - x_{2G}\sin\gamma \\ x_{2E} = x_{1G}\sin\gamma + x_{2G}\cos\gamma \end{array} \right| , \tag{54}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1G} = x_{1E}\cos\gamma + x_{2E}\sin\gamma \\ x_{2G} = -x_{1E}\sin\gamma + x_{2E}\cos\gamma \end{array} \right| . \tag{55}$$

Если положить

$$X_E = \begin{pmatrix} x_{1E} \\ x_{2E} \end{pmatrix}, \qquad X_G = \begin{pmatrix} x_{1G} \\ x_{2G} \end{pmatrix},$$

$$S_{G\to E} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}, \quad S_{E\to G} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} = (S_{G\to E})^{-1}, \tag{56}$$

то системы соотношений (54)–(55) равносильны матричным соотношениям

$$X_E = S_{G\to E} X_G\,, \qquad X_G = S_{E\to G} X_E\,. \tag{57}$$

Очевидно (Рис. 12), что столбец X_E содержит коэффициенты разложения радиус-вектора OM по простейшему базису $\{E_i\} = \{E_1,\, E_2\}$, состоящему из векторов (координатных ортов)

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а столбец X_G содержит коэффициенты разложения радиус-вектора OM по другому базису $\{G_i\} = \{G_1,\, G_2\}$, состоящему из векторов (координатных ортов)

$$G_1 = \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} -\sin\gamma \\ \cos\gamma \end{pmatrix}.$$

В качестве столбцов матрицы $S_{G\to E}$ служат столбцы G_1 и G_2, так что $S_{G\to E}$ можно с полным правом называть матрицей перехода от базиса $\{G_i\}$ к базису $\{E_i\}$.

Аналогично, $S_{E\to G}$ следует называть матрицей перехода от базиса $\{E_i\}$ к базису $\{G_i\}$.

Координаты точки M в системе $Ox_{1E}x_{2E}$, совпадают с компонентами радиус-вектора OM в базисе $\{E_i\} = \{E_1\,,\, E_2\}$. Координаты точки M в системе $Ox_{1G}x_{2Gg}$, совпадают с компонентами радиус-вектора OM в базисе $\{G_i\} = \{G_1\,,\, G_2\}$.

Параллельный перенос

Пусть на одной плоскости имеются две декартовы прямоугольные системы координат: первая, фиолетовая система $O_G\, x_{1G}\, x_{2G}$, и вторая, бирюзовая система $O_H\, x_{1H}\, x_{2H}$, которая смещена относительно первой параллельным переносом на расстояние c_1 вдоль координаты x_{1G} и на расстояние c_2 вдоль координаты x_{2G} (Рис. 13).

Пусть имеется некая точка M, известная своими координатами $M_G = (x_{1G},\, x_{2G})$ в первой, и $M_H = (x_{1H},\, x_{2H})$ во второй системах. Тогда взаимосвязь между координатами задаётся соотношениями

$$\left\{\begin{aligned} x_{1G} &= x_{1H} + c_1 \\ x_{2G} &= x_{2H} + c_2 \end{aligned}\right|, \tag{58}$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_{1H} &= x_{1G} - c_1 \\ x_{2H} &= x_{2G} - c_2 \end{aligned} \right| . \tag{59}$$

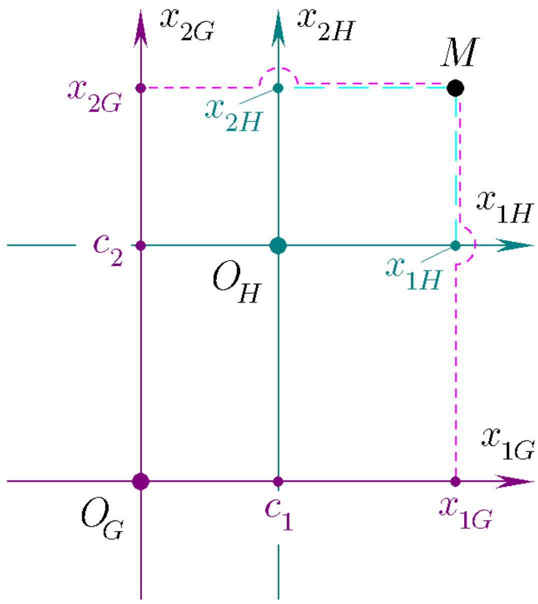


Рис. 13

Если положить

$$X_G = \begin{pmatrix} x_{1G} \\ x_{2G} \end{pmatrix}, \qquad X_H = \begin{pmatrix} x_{1H} \\ x_{2H} \end{pmatrix},$$

$$P_{H\to G} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \qquad P_{G\to H} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix} = -P_{G\to H}\,, \tag{60}$$

то соотношения (58)–(59) равносильны матричным соотношениям

$$X_G = P_{H\to G} + X_H\,, \qquad X_H = P_{G\to H} + X_G\,. \tag{61}$$

<u>Задача</u>

Построить кривую второго порядка, заданную уравнением

$$7\,x_1^2 + x_2^2 - 8\,x_1 x_2 + 22\sqrt{5}\,x_1 - 10\sqrt{5}\,x_2 + 71 = 0\,. \tag{62}$$

Решение

Уравнение кривой второго порядка ((49) – в общем виде, (62) – в данном случае) должно быть преобразовано, путём смены системы координат, к каноническому виду кривой – к виду (50), или (51), или (52), или (53).

Каждой точке M, имеющей координаты $(x_1\,,\,x_2)$ в двумерной декартовой прямоугольной системе координат Ox_1x_2, можно поставить в соответствие вектор $X = OM = (x_1\,,\,x_2)$.

Рассмотрим простейший базис $\{E_i\} = \{E_1\,,\,E_2\}$, составленный из векторов $E_1 = (1,0)$, $E_2 = (0,1)$. Пусть столбец разложения вектора X по такому базису имеет вид $X_E = (x_{1E}\,,\,x_{2E})$. Поскольку базис $\{E_i\}$ – простейший, $x_{1E} = x_1$, $x_{2E} = x_2$. Тогда поставленную задачу можно перефразировать так: требуется найти множество векторов $X_E = (x_{1E}\,,\,x_{2E})$, которые подчиняются уравнению $F(x_{1E}\,,\,x_{2E}) = 0$, где

$$F(x_{1E}\,,\,x_{2E}) = 7\,x_{1E}^2 + x_{2E}^2 - 8\,x_{1E}x_{2E} + 22\sqrt{5}\,x_{1E} - 10\sqrt{5}\,x_{2E} + 71\,. \qquad (63)$$

Первые три слагаемых в (63) представляют квадратичную форму с матрицей (40) на странице 59:

$$A_E = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа и нормированные собственные векторы этой матрицы

$$\lambda_1 = -1, \qquad G_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 9, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

уже найдены (стр. 60–61). Набор векторов $\{G_i\} = \{G_1\,,\,G_2\}$ образует базис, столбцы этого базиса, будучи составлены вместе, образуют матрицу перехода

$$S_{G\to E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Пусть $X_G = (x_{1G}\,,\,x_{2G})$ есть столбец разложения вектора X по базису $\{G_i\}$. Тогда, по теореме о назначении матрицы перехода,

$$X_E = S_{G\to E}\cdot X_G\,,$$

$$\begin{pmatrix} x_{1E} \\ x_{2E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_{1G} \\ x_{2G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_{1G} - 2x_{2G}}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2x_{1G} + x_{2G}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}. \qquad (64)$$

Из (64) следует, что

$$\left\{\begin{array}{l} x_{1E} = \dfrac{x_{1G} - 2x_{2G}}{\sqrt{5}} \\ x_{2E} = \dfrac{2x_{1G} + x_{2G}}{\sqrt{5}} \end{array}\right|. \qquad (65)$$

Подставляя (65) в (63), получаем

$$F(x_{1E}\,,\,x_{2E}) = F\left(\frac{x_{1G}-2x_{2G}}{\sqrt{5}}\,,\,\frac{2x_{1G}+x_{2G}}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= 7\cdot\left(\frac{x_{1G}-2x_{2G}}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2x_{1G}+x_{2G}}{\sqrt{5}}\right) - 8\cdot\frac{x_{1G}-2x_{2G}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2x_{1G}+x_{2G}}{\sqrt{5}} +$$

$$+ 22\sqrt{5}\cdot\frac{x_{1G}-2x_{2G}}{\sqrt{5}} - 10\sqrt{5}\cdot\frac{2x_{1G}+x_{2G}}{\sqrt{5}} + 71 =$$

$$= \frac{7x_{1G}^2 - 28x_{1G}x_{2G} + 28x_{2G}^2 + 4x_{1G}^2 + 4x_{1G}x_{2G} + x_{2G}^2 - 16x_{1G}^2 - 8x_{1G}x_{2G} + 32x_{2G}x_{1G} + 16x_{2G}^2}{5} +$$

$$+ 22x_{1G} - 44x_{2G} - 20x_{1G} - 10x_{2G} + 71 =$$

$$= -x_{1G}^2 + 9\,x_{2G}^2 + 2\,x_{1G} - 54\,x_{2G} + 71\,. \tag{66}$$

Из (66) видно, что квадратичная форма не содержит смешанного произведения $x_{1G}x_{2G}$ (члены с $x_{1G}x_{2G}$ взаимно уничтожились), коэффициент при x_{1G}^2 есть собственное число $\lambda_1 = -1$, коэффициент при x_{2G}^2 есть собственное число $\lambda_2 = 9$. Полученные упрощения предсказаны теоремой о симметричной матрице в базисе из нормированных собственных векторов.

Вектор G_1 образует угол $\gamma = \operatorname{arctg} 2$ с осью Ox_{1E}, вектор G_2 образует такой же угол с осью Ox_{2E}, следовательно, переход от (63) к (66) означает переход к новой системе координат OG_1G_2, которая повёрнута на угол $\gamma = \operatorname{arctg} 2$ относительно старой системы координат OE_1E_2.

Цепь выкладок (66) должна быть продолжена:

$$F(x_{1E}\,,\,x_{2E}) = -x_{1G}^2 + 2x_{1G} + 9x_{2G}^2 - 54x_{2G} + 71 =$$

$$= -(x_{1G}^2 - 2x_{1G}) + (9x_{2G}^2 - 54x_{2G}) + 71 =$$

$$= -(x_{1G}^2 - 2x_{1G}) + 9\cdot(x_{2G}^2 - 6x_{2G}) + 71 =$$

$$= -((x_{1G}^2 - 2x_{1G} + 1) - 1) + 9\cdot((x_{2G}^2 - 6x_{2G} + 9) - 9) + 71 =$$

$$= -(x_{1G}^2 - 2x_{1G} + 1) + 1 + 9\cdot(x_{2G}^2 - 6x_{2G} + 9) - 81 + 71 =$$

$$= -(x_{1G} - 1)^2 + 9\cdot(x_{2G} - 3)^2 - 9 = 0\,. \tag{67}$$

Таким образом, сложное исходное уравнение кривой второго порядка свелось к более простому уравнению в переменных x_{1G}, x_{2G},

$$-(x_{1G}-1)^2+9\cdot(x_{2G}-3)^2=9 \iff -\frac{(x_{1G}-1)^2}{3^2}+\frac{(x_{2G}-3)^2}{1^2}=1\,. \qquad (68)$$

Введём следующие, самые новые переменные x_{1H}, x_{2H}:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{1H}=x_{1G}-1 \\ x_{2H}=x_{2G}-3 \end{array}\right| . \qquad (69)$$

Согласно (58)–(59), переход к таким переменным означает, что самая новая система координат $Ox_{1H}x_{2H}$ получена параллельным переносом относительно системы OG_1G_2 на одну единицу вдоль оси OG_1 и на три единицы вдоль оси OG_2.

Уравнение кривой в самой новой системе координат $Ox_{1H}x_{2H}$ принимает предельно простой вид

$$-\frac{x_{1H}^2}{3^2}+\frac{x_{2H}^2}{1^2}=1\,, \qquad (70)$$

совпадающий с видом (53).

Пришло время назвать этапы построения графика кривой, заданной уравнением (70).

1. Строится, первая, исходная, (на Рис. 14 – синяя) система координат $Ox_{1E}x_{2E}$, в которой координатные оси направлены вдоль базисных ортов

$$E_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad E_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

2. Строится вторая, промежуточная, (на Рис. 14 – фиолетовая) система координат $Ox_{1G}x_{2G}$, в которой координатные оси направлены вдоль базисных ортов

$$G_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}, \qquad G_2=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}.$$

Следует напомнить, что векторы G_1 и G_2 являются нормированными собственными векторами матрицы квадратичной формы. Переход от системы $Ox_{1E}x_{2E}$ к системе $Ox_{1G}x_{2G}$ означает поворот на угол $\gamma=\operatorname{arctg}2\approx 63^0\!.4349$. Важно правильно построить направляющие базисные орты G_1, G_2, а значение угла γ само по себе не столь существенно.

3. Строится третья, итоговая, (на Рис. 14 – бирюзовая) система координат

$Ox_{1H}x_{2H}$, координатные оси которой смещены параллельным переносом относительно осей промежуточной системы. Точка O_H – центр третьей системы – имеет, согласно (61), во второй системе координаты $c_1 = 1$, $c_2 = 3$.

4. Уравнение (70) имеет тот же вид, что и уравнение (53), поэтому гипербола строится по подобию Рис. 11. Из (70) ясно, что $a = 3$, $b = 1$. Это означает, что в центре системы координат $Ox_{1H}x_{2H}$ следует построить прямоугольник размерами 6×2, стороны которого задаются уравнениями $x_{1H} = \pm 3$, $x_{2H} = \pm 1$. На Рис. 14 прямоугольник показан жёлтым цветом. Прямые, лежащие вдоль диагоналей жёлтого прямоугольника, являются асимптотами гиперболы.

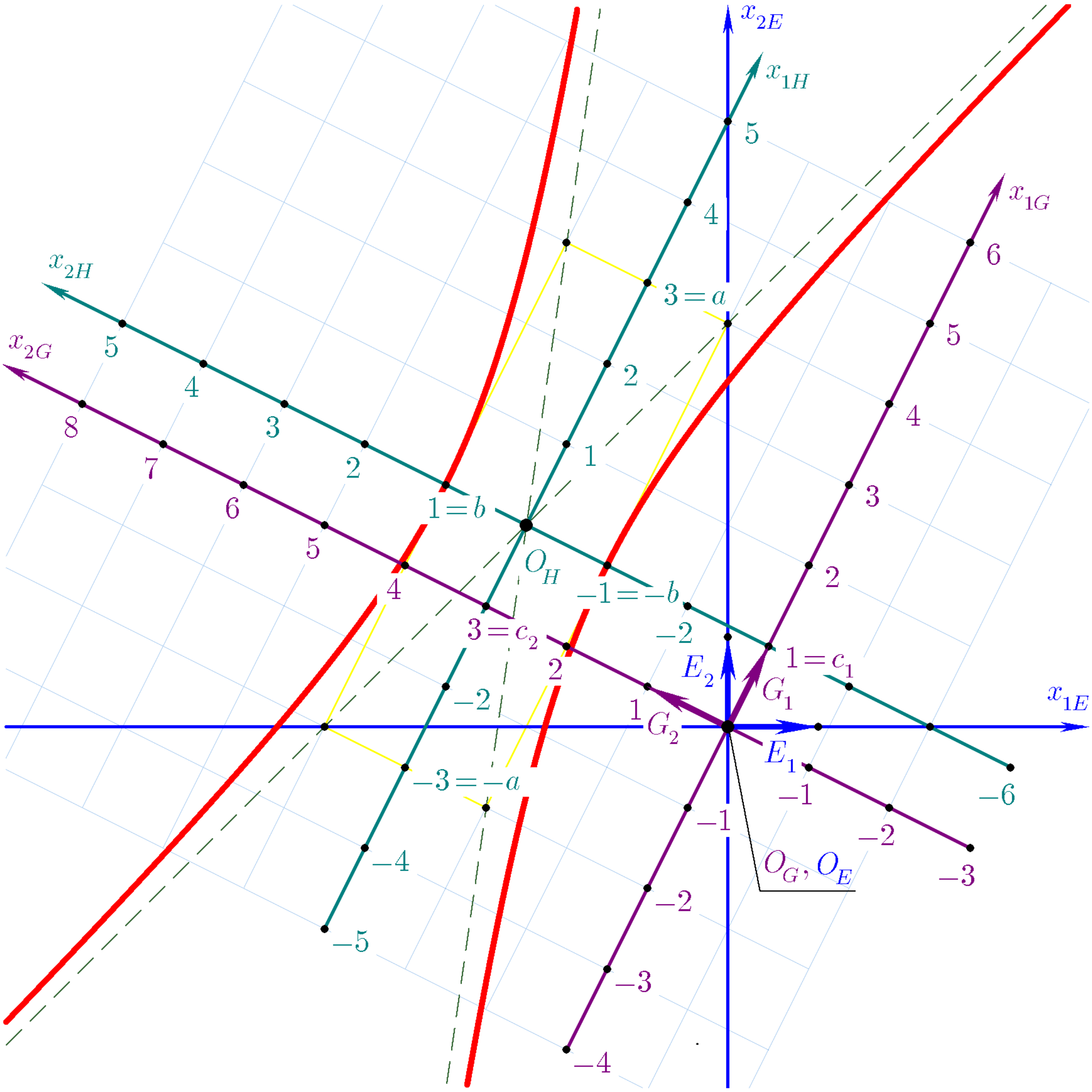


Рис. 14

Задача линейного программирования

Определение

Требование найти наибольшее значение линейной функции n переменных

$$f(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\, ,\, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \tag{71}$$

на множестве, заданном m линейными ограничениями

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n & \leq & b_3 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array} \right| , \tag{72}$$

"естественными ограничениями"

$$x_1 \geq 0\,, \quad x_2 \geq 0\,, \quad x_3 \geq 0\,, \quad \ldots \quad , \quad x_n \geq 0\,, \tag{73}$$

а также найти набор численных значений переменных $x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\, ,$ x_n , при которых это наибольшее значение достигается, называется задачей линейного программирования.

Замечание

В некоторых источниках задача линейного программирования формулируется несколько иначе. Однако, отличия не являются принципиальными.

1. Если найти требуется не наибольшее, а наименьшее значение функции $f(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\, ,\, x_n)$, то это равноценно поиску наибольшего значения функции $-f(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\, ,\, x_n)$.

2. Если для неравенств (72) требуется противоположная направленность ("$\geq$" взамен "$\leq$"), эти все неравенства достаточно умножить на -1 .

3. "Естественные ограничения" (73) могут быть опущены, так как их можно заменить равноценными требованиями $-x_i \leq 0$, которые представляют частный случай неравенств (72). Правда, в такой ситуации придётся выставить требование $m > n$.

4. Если линейные требования–неравенства (72) дополняются линейными

требованиями–равенствами, и задача число внешне выглядит более трудной, на сложности алгоритма решения такое дополнение не сказывается.

Замечания

1. Участвующая в постановке задачи функция $f(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\,,\, x_n)$ называется целевой функцией.

2. Задача линейного программирования решается методами линейной алгебры.

Определение двойственной задачи линейного программирования

Требование найти наименьшее значение линейной функции m переменных

$$g(y_1,\, y_2,\, y_3,\, \ldots\,,\, y_m) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + \ldots + b_m y_m \tag{74}$$

на множестве, заданном n линейными ограничениями

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + \ldots + a_{m1}y_m & \geq & c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + \ldots + a_{m3}y_m & \geq & c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 + \ldots + a_{m3}y_m & \geq & c_3 \\ \ldots & & \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + a_{3n}y_3 + \ldots + a_{mn}y_m & \geq & c_n \end{array} \right| , \tag{75}$$

"естественными ограничениями"

$$y_1 \geq 0\,, \quad y_2 \geq 0\,, \quad y_3 \geq 0\,, \quad \ldots \quad , \quad y_m \geq 0\,, \tag{76}$$

а также найти набор численных значений переменных $y_1,\, y_2,\, y_3,\, \ldots\,,$ $y_m\,,$ при которых это наименьшее значение достигается, называется двойственной (по отношению к задаче (71)–(73)) задачей линейного программирования.

Теорема о связи двух задач линейного программирования

Если f_{max} есть наибольшее значение функции в задаче линейного программирования (71)–(73), и если g_{min} есть наименьшее значение функции в двойственной задаче линейного программирования (74)–(76), то $f_{max} = g_{min}\,.$

Без доказательства.

Задача

Найти наибольшее значение функции

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \tag{77}$$

на множестве, заданном линейными ограничениями

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ 5x_1 - x_2 & \leq & 18 \\ -3x_1 - x_2 & \leq & -12 \\ 4x_1 + x_2 & \leq & 24 \end{cases} \tag{78}$$

и "естественными ограничениями"

$$x_1 \geq 0\,, \quad x_2 \geq 0\,. \tag{79}$$

Решение

Результат обращения к сайту WolframAlpha.com с командой

$$\text{ConstrainedMax}[2*\text{x1}+\text{x2}, \{-2*\text{x1}+\text{x2} <= 3, 5*\text{x1}-\text{x2} <= 18, -3*\text{x1}-\text{x2} <= -12, 4*\text{x1}+\text{x2} <= 24, \text{x1} >= 0, \text{x2} >= 0\}, \{\text{x1}, \text{x2}\}]$$

показан на Рис. 15.

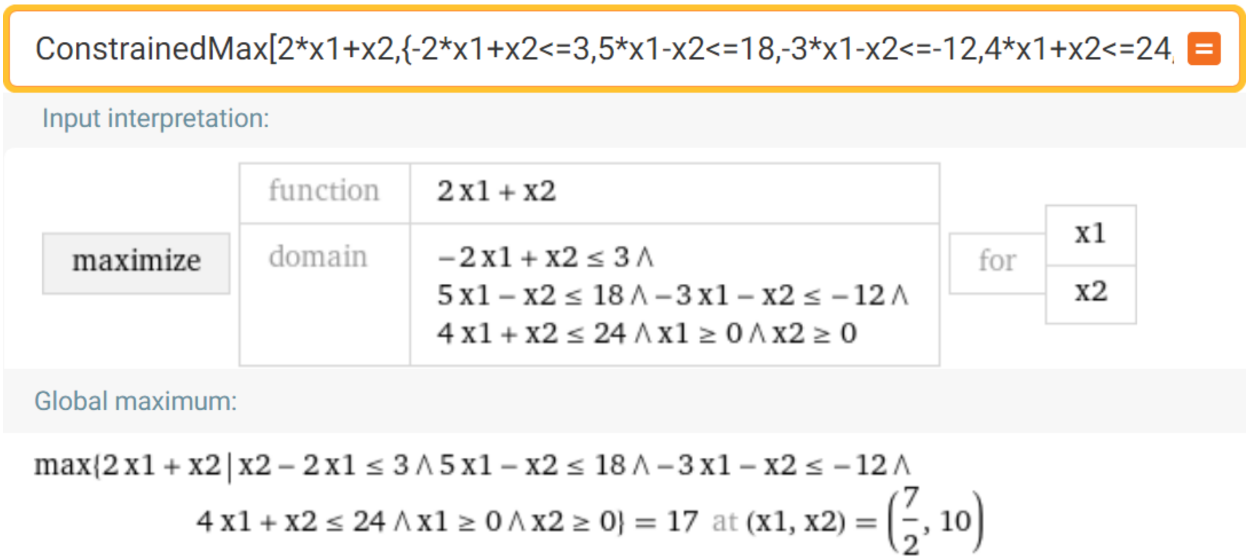


Рис. 15

Искомый максимум равен 17.

Двойственная задача

Найти наименьшее значение функции

$$g(y_1, y_2, y_3, y_4) = 3y_1 + 18y_2 - 12y_3 + 24y_4 \tag{80}$$

на множестве, заданном линейными ограничениями

$$\left\{ \begin{array}{rcc} -2y_1 + 5y_2 - 3y_3 + 4y_4 & \geq & 2 \\ y_1 - y_2 - y_3 + y_4 & \geq & 1 \end{array} \right| \tag{81}$$

и "естественными ограничениями"

$$y_1 \geq 0\,, \quad y_2 \geq 0\,, \quad y_3 \geq 0\,, \quad y_4 \geq 0\,. \tag{82}$$

Решение двойственной задачи

Результат обращения к сайту WolframAlpha.com с командой

ConstrainedMin[3 ∗ y1 + 18 ∗ y2 − 12 ∗ y3 + 24 ∗ y4, {−2 ∗ y1 + 5 ∗ y2 − 3 ∗ y3 + 4 ∗ y4 >= 2, y1 − y2 − y3 + y4 >= 1, y1 >= 0, y2 >= 0, y3 >= 0, y4 >= 0}, {y1, y2, y3, y4}]

показан на Рис. 16.

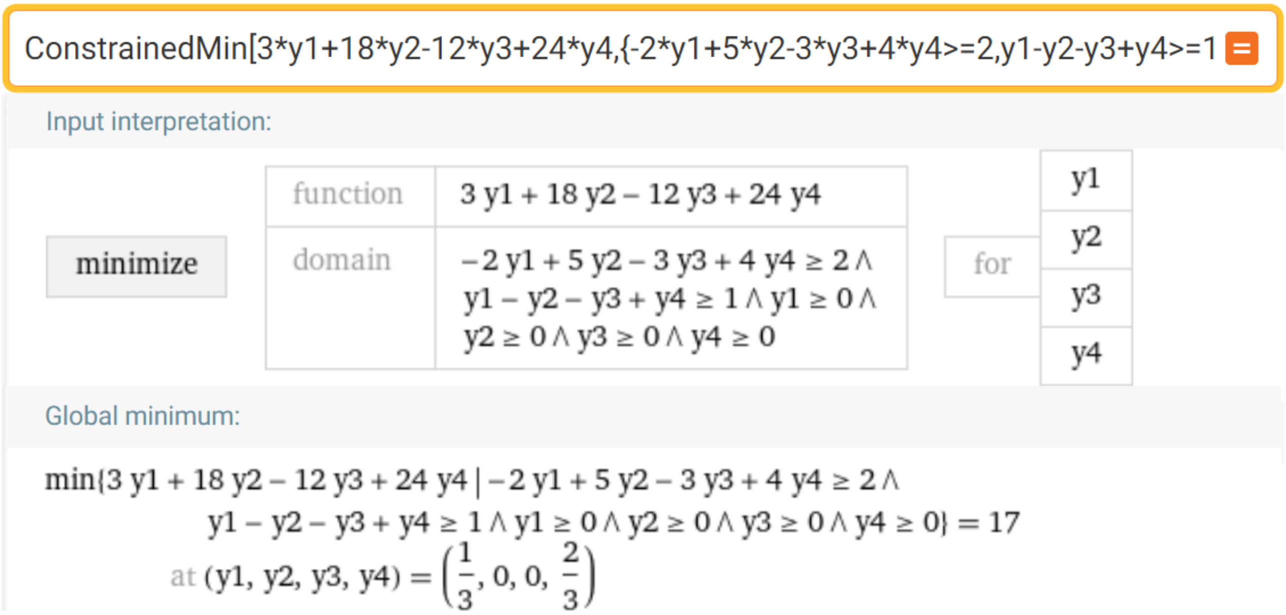


Рис. 16

Поскольку задача (80)–(82) является двойственной по отношению к задаче (77)–(79), найденное наименьшее значение, равное 17, предсказуемо совпало с наибольшим значением предыдущей задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боревич З.И. Определители и матрицы. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. 192 с.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. 480 с.