Министерство образования науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

А.Н.Баженов

Естественнонаучные и технические применения интервального анализа.

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2021

УДК 519.9 Р32

А в т о р :

А.Н.Баженов. Естественнонаучные и технические применения интервального анализа. – СПб., 2021. – 83 с.

Учебное пособие соответствует образовательному стандарту высшего образования Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» по направлению подготовки бакалавров 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», по дисциплине «Вычислительные комплексы».

В издании приводятся примеры интервальных величин в науке и технике. Пособие адресовано всем, кто интересуется применением математики к решению практических задач.

Материал апробирован в учебных курсах для студентов СПбПУ и аспирантов первого года обучения ФТИ им. А.Ф.Иоффе РАН.

Оглавление

Введение

Книга предлагает читателю примеры интервальных величин в науке и технике, вводит базовые понятия интервального анализа, даёт представление о различных интервальных арифметиках. Для рассмотренных примеров приведена библиография, которая при необходимости поможет сориентироваться в содержательной стороне приведённых примеров.

Издание задумано как дополнение к курсам лекций автора по интервальному анализу для студентов кафедры «Прикладная математика» Института Прикладной Математики и Механики СПбПУ и аспирантов первого года обучения ФТИ им. А.Ф.Иоффе РАН. В значительной степени тематика этого курса представлена в учебном пособии автора «Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры» [2].

Представленные примеры дополняют фундаментальную монографию С.П.Шарого «Конечномерный интервальный анализ» [24] и коллективный труд А.Н. Баженова, С.И. Жилина, С.И. Кумкова и С.П. Шарого «Обработка и анализ данных с интервальной неопределённостью» [1].

План изложения следующий. Сначала вводятся некоторые определения и обозначения, соответствующие современной нотации интервального анализа. Это сделано для того, чтобы при рассмотрении примеров сразу использовались современные термины и система обозначений.

В первой главе представлены примеры интервальных величин в природе и практике. Глава разбита на несколько частей. Рассмотрены интервальные примеры для изотопов атомов в природе, физических свойств Земли, измерений фундаментальных констант, а также некоторые технические примеры.

Во второй главе рассмотрены некоторые аспекты анализа данных. Они касаются дискретности представления результатов, а также неопределённости во входных и выходных данных.

В третьей главе рассмотрены «неклассические» виды интервалов. Это интервалы, имеющие помимо размера интервалов, ещё и направление, неодносвязные интервалы — мультиинтервалы, а также интервалы с интервальными концами — твины.

Рассмотрим причины, мотивирующие на использование интервалов. Обратимся сначала к практическому опыту. Мы многое оцениваем «сверху» и «снизу». Оцениваем интервалы времени до окончания разговора: «закончим через 5-10 минут». Длина дорожки состаляет «10-20 метров». В помещении можно разместить 5-6 столов.

Перейдем от бытовых оценок с более основательным. Математические мотивации различных интервальных арифметик подробно рассмотрены в книге [24], а сейчас мы затронем некоторые математические понятия, которые нам пригодятся при обсуждении материала.

0.0.1 Некоторые понятия интервального анализа

Забегая вперёд, введём понятие интервала. *Интервалом* вещественной оси $[a, b]$ называется множество всех чисел, расположенных между заданными числами a и b включая их самих, т.е.

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}.$$

При этом a и b называются концами интервала.

Интервальную величину принято обозначать жирным шрифом, например, $\boldsymbol{x}$. Левую границу интервала подчёркивают снизу, а правую — сверху. Границы берутся в квадратные скобки, что передаёт идею интервала как отрезка вещественной оси.

$$\boldsymbol{x} = [\ \underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}\ ].$$

Важнейшими характеристиками интервала являются его *середина* (центр)

$$\mathrm{mid}\ \boldsymbol{a} = \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{a}}),$$

и его *радиус*

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{a} = \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}}).$$

Радиус интервала является мерой абсолютного рассеяния точек интервала. При описании относительной погрешности в интервальном анализе приходится использовать разные меры.

Полезной характеристикой интервала является так называемый функционал Рачека χ:

$$\chi(\boldsymbol{a}) = \begin{cases} \underline{\boldsymbol{a}}/\overline{\boldsymbol{a}}, & \text{если } \ \underline{\boldsymbol{a}} \leq \overline{\boldsymbol{a}}, \\ \overline{\boldsymbol{a}}/\underline{\boldsymbol{a}}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Он характеризует «относительную узость» интервала.

Множество всех интервалов из $\mathbb{R}$ обозначается символом $\mathbb{IR}$. Используемая система обозначений следует неформальному международному стандарту на обозначения в интервальном анализе, выработанному в 2002–2010 годах [33].

Неформально можно сказать так: интервалы предназначены для величин, для которых существуют двусторонние ограничения. Можно также говорить об интервальных оценках.

Важной особенностью интервальной арифметики является учёт неопределёности выполнения арифметических операций. В частности, при при последовательном выполнении сложения и вычитания получается не точно 0, а величина, содержащая 0:

$$[1, 2] - [1, 2] = [-1, 1] \ni 0.$$

Таким образом, производится двустороняя оценка величины результата прямого и обратного действия. Многократное повторение этой операции приводит к увеличению границ результата

$$\sum_{i=1}^{n} ([1, 2] - [1, 2]) = n \cdot [-1, 1].$$

То есть, имеет место эффект нарастания «снежного кома», или «обёртывания». Такое свойство классической интервальной арифметики отражает факт «внешнего» оценивания множества решений задачи.

Помимо наиболее естественного понимания интервала как отрезка вещественной оси, существуют и более сложные конструкции. В частности, очень важна полная интервальная арифметика или арифметика

Каухера. Она обобщает обычную интервальную арифметику на случай, когда у интервала есть «направление». Именно, в этом случае концы интервала не обязательно упорядочены от меньшего к большему. Такое свойство даёт дополнительные возможности, которые мы обсудим далее. Обозначается такая арифметика символом $\mathbb{KR}$.

Символически, можно представить соотношение арифметик следующим образом

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{IR} \subseteq \mathbb{KR}.$$

Если концы интервалов совпадают, имеем обычную вещественную арифметику.

В арифметике Каухера содержательный смысл имеет операция замены порядка следования концов интервала, при которой получается интервал, дуальный исходному:

$$\operatorname{dual} \boldsymbol{a} := [\, \overline{\boldsymbol{a}}, \, \underline{\boldsymbol{a}} \,].$$

В частности, дуализация даёт возможность получать при интервальных операциях точечные значения, или *внутреннюю оценку*:

$$[1, 2] \ominus [1, 2] = 0.$$

Символ $\ominus$ соответствует так называемому *алгебраическому вычитанию.*

Аналогично для деления имеем внешние и внутренние оценки:

$$[1, 2]/[1, 2] = [0.5, 4], \quad [1, 2] \oslash [1, 2] = 1$$

Таким образом, в арифметике Каухера имеются гибкие арифметические возможности оценок: от самых строгих, рассчитанных на наихудший вариант, до локализующих результат. Последнее обстоятельство особенно важно при многократных проведениях однотипных операций и построения итерационных алгоритмов.

Приведём правила умножения в $\mathbb{KR}$ в виде так называемой таблицы Кэли.

Замечательно, что данные в таблице 1 правила верны и для классической интервальной арифметики. Её область ограничена квадратом 3×3 и не включает неправильных интервалов самой нижней строчки и самого правого столбца.

Помимо уже упомянутого, в полной интервальной арифметике всегда имеет содержательный смысл обобщение операции пересечения интервалов, взятие *минимума по включению*, обозначаемому как $\wedge$.

	$\boldsymbol{b} \in P$	$\boldsymbol{b} \in Z$	$\boldsymbol{b} \in -P$	$\boldsymbol{b} \in \mathrm{dual}\ Z$
$\boldsymbol{a} \in P$	$[\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}]$	$[\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}]$
$\boldsymbol{a} \in Z$	$[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[min\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}, max\{\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\underline{b}]$	0
$\boldsymbol{a} \in -P$	$[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$	$[\overline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}]$
$\boldsymbol{a} \in \mathrm{dual}\ Z$	$[\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\underline{b}]$	0	$[\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}]$	$[max\{\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}, min\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}]$

Таблица 1. Интервальное умножение в полной интервальной арифметике

Продемонстрируем этот факт на примере. Найдем пересечение двух пересекающихся интервалов [1, 3] и [2,4]:

$$[1, 3] \cap [2, 4] = \{\max\min\{1, 2\}, \min\max\{3, 4\}\} = [2, 3].$$

Поступим аналогичным образом с непересекающимися интервалами [1, 2] и [3,4], взяв минимум по включению:

$$[1, 2] \wedge [3, 4] = \{\max\min\{1, 3\}, \min\max\{2, 4\}\} = [3, 2].$$

В классической интервальной арифметике этот результат не имеет смысла, а полной имеет: это минимальный интервал, имеющий общие элементы с исходными.

Такая возможность даёт гибкость при неизбежной в экспериментальной практике работе с несовместными данными. *Минимаксный подход*, свойственный полной интервальной арифметике, также обеспечивает и другие важные свойства, см. [24].

0.0.2 Исторические сведения

В завершение неформального введения приведём некоторые исторические сведения.

Неолитические световые сооружения и культовые сооружения Древнего мира учитывают непостоянство положения Солнца в течение года, с тем, чтобы солнечный свет попадал на выбранные в качестве «алтарей» объекты [15].

Античные учёные оставили нам примеры интервальных оценок. Аристарх Самосский, автор первой исторически известной гелиоцентрической системы, в сочинении «О величинах и расстояниях Солнца и Луны» [7] оценил, что отношение радиусов Солнца и Земли составляет больше чем 19 к 3, но меньше, чем 43 к 6. Эту оценку в современных обозначениях можно выразить так:

$$\frac{R_{\odot}}{R_{\text{Земли}}} = \left[\frac{38}{6}, \frac{43}{6}\right].$$

Численно оценка Аристарха очень неточна, но метод её определения и представления правильны.

Трудно переоценить результат Архимеда об определении отношения длины окружности к периметру. Он использовал для оценки отношения длины окружности к диаметру периметры вписанных и описанных 96-угольников [28]. Результат из его работы "$K\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon \quad \mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\eta\sigma\iota\zeta$ (Измерение окружности)":

$$3\tfrac{10}{71} \leq \frac{\pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu.\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}{\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\tau\rho o} \leq 3\tfrac{1}{7}.$$

В сочинении «Псаммит» («Исчисление песчинок») Архимед приводит двустороннюю оценку углового размера Солнца и обсуждает способ получения этой оценки.

Таким образом, мы имеем свидетельства применения интервальных величин, которым более 2 тысяч лет.

О предтечах интервального анализа в XIX веке и о зарождении и развитии его как самостоятельной математической дисциплины достаточно подробно написано в Главе 1 книги С.П.Шарого «Конечномерный интервальный анализ» [24].

Глава 1

Интервальные величины в природе и практике

В первой главе представлены примеры интервальных величин в природе и практике. Глава разбита на несколько частей. Рассмотрены интервальные примеры для изотопов атомов в природе, физических свойств Земли, измерений фундаментальных констант, а также некоторые технические примеры.

Выбор примеров не стремится к представительности и отражает сферу деятельности и вкусы автора.

Совершенно не отражены примеры использования интервалов в промышленности, экономике, социологии и других науках об обществе.

1.1 Атомные веса элементов

Начнём представление интервалов в Природе с наиболее фундаментальной составляющей всего сущего — с атомов.

С 2009 года атомные веса некоторых элементов в периодической системе химических элементов Д.И. Менделеева стали выражаться интервалами [37]. Это событие стало итогом длительного, продолжительностью более полувека, процесса осознания химиками неизбежной и неустранимой изменчивости величины атомных масс элементов в зависимости от того, где и как взята их проба. С середины XX века вместе с развитием измерительной техники и экспериментальных методик постепенно стало ясно, что различие результатов измерений атомных масс в различных пробах веществ носит принципиальный характер.

Дело в том, что почти каждый химический элемент представлен в природе смесью своих изотопов, т. е. разновидностями атомов, сходных по своим химическим свойствам (структуре электронных оболочек), но отличающиеся массой ядер. И относительная доля различных изотопов существенно меняется в зависимости от места и характера взятия пробы. Например, в тканях живых организмов преобладают более лёгкие изотопы химических элементов, нежели в неживой природе. Отличаются друг от друга относительные доли изотопов элементов на суше и в морях и т. п.

В периодической таблице Менделеева, поддерживаемой Международным союзом теоретической и прикладной химии IUPAC приводятся интервальные границы стабильных изотопов химических элементов. Например, для кислорода, имеющего 3 изотопа с атомными массами 16, 17 и 18 на стр. 1858 статьи [37] приводятся данные, часть которых представлена в Табл. 1.1.

Таблица 1.1. Стабильные изотопы кислорода.

Стабильный изотоп	Молярная доля
^{16}O	[0.997 38, 0.997 76]
^{17}O	[0.000 367, 0.000 400]
^{18}O	[0.001 87, 0.002 22]

Компактное представление кислорода в таблице Менделеева выглядит следующим образом.

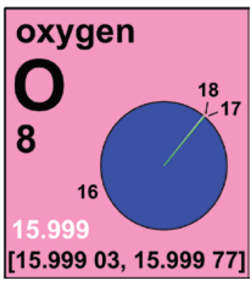

Рис. 1.1. Представление кислорода в таблице Менделеева.

На рисунке 1.1 дано наглядное представление о распространенности изотопов кислорода в природе в форме полярной диаграммы. В нижней строчке приведён интервал атомной массы.

Для каждого стабильного изотопа приведены границы, в пределах которых данный изотоп встречается в различных породах, атмосфере, водной среде в различных местах Земли. Подробные сведения приводятся на рисунках 4.8.1-4.8.3 из работы [37].

Первоначально в 2009 году интервалы атомных весов были назначены для 10 химических элементов, но далее в 2013 и 2016 годах работа по «интервализации» продолжилась, и теперь в периодической таблице Д.И. Менделеева имеется 13 элементов, атомные веса которых выражаются интервалами. Среди них — такие широко распространённые и важные элементы как водород, углерод, азот, кислород, кремний, сера и др. Интервалы дают двусторонние границы значений атомного веса для любой пробы "нормального материала" включающего эти элементы. При этом особо подчёркивается [37], что внутри заданных интервалов не предполагается наличия какого-либо вероятностного распределения.

Например, в случае ртути, известны изотопы с массовыми числами от 170 до 216 (количество протонов 80, нейтронов от 90 до 136). Природная ртуть состоит из смеси 7 стабильных изотопов:

Таблица 1.2. Стабильные изотопы ртути.

Изотоп	Распространённость
^{196}Hg	0,155 %
^{198}Hg	10,04 %
^{199}Hg	16,94 %
^{200}Hg	23,14 %
^{201}Hg	13,17 %
^{202}Hg	29,74 %
^{204}Hg	6,82 %

Приведённые в таблице 1.2 величины распространённости служат исходными данными для построения гистограммы частот. Конкретно для атомов ртути этот рисунок показан на Рис. 1.2.

Относительно характера графика, представленного на Рис. 1.2, следует заметить следующее. Согласно современным представлениям, атомное ядро составляют протоны и нейтроны (нуклоны). Характер

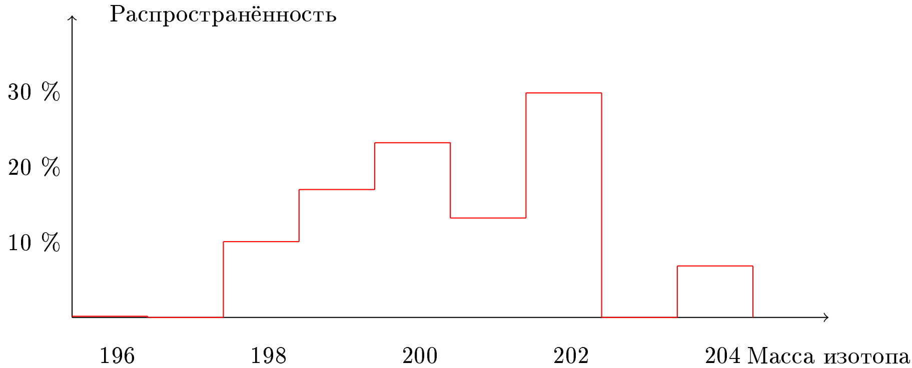

Рис. 1.2. Распространённость изотопов ртути на Земле.

сил, действующих между ними, таков, что для лёгких ядер количества протонов и нейтронов примерно равны, с небольшим преобладанием последних. Число стабильных изотопов при этом невелико. В ядрах тяжёлых элементов нейтронов существенно больше, чем протонов, и количество изотопов может достигать десятков, из которых стабильна небольшая часть. При этом количество стабильных изотопов с чётным количеством нуклонов заметно превышает количество стабильных изотопов с нечётным количеством нуклонов. Для энергетически выгодной конфигурации количества нуклонов существуют и другие закономерности, подобные принципу заполнению электронных оболочек атомов. В целом график распределения стабильных изотопов для данного химического элемента имеет неправильную форму с возможными «пробелами» внутри графика, что в случае ртути имеет место для изотопов с массами 197 и 203.

В публикации [37] предложена расширенная версия периодической системы химических элементов. Авторы пишут: «Периодическая таблица элементов и изотопов (Periodic Table of the Elements and Isotopes — IPTEI) IUPAC (Международный союз теоретической и прикладной химии) была создана для ознакомления студентов, преподавателей и непрофессионалов с существованием и важностью изотопов химических элементов.» Они также предлагают использовать её в качестве наглядного пособия, подобно таблице периодических элементов.

В целом таблица Менделеева выглядит как показано на рисунке 1.3 [37]. Легенда цветового поля каждого элемента дана в таблице.

Цвет фона	Пояснение
красный	элемент имеет два или более стабильных изотопов. Соотношения изотопов различны в различных распространённых материалах. Эти вариации надёжно определены, атомный вес указывается в виде интервала, в квадратных скобках;
жёлтый	элемент имеет два или более стабильных изотопов. Соотношения изотопов различны в различных распространённых материалах. При этом невозможно дать надежные оценки нижних и верхних границ изменений. Атомный вес даётся с неопределённостью, которая включает ошибку измерений и неопределённость вариации изотопных отношений;
голубой	элемент имеет один стабильный изотоп. Атомный вес даётся с неопределённостью, которая включает ошибку измерений.
белый	элемент не имеет стабильных изотопов. в распространённых материалах не содержится в таких количествах, по которым можно дать оценку изотопных отношений.

Таблица 1.3. Обозначения на рис. 1.3.

1.1.1 Изотопная подпись

Представленный выше материал является основой для понимания ряда новых методик исследования неживой и живой природы. В последние несколько десятилетий в науку прочно вошёл новый термин «изотопная подпись».

Википедия определяет изотопную подпись следующим образом [47]. «Изотопная подпись (или изотопная сигнатура) — специфическое соотношение нерадиоактивных «стабильных изотопов» или относительно стабильных радиоактивных изотопов или неустойчивых радиоактивных изотопов определённых химических элементов в исследуемом материале. Соотношения изотопов в образце исследуют при помощи изотопной масс-спектрометрии.»

Вхождение нового термина в научное обращние стало одним из результатов длительной работы представителей различных специальностей: биологов, географов, геологов, палеонтологов. Список можно расширить.

Результатом стала не просто фиксация различных изотопных соот-

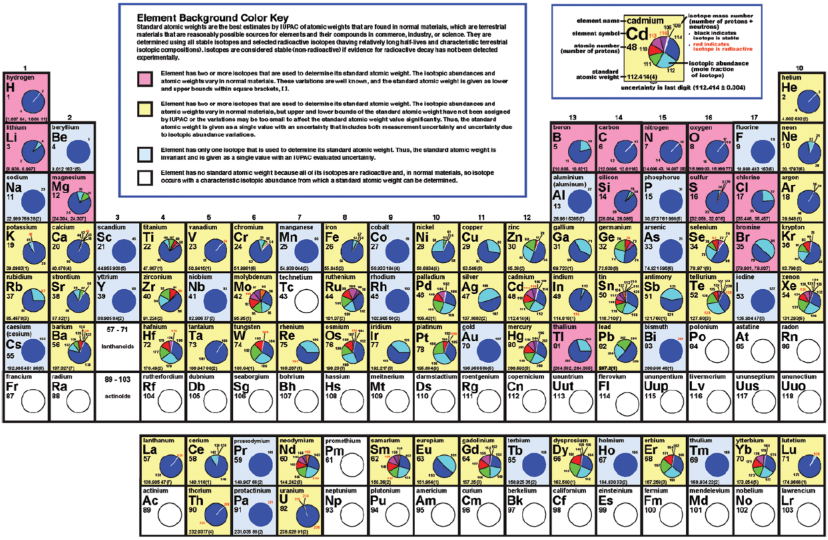

Рис. 1.3. Таблица Менделеева элементов и изотопов [37].

ношений в зависимости от происхождения исследуемого материала, а использования этих соотношений как инструмента исследования.

Например, для кислорода в документе [46] приводятся следующие данные. На рисунке 1.4 приведены вариации атомного веса и изотопного состава ряда материалов, содержащих кислород приведены для атмосферного воздуха, воде, углекислом газе, карбонатах, оксиде азота, других химических соединениях, растениях и животных на Земле.

Подобные данные есть и для других биогенных материалов: водорода, углерода, азота, фосфора. По представленному материалу видно, что изотопные соотношения для биогенных материалов и различные комбинации иотопных соотношений можно использовать для определения происхождения неизвестного вещества, определять среду в которой он формировался, определять, был ли это живой организм или минерал, и многое другое.

В доступном для неспециалиста изложении многочисленные примеры использования изотопных подписей приводятся в книге палеонтолога А.Ю. Журавлёва «Сотворение Земли. Как живые организмы создали наш мир.» [48].

Экологические материалы со ссылками на оргинальные статьи

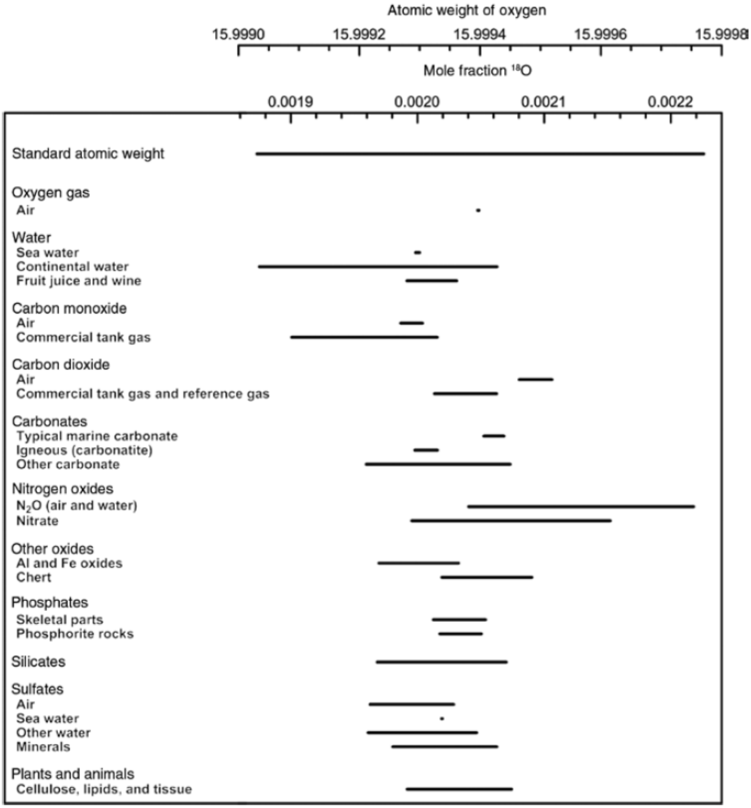

Рис. 1.4. Вариации атомного веса и изотопного состава ряда материалов, содержащих кислород [46] на Земле.

можно найти на сайте elementy.ru [16].

Как правило, дефицит или избыток конкретного изотопа измеряют по отношению к общепринятому стандарту. Например,

$$\delta^{13}C_{\text{sample}} = \left(\frac{^{13}C/^{12}C_{\text{sample}}}{^{13}C/^{12}C_{\text{standard}}} - 1\right) \cdot 1000 \text{ ‰}$$

Используется обозначение $\delta^{\text{mass isotope}}$Element, единицей измерения служит промилле, ‰, одна тысячная доля.

1.1.2 Изотопная ниша

В последние годы в практику вошёл новый термин, «изотопная ниша», относящийся к применению изотопов в биологии. Он конкретизирует широко используемый термин экологическая ниша.

Изотопная ниша — это пространство, занимаемое видом в многомерном пространстве признаков, которые в этом случае являются значениями индексов $\delta^{13}, \delta^{15}N, \delta^{18}O$ и $\delta^{2}H$.

В популярной статье [16] приводятся результаты исследований музейных экспонатов 254 особей 12 видов птиц, оригинальная публикация [43]. Группа водяных печников распространена в Южной Америке, где разные виды населяют диапазон высот от 0 до 5000 м над уровнем моря.

Рис. 1.5. Слева — ареалы 12 видов водяных печников (Cincloides). [43].

Фракционирование углерода происходит в природе разными путями. В частности, при фотосинтезе возможны 3 основных варианта:

Было определено соотношение тяжелых и легких изотопов углерода, азота, кислорода и водорода в перьях птиц. Птицы меняют перья во время линьки, обычно приуроченной к определенному периоду года и длящейся 1–2 месяца. Поэтому изотопный состав перьев может рассказать о том, чем птица в это время питалась.

Таблица 1.4. Отношение $\delta^{13}C$ для разных механизмов фотосинтеза.

Тип фотосинтеза	$\delta^{13}C$	Пример
C_4	[-16, -10]	зерно
CAM	[-20, -10]	фрукты
C_3	[-33, 24]	бобовые

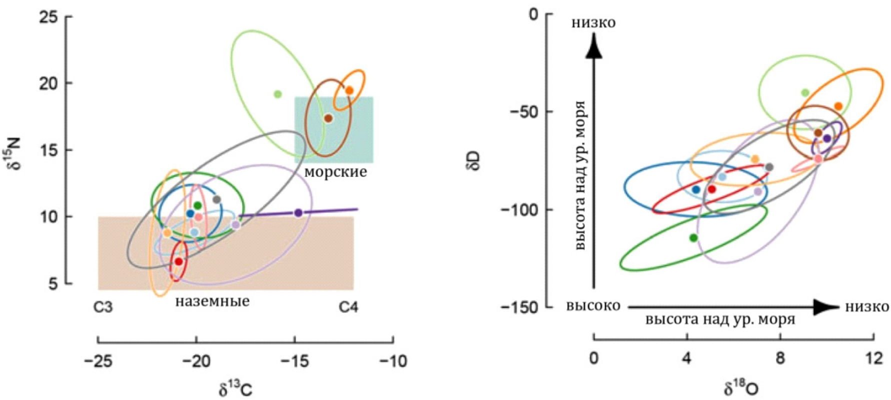

Рис. 1.6. Изотопные ниши различных видов птиц по углероду и азоту (слева) и по кислороду и водороду (справа) [43].

Изотопная ниша по углероду и азоту в какой-то степени является нишей трофической, так как характеризует питание. А ниша по кислороду и водороду — пространственная, так как зависит от местообитания (ведь изотопный состав воды — поставщика этих элементов — различается в разных местах). Чем шире изотопная ниша по углероду и азоту (то есть больше площадь соответствующего эллипса), тем больший спектр кормов потребляет данное животное, тем шире его трофическая ниша.

Аналогично, чем больше площадь эллипса по кислороду и водороду, тем в более широком спектре местообитаний можно найти особей этого вида. Оказалось, что ширина ниши (то есть площадь эллипса) по углероду и азоту, с одной стороны, и по кислороду и водороду, с другой, положительно связаны между собой.

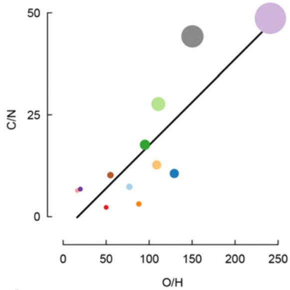

Рис. 1.7. Взаимосвязь ширины изотопной ниши по углероду и азоту (C/N) и по кислороду и водороду (O/H) для 12 видов водяных печников. Ширина ниши данного вида — это площадь соответствующего эллипса на рис. 1.6 [43].

1.1.3 Изотопные ландшафты

Изотопные ландшафты (Isoscapes) — это географические карты, в легенду которых входит содержание тех или иных изотопов. На карту могут быть нанесены результаты измерений или моделирования.

Приведём примеры из публикации [30]. Для изотопа $\delta^{15}N$ в растениях данные представлены на рисунке 1.8 и для изотопа $\delta^{18}O$ в морской воде — на рисунке 1.9.

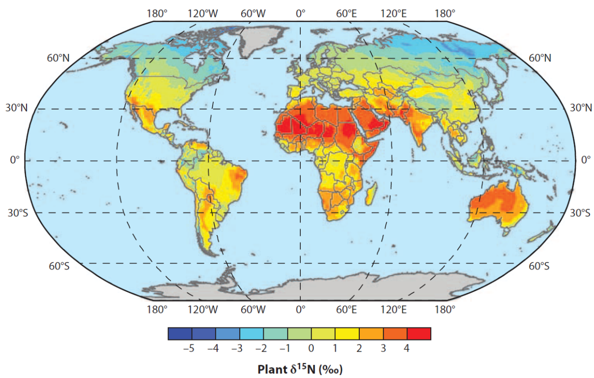

Рис. 1.8. Изотопное отношение для $\delta^{15}N$ в растениях [30].

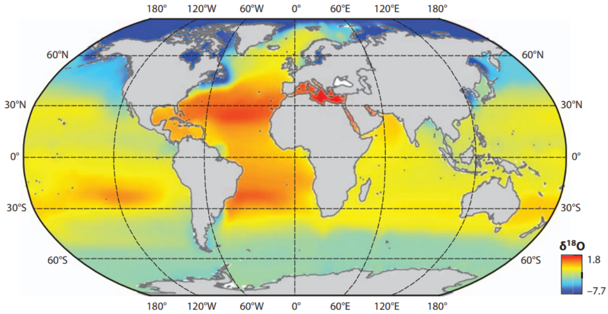

Рис. 1.9. Изотопное отношение для $\delta^{18}O$ в морской воде [30].

Изотопные интервалы в природе. Развитие изотопного анализа в последние несколько десятилетий обогатило исследователей различными возможностями. Многие науки и отрасли деятельности человека существенно изменились. Появилась возможность получать принципиально новые виды информации, строить новые логические связи между явлениями. Появились новые понятия и концепции. С получением новых данных идёт обогащение идеями, ставятся новые вопросы.

При этом математика помогает описывать данные с интервальной неопределённостью и работать с интревальнозначными величинами. Принципиальныю новым шагом стало введение IUPAC интервальных границ стабильных изотопов химических элементов в периодической системе. Увеличение числа исследований в естественных науках неизбежно потребует и развития математических методов для эффективной работы с данными.

1.2 Физические свойства Земли

Физические свойства Земли являются примером интервальной неопределённости данных. Для такого крупного объекта, как планета, трудно привести характеристику, которая имела бы точечный характер. С учётом непрерывной геологической эволюции Земли, все её параметры имеют интервальный характер.

В учебнике «Earth as an evolving planetary system» [32] приводятся значения скорости звука в различных геологических структурах Земли, с указанием диапазонов глубин от поверхности планеты для совре-

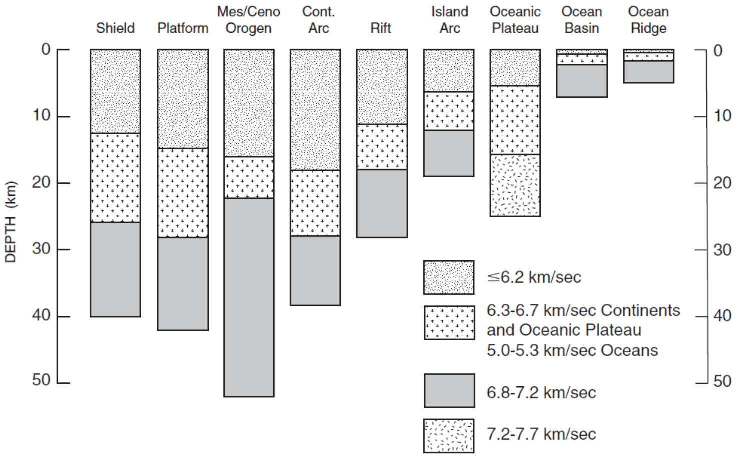

FIGURE 2.3 Seismic refraction sections of various crustal types. Ceno, Cenozoic; Mes, Mesozoic; cont., continental. Velocities are P-wave velocities.

Рис. 1.10. Скорости звука в различных геологических структурах Земли [32].

менной геологической эпохи.

В легенде столбчатой диаграммы, приведенной на рисунке 1.10, даны интервальные оценки скорости звука. Например, для континентальных и океанических плато скорость звука для P-волн составляет $[6.3, 6.7]$ км/с.

1.3 Измерение фундаментальных констант

Измерение фундаментальных констант и интервалы?! Объединение в одной смысловой конструкции фундаментальных сущностей и неопределённостей, возможно, выглядит странно. Однако, это впечатление ошибочно. Измерения многих фундаментальных величин с последовательным улучшением точности длятся несколько сотен лет. При этом в последние десятилетия, в связи с развитием методов измерений, достижимая статистическая точность существенно увеличилась. Во многих случаях, измерения проводились и проводятся различными научными коллективами независимо друг от друга. В ряде случаев, измерения проводил один и тот же коллектив, но разными методами.

Следует оговориться, что ряд физических констант измерен с очень высокой точностью. В первую очередь это относится к измерениям электрических величин и частот.

Общая тенденция такова: при повышении статистической точности увеличивается несовместность результатов. Наиболее вероятной причиной расхождения результов является недооценка систематических погрешностей, и как раз оценка таких погрешностей наиболее сложна.

Далее мы рассмотрим несколько примеров трудных экспериментов. Методическое обсуждение математической стороны вопроса содержится в книге [1].

1.3.1 Гравитационная постоянная

Одной из самых известных и самых важных физических констант является гравитационная константа G, которая фигурирует в законе всемирного тяготения. История её измерений продолжается уже более двух столетий, и её результаты нетривиальны для интерпретации. Доступное неспециалисту описание измерений можно найти в публикации [53]. Также в ней содержится обсуждение ситуации с несовместностью результатов различных измерений.

По мере развития экспериментальных методик, точность измерений постепенно повышается. Однако получающиеся интервалы значений гравитационной константы не пересекаются друг с другом.

Конкретные числовые данные и ссылки на источники их получения читатель может найти в [44], [41]. В работе [41] гравитационная константа измеряется двумя методами, при этом измерения несовместны.

1.3.2 Время жизни нейтрона

Нейтрон — тяжёлая элементарная частица, не имеющая электрического заряда. Нейтроны и протоны являются двумя главными компонентами атомных ядер; общее название для протонов и нейтронов — нуклоны.

Считается надёжно установленным, что нейтрон является связанным состоянием трёх кварков: одного «верхнего» (u) и двух «нижних» (d) кварков (кварковая структура udd). Близость значений масс протона и нейтрона обусловлена свойством приближённой изотопической инвариантности: в протоне (кварковая структура uud) один d-кварк

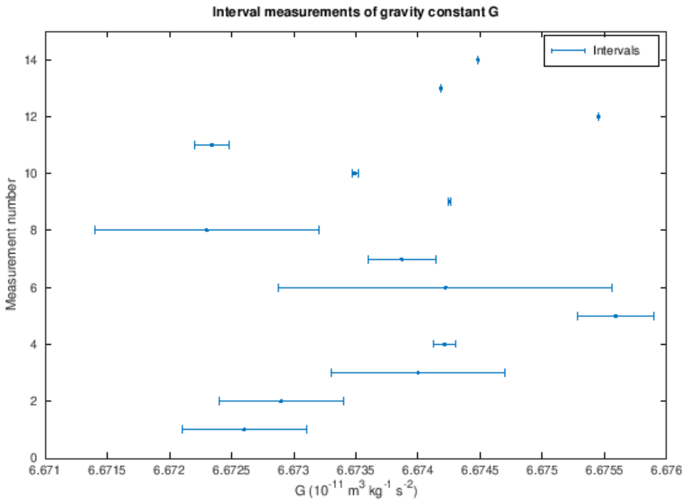

Рис. 1.11. Данные по измерению гравитационной постоянной G.

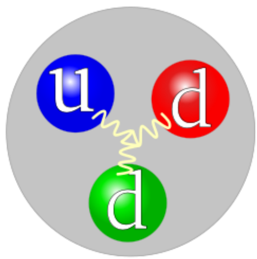

Рис. 1.12. Кварковая структура нейтрона

.

заменяется на u-кварк, но поскольку массы этих кварков очень близки, такая замена слабо сказывается на массе составной частицы. Про кварковую модель и трудности измерения массы одного из кварков можно прочитать на интернет-источнике [49]. На этом же сайте находится страница по текущей теме [50].

Поскольку нейтрон тяжелее протона (на 0,001 388 449 33(49) а.е.м.), то он может распадаться в свободном состоянии. Бета-распад нейтрона — спонтанное превращение свободного нейтрона в протон с излучением

β-частицы (электрона) и электронного антинейтрино:

$$n \to p + e^- + \overline{\nu}_e$$

Диаграмма Фейнмана для бета-распада нейтрона на протон, электрон и электронное антинейтрино при участии виртуального тяжёлого W^--бозона приведена на рисунке 1.13. На рисунке 1.13 вертикальной стрел-

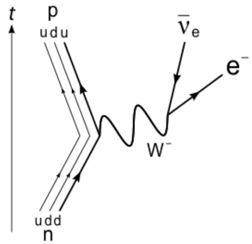

Рис. 1.13. Бета-распад нейтрона

.

кой показано направление хода времени. У основания стрелки представлено обозначение начальной частицы — нейтрона и его кварковой структуры. В верхней части диаграммы — конечные продукты реакции. Горизонтальной волнистой линией обозначена виртуальная частица — W^--бозон, которая не регистрируется экспериментально.

Популярное описание истории измерений времени жизни нейтрона содержатся в публикации [53] 2013 года.

Организация Particle Data Group (PDG) — международная коллаборация, которая занимается сверкой и представлением данных о физике частиц и публикует обзоры Review of Particle Physics. В отчете 2012 года [52] приводится интересная иллюстрация того, как изменялись со временем как точность, так и значения времени жизни нейтрона.

В публикации 2019 года [54] приводятся ссылки на результаты последних лет.

Большинство измерений, приведенных в таблице, использует технику хранения ультрахолодных нейтронов в замкнутом объёме. Два последних результата выполнено с использованием магнито-гравитационной ловушки.

В последние годы активно обсуждается вопрос о возможности недоучёта систематических погрешностей в «ловушечных» экспериментах

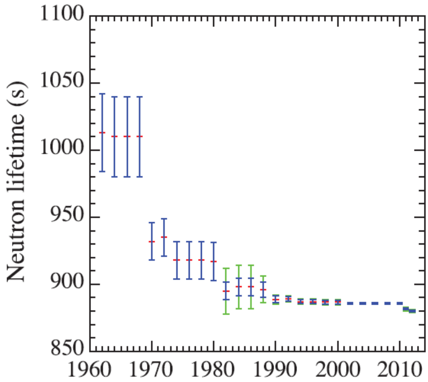

Рис. 1.14. Время жизни нейтрона — история измерений до 2013 года

.

Среднее ±стат. погрешность ± сист. погрешность	Ссылка
918 ± 14	[55]
903 ± 13	[56]
891 ± 9	[57]
881.1 ± 3.1 ± 1.1	[58]
887.4 ± 1.7	[59]
881.0 ± 3.0	[60]
880.7 ± 1.3 ± 1.2	[61]
882.5 ± 2.1	[62]
881.6 ± 0.8 ± 1.9	[63]
880.2 ± 1.2	[64]
881.5 ± 0.7 ± 0.6	[65]
878.3 ± 1.6 ± 1.0	[66]
877.7 ± 0.7 ± 0.4	[67]

Таблица 1.5. Сводка результатов экспериментов по измерению времени жизни нейтрона.

и необходимости новых экспериментов без взаимодействия нейтронов с поверхностями.

На рисунке 1.15 приводится график из публикации 2018 года [68] с критическим анализом вопроса и обширной библиографией. Выделены

Atoms **2018**, *6*, 70 — 16 of 19

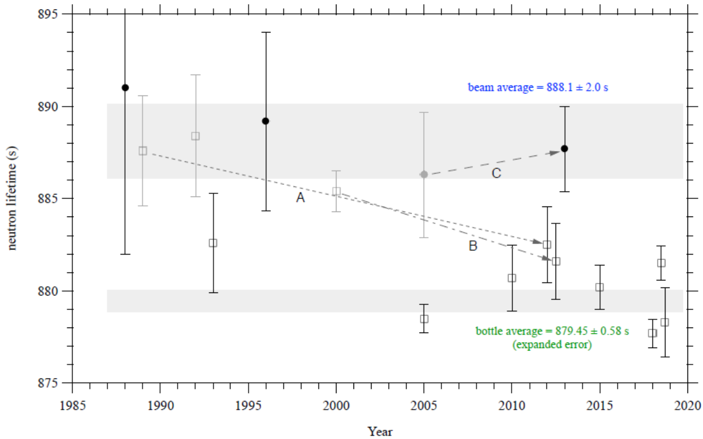

Figure 8. A summary of neutron lifetime experimental measurements since 1985. Details of individual measurements can be found in [23,25,26,35–37,39,40,43,44,46,48–50,60,61]. Solid circles are the beam method and open squares are the UCN storage method. Gray points are measurements withdrawn or superceded by later work (old and new indicated by arrows). The shaded bars are weighted averages ± 1 standard deviation of uncertainty. The UCN storage uncertainty is expanded (see text). The difference between the beam and storage averages is 8.7 ± 2.1 s ($4.1\ \sigma$).

Рис. 1.15. Время жизни нейтрона — обсуждение в публикации [68]. Стрелками показаны изменения результатов после публикаций.

два коридора данных по времени жизни нейтрона: по времяпролетных экспериментов — в верхней части рисунка, и по хранению нейтронов — внизу. Отмечается значимое и устойчивое расхождение между данными разных типов.

$$T_n = \begin{cases} 888.1 \pm 2.0 \text{ s} & \text{— на пучках,} \\ 879.45 \pm 0.58 \text{ s} & \text{— в ловушках.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Разница значений времени жизни нейтрона в экспериментах на пучках и в ловушках составляет

$$\Delta T_n = 8.7 \pm 2.1 \text{ s} \tag{1.2}$$

Таким образом, существует значимое расхождение результатов, полученных с использованием разных методик, требующее критического анализа и дальнейших исследований.

1.3.3 Масса t-кварка

Кварк — фундаментальная частица в Стандартной модели, обладающая электрическим зарядом, кратным $e/3$, и не наблюдаемая в свободном состоянии, но входящая в состав адронов (сильно взаимодействующих частиц, таких как протоны и нейтроны). Кварки являются бесструктурными, точечными частицами; это проверено вплоть до масштаба примерно 10^{-16} см^3, что примерно в тысячу раз меньше размера протона. В настоящее время известно 6 разных «сортов» кварков. Каждому кварку соответствует антикварк — античастица с противоположными квантовыми числами.

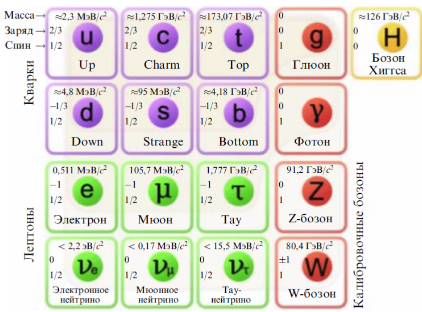

Рис. 1.16. Таблица элементарных частиц стандартной модели [71]

.

t-кварк (сокращение от топ-кварк, англ. top quark или истинный кварк англ. truth quark) является наиболее массивным среди всех частиц Стандартной Модели; его масса близка к массе ядра рения [69]. Время жизни t-кварка составляет около 5×10^{-25} секунды, что на порядок меньше стандартного времени сильного взаимодействия.

Непосредственное измерение свойств кварков невозможно — они наблюдаются только в составе адронов. На ускорителях при столкновении протонов высокой энергии ведется поиск процессов типа аннигиляции пары «частица-античастица»

$$p + \overline{p} \to t + \overline{t} \to \text{ различные частицы}$$

и по кинематике продуктов распада восстанавливаются свойства исходных частиц.

Изучение свойств t-кварка представляет сложную экспериментальную работу, которая ведётся несколько десятков лет.

Непосредственно в эксперименте масса кварка не измеряется, её значение устанавливается в результате обработки экспериментов. Например, в *методе шаблонов* используются распределения плотности вероятности, связанных с массой t-кварка кинематических наюлюдаемых, которые называются шаблонами. Для получения шаблонов используются результаты моделирования событий методом Монте-Карло, их параметрами являются как сама величина m_t, так и другие параметры реакции [71].

В отчете Particle Data Group (PDG) 2019 года [72] приводится обзор экспериментов по измерению массы t-кварка.

Среднее ±стат. погрешность ± сист. погрешность	Ссылка
$172.08 \pm 0.25 \pm 0.41$	[74]
$172.44 \pm 0.13 \pm 0.47$	[75]
$172.35 \pm 0.16 \pm 0.48$	[75]
$172.34 \pm 0.20 \pm 0.70$	[76]
$173.72 \pm 0.55 \pm 1.01$	[77]
$172.25 \pm 0.08 \pm 0.62$	[78]
$174.30 \pm 0.35 \pm 0.54$	[79]
$173.34 \pm 0.27 \pm 0.71$	[80]

Таблица 1.6. Сводка экспериментов по измерению массы t-кварка [72], Table 67.1.

В обзоре [73] содержатся ссылки на более ранние эксперименты.

На рисунке 1.17 графически представлены результаты измерений. Жирные линии показывают статистические ошибки, тонкие — систематические погрешности.

1.3.4 Масса нейтрино

Нейтрино — одна из самых загадочных элементарных частиц. Несмотря на то, непосредственно её зарегистрировать очень сложно, свойства нейтрино очень важны. Причём вклад этой частцы в физические процессы простирается от элементарных ядерных реакций, таких

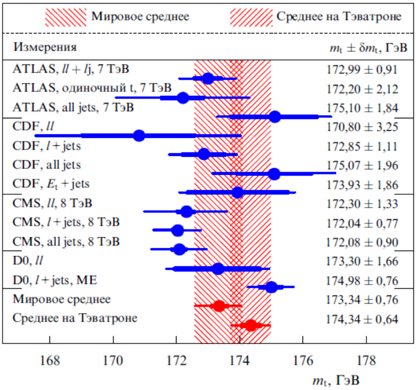

Рис. 1.17. Сводка результатов измерений, сгруппированных по местам проведения экспериментов, рис.12, по табл. 2 [71]. Жирные линии показывают статистические ошибки, тонкие — систематические погрешности

.

как распад нейтрона, до космологических масштабов. В рамках гипотезы Большого взрыва, число нейтрино во Вселенной на много порядков превосходит число нуклонов.

Масса — одна из важнейших характеристик элементарных частиц. Массы некоторых элементарных частиц определены с рекордной точностью. Но масса самой легкой из них — нейтрино точно не определена, несмотря на более чем полувековую историю измерений.

В 1914 году Чедвик [81] обнаружил, что спектр электронов, образующихся при бета-распаде, непрерывен, а не дискретен, как предсказывает квантовая механика. Долгие годы это было неразрешимой проблемой. В 1933 году Паули [82] для спасения закона сохранения энергии предположил, что вместе с электроном испускается нейтральная частица малой массы. Вскоре после этого Ферми [83] построил теорию бета-распада. Он также ввёл название частицы «нейтрино» (по итальянски — «нейтрончик»).

Согласно теории Ферми, спектр электронов в бета-распаде имеет вид:

$$N(E_e) \sim p_e E_e (E_0 - E_e)^2 \sqrt{1 - \frac{m_\nu^2 c^4}{(E_0 - E_e)^2}} \tag{1.3}$$

здесь p_e, E_e — импульс и энергия электрона, E_0 — энергия распада, m_ν — масса нейтрино. При $m_\nu \neq 0$, график спектра круто обрывается на расстоянии $m_\nu c^2$ от значения E_0.

Если $m_\nu = 0$, выражение (1.3) упрощается:

$$N(E_e) \sim p_e E_e (E_0 - E_e)^2 \tag{1.4}$$

В таком случае с ростом E_e спектр электронов асимптотически приближается к нулю.

Ферми предложил использовать исследование края спектра электронов для определения массы нейтрино.

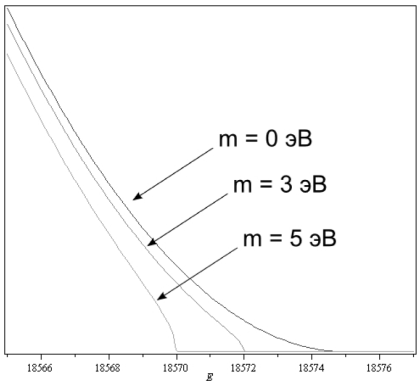

Рис. 1.18. Расчетный спектр электронов вблизи граничной энергии в бета-распаде ядра при разных массах нейтрино.

Для экспериментального исследования в большом количестве экспериментов используется в качестве исходного ядра тритий. Тритий имеет удобный период полураспада $T_{1/2} = 12.32 \pm 0.02$ года. Энергия реакции составляет 18.59 кэВ. Виду малого заряда трития, для него возможны надежные количественные расчеты атомных и молекулярных состояний. Реакция распада трития имеет следующий вид:

$$^3_1H \rightarrow ^3_2 He^{1+} + e^- + \tilde{\nu}_e. \tag{1.5}$$

Верхний и нижний индекс у нуклонов означают массу и заряд.

Идея Ферми выглядит простой, но реальный эксперимент и его интерпретация очень сложны. В частности, аппроксимация функции (1.3) по экспериментальным точкам даёт отрицательное значение квадрата массы нейтрино:

$$m_\nu^2 \leq 0.$$

При анализе измерений формы β-спектра оказалось, что значительная его часть описывается теоретическим спектром с массой нейтрино, равной нулю, кроме самого конца спектра. Здесь наблюдается некая структура в виде избыточной интенсивности, сдвинутая относительно граничной точки на 5-15 эВ в сторону низких энергий [91].

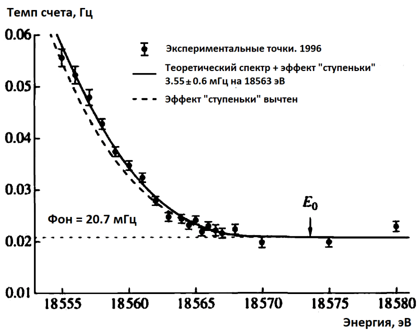

Рис. 1.19. Пример экспериментального спектра электронов [91].

Кроме того, в течение нескольких лет наблюдалась зависимость положения ступеньки от времени года с основным полугодовым периодом [91].

В таблице 1.7 даны основные вехи в измерении массы нейтрино за последние 70 лет. Ключевой фигурой в развитии методики и получении наиболее точных результатов многие годы являлся советский и российский учёный В.М. Лобашев (1934-2011). Популярно об этом учёном можно почитать в одной из глав книги [26].

Схема эксперимента, предложенная в 1983 году В.М.Лобашевым и П.Е.Спиваком [85], легла в основу наиболее точных экспериментов в Троицке и Майнце. На сайте проекта «Троицк ню-масс» в ИЯИ РАН [86] имеются ссылки на десятки работ, опубликованных коллективом.

В конце 1990-х, в связи с исчерпанием потенциала установки «Троицк ню-масс», группа В.М. Лобашева приступила к разработке проекта, получившего позднее название КАТРИН [100], и вошла в первоначальный состав участников, который был сформирован в 2001 году.

Год	Результат	Ссылка
1949	$m_\nu \leq 1000\ \frac{eV}{c^2}$	[84]
1972	$m_\nu \leq 55\ \frac{eV}{c^2}$	[87]
1980	$14 \leq m_\nu \leq 46\ \frac{eV}{c^2}$	[88]
1987	$m_\nu \leq 32\ \frac{eV}{c^2}$	[89]
1988	$m_\nu \leq 27\ \frac{eV}{c^2}$	[90]
1991	$m_\nu^2 = -39 \pm 34 \pm 15, \frac{eV^2}{c^4}$	[93]
1995	$m_\nu^2 = -22 \pm 4.8, \frac{eV^2}{c^4}$	[94]
1999	$m_\nu^2 = -3.7 \pm 5.3 \pm 2.1, \frac{eV^2}{c^4}$	[95]
2003	$m_\nu^2 = -2.3 \pm 2.5 \pm 2.0, \frac{eV^2}{c^4}$	[97]
2010	$m_\nu^2 = -0.67 \pm 1.89 \pm 1.68, \frac{eV^2}{c^4}$	[99]
2019	$m_\nu^2 = -1.0^{+0.9}_{-1.1}, \frac{eV^2}{c^4}$	[101]

Таблица 1.7. Сводка экспериментов по измерению массы $\tilde{\nu}_e$.

Сейчас коллектив включает примерно 150 исследователей из 20 институтов 7 стран.

В диссертации [92] и многих публикациях, приведенных на сайте `http://mass.inr.ru/` [86], приводятся детали обработки эксперимента. Методические приёмы обработки спектров и данных использовались в также работе группы в Майнце и продолжают использоваться и сейчас в проекте КАТРИН.

В 2019 году коллектив КАТРИН опубликовал новый результат [101]:

$$m_\nu^2 = -1.0^{+0.9}_{-1.1}\ \frac{eV^2}{c^4}.$$

Работа проекта продолжается, каждый год публикуются препринты и статьи по тематике эксперимента [102].

1.4 В технике

1.4.1 Система допусков и посадок

Согласно Википедии [9], «Допуск (машиностроение) — это разница между наибольшим и наименьшим (плюс-минус) предельными значениями параметров отклонения от заданных параметров (номинальных размеров, массовой доли, массы), задаётся на геометрические размеры деталей, механические, физические и химические свойства. Назначается исходя из технологической точности или требований к изделию (продукту). Любое значение параметра, оказывающееся в заданном интервале, является допустимым.»

Таким образом, система допусков, сложившаяся в машиностроении, трактует любое значение параметра, оказывающееся в заданном интервале, как допустимое, и не делает между ними различия.

«Посадка — характер соединения сопрягаемых деталей, определяемый зазором или натягом, то есть разностью их размеров до сборки в соответствии с назначенным допуском. Система допусков и посадок существует в двух вариантах:
система вала — основным размером является размер вала, а размер отверстия выбирается с различным зазором или натягом;
система отверстия — основным размером является размер отверстия, а размер вала задаётся с необходимым зазором или натягом [18].»

Обозначения:

- Допуск IT = International tolerance;
- Верхние и нижние отклонения, ES = Ecart Superieur, EI = Ecart Interieur;
- Для отверстий большие буквы (ES, D), для валов малые (es, d).

Приведем пример из практики конструирования изделий. На рисунке 1.21 представлен пример расчета допусков механического изделия.

Большими русскими буквами даны размеры деталей: А1, ..., Ж6. Расчетные значения длин и зазоров между деталями даны как : ΔА, ..., ΔЖ.

Расчет зазоров производится с учётом максимально допустимых верхних и нижних отклонений от номинального. В общем случае, эти отклонения не симметричны. Например, для длины выступа вала за пределы корпуса Б1 даётся только допуск «вверх»:

$$\text{Б1 } 21^{+0.21}.$$

1.4.2 Электронные компоненты и схемотехника

Номиналы промышленно выпускаемых электронных компонентов (сопротивление резисторов, ёмкость конденсаторов, индуктивность небольших катушек индуктивности) не являются произвольными.

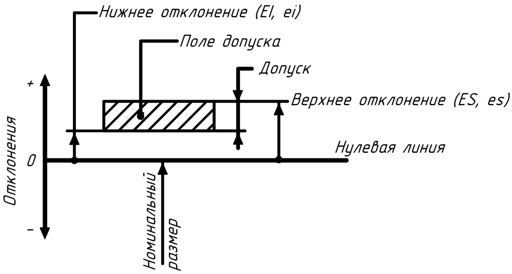

Рис. 1.20. Обозначения допусков. Схема поля допуска на отверстие. По чертежу — 4 мм, предельные размеры — 4,1—4,5. В данном случае поле допуска не пересекает нулевую линию, так как оба предельных размера выше номинального.

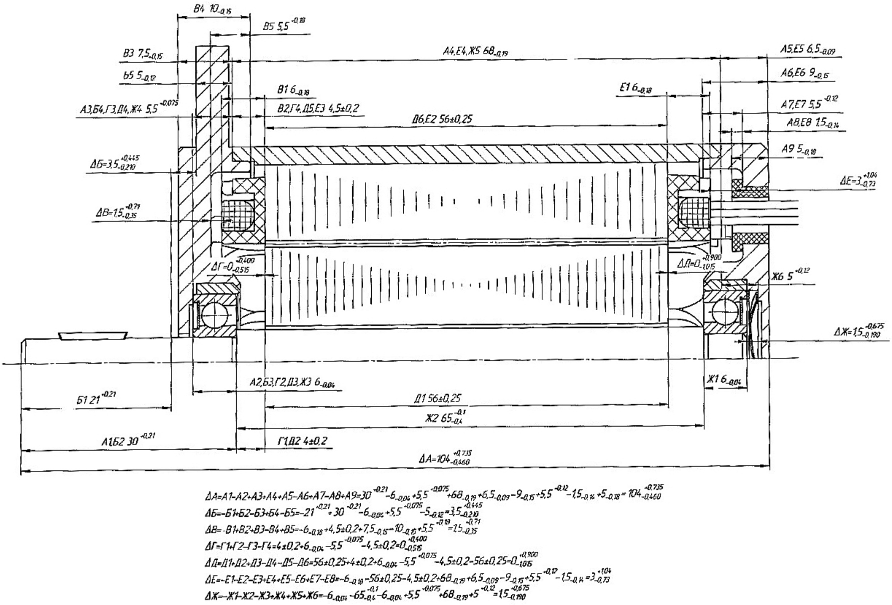

Рис. 1.21. Пример расчета геометрических допусков изделия.

Каждый ряд соответствует определённому допуску в номиналах деталей. Так, детали из ряда E6 имеют допустимое отклонение от номинала ±20%, из ряда E12 — ±10%, из ряда E24 — ±5%. Ряды устроены таким образом, что следующее значение отличается от предыдущего чуть меньше, чем на двойной допуск. Ряды простираются до точности ±0.1%.

Таким образом, при установке в электрической схеме электронных компонентов компонент различной точности, разброс рабочих параметров будет различным.

Например, в схеме с использованием операционного усилителя, коэффициент усиления K равен

$$K = -\frac{R_f}{R_{in}}, \tag{1.6}$$

где R_f, R_{in} — номиналы резисторов.

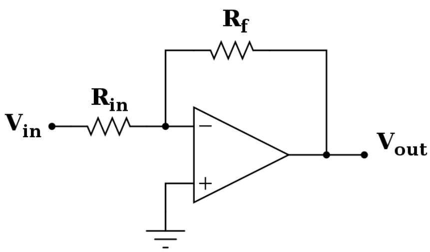

Рис. 1.22. Схема инвертирующего усилителя.

В таблице приведены величины сопротивлений и коэффициент усиления.

Допуск	20%	1%
R_{in}	[0.9, 1.1]	[0.995, 1.005]
R_f	[1.8, 2.2]	[1.99, 2.01]
$-K$	[1.6363, 2.4445]	[1.98, 2.02]

Более сложные примеры использования интервалов содержится в анализе устойчивости электрических схем [29].

1.4.3 Судовождение

Для построения систем автоматического управления движением судна, среди прочего, необходимо учитывать различные геометрические размеры.

В учебнике «Системы автоматического управления движением судна» [6] в главе «Корпус судна как элемент управляемой системы» рассматриваются геометрические характеристики корпуса и их влияние на управляемость судна.

Форма подводной части корпуса характеризуется размерными и безразмерными величинами. Главные размеры подводной части: длина между перпендикулярами (L), ширина на миделе (B), средняя осадка (T). Основными безразмерными параметрами являются отношения L/B и B/T, и коэффициенты полноты δ: общей – δ, миделя – δB. Диапазоны L/B, B/T, δ, δB для различных типов судов представлены в табл.3.1 со ссылкой на справочник [10].

Таблица 3.1 - Характеристики подводной части корпуса судов

Типы судов	L/B	B/T	δ	δB
Пассажирские	7,9-10,0	2,0-2,8	0,45-0,71	0,85-0,96
Грузопассажирские	6,0-9,0	2,0-3,8	0,50-0,76	0,84-0.98
Грузовые	4,7-7,5	1,9-2,9	0,60-0,90	0,85-0,98
Буксиры	3,5-6,5	2,0-5,0	0,40-0,60	0,75-0,84

Приведённые в таблице величины в дальнейшем используются в различных аналитических выражениях, относящихся к управлению судном.

В разделе книги «Переходные функции судна, управляемого рулём» рассматривается, в частности манёвр судна, называемый «циркуляция».

Начало циркуляций соответствует моменту команды на перекладку руля, а конец — моменту поворота диаметральной плоскости судна на угол 360°. Схематически траектория такой циркуляции показана на рисунке 1.23.

Приведем некоторые параметры циркуляции и их оценки.

Диаметр установившейся циркуляции D_0 — расстояние между положениями диаметральной плоскости судна (ДП) на противоположных курсах при установившемся движении на циркуляции, обычно между ДП в момент поворота на 180° и ДП в момент поворота на 360°. Тактический диаметр циркуляции D_T — расстояние между линией первоначального курса и ДП судна после поворота его на 180°. Тактический

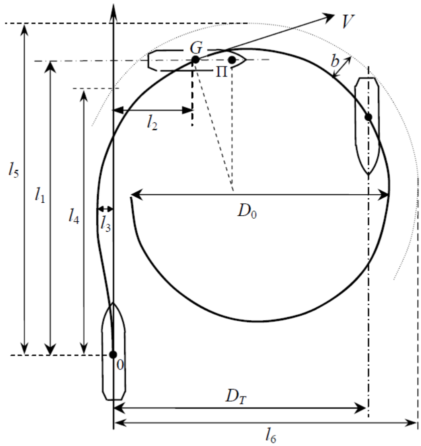

Рис. 1.23. Манёвр судна на 360° рис. 6.12 [6].

диаметр может составлять

$$D_T \approx (0.9 - 1.2) \cdot D_0.$$

Линейные размеры $l_1, \ldots, l_6$, описывающие различные детали траектории судна и также выражаются в единицах D_0. Полуширина выметаемой полосы b — расстояние, на котором находятся наиболее удаленные от траектории центра масс точки корпуса при совершении циркуляции.

Разброс значений параметров весьма велик. В частности,

$$l_1 \approx (0.6 - 1.5) \cdot D_0.$$

Глава 2

Анализ данных

В этой главе мы приведём ряд примеров, которые мотивируют применение интервальных подходов при анализе данных. Математически корректное обсуждение многих вопросов «интервальной статистики» проводится в книге [1].

2.1 Совместность измерений

Известная экспериментальная истина — чем выше точность измерений, тем больше неожиданностей! Казалось бы, что может быть проще измерения температуры двумя одинаковыми датчиками в одной точке? Однако реальность всегда богаче модельных представлений.

Пример несовместности измерений константы. Измерения двумя датчиками с разной скоростью установления параметра. На установке для термовакуумных испытаний [4] проводятся различные технологические испытания. В течение испытаний рабочий параметр — температура. Для повышения надежности она измеряется двумя платиновыми датчиками типа Pt100. Датчики имеют размер чувствительной области порядка 1 мм^2, так что их размером можно пренебречь. Установление температуры зависит от набора физических свойств конструкционных материалов (теплопроводность, теплоемкость, плотность, коэффициент отражения излучения и другие).

На рисунке 2.1 приведены показания температуры двумя датчика-

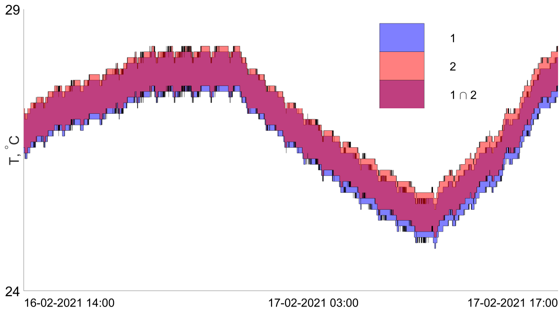

Рис. 2.1. Измерения температуры двумя датчиками в течение суток. Разница показаний датчиков находится в пределах декларированной погрешности измерений.

ми в течение суток при подготовке измерений. Разница показаний датчиков находится в пределах декларированной погрешности измерений $\pm$ 0.35 град С.

Как математически выражается согласованность показаний датчиков? Естественным ответом на этот вопрос может быть, например, такой: «пересечение показаний имеет ненулевое пересечение».

В книге [1] даётся строгое определение. Множество всех функций, совместных с интервальными данными задачи восстановления зависимости, названо *коридором совместных зависимостей.*

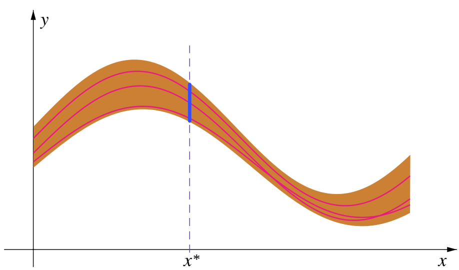

Рис. 2.2. Коридор совместных зависимостей и его сечение для какого-то значения аргумента x^*.

На рисунке 2.1 коридор совместных зависимостей, данный самым тёмным цветом, покрывает весь временной промежуток измерений:

$$1 \cap 2 \neq \emptyset \text{ для всех значений времени.}$$

В результате некоторого различия этих теплофизических и электрических параметров у разных датчиков, температуры, фиксируемые датчиками, реально никогда не бывает одинаковыми в процессе установления теплового равновесия. Характерная тенденция при этом такова: один из датчиков показывает более высокую скорость увеличения температуры при ее повышении, и более высокую скорость ее уменьшения в противоположной ситуации.

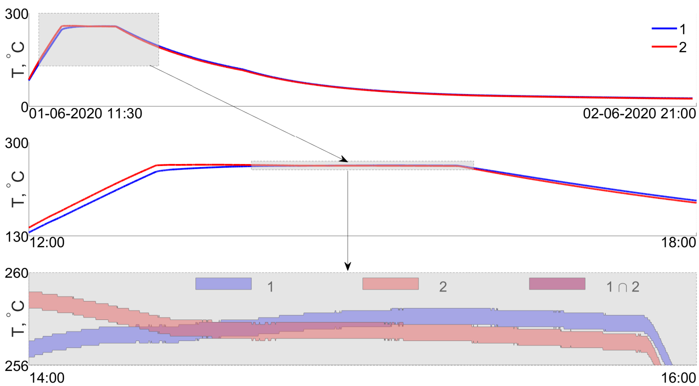

Рис. 2.3. Измерения температуры двумя датчиками. На верхнем рисунке представлены данные во всем интервале проведения эксперимента, всего около 2-х суток. На нижнем рисунке — данные в течение 2-х часового интервала после выхода на стационарный режим.

Пример результатов измерений приведен на рисунке 2.3. При выходе установки на температурный режим разница показаний датчиков составляет несколько десятков градусов. По достижении участка технологических испытаний показания стабильны и отличаются на несколько градусов. При снижении температуры численные значения показаний датчиков меняются местами: более «холодный » ранее датчик показывает более высокую температуру вплоть до окончательного приближения к комнатной.

На рисунке 2.3 одинаковыми цветами показаны нижние и верхние границы показаний датчиков, соответствующие паспортной погрешности измерений.

На нижнем рисунке представлен интервал измерений после выхода на стационарный режим, примерно с 13:30 до 15:30. В этот период показания датчиков близки. На этом участке наблюдаются участки как совместных, так и несовместных показаний датчиков.

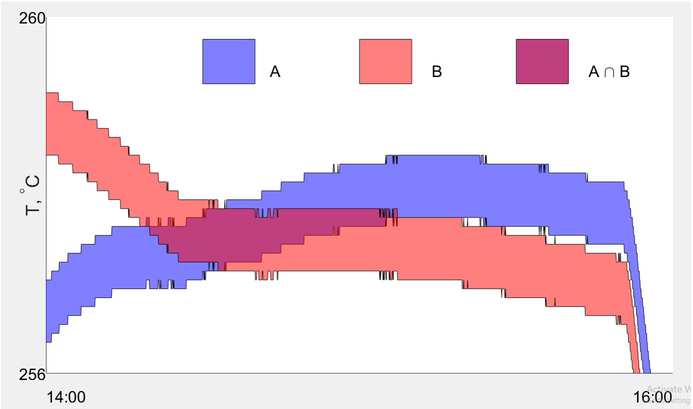

Рис. 2.4. Коридор совместных зависимостей.

$A \cap B \neq \emptyset$ для промежутка времени около 1 часа.

Коридор совместных зависимостей для показаний датчиков температуры показан на рисунке 2.4 тёмным цветом.

2.2 Погрешности во входных переменных

Как правило, когда говорят об ошибках измерения, имеют в виду ошибку измеряемой (целевой) переменной (функции). При этом параметр измерения, определяющий индивидуальное измерение (порядковый номер, время, значения параметров условий измерений) даже не всегда фиксируют.

Тем не менее погрешность во входных переменных может быть весьма существенна. При этом распознать её влияние бывает очень непросто.

2.2.1 Пример несовместности измерений константы. Коллекторные измерения токов.

Коллекторные измерения токов — рутинная операция в вакуумном приборостроении [3]. Как правило, необходимо измерить токи в приборе при различных распределениях напряжениях на электродах и установить необходимые тенденции и численные параметры устройства или исследуемого явления. Общей практикой при этом является последовательное измерение тока

$$I = I(U) \tag{2.1}$$

в каком-либо диапазоне напряжений сначала при повышении напряжения на одном из электродов, а затем при его уменьшении. Полученные графики зависимости тока от напряжения называют соответственно «прямым и обратным ходом».

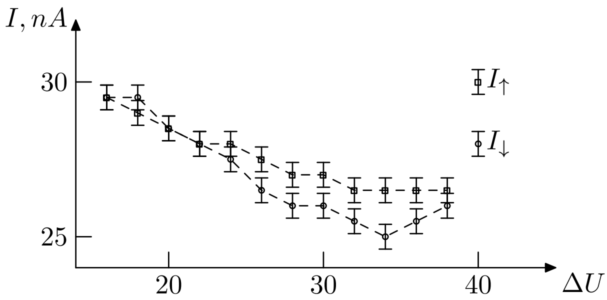

Рис. 2.5. Ток на электроде масс-спектрометра в зависимости от напряжения на прямом и обратном ходе.

Как правило, измеренные кривые не совпадают, и разница зна́чима. На рисунке 2.5 приведен пример зависимости (2.1) в масс-спектрометре с двойной фокусировкой МХ-3303.

ΔU	$I_\uparrow$	$I_\downarrow$
отн. ед.	нА	нА
16	29.05	29.5
18	29.0	29.5
20	28.5	28.5
22	28.0	28.0
24	28.0	27.5
26	27.5	26.5
28	27.0	26.0
30	27.0	26.0
32	26.5	25.5
34	26.5	25.0
36	26.5	25.5
38	26.5	26.0

Измеренные зависимости $I = I(U)$ на прямом и обратном ходе измерений совпадают или близки между собой при малых значениях потенциала между электродами. Далее графики $I_\uparrow$ и $I_\downarrow$ расходятся и наиболее различны при $\Delta U \simeq 34$ отн. ед., и снова сближаются при высоких значениях.

2.2.2 «Внутренняя» несовместность данных.

Рассмотрим возможные причины несовместности приведенных данных измерений. Наиболее простым объяснением является ошибка измерений. В принципиальном плане это так, однако не с точки зрения результатов, считанных с измерительного прибора, которые как раз верны с точностью до его точности.

Причина содержится в аргументе, а не значении функции. Математически, данный факт можно представить следующим образом. Именно при измерении значений $y_i = y(\beta, x_i)$, величина y_i известна с высокой точностью, а внутренняя переменная x_i — с гораздо худшей. С приемлемой точностью можно полагать величины y_i вырожденными интервалами. В результате, система уравнений для описания зависимости (задача построения линейной регрессии) имеет вид

$$y(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{x}_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{2.2}$$

В случае, если предполагаемая зависимость $y(\beta, x_i)$ линейная, система уравнений (2.2) представляет интервальную систему линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) с интервальной матрицей и точечной правой частью.

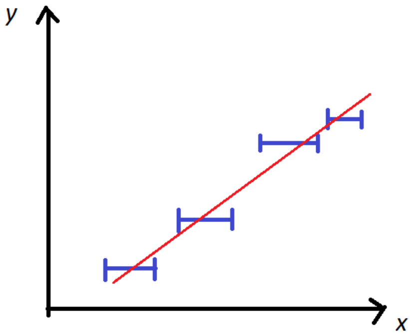

Рис. 2.6. Измерения с неопределенностью во входных измерениях.

Таким образом, на графике $y(x)$ представление неопределенности данных будет выражаться горизонтальными интервалами.

Какова причина, по которой возникает подобная неопределенность? Является ли она экзотичным примером или же имеет некоторую распространенность?

Для обсуждения этого вопроса обратимся к практике проведения экспериментов. В настоящее время подавляющее количество приборов и исполнительного оборудования имеет электрическое управление, а в случае ручного управления сигнал передается для исполнения посредством электрических сигналов. При этом каждая электрическая цепь имеет конечное быстродействие и точность установления выходного параметра (как правило, напряжение). Разумеется, кажется, что при современном развитии электроники её быстродействие не может быть ограничением. Это, однако, не так в общем случае.

Неточности при электронном управлении и измерении возникают в следующих ситуациях:

- скорость процессов выше быстродействия приборов,
- скорость установления физического параметра ниже частоты измерений.

Примером первой ситуации является измерение регистратором (осциллограф, дигитайзер), имеющим полосу пропускания ниже полосы

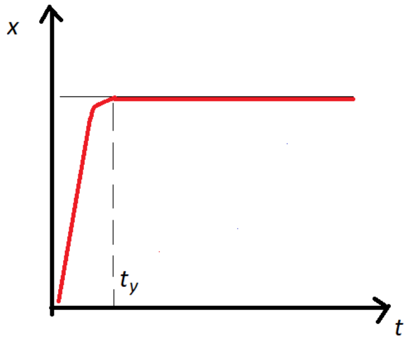

Рис. 2.7. Время установления процесса.

измеряемого процесса. Примером второй ситуации является измерение широкого класса процессов с длительным временем установления: температура, давление, напряжение на электродах в вакууме, значение напряжения на соленоидах, и многое другое.

К каким последствиям при регистрации данных приводит данный факт в приведенном выше примере?

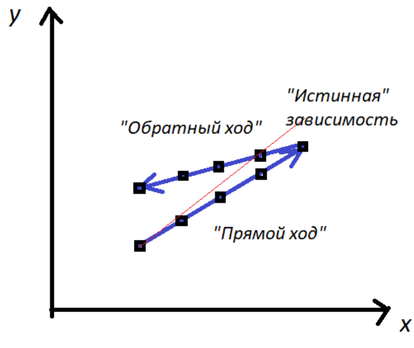

Рис. 2.8. Измерения «вперед-назад».

Предположим, первоначально на управляющем электроде задано некоторое напряжение U_0, и прошло достаточно много времени для установления стационарного напряжения. Зафиксируем значение тока $I_0 = I(U_0)$. Будем проводить измерения, постепенно увеличивая или уменьшая управляющий сигнал, Что, как мы ожидаем, должно приводить к установлению значений U_i на реальной физической поверхности электрода. Если время установления больше, чем интервалы между командами управления, измеряемые значения $I^i_\uparrow = I(\boldsymbol{U})^i$ будут выше или ниже истинных, в зависимости от характера зависимости $I(U)$, и такое отклонение будет иметь систематический характер. Пусть при этом проведен n измерений.

Если немедленно после этого начать измерение характеристики $I_\downarrow$, систематический сдвиг будет также присутствовать, но иметь *противоположный* знак.

В результате, возникает две ветви зависимости $I(U)$, ни одна из которых не является истинной.

Сходный эффект можно наблюдать при одновременном измерении физического параметра несколькими датчикам при разном времени установления [1].

2.2.3 Дополнительные примеры

Интерферометрия. Приведём типичный пример из лабораторной практики измерений оптических свойств поверхностей [120].

При исследовании качества покрытий оптической поверхности, проводят, в частности, измерения интенсивности отражения от поверхности под разными углами.

Каждый набор данных представляет собой зарегистрированное напряжение на фотоприемнике в зависимости от угла падения лазерного излучения на поверхность образца при многочисленных проходах от наименьшего значения угла падения лазерного излучения на образец к наибольшему («вперед») и в обратную сторону («назад»).

На рисунке 2.9 приведён пример измерений свойств пластин пластин Si/SiO_2.

Для примера на рисунке 2.9 коридор совместности зависимостей составляет часть облfсти измерений:

$$\text{«вперед»} \cap \text{«назад»} \neq \emptyset, \text{ для области углов измерений } 58^\circ \ldots 65^\circ.$$

Измерение кривой Аррениуса. При исследовании различных свойств веществ популярным методом является измерение температурной зависимости физического параметра с последующим извлечением

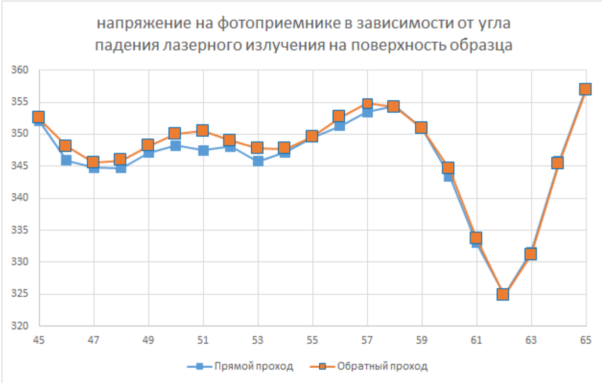

Рис. 2.9. Пример интерферометрических измерений.

информации по полученной кривой. Во многих случаях характерна зависимость исследуемой величины в форме уравнения Аррениуса

$$F(T) = A \cdot \exp(-\tfrac{E_a}{kT}), \tag{2.3}$$

F — теоретическая величина в какой-либо модели, A — предэкспоненциальный множитель, E_a — характерная энергия, k — постоянная Больмана, T — температура. Как правило, величина F не измеряется непосредственно, а рассчитывается из экспериментальных данных.

При логарифмировании (2.3) получают зависимость

$$\ln F(T) = \ln A - \frac{E_a}{kT}. \tag{2.4}$$

Кривой Аррениуса называют график функции $\ln F$ от $\frac{1}{T}$

$$\ln F(1/T) = \ln A - \frac{E_a}{k}\frac{1}{T}. \tag{2.5}$$

На рисунке 2.10 показан характерный график зависимости (2.4) для емкостной спектроскопии глубоких уровней [121].

Теоретически, из наклона прямой на рисунке 2.10 можно получить значение E_a глубины уровня в исследуемом проводнике, а из аддитивной константы — сечение процесса. Вместе с тем, на графике можно выделить множество участков с различными значениями E_a.

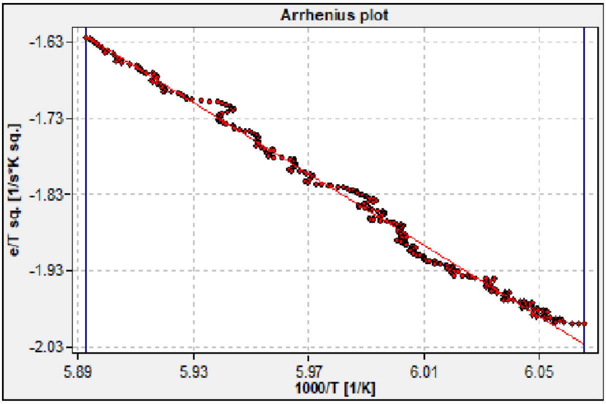

Рис. 2.10. Кривая Аррениуса (по данным прибора CE-8C измерения емкости) [122].

Этот факт может иметь различные причины. Наиболее вероятными являются систематические неточности при проведении измерений, сбои аппаратуры. Более тонкие эффекты могут быть связаны с недостаточно отлаженной методикой измерения при корректно работающем оборудовании.

Наконец, наименее вероятной, но и самой содержательной причиной могут быть действительно различные физические процессы в полупроводниках, которая и приведут к различному поведению кривой Аррениуса при разных температурах (в единицах $1/T$).

Глава 3

Другие виды интервалов.

Помимо рассмотренного описания интервалов как двустронних ограничений, возможны и другие виды интервальных величин.

3.1 Интервалы полной интервальной арифметики.

Геометрический пример. Представим себе, что нам необходимо разместить резиновое уплотнительное кольцо с внешним и внутренним диаметром 4 и 5 мм в пазе с диаметрами 4.5 и 5.5 мм.

Математически необходимую операцию трансформации предмета можно выразить как умножение исходного интервала $\boldsymbol{a} = [4, 5]$ на величину x, так чтобы получился результат $\boldsymbol{b} = [4.5, 5.5]$:

$$\boldsymbol{a} \cdot x = \boldsymbol{b}.$$

Непосредственное вычисление даёт значение

$$\boldsymbol{x} = \left[\frac{4.5}{4}, \frac{5.5}{5}\right] = [1.25, 1.1].$$

Полученный результат отражает тот факт, что внутренняя часть кольца растягивается относительно больше, чем внешняя.

После трансформации форма резинового кольца становится неустойчивой по отношению к малым деформациям. Для того, чтобы обеспечить надежность работы, внутрь резинового кольца вставляется металлическое.

Подобный подход достаточно часто встречается в технических решениях.

Рис. 3.1. Эскиз резинового уплотнения с центрирующим кольцом (сечение заштриховано).

На рисунке 3.1 приведён эскиз вакуумного резинового уплотнения с центрирующим кольцом.

Содержательный анализ подобных примеров можно провести, используя понятия относительной ширины интервалов, например, функционала Рачека. Интуитивно ясно, что применение операций «растяжения-сжатия» по-разному к разным концам интервала даёт возможность решения широкого круга задач. Обсуждение математических аспектов вопроса можно найти в [24].

Задача механического равновесия. Рассмотрим задачу механического равновесия.

Закон равенства действия и противодействия — один из трёх основных законов ньютоновской механики. В современной формулировке:

«Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине, противоположно направлены, и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки.»

$$\vec{F} + \vec{R} = 0 \tag{3.1}$$

здесь $\vec{F}$ и $\vec{R}$ — силы действия и противодействия.

Отвлечёмся от векторного характера закона (3.1) и представим себе, что сила F имеет характер интервала

$$\boldsymbol{F} = [1, 2].$$

Для того, чтобы в (3.1) выполнялось точное равенство, нужно, чтобы арифметика обладала свойством «переворачивать» минимум и максимум:

$$[1, 2] + [-1, -2] = 0,$$

Таким образом, получаем величину противодействия в виде

$$\boldsymbol{R} = [-1, -2] = -[2, 1].$$

Иначе,

$$\boldsymbol{R} = -\mathrm{dual}\, \boldsymbol{F}$$

и третий закон Ньютона (3.1) можно записать как

$$\boldsymbol{F} + \mathrm{dual}\, \boldsymbol{R} = 0. \tag{3.2}$$

Замечательно, что в правой части уравнения (3.2) находится строгий ноль.

Примеры использования такого подхода для анализа задач статики можно найти в многочисленных публикациях, см. например, [42]. Наиболее показательными являются приложения этого подхода в строительной механике [40]. Например, силы напряжения в упругом стержне, подвергнутом растяжению, имеют различные направления в разных сечениях.

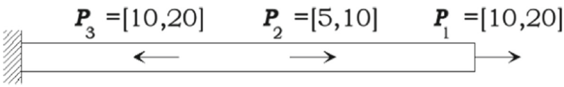

Рис. 3.2. Пример распределения сил напряжения в упругом стержне. Рис.1.6 [40].

Движение заряженных частиц. Для разделения частиц по массам используется тот факт, что при одной и той же энергии $U = \frac{1}{2}mv^2$ легкие частицы движутся быстрее.

$$T_{\mathrm{drift}} = \frac{L}{v} = L\sqrt{\frac{m}{2U}}$$

При большом разбросе U хорошее разделение по массе не получается.

Б.А.Мамыриным был предложен и реализован вариант с последовательным движением заряженной частицы в бесполевом пространстве длиной L и в пространстве со встречным полем E — рефлектрон Мамырина.

$$T = T_{\text{drift}} + T_{\text{reflect}} = \frac{L}{v} + \frac{2v}{E} \tag{3.3}$$

Пространственно-временная фокусировка.

$$\frac{dT}{dv} = 0 \longrightarrow -\frac{L}{v^2} + \frac{2}{E} = 0; \quad LE = 2v^2.$$

Получена связь оптимальных параметров прибора и энергии ионов.

Разберём вопрос получения минимального разброса с точки зрения арифметики интервалов. Пусть начальный разброс энергии приводит к разбросу скоростей

$$\boldsymbol{v} = [1, 2].$$

Вернёмся к выражению (3.3)

$$T = T_{\text{drift}} + T_{\text{reflect}} = L\frac{1}{[1, 2]} + \frac{2[1, 2]}{E} \tag{3.4}$$

Для того, чтобы величина T не зависела от v, надо, чтобы сумма слагаемых была константой. То есть надо иметь конструкцию такого вида:

$$[2, 1] + [1, 2] = 3.$$

Но ведь именно такая закономерность наблюдается в формуле (3.4): при увеличении v первое слагаемое уменьшается, второе — увеличивается!

Осталось оформить этот факт подходящей арифметикой. Например, по аналогии с видом записи 3-го уравнения Ньютона в интервальной форме, можно записать (3.4) как

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_{\text{drift}} + \operatorname{dual} \boldsymbol{T}_{\text{reflect}}. \tag{3.5}$$

В отличие от (3.2), в котором сумма слагаемых строго равна 0, в данном случае мы можем только стремиться к тому, чтобы величина $\boldsymbol{T}$ была как можно более «узкой», в идеале точкой, обычным вещественным числом. Говоря иначе, можно поставить задачу конструирования прибора как задачу оптимизации

$$[\mathtt{L}, \mathtt{E}, \ldots] = \mathtt{arg} \min_{\mathtt{L}, \mathtt{E}, \ldots} \operatorname{rad} \boldsymbol{T}, \tag{3.6}$$

где под обозначением минимума находятся параметры прибора.

3.2 Мультиинтервалы.

Неодносвязные интервальные величины (мультиинтервалы). В ряде разделов науки и техники имеют место ситуации, когда исследуемая величина содержится в неодносвязной области.

Согласно [24], мультиинтервал — это объединение конечного числа несвязных интервалов числовой оси (Рис. 3.3).

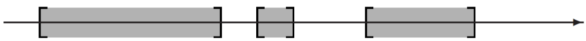

Рис. 3.3. Мультиинтервал в $\mathbb{R}$. Рис. 1.11 из [24].

Между мультиинтервалами также могут быть определены арифметические операции «по представителям», аналогично тому, как это делается на множестве интервалов [25]. Мультиинтервальная арифметика применяется редко ввиду серъёзных ограничений, которые возникают при алгебраических операциях с мультиинтервальными величинами и вычислительных сложностей. Тем не менее, сама по себе идея мультиинтервалов содержательна и полностью отметать её не стоит.

В естественных науках возникновение неодносвязных областей часто связано с наличием периодичности в уравнениях или граничных условиях. Спектр таких явлений достаточно широк.

Уравнение Хилла. Уравнение Хилла — линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + f(t)y = 0,$$

где $f(t)$ — периодическая функция.

Важными частными случаями уравнения Хилла являются уравнение Матьё и уравнение Мейснера.

В уравнении Матьё

$$f(t) = a - 2q\cos(2x),$$

где a и q - параметры, от которых зависит поведение решения (устойчивое или неустойчивое).

В уравнении Мейснера функция $f(t)$ имеет характер прямоугольной волны. Например
$$f(t) = \alpha^2 + \omega^2 \text{ sgn } \cos(x).$$
где α и ω - параметры.

Приведём ряд примеров.

Уравнение Хилла очень важно для понимания устойчивости движения в осцилляторных системах. В зависимости от конкретной формы периодической функции $f(t)$ решения могут иметь вид устойчивых квазипериодических колебаний, либо колебания будут раскачиваться с нарастающей экспоненциально амплитудой.

Уравнение Хилла позволяет также понять расщепление энергетических уровней электронов в периодическом поле кристаллической решетки.

В физике ускорителей уравнение Хилла описывает поперечную линейную динамику частиц в фокусирующих магнитных полях (бетатронные колебания).

В основе теории работы гиперболоидных масс-спектрометров также лежат варианты уравнения Хилла, уравнение Матьё и уравнение Мейснера (в зависимости от формы изменения во времени подаваемых на электроды потенциалов).

Большое значение уравнение Хилла имеет в механике. В технике особенно важны различные варианты явления параметрического резонанса, которые могут иметь как положительные стороны, так и катастрофические.

Задача трех тел. В теории тяготения огромную роль имеет задача трёх тел. Для искусственных спутников Земли она является определяющей, поскольку спутники Земли находятся в поле тяготения Земли и Солнца. То же относится и к естественным спутникам планет, малым планетным телам и т.п.

Пример 3.2.1.

Неодносвязные интервальные величины в технике [103]. Публикация посвящена исследованию параметрических колебаний трубопроводов и устранению нежелательных последствий таких колебаний. Параметрические колебания в детерминированных системах при линейной и нелинейной постановке задач исследованы весьма подробно [104].

Дифференциальное уравнение для определения динамического прогиба трубопровода при действии продольной силы с пульсирующей составляющей имеет вид [104]:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial^4 x} + (P_0 + P_1 \cos \omega t)\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x} + m\frac{\partial^2 y}{\partial^2 t} = 0 \tag{3.7}$$

где P_0, P_1 — постоянная и переменная составляющая продольной силы, ω — возмущающая частота, EJ — жесткость трубопровода на изгиб, m — масса единицы длины трубопровода.

Граничное условие шарнирно опертого трубопровода имеет вид

$$y = T(t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где $T(t)$ — неизвестная функция времени, l — длина рассматриваемого участка трубопровода.

Уравнение (3.7) приводится к уравнению Матье

$$T + (a - 2q \cos 2\tau)T = 0.$$

Здесь

$$\omega t = 2\tau, \quad a = \frac{4\pi^2(P_c - P_0)}{m\omega^2 l^2}, \quad q = \frac{2\pi^2 P_1}{m\omega^2 l^2}, \quad P_c = EJ\frac{\pi^2}{l^2}. \tag{3.8}$$

В параметрах a и q строят диаграмму устойчивости Айнса-Стрейта. Неустойчивые области заштрихованы. Так, например, точка A находится в зоне параметрического резонанса, а точка N — в зоне устойчивых колебаний.

Согласно выражению (3.8) с увеличением частоты возбуждения ω (3.4) параметры a и q будут уменьшаться по прямой, приближающейся к началу координат с угловым коэффициентом

$$K = \frac{q}{a}. \tag{3.9}$$

Линия 1 (рис. 3.4) при этом пересекает чередующиеся области устойчивости и неустойчивости. В областях неустойчивости возникает параметрический резонанс. С увеличением глубины пульсации q за счет роста углового коэффициента K линия 2 пересекает области неустойчивости с большими интервалами и зоны параметрического резонанса расширяются.

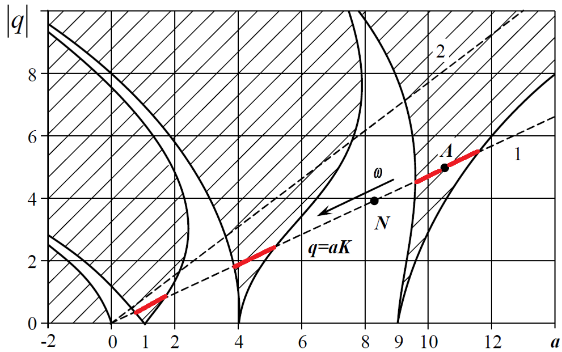

Рис. 3.4. Диаграмма Айнса-Стретта с тремя областями резонанса. Рис. 2 из [103]

В терминах интервального анализа, траектории 1 и 2 представляют собой неодносвязные интервалы перемежающихся областей устойчивости и неустойчивости.

Установка динамических гасителей позволяет отстроится от параметрического резонанса. Динамический гаситель колебаний с вязким трением разделяет главную область параметрического резонанса. Изменение настройки гасителя по массе и частоте собственных колебаний позволят сдвигать эти области вправо от оси ординат исключая при определенной глубине пульсации попадание в область динамической неустойчивости.

Здесь $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{P_0}{P_c}}$, $\delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\omega_0}$, где ω_0 — частота собственных колебаний, ε — коэффициент затухания.

Область неустойчивости с демпфером неодносвязна. Для фиксированного параметра возбуждения δ диапазон частотного параметра Ω является твином.

■

Пример 3.2.2.

Неодносвязные интервальные величины в приборостроении. Приборы, использующие методы корпускулярной оптики, используют периодические в пространстве или времени потенциалы.

Рассмотрим пример *масс-спектрометра с линейной квадрупольной ионной ловушкой*, следуя [105]. В масс-спектрометрии для удержания

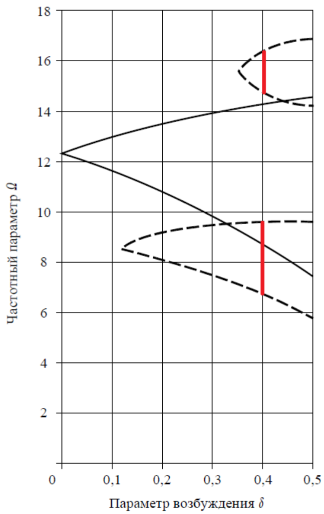

Рис. 3.5. Области главного параметрического резонанса. Рис. 5. [103]. Сплошная линия — без демпфера, штриховая — с демпфером.

ионов используются переменные поля квадрупольной конфигурации. Электрический потенциал, изменяющийся во времени, можно записать следующим образом:

$$\phi(x, y, z, t) = V(t) \cdot \Phi(x, y, z). \tag{3.10}$$

Здесь $V(t)$ — периодический удерживающий потенциал, а функция $\Phi(x, y, z)$ описывает пространственное распределение квадруполного потенциала. В декартовой системе координат для линейного квадруполя, работающего как фильтр масс, $\Phi(x, y, z)$ имеет вид:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{x^2 - y^2}{r_0^2}. \tag{3.11}$$

Здесь r_0 это радиус поля (расстояние от оси ловушки до электродов). Рисунок такого устройства показан на рисунке 3.6.

Слева на рисунке 3.6 показан вид сбоку линейной ловушки. Ионы движутся вдоль оси z. Справа на рисунке изображены 4 электрода, соединённых попарно. Электроды имеют сечение круглой или более

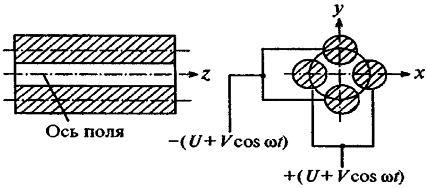

Рис. 3.6. Квадрупольный масс-спектрометр. Рис. 6.8 [106].

сложной формы и создают в ловушке требуемое распределение потенциалов.

Уравнение движения иона (закон Ньютона) имеет вид

$$M\frac{d^2u}{dt^2} = -eZ_iV(t)\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \quad u = (x, y, z), \tag{3.12}$$

где M и eZ_i — масса и заряд иона.

Введём безразмерную временную шкалу, $\zeta = \Omega t/2$, на базе основной частоты переменного поля Ω, так что уравнение (3.12) можно записать как

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + f_u(\zeta)\cdot u = 0,$$

$$f_u(\zeta) = \sigma_u\frac{8eZ_i}{Mr_0^2\Omega^2}V(2\zeta/\Omega), \quad f_u(\zeta+T) = f_u(\zeta). \tag{3.13}$$

где $(\sigma_x, \sigma_y) = (1, -1)$. Функция $f_u(\zeta)$ периодична с периодом T.

Рассмотрим два конкретных примера.

Диаграмма стабильности с управляющим напряжением прямоугольной формы В случае использования управляющего напряжения прямоугольной формы, временную компоненту потенциала можно записать как

$$V(t) = \begin{cases} U_1, & 0 < t < t_1, \\ U_2, & t_1 < t < T_{RF} \end{cases}, \tag{3.14}$$

$$V(T_{RF}+t) = V(T_{RF}), \quad T_{RF} = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

На рисунке 3.7 (а) представлена форма временной компоненты сигнала на электродах в безразмерной форме $f_u(\zeta)$ с периодом π. Также пояснены параметры a и q, среднее значение и размах модуляции соответственно.

На рисунке 3.7 (b) приведены области стабильности уравнения Хилла (3.13), которые показаны черным цветом.

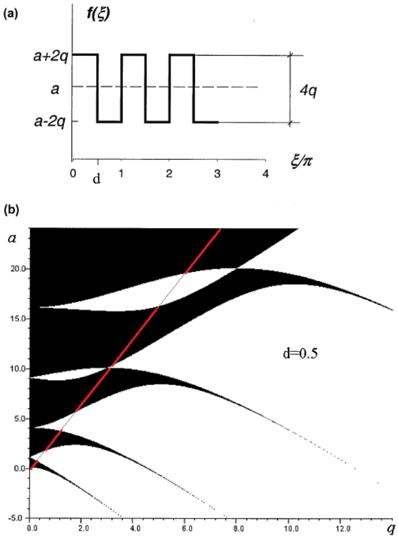

Рис. 3.7. Области стабильности для линейной квадрупольной ловушки с напряжением прямоугольной формы. Рис. 1 из [105].

В отличие от случая нежелательных колебаний трубопровода, зоны нестабильности играют в масс-спектрометре положительную роль. Выбирая потенциалы таким образом, что все диапазоны масс ионов, кроме интересующих, будут находиться в зоне нестабильности, можно добиться такого эффекта, что через прибор пройдут только ионы определённого диапазона масс. Такая конфигурация называется *масс-фильтром* и широко используется в тандемных масс-спектрометрах высокого разрешения.

Диаграмма стабильности с управляющим напряжением гармонической формы Пусть удерживающий потенциал имеет вид

$$V(t) = U - V_{RF} \cos \Omega t.$$

При этом уравнение Хилла приводится к уравнению Матьё и диаграмма стабильности подобна изображённой на рисунке 3.4.

В предельном случае можно ограничить диапазон масс единичной массой. Перебирая массы по очереди, используют ловушку как масс-спектрометр. Так устроены масс-спектрометры невысокого разрешения для рутинных анализов.

В статье [105] рассмотрен ещё ряд случаев подачи напряжений на электроды для 2-мерных (линейных) и 3-мерных ионных ловушек.

■

Пример 3.2.3.

Неодносвязные интервальные величины в небесной механике. В части III «Основные задачи небесной механики» [115] проведено качественное рассмотрение ряда задач небесной механики.

Классическая **задача двух неподвижных центров** заключается в исследовании движения точки P (планеты) под действием ньютоновского притяжения двух неподвижных материальных точек P_1 и P_2 (центров).

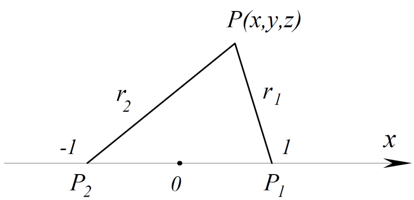

Рис. 3.8. Геометрия задачи 2-х центров. Рис. 38 [115].

Уравнения движения и их решения. Вводя переменные λ, μ, W и функции

$$\beta_1 = \lambda^2 - 1, \beta_2 = 1 - \mu^2, \beta_3 = (\beta_1 \beta_2)^{1/2},$$

связанные с x, y, z выражениями

$$x = \lambda\mu, \;\; y = \beta_3 \cos W, \;\; z = \beta_3 \sin W, \tag{3.15}$$

так что $\lambda \geq 1, |\mu| \leq 1$, получим

$$\lambda = (r_1 + r_2)/2, \mu = (r_2 - r_1)/2. \tag{3.16}$$

Из соотношений(3.15) и (3.16) следует, что уравнениям $\lambda = const, \mu = const$ отвечают, соответственно, эллипсоиды и гиперболоиды вращения вокруг оси OX с фокусами в точках P_1, P_2 , а $W = const$ — уравнение плоскости, проходящей через OX.

Решая уравнение Гамильтона-Якоби относительно λ, μ, W, можно получить решение

$$\lambda = l_1 + \frac{l_2}{\wp(\tau - \tau_1) - l_3}, \quad \mu = n_1 + \frac{n_2}{\wp(\tau - \tau_2) - n_3}. \tag{3.17}$$

где τ_1, τ_1 — произвольные постоянные; l_1, n_1 — корни полиномов четвёртой степени L и M специальной формы, $\wp$ — эллиптическая функции Вейерштрасса ("Пэ"). Свойства этой функции подробно описаны в книгах [114], [115].

Выражения для корней полиномов L, M и параметров функции $\wp$ включают полную энергию системы α_1 и произвольные константы.

Качественный анализ типов движений. По свойствам полинома M, в области $-1 \leq \mu \leq 1$ у него корней либо нет, либо их два: μ_1, μ_2 — Рис. 3.9 а), либо четыре: $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4$ — Рис. 3.9 б).

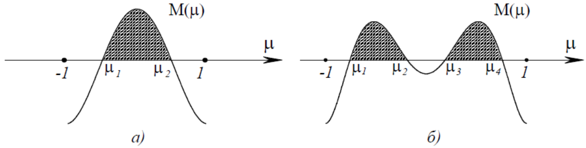

Рис. 3.9. Полином M и его корни в задаче 2-х центров. Рис. 43 [115].

Реальным движениям отвечают области $\mu_1 < \mu < \mu_2$ и $\mu_3 < \mu_< < \mu_4$. Следовательно, при $\alpha_1 < 0$ движение тела P финитно и происходит в области (или в двух областях), ограниченной двумя эллипсоидами $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2$ и двумя гиперболоидами $\mu = \mu_1, \mu = \mu_2$ (или также $\mu = \mu_3, \mu = \mu_4$).

Область параметров μ устойчивого движения есть объединение двух интервалов

$$\mu = [\mu_1, \mu_2] \cup [\mu_3, \mu_4]. \tag{3.18}$$

На рисунке 3.10 представлены области движения тела P. Устойчивые области движения даны сером цветом. Тело совершает движение в области между двумя эллипосоидами и гиперболоидами.

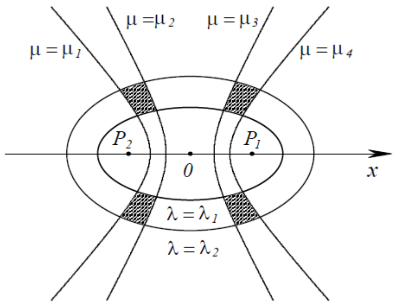

Рис. 3.10. Области движения тела P. Рис. 44[115].

■

Пример 3.2.4.

Орбитальные резонансы и люки Кирквуда Люки (щели) Кирквуда — узкие области в пределах пояса астероидов, где обнаруживается значительно меньше малых планет, чем в соседних с ними областях.

Астероиды не могут длительное время существовать на орбитах, которые имеют регулярные сближения с Юпитером, так как из-за гравитационного влияния Юпитера эти орбиты становятся нестабильными. В результате некоторые области пояса астероидов почти не заполнены — это так называемые щели или люки Кирквуда. А в других областях количество астероидов, наоборот, существенно больше.

Эти промежутки впервые заметил в середине XIX века американский астроном Кирквуд, который обнаружил существование щелей в распределении периодов обращения астероидов и больших полуосей их орбит. Он установил, что астероиды избегают тех периодов, которые находятся в простом целочисленном соотношении с периодом обращения Юпитера вокруг Солнца, например, 2:1, 3:1, 5:2 и т. п. Под действием гравитационного влияния Юпитера астероиды изменяют орбиту и выбрасываются из этой области пространства. [116]

В то же время в области резонанса 2:3 наблюдается избыток астероидов (группа Гильды), а в резонансе 1:1 с Юпитером (т.е. по его орбите) движутся две многочисленные группы астероидов (греки и троянцы). Природа люков Кирквуда до сих пор не вполне ясна. [117]

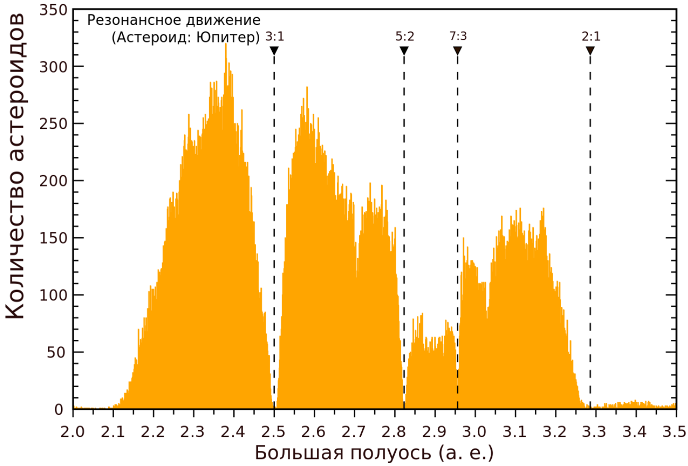

Рис. 3.11. Распределение астероидов главного пояса Юпитера.

■

3.3 Твины.

На практике концы интервалов, представляющие результаты измерений, сами могут быть известны неточно, так что возникает необходимость работы с интервалами, имеющими интервальные концы. Такие объекты известны в интервальном анализе и называются *твинами* (по английски twin, как сокращение фразы twice interval, «двойной интервал»). Они были введены в научный оборот в начале 80-х годов XX века в работах испанских исследователей, и заинтересованный читатель может найти подробности в книге [123]. Отдельные аспекты применения твинов рассматриваются в статье [124]. Краткое изложении основ теории твинов дано в статье [125], а развёрнутое — в диссертации [126].

Твин, как «интервал интервалов» или интервал с интервальными концами, можно представить как

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \big[\, [\underline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}], [\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{b}}] \,\big]. \tag{3.19}$$

На рисунке 3.12 твин $\boldsymbol{X}$ представлен в графической форме. Концы

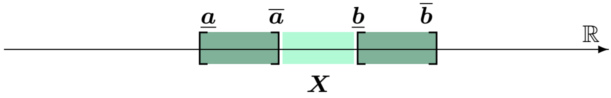

Рис. 3.12. Твины на вещественной оси.

твина, интервалы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, даны более тёмной заливкой, чем остальная часть твина.

Твин является множеством всех интервалов, больших или равных $[\underline{a}, \overline{a}]$ и меньших или равных $[\underline{b}, \overline{b}]$, и точное определение зависит от смысла, который вкладывается в понятия «больше или равно», «меньше или равно». Поскольку интервалы могут быть упорядочены различными способами, то существуют различные виды твинов. Двум основным частичным порядкам на $\mathbb{IR}$ и $\mathbb{KR}$, «$\subseteq$ » и «$\leq$», соответствуют два основных типа твинов. Разработаны различные операции с твинами, а также способы оценок значений функций от них.

Пример 3.3.1. Рассмотрим измерение так называемых осцилляций нейтрино, результаты измерений которых удобно представить в виде твинов.

При измерении осцилляций нейтрино в атмосфере Земли экспериментаторы традиционно используют безразмерную величину R, характеризующую отношение числа разных сортов нейтрино. Подборка значений R из разных экспериментов приведена на стр. 872 в публикации [119]. Приведем часть данных из этой публикации:

$$R_1 = 0.60^{+0.07}_{-0.06} \pm 0.05, \qquad \text{«Kamiokande»}, \tag{3.20}$$

$$R_2 = 0.54 \pm 0.05 \pm 0.12, \qquad \text{«IMB»}. \tag{3.21}$$

Результаты измерений даны в форме «базовое значение, статистическая погрешность, систематическая погрешность» а после числовых данных приводится название проекта, в котором они были получены. В первом примере («Kamiokande») статистическая погрешность дана в виде границ, несимметричных относительно среднего значения. Такая ситуация возникает при оценке значения величины, входящей в нелинейную функцию.

В виде твинов данные (3.20) и (3.21) можно представить следующим образом. В качестве первого шага выразим результаты в виде обычных интервалов $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$, с учётом только статистических погрешностей:

$$\boldsymbol{r}_1 = [\, 0.6 - 0.06,\; 0.6 + 0.07 \,] \;=\; [\, 0.54, 0.67 \,], \tag{3.22}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = [\, 0.54 - 0.05, 0.54 + 0.05 \,] = [\, 0.49, 0.59 \,]. \tag{3.23}$$

При этом $\operatorname{wid} \boldsymbol{r}_1 = 0.13 > \operatorname{wid} \boldsymbol{r}_2 = 0.1$ ввиду более широких статистических оценок для величины R_1.

Далее, произведём учёт систематической погрешности, произведя «интервализацию» концов интервалов $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$, вычитая и добавляя величины систематических погрешностей к величинам $\underline{\boldsymbol{r}}_1$, $\overline{\boldsymbol{r}}_1$, $\underline{\boldsymbol{r}}_2$, $\overline{\boldsymbol{r}}_2$.

Обозначим получившиеся твины как $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_1 &= \big[\, [0.54 - 0.05, 0.54 + 0.05],\; [0.67 - 0.05, 0.67 + 0.05] \,\big] \\ &= \big[\, [0.49, 0.59],\; [0.62, 0.72] \,\big], \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_2 &= \big[\, [0.49 - 0.12, 0.49 + 0.12],\; [0.59 - 0.12, 0.59 + 0.12] \,\big] \\ &= \big[\, [0.37, 0.61],\; [0.47, 0.71] \,\big]. \end{aligned} \tag{3.25}$$

На рисунке 3.13 графически представлены твины $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$. Численные значения концов правого интервала смещены вверх. На сей раз твин $\boldsymbol{R}_1$ «у́же», чем твин $\boldsymbol{R}_2$, ввиду более широких систематических погрешностей для величины R_2. Следует заметить также, интервалы $\underline{\boldsymbol{R}}_2$, $\overline{\boldsymbol{R}}_2$ в форме (3.19) имеют ненулевое пересечение. Это пересечение дано более тёмной заливкой, чем концы твина.

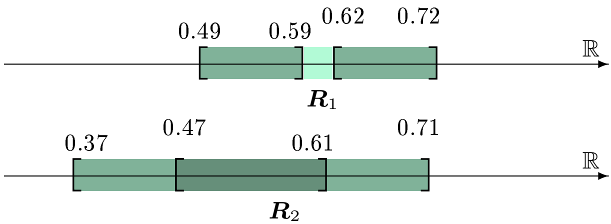

Рис. 3.13. Данные по массе нейтрино в форме твинов.

Далее, можно проводить различный содержательный анализ величин $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$, используя аппарат, представленный в [123]. ■

Пример 3.3.2. Измерение температуры термометром сопротивления.

В повседневной лабораторной и промышленной практике широко применяются термометры сопротивления. Один из типов таких датчиков, платиновый термометр Pt100, имеет номинальное сопротивление 100 Ом при температуре $0°C$ и систематическую погрешность

$$\Delta t = \pm 0.35\ °C.$$

Пусть измеряемая температура находится в диапазоне $[19.5,\ 20.5]\ °C$, которую представим как интервал $\boldsymbol{t}$:

$$\boldsymbol{t} = [19.5, 20.5]\ °C. \tag{3.26}$$

Аналогично рассмотренному выше примеру, представим границы $\underline{\boldsymbol{t}}$, $\overline{\boldsymbol{t}}$ интервала $\boldsymbol{t}$ как интервалы. С учётом систематической погрешности твин температур $\boldsymbol{T}$, даваемый датчиком, составит

$$\boldsymbol{T} = \big[\,[19.15, 19.85],\ [20.15, 20.85]\,\big]\ °C. \tag{3.27}$$

Графическое представление твина $\boldsymbol{T}$ (3.27) дано на рисунке 3.14.

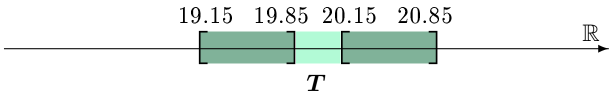

Рис. 3.14. Температура как твин.

Форма записи температуры в виде твина $\boldsymbol{T}$ (3.27) выразительно и полно представляет информацию об измеряемых данных. В случае, если концы интервала в выражении (3.26) могут меняться независимо, возможны различные ситуации. В частности, может реализоваться ситуация, подобная рассмотренной выше для твина $\boldsymbol{R}_2$. Также может оказаться, что значения температур для левого конца будут выше, чем для правого. ■

Введение твинов, как нового типа данных, позволяет более гибко действовать на практике, учитывая возможную неточность в назначении концов интервалов возможных значений интересующих нас величин. Вместе с тем, при использовании твинов интерпретация результатов как обогащается, так и осложняется, и требует от пользователя математической подготовки.

Существуют и другие типы интервалов. Заинтересованный читатель может ознакомиться с ними в Главе 1 книги [24].

Заключение

Выражаю благодарность участникам Всероссийского интервального веб-семинара, С.И. Жилину, С.И. Кумкову, А.В. Пролубникову, Е.В. Чаусовой и С.П. Шарому, за проявленный интерес к работе и конструктивные обсуждения примеров.

Отдельная благодарность — аспиранту ФТИ А. Карповой. Она тщательно просмотрела материал и сделала много полезных замечаний.

Литература

[1] А.Н. Баженов, С.И. Жилин, С.И. Кумков, С.П. Шарый. «Обработка и анализ данных с интервальной неопределённостью». 2021.

[2] А.Н. Баженов. Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры: учебное пособие. — СПб. 2020 `https://elib.spbstu.ru/dl/2/s20-76.pdf/info`

[3] С.В. Булович, А.Н. Баженов, Р.Л.Петров. Нормальное взаимодействие сверхзвуковой осесимметричной струи с поверхностью, содержащей соосное со струей отверстие. // Журнал Технической Физики, 2009, том 79, вып. 12, стр. 92-94.

[4] Баженов А.Н., Коваль А.Н., Толстяков С.Ю., Мухин Е.Е., Дмитриев А.М., Самсонов Д.С. Стенд для термовакуумных механических испытаний // Приборы и техника эксперимента. – 2021. – Вып. 1. – С. 151–152.

[5] Бор Н. Квантовый постулат и новое развитие атомистики. УФН 8 306–337 (1928)

[6] Вагущенко Л.Л., Цымбал Н.Н. Системы автоматического управления движением судна. – 3-е изд., перераб. и доп.- Одесса: Фенікс, 2007. – 328 с.

[7] Веселовский И. Н. Аристарх Самосский — Коперник античного мира] // Историко-астрономические исследования, вып. VII. — М., 1961. — С. 17—70.
http://www.astro-cabinet.ru/library/Aristarch/Aristarch_3.htm

[8] Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. – М.: Физматлит, 2002.

[9] Допуск — Википедия https://ru.wikipedia.org/wiki/Допуск

[10] Справочник по теории корабля / В.Ф.Дробленков, А.И.Ермолаев, Н.П.Муру и др. – М.: Воениздат, 1984. – 589 с.

[11] Жилин С.И. Нестатистические методы и модели построения и анализа зависимостей. – Барнаул, 2004. – Диссертация на соискание учёной степени канд. физ.-мат. наук по специальности 05.13.01 «системный анализ, управление и обработка информации». Доступна на http://www.nsc.ru/interval/Library/ApplDiss/Zhilin.pdf

[12] Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский Математический Журнал. – 1962. – Т. 3, №5. – С. 701–709.

[13] Козлов Ю.В., Мартемьянов В.П., Мухин К.Н. Проблема массы нейтрино в современной нейтринной физике // Успехи Физических Наук. – 1997. – Т. 167. – С. 849–885. DOI: 10.3367/UFNr.0167.199708c.0849

[14] Кумков С.И. Обработка экспериментальных данных ионной проводимости расплавленного электролита методами интервального анализа // Расплавы. – 2010. – №3. – С. 79–89.

[15] Музыченко Я.Б., Слободянюк С.В., Стафеев С.К., Томилин М.Г. История оптики. Часть I. Визирные системы древности : учебное пособие / — Санкт-Петербург : Университет ИТМО, 2009. — 107 с.

[16] Опаев А. Изотопная подпись. https://elementy.ru/problems/1523/Izotopnaya_podpis

[17] Оскорбин Н.М., Максимов А.В., Жилин С.И. Построение и анализ эмпирических зависимостей методом центра неопределенности // Известия Алтайского государственного университета. – 1998. – №1. – С. 35–38.

[18] Посадка https://ru.wikipedia.org/wiki/Р§Р«СЃРѐРџРәРѐ

[19] Примеры анализа интервальных данных в Octave https://github.com/szhilin/octave-interval-examples

[20] Тудоровский А.И. Теория оптических приборов. Изд. 2-е, перераб. и доп. В 2-х ч. – М.-Л.: 1. Общая часть. 1948, 662 с.

[21] Шарый С.П., Шарая И.А. Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных // Вычислительные Технологии. – 2013. – Т. 18. – №3. – С. 80–109.

[22] Шарый С.П. Метод максимума согласования для восстановления зависимостей по данным с интервальной неопределённостью // Известия Академии Наук. Теория и системы управления. – 2017. – №6. – С. 3–19.

[23] Шарый С.П. Задача восстановления зависимостей по данным с интервальной неопределённостью // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2020. – Т. 86, №1. – С. 62–74. DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-1-62-74

[24] Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – ФИЦ ИВТ: Новосибирск, 2021. Электронная книга, доступная на `http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf`

[25] Яковлев А.Г. Машинная арифметика мультиинтервалов // Вопросы кибернетики (Научный Совет по компл. проблеме «Кибернетика»: АН СССР). – 1986. – Вып. 125. – С. 66–81.

[26] Б.Е. Штерн, В. Рубаков Астрофизика. Троицкий вариант. Серия: Удивительная наука. М.: АСТ, 2020. — 384 с. ISBN: 978-5-17-111648-4.

[27] И.Яковлев. Изучение трофической структуры сообществ с помощью анализа стабильных изотопов. Дискуссионные лекции-семинары по эволюционной экологии, 08.11.2013
http://www.eco.nsc.ru/lectures/Iakovlev_Stable_Isotopes.pdf

[28] Archimedes (Dover Books on Mathematics). Archimedes, Sir Thomas Heath. Unabridged reprint of the classic 1897 edition, with supplement of 1912. - p.512.

[29] Arzamasov, Vadim; Böhm, Klemens; Jochem, Patrick E.P. Towards Concise Models of Grid Stability. // 2018 IEEE International Conference on Communications, Control, and Computing Technologies for Smart Grids, SmartGridComm 2018; Aalborg; Denmark; 29

October 2018 through 31 October 2018.
DOI: 10.1109/SmartGridComm.2018.8587498

[30] G.J. Bowen Isoscapes: Spatial Pattern in Isotopic Biogeochemistry. Annu. Rev. Earth Planet. Sci. 2010. 38:161–187
http://www.iai.int/admin/site/sites/default/files/uploads/2010_Bowen_Isoscapes_Spatial-Pattern-in-Isotopic-Biogeochemistrypdf.pdf

[31] S.D. Newsome, C.Martinez del Rio, S. Bearhop, and D.L. Phillips. A niche for isotopic ecology. Front Ecol Environ 2007; 5(8): 429–436, doi:10.1890/060150.01

[32] Condie, K. C. (2015). Earth as an evolving planetary system. (3rd ed.) Elsevier.
https://doi.org/10.1016/C2015-0-00179-4

[33] Kearfott, R.B., Nakao, M., Neumaier, A., Rump, S., Shary, S.P., van Hentenryck, P. Standardized notation in interval analysis // Вычислительные Технологии. – 2010. – Т. 15, №1. – С. 7–13.

[34] Kolev, L. Interval Methods for Circuit Analysis (Advanced Circuits and Systems). World Scientific, Singapore, New Jersey, London, 1993 – P. 307.

[35] Kumkov, S.I., Mikushina, Yu. V. Interval approach to identification of catalytic process parameters // Reliable Computing. – 2013. – Vol. 19. – P. 197–214.

[36] Laveuve S.E. Definition einer Kahan-Arithmetic und ihre Implementierung // *Interval Mathematics* / Nickel K., ed. – Berlin: Springer Verlag, 1975. – P. 236–245. – (*Lecture Notes in Computer Science; vol. 29*).

[37] Meija, J., Coplen, T.B., Berglund, M., Brand, W.A., De Bièvre, P., Gröning, M., Holden, N.E., Irrgeher, J., Loss, R.D., Walczyk, T., Prohaska, T. Atomic weights of the elements 2013 (IUPAC Technical Report) // Pure and Applied Chemistry. – 2016. – Vol. 88, Issue 3. – P. 265–291. DOI: 10.1515/pac-2015-0305

[38] Nguyen H.T., Kreinovich V., Wu B., Xiang G. Computing Statistics under Interval and Fuzzy Uncertainty. Applications to

Computer Science and Engineering. – Springer, Berlin-Heidelberg, 2012.

[39] Standard atomic weights of 14 chemical elements revised // Chemistry International. – 2018. – Vol. 40, Issue 4. – P. 23–24. DOI: 10.1515/ci-2018-0409

[40] I. Elishakoff, S. Gabriele, Y. Wang Generalized Galileo Galilei problem in interval setting for functionally related loads. // Archive of Applied Mechanics (2016) 86:1203–1217

[41] Qing Li, Chao Xue, Jian-Ping Liu, et al. Measurements of the gravitational constant using two independent methods // Nature. – 2018. – Vol. 560. – P. 582–588. DOI: 10.1038/s41586-018-0431-5

[42] E. Popova Improved solution to the generalized Galilei's problem with interval loads. // Archive of Applied Mechanics volume 87, pages 115–127 (2017)

[43] J.A. Rader, J. A., Newsome, S. D., Sabat, P., Chesser, R. T., Dillon, M. E., and Martínez del Rio, C. (2017). Isotopic niches support the resource breadth hypothesis. J. Anim. Ecol. 86, 405–413. doi:10.1111/1365-2656.12629

[44] Rosi G, Sorrentino F., Cacciapuoti L., Prevedelli M., Tino G.M. Precision measurement of the Newtonian gravitational constant using cold atoms // Nature. 2014. Vol. 510, P. 518–521. DOI: 10.1038/nature13433
Предварительная версия работы депонирована в репозитории arXiv.org, статья `https://arxiv.org/pdf/1412.7954.pdf`

[45] Zhilin, S.I. On fitting empirical data under interval error // Reliable Computing. – 2005. – Vol. 11. – P. 433–442. DOI: 10.1007/s11155-005-0050-3

[46] Norman E. Holden, Tyler B. Coplen, John K. Böhlke, Lauren V. Tarbox, Jacqueline Benefield, John R. de Laetera, Peter G. Mahaffy, Glenda O'Connorb, Etienne Rotha, Dorothy H. Tepper, Thomas Walczyk, Michael E. Wieser and Shigekazu Yoneda. IUPAC Periodic Table of the Elements and Isotopes (IPTEI) for the Education Community (IUPAC Technical Report) Pure Appl. Chem. 2018; 90(12): 1833–2092 https://doi.org/10.1515/pac-2015-0703 Received August 3, 2015; accepted July 23, 2018

[47] https://ru.wikipedia.org/wiki/Изотопная_подпись

[48] Журавлев А.Ю. Сотворение Земли. Как живые организмы создали наш мир. М.: Альпина Паблишер. ISBN 978-5-91671-902-4. 514 стр.

[49] t-кварк. https://github.com/szhilin/octave-interval-examples/blob/master/TopQuark.ipynb

[50] Время жизни нейтрона. https://github.com/szhilin/octave-interval-examples/blob/master/NeutronLifetime.ipynb

[51] Particle Data Group. https://pdg.lbl.gov/2020/html/about_pdg.html

[52] Particle Data Group report 2012. https://pdg.lbl.gov/2013/reviews/rpp2012-rev-history-plots.pdf

[53] И. Иванов. Измерения времени жизни нейтрона, выполненные разными методами, по-прежнему расходятся (03.12.2013). https://elementy.ru/novosti_nauki/432146

[54] А.П.Серебров. Разногласие между методом хранения ультрахолодных нейтронов и пучковым методом при измерении времени жизни нейтрона. УФН 189 635–641 (2019). DOI: 10.3367/UFNr.2018.11.038475

[55] C. J. Christensen, A. Nielsen, A. Bahnsen, W. K. Brown, and B. M. Rustad. Phys. Rev. D 5 1628 (1972) Free-Neutron Beta-Decay Half-Life DOI: 10.1103/PhysRevD.5.1628

[56] Kosvintsev Yu. Yu, Morozov V. I., Terekhov G.I. JETP Lett. 44 571 (1986) http://jetpletters.ac.ru/ps/1397/article_21182.pdf

[57] Spivak P E Sov. Phys. JETP 67 1735 (1988) http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/e_067_09_1735.pdf

[58] V. V Nesvizhevskii, A. P. Serebrov, R. R. Tal'daev, and A. G. Kharitonov, V. P. Alfimenkov, A. V. Strelkov, and V. N. Shvetsov. Measurement of the neutron lifetime in a gravitational trap and analysis of experimental errors. JETP, 1992, Vol. 75, No. 3, p. 405. http://jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/e_075_03_0405.pdf

[59] K. Schreckenbach, W. Mampe. The Lifetime of the free neutron J.Phys.G 18 (1992) 1-34 DOI: 10.1088/0954-3899/18/1/004

[60] A. Pichlmaier, J. Butterworth, P. Geltenbort, H. Nagel, V. Nesvizhevsky, K. Schreckenbach, E. Steichele, S. Neumaier, V. Varlamov. MAMBO II: Neutron lifetime measurement with storage of ultra-cold neutrons Nucl.Instrum.Meth.A 440 (2000) 517-521 DOI: 10.1016/S0168-9002(99)01029-3

[61] A.Pichlmaier, V.Varlamov, K.Schreckenbach, P.Geltenbort. Neutron lifetime measurement with the UCN trap-in-trap MAMBO II Physics Letters B Volume 693, Issue 3, 4 October 2010, Pages 221-226 DOI: 10.1016/j.physletb.2010.08.032

[62] A. Steyerl, J. M. Pendlebury, C. Kaufman, S. S. Malik, and A. M. Desai Quasielastic scattering in the interaction of ultracold neutrons with a liquid wall and application in a reanalysis of the Mambo I neutron-lifetime experiment Phys. Rev. C 85, 065503 June 2012 DOI: 10.1103/PhysRevC.85.065503

[63] Arzumanov, S.S., Bondarenko, L.N., Morozov, V.I. et al. Analysis and correction of the measurement of the neutron lifetime. Jetp Lett. 95, 224–228 (2012). DOI: 10.1134/S0021364012050025

[64] S. Arzumanov, L. Bondarenko, S. Chernyavsky, P. Geltenbort, V. Morozov, V.V. Nesvizhevsky, Yu. Panin, A. Strepetov A measurement of the neutron lifetime using the method of storage of ultracold neutrons and detection of inelastically up-scattered neutrons Phys.Lett.B 745 (2015) 79-89 DOI: 10.1016/j.physletb.2015.04.021

[65] Serebrov, A.P., Kolomenskiy, E.A., Fomin, A.K. et al. New measurement of the neutron lifetime with a large gravitational trap. Jetp Lett. 106, 623–629 (2017). DOI: 10.1134/S0021364017220143

[66] Ezhov, V.F., Andreev, A.Z., Ban, G. et al. Measurement of the Neutron Lifetime with Ultracold Neutrons Stored in a Magneto-Gravitational Trap. Jetp Lett. 107, 671–675 (2018). DOI: 10.1134/S0021364018110024

[67] R. W. Pattie Jr., N. B. Callahan, C. Cude-Woods et all. Measurement of the neutron lifetime using a magneto-gravitational trap and in situ detection Science 11 May 2018: Vol. 360, Issue 6389, pp. 627-632 DOI: 10.1126/science.aan8895

[68] F.E. Wietfeldt. Measurements of the Neutron Lifetime. Atoms 2018, 6(4), 70 DOI: 10.3390/atoms6040070

[69] The mass of the top quark. https://physics.info/qcd/practice.shtml

[70] https://pdg.lbl.gov/2020/html/about_pdg.html

[71] Боос Э.Э. Брандт О.Е., Денисов Д.С., Денисов С.П., Граннис П.Д. «Топ-кварк (к 20-летию открытия)» // УФН, 185, с.1241–1269 (2015). DOI: 10.3367/UFNr.0185.201512a.1241

[72] Particle Data Group report 2019. pp.1-42. https://pdg.lbl.gov/2019/reviews/rpp2019-rev-top-quark.pdf.

[73] . G. Cortiana. Top-quark mass measurements: Review and perspectives. // Reviews in Physics Volume 1, November 2016, Pages 60-76. doi:10.1016/j.revip.2016.04.001 https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405428316300028

[74] M. Aaboud et al. (ATLAS), Eur. Phys. J. C79, 4, 290 (2019), [arXiv:1810.01772]. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6757-9

[75] V. Khachatryan et al. (CMS), Phys. Rev. D93, 7, 072004 (2016), [arXiv:1509.04044]. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.072004.

[76] A. M. Sirunyan et al. (CMS), Eur. Phys. J. C79, 4, 313 (2019), [arXiv:1812.10534]. DOI:10.1140/epjc/s10052-019-6788-2.

[77] M. Aaboud et al. (ATLAS), JHEP 09, 118 (2017), [arXiv:1702.07546]. DOI: 10.1007/JHEP09(2017)118.

[78] A. M. Sirunyan et al. (CMS), Eur. Phys. J. C78, 11, 891 (2018), [arXiv:1805.01428]. DOI: 10.1140/epjc/s10052-018-6332-9.

[79] The Tevatron Electroweak Working Group and Aaltonen, T., For the CDF and D0 Collab., arXiv:1608.01881, FERMILAB-CONF-16-298-E. 2016

[80] ATLAS,CMS, CDF, & D0 Collab, Phys. Rev. Lett. , 110, 25204 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.252004.

[81] Chadwick, James. Intensitätsverteilung im magnetischen Spektrum von β-Strahlen von Radium B+C // German Physical Society. — 1914. — T. 16. — C. 383—391.

[82] Pauli, W., Rapports du Septieme Conseil de Physique Solvay, Brussels, 1933. Paris: Gauthier-Villars (1930)

[83] Fermi E., Versuch einer Theorie der β-Strahlen.I / Towards the Theory of Z. Phys. 88 (1934) 161; Nuovo Cim. 11 (1934) 1

[84] G. C. Hanna and B. Pontecorvo, Phys. Rev. 75 (1949) 983

[85] В.М.Лобашев, П.Е.Спивак. К вопросу об измерении массы покоя антинейтрино // Препринт ИЯИ АН СССР. П-0296. М., 1983; Они же // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Research. 1985. A240. P. 305.

[86] Troitsk nu-mass experiment. `http://mass.inr.ru/index.html`

[87] K.-E. Bergkvist. Nucl. Phys. B39, 317; 371 (1972)

[88] LyubimoY, V. A., Sov. Phys. Rev. 4: 1 (1982)

[89] Kawakami, H., et aI., Phys. Lett. 1 87B:1 98 (1987)

[90] Wilkerson, J. F., et aI., Phys. Rev. Lett.58: 2023 (1987)

[91] В.М.Лобашев. ИЗМЕРЕНИЯ МАССЫ НЕЙТРИНО В БЕТА-РАСПАДЕ ТРИТИЯ. ВЕСТНИК РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК, 2003, том 73, № 1, с. 14-27

[92] А.А. Нозик. "Результаты обработки данных эксперимента "Троицк ню-масс"по прямому измерению массы электронного нейтрино". Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Москва, 2011.

[93] Weinheimer Ch et al. Phys. Lett. B 300 210 (1993)

[94] A.I.Belesev, A.I.Bleule, E.V.Geraskin, A.A.Golubev, N.A.Golubev, O.V.Kazachenko, E.P.Kiev, Yu.E.Kuznetsov, V.M.Lobashev, B.M.Ovchinnikov, V.I.Parfenov, I.V.Sekachev, A.P.Solodukhin, N.A.Titov, I.E.Yarykin, Yu.I.Zakharov, S.N.Balashov, P.E.Spivak. "STATUS AND NEW RESULTS FROM THE EXPERIMENT "TROITSK nu-MASS"ON THE SEARCH FOR THE ELECTRON ANTINEUTRINO REST MASS IN TRITIUM BETA-DECAY". Physics Letters B 350 (1995), p.263

[95] Ch. Weinheimer et al. High precision measurement of the tritium beta spectrum near its endpoint and upper limit on the neutrino mass. Phys. Lett. B460 (1999) 219

[96] V.M.Lobashev, A.I.Belesev, A.I.Berlev, E.V.Geraskin, A.A.Golubev, O.V.Kazachenko, Yu.E.Kuznetsov, L.A.Ryvkis, B.E.Stern, N.A.Titov, I.E.Yarykin, S.V.Zadorozhny, Yu.I.Zakharov "NEUTRINO REST MASS AND ANOMALY IN THE TRITIUM BETA-SPECTRUM". Nuclear Physics A 654 (1999), p.982-987

[97] The search for the neutrino mass by direct method in the tritium beta-decay and perspectives of study it in the project KATRIN [Текст] / V.M. Lobashev // Nuclear Physics A. — 2003. — Т. 719. — С. C153-C160.

[98] V.M. Lobashev, V.N.Aseev, A.I. Belesev, A.I. Berlev, E.V. Geraskin, A.A. Golubev, O.V. Kazachenko, Y.E. Kuznetsov, R.P. Ostroumov, L.A. Rivkis, B.E. Stern, N.A. Titov, C.V.Zadoroghny, Y.I. Zakharov. Direct search for neutrino mass and anomaly in the tritium beta-spectrum: Status of «Troitsk neutrino mass» experiment. / // Nuclear Physics B - Proceedings Supplements. — 2001. — Т. 91, № 1-3. — С. 280-286.

[99] The Review of Particle Physics [Текст] / K. Nakamura et al. (Particle Data Group) — 2010. — Т. 37, № 075021.

[100] KATRIN. Karlsruhe Tritium Neutrino Experiment `http://www.katrin.kit.edu`

[101] M. Aker et al. An improved upper limit on the neutrino mass from a direct kinematic method by KATRIN. // arXiv.org hep-ex arXiv: 1909.06048 13 Sep 2019.

[102] Отчеты о научно-исследовательской работе Института ядерных исследований РАН. `http://www.inr.ru/rep2019/3_kv.docx`

[103] И.Е. Ишемгужин, Т.И. Габбасов, И.А. Шаммазов, М.Р. Ситдиков, М.А. Кочеков Демпфирование параметрических колебаний трубопровода. // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело», 2011, № 3, с.84-95.
`http://www.ogbus.ru`

[104] Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостоптехиздат, 1956. - 600 с.

[105] D.Douglas, N.V. Konenkov, M.Sudakov, Matrix Methods for the Calculation of Stability Diagrams in Quadrupole Mass Spectrometry, J. Am. Soc. Mass Spectrom, v.13, pp. 593-613, 2002

[106] А.Т.Лебедев. Масс-спектрометрия в органической химии. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. - 493 с., ил. - (Методы в химии).

[107] Бутиков Е.И. Параметрический резонанс. // Компьютерные инструменты в образовании, 2009, 3, стр. 18-36.

[108] Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний // – Изд. 4, исп. и доп.1974. 504 с.

[109] E.D. Courant and H.S. Snyder Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron. // Annals of Physics 281, 360-408 (2000)

[110] Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И.. Лекции по небесной механике: Учеб. пособ. для вузов. -. Алматы, Издат., 2009. 227 с

[111] А. П. Маркеев. Задача трёх тел и её точные решения // Соросовский образовательный журнал. — 1999. — № 9. с.112-117/

[112] А.И. Мартынова, В.В. Орлов, А.В. Рубинов и др. Динамика тройных систем: Учеб. пособие // СПб.: Изд-во. С.-Петерб. ун-та, 2010. 216 с.

[113] И.А. Герасимов Задача двух неподвижных центров. Л. Эйлера. Московский гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, Гос. астрономический ин-т им. П. К. Штернберга. - Фрязино: Век 2, 2007. - 172 с.

[114] И.А. Герасимов Функции Вейерштрасса и их приложения в небесной механике и астрономии. М: Издательство МГУ, 1990. 152 с.

[115] И. А. Герасимов, Б. Р. Мушаилов. Небесная механика (Общий курс).— М. 2007. 596 с.

[116] https://ru.wikipedia.org/wiki/

[117] Астронет. В.Г.Сурдин. Люки Кирквуда. http://www.astronet.ru/db/msg/1162281

[118] Sainz M.A., Armengol J., Calm R., Herrero P., Jorba L.J., Vehi J. Modal Interval Analysis: New Tools for Numerical Information. – Cham, Switzerland: Springer, 2014. – (*Lecture Notes in Mathematics; vol. 2091*).

[119] Козлов Ю.В., Мартемьянов В.П., Мухин К.Н. Проблема массы нейтрино в современной нейтринной физике // Успехи Физических Наук. – 1997. – Т. 167. – С. 849–885. DOI: 10.3367/UFNr.0167.199708c.0849

[120] С.А. Алексеев, А.Л. Дмитриев, Ю.Т. Нагибин, Е.М. Никущенко, А.С. Супрун, В.А. Трофимов, А. Туркбоев, В.Т. Прокопенко, А.Д. Яськов. Экспериментальные методы исследования: Учебное пособие // - СПб.: НИУ ИТМО, 2012. - 81 с.

[121] Чопра К., Дас С. Тонкопленочные солнечные элементы: Пер. с англ. с сокращениями.— М.: Мир, 1986. — 435 с.

[122] . Частное сообщение. Лаборатория физики полупроводниковых приборов Лебедева А.А. ФТИ им.А.Ф.Иоффе РАН.

[123] Sainz M.A., Armengol J., Calm R., Herrero P., Jorba L.J., Vehi J. Modal Interval Analysis: New Tools for Numerical Information. – Cham, Switzerland: Springer, 2014. – (*Lecture Notes in Mathematics; vol. 2091*).

[124] E. Gardenes, A.Trepat, J.M. Janer Approaches to simulation and to the linear problem in the SIGLA system. // Gardenes, E., Trepat, A., and Janer, J. M.: Approaches to Simulation and to the Linear Problem in the SIGLA System, Freiburger Interval-Berichte 81 (8) (1981), pp. 1-28.

[125] Nesterov, V.M. Interval and Twin Arithmetics. Reliable Computing 3, 369–380 (1997). https://doi.org/10.1023/A:1009945403631

[126] В.М. Нестеров Твинные арифметики и их применение в методах и алгоритмах двустороннего интервального оценивания. дисс.

д.ф.-м.н. г.Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук, 1999, с. 234.

Index