Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Ю.А. Лавров

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2021

УДК 517.1 :517.2
ББК 22.161.1
Л13

Рецензенты:
Член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, научный руководитель ИПМаш РАН, директор ВШ МПУ СПбПУ
Д. А. Индейцев
Член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор ВШ ТМ СПбПУ
А. М. Кривцов

Лавров Ю. А. **Математический анализ: неопределённый интеграл** : учеб. пособие / Ю. А. Лавров. – СПб., 2021. – 36 с.

В учебном пособии представлены материалы первой части темы "Интегральное исчисление" раздела математики "Математический анализ". Материалы изложены в соответствии с действующими в СПбПУ образовательными стандартами. Учебное пособие представляет собой набор теоретических сведений и описание практических методов, необходимых для успешного освоения учебной дисциплины, для подготовки к контрольным работам и экзаменам.

Учебное пособие предназначено для бакалавров направления «Экономика и управление».

Табл. 3. Ил. 6. Библиогр.: 2 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

Простейшие приёмы интегрирования

Определение

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Функция $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$, если $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Замечание

$F(x)$ есть первообразная $f(x)$, если $f(x)$ есть производная $F(x)$.

Теорема

Если функция $F_1(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, и функция $F_2(x)$ также есть первообразная функции $f(x)$,
то существует константа C такая, что $F_2(x) = F_1(x) + C$.

Без доказательства.

Определение

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Множество всех первообразных функции $f(x)$ есть неопределённый интеграл функции $f(x)$.

Обозначение: $\displaystyle\int f(x)\,dx$, или $\displaystyle\int f(x)\cdot dx$.

Замечание

Если знак "$\displaystyle\int$" используется для обозначения операции взятия первообразной вполне уместно, то по поводу необходимости множителя "dx" могут, поначалу, появиться сомнения.

Обозначение $\displaystyle\int f(x)\cdot dx$ ввёл Готфрид Вильгельм Лейбниц. Данное обозначение, как и вся система обозначений для дифференциального и интегрального исчисления, является большой заслугой Лейбница, поскольку эта система оказывает значительную помощь её пользователю при взятии производных и интегралов.

Система обозначения интегралов Исаака Ньютона не прижилась.

Ниже приводится таблица неопределённых интегралов, которую следует знать наизусть.

1	$\displaystyle\int 0 \cdot dx = C$	10	$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
2	$\displaystyle\int 1 \cdot dx = x + C$	11	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
3	$\displaystyle\int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} + C$	12	$\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
4	$\displaystyle\int x^n \cdot dx \underset{n\neq -1}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	13	$\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
5	$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	14	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
6	$\displaystyle\int e^x \cdot dx = e^x + C$	15	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
7	$\displaystyle\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	16	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+\alpha}\right\rvert + C$
8	$\displaystyle\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$	17	$\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$
9	$\displaystyle\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$	18	$\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$

Табл. 1

Далее, для краткости, ссылка на i–й пункт таблицы неопределённых интегралов будет совершаться в виде $\boxed{\text{Int } i}$.

Теорема

1. $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$
2. $\displaystyle\int (A \cdot f(x))\, dx = A \cdot \int f(x)\, dx$

Без доказательства.

Замечание

Нетрудно доказать, что $\displaystyle\int (f(x) - g(x))\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$.

Пример 1

Взять интеграл $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^3-x}{x^2}\,dx.$

Решение

$$\int \frac{x^4+2x^3-x}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{x^4}{x^2}+\frac{2x^3}{x^2}-\frac{x}{x^2}\right) dx = \int \left(x^2+2\cdot x-\frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \int x^2\,dx + 2\cdot\int x\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+C_1\right) + 2\cdot\left(\frac{x^2}{2}+C_2\right) - (\ln|x|+C_3) =$$

$$= \frac{x^3}{3} + 2\cdot\frac{x^2}{2} - \ln|x| + \underbrace{C_1+2C_2-C_3}_{=C} = \frac{x^3}{3}+x^2-\ln|x|+C\,.$$

Замечание

В дальнейшем не будет сбора линейной комбинации нескольких констант в одну. Константа будет выписываться только одна и только один раз – по окончании процесса интеггрирования.

Замена переменной под знаком интеграла

Теорема о замене переменной под знаком неопределённого интеграла

Если $$\int f(x)\,dx = F(x)+C\,, \tag{1}$$

то $$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x))+C\,. \tag{2}$$

Доказательство

Равенство (1) по определению означает, что $F'_x(x)=f(x)$, $F'_u(u)=f(u)$.

Равенство (2) по определению означает, что $(F(g(x)))'_x = f(g(x))\cdot g'(x)$.

Возьмём производную функции от функции (сложной функции):

$$(F(g(x)))'_x = F'_{\underbrace{g(x)}_{=u}}\Big(\underbrace{g(x)}_{=u}\Big)\cdot g'(x) = F'_u(u)\cdot g'(x) = f(\underbrace{u}_{=g(x)})\cdot g'(x) =$$

$$= f(g(x))\cdot g'(x)\,. \tag{3}$$

Равенство (3) совпадает с тем, что, по определению, означает равенство (2). Доказательство закончено.

Определение

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Дифференциал функции есть произведение двух сомножителей: производной функции, то есть $f'(x)$, и малого приращения независимой переменной, которое принято обозначать через dx.

Обозначение: $df(x) = f'(x) \cdot dx$.

Замечание

Пришло время объяснить пользу от множителя dx под знаком интеграла. Поскольку, по определению дифференциала, $d(g(x)) = g'(x) \cdot dx$, равенство (2) можно переписать в виде

$$\int f(g(x)) \cdot d(g(x)) = F(g(x)) + C\,. \tag{4}$$

Соотношение (4) как раз и представляет ту удачную находку Готфрида Вильгельма Лейбница, благодаря которой брать интегралы становится легче. Действительно, (4) можно воспринимать так: интеграл, в котором и подынтегральная функция, и дифференциал зависят только от функции $g(x)$, можно брать так, как если бы $g(x)$ была независимой переменной. Во многих случаях, для упрощения понимания выкладок, $g(x)$ временно заменяется но новую переменную (например, на переменную y), но после взятия интеграла новая переменная y в результирующем выражении заменяется на $g(x)$.

Простейшая из функций $g(x)$ внутри дифференциала – линейная. Для неё уместно написать и запомнить соотношение

$$dx = \frac{1}{a} \cdot d\,(a \cdot x + b)\,, \tag{5}$$

вытекающее непосредственно из определения дифференциала:

$$\frac{1}{a} \cdot d\,(a \cdot x + b) = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot x + b)' \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot a \cdot dx = dx\,.$$

Частные случаи (5)

$$dx = \frac{1}{a} \cdot d\,(a \cdot x)\,, \qquad dx = d\,(x + b)\,,$$

словами можно выразить так: за внесение внутрь дифференциала постоянного множителя a нужно расплатиться дополнительным множителем $\frac{1}{a}$ перед дифференциалом, а внесение внутрь дифференциала постоянного слагаемого b совершается бесплатно.

Пример 2

Взять интеграл $\displaystyle\int \sin(2x)\cdot dx.$

Решение

$$\int \sin(2x)\cdot dx = \int \sin(2x)\cdot \frac{1}{2}\cdot d(2x) = \frac{1}{2}\cdot\int \sin(2x)\cdot d(2x) = \boxed{y=2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int \sin y\cdot dy = \boxed{\text{Int } 9} = -\frac{1}{2}\cdot\cos y + C_1 = -\frac{\cos(2x)}{2} + C_1\,.$$

Пример 3

Взять интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+6x+2}\,.$

Решение

$$\int \frac{dx}{9x^2+6x+2} = \int \frac{dx}{(9x^2+6x+1)+1} = \int \frac{dx}{(3x+1)^2+1} = \int \frac{\frac{1}{3}\cdot d(3x+1)}{(3x+1)^2+1} =$$

(внутрь дифференциала внесён множитель 3; за что пришлось расплатиться дополнительным множителем $\frac{1}{3}$ перед знаком дифференциала; за внесение постоянного слагаемого 1 расплачиваться не пришлось)

$$= \boxed{y=3x+1} = \frac{1}{3}\cdot\int \frac{dy}{y^2+1} = \boxed{\text{Int } 12} = \frac{1}{3}\cdot \operatorname{arctg} y + C = \frac{\operatorname{arctg}(3x+1)}{3} + C\,.$$

Пример 4

Взять интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x-7}}\,.$

Решение

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x-7}} = \frac{1}{4}\cdot\int \frac{d(4x-7)}{\sqrt[3]{4x-7}} = \frac{1}{4}\cdot\int (4x-7)^{-\frac{1}{3}}\cdot d(4x-7) =$$

$$= \boxed{y=4x-7} = \frac{1}{4}\cdot\int y^{-\frac{1}{3}}\cdot dy = \boxed{\text{Int } 4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{y^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{1}{4}\cdot\frac{y^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot y^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{8}\cdot(4x-7)^{\frac{2}{3}} + C\,.$$

Пример 5

Взять интеграл $\displaystyle\int e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx$.

Решение

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx = \int e^{\sin x} \cdot (\sin x)' \cdot dx = \int e^{\sin x} \cdot d(\sin x) =$$

$$= \boxed{y = \sin x} = \int e^{y} \cdot dy = \boxed{\text{Int } 6} = e^{y} + C = e^{\sin x} + C\,.$$

Замечание

Для успешного выполнения выкладок, подобных применённым в Примере 5, есть смысл выписать и запомнить некоторые выражения, которые можно свернуть в полный дифференциал.

3	$x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot d\left(x^2\right)$	11	$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\,\mathrm{ctg}\,x$
4	$x^n \cdot dx \underset{n \neq -1}{=} \frac{1}{n+1} \cdot dx^{n+1}$	12	$\frac{dx}{1+x^2} = d\,\mathrm{arctg}\,x = -d\,\mathrm{arcctg}\,x$
5	$\frac{dx}{x} = d\ln\lvert x\rvert$	13	$\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \cdot d\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} = -\frac{1}{a} \cdot d\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}$
6	$e^x \cdot dx = de^x$	14	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\arcsin x = -d\arccos x$
7	$a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} \cdot da^x$	15	$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = d\arcsin\frac{x}{a} = d\arccos\frac{x}{a}$
8	$\cos x \cdot dx = d\sin x$	16	$\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = d\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+\alpha}\right\rvert$
9	$\sin x \cdot dx = -d\cos x$	17	$\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot d\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$
10	$\frac{dx}{\cos^2 x} = d\,\mathrm{tg}\,x$	18	$\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \cdot d\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert$

Табл. 2

Эти выражения построены на основе таблицы интегралов (начиная с третьего её пункта). Таблицу дифференциалов (Табл. 2) нужно выучить наизусть так же, как и таблицу интегралов.

Ссылка на i–й пункт таблицы дифференциалов далее будет совершаться в виде $\boxed{\text{Diff } i}$. Тем, кто обе таблицы хорошо помнит, смотреть на ссылки незачем.

Пример 6

Взять интеграл $\displaystyle\int \sin(2x)\cdot dx$ (такой же, как в Примере 2).

Решение. Второй способ

$$\int \sin(2x)\cdot dx = \int 2\cdot \sin x\cdot \cos x\cdot dx = \boxed{\text{Diff } 8} = 2\cdot\int \sin x\cdot d(\sin x) =$$

$$= \boxed{y=\sin x} = 2\int y\,dy = \boxed{\text{Int } 3} = 2\cdot\frac{y^2}{2} + C_2 = y^2 + C_2 = \sin^2 x + C_2\,.$$

Решение. Третий способ

$$\int \sin(2x)\cdot dx = \int 2\cdot \cos x\cdot \sin x\cdot dx = \boxed{\text{Diff } 9} = -2\cdot\int \cos x\cdot d(\cos x) =$$

$$= \boxed{y=\cos x} = -2\int y\,dy = \boxed{\text{Int } 3} = -2\cdot\frac{y^2}{2} + C_3 = -y^2 + C_3 = -\cos^2 x + C_3\,.$$

В Примерах 2 и 6 интеграл взят один, а все три результата внешне разные. Для того, чтобы они были тождественно равны, необходима и достаточна следующая связь между константами: $C_2 = C_1 - \frac{1}{2}$, $C_3 = C_1 + \frac{1}{2}$, $C_3 = C_2 + 1$.

Пример 7

Взять интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{4-\ln^2 x}}$, полагая, что $x>0$.

Решение

$$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{4-\ln^2 x}} = \int \frac{\frac{1}{x}\cdot dx}{\cdot\sqrt{4-\ln^2 x}} = \boxed{\text{Diff } 5} = \int \frac{d(\ln x)}{\cdot\sqrt{4-\ln^2 x}} =$$

$$= \boxed{y=\ln x} = \int \frac{dy}{\cdot\sqrt{2^2-y^2}} = \boxed{\text{Int } 15} = \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + C = \arcsin\left(\frac{\ln x}{2}\right) + C\,.$$

Формула интегрирования по частям

Теорема о формуле интегрирования по частям для неопределённого интеграла

$$\int u(x)\cdot v'(x)\cdot dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\cdot dx\,, \qquad (6)$$

$$\int u(x)\cdot d\left(v(x)\right) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot d\left(u(x)\right),$$

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du\,. \qquad (7)$$

Доказательство

Приравняем производные левой и правой частей (6):

$$\left(\int u(x)\cdot v'(x)\cdot dx\right)' = \left(u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\cdot dx\right)',$$

$$u(x)\cdot v'(x) = \left(u(x)\cdot v(x)\right)' - v(x)\cdot u'(x)\,,$$

$$u(x)\cdot v'(x) = u(x)'\cdot v(x) + u(x)\cdot v(x)' - v(x)\cdot u'(x)\,,$$

$$u(x)\cdot v'(x) = u(x)\cdot v(x)'\,.$$

Доказательство закончено.

Пример 8

Взять интеграл $\int \ln x\, dx\,.$

Решение

$$\int \ln x\, dx = \int \underbrace{\ln x}_{=u(x)}\cdot d\underbrace{x}_{=v(x)} = \ln x\cdot x - \int x\, d\ln x = x\ln x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C\,.$$

Замечание

Формула интегрирования по частям помогает брать интеграл произведения двух функций. Предполагается, что после её применения интеграл либо сразу же становится табличным, либо, по крайней мере, оказывается более простым, чем исходный интеграл.

Пример 9

Взять интеграл $\int x \cdot \cos x \cdot dx$.

Решение. Первый подход

$$\int x \cdot (\cos x \cdot dx) = \boxed{\text{Diff 8}} = \int \underbrace{x}_{=u(x)} \cdot d\,(\underbrace{\sin x}_{=v(x)}) = x \cdot \sin x - \int \underbrace{\sin x}_{=v(x)} \cdot d\,(\underbrace{x}_{=u(x)}) =$$

$$= \boxed{\text{Int 9}} = x \cdot \sin x + \cos x + C\,.$$

"Решение". Второй подход

$$\int x \cdot \cos x \cdot dx = \int \cos x \cdot (x \cdot dx) = \int \cos x \cdot d\left(\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= \cos x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot d \cos x = \cos x \cdot \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^2}{2} \cdot \sin x \cdot dx\,.$$

Отметим, что второй подход к решению бесперспективен. Множитель x после применения формулы интегрирования по частям перешёл во множитель x^2, отчего новый интеграл стал только сложнее исходного.

Замечание

При обращении к формуле интегрирования по частям возникает вопрос: какую из двух функций в произведении под знаком интеграла следует использовать в качестве $u(x)$, и какую в качестве $v(x)$?

Для ответа на вопрос соберём элементарные функции в следующую таблицу:

1	Обратная тригонометрическая
2	Логарифмическая.
3	Степенная
4	Тригонометрическая
5	Показательная

Табл. 3

Та из двух функций, которая в этом списке стоит выше (имеет меньший номер), должна быть взята в качестве $u(x)$.

Та из двух функций, которая в этом списке стоит ниже (имеет бóльший номер), должна быть использована для построения дифференциала $d(v(x))$.

Пример 10

Взять интеграл $\int x^2 \cdot \ln x \cdot dx$.

Решение

$$\int x^2 \cdot \ln x \cdot dx = \int \ln x \cdot (x^2 \cdot dx) = \int \ln x \cdot d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \int \ln x \cdot d\left(x^3\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\ln x \cdot x^3 - \int x^3 \cdot d(\ln x)\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\ln x \cdot x^3 - \int x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\ln x \cdot x^3 - \int x^2 \cdot dx\right) = \frac{1}{3} \cdot \ln x \cdot x^3 - \frac{1}{9} \cdot x^3 + C\,.$$

<u>Замечание</u>

В Примере 10 и в последующих сначала в подынтегральном выражении выбирается (согласно Табл. 3) произведение, которое следует свернуть в дифференциал (с помощью Табл. 2), далее применяется формула интегрирования по частям, и затем полученный новый дифференциал "разворачивается" по определению дифференциала.

Пример 11

Взять интеграл $\int x^2 \cdot e^x \cdot dx$.

Решение

$$\int x^2 \cdot (e^x \cdot dx) = \int x^2 \cdot d(e^x) = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot d(x^2) = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x \cdot dx =$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \int e^x \cdot x \cdot dx = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \int x \cdot (e^x \cdot dx) = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \int x \cdot d(e^x) =$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \left(x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx\right) = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot (x \cdot e^x - e^x) + C\,.$$

В данном примере формулу интегрирования по частям пришлось применить дважды.

Пример 12

Взять интеграл $\int \sin x \cdot e^x \cdot dx$.

Решение

$$\int \sin x \cdot (e^x \cdot dx) = \int \sin x \cdot d\left(e^x\right) = \sin x \cdot e^x - \int e^x \cdot d\left(\sin x\right) =$$

$$= \sin x \cdot e^x - \int e^x \cdot \cos x \cdot dx = \sin x \cdot e^x - \int \cos x \cdot (e^x \cdot dx) =$$

$$= \sin x \cdot e^x - \int \cos x \cdot d\left(e^x\right) = \sin x \cdot e^x - \left(\cos x \cdot e^x - \int e^x \cdot d\left(\cos x\right)\right) =$$

$$= \sin x \cdot e^x - \left(\cos x \cdot e^x - \int e^x \cdot (-\sin x) \cdot dx\right) =$$

$$= \sin x \cdot e^x - \left(\cos x \cdot e^x + \int \sin x \cdot e^x \cdot dx\right) =$$

$$= \sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x - \int \sin x \cdot e^x \cdot dx\,.$$

После двухкратного применения формулы интегрирования по частям получен не ответ, а уравнение относительно искомого интеграла,

$$\int \sin x \cdot e^x \cdot dx = \sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x - \int \sin x \cdot e^x \cdot dx\,,$$

откуда

$$2 \cdot \int \sin x \cdot e^x \cdot dx = \sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x + 2C\,,$$

$$\int \sin x \cdot e^x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot e^x + C\,.$$

Пример 13

Взять интеграл $\displaystyle\int \sqrt{x^2+\alpha} \cdot dx\,.$

Решение

Применяем формулу интегрирования по частям:

$$I = \int \sqrt{x^2+\alpha} \cdot dx = \sqrt{x^2+\alpha} \cdot x - \int x \cdot d\sqrt{x^2+\alpha} =$$

$$= x \cdot \sqrt{x^2+\alpha} - \int x \cdot d\left(\left(x^2+\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= x \cdot \sqrt{x^2+\alpha} - \int x \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x^2+\alpha\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot dx = x \cdot \sqrt{x^2+\alpha} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+\alpha}} \cdot dx =$$

$$= x \cdot \sqrt{x^2+\alpha} - \int \frac{(x^2+\alpha)-\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}} \cdot dx =$$

$$= x \cdot \sqrt{x^2+\alpha} - \int \left(\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}} - \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}} \right) \cdot dx =$$

$$= x \cdot \sqrt{x^2+\alpha} - \int \sqrt{x^2+\alpha} \cdot dx + \alpha \cdot \int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}} \cdot dx =$$

$$= x \cdot \sqrt{x^2+\alpha} - I + \alpha \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = I\,. \qquad (8)$$

Соотношение (8) есть уравнение относительно искомого интеграла I. Решим его:

$$I = \int \sqrt{x^2+\alpha} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x \cdot \sqrt{x^2+\alpha} + \alpha \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} \right) =$$

$$= \boxed{\text{Int } 16} = \frac{1}{2} \cdot \left(x \cdot \sqrt{x^2+\alpha} + \alpha \cdot \ln \left| x + \sqrt{x^2+\alpha} \right| \right) + C\,. \qquad (9)$$

Интегрирование рациональных функций

Определение

Функция, представленная отношением двух полиномов

$$R(x) = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0}\,,$$

называется дробно–рациональной функцией, или рациональной дробью.

Если $n > m$, то дробь называется правильной.

Если $n \leq m$, то дробь называется неправильной.

Пример 14

Взять интеграл $\displaystyle\int \frac{x^2}{x-4} \cdot dx\,.$

Решение

$$\int \frac{x^2}{x-4} \cdot dx = \int \frac{(x^2-16)+16}{x-4} \cdot dx = \int \frac{x^2-16}{x-4} \cdot dx + \int \frac{16}{x-4} \cdot dx =$$

$$= \int \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} \cdot dx + 16 \cdot \int \frac{1}{x-4} \cdot d(x-4) =$$

$$= \int (x+4) \cdot dx + 16 \cdot \ln|x-4| = \frac{x^2}{2} + 4x + 16 \cdot \ln|x-4| + C\,.$$

Пример 15

Взять интеграл $\displaystyle\int \frac{x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2x + 2} \cdot dx\,.$

Решение

Любая неправильная дробно–рациональная функция может быть разложена в сумму полинома (целой части) и правильной дробно–рациональной функции (дробной части). Применим систематическую процедуру такого разложения, деление полинома на полином уголком (столбиком):

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 4 & x^2 + 2x + 2 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{x^4 + 2x^3 + 2x^2 \qquad\qquad} & x^2 - 3x + 7 \\
-3x^3 + x^2 - 5x \qquad & \\
-\ \underline{-3x^3 - 6x^2 - 6x \qquad} & \\
7x^2 + x + 4 & \\
-\ \underline{7x^2 + 14x + 14} & \\
-13x - 10 &
\end{array}$$

Сайт WolframAlpha.com показывает аналогичный результат:

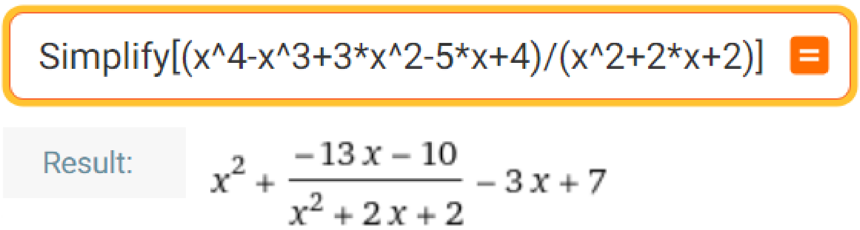

Рис. 1

Осталось взять интеграл суммы целой и дробной части:

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2x + 2} \cdot dx = \int \left(x^2 - 3x + 7 + \frac{-13x - 10}{x^2 + 2x + 2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 7x + \int \frac{-13(x+1) + 13 - 10}{(x^2 + 2x + 1) + 1} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x - 13 \cdot \int \frac{(x+1) \cdot d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} + 3 \cdot \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x - 13 \cdot \int \frac{\frac{1}{2} \cdot d\left((x+1)^2 + 1\right)}{(x+1)^2 + 1} + 3 \cdot \operatorname{arctg}(x+1) =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x - \frac{13}{2} \cdot \ln\left((x+1)^2 + 1\right) + 3 \cdot \operatorname{arctg}(x+1) + C\,.$$

Сайт WolframAlpha.com показывает аналогичный результат:

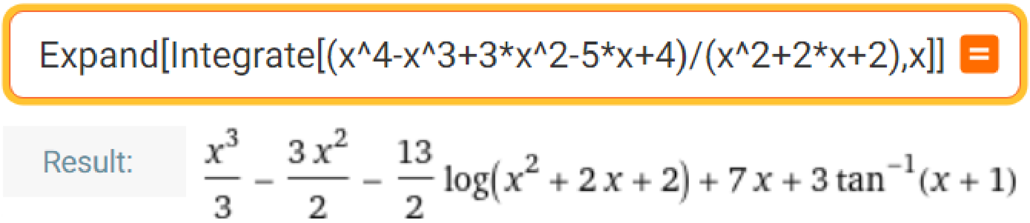

Рис. 2

Теорема 1 о разложении дробно–рациональной функции на простейшие

Пусть знаменатель правильной дроби

$$R(x) = \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot\ \ldots\ \cdot(x-x_n)}$$

представляет собой произведение n разных линейных множителей вида $(x - x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда дробь может быть представлена в виде суммы так называемых простейших дробей:

$$R(x) = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{x-x_3} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}\,.$$

Постоянные коэффициенты A_1, A_2, A_3, $\ldots$, A_n можно найти методом неопределённых коэффициентов.

Без доказательства.

Пример 16

Взять интеграл $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^2-3x+2}\cdot dx\,.$

Решение

$$\frac{x-5}{x^2-3x+2} = \frac{x-5}{(x-1)(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} = \frac{A_1(x-2)+A_2(x-1)}{(x-1)(x-2)}\,,$$

$$\frac{x-5}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A_1+A_2)\cdot x + (-2A_1 - A_2)}{(x-1)(x-2)}\,,$$

$$1\cdot x - 5 = (A_1+A_2)\cdot x + (-2A_1 - A_2)\,.$$

Метод неопределённых коэффициентов состоит в следующем. Для того, чтобы два полинома относительно переменной x были тождественно равны, достаточно потребовать, чтобы у них были равны коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\left\{ \begin{array}{r} A_1 + A_2 = 1 \\ -2A_1 - A_2 = -5 \end{array} \right| . \tag{10}$$

Система уравнений (10) имеет решение $A_1 = 4$, $A_2 = -3$, таким образом,

$$\frac{x-5}{x^2-3x+2} = \frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2},$$

$$\int \frac{x-5}{x^2-3x+2} \cdot dx = \int \left(\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} \right) \cdot dx = 4 \cdot \int \frac{dx}{x-1} - 3 \cdot \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= 4 \cdot \int \frac{d(x-1)}{x-1} - 3 \cdot \int \frac{d(x-2)}{x-2} = \boxed{\text{Int } 5} = 4 \cdot \ln|x-1| - 3 \cdot \ln|x-2| + C.$$

Пример 17

Взять интеграл $\displaystyle\int \frac{30}{x^3+x^2-6x} \cdot dx$.

Решение

Разложим знаменатель на линейные множители:

$$x^3 + x^2 - 6x = 0, \qquad x \cdot (x^2 + x - 6) = 0, \qquad x_1 = 0, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 2.$$

$$x^3 + x^2 - 6x = x \cdot (x+3) \cdot (x-2).$$

Определимся с разложением дробно–рациональной функции на простейшие:

$$\frac{30}{x^3+x^2-6x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+3} + \frac{A_3}{x-2},$$

$$\frac{30}{x \cdot (x+3) \cdot (x-2)} = \frac{A_1 \cdot (x+3)(x-2) + A_2 \cdot x(x-2) + A_3 \cdot x(x+3)}{x \cdot (x+3) \cdot (x-2)}.$$

Для тождественного равенства двух дробей с одинаковыми знаменателями достаточно потребовать равенства их числителей. Итак:

$$A_1 \cdot (x+3)(x-2) + A_2 \cdot x(x-2) + A_3 \cdot x(x+3) = 30. \tag{11}$$

Для поиска коэффициентов A_1, A_2, A_3, конечно же, можно применить метод неопределённых коэффициентов. Но в данном случае, когда знаменатель исходной дроби разлагается только на линейные множители, разумнее применить другой, весьма эффективный метод – Метод Коллокаций.

Равенство (11) должно быть выполнено для любого значения x, следовательно, оно должно выполняться и для какого–то удобного значения x.

Подставим $x = 0$ в (11). Получим:

$$A_1 \cdot (-6) + A_2 \cdot 0 + A_3 \cdot 0 = 30 \implies A_1 = -5\,.$$

Подставим $x = -3$ в (11). Получим:

$$A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 15 + A_3 \cdot 0 = 30 \implies A_2 = 2\,.$$

Подставим $x = 2$ в (11). Получим:

$$A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 0 + A_3 \cdot 10 = 30 \implies A_3 = 3\,.$$

Заметим, что для вычисления A_i мы подставляли в (11) то значение x, которое обращает в ноль знаменатель простейшей дроби с числителем A_i. Однако, нам необходимо и достаточно было достичь лишь тождественного равенства числителей (11), и мы его достигли.

Возвращаемся к интегралу:

$$\int \frac{30}{x^3+x^2-6x} \cdot dx = \int \left(-\frac{5}{x} + \frac{2}{x+3} + \frac{3}{x-2} \right) \cdot dx =$$

$$= -5 \cdot \int \frac{dx}{x} + 2 \cdot \int \frac{d(x+3)}{x+3} + 3 \cdot \int \frac{d(x-2)}{x-2} =$$

$$= \boxed{\text{Int 5}} = -5 \cdot \ln|x| + 2 \cdot \ln|x+3| + 3 \cdot \ln|x-2| + C\,.$$

Теорема 2 о разложении дробно–рациональной функции на простейшие

Пусть знаменатель правильной дроби

$$R(x) = \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0}{(x-x_1)\cdot \ \ldots \ \cdot(x-x_k)\cdot(x^2+p_1x+q_1)\cdot \ \ldots \ \cdot(x^2+p_\ell x+q_\ell)}$$

представляет собой произведение k разных линейных множителей вида $(x - x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и ℓ разных квадратичных множителей вида $(x^2 + p_j x + q_j)$, $j = 1, 2, \ldots, \ell$, с отрицательными дискриминантами.

Тогда дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей:

$$R(x) = \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_k}{x-x_k} + \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{\alpha_\ell x + \beta_\ell}{x^2+p_\ell x+q_\ell}\,.$$

Постоянные коэффициенты $A_1, \ldots, A_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell, \beta_1, \ldots, \beta_\ell$ можно найти методом неопределённых коэффициентов.

Без доказательства.

Замечание

Теорема 1 является частным случаем Теоремы 2. При изучении материала, с целью лучшего его усвоения, мы пользуемся стандартным образовательным принципом "от простого к сложному".

Замечание

Метод Коллокаций для рассмотренного в последней Теореме случая не даёт заметных преимуществ, в последующих примерах мы к нему обращаться не будем.

Если квадратичный полином $x^2 + px + q$ имеет отрицательный дискриминант $(p^2 - 4q < 0)$, то возможно представление

$$x^2 + px + q = (x + a)^2 + b^2,$$

где

$$a = \frac{p}{2}, \qquad b = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Пример 18

Взять интеграл $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2}{x \cdot (x^2 + 2x + 2)} \cdot dx$.

Решение

$$\frac{x^2 + 2}{x \cdot (x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + 2x + 2},$$

$$\frac{x^2 + 0 \cdot x + 2}{x \cdot (x^2 + 2x + 2)} = \frac{(A + \alpha) \cdot x^2 + (2A + \beta) \cdot x + 2A}{x \cdot (x^2 + 2x + 2)},$$

$$1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 2 = (A + \alpha) \cdot x^2 + (2A + \beta) \cdot x + 2A.$$

В соответствии с методом неопределённых коэффициентов

$$\left\{ \begin{aligned} & A + \alpha = 1 \\ & 2A + \beta = 0 \\ & 2A = 2 \end{aligned} \right| . \tag{12}$$

Система уравнений (12) имеет решение $A = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = -2$, таким образом,

$$\int \frac{x^2+2}{x\cdot(x^2+2x+2)}\cdot dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2+2x+2}\right)\cdot dx =$$

$$= \int\frac{dx}{x} - \int\frac{2\cdot dx}{(x^2+2x+1)+1} = \boxed{\text{Int 5}} = \ln|x| - 2\cdot\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \boxed{\text{Int 12}} = \ln|x| - 2\,\mathrm{arctg}\,(x+1) + C\,.$$

Теорема 3 о разложении дробно–рациональной функции на простейшие

Пусть знаменатель правильной дроби

$$R(x) = \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0}{(x-x_1)^{\mu_1}\cdot\ \ldots\ \cdot(x-x_k)^{\mu_k}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{\nu_1}\cdot\ \ldots\ \cdot(x^2+p_\ell x+q_\ell)^{\nu_\ell}}$$

представляет собой произведение k разных множителей вида $(x-x_i)^{\mu_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и ℓ разных множителей вида $(x^2+p_jx+q_j)^{\nu_j}$, $j = 1, 2, \ldots, \ell$, с отрицательными дискриминантами; μ_i, ν_j – натуральные числа.

Тогда дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей:

$$R(x) =$$

$$= \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1,\mu_1}}{(x-x_1)^{\mu_1}} +$$

$$+ \ldots +$$

$$+ \frac{A_{k1}}{x-x_k} + \frac{A_{k2}}{(x-x_k)^2} + \ldots + \frac{A_{k,\mu_k}}{(x-x_k)^{\mu_k}} +$$

$$+ \frac{\alpha_{11}x+\beta_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{\alpha_{12}x+\beta_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{1,\nu_1}x+\beta_{1,\nu_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\nu_1}} +$$

$$+ \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha_{\ell1}x+\beta_{\ell1}}{x^2+p_\ell x+q_\ell} + \frac{\alpha_{\ell2}x+\beta_{\ell2}}{(x^2+p_\ell x+q_\ell)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{\ell,\nu_\ell}x+\beta_{\ell,\nu_\ell}}{(x^2+p_\ell x+q_\ell)^{\nu_\ell}}\,.$$

Постоянные коэффициенты

A_{11}, A_{12}, $\ldots$, $A_{1\mu_1}$, $\ldots$, A_{k1}, A_{k2}, $\ldots$, A_{k,μ_k},

α_{11}, α_{12}, $\ldots$, $\alpha_{1\nu_1}$, $\ldots$, $\alpha_{\ell1}$, $\alpha_{\ell2}$, $\ldots$, α_{ℓ,ν_ℓ},

β_{11}, β_{12}, $\ldots$, $\beta_{1\nu_1}$, $\ldots$, $\beta_{\ell1}$, $\beta_{\ell2}$, $\ldots$, β_{ℓ,ν_ℓ}

можно найти методом неопределённых коэффициентов.

Без доказательства.

Замечание

Теоремы 1 и 2 являются частными случаями Теоремы 3.

Теорема об интеграле I_ν.

Для интеграла
$$I_\nu = \int \frac{dx}{(x^2+b^2)^\nu}$$
справедливо рекуррентное соотношение
$$I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu b^2} \cdot \left(\frac{x}{(x^2+b^2)^\nu} + (2\nu-1) \cdot I_\nu \right). \tag{13}$$

Полезным, также, может быть и "обратное" соотношение
$$I_\nu = \frac{1}{2\nu-1} \cdot \left(2\nu b^2 I_{\nu+1} - \frac{x}{(x^2+b^2)^\nu} \right) \tag{14}$$

Доказательство
$$I_\nu = \int \frac{dx}{(x^2+b^2)^\nu} = \int \underbrace{\frac{1}{(x^2+b^2)^\nu}}_{=u(x)} \cdot d\underbrace{x}_{=v(x)} =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{(x^2+b^2)^\nu}}_{=u(x)} \cdot \underbrace{x}_{=v(x)} - \int \underbrace{x}_{=v(x)} \cdot d\Bigg(\underbrace{\frac{1}{(x^2+b^2)^\nu}}_{=u(x)}\Bigg) =$$
$$= \frac{x}{(x^2+b^2)^\nu} - \int x \cdot d\left((x^2+b^2)^{-\nu}\right) = \frac{x}{(x^2+b^2)^\nu} - \int x \cdot (-\nu)(x^2+b^2)^{-\nu-1} \cdot 2x\,dx =$$
$$= \frac{x}{(x^2+b^2)^\nu} + 2\nu \int x^2 \cdot (x^2+b^2)^{-\nu-1} dx = \frac{x}{(x^2+b^2)^\nu} + 2\nu \int \frac{(x^2+b^2)-b^2}{(x^2+b^2)^{\nu+1}}\,dx =$$
$$= \frac{x}{(x^2+b^2)^\nu} + 2\nu \int \left(\frac{(x^2+b^2)^1}{(x^2+b^2)^{\nu+1}} - \frac{b^2}{(x^2+b^2)^{\nu+1}} \right) dx =$$
$$= \frac{x}{(x^2+b^2)^\nu} + 2\nu \cdot \left(\int \frac{1}{(x^2+b^2)^\nu}\,dx - b^2 \cdot \int \frac{1}{(x^2+b^2)^{\nu+1}}\,dx \right) =$$
$$= \frac{x}{(x^2+b^2)^\nu} + 2\nu I_\nu - 2\nu b^2 I_{\nu+1} = I_\nu. \tag{15}$$

Из равенства (15) непосредственно вытекают рекуррентное соотношение (13) и дополнительное соотношение (14).

Замечание

Рекуррентное соотношение (13) для первых нескольких натуральных значений ν даёт результаты:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+b^2} = \boxed{\text{Int 13}} = \frac{1}{b}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{b} + C\,,$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+b^2)^2} = \boxed{\begin{matrix}(13):\\ \nu=1\end{matrix}} = I_{1+1} = \frac{1}{2\cdot 1\cdot b^2}\cdot\left(\frac{x}{(x^2+b^2)^1} + (2\cdot 1-1)\cdot I_1\right) =$$
$$= \frac{x}{2b^2(x^2+b^2)} + \frac{1}{2b^3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{b} + C\,,$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+b^2)^3} = \boxed{\begin{matrix}(13):\\ \nu=2\end{matrix}} = I_{2+1} = \frac{1}{2\cdot 2\cdot b^2}\cdot\left(\frac{x}{(x^2+b^2)^2} + (2\cdot 2-1)\cdot I_2\right) =$$
$$= \frac{x}{4b^2(x^2+b^2)^2} + \frac{3}{4b^2}\cdot\left(\frac{x}{2b^2(x^2+b^2)} + \frac{1}{2b^3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{b} + C\right) =$$
$$= \frac{x}{4b^2(x^2+b^2)^2} + \frac{3x}{8b^4(x^2+b^2)} + \frac{3}{8b^5}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{b} + C\,,$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{(x^2+b^2)^4} = \boxed{\begin{matrix}(13):\\ \nu=3\end{matrix}} = I_{3+1} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot b^2}\cdot\left(\frac{x}{(x^2+b^2)^3} + (2\cdot 3-1)\cdot I_3\right) =$$
$$= \frac{x}{6b^2(x^2+b^2)^3} + \frac{5}{6\cdot b^2}\left(\frac{x}{4b^2(x^2+b^2)^2} + \frac{3x}{8b^4(x^2+b^2)} + \frac{3}{8b^5}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{b}\right) + C =$$
$$= \frac{x}{6b^2(x^2+b^2)^3} + \frac{5x}{24b^4(x^2+b^2)^2} + \frac{15x}{48b^6(x^2+b^2)} + \frac{15}{48b^7}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{b} + C\,.$$

Убедиться в верности выведенных выражений для интегралов можно непосредственным дифференцированием.

Замечание

Для интеграла
$$\tilde{I}_\nu = \int \frac{dx}{((x+a)^2+b^2)^\nu}$$
справедливо рекуррентное соотношение
$$\tilde{I}_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu b^2}\cdot\left(\frac{x+a}{((x+a)^2+b^2)^\nu} + (2\nu-1)\cdot\tilde{I}_\nu\right)\,. \tag{16}$$

<u>Теорема</u> об интегрировании дробно-рациональной функции

Неопределённые интегралы простейших дробей,

$$\frac{1}{x-\gamma}\,, \qquad \frac{1}{(x-\gamma)^{\mu}}\,, \qquad \frac{\alpha x+\beta}{x^2+px+q}\,, \qquad \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+px+q)^{\nu}}$$

линейной комбинацией которых можно представить всякую правильную дробно–рациональную функцию, берутся в конечном виде.

Доказательство

$$\int \frac{dx}{x-\gamma} = \int \frac{d(x-\gamma)}{x-\gamma} = \ln|x-\gamma| + C\,,$$

$$\int \frac{dx}{(x-\gamma)^{\mu}} = \int \frac{d(x-\gamma)}{(x-\gamma)^{\mu}} = \int (x-\gamma)^{-\mu}\cdot d(x-\gamma) \underbrace{=}_{\mu\neq 1} \frac{(x-\gamma)^{-\mu+1}}{-\mu+1} + C\,,$$

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+px+q}\cdot dx = \boxed{a=\frac{p}{2}\,, \quad b=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} = \int \frac{\alpha x+\beta}{(x+a)^2+b^2}\cdot dx =$$

$$= \int \frac{\alpha(x+a)+(\beta-\alpha a)}{(x+a)^2+b^2}\cdot d(x+a) =$$

$$= \alpha\cdot\int \frac{(x+a)\cdot d(x+a)}{(x+a)^2+b^2} + (\beta-\alpha a)\cdot\int \frac{d(x+a)}{(x+a)^2+b^2} =$$

$$= \frac{\alpha}{2}\cdot\int \frac{d\left((x+a)^2+b^2\right)}{(x+a)^2+b^2} + (\beta-\alpha a)\cdot\int \frac{d(x+a)}{(x+a)^2+b^2} =$$

$$= \frac{\alpha}{2}\cdot\ln\left((x+a)^2+b^2\right) + \frac{\beta-\alpha a}{b}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x+a}{b}\right) + C\,,$$

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+px+q)^{\nu}}\cdot dx = \boxed{a=\frac{p}{2}\,, \quad b=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} = \int \frac{\alpha x+\beta}{((x+a)^2+b^2)^{\nu}}\cdot dx =$$

$$= \int \frac{\alpha(x+a)+(\beta-\alpha a)}{((x+a)^2+b^2)^{\nu}}\cdot dx =$$

$$= \alpha\cdot\int \frac{(x+a)\cdot d(x+a)}{((x+a)^2+b^2)^{\nu}} + (\beta-\alpha a)\cdot\underbrace{\int \frac{dx}{((x+a)^2+b^2)^{\nu}}}_{=\tilde{I}_{\nu}} =$$

$$= \frac{\alpha}{2}\cdot\int \frac{d\left((x+a)^2+b^2\right)}{((x+a)^2+b^2)^{\nu}} + (\beta-\alpha a)\cdot\tilde{I}_{\nu} = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{((x+a)^2+b^2)^{-\nu+1}}{-\nu+1} + (\beta-\alpha a)\cdot\tilde{I}_{\nu}\,.$$

Для интеграла
$$\tilde{I}_\nu = \int \frac{dx}{((x+a)^2+b^2)^\nu}$$
предусмотено рекуррентное соотношение (16).

Интегрирование некоторых иррациональных функций

Замечание

До сей поры теорема о замене переменной под знаком интеграла использовалась, по сути дела, с применением схемы
$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(g(x)) \cdot d(g(x)) = \boxed{y = g(x)} = \int f(y) \cdot dy \qquad (17)\,.$$

Идея схемы состояла в том, что интеграл $\int f(y)dy$ берётся легче, нежели исходный интеграл $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$.

Но действовать можно и прямо противоположным образом:
$$\int f(x) \cdot dx = \boxed{x = g(t)} = \int f(g(t)) \cdot d(g(t)) = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt\,. \qquad (18)$$

Идея этой схемы срабатывает, если интеграл $\int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt$ берётся легче, чем интеграл $\int f(x) \cdot dx$.

Действия по первой схеме, по формуле (17), принято называть "заменой переменных". Действия по второй схеме, по формуле (18), принято называть "подстановкой".

Во многих случаях "трудный" интегал может быть взят с помощью такой подстановки, после которой останется взять интеграл дробно–рациональной функции.

Сведение "трудного" интеграла к интегралу дробно–рациональной функции принято называть рационалиацией интеграла.

Определение

Функция $R_2(u,\, v)$ есть есть дробно–рациональная функция двух переменных u и v , когда она является дробно–рациональной функцией и переменной u (если v считать константой), и переменной v (если u считать константой).

Функция $R_3(u,\, v,\, w)$ есть есть дробно–рациональная функция трёх переменных u, v и w, когда она является дробно–рациональной функцией любой из своих переменных, если две остальные переменные считать константами.

Теорема

Интеграл вида $\int R_2(x\,,\ \sqrt[n]{x})\,dx$ рационализируется подстановкой $x = t^n,\ \ dx = d\,(t^n) = nt^{n-1}dt$.

Интеграл вида $\displaystyle\int R_3\left(x\,,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{px+q}}\right)dx$ рационализируется подстановкой

$$\frac{ax+b}{px+q} = t^n,\ \ x = \frac{qt^n - b}{a - pt^n}\,,\ \ \ dx = d\left(\frac{qt^n - b}{a - pt^n}\right) = \frac{(aq-bp)nt^{n-1}}{(a-pt^n)^2}dt\,.$$

Без доказательства.

Пример 19

Взять интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\cdot dx\,.$

Решение

Применим подстановку $x = t^2$:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\cdot dx = \boxed{\begin{array}{cc} x = t^2 & \sqrt{x} = t \\ \multicolumn{2}{c}{dx = d(t^2) = 2t\cdot dt} \end{array}} = \int \frac{t\cdot 2t\cdot dt}{t^2+1} = 2\cdot\int \frac{t^2}{t^2+1}\cdot dt =$$

$$= 2\cdot\int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}\cdot dt = 2\cdot\int\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)\cdot dt = 2\cdot\left(\int dt - \int\frac{dt}{t^2+1}\right) =$$

$$= 2t - \operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C\,.$$

Пример 20

Взять интеграл $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\cdot dx = \int \frac{1-\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3}{1+\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2}\cdot dx\,.$

Решение

Применим подстановку $x+1 = t^6$, или $\sqrt[6]{x+1} = t$, $x = t^6 - 1$:

$$I = \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\cdot dx = \boxed{\begin{array}{ccc} \sqrt[6]{x+1} = t & \sqrt[3]{x+1} = t^2 & \sqrt{x+1} = t^3 \\ x = t^6 - 1 & \multicolumn{2}{c}{dx = d(t^6-1) = 6t^5\cdot dt} \end{array}} =$$

$$= \int \frac{1-t^3}{1+t^2} \cdot 6t^5 \cdot dt = -6 \cdot \int \frac{t^8 - t^5}{t^2+1} \cdot dt = -6 \left(\int \frac{t^8 \cdot dt}{t^2+1} - \int \frac{t^5 \cdot dt}{t^2+1} \right) =$$

$$= -6 \cdot \underbrace{\int \frac{t^8 \cdot dt}{t^2+1}}_{=I_1} + \ 6 \cdot \underbrace{\int \frac{t^5 \cdot dt}{t^2+1}}_{=I_2} = -6 \cdot I_1 + 6 \cdot I_2 \,.$$

Интеграл уже рационализирован.

Далее имеет смысл "разветвить" процесс и каждый из интегралов I_1, I_2 взять отдельно. Подынтегральные выражения в I_1, I_2 являются неправильными дробями, следовательно, каждую из этих дробей нужно представить в виде суммы полинома и правильной дроби.

С первым из интегралов разберёмся подробно:

$$I_1 = \int \frac{t^8 \cdot dt}{t^2+1} = \int \frac{t^8 + t^6 - t^6 - t^4 + t^4 + t^2 - t^2 - 1 + 1}{t^2+1} \cdot dt =$$

$$= \int \frac{(t^8+t^6) - (t^6+t^4) + (t^4+t^2) - (t^2+1) + 1}{t^2+1} \cdot dt =$$

$$= \int \left(\frac{t^8+t^6}{t^2+1} - \frac{t^6+t^4}{t^2+1} + \frac{t^4+t^2}{t^2+1} - \frac{t^2+1}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} \right) \cdot dt =$$

$$= \int \left(\frac{t^6 \cdot (t^2+1)}{t^2+1} - \frac{t^4 \cdot (t^2+1)}{t^2+1} + \frac{t^2 \cdot (t^2+1)}{t^2+1} - \frac{t^2+1}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} \right) \cdot dt =$$

$$= \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) \cdot dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C_1 \,.$$

Для второго, более лёгкого интеграла, предъявим только результат:

$$I_2 = \int \frac{t^5 \cdot dt}{t^2+1} = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln(t^2+1) + C_2 \,.$$

Ясно, что теперь осталось лишь аккуратно выписать линейную комбинацию $-6 \cdot I_1 + 6 \cdot I_2$ и вернуться в ней к старой переменной, заменяя всюду t на $\sqrt[6]{x+1}$. Эта часть работы предоставляется слушателям.

Пример 21

Взять интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \cdot dx \,.$

Решение, первый способ

Данный путь решения не является лучшим. Но он полезен для понимания подстановок и разложения на простейшие.

Разделим числитель и знаменатель дроби в подынтегральном выражении на $\sqrt{x-1}$,

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \cdot dx = \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1} \cdot dx\,,$$

и применим подстановку $\frac{x+1}{x-1} = t^2$:

$$\int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1} \cdot dx = \boxed{\begin{array}{cc} \frac{x+1}{x-1} = t^2 & x = \frac{t^2+1}{t^2-1} \\ \multicolumn{2}{c}{dx = d\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right) = -\frac{4t\,dt}{(t^2-1)^2}} \end{array}} = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{-4t}{(t^2-1)^2} \cdot dt =$$

$$= \int R(t)\,dt\,.$$

Интеграл уже рационализирован.

Разложим на простейшие подынтегральную дробно–рациональную функцию:

$$R(t) = \frac{-4t\cdot(t-1)}{(t+1)\cdot((t-1)(t+1))^2} = \frac{-4t}{(t+1)^3(t-1)}\,,$$

$$R(t) = \frac{-4t}{(t+1)^3(t-1)} = \frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{(t+1)^2} + \frac{A_3}{(t+1)^3} + \frac{A_4}{t-1} =$$

$$= \frac{A_1(t+1)^2(t-1) + A_2(t+1)(t-1) + A_3(t-1) + A_4(t+1)^3}{(t+1)^3(t-1)} =$$

$$= \frac{A_1\left(t^3+t^2-t-1\right) + A_2\left(t^2-1\right) + A_3\left(t-1\right) + A_4\left(t^3+3t^2+3t+1\right)}{(t+1)^3(t-1)} =$$

$$= \frac{t^3\cdot(A_1+A_4) + t^2\cdot(A_1+A_2+3A_4) + t^1\cdot(-A_1+A_3+3A_4) + t^0\cdot(-A_1-A_2-A_3+A_4)}{(t+1)^3(t-1)}\,.$$

Для обеспечения тождественного равенства первого и последнего представлений дроби $R(t)$ необходимо и достаточно потребовать равенства красного и синего числителей. Тождественное равенство двух полиномов, в свою очередь, означает равенство коэффициентов при одинаковых степенях переменной t:

$$\begin{array}{l} t^3: \\ t^2: \\ t^1: \\ t^0: \end{array} \left\{ \begin{array}{ccc} A_1+A_4 & = & 0 \\ A_1+A_2+3A_4 & = & 0 \\ -A_1+A_3+3A_4 & = & -4 \\ -A_1-A_2-A_3+A_4 & = & 0 \end{array} \right| \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} A_1 & = & \frac{1}{2} \\ A_2 & = & 1 \\ A_3 & = & -2 \\ A_4 & = & -\frac{1}{2} \end{array} \right|.$$

Возвращаемся к основному интегралу:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \cdot dx = \boxed{t=\sqrt{\tfrac{x+1}{x-1}}} = \int R(t)dt =$$

$$= \int \left(\frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{(t+1)^2} + \frac{A_3}{(t+1)^3} + \frac{A_4}{t-1} \right) dt =$$

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{-2}{(t+1)^3} + \frac{-\frac{1}{2}}{t-1} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln|t+1| + \frac{(t+1)^{-1}}{-1} - 2 \cdot \frac{(t+1)^{-2}}{-2} - \frac{1}{2} \cdot \ln|t-1| + C_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1 \right| - \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1} + \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)^2} - \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right| + C_1. \quad (19)$$

Сайт WolframAlpha.com показывает не вполне удобный результат, поскольку он требует знания обратных гиперболических функций:

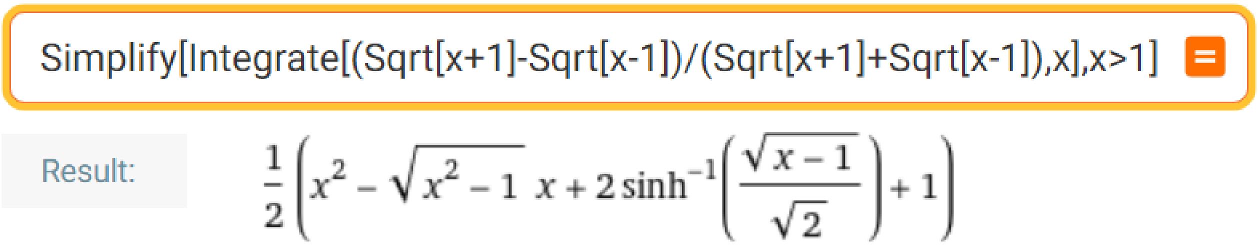

Рис. 3

Решение, второй способ

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \cdot dx = \int \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right) \cdot \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right) \cdot \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)} \cdot dx =$$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2}{x+1-x+1} \cdot dx = \int \frac{x+1-2\sqrt{x^2-1}+x-1}{2} \cdot dx =$$

$$= \int \left(x - \sqrt{x^2-1}\right) \cdot dx = \frac{x^2}{2} - \underbrace{\int \sqrt{x^2-1} \cdot dx}_{=I}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 - x \cdot \sqrt{x^2-1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|\right) + C_2 \,. \quad (20)$$

Интеграл I взят в Примере 13 (формула (9), стр. 15, $\alpha = -1$).

Результаты (19) и (20) оба верны, но по–разному внешне выглядят. Можно строго доказать, что они будут тождественно равны при $C_2 = C_1 - \frac{1}{2}$.

Теорема о подстановках Эйлера

Интеграл вида $\int R_2(x\,,\,\sqrt{ax^2+bx+c})\cdot dx$ рационализируется подстановками:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\cdot x+t\,,$ если $a>0\,,$

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=x\cdot t\pm\sqrt{c}\,,$ если $c>0\,,$

3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t\cdot(x-x_1)\,,$ если подкоренное выражение разлагается на вещественные линейные множители.

Без доказательства.

Пример 22 (№ 1966 из сборника задач [2])

Взять интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,.$

Решение

Применим первую подстановку Эйлера

$$\sqrt{x^2+x+1}=x+t\quad\Longrightarrow\quad t=\sqrt{x^2+x+1}-x\,,$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=x+t\quad\Longrightarrow\quad x^2+x+1=x^2+2xt+t^2\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad x=\frac{1-t^2}{2t-1}\quad\Longrightarrow\quad dx=\left(\frac{1-t^2}{2t-1}\right)'\cdot dt=-2\cdot\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\cdot dt\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad x+\sqrt{x^2+x+1}=x+(x+t)=\frac{2-t}{2t-1}\,.$$

Возьмёмся, наконец, за интеграл:

$$I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{-2\cdot\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\cdot dt}{\frac{2-t}{2t-1}}=\int\frac{t^2-t+1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-2)}dt=$$

$$=\int\left(1+\frac{2}{t-2}-\frac{\frac{1}{2}}{t-\frac{1}{2}}\right)dt=t+2\cdot\ln(t-2)-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(t-\frac{1}{2}\right)+C=$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}-x+$$

$$+2\cdot\ln(\sqrt{x^2+x+1}-x-2)-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}\right)+C\,.\qquad(21)$$

При выводе результата (21) потребовалось разложение дроби на простейшие, в чём помог сайт WolframAlpha.com:

```
Apart[(t^2-t+1)/(t-2)/(t-1/2)]
```

Result: $$\frac{t^2-t+1}{(t-2)\left(t-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2t-1}+\frac{2}{t-2}+1$$

Рис. 4

Обращение к WolframAlpha.com с прямой командой взятия интеграла вновь повлечёт обратные гиперболические функции. Для проверки полученного результата удобнее найти производную выражения (21) и убедиться в равенстве подынтегральному выражению:

```
Simplify[D[Sqrt[x^2+x+1]-x+2*Log[Sqrt[x^2+x+1]-x-2]-1/2*Log[Sqrt[x^2+x+1]-x-1/2],{x,1}]]
```

Results: $$\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

Рис. 5

Теорема Чебышёва

Интеграл вида $\int x^m \cdot (a+bx^n)^p \cdot dx$, где m, n и p – рациональные числа, сводится к интегрированию дробно–рациональных функций только в следующих трёх случаях:

1) p – целое. Применяется подстановка $x = t^N$, где N есть общий знаменатель рациональных чисел m и n.

2) $\frac{m+1}{n}$ – целое. Применяется подстановка $a+bx^n = t^N$, где N есть знаменатель рационального числа p.

3) $\frac{m+1}{n}+p$ – целое. Применяется подстановка $ax^{-n}+b = t^N$, где N есть знаменатель рационального числа p.

Без доказательства.

Замечание

Функция $x^m \cdot (a+bx^n)^p$ носит название "дифференциальный бином". Во всех случаях, не предусмотренных Теоремой Чебышёва, интеграл дифференциального бинома в конечном виде не берётся.

Пример 26

Взять интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}} = \int x^0 \cdot \left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot dx\,.$

Решение

Набор показателей $m=0\,,\quad n=4\,,\quad p=-\frac{1}{4}\,,$ соответствует случаю 3:

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{0+1}{4}-\frac{1}{4}=0\,.$$

Применяем третью подстановку Чебышёва:

$$x^{-4}+1=t^4, \qquad t=\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{4}}}{x}\,,$$

$$x=\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}, \qquad dx=-\frac{1}{4}\cdot\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}\cdot 4t^3=-\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}\cdot t^3\cdot dt\,,$$

$$x^4+1=\frac{1}{t^4-1}+1=\frac{t^4}{t^4-1}\,, \qquad \sqrt[4]{x^4+1}=t\cdot\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}\,.$$

Возьмёмся, наконец, за интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}=\int \frac{-\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}\cdot t^3\cdot dt}{t\cdot\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}}=\int \frac{-t^2}{t^4-1}\cdot dt=$$

$$=\int\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t^2}\right)dt=\boxed{\text{Int 12, 17}}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg} t+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{4}}}{x}+\frac{1}{4}\cdot\ln\left|\frac{x+\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{4}}}{x-\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{4}}}\right|+C\,.$$

Дифференцированием полученного результата убеждаемся в том, что он верен:

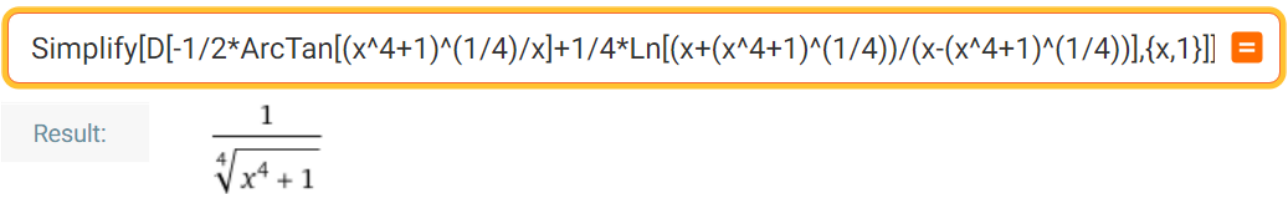

Рис. 6

Интегрирование тригонометрических функций

Теорема об универсальной тригонометрической подстановке

Интеграл вида $\displaystyle\int R_2(\sin x\,,\ \cos x)\cdot dx$ можно свести к интегралу дробно–рациональной функции с помощью подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\,. \qquad (22)$$

Доказательство

Равенство (22) означает, что

$$x=2\operatorname{arctg}t\,,\quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}\,,$$

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}\,,$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1+\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,.$$

Дробно–рациональная функция от дробно–рациональной функции, умноженная на ещё одну дробно–рациональную функцию, также является дробно–рациональной функцией.

Пример 23

Взять интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}\,.$

Решение

Применим универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\int\frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{4\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+3\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+5}=$$

$$= \int \frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{\dfrac{8t+3-3t^2+5+5t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+4t+4} =$$

$$= \int \frac{d\,(t+2)}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2} + C\,.$$

Теорема о второй тригонометрической подстановке

Интеграл вида $\displaystyle\int R_3(\sin^2 x\,,\ \cos^2 x\,,\ \operatorname{tg} x)\cdot dx$ можно свести к интегралу дробно–рациональной функции с помощью подстановки

$$\operatorname{tg} x = t\,. \tag{23}$$

Доказательство

Равенство (23) означает, что

$$x = \operatorname{arctg} t\,, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}\,,$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}\,, \qquad \sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}\,.$$

Пример 24

Взять интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^4 x\cdot\cos^4 x}\cdot dx\,.$

Решение

Применим вторую тригонометрическую подстановку:

$$\int \frac{1}{\sin^4 x\cdot\cos^4 x}\cdot dx = \int \frac{1}{\left(\sin^2 x\right)^2\cdot\left(\cos^2 x\right)^2}\cdot dx =$$

$$= \int \frac{1}{\left(\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)^2\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1+t^2)^3}{t^4}\cdot dt =$$

$$= \int \left(t^{-4}+3\,t^{-2}+3+t^2\right)\cdot dt = \frac{t^{-3}}{-3} + 3\,\frac{t^{-1}}{-1} + 3\,t + \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= -\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} - \frac{3}{\operatorname{tg} x} + 3\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C\,.$$

Замечание

Тригонометрические подстановки прокладывают гарантированный путь к "берущемуся" интегралу, но далеко не всегда этот путь короток и лёгок. В ряде случаев более простое решение строится с помощью формул тригонометрии. Помощь может оказать также и Таблица дифференциалов.

Пример 25

Взять интеграл $\int \cos^6 x \cdot dx$.

Решение

$$\int \cos^6 x \cdot dx = \int \left(\cos^3 x\right)^2 \cdot dx = \int \left(\frac{\cos 3x + 3\,\cos x}{4}\right)^2 \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \int \left(\cos^2 3x + 6 \cos 3x \cos x + 9 \cos^2 x\right) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \int \left(\frac{1 + \cos 6x}{2} + 6 \cdot \frac{\cos 2x + \cos 4x}{2} + 9 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2}\right) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{32} \cdot \int (10 + \cos 6x + 6 \cdot \cos 2x + 6 \cdot \cos 4x + 9 \cdot \cos 2x) \cdot dx =$$

$$= \frac{5}{16} \cdot \int dx + \frac{1}{32} \cdot \int \cos 6x \cdot dx + \frac{15}{32} \cdot \int \cos 2x \cdot dx + \frac{6}{32} \cdot \int \cos 4x \cdot dx =$$

$$= \frac{5x}{16} + \frac{\sin 6x}{192} + \frac{15 \sin 2x}{64} + \frac{3 \sin 4x}{64} + C\,.$$

Пример 26

Взять интеграл $\int \cos^7 x \cdot dx$.

Решение

$$\int \cos^7 x \cdot dx = \int \cos^6 x \cdot (\cos x \cdot dx) = \boxed{\text{Diff 8}} = \int \cos^6 x \cdot d(\sin x) =$$

$$= \int \left(\cos^2 x\right)^3 \cdot d(\sin x) = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^3 \cdot d(\sin x) = \boxed{y = \sin x} =$$

$$= \int \left(1 - y^2\right)^3 \cdot dy = \int \left(1 - 3\,y^2 + 3\,y^4 - y^6\right) \cdot dy =$$

$$= y - 3 \cdot \frac{y^3}{3} + 3 \cdot \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + C = \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Том 1 — М.: Книга по Требованию, 2013. 608 с.

2. Б.П.Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу – СПб.: Издательство «Лань», 2019. 624 с.