Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Ю.А. Лавров

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2021

УДК 517.3
ББК 22.161.1
Л13

Рецензенты:

Член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, научный руководитель ИПМаш РАН, директор ВШ МПУ СПбПУ

Д. А. Индейцев

Член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор ВШ ТМ СПбПУ

А. М. Кривцов

Лавров Ю. А. **Математический анализ: определённый интеграл** : учеб. пособие / Ю. А. Лавров. – СПб., 2021. – 36 с.

В учебном пособии представлены материалы второй части темы "Интегральное исчисление" раздела математики "Математический анализ". Материалы изложены в соответствии с действующими в СПбПУ образовательными стандартами. Учебное пособие представляет собой набор теоретических сведений и описание практических методов, необходимых для успешного освоения учебной дисциплины, для подготовки к контрольным работам и экзаменам.

Учебное пособие предназначено для бакалавров направления «Экономика и управление».

Табл. 3. Ил. 6. Библиогр.: 2 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

Мера множества точек

Замечание

Понятие "множество" в математическом анализе является неопределяемым, интуитивно ясным, поясняемым примерами. Всякое множество состоит из элементов, либо является пустым (для пустого множества применяется обозначение $\emptyset$). Элементами множества могут быть, в частности, множества. Во избежание тавтологии, для таких ситуаций рекомендуется словосочетание "семейство множеств".

Множество точек в двумерном, $\mathbb{R}^2$, или трёхмерном, $\mathbb{R}^3$, точечном пространстве может называться линией, или кривой. В элементарной геометрии древней Греции понятие линии не формулировалось, а заменялось расплывчатыми пояснениями в стиле "длина без ширины", или "граница фигуры".

Множество точек в двумерном точечном пространстве может называться фигурой, или фрагментом (участком) плоскости. В геометрии древней Греции понятие фигуры рассматривалось на примере многоугольника, круга, сегмента и т.д. У плоской, двумерной фигуры (многоугольника на поверхности стола), у фигуры на искривлённой поверхности (территории на поверхности Земли, в частности, территории Российской Федерации) может быть площадь, но не может быть объёма.

Множество точек в трёхмерном пространстве может быть названо телом. Тело может характеризоваться объёмом, то есть, числовой величиной, означающей вместимость множества. Например, объем зрительного зала Новой сцены Мариинского театра составляет $18000\ м^3$, этой числовой характеристикой объясняется прекрасная акустика в зале.

Итак, у линии или её части может быть длина, у фигуры может быть площадь, у тела может быть объём.

Для всех трёх перечисленных семейств множеств точек в математическом анализе есть строгие определения. В данном пособии эти определения, в целях краткости, не формулируются, а считаются интуитивно ясными.

Определение

Пусть X есть множество всех линий.

Пусть $L : X \to \mathbb{R}$.

Пусть значения функции L подчиняются требованиям:

1. $L(\Lambda)\ \geq 0$, $L(\emptyset) = 0$ (неотрицательность).
2. Если $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, и $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$, то $L(\Lambda) = L(\Lambda_1) + L(\Lambda_2)$ (аддитивность).
3. Если $\Lambda_1 = \Lambda_2$, то $L(\Lambda_1) = L(\Lambda_2)$ (инвариантность).

Тогда функция L есть длина.

Определение

Пусть X есть множество всех фигур.

Пусть $S : X \to \mathbb{R}$.

Пусть значения функции S подчиняются требованиям:

1. $S(\Omega)\ \geq 0$, $S(\emptyset) = 0$ (неотрицательность).
2. Если $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, то $S(\Omega) = S(\Omega_1) + S(\Omega_2)$ (аддитивность).
3. Если $\Omega_1 = \Omega_2$, то $S(\Omega_1) = S(\Omega_2)$ (инвариантность).

Тогда функция S есть площадь.

Определение

Пусть X есть множество всех тел.

Пусть $V : X \to \mathbb{R}$.

Пусть значения функции V подчиняются требованиям:

1. $V(\Omega)\ \geq 0$, $V(\emptyset) = 0$ (неотрицательность).
2. Если $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, то $V(\Omega) = V(\Omega_1) + V(\Omega_2)$ (аддитивность).
3. Если $\Omega_1 = \Omega_2$, то $V(\Omega_1) = V(\Omega_2)$ (инвариантность).

Тогда функция V есть объём.

Замечание

Некоторые источники, в дополнение к требованиям 1–3, выставляют ещё одно требование, соответственно, для длины, площади и объёма:

– если расстояние между концами отрезка прямой равно a, то длина этого отрезка есть a;

– если ребро квадрата имеет длину a, то площадь этого квадрата есть a^2;

– если ребро куба имеет длину a, то объём этого куба есть a^3.

Определение

Пусть X есть семейство множеств.

Пусть $\mu : X \to \mathbb{R}$.

Пусть значения функции μ подчиняются требованиям:

1. $\mu(\Omega) \geq 0$, $\mu(\emptyset) = 0$ (неотрицательность).

2. Если $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, то $\mu(\Omega) = \mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2)$ (аддитивность).

Тогда функция μ есть мера.

Замечания

Сформулированные определения длины, площади и объёма схожи. К этим трём функциям, а также к мере множества предъявляются одинаковые требования 1 и 2. Следовательно, длина, площадь и объём являются частными случаями меры.

Выставленные требования означают, что мера неотрицательна (требование 1), мера множества есть сумма мер составных его частей (требование 2).

Требование 3 "выброшено" из списка требований к мере потому, что понятие "равенство множеств" не всеми математиками воспринимается одинаково.

К примеру, учебник геометрии для средней школы [3], который вызвал немало споров, утверждает, что равных геометрических фигур нет. Два треугольника не могут быть равны, если они размещены в разных местах. Любой треугольник равен только сам себе.

Замечание

Отметим важное свойство меры, называемое вложением.

Если $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, и $\mu(\Omega_2) > 0$, то $\mu(\Omega) > \mu(\Omega_1)$ (бо́льший объект имеет бо́льшую меру). Свойством вложения обладает и длина, и площадь, и объём.

Вложение является именно свойством меры, а не требованием к ней, поскольку вложение является следствием требований 1 и 2.

Замечание

Отметим ещё одно важное свойство меры. Оно является следствием требования аддитивности.

Если $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, и $\mu(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 0$, то $\mu(\Omega) = \mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2)$.

Например, пусть Ω есть параллелограмм, а Ω_1 и Ω_2 есть треугольники, на которые делится параллелограмм его диагональю. Тогда $\Omega_1 \cap \Omega_2$ есть сама диагональ, то есть, отрезок прямой, а площадь отрезка равна нулю.

Замечание

Из элементарной геометрии известно, что:

– длина, площадь, объём точки равны нулю;

– площадь и объём линии или отрезка линии равны нулю;

– объём плоскости или фрагмента плоскости равен нулю.

Определения длины, площади, объёма, которые будут сформулированы в данном пособии, не будут противоречить этим истинам.

Замечание

В средней школе было сформулировано определение длины окружности, как предела периметра правильного 2^n–угольника при $n \to +\infty$. Также, было дано определение числа π как предела (при $n \to +\infty$) отношения периметра правильного 2^n–угольника к диаметру окружности, в которую 2^n-угольник вписан. Взглянем на эти определения с точки зрения высшей школы.

При росте n на единицу, то есть, при удвоении числа сторон 2^n–угольника, каждая из его сторон заменяется двумя сторонами 2^{n+1}–угольника, сумма длин этих двух "новых" сторон больше длины одной "старой" стороны по правилу треугольника.

Пусть a_n – длина стороны правильного 2^n–угольника, a_{n+1} – длина стороны правильного 2^{n+1}–угольника. Пусть, далее, P_n – периметр правильного 2^n–угольника, P_{n+1} – периметр правильного 2^{n+1}–угольника. Пусть эти многоугольники вписаны в окружность радиуса R.

Тогда $P_{n+1} = 2^{n+1} \cdot a_{n+1} = 2^n \cdot 2 \cdot a_{n+1} > 2^n \cdot a_n = P_n$, то есть, числовая последовательность $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ периметров правильных 2^n–угольников, вписанных в окружность радиуса R, монотонно возрастает.

В средней школе была доказана Теорема: "Выпуклая ломаная короче всякой другой ломаной, объемлющей данную". Правильный 2^n–угольник – выпуклая ломаная, её объемлет квадрат, описанный вокруг окружности, его периметр $P_0 = 8R$, следовательно, $P_n < 8R$, то есть, последовательность

$\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена сверху.

Таким образом, последовательность $\{\frac{P_n}{2R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ также возрастает и ограничена, а значит, по Теореме Вейерштрасса, она имеет предел, который принято обозначать через π:

$$\pi \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{P_n}{2R}.$$

В средней школе было сформулировано определение площади круга, как предел площади вписанного в круг правильного 2^n–угольника при $n \to +\infty$.

Пусть h_n – апофема правильного 2^n–угольника, то есть, длина перпендикуляра, опущенного из его центра на любую из его сторон.

Пусть, далее, S_n – площадь правильного 2^n–угольника, которая складывается из площадей треугольников, стороны каждого из которых – два радиуса и одна сторона многоугольника. Тогда, с позиций высшей школы, площадь круга S есть

$$S \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(2^n \cdot \frac{a_n \cdot h_n}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(R \cdot \frac{2^n \cdot a_n}{2R} \cdot h_n\right) =$$

$$= R \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^n \cdot a_n}{2R} \cdot h_n\right) = R \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{P_n}{2R} \cdot h_n\right) = R \cdot \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{P_n}{2R}}_{\overset{\text{def}}{=} \pi} \cdot \underbrace{\lim_{n\to+\infty} h_n}_{= R} =$$

$$= R \cdot \pi \cdot R = \pi R^2.$$

Вывод формулы площади круга содержит один предел, который сам нуждается в выводе:

$$\lim_{n\to+\infty} h_n = \lim_{n\to+\infty} R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = R \cdot \cos\left(\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right) = R \cdot \cos 0 = R.$$

Точно так же, на университетском уровне строгости, можно было бы дать определение площади сферы и объёма шара.

Ко всем четырём названным в этом замечании определениям мы обратимся позже.

Определённый интеграл по конечному промежутку

Определение

Набор точек $\{x_i\}_{i=0,\,1,\,2,\,\dots\,,\,n}$ на промежутке $[a,b]$ таких, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, принято называть разбиением (или дроблением) промежутка $[a,b]$.

Число x_i принято называть i–м узлом разбиения.

Число $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ есть ширина i–го промежутка разбиения.

Число $r = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$ принято называть рангом разбиения.

Множество точек $\{\xi_i\}_{i=1,\,2,\,\dots\,,\,n}$, таких, что $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, будем называть набором сигнальных точек.

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Величину $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ принято называть интегральной суммой.

Если существует и конечен предел интегральной суммы

$$\lim_{r\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\,, \tag{1}$$

и этот предел не зависит от способа расстановки узлов x_i на промежутке $[a,b]$ и от выбора мест для сигнальных точек ξ_i на промежутках $[x_{i-1},\, x_i]$,

то принято говорить, что функция f интегрируема на промежутке $[a,b]$, а значение предела в (1) называется определённым интегралом функции f на промежутке $[a,b]$.

Обозначение: $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{r\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\,.$

Замечание

В данном определении и всюду далее функция f (как и любая другая) обозначается только одной буквой, поскольку функция – это правило, согласно которому строится её значение, и это правило одинаково для всех имён переменной, от которой зависит функция.

Обозначение $f(x)$ применяется только тогда, когда важно, что функция зависит именно от переменной x.

Замечание

Очевидно, что при изменении (убывании) положительного ранга r величины $n = n(r)$, $x_i = x_i(r)$ (где $i = 0, 1, 2, \ldots, n(r)$), $\xi_i = \xi_i(r)$ (где $i = 1, 2, \ldots, n(r)$), являются функциями переменной r. Зависимость этих величин от r и в определении, и в последующих теоремах в явном виде не указывается – во избежание громозкости записей.

Очевидно, также, что $\lim\limits_{r\to 0} n = \lim\limits_{r\to 0} n(r) = +\infty$.

Замечание

Знак суммы (которую некоторые математики выражали буквой S) и знак ширины промежутка Δx_i эволюционировали, с подачи Лейбница, до знаков интеграла $\int$ (вытянутой буквы S) и дифференциала dx, соответственно.

Теорема

Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Если f непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$.

Без доказательства.

Замечание

Обратное, вообще говоря, неверно. В частности, если функция f имеет на $[a,b]$ конечное число разрывов, и все эти разрывы только первого рода, то функция интегрируема на $[a,b]$.

Определение

Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Пусть $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Часть плоскости в декартовой прямоугольной системе координат xOy, ограниченная прямой $y = 0$ (снизу), прямой $x = a$ (слева), прямой $x = b$ (справа), и графиком функции $y = f(x)$ (сверху), называется криволинейной трапецией, или подграфиком функции f на промежутке $[a,b]$.

Замечание о геометрическом смысле определённого интеграла

Пусть $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$. Построим график функции $y = f(x)$ на промежутке $[a, b]$. Пусть S – интуитивно понимаемая площадь подграфика этой функции на этом промежутке.

Возьмём разбиение промежутка $[a, b]$ – набор точек $\{x_i\}_{i=0,1,2,\ldots,n}$, таких, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Через каждый из узлов разбиения, расставленных на оси Ox, проведём вертикальный отрезок до пересечения с линией $y = f(x)$. Проведённые отрезки рассекут подграфик функции $f(x)$ на n долей (Рис. 1, синие криволинейные трапеции).

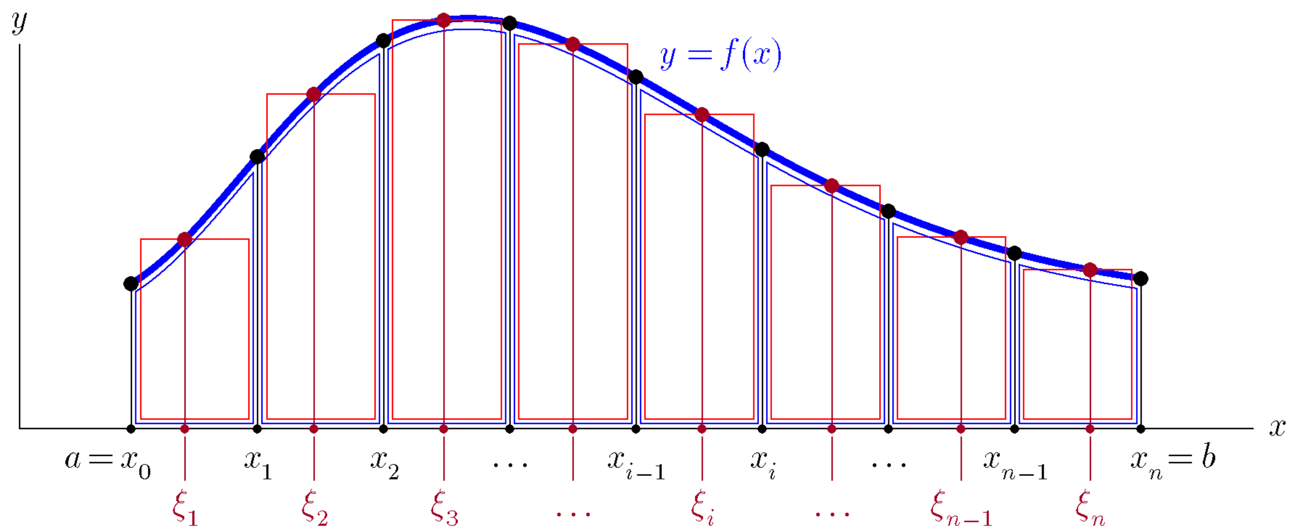


Рис. 1

Пусть s_i – площадь i–й доли. Очевидно, что $S = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i$.

Расставим на оси Ox набор сигнальных точек $\{\xi_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$, так, что $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. На каждую, i–ю по номеру, синюю криволинейную трапецию наложим красный прямоугольник высотой $f(\xi_i)$. i–й по номеру прямоугольник ограничен вертикальными прямыми $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, и горизонтальными прямыми $y = 0$, $y = f(\xi_i)$.

Очевидно, что сумма площадей всех красных прямоугольников (а это – интегральная сумма) примерно равна сумме площадей всех синих криволинейных трапеций (а это – площадь всего подграфика):

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^{n} s_i = S\,. \tag{2}$$

Геометрический смысл определённого интеграла состоит в следующем:
– интегральная сумма примерно равна площади подграфика f на $[a, b]$;
– сам интеграл также примерно равен площади этого подграфика.

Теорема

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) . \tag{3}$$

Доказательство строится методом математической индукции.

1. База индукции. Убедимся, что формула (3) справедлива при $n = 1$:

$$1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 .$$

2. Индуктивное предположение. Предположим, что формула (3) верна при $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{1}{6} \cdot k \cdot (k+1) \cdot (2k+1) .$$

3. Индуктивный переход. Докажем, что формула (3) верна и при $n = k+1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6} \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (2k+3) .$$

Действительно,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6} \cdot k \cdot (k+1) \cdot (2k+1) + (k+1)^2 =$$

$$= (k+1) \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot k \cdot (2k+1) + (k+1) \right) = (k+1) \cdot \frac{1}{6} \cdot (k \cdot (2k+1) + 6k + 6) =$$

$$= (k+1) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(2k^2 + 7k + 6\right) = (k+1) \cdot \frac{1}{6} \cdot (k+2) \cdot (2k+3) .$$

Доказательство закончено.

Следствие

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{1}{6} \cdot (n-1) \cdot n \cdot (2n-1) . \tag{4}$$

Доказательство Следствия основано на том, что (4) отличается от (3) отсутствием слагаемого n^2.

Теорема

Площадь подграфика функции $f(x) = x^2$ на промежутке $[0, b]$ вычисляется по формуле $S = \dfrac{1}{3} \cdot b^3$.

Доказательство

Возьмём набор точек $x_i = b \cdot \frac{i}{n}$, $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ – равномерное разбиение промежутка $[0,\ b]$. Ранг разбиения $r = \frac{b}{n}$, откуда $n = \frac{b}{r}$, что означает $\lim\limits_{n\to+\infty} r = 0$.

Рассмотрим i–й промежуток разбиения – промежуток $[x_{i-1},\ x_i]$.

Площадь подграфика функции f на этом промежутке (площадь криволинейной трапеции $ABDC$, Рис. 2) обозначим через s_i.

Следующие два утверждения основаны на том, что функция $f(x) = x^2$ строго возрастает при $x \geq 0$.

Поскольку криволинейная трапеция $ABDC$ полностью содержится внутри прямоугольника $ABDC_1$, по свойству вложения, справедливо неравенство

$$s_i < S_{ABDC_1} = AB \cdot BD = (x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_i) = \frac{b}{n} \cdot \left(b \cdot \frac{i}{n}\right)^2 = \frac{b^3 \cdot i^2}{n^3}.$$

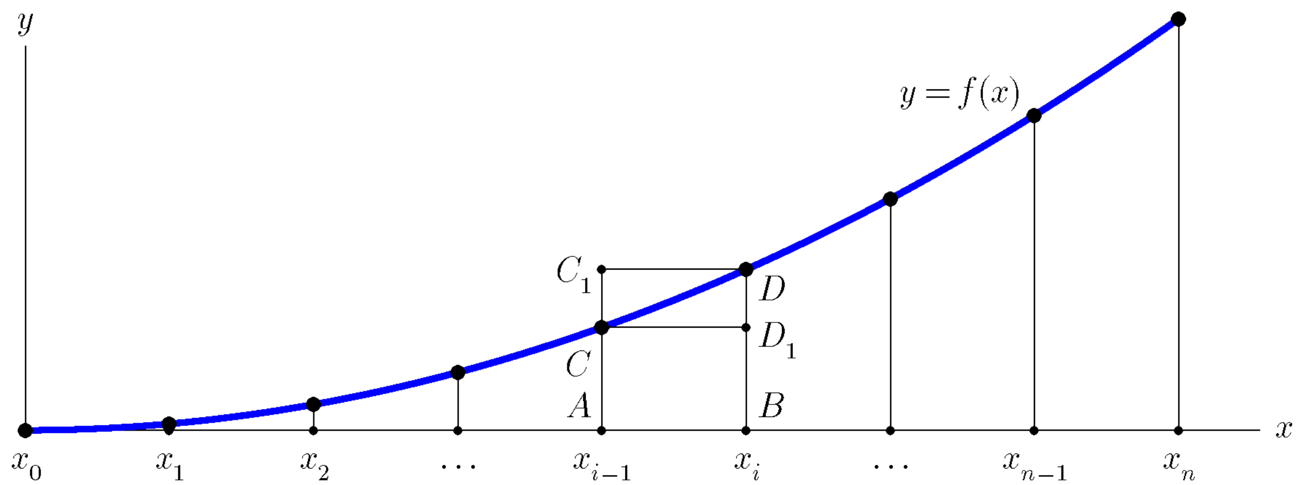


Рис. 2

Поскольку криволинейная трапеция $ABDC$ полностью содержит внутри себя прямоугольник ABD_1C, по свойству вложения, справедливо неравенство

$$s_i > S_{ABD_1C} = AB \cdot AC = (x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_{i-1}) = \frac{b}{n} \cdot \left(b \cdot \frac{i-1}{n}\right)^2 = \frac{b^3 \cdot (i-1)^2}{n^3}.$$

Таким образом,

$$\frac{b^3 \cdot (i-1)^2}{n^3} < s_i < \frac{b^3 \cdot i^2}{n^3}\,. \tag{5}$$

Обозначим символом S_n площадь подграфика функции $f(x) = x^2$ на всём промежутке $[0,\, b]$. По свойству аддитивности эта, большая площадь равна сумме маленьких площадей подграфиков $f(x) = x^2$ по всем промежуткам разбиения:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} s_i\,.$$

Очевидно, также, что площадь подграфика S не должна зависеть от n, и что

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S\,.$$

На основании (5) можно утверждать, что

$$F_n < S_n < G_n\,, \tag{6}$$

здесь

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b^3 \cdot (i-1)^2}{n^3} = \frac{b^3}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{b^2}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot (n-1) \cdot n \cdot (2n-1) =$$

$$= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2} = \frac{b^3}{6} \cdot \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right),$$

$$G_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b^3 \cdot i^2}{n^3} = \frac{b^3}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{b^2}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) =$$

$$= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} = \frac{b^3}{6} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Возьмём пределы

$$\lim_{n\to+\infty} F_n = \frac{b^3}{6} \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \boxed{\begin{array}{ccc} n = \frac{b}{r} & \Longrightarrow & r = \frac{b}{n} \\ n \to +\infty & \Longrightarrow & r \to 0 \end{array}} =$$

$$= \frac{b^3}{6} \cdot \lim_{r\to 0} \left(2 - \frac{3\,r}{b} + \frac{r^2}{b^2}\right) = \frac{b^3}{6}\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty} G_n = \frac{b^3}{6}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \boxed{\begin{array}{ccc} n=\frac{b}{r} & \Longrightarrow & r=\frac{b}{n} \\ n\to+\infty & \Longrightarrow & r\to 0 \end{array}} =$$

$$= \frac{b^3}{6}\cdot\lim_{r\to 0}\left(2+\frac{3\,r}{b}+\frac{r^2}{b^2}\right) = \frac{b^3}{6}\,.$$

По теореме о двух полицейских (для последовательностей), ввиду того, что

$$F_n < S_n < G_n\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} F_n = \lim_{n\to+\infty} G_n = \frac{b^3}{3}\,,$$

имеем

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{b^3}{3}\,.$$

Доказательство закончено.

Теорема о свойствах определённого интеграла для интегрируемых функций

1. Интеграл единицы равен длине промежутка интегрирования:

$$\int_a^b 1\cdot dx = b-a\,.$$

2. Интеграл не зависит от имени переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^b f(\lambda)\cdot d\lambda = \int_a^b f(\Omega)\cdot d\Omega\,.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b c\cdot f(x)\cdot dx = c\cdot\int_a^b f(x)\cdot dx\,.$$

4.1. Интеграл суммы двух функций равен сумме интегралов этих функций:

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\cdot dx = \int_a^b f(x)\cdot dx + \int_a^b g(x)\cdot dx\,.$$

4.2. Интеграл разности двух функций равен разности интегралов этих функций:

$$\int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big) \cdot dx = \int\limits_a^b f(x) \cdot dx - \int\limits_a^b g(x) \cdot dx \,.$$

5. Обмен местами пределов интегрирования изменяет знак интеграла на противоположный:

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot dx = -\int\limits_b^a f(x) \cdot dx \,.$$

6. При равенстве верхнего и нижнего пределов интегрирования интеграл равен нулю:

$$\int\limits_a^a f(x) \cdot dx = 0 \,.$$

7. Интеграл по полному промежутку $[a, c]$ равен сумме интегралов по составным частям $[a, b]$, $[b, c]$ $(a < b < c)$ этого промежутка (свойство аддитивности интеграла):

$$\int\limits_a^c f(x) \cdot dx = \int\limits_a^b f(x) \cdot dx + \int\limits_b^c f(x) \cdot dx \,.$$

8.1. Интеграл положительной функции положителен:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) > 0 \\ b > a \end{array} \right| \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_a^b f(x) \cdot dx > 0 \,.$$

8.2. Интеграл неотрицательной функции неотрицателен:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ b > a \end{array} \right| \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_a^b f(x) \cdot dx \geq 0 \,.$$

9.1. Бóльшая функция даёт бóльший интеграл:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ b > a \end{array} \right| \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_a^b f(x) \cdot dx > \int\limits_a^b g(x) \cdot dx \,.$$

9.2. Не меньшая функция даёт не меньший интеграл:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq g(x) \\ b > a \end{array} \right. \Bigg| \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_a^b f(x) \cdot dx \geq \int\limits_a^b g(x) \cdot dx \,.$$

10. Модуль интеграла меньше интеграла модуля либо равен ему:

$$b > a \quad \Longrightarrow \quad \left| \int\limits_a^b f(x) \cdot dx \right| \leq \int\limits_a^b |f(x)| \cdot dx \,.$$

11. Если $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, то

$$m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x) \cdot dx \leq M \,.$$

12. Если f непрерывна на $[a, b]$, то существует точка $c \in [a, b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot dx = f(c) \cdot (b - a) \,,$$

причём, c принято называть среднеинтегральной точкой, а $f(c)$ – среднеинтегральным значением функции на промежутке $[a, b]$.

Доказательство будет предъявлено только для свойств 11 и 12.

<u>Теорема</u> о свойстве 11 определённого интеграла

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Пусть f интегрируема на отрезке $[a, b]$.
Пусть $m \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in [a, b]$.
Тогда

$$m \ \leq \ \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x)\, dx \ \leq \ M.$$

Доказательство

Возьмём разбиение промежутка $[a, b]$ – набор точек $\{x_i\}_{i=0,\,1,\,2,\,\ldots\,,\,n}$, таких, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Возьмём набор сигнальных точек $\{\xi_i\}_{i=1,\,2,\,\ldots\,,\,n}$, таких, что $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$.

Будем традиционно считать, что количество промежутков разбиения n , сами узлы разбиения и сигнальные точки зависят от ранга разбиения r .

Ясно, что $\xi_i \in [a,b]$, следовательно, по условию теоремы, для всех i $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$ справедливо неравенство

$$m \le f(\xi_i) \le M \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad m\cdot(x_i - x_{i-1}) \le f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \le M\cdot(x_i - x_{i-1}) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} m\cdot(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M\cdot(x_i - x_{i-1}) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad m\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le M\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad m\cdot(x_n - x_0) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le M\cdot(x_n - x_0) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad m\cdot(b-a) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le M\cdot(b-a) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{r\to 0}\left(m\cdot(b-a)\right) \le \underbrace{\lim_{r\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}_{\overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)\,dx} \le \lim_{r\to 0}\left(M\cdot(b-a)\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad m\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\cdot(b-a) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad m \le \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Доказательство закончено.

<u>Теорема</u> о свойстве 12 определённого интеграла (о среднеинтегральной точке)

Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Пусть f непрерывна на отрезке $[a,b]$.
Тогда $\exists\, c \in [a,b]$, такое, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)\,.$$

Доказательство

Функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, следовательно, по второй теореме Вейерштрасса, она достигает на $[a, b]$ наибольшего и наименьшего значения. Пусть m есть наименьшее значение, а M есть наибольшее значение. Тогда $m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$.

Пусть $C = \dfrac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x)\, dx$. По Теореме о свойстве 11,

$$m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x)\, dx \leq M \quad \Longrightarrow \quad m \leq C \leq M \quad \Longrightarrow \quad C \in [m, M].$$

По Теореме о промежуточных значениях непрерывной функции (теореме Коши́) $\forall C \in [m, M]$, а значит, и для $C = \int\limits_a^b f(x)\, dx$, $\exists c \in [a, b]$ такое, что $f(c) = C$,

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x)\, dx \quad \Longrightarrow \quad f(c) \cdot (b-a) = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Доказательство закончено.

Теорема Ньютона–Лейбница

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Пусть функция f непрерывна на промежутке $[a, b]$.
Пусть функция F – первообразная функции f на промежутке $[a, b]$.

Тогда $$\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Обозначение: $$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \underbrace{F(x)\Big|_a^b}_{=F(b)-F(a)}$$

Доказательство

Возьмём разбиение промежутка $[a, b]$ – набор точек $\{x_i\}_{i=0,1,2,\dots,n}$, таких, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Пусть это разбиение строится по такой схеме, что $r = \max\limits_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1}) \to 0$ при $n \to +\infty$.

Рассмотрим разность

$$
\begin{aligned}
F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \\
= (F(x_1) - F(x_0)) + \\
+ (F(x_2) - F(x_1)) + \\
+ (F(x_3) - F(x_2)) + \\
+ (F(x_4) - F(x_3)) + \\
+ \ldots + \\
+ (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \\
+ (F(x_n) - F(x_{n-1})) = \\
= \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) \ .
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Члены, представленные в (7) одинаковыми цветами (кроме чёрного), взаимно уничтожаются.

Функция F есть первообразная функции f на промежутке $[a, b]$, следовательно, $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

По теореме Лагранжа, для каждого $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, существует значение $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ такое, что

$$
F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \,. \tag{8}
$$

Тогда, согласно (7) и (8),

$$
F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \,. \tag{9}
$$

Функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, следовательно, она интегрируема на $[a, b]$, то есть, существует интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$.

Взятие и приравнивание друг к другу пределов при $n \to +\infty$ (а значит, и при $r \to 0$) левой и правой частей (9) даёт

$$
\lim_{r \to 0} (F(b) - F(a)) = \lim_{r \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \,. \tag{10}
$$

Выражение под знаком предела в левой части (10) не зависит от n или от r. Следовательно, знак предела можно удалить.

Правая часть (10) представляет собой интеграл функции $f(x)$ по промежутку $[a, b]$ – в соответствии с определением определённого интеграла.

Таким образом,

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\, dx\,.$$

Доказательство закончено.

Пример 1

Взять интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx\,.$

Решение

Подынтегральная функция есть $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Её первообразная есть $F(x) = \arcsin x + C$, и закономерен вопрос, какое именно значение должна принять произвольная константа C.

Применяем формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \int\limits_0^1 f(x) \cdot dx = F(1) - F(0) = (\arcsin 1 + C) - (\arcsin 0 + C) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + C - 0 - C = \frac{\pi}{2}\,.$$

Принципиально построенное решение верно, но чрезмерно громоздко. Назовём возможности сделать его более компактным.

Поскольку в верхнем и в нижнем пределах интегрирования первообразная F должна быть одна и та же, то и произвольная константа C также должна быть одна и та же, следовательно, при вычислении разности $F(b) - F(a)$ константа всегда сама с собой взаимно уничтожается, и далее нет смысла её вообще выписывать. Это и есть ответ на закономерный вопрос.

Если воспользоваться стандартной записью формулы Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,,$$

то процесс взятия определённого интеграла становится более коротким, а также похожим на взятие неопределённого интеграла:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arcsin x \Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Замена переменной под знаком интеграла

Теорема о замене переменной в определённом интеграле

Пусть $f\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}\,,\ \ \varphi\colon [\alpha,\, \beta] \to \mathbb{R}\,.$

Пусть:

1. $f(x)$ непрерывна $\forall\, x \in [a,\, b]\,;$
2. $\varphi(t)$ и $\varphi'_t(t)$ непрерывны $\forall\, t \in [\alpha,\, \beta]\,;$
3. $\varphi(\alpha) = a\,,\ \ \varphi(\beta) = b\,;$
4. $a \le \varphi(t) \le b\,,\ \ \forall\, t \in [\alpha,\, \beta]\,.$

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot d(\varphi(t))\,. \tag{11}$$

Без доказательства.

Пример 2

Взять интеграл $\displaystyle\int\limits_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}\,.$

Решение

Применим (11) слева направо:

$$\int\limits_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \boxed{\begin{array}{ccc} x = t^2,\ \ t \ge 0 & \Longrightarrow & t = \sqrt{x} \\ x = 4 & \Longrightarrow & t = \sqrt{4} = 2 \\ x = 9 & \Longrightarrow & t = \sqrt{9} = 3 \end{array}} = \int\limits_2^3 \frac{d(t^2)}{1+\sqrt{t^2}} = 2 \cdot \int\limits_2^3 \frac{t \cdot dt}{1+t} =$$

$$= 2 \cdot \int\limits_2^3 \frac{(t+1)-1}{t+1} \cdot dt = 2 \cdot \int\limits_2^3 \left(\frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1}\right) \cdot dt = 2 \cdot \int\limits_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) \cdot dt =$$

$$= 2 \cdot \left(\int\limits_2^3 dt - \int\limits_2^3 \frac{d(t+1)}{t+1}\right) = 2 \cdot \left(t\,\Big|_2^3 - \ln(t+1)\Big|_2^3\right) =$$

$$= 2\cdot(3-2-(\ln 4-\ln 3)) = 2\cdot\left(1-\ln\frac{4}{3}\right).$$

Замечание

В Примере 2 возможен несколько иной путь замены переменной,

$$\int\limits_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \boxed{\begin{array}{ccc} x=t^2,\ t\le 0 & \Longrightarrow & t=-\sqrt{x} \\ x=4 & \Longrightarrow & t=-\sqrt{4}=-2 \\ x=9 & \Longrightarrow & t=-\sqrt{9}=-3 \end{array}} = \int\limits_{-2}^{-3} \frac{d(t^2)}{1+\left(-\sqrt{t^2}\right)} = 2\cdot\int\limits_{-2}^{-3} \frac{t\cdot dt}{1-t},$$

который также приведёт к верному ответу.

"Неряшливый" стиль замены переменной

$$\boxed{\begin{array}{ccc} x=t^2 & \Longrightarrow & t=\pm\sqrt{x} \\ x=4 & \Longrightarrow & t=-\sqrt{4}=-2 \\ x=9 & \Longrightarrow & t=+\sqrt{9}=3 \end{array}}$$

привёл бы, во-первых, к нарушению пункта 4 Теоремы о замене переменной, во-вторых, к тому, что подынтегральная функция новой переменной t не была бы интегрируемой на промежутке $[-2,3]$.

Пример 3

Взять интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\cdot dx$.

Решение

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\cdot dx = \boxed{\begin{array}{ccc} x=\sin t & \Longrightarrow & t=\arcsin x \\ x=0 & \Longrightarrow & t=\arcsin 0=0 \\ x=1 & \Longrightarrow & t=\arcsin 1=\frac{\pi}{2} \end{array}} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot d\sin t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot\cos t\cdot dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{4}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\cdot d(2t) = \frac{1}{2}\cdot t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\cdot\sin(2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

При получении интеграла использовано то, что $\cos t\ge 0$, $\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, следовательно, $\sqrt{1-\sin^2 t} = +\cos t$, $\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Пример 4

Взять интеграл $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}$.

Решение

Поменяем имя переменной интегрирования и применим (11) справа налево:

$$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x} = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^4 t} = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \cdot dt = \int\limits_0^{\pi/4} \left(1 + \operatorname{tg}^2 t\right) \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} \left(1 + \operatorname{tg}^2 t\right) \cdot d(\operatorname{tg} t) = \boxed{\begin{array}{ccc} & y = \operatorname{tg} t & \\ t = 0 & \Longrightarrow & y = \operatorname{tg} 0 = 0 \\ t = \pi/4 & \Longrightarrow & y = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1 \end{array}} =$$

$$= \int\limits_0^1 (1 + y^2)\, dy = \left(y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

<u>Замечание</u>

Расширение промежутка интегрирования в последнем интеграле до $[0, \pi]$ порождает парадоксальный результат:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{\cos^4 t} = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \cdot dt = \int\limits_0^{\pi} \left(1 + \operatorname{tg}^2 t\right) \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int\limits_0^{\pi} \left(1 + \operatorname{tg}^2 t\right) \cdot d(\operatorname{tg} t) =$$

$$= \boxed{\begin{array}{ccc} & y = \operatorname{tg} t & \\ t = 0 & \Longrightarrow & y = \operatorname{tg} 0 = 0 \\ t = \pi & \Longrightarrow & y = \operatorname{tg}(\pi) = 0 \end{array}} = \int\limits_0^0 (1 + y^2)\, dy = 0\,.$$

С одной стороны, по свойству 6, интеграл $\int\limits_0^0 (1 + y^2)\, dy$ должен быть равен нулю.

С другой стороны, по свойству 8.1, интеграл положительной функции $\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{\cos^4 t}$ должен быть строго больше нуля.

Причина "противоречия" состоит в том, что на промежутке $[0, \pi]$ нарушены пункты 1, 2 и 3 Теоремы о замене переменной, что делает Теорему неприменимой. А подынтегральная функция в обсуждаемом интеграле не является интегрируемой на промежутке $[0, \pi]$, поскольку терпит разрыв второго рода в точке $\pi/2$, и из-за этого разрыва предел интегральной суммы бесконечен.

Отметим, что предел интегральной суммы (при стремлении ранга разбиения к нулю) может существовать и быть конечным даже для функции, терпящей разрыв второго рода на промежутке интегрирования. Правда, для этого нужно потребовать, чтобы среди "сигнальных точек" разбиения не было точки разрыва второго рода. Примером служит интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{|\cos t|}}$.

Определение

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Пусть $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Площадь S соответствующей криволинейной трапеции (части плоскости в декартовой прямоугольной системе координат xOy, ограниченная прямой $y = 0$ снизу, прямой $x = a$ слева, прямой $x = b$ справа, и графиком функции $y = f(x)$ сверху) есть

$$S \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b f(x)\, dx\,.$$

Замечание

Может показаться, что данное определение лишь повторяет геометрический смысл определённого интеграла.

Но в Замечании о геометрическом смысле определённого интеграла площадь криволинейной трапеции участвовала в чисто интуитивном смысле. Строгого определения этой площади до сего момента не было.

Замечание

Данное определение подчиняется трём требованиям, предъявляемым к площади.

Пример 5

Найти площадь S криволинейной трапеции для функции $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Решение

Область определения (промежуток интегрирования) рассматриваемой функции есть $D(f) = [-R, R]$. Тогда

$$S = \int\limits_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \boxed{\begin{array}{ccc} x = R\cos t & \Longrightarrow & t = \arccos(x/R) \\ x = -R & \Longrightarrow & t = \arccos(-1) = \pi \\ x = R & \Longrightarrow & t = \arccos 1 = 0 \end{array}} =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{0} \sqrt{R^2 - R^2\cos^2 t} \cdot d\,(R\cos t) = -R\int\limits_{\pi}^{0} \sqrt{R^2(1-\cos^2 t)} \cdot \sin t \cdot dt =$$

$$= +R\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{R^2(1-\cos^2 t)} \cdot \sin t \cdot dt = R\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{R^2} \cdot \sqrt{\sin^2 t} \cdot \sin t \cdot dt =$$

$$= R^2 \int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 t \cdot dt = R^2 \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} \cdot dt = \frac{R^2}{2}\left(\int\limits_{0}^{\pi} dt - \int\limits_{0}^{\pi} \cos 2t\, dt\right) =$$

$$= \frac{R^2}{2}\left(t\Big|_0^{\pi} - \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Замечание

Очевидно, что найденный интеграл выражает площадь полукруга. Следовательно, площадь полного круга равна πR^2. Это означает, что определение площади круга, сформулированное в средней школе, и университетское определение площади криволинейной трапеции не противоречат друг другу.

Замечание

Казалось бы, площадь параболического подграфика (площадь подграфика функции $f(x) = x^2$ на промежутке $[0,\, b]$) мы, ранее, нашли, не вводя определения площади.

С использованием свойств функции "площадь", мы показали, что площадь параболического подграфика, по здравому разумению, "зажата" между двумя интегральными суммами. Пределы этих интегральных сумм при $r \to 0$ одинаковы и равны $b^3/3$, так что и площадь параболического подграфика равна $b^3/3$. Само понятие площади подграфика в данном случае принято, казалось бы, как интуитивно ясное. В действительности, площадь была неявно определена нами как предел одной (любой) из двух интегральных сумм, равных друг другу.

Теорема о производной определённого интеграла по верхнему пределу интегрирования

Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Пусть функция f непрерывна на $[a,b]$.

Тогда $$\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x)\,, \quad \forall x \in [a,b]\,.$$

Доказательство

По определению производной

$$\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^x f(t)\,dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}\,. \qquad (12)$$

По свойству 12 определённого интеграла существует значение c, $c = c(x,\Delta x) \in [x,\, x+\Delta x]$, такое, что

$$\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c(x,\Delta x)) \cdot (x + \Delta x - x) = f(c(x,\Delta x)) \cdot \Delta x\,.$$

Продолжим цепь преобразований (12):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c(x,\Delta x)) \cdot \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(c(x,\Delta x)) = f\left(\lim_{\Delta x \to 0} c(x,\Delta x)\right) = f(x)\,.$$

Последний шаг совершён на основе теоремы о двух полицейских (для функций):

$$x \le c(x,\Delta x) \le x + \Delta x\,, \quad \lim_{\Delta x \to 0} x = x\,, \quad \lim_{\Delta x \to 0} (x + \Delta x) = x \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} c(x,\Delta x) = x\,.$$

Доказательство закончено.

Формула интегрирования по частям

Теорема о формуле интегрирования по частям для определённого интеграла

$$\int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)\cdot dx = \left(u(x)\cdot v(x)\right)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\cdot u'(x)\cdot dx\,,$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_a^b u(x)\cdot dv(x) = \left(u(x)\cdot v(x)\right)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\cdot du(x)\,.$$

Доказательство

$$\int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)\cdot dx = \left(u(x)\cdot v(x)\right)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\cdot u'(x)\cdot dx \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)\cdot dx + \int\limits_a^b v(x)\cdot u'(x)\cdot dx = \left(u(x)\cdot v(x)\right)\Big|_a^b \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \int\limits_a^b \Big(u(x)\cdot v'(x) + v(x)\cdot u'(x)\Big)\cdot dx = \left(u(x)\cdot v(x)\right)\Big|_a^b \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \int\limits_a^b \Big(u(x)\cdot v(x)\Big)'\cdot dx = \left(u(x)\cdot v(x)\right)\Big|_a^b\,.$$

Последнее равенство верно в силу Теоремы о формуле Ньютона–Лейбница.

Пример 6

Взять интеграл $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx\,.$

Решение

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \operatorname{arctg} x\cdot x\,\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x\,d\left(\operatorname{arctg} x\right) = 1\cdot\frac{\pi}{4} - 0 - \int\limits_0^1 x\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+1)\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}\,.$$

Пример 7

Взять интеграл $\int\limits_0^1 x\arcsin x\,dx\,.$

Решение

$$\int\limits_0^1 x\arcsin x\,dx = \int\limits_0^1 \arcsin x\cdot x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \arcsin x\cdot dx^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x\cdot x^2\,\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x^2 d\arcsin x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1^2 - 0 - \int\limits_0^1 x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{(1-x^2)-1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\cdot dx - \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\cdot dx}_{=\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}\,.$$

В последней строчке построенного решения использованы интегралы, ранее уже взятые в Примерах 3 и 1.

Несобственный интеграл 1–го рода

Определение

Несобственный интеграл 1–го рода – это интеграл по промежутку бесконечно большой длины.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx\,. \tag{13}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx\,. \tag{14}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,dx\,. \tag{15}$$

Если предел в (13) или в (14) существует и конечен, принято говорить, что соответствующий несобственный интеграл сходится.

Если предел в (15) существует и конечен, принято говорить, что несобственный интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится в смысле Коши.

Если предел бесконечен либо не существует, то несобственный интеграл расходится.

Замечание

Возможна ситуация, когда двойной предел $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\left(\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx\right)$ не существует либо бесконечен, но, при этом, интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится в смысле Коши.

Замечание

Теорема о замене переменной в определённом интеграле сохраняет силу и для случаев, когда некоторые или все из пределов интегрирования a, b, α, β становятся бесконечными.

Замечание

Теорема о свойствах определённого интеграла сохраняет силу в части свойств 2–10 и для случая несобственного интеграла 1–го рода.

Пример 8

Взять интеграл $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx\,.$

Решение

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_{0}^{b} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-b}-(-e^{0})\right) = e^{0} - \lim_{b\to+\infty} e^{-b} = 1 - \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{b}} = 1-0=1\,.$$

Замечание

При взятии несобственного интеграла 1–го рода во многих случаях можно обходиться без введения дополнительной переменной. Например, значение $F(x)\big|_a^{+\infty} = \lim\limits_{b=+\infty}\left(F(b)-F(a)\right)$ можно заменять на $\lim\limits_{x=+\infty} F(x) - F(a)$.

Пример 9

Взять интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-x}\,dx$.

Решение

$$\int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-x}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} x\,d(-e^{-x}) = -\int\limits_0^{+\infty} x\,de^{-x} = -\left(x\,e^{-x}\Big|_0^{+\infty} - \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx}_{=1}\right) =$$

$$= -x\,e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 1 = -\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-x} - 0 + 1 = -\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}} + 1 = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^{x})'} + 1 = -\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}} + 1 = 0+1 = 1\,.$$

Пример 10

Установить, при каких значениях n $(n\neq 1)$ сходится интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{n}}\,dx$.

Решение

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{n}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b} x^{-n}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\bigg|_1^{b} = -\frac{1}{n-1}\cdot\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{x^{n-1}}\bigg|_1^{b} =$$

$$= -\frac{1}{n-1}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^{n-1}} - \frac{1}{1^{n-1}}\right) = +\frac{1}{n-1}\left(1 - \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b^{n-1}}\right).$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b^{n-1}} = \left\{\begin{array}{cc} 0, & n>1 \\ +\infty, & n<1 \end{array}\right|,$$

а значит,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{n-1}\,, & n > 1 \\ +\infty, & n < 1 \end{array} \right| .$$

Пример 11

Установить, сходится ли интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Решение

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b\to+\infty} \ln b - \ln 1 = +\infty\,.$$

Интеграл расходится.

Вывод из примеров 10 и 11: интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,dx$ сходится при $n > 1$ и расходится при $n \le 1$.

Пример 12

Взять интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+4} \cdot dx$.

Решение

Преобразуем некий вспомогательный интеграл, пользуясь Теоремой о замене переменной, а также свойствами 5 и 2 определённого интеграла.

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^4+4} \cdot dx = \boxed{\begin{array}{ccc} x=-y & \Longrightarrow & y=-x \\ x=-\infty & \Longrightarrow & y=+\infty \\ x=0 & \Longrightarrow & y=0 \end{array}} = \int\limits_{+\infty}^{0} \frac{1}{(-y)^4+4} \cdot d(-y) =$$

$$= -\int\limits_{+\infty}^{0} \frac{1}{y^4+4} \cdot d(+y) = +\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{y^4+4} \cdot dy = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^4+4} \cdot dx\,.$$

Введём обозначение I для искомого интеграла, воспользуемя свойством аддитивности интеграла:

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+4} \cdot dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^4+4} \cdot dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^4+4} \cdot dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+4} \cdot dx + \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+4} \cdot dx = 2 \cdot \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+4} \cdot dx \,.$$

Полученное равенство было предсказуемо из геометрических соображений. Действительно, подынтегральная функция – чётная, промежуток интегрирования симметричен относительно нуля, следовательно, участки криволинейной трапеции слева и справа от прямой $x = 0$ симметричны, и площади их равны.

Разложим на множители знаменатель подынтегральной функции.

$$x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 - 2x) \cdot (x^2 + 2 + 2x)\,.$$

Каждый из двух множителей есть квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом. Подынтегральную функцию надо разложить на простейшие,

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{1}{(x^2-2x+2)\cdot(x^2+2x+2)} = \frac{ax+b}{x^2-2x+2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2}\,. \qquad (16)$$

Коэффициенты a, b, c, d в (16) могут быть найдены методом неопределённых коэффициентов [5]. Приведение суммы дробей (16) к общему знаменателю создаст в числителе суммарной дроби полином 3-й степени. Коэффициенты при степенях, зависящие от a, b, c, d, должны быть такими же, как в числителе исходной дроби $1/(x^4+4)$, то есть, коэффициент при x^0 (свободный член) должен быть единицей, прочие коэффициенты должны быть нулями.

Таким образом, разложение (16) требует решить линейную систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными a, b, c, d.

Для облегчения работы, в данном материале решение системы предлагается заменить обращением к сайту WolframAlpha.com:

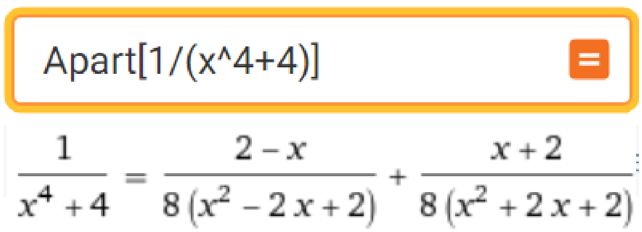


Рис. 3

Возвращаемся к интегралу.

$$I = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+4}\cdot dx = 2\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{x+2}{8\cdot(x^2+2x+2)} - \frac{x-2}{8\cdot(x^2-2x+2)}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{(x+1)+1}{(x^2+2x+1)+1} - \frac{(x-1)-1}{(x^2-2x+1)+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{(x+1)}{(x+1)^2+1} + \frac{1}{(x+1)^2+1} - \frac{(x-1)}{(x-1)^2+1} - \frac{-1}{(x-1)^2+1}\right)dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{(x+1)}{(x+1)^2+1} - \frac{(x-1)}{(x-1)^2+1}\right)dx}_{=I_0} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}}_{=I_1} + \underbrace{\frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^2+1}}_{=I_2} = \frac{1}{4}\left(I_0+I_1+I_2\right).$$

Каждый из трёх поименованных интегралов будем брать по отдельности. Начнём с двух относительно простых.

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1} = \boxed{\begin{array}{ccc} y = x+1 & \Longrightarrow & x = y-1 \\ x = 0 & \Longrightarrow & y = 1 \\ x = +\infty & \Longrightarrow & y = +\infty \end{array}} = \int\limits_1^{+\infty}\frac{d(y-1)}{y^2+1} =$$

$$= \int\limits_1^{+\infty}\frac{dy}{y^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} y\,\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$$I_2 = \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^2+1} = \boxed{\begin{array}{ccc} y = x-1 & \Longrightarrow & x = y+1 \\ x = 0 & \Longrightarrow & y = -1 \\ x = +\infty & \Longrightarrow & y = +\infty \end{array}} = \int\limits_{-1}^{+\infty}\frac{d(y+1)}{y^2+1} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{+\infty}\frac{dy}{y^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} y\,\Big|_{-1}^b = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

То, что $\lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \pi/2$, известно ещё со школьных лет (Рис. 4, 5).

```
Limit[ArcTan[b],b->+infty]
```

$$\lim_{b\to\infty} \tan^{-1}(b) = \frac{\pi}{2}$$

Рис. 4

```
Plot[{ArcTan[x],pi/2,-pi/2},{x,-20,20}]
```

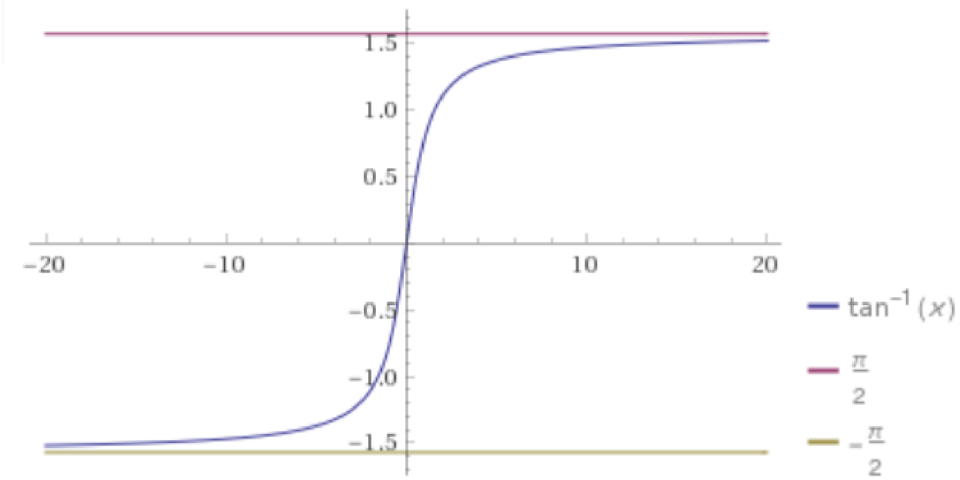


Рис. 5

Перейдём к интегралу чуть посложнее.

$$I_0 = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \left(\frac{(x+1)}{(x+1)^2+1} - \frac{(x-1)}{(x-1)^2+1} \right) dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\int\limits_0^b \frac{(x+1)\,dx}{(x+1)^2+1} - \int\limits_0^b \frac{(x-1)\,dx}{(x-1)^2+1} \right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\int\limits_0^b \frac{(x+1)\,d(x+1)}{(x+1)^2+1} - \int\limits_0^b \frac{(x-1)\,d(x-1)}{(x-1)^2+1} \right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\int\limits_0^b \frac{\frac{1}{2}\,d(x+1)^2}{(x+1)^2+1} - \int\limits_0^b \frac{\frac{1}{2}\,d(x-1)^2}{(x-1)^2+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{b \to +\infty} \left(\int\limits_0^b \frac{d((x+1)^2 + 1)}{(x+1)^2 + 1} - \int\limits_0^b \frac{d((x-1)^2 + 1)}{(x-1)^2 + 1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{b \to +\infty} \left(\ln((x+1)^2 + 1) \Big|_0^b - \ln((x-1)^2 + 1) \Big|_0^b \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{b \to +\infty} \big(\ln((b+1)^2 + 1) - \ln((1)^2 + 1) - \ln((b-1)^2 + 1) + \ln((-1)^2 + 1) \big) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{b \to +\infty} \big(\ln(b^2 + 2b + 2) - \ln((b^2 - 2b + 2) - \ln 2 + \ln 2 \big) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{b \to +\infty} \ln \frac{b^2 + 2b + 2}{b^2 - 2b + 2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \lim_{b \to +\infty} \frac{b^2 + 2b + 2}{b^2 - 2b + 2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln \lim_{b \to +\infty} \frac{1 + \frac{2}{b} + \frac{2}{b^2}}{1 - \frac{2}{b} + \frac{2}{b^2}} = \frac{1}{2} \cdot \ln 1 = 0\,.$$

Окончательный результат,

$$I = \frac{1}{4} (I_0 + I_1 + I_2) = \frac{1}{4} \left(0 + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4}\,,$$

может быть проверен обращением к сайту WolframAlpha.com (Рис. 6):

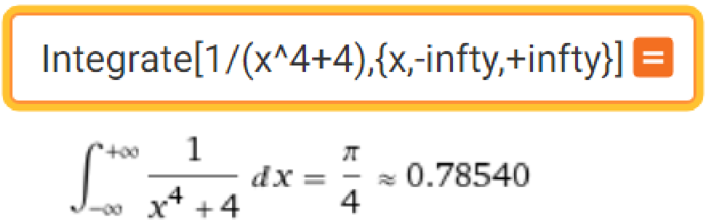


Рис. 6

Несобственный интеграл 2–го рода

Определение

Несобственный интеграл 2–го рода – это интеграл по конечному промежутку, на одном из концов которого подынтегральная функция терпит разрыв второго рода.

Если функция f имеет разрыв 2–года в точке b, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{c\to b-0}\int\limits_a^c f(x)\,dx\,. \tag{17}$$

Если функция f имеет разрыв 2–года в точке a, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{c\to a+0}\int\limits_c^b f(x)\,dx\,. \tag{18}$$

Если предел в (17) или (18) существует и конечен, то принято говорить, что соответствующий несобственный интеграл сходится. Если предел бесконечен либо не существует, то несобственный интеграл расходится.

Пример 13

Установить, сходится ли интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot dx\,.$

Решение

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot dx = \lim_{c\to+0}\int\limits_c^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot dx = \lim_{c\to+0}\int\limits_c^1 \ln x\cdot\left(x^{-\frac{1}{2}}\cdot dx\right) =$$

$$= \lim_{c\to+0}\int\limits_c^1 \ln x\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot d\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = 2\cdot\lim_{c\to+0}\int\limits_c^1 \ln x\cdot d\left(x^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= 2\cdot\lim_{c\to+0}\left(\left(\ln x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_c^1 - \int\limits_c^1 x^{\frac{1}{2}}\cdot d(\ln x)\right) =$$

$$= 2\cdot\lim_{c\to+0}\left(0-\ln c\cdot c^{\frac{1}{2}} - \int\limits_c^1 x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx\right) = 2\cdot\lim_{c\to+0}\left(-\ln c\cdot c^{\frac{1}{2}} - \int\limits_c^1 x^{-\frac{1}{2}}\cdot dx\right) =$$

$$= 2\cdot\lim_{c\to+0}\left(-\ln c\cdot c^{\frac{1}{2}} - 2\cdot x^{\frac{1}{2}}\Big|_c^1\right) = 2\cdot\lim_{c\to+0}\left(-\ln c\cdot c^{\frac{1}{2}} - 2 + 2\cdot c^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= -2\cdot\lim_{c\to+0}\left(\ln c\cdot c^{\frac{1}{2}}\right) - 4 + 4\cdot\lim_{c\to+0} c^{\frac{1}{2}} = -4\,.$$

В предыдущей строке присутствовал "простой" предел $\lim\limits_{c\to+0} c^{\frac{1}{2}} = 0$ и чуть более сложный предел

$$\lim_{c\to+0}\left(c^{\frac{1}{2}}\cdot\ln c\right) = [0\cdot\infty] = \lim_{c\to+0}\frac{\ln c}{c^{-\frac{1}{2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{c\to+0}\frac{(\ln c)'_c}{\left(c^{-\frac{1}{2}}\right)'_c} =$$

$$= \lim_{c\to+0}\frac{\frac{1}{c}}{-\frac{1}{2}\cdot c^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{c\to+0}\frac{c^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = 0\,.$$

Пример 14

Установить, при каких значениях n $(n\neq 1)$ сходится интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^n}\,dx\,.$

Решение

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^n}\,dx = \lim_{c\to+0}\int\limits_c^1 x^{-n}\,dx = \lim_{c\to+0}\left.\frac{x^{1-n}}{1-n}\right|_c^b = \frac{1}{1-n}\cdot\lim_{c\to+0} x^{1-n}\Big|_c^b =$$

$$= \frac{1}{1-n}\cdot\lim_{c\to+0}\left(1^{1-n}-c^{1-n}\right) = \frac{1}{1-n}\cdot\left(1-\lim_{c\to+0} c^{1-n}\right)\,.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\lim_{c\to+0} c^{1-n} = \left\{\begin{array}{cc} 0\,, & n<1 \\ +\infty\,, & n>1 \end{array}\right|\,,$$

а значит,

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^n}\,dx = \left\{\begin{array}{cc} \frac{1}{n-1}\,, & n<1 \\ +\infty\,, & n>1 \end{array}\right|\,.$$

Пример 15

Установить, сходится ли интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}\,.$

Решение

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c\to+0}\int\limits_c^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c\to+0}\ln x\big|_c^1 = \lim_{c\to+0}(\ln 1-\ln c) =$$

$$= 0-\lim_{c\to+0}\ln c = -(-\infty) = +\infty\,.$$

Интеграл расходится.

Вывод из примеров 10 и 11: интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^n}\,dx$ сходится при $n < 1$ и расходится при $n \geq 1$.

Замечание

При взятии интеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\int\limits_0^1 \frac{d(-x)}{\sqrt{1-x}} = -\int\limits_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot d(1-x) = -\left.\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_0^1 = 2$$

можно, получив верный ответ, "даже и не заметить", что это, оказывается, был несобственный интеграл 2–го рода. Но не всегда пренебрежение разрывом 2–го рода остаётся безнаказанным.

Пример 16

Вычислить интеграл $\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$.

"Решение"

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int\limits_0^\pi \frac{1}{\cos^2 x}\cdot(\sin x\cdot dx) = -\int\limits_0^\pi \frac{1}{\cos^2 x}\cdot d(\cos x) = -\int\limits_0^\pi \cos^{-2} x\cdot d(\cos x) =$$

$$= -\left.\frac{\cos^{-1} x}{-1}\right|_0^\pi = +\left.\frac{1}{\cos x}\right|_0^\pi = \frac{1}{\cos\pi} - \frac{1}{\cos 0} = -1 - 1 = -2\,.$$

Подынтегральная функция $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ неотрицательна, поскольку $\sin x \geq 0$ при $x \in [0,\, \pi]$, а $\cos^2 x \geq 0$ при любом вещественном x.

В соответствии со свойством 8.2 определённого интеграла, результат данного примера должен быть неотрицательным.

Но результат отрицателен. Противоречие означает, что в построенном нами решении имеется ошибка.

Теорема о свойствах определённого интеграла имеет силу только для интегрируемых функций. А функция $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ неинтегрируема на $[0,\, \pi]$. И виной тому разрыв 2–го рода в точке $x = \frac{\pi}{2}$.

Кроме того, при наличии разрыва подынтегральной функции на промежутке интегрирования формула Ньютона–Лейбница, вообще говоря, неверна.

Мы не имеем права называть исследуемый в данном примере интеграл несобственным, поскольку разрыв 2–го рода – не на конце промежутка интегрирования.

Для прояснения ситуации попытаемся "разбить" интеграл на сумму двух интегралов по свойству 7 (свойству аддитивности):

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx\,. \tag{19}$$

Каждый из интегралов в правой части (19) есть расходящийся несобственный интеграл 2–го рода:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \lim_{b\to\pi/2-0} \frac{1}{\cos x}\bigg|_0^b = \lim_{b\to\pi/2-0} \frac{1}{\cos b} - \frac{1}{\cos 0} = +\infty - 1 = +\infty\,,$$

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \lim_{a\to\pi/2+0} \frac{1}{\cos x}\bigg|_a^{\pi} = \frac{1}{\cos\pi} - \lim_{a\to\pi/2+0} \frac{1}{\cos a} = -1 - (-\infty) = +\infty\,.$$

Таким образом, если бы нас интересовала площадь подграфика функции $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ на промежутке $[0,\, \pi]$, то эта площадь была бы бесконечной. А вот интеграл этой функции по этому промежутку не имеет права на существование ни как обычный, ни как несобственный.

<u>Замечание</u>

А может ли один и тот же интеграл быть несобственным интегралом одновременно 1–го и 2–го рода?

Строго говоря – нет, поскольку 2–й род подразумевает конечный промежуток интегрирования, а 1–й род – бесконечный промежуток.

И всё-таки есть интегралы, которые несут признаки несобственного интеграла 1–го рода и несобственного интеграла 2–го рода. Пример:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x \cdot \sqrt{x}} = \sqrt{\pi}\,.$$

Данный интеграл удастся взять только после изучения темы "Двойной интеграл".

Геометрические приложения

Определение

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Функция f называется кусочно–непрерывной на промежутке $[a,b]$, если $f(x)$ непрерывна для всех $x \in [a,b]$, кроме, разве что, конечного числа точек разрыва 1–го рода на $[a,b]$.

Функция f называется гладкой на промежутке $[a,b]$, если f дифференцируема на $[a,b]$, и $f'(x)$ непрерывна $\forall x \in [a,b]$.

График гладкой функции $y = f(x)$ – гладкая кривая.

Функция f называется кусочно–гладкой на промежутке $[a,b]$, если f дифференцируема, и $f'(x)$ непрерывна для всех $x \in [a,b]$, кроме, разве что, конечного числа точек разрыва 1–го рода функции $f'(x)$ на $[a,b]$.

График кусочно–гладкой функции $y = f(x)$ принято называть кусочно–гладкой кривой.

Определение

Пусть $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, пусть функции f_1, f_2 кусочно–непрерывны на $[a,b]$, и пусть $f_2(x) \geq f_1(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Тогда площадь участка плоскости Ω, ограниченного линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, есть число

$$S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot dx\,. \tag{20}$$

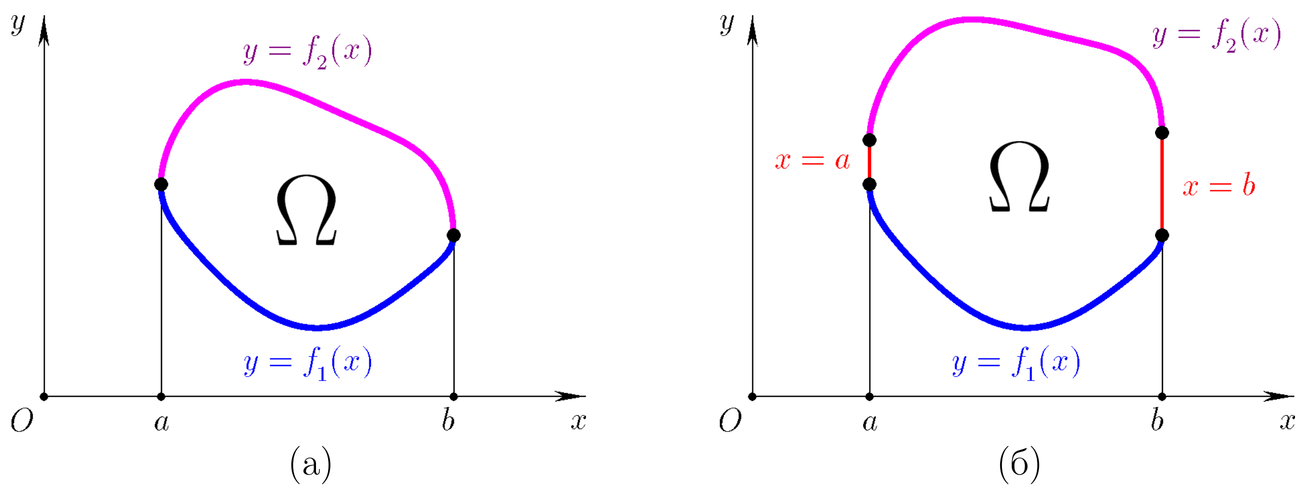


Рис. 7

Замечания

Число a есть x–координата "самой левой" точки участка Ω. "Самых левых" точек может быть одна (Рис. 7 (а)), либо бесконечно много (Рис. 7 (б)), в этом случае они составляют отрезок вертикальной прямой $x = a$.

Аналогично обстоит дело с числом b – x–координатой "самой правой" точки участка Ω.

В некоторых источниках "граничные" функции обозначаются, как $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, а площадь выражается формулой

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) \cdot dx \,.$$

Определение

Пусть $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, пусть функции g_1, g_2 кусочно–непрерывны на $[c, d]$, и пусть $g_2(y) \geq g_1(y)$, $\forall y \in [c, d]$.
Тогда площадь участка плоскости Ω, ограниченного линиями $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$, $y = c$, $y = d$, есть число

$$S = \int_c^d (g_2(y) - g_1(y)) \cdot dy \,. \qquad (21)$$

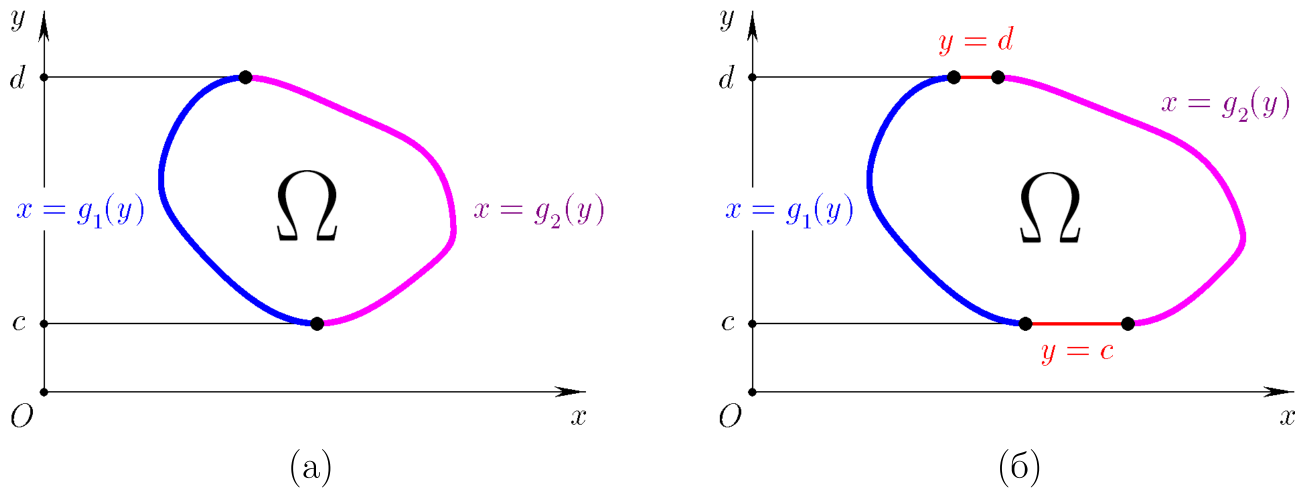


Рис. 8

Замечания

Число c есть y–координата "самой нижней" точки участка Ω. "Самых нижних" точек может быть одна (Рис. 8 (а)), либо бесконечно много (Рис. 8 (б)), в этом случае они составляют отрезок горизонтальной прямой $y = c$.

Аналогично обстоит дело с числом d – $y-$координатой "самой верхней" точки участка Ω.

В некоторых источниках "граничные" функции обозначаются, как $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, а площадь выражается формулой

$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y)) \cdot dy\,.$$

Определение

Пусть $\rho_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\rho_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, пусть $\rho_1(\varphi)$, $\rho_2(\varphi)$ непрерывны на промежутке $[\alpha, \beta]$, и пусть $\rho_2(\varphi) \geq \rho_1(\varphi)$, $\forall \varphi \in [\alpha, \beta]$.

Тогда площадь участка плоскости Ω, ограниченного линиями $r = \rho_1(\varphi)$, $r = \rho_2(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, есть число

$$S = \frac{1}{2} \cdot \int_\alpha^\beta (\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)) \cdot d\varphi\,. \tag{22}$$

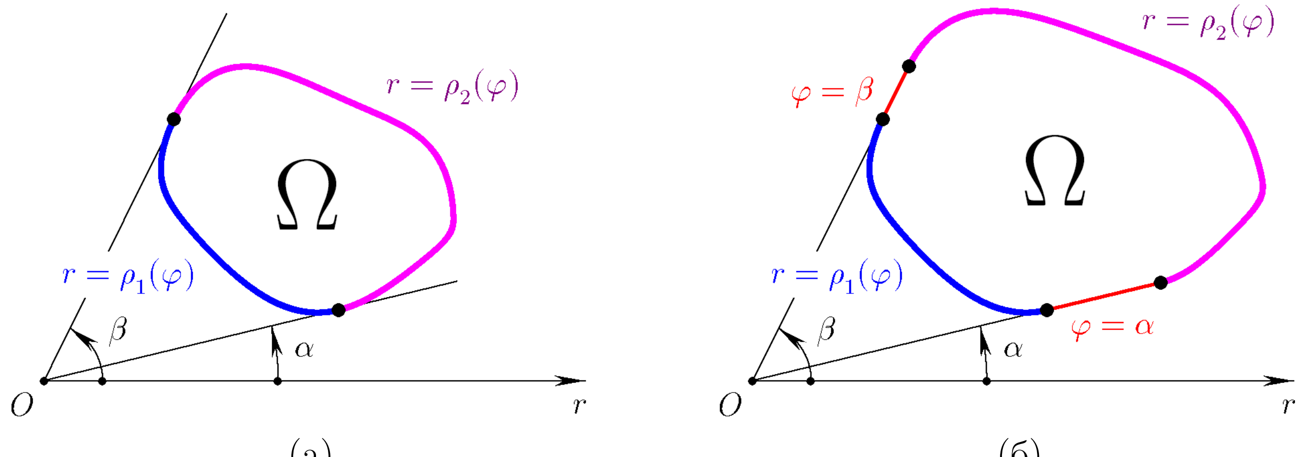


Рис. 9

Замечания

Число α есть наименьший из полярных углов, коими обладают точки участка Ω. Точек с наименьшим полярным углом может быть либо одна (Рис. 9 (а)), либо бесконечно много (Рис. 9 (б)), в этом случае они составляют отрезок радиального луча $\varphi = \alpha$.

Аналогично обстоит дело с числом β – наибольшим из полярных углов, коими обладают точки участка Ω.

В некоторых источниках "граничные" функции обозначаются, как $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$, а площадь выражается формулой

$$S = \frac{1}{2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)) \cdot d\varphi \,.$$

Определение

Пусть $\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, пусть функции Φ_1, Φ_2 непрерывны на промежутке $[a, b]$, и пусть $\Phi_2(r) \geq \Phi_1(r)$, $\forall r \in [a, b]$.

Тогда площадь участка плоскости Ω, ограниченного линиями $\varphi = \Phi_1(r)$, $\varphi = \Phi_2(r)$, $r = a$, $r = b$, есть число

$$S = \int_{a}^{b} (\Phi_2(r) - \Phi_1(r)) \cdot r \cdot dr \,. \tag{23}$$

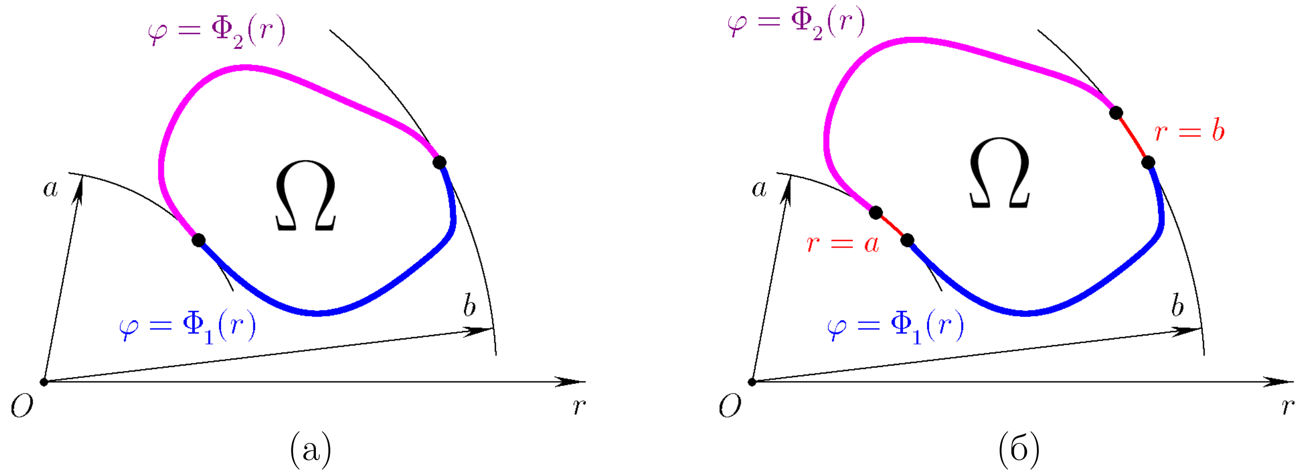


Рис. 10

Замечания

Число a есть расстояние от полюса до ближайшей к нему точки участка Ω. Точек с наименьшим расстоянием до полюса может быть либо только одна (Рис. 10 (а)), либо бесконечно много (Рис. 10 (б)), в этом случае они составляют дугу окружности радиуса $r = a$ (с центром в полюсе).

Аналогично обстоит дело с числом b – наибольшим удалением точек участка Ω от полюса.

В некоторых источниках "граничные" функции обозначаются, как

$\varphi = \varphi_1(r)\,,\ \ \varphi = \varphi_2(r)\,,$ а площадь выражается формулой

$$S = \int\limits_a^b (\varphi_2(r) - \varphi_1(r)) \cdot r \cdot dr\,.$$

Определение

Пусть $\chi\colon [0,T] \to \mathbb{R}\,,\ \ \psi\colon [0,T] \to \mathbb{R}\,,$ и пусть $\chi\,,\ \psi$ – непрерывные функции на промежутке $[0,T]\,.$

Пусть кривая ℓ задана параметрически:

$$\ell\ :\ \ \left\{\begin{array}{l} x = \chi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right|.$$

Тогда:

ℓ есть замкнутая кривая, если

$$\left\{\begin{array}{l} \chi(0) = \chi(T) \\ \psi(0) = \psi(T) \end{array}\right|;$$

ℓ есть самопересекающаяся кривая, если $\exists\, t_1 \in (0,T)$ и $\exists\, t_2 \in (0,T)$ такие, что

$$\left\{\begin{array}{l} t_1 \neq t_2 \\ \chi(t_1) = \chi(t_2) \\ \psi(t_1) = \psi(t_2) \end{array}\right|.$$

Определение

Пусть $\chi\colon [0,T] \to \mathbb{R}\,,\ \ \psi\colon [0,T] \to \mathbb{R}\,,$ пусть $\chi\,,\ \psi$ – гладкие функции на промежутке $[0,T]\,.$

Пусть $|\chi'(t)|+|\psi'(t)| \neq 0\,,\ \ \forall\, t \in [0,T]$ (то есть, производные функций χ и ψ не обращаются в ноль одновременно).

Тогда заданная параметрически кривая ℓ

$$\ell\ :\ \ \left\{\begin{array}{l} x = \chi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right|$$

есть гладкая кривая.

Определение

Пусть $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ \ \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$ и пусть $\chi,\ \psi$ – гладкие функции на промежутке $[0,\, T]$.

Пусть замкнутая несамопересекающаяся параметрически заданная кривая

$$\ell\ :\ \left\{\begin{array}{l} x=\chi(t) \\ y=\psi(t) \end{array}\right|$$

ограничивает участок плоскости Ω. Пусть кривая ℓ обходится, по мере роста параметра t, против часовой стрелки, а участок плоскости, ограниченный этой замкнутой линией, остаётся слева по ходу движения. Полный обход замкнутой линии выражается тем, что параметр t "пробежал" все значения из промежутка $[0,\, T]$.

Тогда площадь этого участка есть число

$$S=-\int\limits_0^T \chi'(t)\psi(t)dt\,, \tag{24.1}$$

$$S=\int\limits_0^T \chi(t)\psi'(t)dt\,, \tag{24.2}$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^T \left(\chi(t)\psi'(t)-\chi'(t)\psi(t)\right)dt\,. \tag{24.3}$$

Замечания

В некоторых источниках кривая задаётся в виде $\ell\ :\ \left\{\begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t) \end{array}\right|$, а площадь выражается формулой

$$S=-\int\limits_0^T x'(t)y(t)dt=\int\limits_0^T x(t)y'(t)dt=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^T \left(x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\right)dt\,.$$

Можно доказать, что интегралы в (24.1)–(24.3) не зависят от того, из какой именно точки кривой ℓ начинается обход.

Величина t имеет физический смысл времени, с течением которого материальная точка движется вдоль кривой ℓ, а дополнительно вводимая функция $v(t)=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$ имеет физический смысл мгновенной (изменяющейся с течением времени t) скорости движения материальной точки вдоль кривой ℓ.

Замечание

Нет доказательства верности формул (20), (21), (22), (23), (24.1), (24.2), (24.3), есть лишь свидетельства в пользу их верности.

Нет и не может быть доказательства того, что в математике формулируется, как определение.

Другое дело, равенство значений площади одной и той же области Ω, вычисляемых по разным формулам (20), (21), (22), (23), (24.1), (24.2), (24.3) – это равенство доказано, как теорема.

Пример 13

Найти площадь участка плоскости, ограниченного линиями $y = x^2$, $y = x$.

Решение

Линии $y = x^2$ и $y = x$ делят плоскость xOy на 5 частей. Только одна из них является ограниченной: та, что для $x \in [0, 1]$ лежит не ниже линии $y = x^2$ и не выше линии $y = x$. Это и есть участок Ω (Рис. 11).

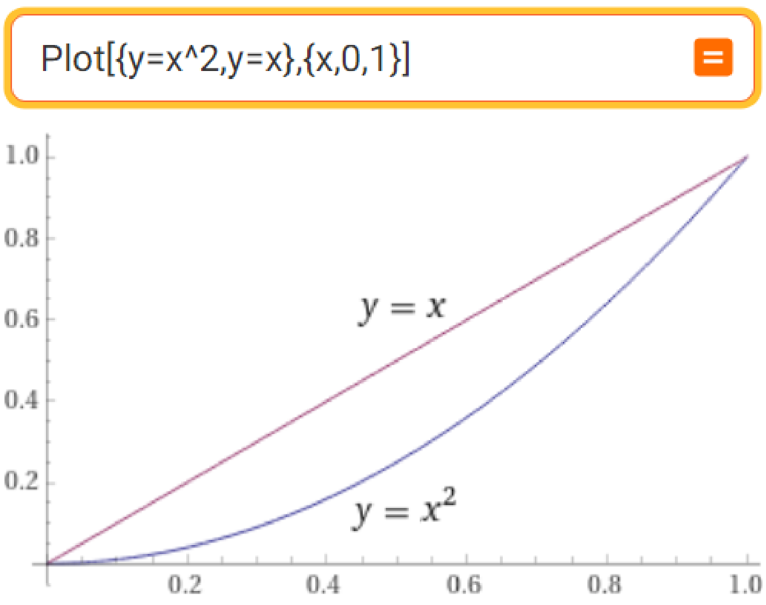


Рис. 11

Первый способ, декартовы координаты, формула (20)

$$S = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Второй способ, декартовы координаты, формула (21)

$$S = \int\limits_0^1 (\sqrt{y} - y)\, dy = \int\limits_0^1 \left(y^{\frac{1}{2}} - y\right) dy = \left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\,.$$

Третий способ, полярные координаты, формула (22)

Очевидно, что $\beta = \pi/4$, поскольку со стороны бо́льших полярных углов φ участок плоскости Ω ограничен прямой $y = x$ – биссектрисой первого координатного угла. Также очевидно, что $\alpha = 0$, поскольку на дуге $y = x^2$, $x \in [0,\, 1]$ (а значит, и на Ω) найдётся точка со сколь угодно малым положительным полярным углом φ.

Функции $\rho_1(\varphi)$, $\rho_2(\varphi)$ найдём с помощью формул связи декартовых и полярных координат:

$$y = x^2, \quad \left\{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right. \Bigg| \quad \Longrightarrow \quad r\sin\varphi = r^2\cos^2\varphi \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad r^2\cos^2\varphi - r\sin\varphi = 0 \quad \Longrightarrow \quad r\cdot(r\cos^2\varphi - \sin\varphi) = 0\,. \tag{25}$$

Уравнение (25) имеет два решения относительно переменной r, меньшее и большее из них есть, соответственно,

$$r_1 = \rho_1(\varphi) = 0\,, \qquad r_2 = \rho_2(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,.$$

Находим площадь:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi} - 0\right) d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^2\varphi\cdot d\,\mathrm{tg}\,\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{tg}^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\mathrm{tg}^3\frac{\pi}{4}}{3} - \frac{\mathrm{tg}^3\,0}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{6}\,.$$

Четвёртый способ, полярные координаты, формула (23)

Очевидно, что $a = 0$, поскольку ближайшая к полюсу точка $x = y = 0$ участка Ω есть сам полюс. Очевидно, что $b = \sqrt{2})$, поскольку именно на таком расстоянии расположена точка $x = y = 1$ – самая удалённая от полюса точка Ω.

Очевидно, также, что $\Phi_2(r) \equiv \pi/4$, именно линия $\varphi = \pi/4$ ("бывшая" $y = x$) ограничивает участок Ω со стороны бóльших φ.

Построение функции $\Phi_1(r)$ менее очевидно. Уравнение (25) предстоит, теперь, решить относительно φ.

$$r\cos^2\varphi - \sin\varphi = 0 \iff r\cdot(1-\sin^2\varphi) - \sin\varphi = 0 \iff r\sin^2\varphi + \sin\varphi - r = 0\,.$$

Вводится новая переменная $z = \sin\varphi$, квадратное уравнение

$$rz^2 + z - r = 0$$

имеет два решения,

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+4r^2}}{2r}\,, \qquad z_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+4r^2}}{2r}\,.$$

Корень z_1 должен быть отброшен, поскольку $z_1 < 0$ при $r > 0$, тогда как $\sin\varphi \geq 0$, $\forall\varphi \in [0,\, \pi/4]$.

Против корня z_2 возражений нет,

$$\sin\varphi = \frac{-1 + \sqrt{1+4r^2}}{2r} \iff \varphi = \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{1+4r^2}}{2r}\right) = \Phi_1(r).$$

Осталось вычислить интеграл

$$S = \int\limits_0^{\sqrt{2}} (\Phi_2(r) - \Phi_1(r))\cdot r\cdot dr = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{1+4r^2}}{2r}\right)\right)\cdot r\cdot dr. \quad (26)$$

Интеграл (26) берётся, но к числу лёгких не относится.

Обратимся к сайту WolframAlpha.com, чтобы убедиться: результат совпадает с тремя предыдущими результатами:

```
Integrate[(pi/4-ArcSin[(Sqrt[1+4*r^2]-1)/(2*r)])*r,{r,0,Sqrt[2]}]
```

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{4} - \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+4r^2} - 1}{2r}\right)\right) r\, dr = \frac{1}{6} \approx 0.16667$$

Рис. 12

Пятый способ, параметрическое задание кривой, формула (24.2)

Поскольку граница участка Ω состоит из дух разнородных кусков,

$y = x^2$ и $y = x$, параметризация границы будет кусочно–однородной.

Величина T, а также функции $\chi(t)$ и $\psi(t)$ определяются неоднозначно. Действительно, движение на автомобиле по кольцевой дороге может быть совершено за произвольное (в разумных пределах) время T, а также с произвольным (опять же, в пределах разумного) графиком движения $\chi(t)$, $\psi(t)$.

Один из возможных вариантов задания кривой: $T = 2$,

$$\chi(t) = \left\{ \begin{array}{cc} t\,, & 0 \le t \le 1 \\ 2-t\,, & 1 \le t \le 2 \end{array} \right| , \qquad \psi(t) = \left\{ \begin{array}{cc} t^2\,, & 0 \le t \le 1 \\ 2-t\,, & 1 \le t \le 2 \end{array} \right| ,$$

тогда

$$\chi'(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 1\,, & 0 \le t \le 1 \\ -1\,, & 1 \le t \le 2 \end{array} \right| , \qquad \psi'(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 2\,, & 0 \le t \le 1 \\ -1\,, & 1 \le t \le 2 \end{array} \right| .$$

Нетрудно убедиться, что для выбранного задания замкнутой линии выполняется соотношение $\psi(t) = \chi^2(t)$, $0 \le t \le 1$, для участка движения вдоль параболы $y = x^2$ в порядке удаления от начала координат, и соотношение $\psi(t) = \chi(t)$, $1 \le t \le 2$, для участка движения вдоль прямой $y = x$ в порядке возвращения к началу координат.

Находим площадь:

$$S = \int\limits_0^2 \chi(t)\,\psi'(t)\,dt = \int\limits_0^1 \chi(t)\,\psi'(t)\,dt + \int\limits_1^2 \chi(t)\,\psi'(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 t \cdot 2t \cdot dt + \int\limits_1^2 (2-t)\cdot(-1)\cdot dt = 2\int\limits_0^1 t^2 \cdot dt + \int\limits_1^2 (t-2)\cdot dt =$$

$$= 2 \cdot \frac{t^3}{3}\bigg|_0^1 + \left(\frac{t^2}{2} - 2t\right)\bigg|_1^2 = 2\cdot\left(\frac{1}{3} - 0\right) + \left(\frac{2^2}{2} - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 2\cdot 1\right) =$$

$$= \frac{2}{3} - 0 + (-2) - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\,.$$

Уже пять способов поиска площади привели к одному результату.

Применить формулы (24.1) и (24.3) читателям предлагается самостоятельно.

Теорема Архимеда

Площадь сегмента параболы равна двум третям произведения основания сегмента на его высоту, $S = \frac{2}{3} \cdot a \cdot h$ (Рис. 13).

Доказательство

Рассмотрим в декартовой плоскости xOy параболу $y = x^2 = f_1(x)$ (Рис. 13).

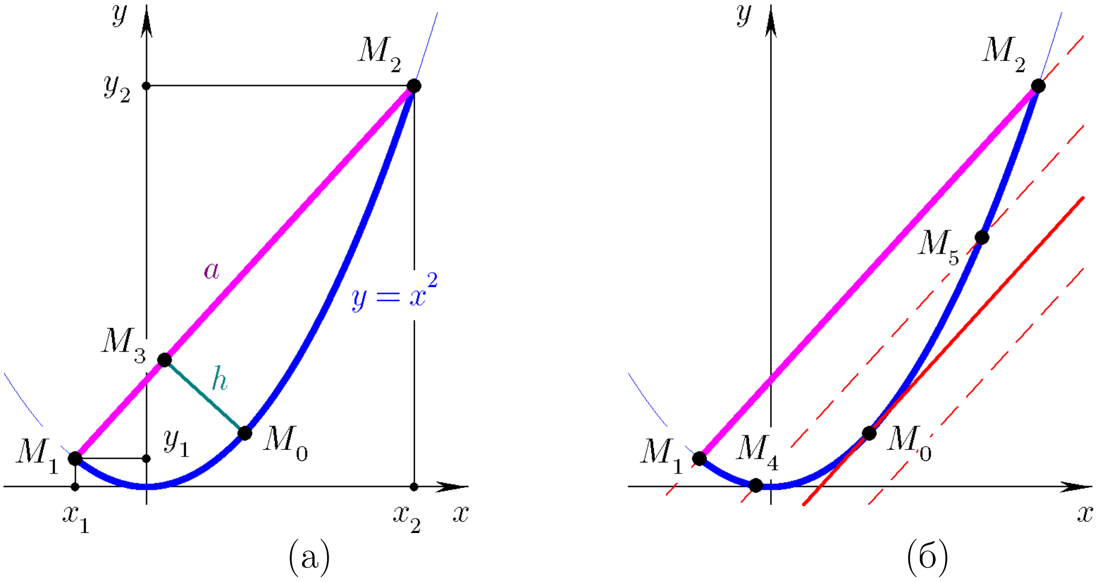


Рис. 13

Пусть вершинами сегмента служат точки параболы $M_1 = (x_1, y_1) = (x_1, x_1^2)$, $M_2 = (x_2, y_2) = (x_2, x_2^2)$. Выставим требование $x_1 < x_2$ (что равноценно требованию $x_2 - x_1 > 0$), которое не умаляет общности.

1. Случай $x_1 \neq -x_2$ (то есть, $x_2 + x_1 \neq 0$

Уравнение прямой (уравнение хорды сегмента), проходящей через точки M_1, M_2 имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \iff \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - x_1^2}{\underbrace{x_2^2 - x_1^2}_{=(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}}. \tag{27}$$

Домножение уравнения (27) на величину

$$x_2^2 - x_1^2 = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \cdot \underbrace{(x_2 + x_1)}_{\neq 0} \neq 0$$

есть равносильное преобразование уравнения,

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot(x_2-x_1)(x_2+x_1)=\frac{y-x_1^2}{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}\cdot(x_2-x_1)(x_2+x_1)\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad (x-x_1)(x_2+x_1)=y-x_1^2\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad y=f_2(x)=x\cdot(x_2+x_1)-x_1x_2=k\cdot x+b_0\,, \tag{28}$$

где $k=x_2+x_1$, $b_0=-x_1x_2$. Прямой (28) присвоим имя l_0 (Рис. 13 (б)).

Площадь сегмента параболы, согласно (20), есть

$$S_1=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(f_2(x)-f_1(x)\right)\,dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(x\cdot(x_2+x_1)-x_1x_2-x^2\right)\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}(x_2+x_1)-xx_1x_2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}=$$

$$=\left(\frac{x_2^2}{2}(x_2+x_1)-x_2x_1x_2-\frac{x_2^3}{3}\right)-\left(\frac{x_1^2}{2}(x_2+x_1)-x_1x_1x_2-\frac{x_1^3}{3}\right)=$$

$$=\frac{x_2^3}{2}+\frac{x_1x_2^2}{2}-x_1x_2^2-\frac{x_2^3}{3}-\frac{x_1^2x_2}{2}-\frac{x_1^3}{2}+x_1^2x_2+\frac{x_1^3}{3}=$$

$$=\frac{x_2^3}{6}-\frac{x_1x_2^2}{2}+\frac{x_1^2x_2}{2}-\frac{x_1^3}{6}=\frac{x_2^3-3x_1x_2^2+3x_1^2x_2-x_1^3}{6}=\frac{(x_2-x_1)^3}{6}\,. \tag{29}$$

Основание сегмента есть

$$a=|M_1M_2|\;=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_2^2-x_1^2)^2}=$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+((x_2-x_1)(x_2+x_1))^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2\cdot(1+(x_2+x_1)^2)}=$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2}\cdot\sqrt{1+(x_2+x_1)^2}=|x_2-x_1|\cdot\sqrt{1+(x_2+x_1)^2}=$$

$$=(x_2-x_1)\cdot\sqrt{1+(x_2+x_1)^2}\,.$$

Для поиска высоты сегмента h можно применить следующее рассуждение. Пусть точки $M_3=(x_3,\,y_3)$, $M_0=(x_0,\,y_0)$ есть, соответственно, основание и вершина высоты сегмента. Точка $M_0=(x_0,\,y_0)$ наиболее удалена от отрезка прямой M_1M_2 из всех точек, лежащих на дуге параболы $M_1M_0M_2$.

Проведём прямую l_1 параллельно прямой l_0 чуть ниже её (Рис. 13 (б)). Уравнение такой прямой имеет вид $y = k \cdot x + b_1$, где $b_1 < b_0$. Слова "чуть–чуть ниже" означают, что дискриминант квадратного уравнения

$$x^2 = k \cdot x + b_1 \tag{30}$$

положителен, из–за чего уравнение (30) имеет два корня, и прямая l_1 пересекает параболу в двух точках, M_4 и M_5. Очевидно, что эти точки удалены от прямой l_0 меньше, чем на h.

Проведём прямую l_2 параллельно прямой l_1 ниже её настолько, чтобы общая точка у параболы и прямой l_2 была единственной, то есть, чтобы прямая l_2 касалась параболы в некоей точке M_0. Уравнение прямой l_2 имеет вид $y = k \cdot x + b_2$, где $b_2 < b_1$. Касание линий означает, что дискриминант квадратного уравнения

$$x^2 = k \cdot x + b_2 \tag{31}$$

равен нулю, из–за чего уравнение (31) имеет только один корень. Точка M_0 удалена от прямой l_0 на максимальное расстояние из всех точек дуги параболы $M_1M_0M_2$. Это расстояние и есть высота сегмента h.

Прямая l_3, проведённая параллельно l_0 ещё ниже ($y = k \cdot x + b_3$, где $b_3 < b_2$, Рис. 13 (б)), не пересечётся с параболой, соответствующее квадратное уравнение будет иметь отрицательный дискриминант.

Найти координаты точки M_0 можно из равенства нулю дискриминанта уравнения (31), но мы поступим иначе. Прямая l_2 есть касательная к параболе, следовательно, согласно геометрическому смыслу производной,

$$\left(x^2\right)'\Big|_{x=x_0} = k \quad \Longrightarrow \quad 2x_0 = x_1 + x_2 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}\,, \quad y_0 = \frac{(x_1 + x_2)^2}{4}\,.$$

Для нахождения расстояния от точки M_0 до прямой l_0 перепишем её уравнение (28) в виде общего уравнения прямой на плоскости,

$$\underbrace{(x_2 + x_1)}_{=A} \cdot x + \underbrace{(-1)}_{=B} \cdot y + \underbrace{(-x_1x_2)}_{=C} = 0\,.$$

Из курса аналитической геометрии известно, что нормальное уравнение прямой

$$\pm\frac{A \cdot x + B \cdot y + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varrho(x,\, y) = \frac{(x_2 + x_1) \cdot x - y - x_1x_2}{\sqrt{1 + (x_2 + x_1)^2}} = 0\,,$$

полученное из общего уравнения прямой домножением на нормирующий множитель $\mu = \pm 1/\sqrt{A^2+B^2}$, в своей левой части содержит функцию ("отклонение") $\varrho(x,\, y)$ такую, что расстояние точки $M_0 = (x_0, y_0)$ от плоскости есть

$$h = |\varrho(x_0,\, y_0)| = \left| \frac{(x_2+x_1)\cdot x_0 - y_0 - x_1x_2}{\sqrt{1+(x_2+x_1)^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{(x_2+x_1)\cdot \frac{x_2+x_1}{2} - \frac{(x_2+x_1)^2}{4} - x_1x_2}{\sqrt{1+(x_2+x_1)^2}} \right| = \frac{\left| \frac{(x_2+x_1)^2}{4} - x_1x_2 \right|}{\sqrt{1+(x_2+x_1)^2}} =$$

$$= \frac{\left| \frac{x_2^2+2x_1x_2+x_1^2-4x_1x_2}{4} \right|}{\sqrt{1+(x_2+x_1)^2}} = \frac{\left| x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 \right|}{4\cdot\sqrt{1+(x_2+x_1)^2}} = \frac{(x_2-x_1)^2}{4\cdot\sqrt{1+(x_2+x_1)^2}}\,.$$

Осталось найти площадь сегмента по формуле Архимеда,

$$S_2 = \frac{2}{3}\cdot a\cdot h = \frac{2}{3}\cdot (x_2-x_1)\cdot\sqrt{1+(x_2+x_1)^2}\cdot\frac{(x_2-x_1)^2}{4\cdot\sqrt{1+(x_2+x_1)^2}} =$$

$$= \frac{(x_2-x_1)^3}{6}\,. \tag{32}$$

2. Случай $x_1 = -x_2$ (то есть, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$)

Ввиду того, что $y_1 = x_1^2 = (-x_2)^2 = x_2^2 = y_2$, сегмент, принимая "горизонтальное положение", становится симметричным относительно оси Oy, уравнение хорды сегмента упрощается, $y = x_2^2$, длина хорды (основание сегмента) есть $a = 2\cdot x_2$, высота сегмента есть $h = x_2^2$.

Выражение площади по формуле (20):

$$S_1 = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(x_2^2 - x^2\right) dx = \int\limits_{-x_2}^{x_2} \left(x_2^2 - x^2\right) dx = \left(x_2^2\cdot x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-x_2}^{x_2} =$$

$$= \left(x_2^3 - \frac{x_2^3}{3}\right) - \left(-x_2^3 + \frac{x_2^3}{3}\right) = \frac{4x_2^3}{3}\,. \tag{33}$$

Выражение площади по формуле Архимеда:

$$S_2 = \frac{2}{3}\cdot a\cdot h = \frac{2}{3}\cdot 2\cdot x_2\cdot x_2^2 = \frac{4x_2^3}{3}\,. \tag{34}$$

Совпадение результатов (29) и (32), а также (33) и (34) доказывает верность Теоремы.

<u>Определение</u>

Циклоида есть кривая, заданная параметрически:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \chi(t) = t - \sin t \\ y = \psi(t) = 1 - \cos t \end{array} \right| , \qquad t \in \mathbb{R} . \tag{35}$$

<u>Замечание</u>

Циклоида есть траектория фиксированной точки на окружности (в данном случае, единичного радиуса), которая катится без скольжения по координатной оси Ox .

Циклоида есть бесконечная кривая. Функция $y = f(x)$, задаваемая соотношениями (35), периодична (как и, к примеру, синусоида $y = \sin x$) с периодом 2π . Обычно циклоида изображается на протяжении только нескольких своих периодов. Например, на Рис. 14 циклоида построена для $t \in [0, 4\pi]$, и поэтому представлена двумя периодами (двумя арками).

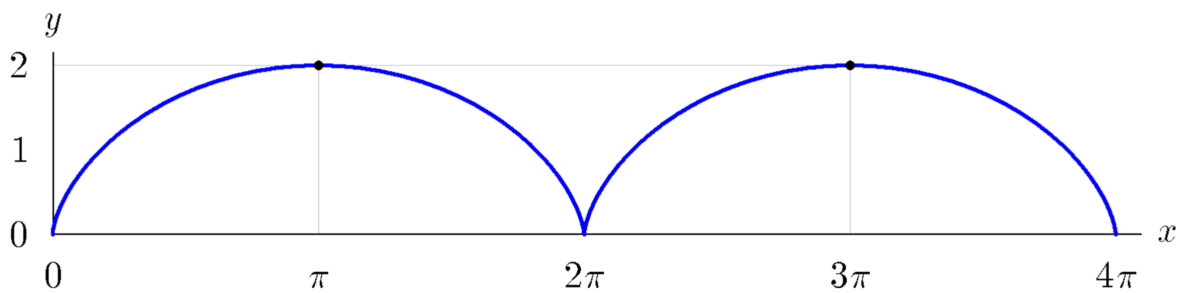


Рис. 14

Несмотря на то, что функции $\chi(t)$ и $\psi(t)$ – гладкие, циклоида не является гладкой кривой. Причина: $\chi'(2\pi k) = \psi'(2\pi k) = 0$ при всех целых k . Геометрически потеря гладкости выражается тем, что в точках с координатами $(2\pi k, 0)$ циклоида имеет острые зубцы, направленные вниз (Рис. 14).

В среде WolframAlpha.com изобразить циклоиду поможет функция $ParametricPlot[]$:

```
ParametricPlot[{t-Sin[t],1-Cos[t]},{t,0,4*pi}]
```

Рис. 15

К сожалению, при обращении к функции $ParametricPlot[]$ нет возможности назначить одинаковые масштабы для горизонтальной и вертикальной осей координат. Если циклоиду построить по команде Рис. 15, она будет чрезмерно вытянута по вертикали.

Пример 14

Найти площадь фигуры Ω (Рис. 16) – части декартовой плоскости xOy, ограниченной осью Ox (снизу) и первой аркой заданной параметрически циклоиды (сверху),

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \chi(t) = t - \sin t \\ y = \psi(t) = 1 - \cos t \end{array} \right| , \quad t \in [0,\ 2\pi] \,.$$

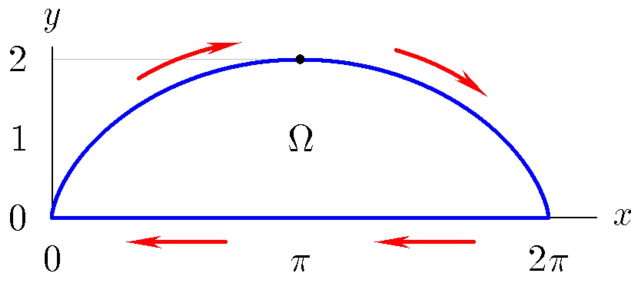


Рис. 16

Решение

Первый способ, параметрическое задание кривой, формула (24.1)

Формула (24.1) предполагает, что обход границы участка Ω выполняется против часовой стрелки, а сам участок Ω остаётся всегда слева от текущего направления обхода.

Это означает, что если обход границы выполняется, наоборот, по часовой стрелке (а участок Ω остаётся справа от текущего направления обхода), то знак перед интегралом должен быть противоположен предусмотренному в (24.1).

Границу участка Ω следует составить из двух разнородных кусков: арки циклоиды, и замыкающего отрезка прямой, соединяющего точку $(2\pi, 0)$ с точкой $(0, 0)$:

$$\chi(t) = \left\{ \begin{array}{ll} t - \sin t \,, & 0 \le t \le 2\pi \\ 4\pi - t \,, & 2\pi < t \le 4\pi \end{array} \right| , \qquad \psi(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \cos t \,, & 0 \le t \le 2\pi \\ 0 \,, & 2\pi < t \le 4\pi \end{array} \right| ,$$

тогда

$$\chi'(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 1-\cos t\,, & 0 \le t \le 2\pi \\ -1\,, & 2\pi < t \le 4\pi \end{array} \right| , \qquad \psi'(t) = \left\{ \begin{array}{cc} \sin t\,, & 0 \le t \le 2\pi \\ 0\,, & 2\pi < t \le 4\pi \end{array} \right| ,$$

$$S = +\int\limits_0^{4\pi} \chi'(t)\psi(t)\,dt = \int\limits_0^{2\pi} \chi'(t)\psi(t)\,dt + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} \chi'(t)\psi(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)\cdot(1-\cos t)\cdot dt + \int\limits_{2\pi}^{4\pi} (-1)\cdot 0\cdot dt = \int\limits_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\cdot dt + 0 =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos(2t)}{2}\right)\cdot dt = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos t + \frac{1}{2}\cos(2t)\right)\cdot dt =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot t + 2\sin t + \frac{1}{4}\cdot\sin(2t)\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi \approx 9.42477796076937970\,.$$

Второй способ, "обычное", явное задание кривой, формула (20)

Для использования формулы (20) следует перейти от параметрического задания кривой к явному выражению y через x. Сделать это можно было бы, решая уравнение $\chi(t) = 1 - \sin t = x$ относительно t и подставляя полученное выражение t через x в соотношение $y = \psi(t) = 1 - \cos t$.

Аналитическое решение уравнения $\chi(t) = x$ относительно t существует далеко не всегда. В данном случае, для уравнения Кеплера $t - \sin t = x$ точного аналитического решения нет.

Численное решение уравнения $\chi(t) = x$ можно, для заданного численного значения x, найти в среде WolframAlpha.com с помощью команды $FindRoot[]$. Например, при $x = 2$ результат решения выглядит так:

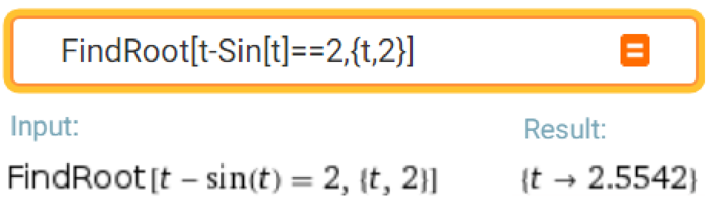


Рис. 17

Первый параметр функции $FindRoot[]$, параметр $t - Sin[t] == 0$, есть уравнение, которое требуется численно решить. Второй параметр, $\{t\,,2\}$, означает, что решить уравнение нужно относительно переменной t, а в качестве начального приближения предлагается взять число 2.

Всякое численное решение уравнения требует начального приближения. Если в качестве начального приближения для уравнения $t - \sin t = x$ взять x, то для $x \in [0,\, 2\pi]$ функция $FindRoot[]$ даст верное решение.

Для бесконечного множества вещественных чисел, наполняющих промежуток $[0,\, 2\pi]$, решить уравнение $\chi(t) = x$ не представляется возможным.

Однако, его можно решить для конечного множества чисел – узловых точек, с помощью которых функция $NIntegrate[]$ численно находит интеграл. "Мостиком" между функциями $FindRoot[]$, $NIntegrate[]$, послужит функция $ReplaceAll[]$, которая заменит в подынтегральном выражении у функции $NIntegrate[]$ величину x на найденное с помощью $FindRoot[]$ численное значение:

```
NIntegrate[ReplaceAll[1-Cos[t],FindRoot[t-Sin[t]==x,{t,x}]],{x,0,2*pi}]
```

Definite integral:

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos(t)\ /.\ \text{FindRoot}[t - \sin(t) = x,\ \{t,\ x\}])\, dx \approx 9.424777960769\ldots$$

Рис. 18

Решение в декартовых координатах является приближённым, однако, как видно из Рис. 18, все показанные 13 значащих цифр приближённого результата совпадают с 13 первыми цифрами ранее полученного точного результата.

Функция $NIntegrate[]$ отличается от функции $Integrate[]$ тем, что пытается взять численно любой определённый интеграл. Функция $Integrate[]$ ранее обслуживала только те интегралы, которые она сама могла взять аналитически. От "неберущихся" интегралов функция отказывалась. В последнее время сайт WolframAlpha.com сменил тактику, и всякий "неберущийся" функцией $Integrate[]$ интеграл сайт без предупреждения берёт функцией $NIntegrate[]$.

Определение

> Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, и пусть $f(x)$ гладкая на промежутке $[a, b]$. Пусть отрезок кривой $y = f(x)$ построен в декартовой системе координат xOy для $x \in [a, b]$.

Тогда длина этого отрезка есть число

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \cdot dx\,. \tag{36}$$

Замечание

В некоторых источниках функция обозначается, как $y = y(x)$, а длина выражается формулой

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} \cdot dx\,.$$

Определение

Пусть $\rho\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, и пусть $\rho(\varphi)$ гладкая на промежутке $[\alpha, \beta]$. Пусть отрезок кривой $r = \rho(\varphi)$ построен в полярной системе координат $rO\varphi$ для $\varphi \in [\alpha,\, \beta]$.

Тогда длина этого отрезка есть число

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2} \cdot d\varphi\,. \tag{37}$$

Замечание

В некоторых источниках функция обозначается, как $r = r(\varphi)$, а длина выражается формулой

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(r'(\varphi)\right)^2} \cdot d\varphi\,.$$

Определение

Пусть $\chi\colon [0, T] \to \mathbb{R}$, $\psi\colon [0, T] \to \mathbb{R}$, и пусть $\chi(t)$, $\psi(t)$ – гладкие функции на промежутке $[0, T]$.

Пусть отрезок параметрически заданной кривой

$$\left\{\begin{array}{l} x = \chi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right|$$

построен в декартовой системе координат xOy для $t \in [0, T]$.
Тогда длина этого отрезка есть число

$$L = \int\limits_0^T \sqrt{(\chi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} \cdot dt\,. \tag{38}$$

Замечание

В некоторых источниках кривая задаётся в виде $\left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right|$, а длина выражается формулой

$$L = \int\limits_0^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot dt\,.$$

Замечание

Нет доказательства верности формул (36)–(38), есть лишь свидетельства в пользу их верности.

Другое дело, равенство значений длины одной и той же кривой ℓ, вычисляемых по разным формулам (36)–(38), это равенство доказано, как теорема.

Пример 15

Найти длину отрезка параболы $y = x^2$ для $x \in [0,\ 1]$.

Решение задачи будет построено двумя способами.

Первый способ, декартовы координаты, формула (36)

$$L = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + ((x^2)')^2} \cdot dx = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} \cdot d(2x) =$$

$$
= \boxed{\begin{array}{c} z = 2x \\ x = 0 \implies z = 0 \\ x = 1 \implies z = 2 \end{array}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \sqrt{1+z^2}\cdot dz =
$$

$$
= \frac{1}{4}\cdot\left(z\cdot\sqrt{z^2+1} + \ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)\right)\Big|_0^2 =
$$

$$
= \frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\sqrt{5} + \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}{4} \approx 1.4789429\,.
$$

Неопределённый интеграл $\int\sqrt{1+z^2}\cdot dz$ взят на стр. 14–15 учебного пособия [5].

Второй способ, полярные координаты, формула (37)

$$
y = x^2 \iff r\sin\varphi = r^2\cos^2\varphi \iff r = \rho(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,,
$$

$$
\rho'(\varphi) = \frac{\cos\varphi\cdot\cos^2\varphi - \sin\varphi\cdot 2\cos\varphi\cdot(-\sin\varphi)}{\cos^4\varphi} = \frac{\cos\varphi + \sin^2\varphi\cdot\cos\varphi}{\cos^4\varphi} =
$$

$$
= \frac{1+\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}\,.
$$

На рассматриваемом отрезке параболы наименьший полярный угол $\alpha = 0$ имеет точка $x = y = 0$, наибольший полярный угол $\beta = \pi/4$ имеет точка $x = y = 1$.

$$
L = \int\limits_0^{\pi/4}\sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\cdot d\varphi = \int\limits_0^{\pi/4}\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi} + \frac{\left(1+\sin^2\varphi\right)^2}{\cos^6\varphi}}\cdot d\varphi =
$$

$$
= \int\limits_0^{\pi/4}\sqrt{\frac{\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi + 1 + 2\sin^2\varphi + \sin^4\varphi}{\cos^6\varphi}}\cdot d\varphi =
$$

$$
= \int\limits_0^{\pi/4}\sqrt{\frac{\sin^2\varphi + 1 + 2\sin^2\varphi}{\cos^6\varphi}}\cdot d\varphi = \int\limits_0^{\pi/4}\sqrt{\frac{3(1-\cos^2\varphi)+1}{\cos^2\varphi\cdot\cos^4\varphi}}\cdot d\varphi =
$$

$$
= \int\limits_0^{\pi/4}\sqrt{\frac{4-3\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \int\limits_0^{\pi/4}\sqrt{\frac{4}{\cos^2\varphi} - 3}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} =
$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{4\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi) - 3} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{4 \cdot \operatorname{tg}^2\varphi + 1} \cdot d\,(\operatorname{tg}\varphi) =$$

$$= \boxed{\begin{array}{c} z = \operatorname{tg}\varphi \\ \varphi = 0 \implies z = 0 \\ \varphi = \pi/4 \implies z = 1 \end{array}} = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + (2z)^2} \cdot dz = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln\,(2+\sqrt{5})}{4} \approx$$

$$\approx 1.4789429\,.$$

Зелёный интеграл, к которому свелось применение формулы длины кривой в полярных координатах, совпадает с таким же интегралом, к которому свелось применение формулы длины кривой в декартовых координатах.

Пример 16

Найти длину L линии функции $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Решение

Область определения (промежуток интегрирования) рассматриваемой функции есть $D(f) = [-R, R]$. Тогда

$$L = \int\limits_{-R}^{+R} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int\limits_{-R}^{+R} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = \int\limits_{-R}^{+R} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= R \cdot \int\limits_{-R}^{+R} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R \cdot \arcsin\frac{x}{R}\Bigg|_{-R}^{+R} = R \cdot \Big(\underbrace{\arcsin(+1)}_{=\pi/2} - \underbrace{\arcsin(-1)}_{=-\pi/2}\Big) = \pi R\,.$$

<u>Замечание</u>

Очевидно, что найденный интеграл выражает длину полуокружности. Следовательно, длина полной окружности равна $2\pi R$. Это означает, что определение длины окружности, сформулированное в средней школе, и университетское определение длины отрезка кривой не противоречат друг другу.

Пример 17

Найти длину первой арки циклоиды, заданной в декартовой плоскости xOy,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \chi(t) = t - \sin t \\ y = \psi(t) = 1 - \cos t \end{array} \right| , \qquad t \in [0,\ 2\pi]\,.$$

Первым длину циклоиды вычислил Кристофер Рен (1632–1723), английский математик и архитектор. В годы его жизни понятие "Математика" было существенно шире нынешнего. В частности, архитектура, фортификация, география, навигация, астрономия, и даже музыка – считались частью математики.

Исаак Ньютон утверждал, что Кристофер Рен – один из самых выдающихся математиков своего времени.

Главным достижением Кристофера Рена в архитектуре считается собор Святого Павла в Лондоне (Рис. 19(а)). Позже, полторы сотни лет спустя, Огюст Монферран применил некоторые архитектурные идеи Рена при строительстве Исаакиевского собора в Санкт-Петербурге (Рис. 19(б)).

При проектировании собора Святого Павла Рен, разумеется, применял последние достижения в области математики и той науки, которая в наше время называется сопротивление материалов.

(а)

(б)

Рис. 19

Следует отметить, что Бартоломео Растрелли (который трудился много позже Кристофера Рена), при всём к нему уважении, с математикой и с сопротивлением материалов не дружил. Заменой им служили арифметика, личная интуиция и личный опыт. В большинстве случаев интуиция не подвела, но несколько его творений преждевременно разрушились.

Не следует судить Растрелли слишком строго. Сопротивление материалов впервые в Санкт–Петербурге было применено только в 1823 году (через 52 года после ухода Растрелли) при проектировании Пантелеймоновского моста через Фонтанку.

Решение

Для данной задачи предлагается два решения. Второе из решений потребует специального математического программного обеспечения.

Первый способ, параметрическое задание кривой, формула (38)

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\left((t-\sin t)'\right)^2 + \left((1-\cos t)'\right)^2} \cdot dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2} \cdot dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t} \cdot dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot dt = \int\limits_0^{2\pi} 2 \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}_{\geq 0\,,\ \forall t \in [0,2\pi]} \cdot dt =$$

$$= 4 \cdot \int\limits_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cdot d\left(\frac{t}{2}\right) = -4\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -4\left(-\cos 0 + \cos\pi\right) = 8\,.$$

Второй способ, декартовы координаты, формула (36)

Пусть функция $y = f(x)$ не задана в явном виде, а взаимосвязь между x и y установлена с помощью третьей переменной, в качестве которой служит параметр t,

$$\left\{\begin{array}{l} x = \chi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right|.$$

Известно, что формула для производной такой функции имеет вид [4]

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\chi'(t)}\,,$$

где t есть решение уравнения $\chi(t) = x$.

Итак,

$$f'(x) = \frac{(1-\cos t)'}{(t-\sin t)'} = \frac{\sin t}{1-\cos t}\,, \qquad a = \chi(0) = 0\,, \qquad b = \chi(2\pi) = 2\pi\,,$$

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} \cdot dx = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}} \cdot dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}{(1-\cos t)^2}} \cdot dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2(1-\cos t)}{(1-\cos t)^2}} \cdot dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2}{1-\cos t}} \cdot dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2}{2\sin^2 \frac{t}{2}}} \cdot dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \cdot dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin \frac{t(x)}{2}} \cdot dx\,.$$

Как обеспечить нахождение t, корня уравнения $t - \sin t = x$, объяснено в Примере 14. Результат обращения к WolframAlpha.com показан на Рис. 20.

```
NIntegrate[ReplaceAll[1/Sin[t/2],FindRoot[t-Sin[t]==x,{t,x}]],{x,10^(-7),2*pi-10^(-7)}]
```

Definite integral: $\int_{\frac{1}{10^7}}^{2\pi - \frac{1}{10^7}} \left(\csc\left(\frac{t}{2}\right) /.\ \text{FindRoot}[t - \sin(t) = x, \{t, x\}]\right) dx \approx 7.99992886\ldots$

Рис. 20

Полученное приближённое значение интеграла, число 7.99992886, неплохо согласуется с ранее найденным точным значением 8.

В качестве промежутка интегрирования в этом обращении используется промежуток $[10^{-7},\, 2\pi - 10^{-7}]$. Ясно, что такое "сужение" несколько увеличивает погрешность вычислений, но находить интеграл для $[0,\, 2\pi]$, и даже для $[10^{-8},\, 2\pi - 10^{-8}]$ WolframAlpha.com отказывается без объяснения причин.

Интеграл, который берётся в данном способе решения Примера 15, с точки зрения сайта WolframAlpha.com является несобственным интегралом 2-го рода. Действительно, подынтегральная функция (при численном интегрировании) стремится к бесконечности и при $x \to 0$, и при $x \to 2\pi$.

Определение

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, и пусть $f(x)$ гладкая на промежутке $[a, b]$. Пусть отрезок кривой $y = f(x)$ построен в декартовой системе координат xOy для $x \in [a, b]$.

Тогда площадь поверхности, полученной вращением этого отрезка вокруг оси Ox, есть число

$$S = 2\pi \cdot \int_a^b |f(x)| \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx\,. \tag{39}$$

Замечание

В некоторых источниках функция обозначается, как $y = y(x)$, а площадь выражается формулой

$$S = 2\pi \cdot \int\limits_a^b |y(x)| \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} \cdot dx\,.$$

Определение

Пусть $\rho\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, и пусть $\rho(\varphi)$ гладкая на промежутке $[\alpha, \beta]$.
Пусть отрезок кривой $r = \rho(\varphi)$ построен в полярной системе координат $rO\varphi$ для $\varphi \in [\alpha,\, \beta]$.
Тогда площадь поверхности, полученной вращением этого отрезка кривой вокруг полярной оси Or, есть число

$$S = 2\pi \cdot \int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi) \sin\varphi \cdot \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} \cdot d\varphi\,. \tag{40}$$

Замечание

В некоторых источниках функция обозначается, как $r = r(\varphi)$, а площадь выражается формулой

$$S = 2\pi \cdot \int\limits_\alpha^\beta r(\varphi) \sin\varphi \cdot \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} \cdot d\varphi\,.$$

Определение

Пусть $\chi\colon [0, T] \to \mathbb{R}$, $\psi\colon [0, T] \to \mathbb{R}$, и пусть $\chi(t)$, $\psi(t)$ – гладкие функции на промежутке $[0, T]$.
Пусть отрезок параметрически заданной кривой

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \chi(t) \\ y = \psi(t) \end{array} \right|$$

построен в декартовой системе координат xOy для $t \in [0, T]$.
Тогда площадь поверхности, полученной вращением этого отрезка

кривой вокруг оси Ox, есть число

$$S = 2\pi \cdot \int\limits_0^T |\psi(t)| \cdot \sqrt{\left(\chi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2} \cdot dt\,. \tag{41}$$

Замечание

В некоторых источниках кривая задаётся в виде $\left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right|$, а длина выражается формулой

$$S = 2\pi \cdot \int\limits_0^T |y(t)| \cdot \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} \cdot dt\,.$$

Замечание

Нет доказательства верности формул (39)–(41), есть лишь свидетельства в пользу их верности.

Другое дело, равенство значений площади одной и той же поверхности, вычисляемых по разным формулам (39)–(41), это равенство доказано, как теорема.

Пример 17

Найти площадь участка поверхности параболоида, полученного вращением вокруг оси Ox отрезка параболы $y = \sqrt{x}$ для $x \in [0,\, 1]$.

Решение

Первый способ, декартовы координаты, формула (39)

$$S = 2\pi \cdot \int\limits_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left((\sqrt{x})'\right)^2} \cdot dx = 2\pi \cdot \int\limits_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} \cdot dx =$$

$$= 2\pi \cdot \int\limits_0^1 \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}} \cdot dx = \pi \cdot \int\limits_0^1 \sqrt{4x+1} \cdot dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int\limits_0^1 (4x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot d(4x+1) =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left.\frac{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{\pi}{6} \cdot (4x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} \cdot \left(5\sqrt{5} - 1\right) \approx 5.3304135\,.$$

Второй способ, полярные координаты, формула (40)

$$y^2 = x \quad \Longleftrightarrow \quad r^2 \sin^2\varphi = r\cos\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad r = \rho(\varphi) = \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi},$$

$$\rho'(\varphi) = \frac{-\sin\varphi \cdot \sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\sin^4\varphi} = \frac{-\sin\varphi - \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi}{\sin^4\varphi} =$$

$$= \frac{-1 - \cos^2\varphi}{\sin^3\varphi} = \frac{-\cos^2\varphi - 1}{\sin^3\varphi}.$$

На рассматриваемом участке параболы наименьший полярный угол $\alpha = \pi/4$ имеет точка $x = y = 1$. При $x \to +0$ точка с координатами $(x, \sqrt{x})$ имеет полярный угол, стремящийся к величине $\beta = \pi/2$.

$$S = 2\pi \cdot \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \rho(\varphi)\sin\varphi \cdot \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} \cdot d\varphi =$$

$$= 2\pi \cdot \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \cdot \sin\varphi \cdot \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\sin^4\varphi} + \frac{(-\cos^2 - 1\varphi)^2}{\sin^6\varphi}} \cdot d\varphi =$$

$$= 2\pi \cdot \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi + \cos^4\varphi + 2\cos^2\varphi + 1}{\sin^6\varphi}} \cdot d\varphi =$$

$$= 2\pi \cdot \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2\varphi + 1 + 2\cos^2\varphi}{\sin^6\varphi}} \cdot d\varphi =$$

$$= 2\pi \cdot \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot (1 - \sin^2\varphi) + 1}{\sin^2\varphi \cdot \sin^4\varphi}} \cdot d\varphi =$$

$$= 2\pi \cdot \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \cdot \sqrt{\frac{4 - 3\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}} \cdot \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} =$$

$$= -2\pi \cdot \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg}\varphi \cdot \sqrt{\frac{4}{\sin^2\varphi} - 3} \cdot \frac{-1}{\sin^2\varphi} \cdot d\varphi =$$

$$= -2\pi \cdot \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg}\varphi \cdot \sqrt{4\,(1+\operatorname{ctg}^2\varphi)-3} \cdot d(\operatorname{ctg}\varphi) =$$

$$= \boxed{\begin{array}{c} z = \operatorname{ctg}\varphi \\ \varphi = \pi/4 \implies z = 1 \\ \varphi = \pi/2 \implies z = 0 \end{array}} = -2\pi \cdot \int\limits_{1}^{0} z \cdot \sqrt{1+(2z)^2} \cdot dz =$$

$$= +2\pi \cdot \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+4z^2} \cdot z \cdot dz = 2\pi \cdot \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+4z^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot d(z^2) =$$

$$= 2\pi \cdot \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+4z^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot d(4z^2) = \frac{\pi}{4} \cdot \int\limits_{0}^{1} (4z^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot d(4z^2+1) =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left. \frac{(4z^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^1 = \frac{\pi}{6} \cdot (5 \cdot \sqrt{5} - 1) \approx 5.3304135\,.$$

Значения площади, вычисленные в полярных и в декартовых координатах, совпали, что свидетельствует в пользу верности результатов.

Пример 17

Найти площадь сферы радиуса R.

Решение

Координатную плоскость xOy проведём через центр сферы так, чтобы начало координат – точка O – совпало с центром сферы.

Сечение сферы плоскостью xOy есть окружность радиуса R, уравнение окружности имеет стандартный вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{42}$$

Уравнение (42) имеет два решения относительно переменной y,

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}, \tag{43}$$

причём, требование вещественности переменной y задаёт промежуток изменения переменной x, а именно, $x \in [-R, R]$.

Двe линии (43) симметричны друг другу с осью симметрии Ox, следовательно, вращение каждой из них вокруг оси Ox порождает одну и ту же поверхность вращения – сферу радиуса R.

Первое из решений (43) выбираем в качестве функции $f(x)$ для формулы (39). Итак, $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, согласно (39),

$$S = 2\pi \cdot \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} \cdot dx =$$

$$= 2\pi \cdot \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} \cdot dx = 2\pi R \cdot \int_{-R}^{+R} dx = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

Полученный результат означает, что определение площади сферы, сформулированное в средней школе, и университетское определение площади поверхности вращения не противоречат друг другу.

Определение

Пусть $s\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, и пусть функция $s(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$.
Пусть для тела, протяжённого вдоль оси Ox от $x = a$ до $x = b$, площадь поперечного сечения, перпендикулярного оси Ox, есть $s(x)$, где переменная x есть x–координата точек поперечного сечения.
Тогда объём этого тела есть число

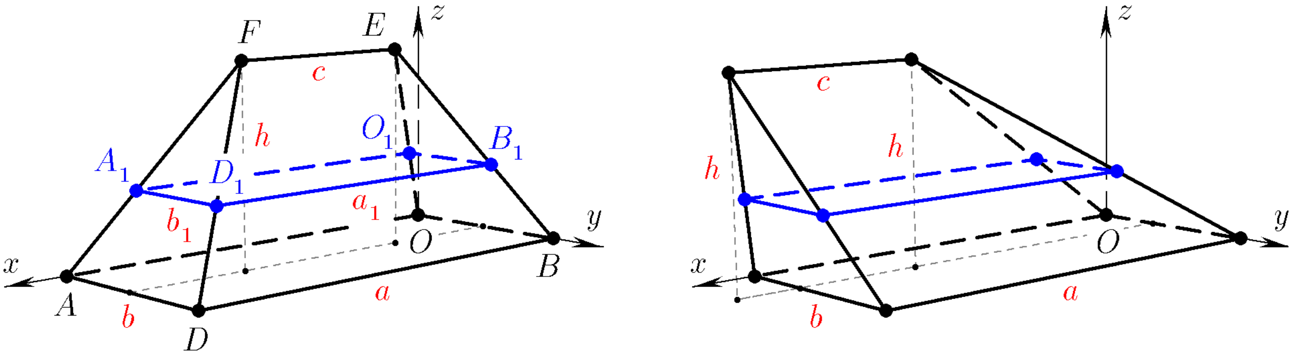
$$V = \int_a^b s(x) \cdot dx\,. \tag{44}$$

Пример 18 (№ 2456 из сборника задач [2])

Найти объём чердака, основание которого есть прямоугольник со сторонами a и b, верхнее ребро равно c, а высота равна h.

Решение

Внешний вид тела показан на Рис. 21. Ясно, что верхнее ребро EF (длиной c) расположено на высоте h над прямоугольным основанием $OADB$, параллельно его сторонам OA и DB (длиной a каждая). Другие две стороны основания, AD и BO, имеют длину b каждая.



(а) (б)

Рис. 21

Проведём на высоте z (где $z \in [0, h]$) над основанием горизонтальную плоскость. Сечение чердака этой плоскостью, прямоугольник $O_1A_1D_1B_1$, имеет стороны a_1 и b_1. Поскольку объём чердака ограничен плоскостями, уравнения которых есть линейные соотношения, длины сторон сечения имеют линейную зависимость от z:

$$a_1 = a \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right) + c \cdot \frac{z}{h}, \qquad b_1 = b \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right).$$

Вычисляем объём чердака по формуле (44), заменяя переменную интегрирования на z:

$$V = \int\limits_0^h s(z) \cdot dz = \int\limits_0^h \left(a \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right) + c \cdot \frac{z}{h}\right) \cdot b \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cdot dz = \frac{bh}{6} \cdot (2a + c).$$

Верность полученного результата подтверждает сайт WolframAlpha.com:

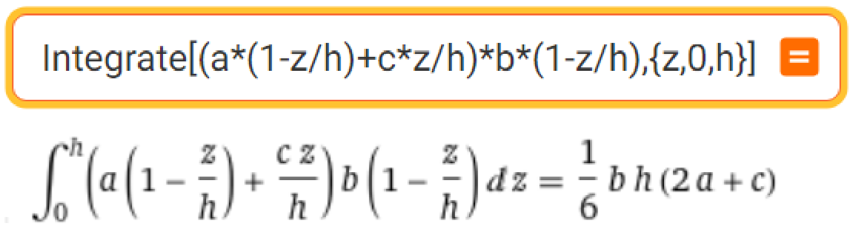


Рис. 22

Отметим, что объём чердака не зависит от того, является он симметричным относительно двух вертикалных плоскостей (Рис. 21(а)) или он "перекошен" (Рис. 21(б)).

Определение

Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, и пусть $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$. Пусть криволинейная трапеция ограничена кривой $y=f(x)$, осью Ox, прямыми $x=a$ и $x=b$.

Тогда объём тела, полученного вращением этой криволинейной трапеции вокруг оси Ox, есть число

$$V=\pi\cdot\int\limits_a^b (f(x))^2\cdot dx\,. \tag{45}$$

Замечание

В некоторых источниках функция обозначается, как $y=y(x)$, а площадь выражается формулой

$$S=\pi\cdot\int\limits_a^b (y(x))^2\cdot dx\,.$$

Замечание

Объёмами тел вращения математики интересовались задолго до появления интегрального исчисления. В частности, Иоганн Кеплер $(1571-1630)$ посвятил этой теме книгу «Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки, с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии».

В частности, для вычисления объёмов "пузатых" бочек Кеплер применял известные уже в то время формулы объёмов усечённых конусов, из которых мысленно составлялась бочка. Такое составление сродни применению формулы трапеций (47) по отношению к интегралу в (45). Разумеется, этот подход давал погрешность, но, выражаясь языком самого Кеплера, погрешность была "нечувствительна".

Пример 19

Найти объём шара радиуса R.

Решение

Координатную плоскость xOy проведём через центр шара так, чтобы начало координат – точка O – совпало с центром шара.

Сечение шара плоскостью xOy есть круг радиуса R, уравнение его границы (окружности) имеет стандартный вид

$$x^2 + y^2 = R^2$$

и два решения относительно переменной y,

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}\,,$$

причём, требование вещественности переменной y задаёт промежуток изменения переменной x, а именно, $x \in [-R, R]$.

В качестве криволинейной трапеции, вращение которой вокруг оси Ox формирует шар, достаточно взять участок плоскости, ограниченный полуокружностью $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (сверху) и прямой $y = 0$ (снизу).

Итак, согласно (34), при $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$,

$$V = \pi \cdot \int\limits_{-R}^{+R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int\limits_{-R}^{+R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi \cdot \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{+R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Полученный результат означает, что определение объёма шара, сформулированное в средней школе, и университетское определение объёма тела вращения не противоречат друг другу.

Пример 20

Найти (самостоятельно) объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox кругового сегмента

$$x^2 + (y + p)^2 \le R^2, \quad y \ge 0\,,$$

где $0 < p < R$, $-\sqrt{R^2 - p^2} \le x \le +\sqrt{R^2 - p^2}$.

Данное тело вращения имеет название "Лимон Кеплера".

Численное интегрирование

Определение

Численным интегрированием принято называть приближённое нахождение определённого интеграла в виде линейной комбинации значений подынтегральной функции в заданных точках промежутка интегрирования.

Определение

Метод прямоугольников (другое название – метод средних) есть приближённое представление определённого интеграла в виде интегральной суммы и использует соотношение

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \underset{h\to 0}{\approx} h\cdot\left(f(\xi_1)+f(\xi_2)+f(\xi_3)+\ \ldots\ +f(\xi_{n-1})+f(\xi_n)\right), \qquad (46)$$

где n – число промежутков равномерного разбиения интервала интегрирования $[a,b]$, $h=\frac{b-a}{n}$ – шаг (и ранг) разбиения, само это разбиение, набор точек $\{x_i\}_{i=0,1,2,\ldots,n}$, $x_i=a+i\cdot h$, в формуле (46) не участвует, $\{\xi_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$, $\xi_i=a+\left(i-\frac{1}{2}\right)\cdot h$, есть набор сигнальных точек, расположенных в середине "своих" промежутков разбиения $[x_{i-1},x_i]$.

Величина

$$R_0=\int\limits_a^b f(x)\,dx-h\cdot\left(f(\xi_1)+f(\xi_2)+f(\xi_3)+\ \ldots\ +f(\xi_{n-1})+f(\xi_n)\right)$$

есть погрешность формулы прямоугольников.

Замечание

Очевидно, что правая часть (46) есть сумма площадей красных прямоугольников (Рис. 1), которыми "подменяется" равная искомому интегралу сумма площадей синих криволинейных трапеций.

Определение

Метод трапеций есть приближённое представление определённого интеграла в виде линейной комбинации

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \underset{h\to 0}{\approx} h\cdot\left(\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ \ldots\ +\right.$$

$$\left.+\,f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right), \qquad (47)$$

где величины n , h , x_i имеют тот же смысл, что и в формуле прямоугольников. "Сигнальные" точки заменены узловыми.

Величина

$$R_1=\int\limits_a^b f(x)\,dx-h\cdot\left(\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ \ldots\ +f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right)$$

есть погрешность формулы трапеций.

Замечание

Правая часть (47) есть сумма площадей прямолинейных трапеций, которыми "подменяется" равная искомому интегралу сумма площадей синих криволинейных трапеций (Рис. 1).

При построении формулы (47) на каждом i–м ($i=1,\,2,\,\ldots\,,\,n$) промежутке разбиения $[x_{i-1}\,,\,x_i]$ функция $y=f(x)$ "подменяется" линейной функцией

$$y=p_1(x)=\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}\cdot f(x_{i-1})+\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\cdot f(x_i)\,,$$

график которой проходит через точки $(x_{i-1}\,,\,f(x_{i-1}))$, $(x_i\,,\,f(x_i))$, а внутри промежутка $(x_{i-1}\,,\,x_i)$ функция $y=p_1(x)$ "мало отклоняется" от функции $y=f(x)$. Интеграл линейной функции берётся точно, он, естественно, равен площади прямолинейной трапеции:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} p_1(x)\,dx=h\cdot\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\,.$$

Определение

Метод Симпсона есть приближённое представление определённого интеграла в виде линейной комбинации

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{h\to 0}{\approx} \frac{h}{3}\cdot\Big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\ldots+ \\ +2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\Big), \qquad (48)$$

где величины n, h, x_i имеют тот же смысл, что и в формуле трапеций. Дополнительное требование: n должно быть чётным числом. Величина

$$R_2=\int_a^b f(x)\,dx-\frac{h}{3}\cdot\Big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\ldots+ \\ +2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\Big)$$

есть погрешность формулы Симпсона.

Замечание

При построении формулы (48) на каждом j–м ($j=1,\,2,\,\ldots,\,\frac{n}{2}$) сдвоенном промежутке разбиения $[x_{2j-2}\,,\,x_{2j}]$ функция $y=f(x)$ "подменяется" квадратичной функцией

$$y=p_2(x)=\frac{(x-x_{2j-1})(x-x_{2j})}{(x_{2j-2}-x_{2j-1})(x_{2j-2}-x_{2j})}\cdot f(x_{2j-2})+ \\ +\frac{(x-x_{2j-2})(x-x_{2j})}{(x_{2j-1}-x_{2j-2})(x_{2j-1}-x_{2j})}\cdot f(x_{2j-1})+\frac{(x-x_{2j-2})(x-x_{2j-1})}{(x_{2j}-x_{2j-2})(x_{2j}-x_{2j-1})}\cdot f(x_{2j}),$$

график которой проходит уже через три точки $(x_{2j-2}\,,\,f(x_{2j-2}))$, $(x_{2j-1}\,,\,f(x_{2j-1}))$, $(x_{2j}\,,\,f(x_{2j}))$, а внутри промежутка $(x_{2j-2}\,,\,x_{2j})$ (при $x\neq x_{2j-1}$) квадратичная функция $y=p_2(x)$, более гибкая, чем линейная функция, "ещё меньше отклоняется" от функции $y=f(x)$. Интеграл квадратичной функции берётся точно:

$$\int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} p_2(x)\,dx=\frac{h}{3}\cdot\Big(f(x_{2j-2})+4f(x_{2j-1})+f(x_{2j})\Big).$$

Замечание

Функцию $p_1(x)$, график которой проходит через две заданные точки, и функцию $p_2(x)$, график которой проходит через три заданные точки, принято называть интерполяционными многочленами (соответственно, первой и второй степени).

Существует и выражение для интерполяционного многочлена произвольной натуральной m–й степени $p_m(x)$, график которого проходит через $m+1$ заданных точек.

Замечание

Формулы (46)–(48) применяются, как правило, для приближённого вычисления "неберущихся" интегралов.

В теории численного интегрирования доказывается, что

$$R_0 \underset{h\to 0}{\approx} \frac{h^2}{24}\cdot\int\limits_a^b f''(x)\,dx\,, \tag{49}$$

$$R_1 \underset{h\to 0}{\approx} -\frac{h^2}{12}\cdot\int\limits_a^b f''(x)\,dx\,, \tag{50}$$

$$R_2 \underset{h\to 0}{\approx} -\frac{h^4}{180}\cdot\int\limits_a^b f''''(x)\,dx\,. \tag{51}$$

Знак примерного равенства означает, что в левой и правой части каждого из соотношений (49)–(51) стоят эквивалентные бесконечно малые при $h\to 0$.

Поскольку на практике более важна оценка абсолютной величины погрешности, чем сама погрешность, во многих источниках знак "минус" в (49)–(51) отбрасывается.

Если функция $f(x)$ известна аналитически, и функция $f''(x)$ непрерывна на промежутке интегрирования $[a,b]$, то, согласно формуле Ньютона–Лейбница,

$$\int\limits_a^b f''(x)\,dx = f'(b)-f'(a)\,. \tag{52}$$

Если функция $f(x)$ известна аналитически, и функция $f''''(x)$ непрерывна на промежутке интегрирования $[a, b]$, то, согласно формуле Ньютона–Лейбница,

$$\int\limits_a^b f''''(x)\,dx = f'''(b) - f'''(a)\,. \tag{53}$$

Если функция $f(x)$ аналитически неизвестна, и представлена только своими узловыми значениями для промежутка $[a, b]$, то для применения формул (52)–(53) придётся использовать численное дифференцирование.

В формулах (49)–(51) участвуют определённые интегралы, которые не зависят от их пользователя. От пользователя зависит величина шага интегрирования h.

Из формул (49)–(50) ясно, что уменьшение h в два раза модуль погрешности формул прямоугольников и трапеций уменьшается примерно в 4 раза. Из формулы (51) ясно, что уменьшение h в два раза модуль погрешности формулы Симпсона уменьшается примерно в 16 раз. Таким образом, погрешность, вроде бы, может стать сколь угодно малой за счёт выбора достаточно малого h.

К сожалению, для "безудержного" убывания шага h есть, как минимум, два препятствия.

Первое: всякое уменьшение h означает увеличение n, то есть, увеличение объёма и времени исполнения вычислительной работы.

Второе, гораздо более серьёзное: увеличение объёма вычислительной работы автоматически означает дополнительное накопление вычислительных ошибок, которые могут превысить чисто теоретическую погрешность численного интегрирования. Вычислительные ошибки порождаются операциями машинного округления. Например, при умножении двух вещественных чисел, каждое из которых занимает в оперативной памяти компьютера 8 байт, результат операции занимает уже 16 байт. Такой результат лишь временно хранится в процессоре, он не может "вместиться" в оперативную память, поэтому производится округление результата до объёма 8 байт, что и означает накопление вычислительной ошибки.

Оценкой вычислительных ошибок занимается раздел математики, имя которому "Вычислительная математика". Этот раздел не входит в рабочую программу дисциплины "Математика" для экономистов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Том 1 — М.: Книга по Требованию, 2013. 608 с.

2. Б.П.Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу – СПб.: Издательство «Лань», 2019. 624 с.

3. А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов. Геометрия. Учебное пособие для 6-8 классов средней школы – М.: «Просвещение», 1979.

4. Ю.А.Лавров. Математический анализ: Пределы и производные – СПб.: СПбПУ, 2021. 36 с. (электронный ресурс)

5. Ю.А.Лавров. Математический анализ: Неопределённый интеграл – СПб.: СПбПУ, 2021. 82 с. (электронный ресурс)