Министерство образования и науки Российской федерации
Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого

Н.Н. Амосова

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ.

Расчетные задания.
Учебное пособие

Санкт-Петербург
2021 г.

Предисловие.

Индивидуальные расчетные задания по различным разделам курса высшей математики чрезвычайно актуальны в настоящее время, ввиду широкого распространения дистанционного образовательного процесса и способствуют получению необходимых знаний и навыков для дальнейшего их использования в других разделах курса высшей математики, а также при изучении других дисциплин.

Настоящее пособие содержит 30 вариантов расчетного задания по теме: «Определенный интеграл и его приложения», а также типовой вариант с подробным решением.

Учебное пособие соответствует образовательному стандарту высшего образования Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» по действующим программам дисциплины «Высшая математика» по подготовке бакалавров и специалистов всех общетехнических и экономических направлений очного и заочного обучения.

Предназначено для преподавателей и студентов первых двух курсов, изучающих общий курс математики по подготовке бакалавров и специалистов всех общетехнических и экономических направлений очного и заочного обучения.

Образец выполнения типового варианта из учебного пособия

«Определенный интеграл и его приложения».

<u>Задание 1.</u>

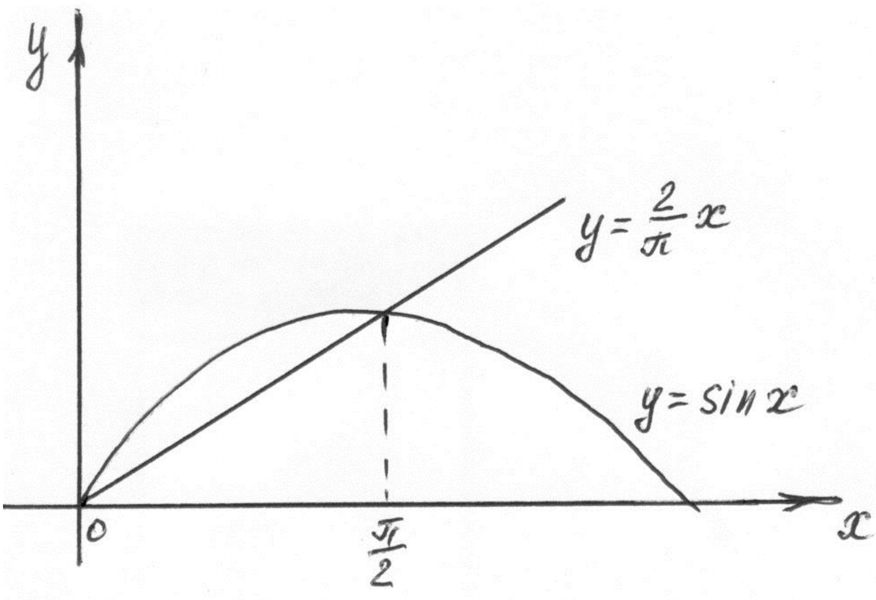
Найти площадь области, ограниченной линиями

$$y = sinx\ ,$$

$$y = \frac{2}{\pi}x.$$

<u>Решение.</u>

Сделаем рисунок



Нетрудно видеть, что данные линии пересекаются в точках с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Известно, что площадь области, ограниченной прямыми

$$x = a, \quad x = b$$

и двумя непрерывными кривыми

$$y = f(x) \quad \text{и} \quad y = g(x)$$

при условии, что $f(x) \geq g(x)$,

вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Возвращаясь к нашей задаче, имеем

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(sinx - \frac{2}{\pi}x\right)dx = (-cosx - \frac{x^2}{\pi})\Big|_0^{\pi/2} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

<u>Ответ:</u> $S = 1 - \frac{\pi}{4}$

Задание 2.

Найти площадь, ограниченную кривой

$$r = \sqrt{2}cos4\varphi.$$

Решение:

Так как $r \geq 0$, то $cos4\varphi \geq 0$,

следовательно,

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 4\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

Получаем фигуру, состоящую из четырех лепестков, причем

при $k = 0$: $-\frac{\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8}$,

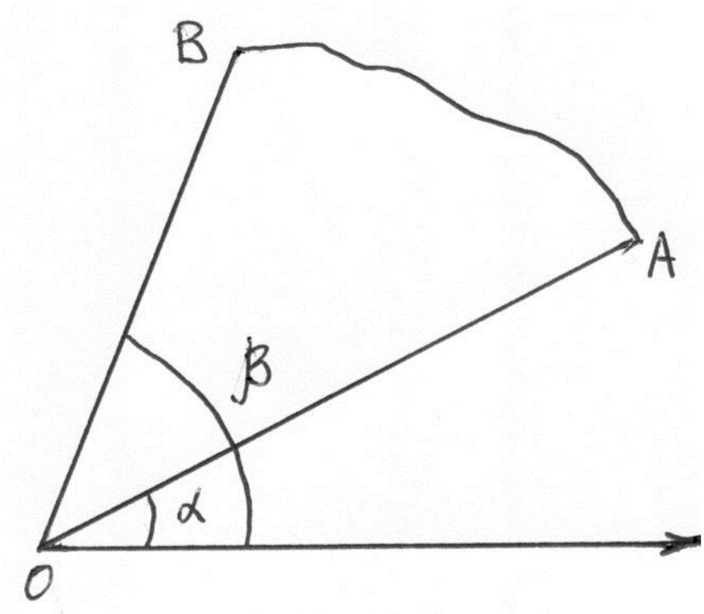
при $k = 1$: $\frac{3\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{8}$,

при $k = 2$: $\frac{7\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{9\pi}{8}$,

при $k = 3$: $\frac{11\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{13\pi}{8}$

Известно, что если непрерывная кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi)$, то площадь сектора OAB, ограниченного дугой кривой и двумя полярными радиусами OA и OB, соответствующими значениям

$\varphi_1 = \alpha$ и $\varphi_2 = \beta$ выразится интегралом



$$S = \frac{1}{2}\int_{\propto}^{\beta} (f(\varphi))^2\, d\varphi$$

В нашем задании, ввиду симметрии, достаточно вычислить площадь одного лепестка и полученный результат умножить на четыре.

Таким образом,

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} 2cos^2 4\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} (1 + cos8\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{sin8\varphi}{8}\right)\Big|_{-\pi/8}^{\pi/8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} \text{ и } S = 4\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$$

<u>Ответ</u>: $S = \frac{\pi}{2}$.

Задание 3.

Найти длину дуги кривой

$$y = \ln cosx \quad (0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2})$$

Решение.

Длина дуги гладкой (непрерывно дифференцируемой) кривой

$y = \ y(x) \quad (a \leq x \leq b)$ равна

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

Поэтому, если учесть, что

$y'(x) = \frac{-sinx}{cosx}$ и $1 + y'^2(x) = 1 + \frac{sin^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}$,

имеем

$$s = \int_0^a \frac{1}{cosx} dx = \int_0^a \frac{cosx}{cos^2x} dx = \begin{bmatrix} sinx = t \\ cosxdx = dt \end{bmatrix} = \int_0^{sina} \frac{dt}{1 - t^2} =$$

$$= \frac{1}{2} ln \left|\frac{1 - t}{1 + t}\right|\Bigg|_0^{sina} = \frac{1}{2} ln \left|\frac{1 - sina}{1 + sina}\right| = lntg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)$$

Ответ: $s = lntg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)$.

<u>Задание 4.</u>

Найти объем тела, получающегося от вращения вокруг оси OX площади, ограниченной осью OX и параболой $y = 2x - x^2$.

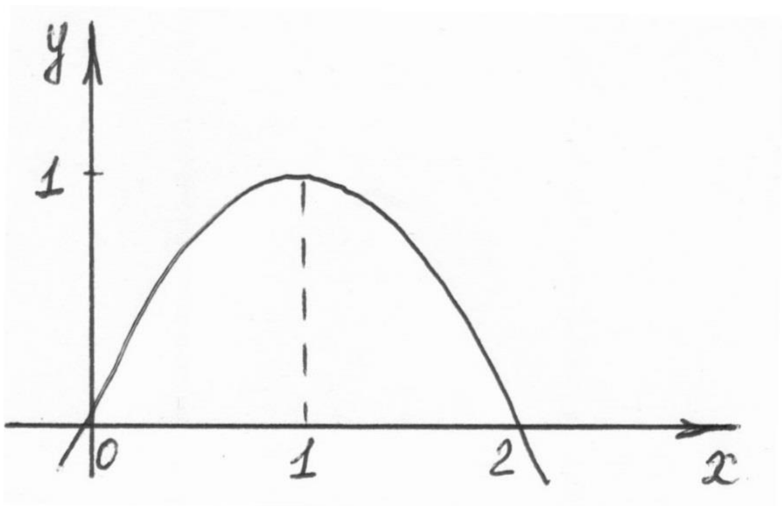
<u>Решение.</u>

Как известно, объем тела, образованного вращением вокруг оси OX площади $a \le x \le b,\ 0 \le y \le y(x)$, где $y(x)$ непрерывная функция, равен

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)dx$$

Парабола $y = 2x - x^2$ пересекает ось OX в точках $x = 0$ и $x = 2$.

Сделаем рисунок



Таким образом,

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx = \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{15}\pi$$

<u>Ответ</u>: $V = \frac{16}{15}\pi$.

Задание 5.

Исследовать следующий интеграл на сходимость.

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^3 + x^2 + 10} dx$$

Решение.

Данный интеграл – это несобственный интеграл I рода. Исследуем поведение подынтегральной функции при $x \to +\infty$.

Имеем $\frac{x}{x^3+x^2+10} = \frac{x}{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{10}{x^3}\right)} \sim \frac{1}{x^2}$ при $x \to +\infty$.

Известно, что интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}$ сходится, если $\lambda > 1$ и расходиться, если $\lambda \le 1$.

В нашем случае $\lambda = 2$, поэтому $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} dx$ сходится.

Теперь воспользуемся следующей теоремой.

Теорема (второй признак сравнения).

Пусть $f(x)$и $g(x)$ определены при $x \ge a$ и в области определения $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

Пусть $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, где $0 < K < +\infty$.

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ведут себя одинаково, то есть сходятся или расходятся одновременно.

Согласно второму признаку сравнения $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^3+x^2+10} dx$ сходится.

Ответ: интеграл сходится.

Задание 6.

Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{sinx} \cdot \sqrt{1-x^2}}$$

Решение.

Данный интеграл – это несобственный интеграл II рода.

Особые точки: $x = 0$ и $x = 1$.

Запишем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{sinx} \cdot \sqrt{1-x^2}} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{sinx} \cdot \sqrt{1-x^2}} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{sinx} \cdot \sqrt{1-x^2}} = J_1 + J_2.$$

Рассмотрим

$$J_1 = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{sinx} \cdot \sqrt{1-x^2}}$$

Исследуем поведение подынтегральной функции в окрестности нуля.

Так как $sinx \sim x$ при $x \to 0$, то $\frac{1}{\sqrt{sinx} \cdot \sqrt{1-x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x \to 0$

Используем тот факт, что $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ сходится, если $\lambda < 1$ и расходится, если $\lambda \geq 1$.

Поэтому $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$.

Теперь воспользуемся следующей теоремой.

Теорема (второй признак сравнения).

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены в области $[a, b)$и в этой области

$f(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

Пусть $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, где $0 < K < +\infty$.

Тогда $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ ведут себя одинаково, то есть сходятся или расходятся одновременно. Согласно второму признаку сравнения интеграл J_1 сходится.

Рассмотрим $J_2 = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{sinx} \cdot \sqrt{1-x^2}}$

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{sinx} \cdot \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{sinx} \cdot \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}}$

Сравним её с функцией $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Так как $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sqrt{sin1} \cdot \sqrt{2}}$ и $\int_{1/2}^1 g(x)dx = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$,

то и J_2 также сходится по второму признаку сравнения.

Так как интегралы J_1 и J_2 сходятся, то и данный интеграл также сходится.

Ответ: интеграл сходится.

Вариант 1

1. Вычислить площадь, ограниченную параболами

$$y = 4 - x^2,$$

$$y = x^2 - 2x.$$

2. Найти площадь, ограниченную прямой $y = 4$ и циклоидой

$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}, \qquad y \geq 4 \quad (0 < x < 8\pi).$$

3. Найти длину дуги кривой

$$y = ln\frac{5}{2x}$$

от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.

4. Найти объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом

$$z = x^2 + 4y^2$$

и плоскостью $z = 2$.

5. Исследовать на сходимость следующий несобственный интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{x^5 - x^2 + 1}$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$$

Вариант 2

1. Вычислить площадь, ограниченную кривой

$y = x\sqrt{9 - x^2}$ и прямой $y = 0 \quad (0 \leq x \leq 3)$.

2. Найти площадь, ограниченную кривыми

$$r = \sqrt{3}\cos\varphi, \quad r = \sin\varphi$$

$$\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

3. Найти длину кривой

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX площади, ограниченной параболой

$$y = -x^2 + 5x - 6$$

и прямой $y = 0$.

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{1 + x^6}\,dx$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_{1/2}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$$

Вариант 3

1. Вычислить площадь, ограниченную кривой

$$y = \sin x \cdot cos^2 x$$

и осью абсцисс, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

2. Найти площадь, ограниченную астроидой

$$\begin{cases} x = 16cos^3 t \\ y = sin^3 t \end{cases}$$

и прямой $x = 6\sqrt{3}$ $(x \ge 6\sqrt{3})$.

3. Найти длину дуги кривой

$$y = e^x + 6$$

от $x = ln\sqrt{8}$ до $x = ln\sqrt{15}$.

4. Найти объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

и плоскостями z = 0 и z = 1.

5. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{arctgx}{x} dx$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(sinx)}{\sqrt{x}} dx$$

Вариант 4

1. Вычислить площадь, ограниченную кривой

$$y = \cos x \cdot sin^2 x$$

и осью OX ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$).

2. Найти площадь, ограниченную кривой

$$r = \cos 3\varphi.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$y = e^x + 13,$$

$$ln\sqrt{15} \leq x \leq ln\sqrt{24}.$$

4. Найти объем тела, ограниченного двуполостным гиперболоидом:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1$$

и плоскостью z = 16.

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}}$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_{1/2}^1 \frac{lnx}{1 - x^2} dx$$

Вариант 5

1. Найти площадь, ограниченную кривой

$$y = x^2\sqrt{4 - x^2},$$

прямой $y = 0, \quad 0 \le x \le 2.$

2. Найти площадь, ограниченную астроидой

$$\begin{cases} x = 8\sqrt{2}cos^3t \\ y = \sqrt{2}sin^3t \end{cases}$$

и прямой $x = 4 \quad (x \ge 4).$

3. Найти длину дуги кривой

$$y = arcsinx + \sqrt{1 - x^2}$$

4. Найти объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом

$$z = x^2 + 9y^2$$

и плоскостью z =1.

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x}$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_{1/2}^{1} \frac{lnx}{1 - x} dx$$

Вариант 6

1. Найти площадь, ограниченную кривой

$$y = \frac{1}{x\sqrt{1 + lnx}}$$

осью OX и прямыми $x = 1, \quad x = e^3$.

2. Найти площадь, ограниченную кривыми

$$r = 2cos\varphi, \qquad r = 2\sqrt{3}sin\varphi$$

$$(0 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2}).$$

3. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 4cos^3 t \\ y = 4sin^3 t \end{cases}, \qquad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

4. Найти объем тела, получающийся при вращении вокруг оси OX площади, ограниченной линией

$$y = xe^x$$

осью OX и прямой $x = 1$.

5. Исследовать на сходимость следующий несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + \sqrt[4]{x^5 + 1}}$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_1^2 \frac{dx}{\ln(x - 1)}$$

Вариант 7

1. Найти площадь, ограниченную кривой

$$y = arccosx$$

и осями OX и OY.

2. Найти площадь, ограниченную кривой

$$\begin{cases} x = 3cost \\ y = 8sint \end{cases}$$

и прямой $y = 4 \quad (y \geq 4)$.

3. Найти длину кривой

$$y = \sqrt{x - x^2} + arcsin\sqrt{x}.$$

4. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX кривой

$$y = arcsinx$$

в промежутке от $x = 0$ до $x = 1$.

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + x}$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{sinx} - 1}$$

Вариант 8

1. Найти площадь, ограниченную параболами

$$y = (x+1)^2,$$

$$y^2 = x + 1.$$

2. Найти площадь, ограниченную кривыми

$$r = \cos\varphi,$$

$$r = 2cos\,\varphi.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$y = \ln(1 - x^2), \quad \text{от} \quad x = 0 \ \text{до}\ x = \frac{1}{2}.$$

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX площади, содержащейся между параболами

$$2x - x^2 - y = 0,$$

$$2x^2 - 4x + y = 0.$$

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{arctgx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}dx$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$$

Вариант 9

1. Найти площадь, ограниченную параболами

$$y = 2x - x^2 + 3,$$

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

2. Найти площадь, ограниченную аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = 6(t - sint) \\ y = 6(1 - cost) \end{cases}$$

и прямой $y = 6$ $(y \geq 6, \quad 0 < x < 12\pi)$.

3. Найти длину кривой

$$y = -arccos\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}.$$

4. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX кривой

$$y = cos^2 x$$

в промежутке от $x = -\frac{\pi}{2}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{1 + x^6} dx$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{e^x - 1} dx$$

Вариант 10

1. Найти площадь, ограниченную кривой

$$y = x \cdot arctgx$$

и прямыми $y = 0,\ x = \sqrt{3}$.

2. Найти площадь, ограниченную кривой

$$r = sin6\varphi.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$y = e^x + 26$$

от $x = ln\sqrt{8}$ до $x = ln\sqrt{24}$.

4. Найти объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом

$$z = 4x^2 + 9y^2$$

и плоскостью $z = 6$.

5. Исследовать на сходимость следующий интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x + \sqrt[3]{x^2}} dx$$

Вариант 11

1. Найти площадь, ограниченную кривой

$$y = x^2\sqrt{8 - x^2}$$

и осью OX ($0 \le x \le 2\sqrt{2}$).

2. Найти площадь, ограниченную астроидой

$$\begin{cases} x = 8cos^3t \\ y = 4sin^3t \end{cases}$$

и прямой $x = 3\sqrt{3}$ ($x \ge 3\sqrt{3}$).

3. Найти длину кривой

$$y = lnsinx$$

в промежутке от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

4. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX кривой

$$y = sin^2x$$

в промежутке от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[5]{x^2 + 1}}$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 x \cdot ln^2 \frac{1}{x} dx$$

Вариант 12

1. Найти площадь, ограниченную кривой

$$y = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$$

осью OX и прямой $x = 1$.

2. Найти площадь, ограниченную кривыми

$$r = 2cos\varphi,$$

$$y = 3cos\varphi.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}cos\,t - \frac{1}{4}\cos 2t \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}sin2t \end{cases}, \qquad \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}.$$

4. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX круга

$$x^2 + (y-2)^2 = 1.$$

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{(arctgx)^2}{x^2} dx$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{ln^2 \frac{1}{x}}{x^2} dx$$

Вариант 13

1. Найти площадь, ограниченную кривой

$$y = \frac{1}{1 + cosx}$$

осью OX и прямыми $x = -\frac{\pi}{2}, \ x = \frac{\pi}{2}$.

2. Найти площадь, ограниченную кривой

$$\begin{cases} x = 6cost \\ y = 4sint \end{cases}$$

и прямой $y = 2\sqrt{3}$ $(y \geq 2\sqrt{3})$.

3. Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 3}{4}$$

в промежутке от $x = 0$ до $x = 2$.

4. Найти объем тела, ограниченного двуполостным гиперболоидом

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1$$

и плоскостью $z = 12$.

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{cos5x}{1 + x^3} dx$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Вариант 14

1. Найти площадь, ограниченную параболой

$$x = (y-2)^2 \text{ и прямой } x = 4y - 8.$$

2. Найти площадь, ограниченную аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = 10(t - \sin t) \\ y = 10(1 - \cos t) \end{cases}$$

и прямой $\quad y = 15 \qquad (y \geq 15,\ 0 < x < 20\pi).$

3. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = e^t(cost + \sin t) \\ y = e^t(cost - \sin t), \end{cases} \qquad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi.$$

4. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX площади, содержащейся между кривыми

$$y = sin\frac{\pi x}{2} \text{ и}$$

$$y = x^2.$$

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^3 + 1}}$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{1}{x \cdot ln\frac{1}{x}}$$

Вариант 15

1. Найти площадь, ограниченную кривой

$$y = cos^5x \cdot sin2x$$

и осью OX $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$.

2. Найти площадь, ограниченную астроидой

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}cos^3t \\ y = \sqrt{2}sin^3t \end{cases}$$

и прямой $x = 1 \quad (x \geq 1)$.

3. Найти длину дуги кривой

$$y = -arccosx + \sqrt{1 - x^2} + 2$$

в промежутке от $x = 0$ до $x = \frac{9}{16}$.

4. Найти объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом

$$z = 2x^2 + 18y^2$$

и плоскостью $z = 6$.

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{arctgx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^4 + 1}} dx$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{sinx \cdot cosx}}$$

Вариант 16

1. Найти площадь, ограниченную кривой

$$y = \frac{x}{(x^2+1)^2},$$

осью абсцисс и прямой $x = 1$.

2. Найти площадь, ограниченную кривой

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}cost \\ y = 4\sqrt{2}sint \end{cases}$$

и прямой $y = 4 \qquad (y \geq 4)$.

3. Найти длину дуги кривой

$$y = 2 + arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}\,, \qquad \frac{1}{4} \leq x \leq 1.$$

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривой

$$y = e^{1-x}$$

и прямыми $y = x,\ \ x = 0$.

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} dx$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{sin^2x\sqrt{cosx}}$$

Вариант 17

1. Найти площадь, ограниченную параболами

   $x = 4 - y^2$ и $x = y^2 - 2y$.

2. Найти площадь, ограниченную аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = t - sint \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

   и прямой $y = 1$ $(y \geq 1,\ 0 < x < 2\pi)$.

3. Найти длину дуги кривой

$$y = \sqrt{1 - x^2} + arccosx$$

   от $x = 0$ до $x = \frac{8}{9}$.

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX площади, содержащейся между кривыми

$$y = \frac{1}{5} \cdot arcsinx, \quad y = arcsinx\ ,$$

   которая отсекается прямой $x = 1$.

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-5x}\, dx$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1 - x^2}}$$

Вариант 18

1. Найти площадь, ограниченную кривой

$$y = \frac{e^{1/x}}{x^2}$$

осью OX и прямыми $x = 1, \ x = 2.$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$r = 5cos\varphi,$$

$$y = 7cos\varphi.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = e^t(cost + sint) \\ y = e^t(cost - sint) \end{cases}, \ \ 0 \le t \le \pi.$$

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX площади, содержащейся между кривыми

$$y = 2x^3, \quad y = 2x^2.$$

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x + \sqrt[4]{x^3 + 1} + 5}$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{ln\frac{1}{x}}} dx$$

Вариант 19

1. Найти площадь, ограниченную кривой

$$y = x^2\sqrt{16 - x^2},$$

прямой $y = 0, \quad 0 \leq x \leq 4.$

2. Найти площадь, ограниченную астроидой

$$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}cos^3t \\ y = 2\sqrt{2}sin^3t \end{cases}$$

и прямой $x = 2 \quad (x \geq 2).$

3. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 3(t - sint) \\ y = 3(1 - cost) \end{cases}, \quad \pi \leq t \leq 2\pi.$$

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми

$$y = arcsinx, \; y = arccosx \text{ и осью OX.}$$

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{cos2x}{x^3 + 1} dx$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x} \cdot ln\frac{1}{x}} dx$$

Вариант 20

1. Найти площадь, ограниченную параболами

$$y = (x-1)^2,$$

$$y^2 = x - 1.$$

2. Найти площадь, ограниченную кривой

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}cost \\ y = 2\sqrt{2}sint \end{cases}$$

и прямой $y = 2$ $(y \geq 2)$.

3. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = (t^2-2)sint + 2tcost \\ y = (2-t^2)cost + 2tsint \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX площади, ограниченной линией

$$y = arccos\frac{x}{3} \text{ и осью OX.}$$

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} dx$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{x^{2/3}}{2^{sinx}-1} dx$$

Вариант 21

1. Найти площадь, ограниченную параболами

$$y = 4 - (x-1)^2,$$

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

2. Найти площадь, ограниченную кривой

$$r = 6cos3\varphi$$

и лежащую вне круга $r = 3$.

3. Найти длину дуги кривой

$$y = -arccosx + \sqrt{1-x^2} + 1$$

от $x = 0$ до $x = \frac{9}{16}$.

4. Найти объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

и плоскостями $z = 0$, $z = 2$.

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^3} dx$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{2^{x^2} - 1}$$

Вариант 22

1. Найти площадь, ограниченную кривой

$$y = x^2 cosx,$$

прямой $y = 0, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

2. Найти площадь, ограниченную кривыми

$$r = sin\varphi,$$

$$r = 2sin\varphi.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = e^t(cost + sint) \\ y = e^t(cost - sint) \end{cases}, \quad 0 \le t \le \frac{3\pi}{2}.$$

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX площади, содержащейся между кривыми

$$y = x^3 \quad \text{и} \quad y = \sqrt{x}.$$

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{lnx}}$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(2^{tgx} - 1)^3} dx$$

Вариант 23

1. Найти площадь, ограниченную кривой

$$y = x^2 \cdot \sqrt{25 - x^2},$$

Прямой $y = 0, \quad 0 \le x \le 5.$

2. Найти площадь, ограниченную кривыми

$$r = \frac{5}{2} sin\varphi,$$

$$r = \tfrac{3}{2} sin\varphi.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$y = 1 - \ln(x^2 - 1)$$

от $x = 3$ до $x = 4.$

4. Найти объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1$$

и плоскостями $z = 0, \; z = 5.$

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x} \cdot lnx}$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(e^{tgx} - 1)}$$

Вариант 24

1. Найти площадь, ограниченную астроидой

$$\begin{cases} x = 16cos^3t \\ y = 2sin^3t \end{cases}$$

и прямой $x = 2 \quad (x \geq 2)$.

2. Найти площадь, ограниченную кривыми

$$r = 6sin\varphi,$$

$$r = 4sin\varphi.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 2{,}5(t - sint) \\ y = 2{,}5(1 - cost) \end{cases}, \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi.$$

4. Найти объем тела, ограниченного двуполостным гиперболоидом

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1$$

и плоскостью $z = 20$.

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_0^{+\infty} \frac{ln^2(1+x)}{x^2} dx$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{xdx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$$

Вариант 25

1. Найти площадь, ограниченную аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$

   и прямой $y = 3$ $(y \geq 3, \quad 0 < x < 4\pi)$.

2. Найти площадь, ограниченную кривой

$$r = 4sin3\varphi$$

   и лежащую вне круга $r = 2$.

3. Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{1}{2}(1 - e^x - e^{-x}),\ 0 \leq x \leq 3.$$

4. Найти объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1$$

   и плоскостями $z = 0$ и $z = 4$.

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{lnx}}$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{(1 - cosx)^2}{x^2 + \sqrt{x}} dx$$

Вариант 26

1. Найти площадь, ограниченную кривой

$$\begin{cases} x = 6cost \\ y = 2sint \end{cases}$$

и прямой $y = \sqrt{3}$ $(y \geq \sqrt{3})$.

2. Найти площадь, ограниченную кривой

$$y^2 = (1 - x^2)^3.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 2(t - sint) \\ y = 2(1 - cost) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

4. Найти объем тела, получающегося при вращении вокруг оси OX площади, ограниченной кривыми

$$y = 5cosx,$$

$$y = cosx,$$

и прямой $x = 0$ $(x \geq 0)$.

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \frac{lntgx}{x} dx$$

Вариант 27

1. Найти площадь, ограниченную астроидой

$$\begin{cases} x = 8\sqrt{2}cos^3t \\ y = \sqrt{2}sin^3t \end{cases}$$

и прямой $x = 4 \quad (x \geq 4)$.

2. Найти площадь, ограниченную кривой

$$r = 2cos6\varphi.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$y = -lncosx, \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}.$$

4. Найти объем тела, получающегося при вращении вокруг оси OX площади, ограниченной кривой

$$y = \sqrt[4]{x-2}$$

и прямой $x = 4$.

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 arctgx}{2 + x^5} dx$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{2^x - 1} dx$$

Вариант 28

1. Найти площадь, ограниченную кривой

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}cost \\ y = 3\sqrt{2}sint \end{cases}$$

и прямой $y = 3 \quad (y \geq 3)$.

2. Найти площадь, ограниченную кривыми

$$y = lnx,$$

$$y = ln^2x.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 10cos^3t \\ y = 10sin^3t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

4. Найти объем тела, получающегося при вращении вокруг оси OX площади, ограниченной кривыми

$$y = 3sinx, \qquad y = 5sinx,$$

$$0 \leq x \leq \pi.$$

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_0^{+\infty} \frac{xarctgx}{5 + x^2} dx$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \frac{ln^2(sinx)}{x^{3/2}} dx$$

Вариант 29

1. Найти площадь, ограниченную аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$$

и прямой $\quad y = 9 \quad (y \geq 9, \quad 0 < x < 12\pi).$

2. Найти площадь, ограниченную кривой

$$r = 1 + \sqrt{2} cos\varphi.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 2cos^3 t \\ y = 2sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

4. Найти объем тела, получающегося при вращении вокруг оси OX площади, ограниченной кривыми

$$y = sinx, \qquad y = sin^2 x,$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(1 + x)}}{x^2} dx$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

Вариант 30

1. Найти площадь, ограниченную астроидой

$$\begin{cases} x = 32cos^3t \\ y = sin^3t \end{cases}$$

и прямой $x = 4$ $(x \geq 4)$.

2. Найти площадь, ограниченную параболами

$$y^2 + 8x = 16,$$

$$y^2 - 24x = 48.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)sint + 2tcost \\ y = (2 - t^2)cost + 2tsint \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

4. Найти объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{144} = 1$$

и плоскостями $z = 0$ и $z = 6$.

5. Исследовать следующий интеграл на сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^3 + 5x^2 + 3}$$

6. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot lnln\frac{1}{x}}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математики: [Полный курс], 13-е издание, Москва, Изд-во Айрис-пресс, 2015.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. Учебник, 3-е изд., испр. – М.: Наука, 1988