Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

И. Г. Черноруцкий С.М.Устинов Е.Г.Локшина

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2022

УДК 621.301
ББК 32.88
Д14

Черноруций И.Г. Элементы теории принятия решений: учеб. пособие /И.Г. Черноруцкий, С.М.Устинов, Е.Г.Локшина. – СПб., 2022. – 157 с.

Основная направленность данного учебного издания – пользовательский, прикладной аспект. Излагаемые теория, методы и алгоритмы позволят читателю овладеть принципами корректного и обоснованного применения существующих программных систем поддержки принятия решений, а также создавать новые системы.

Учебное пособие предназначено для обучения студентов высших учебных заведений по направлениям подготовки бакалавров и магистров «Информатика и вычислительная техника», «Программная инженерия», «Системный анализ и управление».

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии описываются методы теории принятия решений, составляющей важнейший раздел системного анализа. Термин «системный анализ» понимается здесь как совокупность методов, основанных на использовании компьютерных технологий и ориентированных на исследование сложных систем – технических, экономических, экологических, программных и т.д. Результатом этих исследований, как правило, является выбор определенной альтернативы: плана развития фирмы, параметров конструкции, стратегии управления проектом и т.п. Таким образом, системный анализ согласно принятой в данном пособии интерпретации – это дисциплина, занимающаяся проблемами принятия решений в условиях, когда выбор альтернативы требует анализа сложной информации, характеризующей реальную ситуацию. С другой стороны, известный термин «исследование операций» часто трактуется как дисциплина, занимающаяся количественным обоснованием решений в различных областях целенаправленной человеческой деятельности. Поэтому можно сказать также, что данное пособие посвящено исследованию операций.

Основная направленность данного издания – пользовательский, прикладной аспект. Пользовательский аспект в данном случае понимается несколько шире, чем это обычно принято. Речь пойдет не только и не столько о пользовательском аспекте по отношению к каким-то программным продуктам, пакетам и системам поддержки принятия решений (СППР), но, в основном, о пользовательском аспекте в смысле внутреннего функционального наполнения подобных программных продуктов, о реализованных в них базовых принципах и применяемой в данной области терминологии. Приводимые сведения помогут будущему пользователю «вскрывать» используемые СППР, по крайней мере, в общих чертах, и представлять, каких результатов следует ожидать от конкретной СППР и каких она дать не сможет.

В пособии изложен материал, содержащий основы теории выбора вариантов из заданного множества альтернатив при различных типах неопределенностей. Рассмотрены задачи выбора в условиях неопределенности «среды» (принятие решений в условиях риска, в условиях полной неопределенности, в игровых ситуациях выбора), а также задачи выбора решений в условиях неопределенности цели – многокритериальные задачи выбора. Изложение сопровождается многочисленными модельными примерами, позволяющими легко оценивать ситуации на интуитивном уровне и облегчающими усвоение материала. Рассмотрение всех основных подходов и методов дано с алгоритмических позиций, позволяющих оценить в первую очередь практическую значимость обсуждаемого материала. Сложные математические модели почти не используются, что позволяет предъявлять минимальные требования к предварительной подготовке читателей.

Пособие предназначено для различных категорий читателей. Во-первых, это студенты вузов и других учебных заведений, занятые изучением дисциплин, связанных с современными информационными технологиями и компьютерным моделированием. Во-вторых, это уже дипломированные специалисты, желающие оценить возможности компьютерной поддержки для своих внутренних проблем. И наконец, это современные руководители, желающие применить в своей работе достижения из указанной области. В частности, знание основных результатов и принципов теории принятия решений и оптимизации позволит им не только лично руководствоваться ими, но и выдавать обоснованные задания своему системному аналитику или отделу системного анализа фирмы.

В настоящее время можно указать большое число предметных областей и практических ситуаций, когда выбор решения может и должен основываться на излагаемых в данной книге методах и технологиях. В частности, теория выбора и принятия решений, а также теория оптимизации могут быть использованы в таких областях как:

- задачи выбора оптимальной номенклатуры товара в торговых и иных организациях;
- задачи выбора персонала в фирме (например, при приеме на работу);
- задачи рациональной организации разработки программного обеспечения для компьютерных систем;
- задачи, решаемые в риэлтерских фирмах, оказывающих услуги населению на рынке недвижимости (например, подбор квартир);
- задачи оптимального выбора параметров (числовых характеристик) какой-либо системы (или организации) – проектируемой или реально существующей;
- формирование оптимальных стратегий поведения на рынке ценных бумаг;
- задачи принятия решений на финансовом рынке в условиях риска и неопределенности;
- задачи максимизации доходов в условиях аукционных торгов и т.д.

Количество соответствующих примеров может быть существенно увеличено.

ВВЕДЕНИЕ

Как показывает практика (и мы продемонстрируем это на реальных примерах), широко бытующее мнение о том, что достаточно иметь хорошее программное обеспечение (ПО) из соответствующей области (а оно обычно есть), чтобы с успехом приступать к решению практических задач, оказывается принципиально неверным. В простейших случаях (например, «проблемы», решаемые бухгалтерами) трудностей может и не быть, но в таких алгоритмически сложных областях, как принятие решений, управление, системное проектирование и т.д., ситуация совершенно иная.

Наличие хорошего ПО в соответствующей организации или фирме и хороших аппаратных средств – это лишь необходимое, но не достаточное условие. Кроме того, совершенно необходимой является высокая профессиональная подготовка лица, принимающего решение (ЛПР). Это не обязательно глава фирмы, это может быть специальный человек (так называемый системный аналитик) или группа лиц - отдел системного анализа. Указанное замечание относится не только к области принятия решений, но и к другим областям компьютерного моделирования, требующим привлечения нетривиальных математических моделей, лежащих в основе любых современных информационных технологий.

Приведем характерный пример, иллюстрирующий справедливость вышеприведенных замечаний. Мы выбрали для критики не очень свежую публикацию, однако и по сей день казусы, подобные излагаемым ниже, регулярно встречаются в практической работе, когда пренебрегают продекларированными выше (и ниже!) простыми принципами.

Рассматриваемая задача и ее решение взяты из книги Д. Табака и Б. Куо (Оптимальное управление и математическое программирование.– М:

Наука, 1975 г.; оригинал вышел в 1971 году в США). Авторы – профессора Коннектикутского и Иллинойского университетов, соответственно; перевод выполнен под редакцией Я.З. Цыпкина.

Рассматривается управляемая система второго порядка с одним управлением. Система описывается следующими разностными уравнениями состояния:

$$y_1(i+1) - y_1(i) - T_{i+1}(-y_1^2(i) + y_2(i) + u(i)) = 0$$
$$y_2(i+1) - y_2(i) - T_{i+1}y_1(i) = 0, \quad i = 0,1,\ldots,N-1,$$

где $y_j(i)$ – j-я компонента вектора состояния в дискретный момент t_i; $T_i = t_i - t_{i-1}$.

Задача заключается в выборе такой сеточной функции $u(i)$, чтобы перейти из заданного начального состояния

$$y(0) = (0,\ 1)$$

в целевую область

$$[y_1(N) - 10]^2 - y_2^2(N) - 1 \le 0$$

при минимуме показателя качества

$$J = \sum_{i=1}^{N}\left[y_1^2(i) + y_2^2(i) + 0.1u^2(i-1) \right]$$

и выполнении ограничений:

$$0 \le u(i) \le 1,\ \ \mathrm{i} = 0, 1,\ldots, N-1;$$

$$y_j(i) \ge 0,\ \ i = 1,\ldots, N;\ \ j = 1, 2.$$

При N = 12 (число периодов дискретизации) сформулированная задача естественным образом представляется как стандартная хорошо изученная задача нелинейного программирования с функционалом J, 48 переменными и 37 условиями. Здесь искомыми считаются все величины $y_j(i)$, $u(i)$, T_i. Для решения подобных задач нелинейного программирования разработаны «эффективные» методы и реализующие их программные системы оптимизации. Остается только воспользоваться ими, что авторы книги и проделали. Они использовали хорошо зарекомендовавший себя метод и программу последовательной минимизации без ограничений, разработанные известными американскими авторами Фиакко и Мак-Кормиком (метод штрафных функций). Полученные результаты представлены в виде таблицы и графика, которые должны убедить читателя в эффективности применяемого подхода. Приведем фрагмент полученной таблицы:

i	T_i (сек.)	t_i (сек.)	u (i–1)	y_1 (i)	y_2 (i)
1	0.00291	0.00291	0.0553	0.00265	0.964
2	0.00196	0.00487	0.5000	0.00375	0.930
3	0.00176	0.00663	0.5000	0.00434	0.898
4	0.00169	0.00832	0.0466	0.00467	0.867
5	0.00164	0.00996	0.0435	0.00479	0.839
6	0.00162	0.01158	0.0419	0.00473	0.812
7	0.00159	0.01317	0.0406	0.00480	0.786
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
12	13.18224	13.20211	0.0339	9.26978	0.683

Далее авторы книги занимаются анализом и обсуждением результатов, совершенно не замечая (вместе с переводчиком книги на русский язык и редактором перевода), что задача фактически не решена и ими получен случайный набор чисел. Действительно, согласно разностным уравнениям системы, переменная $y_2(i)$ должна монотонно возрастать:

$$y_2(i + 1) - y_2(i) = T_{i+1} y_1(i) > 0.$$

Однако в таблице $y_2(i)$ монотонно убывает, т.е. в полученных результатах не удалось отразить даже качественные характеристики решения. При этом использовалась передовая по тем временам вычислительная техника (IBM-7094) и прекрасное программное обеспечение.

Книга содержит целый ряд других неверно решенных задач. Излишне говорить, что реализация на практике рекомендаций, полученных в результате подобных «исследований», может иметь крайне нежелательные, если не катастрофические последствия. Ведь рассматриваемые математические модели могут относиться к потенциально опасным реальным системам. Достаточно сказать, что в данной книге рассматриваются такие модели, как модель управления процессом отравления ксеноном в ядерных реакторах, модель управления ракетным ядерным реактором и т.п. Излишне также говорить, что примененные авторами обсуждаемой книги методы и технологии являются абсолютно корректными и с их помощью были успешно решены и решаются в настоящее время многие задачи компьютерного моделирования. Речь идет не о корректности применяемых методов , а о корректности их применения.

Таким образом, видимая тривиальность вычислительных задач моделирования вообще и задач принятия решений – в частности, а также наличие хорошо развитого современного программного обеспечения не дает оснований отказываться от привлечения к соответствующей деятельности хорошо подготовленных и квалифицированных системных аналитиков. Данное пособие и предназначена в первую очередь для начинающих системных аналитиков в области систем оптимизации и принятия решений.

Чтобы наглядно очертить тот круг задач, которые с разной степенью подробности будут затрагиваться в данном издании, рассмотрим несколько максимально упрощенных примеров из различных областей человеческой деятельности, которые можно трактовать как задачи принятия решений.

При этом под задачей *принятия решений* мы будем понимать задачу *выбора* наилучшего способа действия из некоторого множества допустимых вариантов. Дадим более точную формулировку.

Задано множество вариантов X (конечное или бесконечное). Выбор какого-либо из вариантов $x_i \in X$ приводит к некоторому исходу $y_j \in Y$, где Y – множество возможных исходов. Требуется выбрать такой x_i, чтобы получить наиболее благоприятный в определенном смысле исход y_j. Множество вариантов X часто называется также множеством альтернатив (хотя это противоречит канонам русского языка: альтернатив может быть только две). Мы также будем использовать термин альтернатива в указанном смысле.

Пример 1.Чтобы попасть из пункта A (остановка автобуса) в пункт B (лодочная станция) (рис. В.1), человек должен пройти вначале по асфальтовой дороге (отрезок Ax), а затем по пляжу (отрезок xB). Известны скорости передвижения по асфальтовой дороге и по песку. Спрашивается, в каком месте необходимо свернуть с асфальтовой дороги, чтобы затратить меньше времени на весь путь.

Сформулированную задачу можно рассматривать как задачу принятия решения: множество альтернатив состоит из множества точек прямой OC, т.е. из множества вещественных чисел x. Каждому решению

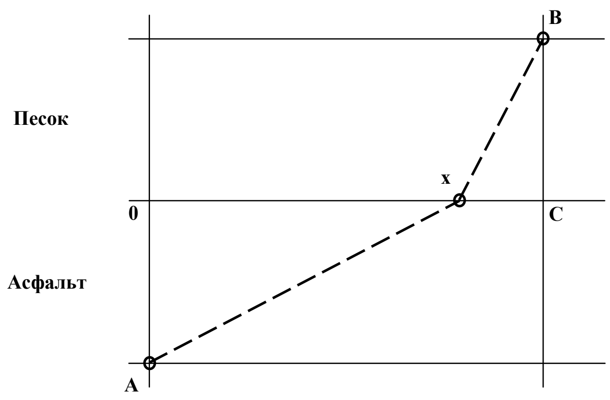


Рисунок В.1.

соответствует исход или результат – маршрут AxB. Таким образом, имеем задачу **принятия решения в условиях определенности**. Каждый исход (т.е. маршрут) оценивается числом – временем передвижения по маршруту.

Пример 2. Предположим, что при разработке некоторой логической электронной схемы нас кроме функциональных требований интересуют два показателя: потребляемая схемой мощность (f_1) и время задержки распространения сигнала (f_2), причем мы хотим минимизировать оба эти показателя. В наших возможностях варьирование параметров (номиналов) части резистивных элементов схемы $R_1, \dots, R_L$ в некоторых заданных границах. При этом каждому фиксированному набору $R = (R_1, \dots, R_L)$ этих параметров соответствует определенное значение f_1 потребляемой мощности и значение f_2 времени задержки. Таким образом, взяв за альтернативы наборы значений R, а затем в качестве исходов – соответствующие им пары чисел (f_1, f_2), приходим к задаче выбора решения в условиях определенности. Изобразив все возможные пары чисел (f_1, f_2) на плоскости, получим некоторую область F, каждая точка которой представляет собой один из возможных исходов (рис. В.2).

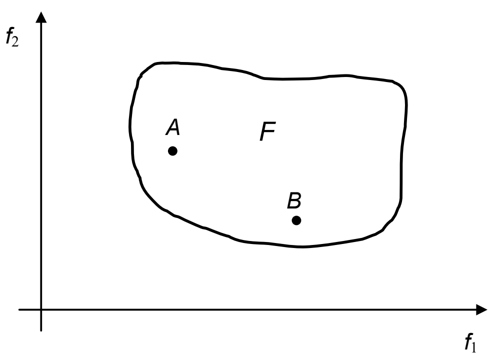


Рисунок В.2.

Так как для принятия решений в условиях определенности выбор альтернативы равнозначен выбору исхода, то принятие решения состоит здесь в выборе конкретной точки множества F. Какую точку надо взять в качестве оптимальной в данном случае?

По сравнению с примером 1 это уже более трудная задача, так как при наличии не одного, а двух показателей, оценивающих исход, ответить на вопрос, какое решение является наилучшим, гораздо сложнее. Например, в точке *A* (см. рис. В.2) значение показателя f_1 лучше (меньше), чем в точке *B*, но зато в точке *B* лучше значение показателя f_2. Какую из них предпочесть? В данном случае речь идет не столько о том, как найти оптимальное решение, сколько о том, что следует понимать под оптимальным решением, т.е. мы сталкиваемся здесь с трудностями не технического, а концептуального характера.

Пример 3. Студент института, войдя в трамвай, решает, брать ли билет. Здесь исход этого решения определяется двумя обстоятельствами: его решением и фактом появления контролера. Таким образом, студент выступает здесь в качестве принимающего решение, а факт появления контролера – в качестве среды. Имеются всего две альтернативы у принимающего решение и два состояния среды. Как здесь численно оценить «полезности» исходов? проще всего в качестве оценок взять выраженные в условных единицах денежные потери, как указано в табл. В.1.

Таблица В.1.

Альтернатива	Состояние среды	
	Появится контролер	Не появится контролер
Брать билет	2 у. е	2 у. е.
Не брать билета	8 у. е.	0

Какое следует принять решение, если целью считать минимизацию потерь? Это пример задачи принятия решений в условиях неопределенности.

Методы решения подобных задач существенно зависят от наличия дополнительной информации, например, о том, можно ли каждому состоянию среды приписать вероятность его наступления или нет. Кроме того принципиальным является вопрос о том, многократным или однократным является производимый выбор.

Пример 4 (дилемма заключенного, США). Арестованы два подозреваемых в совершении серьезного преступления. У прокурора нет полного доказательства их вины, и результаты судебного разбирательства дела полностью зависят от стратегии поведения подозреваемых. У каждого из них есть две альтернативы – сознаться в совершении преступления или нет. Возможные исходы представлены в табл. В.2 (Н – непризнание, П – признание; 1, 2 – номера задержанных).

Таблица В.2

1	2	
	Н	П
Н	(1 ,1)	(10, 0)
П	(0, 10)	(7, 7)

Таблица интерпретируется следующим образом. Если оба арестованных не признаются, то им будет предъявлено обвинение в совершении относительно незначительного преступления (например, связанного с незаконным владением оружием) и оба они получат по 1 году лишения свободы. Если один признается, а второй нет, то первый за выдачу сообщника и помощь в расследовании дела будет полностью освобожден от ответственности, а второй получит полный срок – 10 лет лишения свободы. Если же оба признаются, то оба понесут наказание, но за чистосердечное раскаяние срок заключения будет уменьшен до 7 лет. Какое решение следует принять каждому из заключенных, чтобы минимизировать наказание?

Здесь, как мы видим, тоже существует неопределенность, но в отличие от предыдущего примера, где присутствовала так называемая «природная» неопределенность, или неопределенность среды, в данном случае мы имеем неопределенность типа «активный партнер». Эффективность решения в такой задаче существенно зависит от стратегии поведения второго лица, а также от информированности обоих субъектов о намерениях другой стороны. Такого типа конфликтные ситуации выбора рассматриваются в разд. 3.5.

Пример 5. Существует много примеров, когда лицо, принимающее решение, может указать лишь множество всех тех пар исходов, для которых первый исход в паре предпочтительнее второго. При этом какие-либо численные оценки исходов в принципе отсутствуют. Приведем конкретный пример. Молодой ученый выбирает место своей будущей работы, исходя из следующего множества альтернатив (здесь у.е. - некоторая условная единица, не обязательно совпадающая с конкретной денежной единицей):

1). x_1: ассистент в очень известном университете с окладом 250 у.е.;

2). x_2: доцент в электротехническом институте с окладом 350 у.е.;

3). x_3: профессор в малоизвестном периферийном институте с окладом 450 у.е.

(Здесь предполагается, что ему одновременно предлагаются только какие-то две альтернативы).

Легко представить себе ситуацию, когда ученый предпочтет x_1 по сравнению с x_2, рассудив, что престиж известного университета и контакты с ведущими специалистами в данной области науки стоят 100 у.е. разницы в окладе. Данное предпочтение можно обозначить (x_1, x_2) или $x_1 \succ x_2$ (x_1 лучше x_2). Точно так же можно предположить, что $x_2 \succ x_3$. И в то же время, сравнивая x_1 и x_3, можно понять и выбор x_3 по сравнению с x_1

(слишком велика разница в окладе). Таким образом, система предпочтений задается множеством пар: (x_1, x_2), (x_2 ,x_3), (x_3, x_1). Следовательно, здесь нет самой предпочтительной альтернативы. Какими принципами следует руководствоваться для принятия решений в подобных ситуациях?

Пример 6. Большой класс практических задач составляют **трудно формализуемые** задачи принятия решений, не имеющие адекватного традиционного математического описания. В качестве примера можно привести задачи медицинской диагностики, в которых по известной исходной информации (результаты анализов, внешние проявления болезни) требуется принять решение о типе заболевания. Такие задачи могут решаться на основе использования специальных программных комплексов – экспертных систем. Понятно, что без применения специальных формализаций здесь оказываются неприменимыми все методы математического анализа (как дисциплины) и необходим особый подход. Важнейшее значение в таких системах принятия решений приобретают проблемы построения исходной базы знаний для конкретной (обычно достаточно узкой) предметной области и процедур логического вывода (правил), позволяющих делать разумные заключения из исходных фактов или утверждений. Характерным примером таких правил могут служить выражения типа: ЕСЛИ (условие) – ТО (действие), например:

ЕСЛИ x за рыночную экономику и радикальные экономические реформы,

ТО x будет голосовать за И.И. Иванова.

Указанный формат записи знаний характерен для важнейшего класса экспертных систем поддержки принятия решений - продукционных экспертных систем. (В данном пособии эти вопросы не рассмотрены).

Пример 7. Существуют проблемы так называемого *группового выбора* решений, когда основная задача состоит в том, чтобы указать «справедливые» принципы учета индивидуальных выборов, приводящие к разумному общественному (или групповому) решению. В качестве содержательного примера можно привести заседание военного совета, когда каждый участник заседания высказывает свое мнение относительно плана проведения конкретной операции, а в конечном итоге должен быть выбран один, оптимальный вариант. Как это сделать? Какой результат выбора считать «хорошим», каким свойством он должен обладать? Таким образом, здесь мы, так же как и в примере 2, имеем в первую очередь концептуальные трудности: какими показателями должен обладать разумный результат согласований индивидуальных предпочтений?

Простая модель задачи группового выбора формулируется следующим образом. Пусть множество вариантов решений X конечно: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Имеется группа из n членов, принимающих (выбирающих) решение. Каждый член группы с номером $i = 1,\ldots,n$ имеет свою систему предпочтений на множестве X, задаваемую с помощью бинарного отношения $R_i \subset X * X$,

$$R_i = \{(x_j, x_k),\ldots,(x_p, x_m)\}.$$

Здесь R_i – множество упорядоченных пар элементов из X, причем включение некоторой пары (x_s, x_t) во множество R_i означает, что с позиций i-го члена группы вариант x_s предпочтительнее варианта x_t: $x_s \succ x_t$. Требуется по заданной системе $R_1, \ldots, R_n$ индивидуальных предпочтений построить групповую (коллективную) систему предпочтений $R = f\ (R_1,\ldots,R_n)$, где f – некоторая функция, реализующая принятый принцип согласования индивидуальных предпочтений. Казалось бы, достаточно использовать логически очевидное правило большинства (что обычно и происходит на практике при коллективном решении проблем). Однако существуют принципиальные трудности, связанные с естественными принципами согласования, типа правила большинства или оценивания по среднему баллу. В частности, хорошо известны парадоксы голосования, которые мы продемонстрируем на следующих примерах.

Принятие законопроекта в парламенте.

Пусть три парламентские группы, обладающие приблизительно одинаковым числом голосов, обсуждают три варианта некоторого законопроекта a, b, c с целью утверждения одного «наилучшего» варианта. Пусть системы предпочтений групп имеют соответственно следующий вид:

$$1.\ a \succ b \succ c, \quad R_1 = \{(a,b), (b,c), (a,c)\}$$

$$2.\ b \succ c \succ a, \quad R_2 = \{(b,c), (c,a), (b,a)\}$$

$$3.\ c \succ a \succ b, \quad R_3 = \{(c,a), (a,b), (c,b)\}.$$

Решено действовать по правилу простого большинства. Тогда в результате голосования получим $a \succ b$ потому, что пара (a,b) присутствует в R_1 и R_3, а пара (b,a) – только в R_2. Аналогично устанавливаем, что $b \succ c$ и $c \succ a$, т.е.

$$a \succ b \succ c \succ a.$$

Получаем «порочный круг» и потерю свойства транзитивности в групповом предпочтении. По результатам данного голосования по-прежнему нельзя выбрать наилучший законопроект. Более того, легко видеть, что при умелом ведении заседания парламента спикер может обеспечить утверждение большинством голосов любого из трех вариантов. Действительно, спикер может предложить обсудить вначале какие-то два варианта, проголосовать и худший отсеять. Далее для обсуждения снова останутся два варианта – оставленный при первом рассмотрении и еще не рассматривавшийся. Тогда, очевидно, если на первое обсуждение выносятся варианты a, b, то оказывается $a \succ b$ и вариант b отбрасывается. Далее конкурируют a и c. В результате по принципу большинства имеем c

$\succ a$ и в качестве окончательного варианта парламент выбирает вариант *c*. Если же, напротив, на первое обсуждение вынесем варианты *d*, *c*, то в итоге наилучшим окажется *a*. Точно также можно обеспечить выбор *b* в качестве наилучшего. Невинное на первый взгляд предложение о порядке рассмотрения оказывает решающее влияние на результат!

Выборы президента (парадокс многоступенчатого голосования).

Допустим, что на выборах президента некоторой компании (или государства) борются две партии, стремящиеся сделать победителем своего представителя. Мы ниже покажем, что при умелом ведении дела меньшинство может навязать свое мнение большинству, хотя голосование всегда будет проводиться по правилу большинства. Чтобы понять идею, достаточно изучить рис. В3.

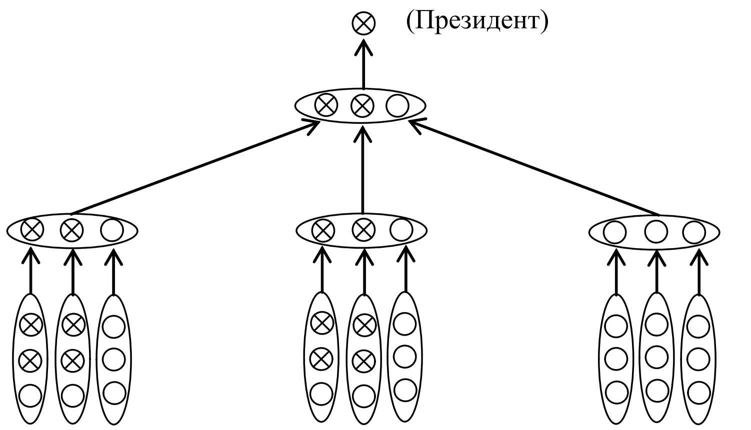


Рисунок В.3.

Из рисунка видно, что группа, владеющая восемью голосами, в итоге навязала свое мнение группе из девятнадцати выборщиков. Все дело, конечно, заключается в умелом группировании сил. Но с помощью современных избирательных технологий это можно реализовать, и это делается повсеместно с помощью целенаправленного вложения средств, организации агитационных поездок в нужные регионы и т.д. Как показал анализ, несколько президентов США в указанном смысле действительно представляли меньшинство в результате реализации системы многоуровневого голосования. При этом, чем больше ступеней, тем ярче проявляется указанный эффект.

И, наконец, последний пример.

Задача распределения ресурсов.

Пусть некоторый ресурс (например, денежный) распределен между n членами некоторого сообщества. При этом состоянием сообщества (системы) будем называть вектор (a_1, a_2, …, a_n), где a_i – объем ресурса, которым владеет i-ый член сообщества. Общий объем ресурса постоянен и равен:

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i \ .$$

Рассмотрим другое состояние той же системы $b = (b_1, b_2, \dots , b_n)$. Очевидно, состояние «$b$» не хуже состояния «$a$» для i-го субъекта, если $b_i \geq a_i$. Будем теперь производить перераспределение ресурсов на основе очень сильного большинства: переход системы из некоторого состояния «a» в состояние «b» разрешен, если новое состояние будет не хуже старого для всех членов сообщества кроме, быть может, одного (тотально-мажоритарное правило). Последовательность состояний

$$a_1, a_2, \dots , a_m$$

будем называть тотально-мажоритарным путем из a_1 в a_m, если каждый промежуточный переход их a_i в a_{i+1} был осуществлен на основе тотально-мажоритарного правила. Достаточно неожиданным является утверждение, что тотально-мажоритарный путь может связывать любые два состояния системы! Таким образом, опираясь на мнение «всего общества» можно производить любые перераспределения ресурса, в том числе и представленные на рис. В.4.

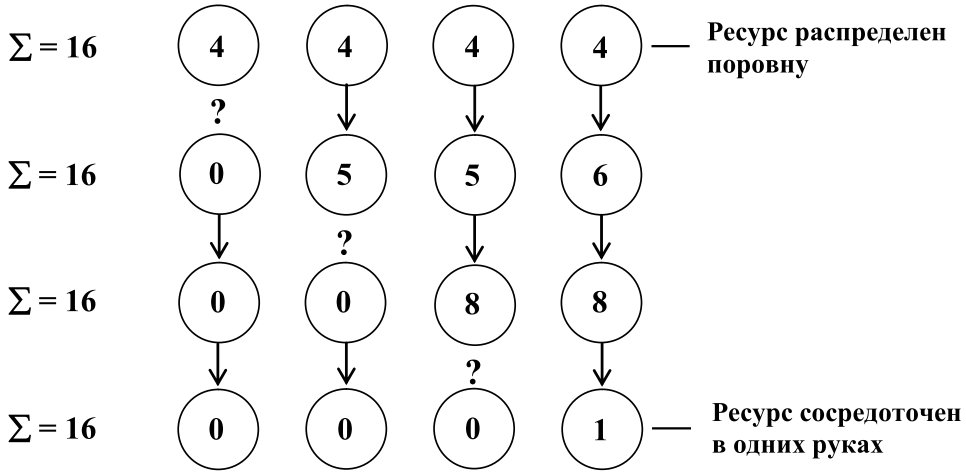


Рисунок В.4.

Приведенные примеры не исчерпывают всех типов задач теории принятия решений, хотя и охватывают значительное множество реальных ситуаций. В данном пособии мы в основном ограничимся только теми задачами принятия решений, которые схематически проиллюстрированы в примерах 1–5. Наиболее подробно будут изучаться задачи однокритериального и многокритериального выбора в условиях определенности, а также задачи принятия решений в условиях «природных» неопределенностей и неопределенностей типа «активный партнер». Во всех случаях подразумевается наличие численных оценок исходов.

В пособии преследуется цель не только ознакомить читателей с некоторыми общими алгоритмическими принципами функционирования современных автоматизированных систем поддержки принятия решений, но и дать средства для разработки собственного программного продукта, реализующего те или иные принципы принятия решений в конкретной (может быть уникальной) практической ситуации.

1. ЗАДАЧА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

1.1. Постановка задачи принятия решений. Критериальный язык описания выбора

Задача принятия решений (ПР) возникает, когда присутствует несколько вариантов действий (альтернатив) для достижения заданного или желаемого результата. При этом требуется выбрать наилучшую в определенном смысле альтернативу.

Общую постановку задачи принятия решений, понимаемой нами как задачу выбора из некоторого множества, можно сформулировать следующим образом.

Пусть X – множество альтернатив, Y – множество возможных последствий (исходов, результатов). X, Y, – вообще говоря, произвольные абстрактные множества. Предполагается существование причинной связи между выбором некоторой альтернативы $x_i \in X$ и наступлением соответствующего исхода $y_i \in Y$. Кроме того, предполагается наличие механизма оценки качества такого выбора – обычно оценивается качество исхода. В некоторых случаях целесообразно полагать, что мы имеем возможность непосредственно оценивать качество альтернативы x_i, и множество исходов по существу выпадает из рассмотрения.

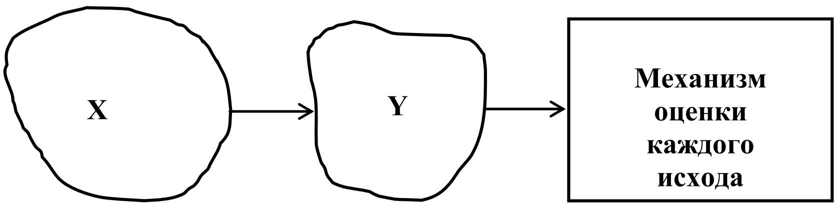


Рисунок 1.1.1.

Задача ПР может быть проиллюстрирована с помощью рис. 1.1.1.

Перейдем к анализу сформулированной задачи ПР.

Первый важный момент заключается в определении **характера связи** альтернатив с исходами. Как мы видели из примеров, эта связь может быть **детерминистской** (или, как часто говорят, детерминированной). В этом случае существует однозначное отображение

$$X \xrightarrow{\varphi} Y, \tag{1.1.1}$$

т.е. реализуется функция $y = \varphi(x)$, $x \in X$, $y \in Y$. (рис. 1.1.2.).

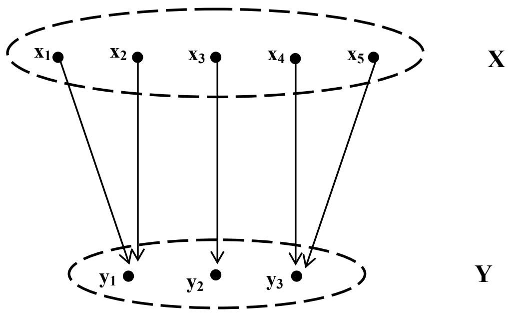


Рисунок 1.1.2.

Эта же связь может иметь вероятностный характер, когда выбор x определяет некоторую плотность распределения вероятностей на множестве Y (иногда говорят, что с каждым x связана некоторая лотерея). В этом случае выбор x_i уже не гарантирует наступление определенного исхода y_i, а сама задача ПР называется задачей ПР в условиях риска, (рис. 1.1.3.).

Графы, представленные на рис. 1.1.2. , 1.1.3. называются графами связей альтернатив с исходами. Граф, представленный на последнем рисунке, является «взвешенным»: каждая стрелка характеризуется числом P_{ij} – вероятностью наступления исхода y_j при выборе альтернативы x_i. (В общем случае, как было сказано, задается соответствующая плотность распределения).

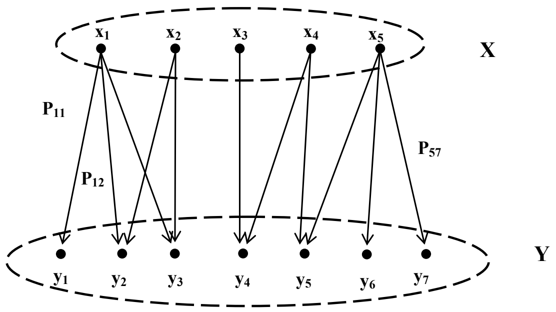


Рисунок 1.1.3.

Очевидно,

$$\forall i : \sum_j P_{i,j} = 1. \qquad (1.1.2)$$

Тот же самый рисунок иллюстрирует третий вид связи альтернатив с исходами, который реализуется в задачах ПР в условиях **полной неопределенности**. При этом предполагается, что информация вероятностного характера отсутствует (стрелки на графе не имеют весов).

Как мы видели, неопределенность при выборе и при реализации связи альтернатив с исходами может иметь и другой, возможно более сложный характер (см. «дилемму заключенного»), но мы пока ограничимся указанными тремя случаями, которые могут быть проиллюстрированы также рис. 1.1.4. При этом случаю 1 соответствует ПР

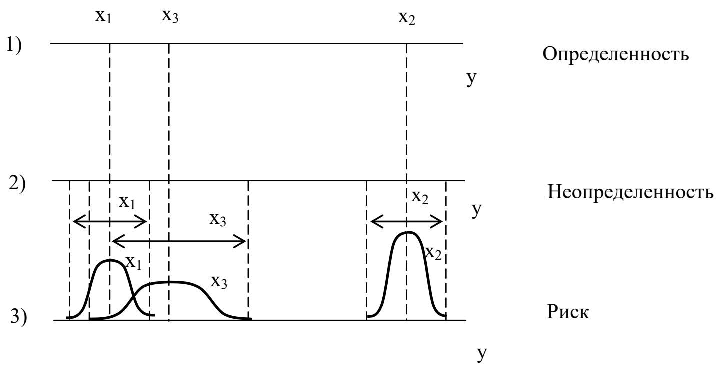


Рисунок 1.1.4.

в условиях определенности; точками на оси y обозначены исходы, соответствующие выбору альтернатив x_1, x_2, x_3 (три альтернативы и три определенных исхода). Случай 2 характеризует задачу ПР в условиях неопределенности: после выбора любой из альтернатив x_1, x_2, или x_3 может быть указан лишь интервал расположения соответствующего исхода y. Последний случай 3 отражает ситуацию выбора в условиях риска. Показаны графики соответствующих плотностей распределения вероятностей наступления события y в зависимости от выбора альтернативы x_1, x_2, или x_3.

Заметим, что в каждом из рассмотренных случаев может дополнительно присутствовать свой механизм оценки качества исхода, не связанный непосредственно с механизмом появления y по заданному x. (Здесь предполагается, что числами y закодированы соответствующие исходы, которые могут оцениваться различным образом, например, по нескольким числовым критериям – см. далее).

Второй важный момент в общей задаче ПР состоит в изучении (задании)_**системы предпочтений** лица, принимающего решение (ЛПР). Существенно, что второй момент, по сути, никак не связан с первым и различные способы задания системы предпочтений могут быть реализованы для каждого вида связи альтернатив с исходами.

В некотором смысле простейшая ситуация возникает, когда каждый исход y можно оценить конкретным вещественным числом в соответствии с некоторым заданным отображением

$$f : Y \to R \qquad (1.1.3)$$

В этом случае сравнение исходов сводится к сравнению соответствующих им чисел, например, исход y_i может считаться более предпочтительным, чем y_j, если $f(y_i) > f(y_j)$ (задача максимизации).

Исходы эквивалентны, если $f(y_i) = f(y_j)$. Для сравнения самих исходов употребляются выражения:

$$y_i \succ y_j, \; y_i \sim y_j.$$

Такая функция f называется целевой функцией, критериальной функцией, функцией полезности, функцией критерия оптимальности или даже просто критерием оптимальности. Последнее название не вполне корректно, ибо критерий оптимальности – это, вообще говоря, некоторое правило, позволяющее отличать «оптимальные» решения (исходы) от «неоптимальных» и сравнивать исходы между собой. В данном случае это правило связано с заданием целевой функции f. Как известно из математики, однозначное отображение произвольного множества на множество вещественных чисел называется функционалом. Поэтому целевые функции мы часто будем называть целевыми функционалами.

Если предположить, что связь между множеством альтернатив и множеством исходов детерминистская:

$$y = \varphi(x),$$

то функция f, заданная на множестве Y, трансформируется в некоторую функцию J, заданную на X и являющуюся суперпозицией φ и f:

$$J : X \to R, \; J = f \cdot \varphi.$$

В этом случае задача выбора оптимального исхода сводится к задаче выбора оптимальной альтернативы на множестве X и решается непосредственно методами теории оптимизации.

Более реалистичной часто оказывается ситуация, когда в отличие от предыдущего случая «качество» или «полезность» исхода y оценивается не одним числом f (y), а несколькими. Иначе говоря, предполагается, что существует несколько показателей качества решения (критериев), описываемых функциями

$$f_k : Y \to R,\ \ k = 1, 2, \dots , m,$$

причем каждую из **частных целевых функций** f_i требуется максимизировать (см. пример 2 из введения). Понятно, что в случае многокритериальных оценок исходов возникают существенно более сложные математические модели ситуации выбора, чем в однокритериальном случае. Критерии обычно противоречивы и, как правило, достигают максимумов в различных точках $y \in Y$. Следовательно, возникают не только алгоритмические трудности по решению соответствующих оптимизационных задач, но и чисто концептуальные трудности: что понимать под оптимальным решением в этом случае? Кроме того, здесь появляются уже и несравнимые по векторному критерию $f = (f_1, \dots , f_m)$ варианты y_i, y_j. Более подробно многокритериальные модели принятия решений будут рассмотрены далее.

Ограничиваясь пока указанными выше тремя способами связи альтернатив с исходами и двумя способами описания предпочтений ЛПР на критериальном языке, получим таблицу основных задач выбора (рис. 1.1.5)

	1 критерий	Много критериев
Определенность	z	Z
Неопределенность	$\tilde{z}$	$\tilde{Z}$

Рис. 1.1.5.

Здесь $$z = f\,(y),\quad f : Y \to R;$$

$$Z = f\ \ (y),\quad f = (f_1, \dots, f_m),\quad f_k : Y \to R,\quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Волна сверху означает наличие неопределенности в задаче ПР.

Необходимо отметить, что в настоящее время в приложениях часто применяется именно критериальный язык описания предпочтений, поэтому следующая важнейшая группа проблем – это формирование критериев и целевых функций (функционалов). Эти проблемы, как будет показано, решаются в тесной связи с методами преодоления различных видов неопределенностей на основе тех или иных гипотез.

1.2. Описание выбора на языке бинарных отношений. Формальные модели задачи ПР.

Язык бинарных отношений - второй, более общий, чем критериальный, язык описания системы предпочтений ЛПР. Предполагается, что

- отдельный исход сам по себе не оценивается и критериальные функции не вводятся;
- каждая пара исходов y_i, y_j может находиться в одном из следующих отношений: y_i предпочтительнее (строго доминирует) y_j; y_j предпочтительнее y_i; y_i не менее предпочтителен, чем (не строго доминирует) y_j; y_j не менее предпочтителен, чем y_i; y_i эквивалентен y_j; y_i и y_j несравнимы между собой.

Будем далее предполагать, что свои предпочтения пользователь устанавливает в некотором множестве A. В стандартном случае – это множество исходов: A = Y. Однако при детерминистской связи X с Y возможно A = X, или при многокритериальной оценке исходов A = f (Y), $f = f_1, ..., f_m$. В последнем случае предполагается, что система предпочтений ЛПР задается непосредственно в пространстве векторных оценок исходов. При необходимости можно полагать, что это пространство и есть пространство исходов. В рассматриваемом случае система предпочтений пользователя задается с помощью соответствующего бинарного отношения R на A. Напомним, что бинарным отношением на множестве A называется произвольное подмножество R множества A^2, где A^2 – множество всех упорядоченных пар вида (a_i, a_j), где $a_i, a_j \in A$. Имеем, следовательно, $R \subseteq A^2$, в том числе $A^2 \subseteq A^2$. Основные свойства бинарных отношений (рефлексивность, симметричность, транзитивность, антирефлексивность и т.д.) предполагаются известными.

Существует наглядный способ задания бинарных отношений на конечных множествах, который мы используем в данной книге. Изобразим элементы конечного множества A точками на плоскости. Если задано отношение $R \subseteq A^2$ и $(a_i, a_j) \in R$, где $a_i, a_j \in A$, то проведем стрелку от a_i к a_j. Если $(a_i, a_i) \in R$, то у точки a_i нарисуем петлю-стрелку, выходящую из a_i и входящую в ту же точку. Получившаяся фигура называется ориентированным графом, а сами точки – вершинами графа. Заметим здесь же, что вместо $(a_i, a_j) \in R$ можно писать a_iRa_j.

Основной вопрос заключается в следующем. Пусть на множестве A задана система предпочтений ЛПР в виде бинарного отношения R (часто это отношение строгого доминирования). Что тогда следует понимать под решением задачи выбора? Этот основной вопрос в разных случаях (системах оптимизации и принятия решений, пакетах прикладных программ) решается неоднозначно и пользователям необходимо ясно осознавать, что же конкретно имеется в виду в каждом отдельном случае. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть A – заданное множество и R – произвольное бинарное отношение на A. Тогда пара $<A, R>$ называется **моделью выбора**.

Определение. Пусть задана модель <A, R>. Элемент $a^* \in A$ называется наилучшим по R в A, если $(a^*, a) \in R$ при $\forall a \in A \setminus a^*$.

На рис. 1.2.1. а) наилучшими элементами являются a_1, a_2. На графе 1.2.1. б) наилучших элементов нет.

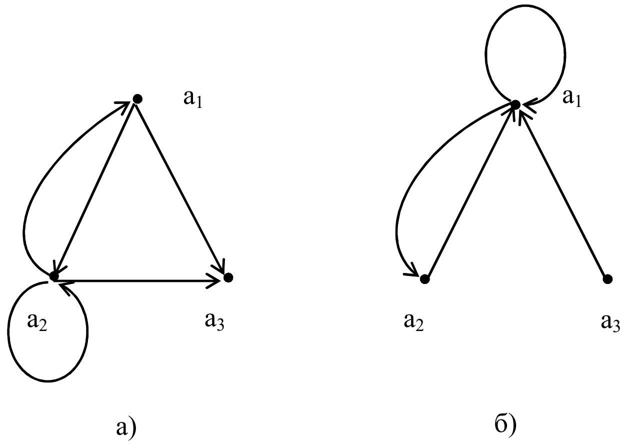


Рисунок 1.2.1.

На языке графов понятие наилучшего элемента соответствует наличию вершины, соединенной исходящими из нее стрелками со всеми остальными вершинами графа. При этом могут присутствовать и любые другие дополнительные соединения.

Если предположить, что бинарное отношение, представленное на рис. 1.2.1. б), является отношением предпочтения, и стрелки означают некоторый вариант доминирования, то, по-видимому, целесообразно как-то исключить a_1 из дальнейшего рассмотрения, ибо этот элемент доминируется элементом a_3. С помощью понятия наилучшего элемента это сделать невозможно, хотя в случае, представленном на рис. 1.2.1.а), мы исключили элемент a_3, как не являющийся наилучшим.

Введем вместо наилучшего элемента более слабое понятие максимального элемента.

Определение. Элемент $a^0 \in A$ называется максимальным в модели <A, R> или максимальным по R в A, если

$$\forall a \in A : (a, a^0) \in R \rightarrow (a^0, a) \in R.$$

Множество всех максимальных в <A, R> элементов обозначим через $\mathrm{Max}_R A$.

Очевидно, граф отношения, имеющего максимальные элементы, должен содержать вершины, в которых каждой входящей в нее стрелке (если таковые имеются) соответствует «компенсирующая», выходящая стрелка, направленная в вершину, из которой исходит указанная входящая стрелка.

В примерах, приведенных на рис. 1.2.1. максимальными по R элементами будут: а) a_1, a_2; б) a_2, a_3.

Легко доказать, что наилучший по R в A элемент является и максимальным. Обратное верно только, если отношение R обладает специальным свойством слабой связности:

$$\forall a_1, a_2 : [a_1 \neq a_2] \rightarrow [(a_1, a_2) \in R] \vee [(a_2, a_1) \in R].$$

На рис. 1.2.1.б) отношение R не является слабо связным.

Иногда используется понятие R - оптимального элемента .

<u>Определение.</u> Элемент $a^0 \in A$ называется R - оптимальным на A, если

$$\forall a \in A,\ a \neq a^0 \ \rightarrow (a, a^0) \notin R.$$

Иначе говоря, здесь требуется существование вершины, в которую не входит ни одной стрелки.

На рис. 1.2.1.а) R - оптимальных элементов нет, на рис. б) элемент a_3 будет R - оптимальным.

Основным понятием для нас далее будет понятие максимального элемента.

<u>Определение.</u> Множество $Max_R A$ называется **внешне устойчивым**, если для любого элемента $a \in A \setminus Max_R A$ найдется такой $a^0 \in Max_R A$, что справедливо $(a^0, a) \in R$.

Понятие внешней устойчивости оказывается существенным для проблемы ПР. Действительно, если множество $Max_R A$ внешне устойчиво, то последующий выбор оптимального элемента (на основе, например, привлечения дополнительной информации) может производиться только в пределах множества $Max_R A$. В противном случае, когда устойчивости нет, такой вывод уже не будет иметь разумного обоснования.

Внешне устойчивое множество $Max_R A$ называется **ядром отношения** R в A. Иногда термин ядро применительно к множеству $Max_R A$ используется и без требования внешней устойчивости.

В примерах на рис. 1.2.1. множества $Max_R A$ являются внешне устойчивыми. На рис. 1.2.2. представлен случай, когда множество

$$Max_R A = \{a_1, a_2\}$$

не является внешне устойчивым.

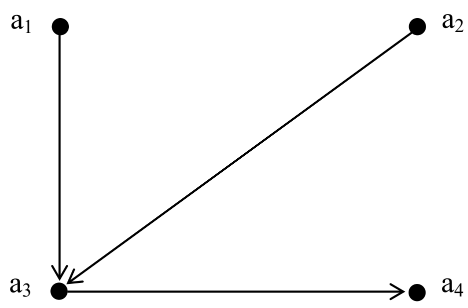


Рисунок 1.2.2.

Далее под задачей ПР, сформулированной на языке бинарных отношений, понимается задача выделения ядра - множества максимальных элементов из A по некоторому бинарному отношению R : $A^* = Max_R A$. Специфика конкретных задач ПР находит отражение в задании соответствующего множества вариантов A, а также в формировании бинарного отношения R, характеризующего вполне определенные цели принятия решений в той или иной практической ситуации. Весьма важным с практической точки зрения являются следующие специальные виды бинарных отношений:

- квазипорядок (R – рефлексивно и транзитивно);
- строгий порядок (R – антирефлексивно и транзитивно);
- эквивалентность (R – рефлексивно, симметрично и транзитивно).

1.3. Связь различных способов описания выбора. Однокритериальный и многокритериальный выбор

В данном разделе мы рассмотрим связь критериального языка описания выбора и языка бинарных отношений.

Однокритериальный выбор. Пусть

$$f : Y \to R$$

есть целевая функция, которую требуется максимизировать. Тогда с помощью этой функции на множестве Y индуцируются два бинарных отношения R_1 и R_2:

$$(y_1, y_2) \in R_1 \leftrightarrow f(y_1) \geq f(y_2);$$

$$(y_1, y_2) \in R_2 \leftrightarrow f(y_1) > f(y_2).$$

Отношение R_1 является, очевидно, рефлексивным и транзитивным и, следовательно, определяет квазипорядок на Y. Отношение R_2 обладает свойством антирефлексивности ($\forall y$ неверно, то $f(y) > f(y)$) и транзитивности, являясь строгим порядком. В обоих случаях справедливо равенство:

$$\mathrm{Max}_R Y = \mathrm{Arg}\max f(y), \; i = 1, 2;$$

причем множество максимизаторов функции f является внешне устойчивым в Y. Таким образом, задача максимизации целевой функции f на множестве Y эквивалентна задаче построения ядра одного из бинарных отношений R_1, R_2, совпадающего с множеством максимизаторов f на Y.

Многокритериальный выбор. Предположим теперь, что «качество» или «полезность» исхода оценивается не одним числом, а несколькими. Иначе говоря, предполагается, что существует несколько показателей качества решения, описываемых частными целевыми функциями

$$f_k : Y \to R, \; k = 1, 2, \ldots, m,$$

которые требуется максимизировать.

В теории многокритериальных задач обычно используются следующие отношения доминирования:

$(y_i , y_j) \in R_p \leftrightarrow \forall k: [f_k(y_i) \geq f_k(y_j)] \wedge [f(y_i) \neq f(y_j)];$

$(y_i , y_j) \in R_s \leftrightarrow \forall k: [f_k(y_i) > f_k(y_j)].$

Здесь $f = (f_1, f_2, \dots , f_m)$. Отношение доминирования R_p называется отношением Парето, а R_s – отношением Слейтера. Употребляется также запись $(y_i, y_j) \in R_i \leftrightarrow y_i \overset{t}{\succ} y_j$, $t = P, S$.

<u>Определение.</u> Если для некоторой точки $y^0 \in Y$ не существует более предпочтительной по Парето точки, т.е. такой точки y, что $(y, y^0) \in R_p$, то тогда точка y^0 называется **эффективным** или **Парето - оптимальным** решением многокритериальной задачи

$$f_k(y) \to \max, \ k = 1, 2, \dots , m; y \in Y.$$

Множество, включающее в себя все эффективные элементы множества Y, обозначается $P_f (Y)$ или просто P(Y) (если ясно, о каком векторном критерии f идет речь) и называется множеством Парето для векторного отношения

$$f : Y \to R^m, \ f = (f_1, \dots , f_m).$$

Очевидно, $P(Y) \subseteq Y$. Образ множества P (Y) **в пространстве критериев** R^m обозначается P (f). Множество P (f) = f (P(Y)) называется множеством **эффективных оценок**. Множество эффективных оценок называется также множеством Парето в пространстве критериев.

Смысл введенного понятия эффективного решения состоит в том, что оптимальный исход следует искать только среди элементов множества недоминируемых элементов P(Y) (принцип Парето). В противном случае всегда найдется точка $y \in Y$, оказывающаяся более предпочтительной с учетом всех частных целевых функций $f_i(y)$.

Ясно, что бинарное отношение R_p является антирефлексивным, так как $\forall y \in Y$: $(y,y) \notin R_p$. Кроме того, легко установить, что

$$[(y_i, y_j)\in R_p] \wedge [(y_j, y_k)\in R_p] \rightarrow (y_i, y_k)\in R_p .$$

Таким образом, отношение R_p транзитивно. Отсюда следует, что R_p – частичный строгий порядок на Y.

Обычно цель решения многокритериальной задачи

$$f_k(y) \rightarrow \max_{y\in Y}$$

состоит в выделении множества Парето P(Y). При отсутствии дополнительной информации о системе предпочтений пользователя большего сделать нельзя.

Обратимся теперь к отношению R_S.

Определение. Точка $y' \in Y$ называется **слабо эффективным** решением многокритериальной задачи, или решением оптимальным по Слейтеру, если не существует более предпочтительной по Слейтеру точки, т.е. такой точки y, что $(y, y') \in R_S$.

Иначе говоря, исход «y» называется слабо эффективным, если он не может быть улучшен сразу по все m критериям «полезности», задаваемым с помощью частных целевых функций f_i (y), $i = 1, 2, \dots , m$. Множество слабо эффективных элементов обозначается через S_f (Y) или просто S(Y). Очевидно, $S(Y) \subseteq Y$, $P(Y) \subseteq S(Y)$. Аналогично предыдущему случаю вводим обозначение $S(f) = f(S(Y))$.

Введение понятия слабо эффективного решения вызвано, в частности, тем, что в результате многокритериальной оптимизации часто получаются именно эти решения, представляющие, вообще говоря, меньший интерес, чем эффективные решения.

Точно так же, как и в однокритериальных задачах выбора, цель решения многокритериальной задачи может быть сформулирована как задача построения ядра отношения доминирования R_p (отношения Парето). Легко доказать непосредственно, что в этом случае

$$P(Y) = \mathrm{Max}_{R_P} Y$$

с выполнением свойства внешней устойчивости множества Парето.

Таким образом, мы видим, что задание целевых функций для оценки качества исходов, как в однокритериальном, так и многокритериальном случае, может порождать различные системы предпочтений, выраженные на языке бинарных отношений. При этом задача построения ядра оказывается эквивалентной либо задаче построения множества максимизаторов скалярной целевой функции, либо задаче построения множества Парето для векторной целевой функции.

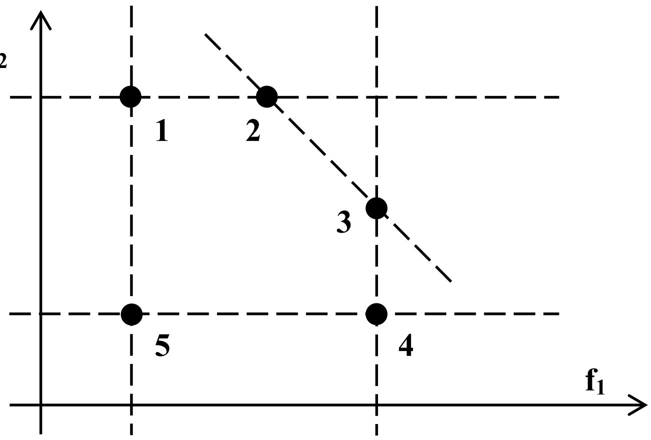


Рисунок 1.3.1.

Пример. Пусть задана векторная целевая функция $f = (f_1, f_2)$ на множестве $Y = \{y_1, \dots, y_5\}$, причем частные целевые функции f_i требуется максимизировать. Образы точек y_i в **пространстве критериев** (f_1, f_2) обозначим соответствующими числами (рис. 1.3.1.)

$$\mathbf{R_p = \{(y_2, y_1), (y_1, y_5), (y_2, y_5), (y_4, y_5), (y_3, y_5), (y_3, y_4)\}}$$

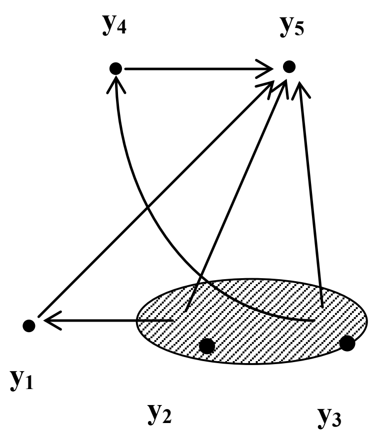


Рисунок 1.3.2.

Используя определение доминирования по Парето, можно построить само отношение R_p и его граф (рис. 1.3.2.).

Используя определение ядра, с помощью непосредственного рассмотрения графа получаем:

$$\mathrm{Max}_{R_P} Y = \{y_2, y_3\}.$$

На рис. 1.3.2. ядро выделено штриховкой. Можно заметить, что наилучшие элементы (см. определение) в данном случае отсутствуют, а понятие максимального элемента позволяет в полной мере формализовать многокритериальную задачу выбора как задачу построения множества недоминируемых по Парето элементов.

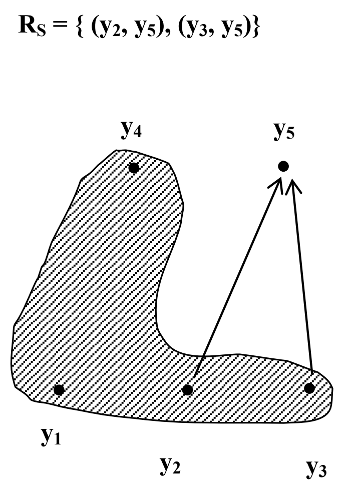


Рисунок 1.3.3

С помощью аналогичных рассмотрений устанавливаем, что отношение Слейтера R_S (так же, как и отношение R_p) является строгим порядком и может быть представлено графически (рис. 1.3.3.). Ядро выделено штриховкой.

Видно, что, во-первых, $R_S \subset R_P$, а во-вторых,

$$\mathrm{Max}_{R_P} Y \subset \mathrm{Max}_{R_S} Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}.$$

Эти включения выполняются и в общем случае.

<u>Замечание.</u> Отношение Парето R_p порождает соответствующее отношение несравнимости R_H:

$$(y_1, y_2) \in R_H \leftrightarrow [(y_1, y_2) \notin R_p] \wedge [(y_2, y_1) \notin R_p].$$

Для последнего примера имеем, в частности,

$$R_H = \{(y_4, y_2), (y_2, y_3), (y_1, y_4), (y_4, y_1), \ldots \}.$$

Важно отметить, что, например,

$$(y_4, y_2) \in R_H,\ (y_2, y_3) \in R_H, \text{ но } (y_4, y_3) \notin R_H.$$

Таким образом, отношение несравнимости в многокритериальных задачах, являясь симметричным ($(y_i, y_j) \in R_H \rightarrow (y_j, y_i) \in R_H$), не является транзитивным.

2. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ.

Рассматривается следующая модель задачи ПР:

X – множество альтернатив; Y – множество исходов; $f_i : Y \rightarrow R$, $i = 1,\dots,m$ – множество показателей качества (критериев); $\varphi : X \rightarrow Y$ – детерминистская функция, отображающая множество альтернатив во множество исходов. Здесь R – множество вещественных чисел.

Таким образом, мы здесь предполагаем, что каждому решению $x \in X$ соответствует единственный элемент $y \in Y$, где $y = \varphi(x)$. «Качество» или «полезность» исхода y, а тем самым и соответствующего решения x оценивается несколькими (m) числами в соответствии с зависимостями f_i. По-прежнему предполагаем, что каждую из функций f_i требуется максимизировать.

С помощью суперпозиции

$$J_i(x) = f_i(\varphi(x)), \quad i = 1, \dots, m$$

мы имеем возможность непосредственно оценивать качество самого решения x и работать с векторным отображением

$$J : x \rightarrow R^m, \quad J = (J_1, \dots, J_m), \quad J(X) = F \subset R^m.$$

Более того, задание бинарного отношения предпочтения R' на множестве исходов Y индуцирует соответствующее бинарное отношение R'' на множестве X. Именно:

$$(x_1, x_2) \in R'' \leftrightarrow (\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \in R'.$$

Соответственно возникает бинарное отношение R''' во множестве оценок $F \subset R^m$:

$$\forall z_1, z_2 \in F : (z_1, z_2) \in R''' \leftrightarrow (y_1, y_2) \in R',$$

где $z_1 = f(y_1)$, $z_2 = f(y_2)$. Поэтому в детерминистском случае (в условиях определенности) отношения предпочтения могут задаваться в любом из указанных трех множеств: X, Y, F. Далее в качестве основного отображения будет рассматриваться отображение

$$J : X \to F \subset R^m,$$

и соответственно системы предпочтений будут задаваться во множествах X , F.

В практических задачах часто непосредственно задается отображение J и, по сути, Y = F, т.е. в качестве исходов выступают сами оценки J_i.

В результате мы приходим к очень распространенной в приложениях многокритериальной модели принятия решений или задаче многокритериальной оптимизации вида

$$J_i(x) \to \max_{x \in X}, \ i = 1, ..., m, \ X \subset R^n.$$

Мы здесь сделали еще одно уточнение: $X \subset R^n$. Т.е. мы предполагаем, что все альтернативы или решения параметризованы и каждому из решений соответствует точка $x \in R^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. И, наконец, вместо обозначений $J_i(x)$ мы снова вернемся к обозначениям $f_i(x)$. Множество X называется множеством допустимых значений и в разделах, посвященных многокритериальным задачам, будет обозначаться через D.

2.1. Методы многокритериальной оптимизации

Рассматривается задача многокритериальной оптимизации вида

$$f_i(x) \to \max_{x \in D}, \ f_i : D \to R, \ i = 1, ..., m; \ D \subseteq R^m. \qquad (2.1.1)$$

Таким образом, задано m функций или функционалов f_i , отображающих множество D n-мерных векторов $x = (x_1, ..., x_n)$ во множество вещественных чисел R. Здесь предполагается, что выбор оптимальных значений x производится не во всем n-мерном пространстве R^n, а лишь в пределах некоторого его подмножества D. Например, можно интерпретировать задачу (2.1.1) как задачу оптимального выбора параметров $x_1, ..., x_n$ некоторой системы (например, некоторого программного комплекса или перспективного плана развития фирмы), качество функционирования которой оценивается показателями $f_1, ..., f_m$ (см. пример 2 из введения). В этом случае ограничение $x \in D$ отражает наши технологические и иные возможности реализации тех или иных значений x_i. Кроме того, часть ограничений может формироваться на основе имеющейся априорной информации, позволяющей исключить из рассмотрения заведомо неудачные варианты x.

Важнейшее значение при исследовании задач (2.1.1) имеет принцип Парето и связанные с ним понятия эффективного (Парето – оптимального) и слабо эффективного решения. Однако прежде чем перейти к рассмотрению численных методов построения множества Парето, обратимся к традиционным «инженерным» методам многокритериальной оптимизации, сводящим задачу (2.1.1) к некоторой ее однокритериальной версии.

1. Метод главного критерия. В методе главного критерия в качестве целевой функции выбирается один из функционалов f_i , например f_1, наиболее полно с точки зрения исследователя отражающий цель ПР. Остальные требования к результату, описываемые функционалами f_2, ..., f_m , учитываются с помощью введения необходимых дополнительных ограничений. Таким образом, вместо задачи (2.1.1) решается другая, уже однокритериальная задача вида

$$\max_{x \in D'} f_1(x); \; D' \subseteq D \subseteq R^n;$$
$$D' = \{ x \in D / \; f_i(x) \geq t_i, i = 2,...,m \}. \tag{2.1.2}$$

Формально получили более простую задачу поиска максимума функционала f_1 на новом допустимом множестве D'. Добавились ограничения вида $f_i(x) \geq t_i$, показывающие, что мы согласны не добиваться максимальных значений для функционалов f_2, ..., f_m, сохраняя требование их ограниченности снизу на приемлемых уровнях. Важно понимать, что переход от задачи (2.1.1) к задаче (2.1.2) вовсе не есть переход от одной эквивалентной задачи к другой. Произошло существенное изменение исходной постановки задачи, которое в каждой конкретной ситуации требует отдельного обоснования. Мы еще вернемся далее к методу главного критерия и его анализу с позиций оптимальности по Парето. Здесь же отметим, что применение этого метода на интуитивном уровне обычно наталкивается на трудности, связанные с возможным наличием нескольких «главных» критериев, находящихся в противоречии друг с другом. Кроме того, не всегда ясен алгоритм выбора нижних границ t_i. Их необоснованное задание может привести, в частности, к пустому множеству D'.

2. Метод линейной свертки. Это наиболее часто применяемый метод «скаляризации» (свертки) задачи (2.1.1), позволяющий заменить векторный критерий оптимальности $f = (f_1, ..., f_m)$ на скалярный $J : D \to R$. Он основан на линейном объединении всех частных целевых функционалов $f_1, ..., f_m$ в один:

$$J(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \to \max_{x \in D}; \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1. \qquad (2.1.3)$$

Весовые коэффициенты α_i могут при этом рассматриваться как показатели относительной значимости отдельных критериальных функционалов f_i. Чем большее значение мы придаем критерию f_j, тем больший вклад в сумму (2.1.3) он должен давать и, следовательно, тем большее значение α_j должно быть выбрано. При наличии существенно разнохарактерных частных критериев обычно бывает достаточно сложно указать окончательный набор коэффициентов α_i, исходя из неформальных соображений, связанных, как правило, с результатами экспертного анализа. Позже мы покажем, что, вообще говоря, априори не ясно, в каком отношении должны находиться весовые коэффициенты α_i и α_j, если известно желательное соотношение между f_i и f_j в оптимальной точке (например, мы можем требовать, чтобы $f_i = 0.1\ f_j$).

3. Метод максиминной свертки. Обычно применяется в форме

$$J(x) = \min_i f_i(x) \to \max_{x \in D}.$$

Здесь в отличие от метода линейной свертки на целевой функционал J(x) оказывает влияние только тот частный критерий оптимальности, которому в данной точке x соответствует наименьшее значение соответствующей функции f_i (x). И если в случае (2.1.3), вообще говоря, возможны «плохие» значения некоторых f_i за счет достаточно «хороших» значений остальных целевых функционалов, то в случае максиминного критерия производится расчет «на наихудший случай» и мы по значению J(x) можем определить гарантированную нижнюю оценку для всех функционалов $f_i(x)$. Этот факт расценивается как преимущество максиминного критерия перед методом линейной свертки.

При необходимости нормировки отдельных частных целевых функционалов, т.е. приведения во взаимное соответствие масштабов измерения значений отдельных $f_i(x)$, используется «взвешенная» форма максиминного критерия:

$$J(x) = \min_i \alpha_i f_i(x) \to \max_{x \in D}, \tag{2.1.4}$$

где весовые коэффициенты α_i удовлетворяют требованиям (2.1.3).

Подбирая различные значения α_i, можно определенным образом воздействовать на процесс оптимизации, используя имеющуюся априорную информацию. Приведем характерный пример.

Пример. (Решение системы неравенств). Весьма часто в задачах оптимального выбора параметров реальных систем (в так называемых задачах оптимального проектирования) технические, экономические и другие требования к проектируемой системе выражаются в виде «условий работоспособности», имеющих форму неравенств вида

$$y_i(x) \le t_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2.1.5}$$

Здесь функции $y_i(x)$ интерпретируются как частные показатели качества функционирования системы; $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – вектор параметров, подлежащих выбору; t_i – допустимые верхние границы для заданных показателей качества (так называемые контрольные показатели). К форме (2.1.5) очевидным образом приводятся и обратные неравенства $z_k(x) \ge s_k$. Для этого достаточно положить

$$y_k = -z_k, \; t_k = -s_k.$$

Для решения системы неравенств (2.1.5) методами теории оптимизации поступают следующим образом. Вводят так называемые запасы f_j, отражающие степень выполнения каждого из неравенств (2.1.5). Простейшая форма запаса имеет вид

$$f_i(x) = t_i - y_i(x). \qquad (2.1.6)$$

Имеем, следовательно, многокритериальную задачу максимизации всех запасов:

$$f_i(x) \to \max_{x \in D}, \ i = 1, \ldots, m.$$

Максиминная свертка (максимизируется минимальный из запасов) приводит к следующей однокритериальной задаче:

$$J(x) = \min(t_i - y_i(x)) \to \max, \ x \in D.$$

При наличии весовых коэффициентов имеем задачу

$$J(x) = \min_i \alpha_i (t_i - y_i(x)) \to \max_{x \in D}. \qquad (2.1.7)$$

Весовые коэффициенты α_i в функционале (2.1.7) выполняют функцию нормирования частных критериев по значению. Это можно реализовать, например, следующим образом. Для каждого из ограничений (2.1.5) задаются характерные значения $\delta_i > 0$, определяющие эквивалентные, с точки зрения лица принимающего решения, приращения критериев f_i. Иначе говоря, утверждается, что увеличение критерия f_i на δ_i так же «хорошо», как и увеличение f_j на δ_j. В результате вместо задачи (2.1.7) будем иметь

$$J(x) = \min_i \left(\frac{t_i - y_i(x)}{\delta_i} \right) \to \max_{x \in D}. \qquad (2.1.8)$$

Таким образом, каждая разность $t_i - y_i$ «измеряется» в специальных единицах, определяемых $\delta_i > 0$. В качестве δ_i для нормировки иногда используются значения $f_i(x^0)$ в заданной начальной точке x^0, какие-либо иные «характерные» значения f_i (x) или сами значения t_i, если они не равны нулю. (Подобные соображения могут быть использованы и при выборе весовых коэффициентов в методе линейной свертки).

Достаточно типичным для задач параметрической оптимизации, сформулированных в форме (2.1.5), можно считать случай, когда по условию задачи некоторые из показателей, например $y_1(x)$, нежелательно делать намного меньше, чем t_1. Требуется выполнение соответствующего неравенства (2.1.5), но с небольшим запасом. (Например, в транзисторных устройствах для правильного функционирования схемы может требоваться выполнение заданной степени насыщения транзистора, но значительное ее превышение нежелательно из-за увеличения времени переключения). В таких случаях можно воспользоваться регулирующими свойствами весовых коэффициентов. Именно, вместо задачи (2.1.8) решаем задачу

$$J(x) = \min_i \alpha'_i \left(\frac{t_i - y_i(x)}{\delta_i} \right) \to \max_{x \in D}, \tag{2.1.9}$$

причем выбираем α'_1 много большим, чем α'_i i = 2, …, m. Выбор достаточно большого весового коэффициента α'_1 приводит к тому, что, с одной стороны, при нарушении первого неравенства

$$y_1(x) \le t_1 \tag{2.1.10}$$

мы имеем существенное ухудшение целевого функционала (2.1.9), так как разность $t_1 - y_1(x) < 0$, будучи умноженной на α'_1, дает большое по абсолютной величине отрицательное число, определяющее значение

$$J(x) = \alpha'_1 \frac{t_1 - y_1(x)}{\delta_1}.$$

С другой стороны, уже при незначительных положительных значениях запаса $f_1 = t_1 - y_1(x)$ он будет, сравним с запасами работоспособности по остальным показателям качества. Следовательно, увеличение α_1' вносит некоторый стабилизирующий фактор. В результате соответствующее условие работоспособности с высокой вероятностью будет выполнено, имея в то же время небольшой положительный запас в оптимальной точке.

2.2. Максиминные стратегии.

Вернемся к введенным в п. 1.3. понятиям эффективного и слабо эффективного решения многокритериальной задачи

$$f_i(x) \to \max_{x \in D}, i = 1,...,m; D \subseteq R^n.$$

Напомним, что в словесной формулировке эффективность решения $x^0 \in D$ означает, что оно не может быть улучшено по какому-либо показателю f_i без ухудшения ситуации по оставшимся показателям. Иначе говоря, если x^0 – эффективно (Парето - оптимально), то не существует других решений $x' \in D$, для которых справедливо:

$$f_i(x') \geq f_i(x^0), \ i = 1, \ldots, m, \tag{2.2.1}$$

где хотя бы одно из неравенств (2.2.1) – строгое. И аналогично под слабо эффективным решением мы понимаем решение, которое не может быть улучшено одновременно по всем показателям. На рис 2.2.1. слабо эффективным решениям соответствуют «северная, северо-восточная и восточная части границы» множества достижимости f (D) (f (D) – это образ множества D для векторного отображения $f = (f_1, \ldots, f_m)$).

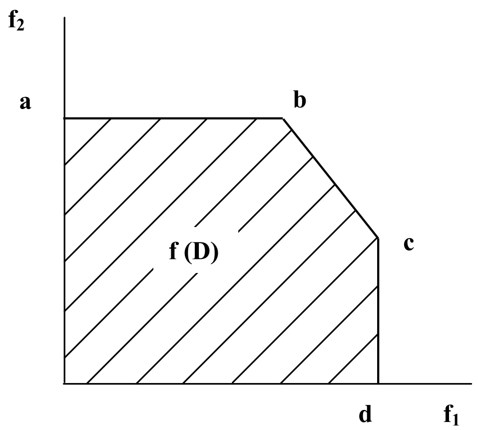


Рисунок 2.2.1.

Иначе говоря, в данном примере множество слабо эффективных оценок S(f) совпадает с множеством [a, b] $\cup$ [b, c] $\cup$ [c, d]. Множество P (f) эффективных оценок равно [b, c] и совпадает с «северо-восточной границей» множества f (D).

Основная задача данного и следующего разделов заключается в выяснении тех вычислительных средств, которые можно было бы использовать для построения аппроксимации множеств эффективных и слабо эффективных решений и оценок.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть заданы произвольные числа $\alpha_i > 0$, i = 1, …, m. Тогда решение задачи

$$\min_i \alpha_i (f_i - t_i) \to \max_{x \in D} \qquad (2.2.2)$$

при любых фиксированных t_i есть слабо эффективный вектор. Наоборот, любой слабо эффективный вектор x^0 может быть получен как решение задачи (2.2.2) при некоторых $\alpha_i > 0$ и $t_i < f_i (x^0)$, i = 1, …, m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прямое утверждение теоремы докажем от противного. Пусть x^0 есть решение задачи (2.2.2) и существует вектор $x' \in D$, для которого

$$f_i (x') > f_i (x^0), \; i = 1, \ldots, m,$$

что эквивалентно предположению о том, что вектор x^0 не является слабо эффективным. Тогда для любых наборов $\{\alpha_i > 0\}$, $\{t_i\}$ будем иметь (докажите это!)

$$\alpha_i (f_i (x') - t_i) > \alpha_i (f_i (x^0) - t_i), \; i = 1, \ldots, m$$

и, следовательно,

$$\min_i \alpha_i (f_i (x') - t_i) > \min_i \alpha_i (f_i (x^0) - t_i),$$

а это противоречит предположению о том, что x^0 есть решение задачи (2.2.2). Прямое утверждение теоремы доказано.

Докажем обратное утверждение. Пусть x^0 – слабо эффективный вектор: $x^0 \in S(D)$. Это означает, что не существует другого вектора x', для которого

$$\forall i: f_i(x') > f_i(x^0) \qquad (2.2.3)$$

($\forall i$ – для всех номеров $i = 1, \ldots, m$).

По условию теоремы заданы такие $\{t_i\}$, что $\forall i: f_i(x^0) - t_i > 0$. Введем числа

$$\alpha'_i = \frac{1}{f_i(x^0) - t_i} > 0$$

и покажем, что

$$\max_{x \in D} \min_i \alpha'_i (f_i(x) - t_i) = \min_i \alpha'_i (f_i(x^0) - t_i) = 1, \qquad (2.2.4)$$

т.е., что при выбранных коэффициентах α'_i максимум реализуется на векторе x^0. Этим самым теорема будет доказана.

Из (2.2.3) следует, что для любого вектора x', отличного от x^0, будет существовать такой номер $i = i_0$, для которого

$$f_{i_0}(x') \le f_{i_0}(x^0) \qquad (2.2.5)$$

(это прямое следствие слабой эффективности вектора x^0). Из (2.2.5) получаем:

$$\alpha'_{i_0}(f_{i_0}(x') - t_{i_0}) \le \alpha'_{i_0}(f_{i_0}(x^0) - t_{i_0}) = 1$$

(напоминаем, что неравенства можно умножать на положительные числа α'_{i_0}). Но тогда и

$$\min_i \alpha'_i (f_i(x') - t_i) \le 1.$$

Таким образом, доказано, что для любого x', отличного от x^0,

$$\min_i \alpha'_i (f_i(x') - t_i) \le \min_i \alpha'_i (f_i(x^0) - t_i) = 1,$$

а значит и максимум по x левой части последнего неравенства также не будет превышать единицы. Соотношение (2.2.4), а вместе с ним и теорема, доказаны.

Замечание. Если слабо эффективное решение x^0 получено как решение задачи (2.2.2) при каком-то наборе коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$: $\alpha_i > 0$, то, очевидно, это же решение будет достигаться при любом наборе $k\alpha_1, \ldots, k\alpha_m$, где k – произвольное положительное число. Поэтому можно считать, что всегда выполнено условие нормировки:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \qquad (2.2.6)$$

В противном случае вместо коэффициентов α_i мы будем рассматривать другие коэффициенты:

$$\overline{\alpha}_i = \alpha_i / \sum_{i=1}^{m} \alpha_i .$$

В силу приведенного замечания будем далее предполагать, что условие (2.2.6) всегда выполнено.

Из доказанной теоремы следуют важные выводы. Будем для простоты считать, что все функционалы $f_1, \ldots, f_m$ исходно положительны, т.е. принимают во всех точках допустимого множества D строго положительные значения: $\forall x \in D : f_i(x) > 0$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда для любого $x^0 \in S(D)$ будет выполнено условие $f_i > t_i$ при $t_i = 0$. Поэтому далее вместо задачи (2.2.2) будем рассматривать задачу

$$F(x,\alpha) \underline{\underline{\Delta}} \min_i \alpha_i f_i(x) \to \max_{x \in D}; \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m), x = (x_1,\ldots,x_n) . \qquad (2.2.7)$$

Обозначим множество решений задачи (2.2.7) при фиксированном наборе коэффициентов α через

$$X(\alpha) = \operatorname{Arg} \max_{x \in D} F(x,\alpha) .$$

Согласно доказанной теореме, множество

$$\underset{\alpha\in A}{\mathrm{U}} X(\alpha), A = \left\{ \alpha = (\alpha_1,...,\alpha_m) \middle| \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \right\}$$

совпадает с множеством слабо эффективных решений:

$$\underset{\alpha\in A}{\mathrm{U}} X(\alpha) = S(D).$$

Дадим геометрическую иллюстрацию доказанному утверждению для случая двух целевых функционалов f_1, f_2. Имеем

$$F(x, \alpha) = \min \{\alpha_1 f_1, \alpha_2 f_2\}.$$

Если рассматривать указанную зависимость в пространстве критериев, то получим функцию

$$\Phi (f_1, f_2) = \min \{\alpha_1 f_1, \alpha_2 f_2\}. \qquad (2.2.8)$$

Построим линии уровня (линии постоянного значения) функции Ф на плоскости (f_1, f_2). Для этого рассмотрим прямую L, заданную уравнением

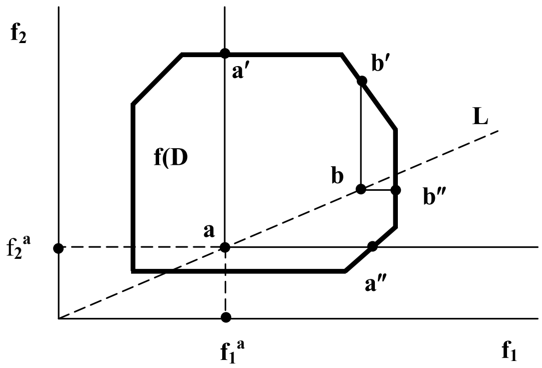


Рисунок 2.2.2.

$$\alpha_1 f_1 = \alpha_2 f_2$$

при некотором фиксированном наборе $\{\alpha_1, \alpha_2\}$. График прямой $f_2 = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} f_1$ показан на рис. 2.2.2.

В любой точке этой прямой, например, в точке $a = (f_1^a, f_2^a)$, будем иметь $\alpha_1 f_1^a = \alpha_2 f_2^a$. При смещении из точки «а» вправо параллельно оси f_1 получим $\alpha_1 f_1 > \alpha_2 f_2^a$. Аналогичная ситуация наблюдается и при перемещении вверх из точки «а» параллельно оси ординат: будем иметь $\alpha_2 f_2 > \alpha_1 f_1^a$. Поэтому, согласно определению (2.2.8) функции Ф, ее линия уровня, соответствующая значению Ф =

$\alpha_1 f_1^a = \alpha_2 f_2^a$, будет совпадать с «уголком» (a′ a a″) с вершиной в точке «а», показанным на рис. 2.2.2. (естественно, что данную линию уровня целесообразно рассматривать только в пределах множества достижимости f(D)). Иначе говоря, во всех точках отрезков [a′, a] и [a, a″] функция Ф будет иметь одно и то же значение, совпадающее с ее значением в вершине «уголка», равным по построению $\alpha_1 f_1^a = \alpha_2 f_2^a$.

Легко видеть, что любой «уголок» подобного типа с вершиной, расположенной на прямой L, также будет линией уровня, соответствующей своему значению функции Ф. Причем при удалении вдоль прямой L от начала координат на «северо-восток» мы будем получать линии уровня, отвечающие большим значения Ф. Например, на рис. 2.2.2. показана линия уровня (b′ b b″), где Ф (b) > Ф (a).

Таким образом, для каждого фиксированного набора весовых коэффициентов $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ мы получаем целое семейство «уголковых» линий уровня функции Ф.

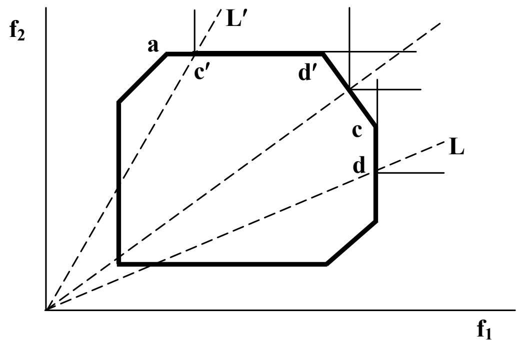


Рисунок 2.2.3.

Ясно, что решению основной задачи (2.2.7) будет соответствовать наиболее удаленное от начала координат положение «уголка» (в пределах множества достижимости f(D)), которому соответствует максимально возможное значение функции Ф, а значит и F. На рис. 2.2.3. показано множество слабо эффективных оценок (отрезок [c, d]), полученных в результате решения задачи (2.2.7). На этом же рисунке показано решение [c′, d′], полученное при другом наборе весовых коэффициентов, соответствующих прямой L′.

Продолжая такие построения, легко убедиться, что, перебирая всевозможные $\alpha \in A$, можно получить «северную, северо-восточную и восточную» части границы множества достижимости f (D):

$$S(f) = [a, d'] \cup [d', c] \cup [c, b].$$

Это и отвечает основному содержанию сформулированной теоремы.

Здесь важно отметить, что задачи оптимизации типа (2.2.7) могут иметь не единственное решение. Так, для α, отвечающего прямой L, мы в качестве решения получим целое множество [c, d] слабо эффективных оценок и соответствующих им слабо эффективных решений исходной многокритериальной задачи. Каждое из этих решений, вообще говоря, должно быть найдено.

Построенные на основе максиминной свертки вычислительные процедуры обычно подразумевают задание некоторой сетки в пространстве весовых коэффициентов A. Далее, для полученного конечного множества наборов весовых коэффициентов

$$\alpha^1 = (\alpha_1^1, \ldots, \alpha_m^1);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha^N = (\alpha_1^N, \ldots, \alpha_m^N)$$

решается множество соответствующих однокритериальных задач (2.2.7) или (2.2.2). В результате приходим к построению требуемой аппроксимации множеств S(D) и S(f). Пользователь соответствующей программной системы обычно имеет возможность влиять на указанный процесс, управляя в той или иной мере выбором весовых коэффициентов. Последнее позволяет, в частности, получать более точные аппроксимации отдельных участков границ, представляющих наибольший интерес.

2.3. Метод линейной свертки и главного критерия. Лексикографическая оптимизация

Метод линейной свертки уже рассматривался нами на эвристическом уровне (так же, как и метод максиминной свертки), Здесь мы дадим более точные утверждения, касающиеся свойств получаемых решений.

Теорема. Пусть $\alpha \in A$. Тогда решение задачи

$$F_1(x,\alpha) \underline{\underline{\Delta}} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \to \max_{x \in D} \qquad (2.3.1)$$

есть эффективный вектор.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x^0 \in D$ есть решение задачи (2.3.1) и существует такой $x' \in D$, что $f_i(x') \geq f_i(x^0)$, а для $i = i_0$ имеем $f_{i_0}(x') > f_{i_0}(x^0)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x') > \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x^0)$$

и, следовательно, x^0 не максимизирует функционал F_1. Полученное противоречие доказывает, что точки x' со сформулированными выше свойствами не существуют и поэтому x^0 – эффективный вектор. Теорема доказана.

Замечание. Обратное утверждение без дополнительных предположений неверно. Существуют эффективные векторы, не являющиеся решениями задачи (2.3.1). Для доказательства этого утверждения достаточно привести хотя бы один опровергающий пример, что ниже и будет сделано.

Таким образом, согласно доказанной теореме

$$\bigcup_{\alpha \in A} X(\alpha) \subseteq P(D).$$

Здесь

$$X(\alpha)\underline{\underline{\Delta}}\operatorname{Arg}\max_{x\in D} F_1(x,\alpha).$$

Обратимся снова к геометрическим иллюстрациям для m = 2. В этом случае

$$F_1(x, \alpha) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = \Phi_1(f_1, f_2),$$

где функция Φ_1 считается определенной в пространстве критериев (f_1, f_2). Построим линии уровня функции Φ_1:

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = \text{const}. \qquad (2.3.2)$$

Набор коэффициентов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ считается фиксированным (неизменным в процессе всего рассмотрения). График прямой (2.3.2) на плоскости (f_1, f_2) показан на рис. 2.3.1.

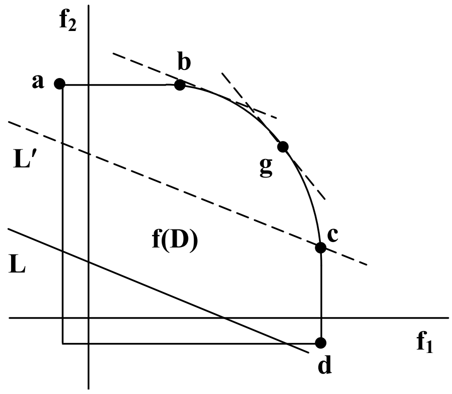


Рисунок 2.3.1.

Угловой коэффициент наклона прямой L определяется числами α_1, α_2 и равен ($-\ \alpha_1/\alpha_2$). При увеличении константы в правой части уравнения (2.3.2) прямая перемещается вверх параллельно L (занимая положение L′). Таким образом, мы имеем целое семейство линий уровня и максимум функции Φ_1, а вместе с ней и F_1 достигается в точках плоскости (f_1, f_2), соответствующих точкам касания (но не пересечения) самой «верхней» линии уровня и множества достижимости f(D). На рис. 2.3.1. точка b с координатами (f_1^b, f_2^b) реализует найденную рассмотренным методом эффективную оценку. Легко видеть, что ни одна из точек интервалов [a, b), (c, d], соответствующих слабо эффективным, но не эффективным решениям, не может являться точкой касания f(D) и какой-либо линии уровня функции Φ_1 (угловой коэффициент ($-\ \alpha_1/\alpha_2$) не может равняться нулю или бесконечности, так как все $\alpha_i > 0$ и их величина ограничена сверху единицей).

На рис. 2.3.1. показана точка g, являющаяся решением задачи (2.3.1) при другом наборе α весовых коэффициентов. Перебирая различные α, можно (как и в случае максиминной свертки) получить достаточно точную аппроксимацию множеств P(f) и P(D).

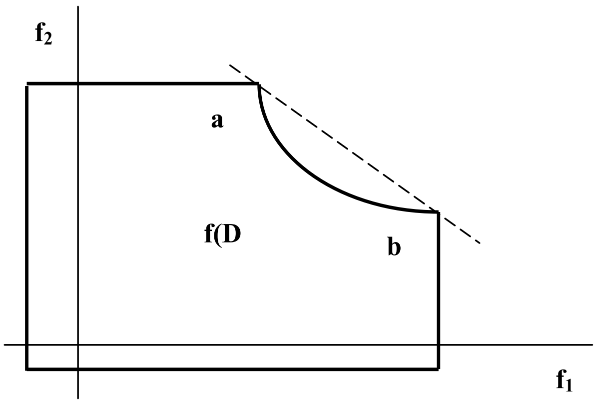


Рисунок 2.3.2.

Ситуация, связанная с существованием эффективных решений, не являющихся решениями задачи (2.2.8) ни при каких α, проиллюстрирована на рис. 2.3.2. Все точки дуги a, b являются эффективными оценками, но ни одна из них (кроме самих точек a и b) не может являться точкой касания множества f(D) с линиями уровня функции Φ_1 ни при каком наборе коэффициентов α. Таким образом, ясно, что отсутствие выпуклости множества f(D) приводит к принципиальным затруднениям при применении метода линейной свертки. Аналогично наличие строго прямолинейных участков «северо-восточной границы» множества f(D) может приводить к похожим трудностям из-за приближенного характера вычислений (точки внутри таких прямолинейных участков оказываются «неустойчивыми» решениями задачи (2.3.1)).

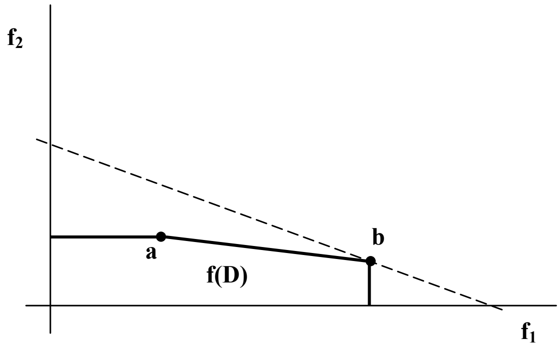


Рисунок 2.3.3.

Замечание. Весьма часто при эвристическом выборе весовых коэффициентов в методе линейной свертки пытаются сразу определить желаемую эффективную точку, исходя из заданных оценок критериев $f_1, \ldots, f_m$ по «важности». Так, например, полагая, что критерий f_2 существенно «важнее» чем критерий f_1, мы бы желали в качестве единственного решения многокритериальной задачи получить эффективную точку «а» на рис. 2.3.3. Однако мы не знаем при этом, на сколько коэффициент α_2 должен превышать значение α_1, чтобы была получена именно искомая точка. На рис. 2.3.3. показана ситуация, когда $\alpha_2 > \alpha_1$ и в то же время найденной точке b соответствуют значения $f_1^b > f_2^b$!

(Мы здесь везде надеемся, что читатель понимает иллюстративный характер приводимых рисунков и графиков. На самом деле, при решении многокритериальных задач графическая информация полностью отсутствует и мы имеем дело с чисто аналитическими постановками соответствующих оптимизационных задач).

Метод «главного критерия» также можно интерпретировать с помощью понятия слабо эффективного решения.

Теорема. Решение задачи

$$f_1(x) \to \max, \ x \in D', \tag{2.3.3}$$

где множество

$$D' = \{x \in D \mid f_i(x) \geq t_i, \ i = 2, \ldots, m\}$$

не пустое, есть слабо эффективный вектор.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x^0 есть решение задачи (2.3.3) и существует $x' \in D$, такой, что

$$f_i(x') > f_i(x^0), \ i = 1, \ldots, m. \tag{2.3.4}$$

Тогда $x' \notin D'$, так как в противном случае это противоречило бы свойству $f_1(x^0) \geq f_1(x)$ для $\forall x \in D'$. Следовательно, $x' \notin D'$ и поэтому существует такой номер $i = i_0$, для которого $f_{i_0}(x') < t_{i_0}$, что противоречит предположению (2.3.4). Теорема доказана.

Теорема. Любой эффективный вектор может быть получен как решение задачи (2.3.3) при некоторых t_i, $i = 2, \ldots, m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x^0 \in P(D)$; примем $t_i = f_i(x^0)$, $i = 2, 3, \ldots, m$ и покажем, что

$$f_1(x^0) = \max f_1(x), \ x \in D'. \qquad (2.3.5)$$

Выберем произвольный $x' \in D'$; тогда

$$f_i(x') \geq f_i(x^0), \ i = 2, \ldots, m.$$

Если предположить, что $f_1(x') > f_1(x^0)$, то это будет противоречить свойству эффективности вектора x^0, следовательно, $f_1(x') \leq f_1(x^0)$,что эквивалентно (2.3.5). Теорема доказана.

Из доказанных теорем следует, что в качестве «главного» критерия может быть выбран любой из частных критериев. Независимо от этого выбора произвольное эффективное решение может быть получено как решение задачи (2.3.2) при соответствующем задании t_i.

Метод главного критерия допускает простую графическую иллюстрацию.

Рис. 2.3.4. отражает предположение, что в качестве «главного» выбран критерий f_1, а на значения функционала f_2 наложено ограничение $f_2 \geq t_2$. Образ $f(D')$ множества D' точек из D, удовлетворяющих указанному дополнительному ограничению, соответствует незаштрихованной части множества $f(D)$.

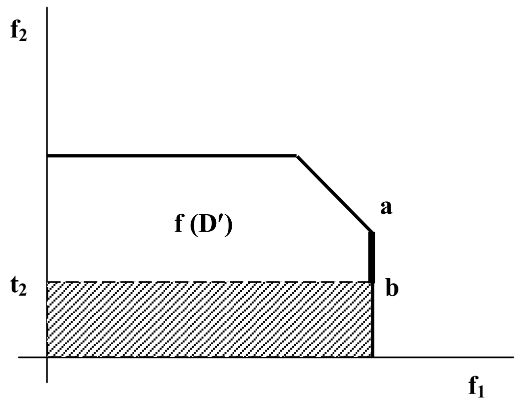


Рисунок 2.3.4.

Максимизация критерия f_1 на множестве D', очевидно, приводит к построению отрезка [a, b] на рис. 2.3.4. Как видно из рис. 2.3.4., задавая различные t_2, можно получить аппроксимацию «северо-восточной» и «восточной» частей границы множества f (D), куда входят все эффективные решения задачи.

При выборе в качестве «главного» критерия f_2 мы аналогично построим «северную» и «северо-восточную» части границы.

Пусть известен диапазон изменения функционала f_i :

$$f_i^H \le f_i \le f_i^B,\ i = 2, \ldots, m.$$

Тогда из доказательства последней теоремы следует, что соответствующие t_i (при работе с критерием f_1 как с «главным») должны меняться в тех же пределах, пробегая выбранную сетку значений (аналогично построению аппроксимаций множеств эффективных и слабо эффективных решений в методах максиминной и линейной сверток).

Лексикографическая оптимизация. Как мы видели, методом максиминной свертки могут быть получены все слабо эффективные решения, если вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ пробегает все множество векторов A. Напротив, по методу линейной свертки можно получить только эффективные решения, но не все. А. Джоффриону принадлежит идея выделения эффективных точек из множества S(D), построенного методом максиминной свертки, с помощью процедуры максимизации линейной свертки. В результате будут построены все эффективные и только эффективные решения.

Теорема. Пусть $\alpha_i > 0,\ i = 1, \ldots, m$. Тогда решение задачи

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x) \to \max_{x \in T_\alpha};$$
$$T_\alpha = \operatorname{Arg} \max_{x \in D} \min_i \alpha_i (f_i - t_i) \qquad (2.3.6)$$

есть эффективный вектор. Наоборот, любой эффективный вектор x^0 может быть получен как решение задачи (2.3.6) при некоторых $\alpha_i > 0$ и $t_i < f_i(x^0),\ i=1,\ldots,m$.

Доказательство теоремы приводить не будем. Обсудим ее смысл и дадим геометрическую иллюстрацию.

Множество T_α при фиксированном наборе коэффициентов α получают методом максиминной свертки. Можно доказать, что, если T_α – непустое множество, то оно обязательно наряду со слабо эффективными решениями содержит хотя бы один эффективный вектор. (Упражнение: докажите последнее утверждение). Далее, максимизируя линейную свертку частных критериев (2.3.6) на множестве T_α, мы получаем в результате эффективное решение. Совершенно очевидно, что, если T_α состоит из одного элемента, то он же и будет эффективным решением и необходимость в максимизации (2.3.6), по существу, отпадает.

На рис. 2.3.5. показано множество T_α, найденное при определенном наборе коэффициентов α, и выделенная из него эффективная оценка «e».

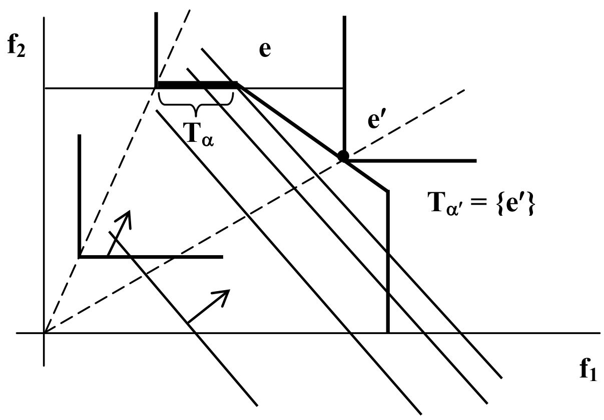


Рисунок 2.3.5.

При другом наборе коэффициентов α' множество $T_{\alpha'}$ (см. рис. 2.3.5.) является одноэлементным: $T_{\alpha'} = \{e'\}$. Точка e′ также оказывается эффективной оценкой.

Термин «лексикографическая оптимизация» здесь использован в следующем смысле. Речь идет о так называемом лексикографическом упорядочении двух критериев – максиминного и линейного: вначале «срабатывает» максиминная свертка, и если в результате получен неоднозначный результат (множество T_α содержит более одного элемента), то выбираются тот или те из полученных элементов, которые максимизируют линейную свертку (2.3.6), т.е. только тогда «срабатывает» второй критерий. Данный процесс аналогичен поиску слова в словаре: вначале мы работаем с первой буквой, затем – со второй и т.д. (этим и определяется название).

Задача многокритериальной оптимизации (2.3.6) часто записывается в следующем компактном виде:

$$\left\{\min_i \alpha_i (f_i - t_i), \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\right\} \to \max_{x \in D}.$$

<u>Выводы</u>. Ни один из методов, представленных выше, не позволяет выделить единственное оптимальное решение. Решения, соответствующие различным наборам весовых коэффициентов, являются равноправными элементами множеств эффективных и слабо эффективных решений, которые согласно общей постановке задачи ПР реализуют ядра соответствующих бинарных отношений (отношений Парето и отношений Слейтера), т.е. и являются искомыми решениями. Однако с практической точки зрения, например, в задачах выбора вариантов (при покупке или заказе товаров, при выборе партнеров по бизнесу, при выборе вариантов программных средств и т.д.), а также в системах автоматизированного проектирования, часто требуется выбрать единственное решение (проект). Для этого должна привлекаться некоторая дополнительная информация о предпочтениях лица, принимающего решения. Принцип Парето в этом смысле позволяет лишь сузить класс возможных претендентов на решение и исключить из рассмотрения заведомо неконкурентоспособные варианты.

Методы выбора единственного решения многокритериальной задачи существуют и связаны с использованием моделей и процедур, предназначенных для структуризации и количественного описания субъективного мнения лица, принимающего решения. В разделе 5 эти вопросы будут рассмотрены более подробно.

3. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ.

Мы ограничимся здесь обсуждением нескольких стандартных ситуаций неопределенности обстановки в процессе принятия решений.

По-прежнему считаем, что задано множество альтернатив X и множество возможных исходов Y. При рассмотрении задачи ПР в условиях определенности, когда каждому решению $x \in X$ соответствовал единственный исход $y \in Y$, было безразлично, на каком множестве X или Y задавать бинарное отношение предпочтения R. Ранее мы обычно задавали это отношение на множестве решений X. При этом на самом деле неявно задавалось и соответствующее отношение на множестве исходов Y. Действительно, пусть существует однозначная зависимость $y = \varphi(x)$, позволяющая по решению x определить единственный исход y. Альтернативы x' и x'', по существу, сравнивались по значениям оценок соответствующих исходов y' и y''. Иначе говоря, имели

$$x' \succ x'' \leftrightarrow y' \succ y'',$$

где использованы обозначения

$$x' \succ x'' \leftrightarrow (x', x'') \in R_X,$$
$$y' \succ y'' \leftrightarrow (y', y'') \in R_Y.$$

Таким образом, общая модель принятия решений $<A, R>$ могла быть сформулирована в виде $< X, R_X >$ либо $< Y, R_Y >$. Суть дела от этого не менялась. В таком случае говорят, что отображение $\varphi : X \to Y$ является гомоморфизмом модели $< X, R_X >$ в модель $< Y, R_Y >$, т.е. для всяких $x', x'' \in X$ из $x' R_X x''$ следует $\varphi(x') R_Y \varphi(x'')$.

При наличии неопределенных факторов ситуация усложняется. Теперь мы уже не можем гарантировать наступление определенного исхода y при выборе решения x.

Будем считать, что наша система предпочтений связана с оценкой «полезностей» исходов y. Выбор x осуществляется с единственной целью – получить «хороший» исход y, принадлежащий ядру – множеству максимальных элементов из Y по заданному отношению R_Y. В данном случае модель ПР имеет вид $< Y, R_Y >$. В частности, отношение R_Y может быть задано, хотя это не единственный способ, как и раньше, с помощью однокритериальной или многокритериальной системы оценок исходов, т.е. на критериальном языке описания выбора.

3.1. Основные понятия

Таблица 3.1.1.

X	Z
	$z_1 \ldots z_j \ldots z_m$
x_1	$y_{11} \ldots y_{1j} \ldots y_{1m}$
…	…………….
x_j	$y_{j1} \ldots y_{jj} \ldots y_{jm}$
…	……………
x_n	$y_{n1} \ldots y_{nj} \ldots y_{nm}$

В случае, когда множество альтернатив X и исходов Y конечны, ситуацию выбора альтернативы в условиях неопределенности можно представить с помощью матрицы, называемой матрицей решений (табл. 3.1.1). Здесь $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_{11}, \ldots, y_{nm}\}$. Вектор $Z = \{z_1, \ldots, z_m\}$ описывает неопределенность обстановки и также предполагается конечным. По существу, имеется функция двух аргументов: $y = F(x, z)$, $F : X \times Z \to Y$.

Заданная матрица интерпретируется следующим образом. Если мы выбрали решение x_j, то могут реализоваться различные исходы из соответствующей строки матрицы: $y_{j1}, \ldots, y_{jm}$. Какой именно исход реализуется, зависит от значения параметра неопределенности z, который может иметь различный содержательный смысл. Будем различать две основные ситуации:

1) вектор Z отражает так называемые «природные» неопределенности, т.е. неопределенность «состояния природы» в момент принятия решения;
2) множество $Z = \{z_1, \ldots, z_m\}$ есть множество альтернатив, на котором (одновременно с нами) осуществляет выбор решения второй субъект, руководствуясь своим отношением предпочтения R_y (неопределенность типа «активный партнер»). При этом выбираемое нами решение x, в свою очередь, характеризует неопределенность обстановки для второго субъекта.

Далее эти вопросы рассматриваются более подробно. Заметим здесь же, что представление задачи ПР с помощью табл. 3.1.1. имеет достаточно общий характер, в частности, включает в себя случай полной определенности. При этом таблица будет состоять из одного столбца (что эквивалентно наличию одного состояния среды).

В общем случае мы будем предполагать существование функции

$y = F(x, z)$,

где $x \in X$, $z \in Z$, $y \in Y$; X, Z, Y − множества (вообще говоря, абстрактные) альтернатив (решений), состояний среды и исходов, соответственно. Особенностью рассматриваемых ниже задач ПР является предположение о неизвестном в момент принятия решения значении параметра z. Саму функцию F будем называть <u>функцией реализации</u>. Таким образом, функция реализации ставит в соответствие каждой паре вида (x, z), где x − альтернатива, а z − состояние фактора неопределенности, исход y.

При этом, как указывалось, характер неопределенности, описываемый переменной z, может быть различным. Вначале мы будем предполагать, что z описывает некоторую неопределенность среды (неопределенность типа «активный партнер» будет рассмотрена в разд. 3.5). Кроме того, мы будем предполагать, что каждый исход y оценивается вещественным числом e (отражающим, если угодно, «полезность» исхода), и требуется максимизировать эту оценку. (Имеем, следовательно, однокритериальную оценку исхода). Для упрощения обозначений мы в таких случаях будем отождествлять y и e , считая, что исход y уже есть некоторая числовая оценка принятого решения. При этом функция реализации преобразуется в соответствующую вещественную функцию (целевую функцию) J(x,z), которую следует максимизировать или минимизировать по x в зависимости от смысла решаемой задачи.

В указанной ситуации вполне естественно ввести следующее бинарное отношение доминирования R_1 на множестве X:

$$x_1 \overset{R_1}{\succ} x_2 \leftrightarrow \forall z \in Z: J(x_1, z) \geq J(x_2, z),$$

причем хотя бы для одного z имеем строгое неравенство. (Здесь $\succ$ – знак строгого доминирования). Отношение эквивалентности может быть введено с помощью соотношения:

$$x_1 \sim x_2 \leftrightarrow \forall z \in Z: J(x_1, z) = J(x_2, z)$$

($\sim$ – знак эквивалентности).

<u>Пример</u>. Рассмотрим числовую матрицу решений, где $Z = \{z_1, z_2\}$, $X = \{x_1, \ldots, x_5\}$. В этом случае каждому решению $x_i \in X$ соответствуют две числовые оценки полезности

$$y_{1i} = J(x_i, z_1)$$
$$y_{2i} = J(x_i, z_2),$$

отвечающие двум возможным состояниям среды. Таким образом, можно рассматривать значения y_{1i}, y_{2i} как

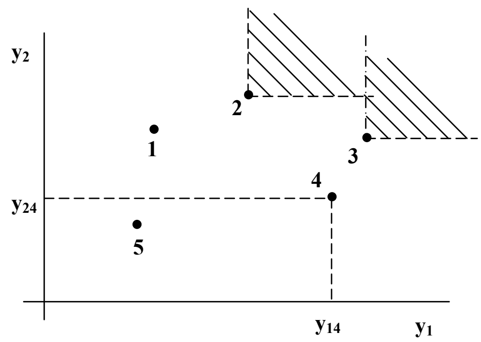


Рисунок 3.1.1.

координаты точки x_i в пространстве y_1, y_2. Пяти возможным решениям будут соответствовать пять точек в плоскости (y_1,y_2). Абсцисса каждой точки есть результат соответствующего решения при состоянии среды $z = z_1$, а ордината – при $z = z_2$ (рис. 3.1.1.).

Совершенно очевидно, что здесь, также как и в многокритериальных задачах, действует принцип Парето и нас должны интересовать только недоминируемые в смысле отношения R_1 решения x_i. На рис. 3.1.1. это будут решения x_2, x_3. Остальные решения могут быть отброшены и в дальнейшем не учитываться.

Рассмотренный пример показывает, что все основные принципы и методы паретовского анализа многокритериальных задач переносятся на однокритериальные задачи принятия решений в условиях неопределенности. В частности, на основе принципа Парето исходное множество альтернатив X должно быть сокращено с целью удаления доминируемых по Парето вариантов. В общем случае это может быть выполнено с помощью уже рассмотренных ранее численных методов выделения Парето-оптимальных решений.

Далее мы обычно будем предполагать конечность множеств X, Y, Z и задавать функцию реализации с помощью соответствующей матрицы решений. Однако большинство из рассматриваемых методов допускают обобщение на бесконечномерный случай.

При рассмотрении методов принятия решений в условиях неопределенности используется понятие <u>оценочной функции</u>. Очевидно, что если принятие решений происходит в условиях определенности, то матрица решений будет содержать только один столбец. Принятие решений в условиях неопределенности состоит, по существу, тоже в формировании одностолбцовой матрицы решений и сведении задачи к случаю полной определенности. Эта процедура выполняется неоднозначно с помощью применения различных оценочных функций.

Пусть задана $(n\times m)$–матрица решений $\{y_{ij}\}$. Оценочной функцией называется функция Ψ, преобразующая эту матрицу в одностолбцовую матрицу $\{y_i\}$:

$$y_i = \Psi\,(y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{nm}),$$

т.е. y_i зависит от всех элементов исходной матрицы. Многие методы принятия решений имеют оценочные функции вида

$$y_i = \Psi\,(y_{i1}, \ldots, y_{im}),$$

когда i-тый элемент одностолбцовой матрицы зависит только от элементов i-той строки исходной матрицы решений.

Например, оценочная функция Ψ может быть задана с помощью соотношения

$$y_i = \min_j y_{ij} + \max_j y_{ij}.$$

После построения оценочной функции выбор наилучшей альтернативы x* производится из условия максимума или минимума значения оценочной функции (в зависимости от интерпретации элементов матрицы решений – «доходы» или «потери»), например,

$$i^* = \arg\min_i y_i,\, x^* = x_{i_*}.$$

Без существенного ограничения общности можно полагать, что всякое решение в условиях неполной информации – сознательно или неосознанно – принимается в соответствии с некоторой оценочной функцией. Выбор самой оценочной функции – это неформальный акт и этот выбор всегда должен осуществляться с учетом качественных характеристик ситуации, в которой принимается решение.

Далее мы рассмотрим классические критерии принятия решений на основе различных оценочных функций.

3.2. Принятие решений в условиях риска.

Напомним, что когда говорят о принятии решений в условиях риска, обычно предполагают, что каждой альтернативе соответствует свое распределение вероятностей на множестве исходов. Если множества альтернатив и исходов конечны, то считаются известными вероятности каждого исхода, возможного при выборе данной альтернативы.

Типичную постановку задачи о принятия решений в условиях риска поясним с помощью конкретного примера.

Пример 1. Задача о замене вратаря.

На последней минуте хоккейного матча при ничейном счете тренер команды должен принять решение о замене вратаря шестым полевым игроком. Статистика, имеющаяся у тренера, показывает, что в аналогичных условиях в предыдущих встречах замена вратаря в одной шестой части случаев привела к выигрышу, в половине случаев – к ничьей и в одной трети случаев – к поражению. Если же вратарь не заменялся, то в 7/8 случаев встреча заканчивалась вничью, а в 1/8 части случаев команда проигрывала.

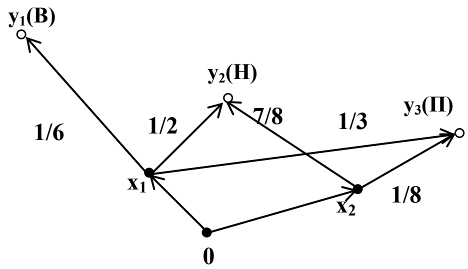


Рисунок 3.2.1.

Построим для этой задачи граф связей альтернатив и исходов. Здесь имеются две альтернативы: x_1 – заменить вратаря, x_2 – не делать замены. В любом случае возможны три исхода: выигрыш (В), ничья (Н) и поражение (П). Принимая за вероятность каждого исхода частоту его появления в предыдущих матчах, получим граф, представленный на рис. 3.2.1. Решение задачи будет дано несколько позже.

Сформулированная задача ПР в условиях риска и приведенный пример не позволяют пока понять, где же здесь состояние среды? Какой характер имеет функция реализации F(x, z) и возможно ли вообще ее построение? Оказывается, что язык функций реализации является достаточно общим и позволяет описывать различные ситуации неопределенности, в том числе и рассмотренную выше.

Обратимся снова к задаче о замене вратаря. Задание функции реализации означает, что при известном z мы по каждому x уже однозначно определяем исход y. Таким образом, зная состояние среды z, мы должны точно знать, что будет, если мы выберем альтернативу x_1, и каков будет исход при выборе x_2. Введем следующие шесть искусственных «состояний среды»:

$z_1 : x_1 \to$ В,	$x_2 \to$ Н	$p(z_1) = (1/6)(7/8) = 7/48$
$z_2 : x_1 \to$ Н,	$x_2 \to$ Н	$p(z_2) = (1/2)(7/8) = 7/16$
$z_3 : x_1 \to$ П,	$x_2 \to$ Н	$p(z_3) = (1/3)(7/8) = 7/24$
$z_4 : x_1 \to$ В,	$x_2 \to$ П	$p(z_4) = (1/6)(1/8) = 1/48$
$z_5 : x_1 \to$ Н,	$x_2 \to$ П	$p(z_5) = (1/2)(1/8) = 1/16$
$z_6 : x_1 \to$ П,	$x_2 \to$ П	$p(z_6) = (1/3)(1/8) = 1/24$

В правом столбце указаны вероятности соответствующих событий.

Теперь функция реализации может быть задана в виде табл. 3.2.1. Около каждого состояния среды указана вероятность его появления.

Таблица 3.2.1.

X	Z					
	z_1 (7/48)	z_2 (7/16)	z_3 (7/24)	z_4 (1/48)	z_5 (1/16)	z_6 (1/24)
x_1	В	Н	П	В	Н	П
x_2	Н	Н	Н	П	П	П

Рассмотрим теперь задачу ПР в более общем случае, когда имеется n альтернатив $x_1, \ldots, x_n$ и L исходов $y_1, \ldots, y_L$. В качестве «состояния среды» возьмем множество возможных согласно графу связей альтернатив и исходов отображений $z_j : X \to Y$, $j = 1, \ldots, S$. В случае конечных множеств X и Y будем иметь $S = \prod_{j=1}^{n} S_j$, где S_j – количество стрелок, исходящих из альтернативы x_j, на графе связей альтернатив и исходов (в нашем примере $S_1 = 3$, $S_2 = 2$, $S = 6$). Таким образом, каждое «состояние среды» z_j соответствует такому подграфу графа связей альтернатив и исходов (будем называть его подграфом состояния), в котором из каждой альтернативы x_i исходит только одна стрелка, указывающая, какой исход будет реализован при выборе альтернативы x_i (S – максимально возможное число таких подграфов). Следовательно, выбор «состояния среды» z_j и альтернативы x_i полностью определяет исход – обозначим его через $y_j(x_i)$. Далее, каждому состоянию среды z_j соответствует вероятность его наступления (вероятность реализации соответствующего подграфа состояния):

$$p(z_j) = \prod_{i=1}^{n} p_i(y_j(x_i)), j = 1,...,S,$$

где $p_i(y_j(x_i))$ – заданная вероятность наступления исхода y_j при выборе альтернативы x_i. Таким образом, для вычисления $p(z_j)$ достаточно перемножить числа, стоящие около стрелок, составляющих подграф состояния z_j. Теперь таблица, представляющая функцию реализации, уже может быть построена.

Установленная выше возможность представления задачи ПР в условиях риска в форме функции реализации означает, что статистическую неопределенность, проявляющуюся в неоднозначной (вероятностной) связи между средством и результатом, всегда можно интерпретировать как существование некоторой среды, оказывающей влияние на результат. Методологическое значение этого факта состоит в том, что достаточно широкий класс задач ПР может быть приведен к указанной стандартной форме – форме функции реализации. Отметим также, что многие практические задачи ПР непосредственно формулируются в форме функции реализации. Это, прежде всего, такие задачи, где реально существует среда, влияющая на результат принятия того или иного решения. В качестве примера могут быть указаны задачи принятия оптимальных проектных решений в условиях технологического разброса параметров изделия.

Итак, пусть задана функция реализации $y = F(x, z)$, где множества X, Y, Z уже не будем предполагать конечными. В условиях полной определенности, как мы видели, задана однозначная связь $y = \varphi(x)$, которая, очевидно, и является соответствующей функцией реализации («состояние среды» z задано и фиксировано). Основная задача ПР состоит в поиске ядра бинарного отношения R_Y в множестве исходов Y.

Будем считать, что задана функция $f : Y \to E$, отображающая множество исходов Y на множество вещественных чисел E. Бинарное отношение R_Y задается условием

$$(y', y'') \in R_Y \leftrightarrow f(y') > f(y'').$$

Тогда существует функционал $J : X \times Z \to E$ и задача ПР эквивалентна задаче оптимизации

$$J(x, z) \to \max_{x \in X}. \qquad (3.2.1)$$

В данном случае у функционала J появился новый аргумент z, так как вместо $y = \varphi(x)$ имеем в условиях риска в качестве функции реализации зависимость $y = F(x, z)$.

Таким образом, мы использовали здесь критериальный язык для задания бинарного отношения предпочтения на множестве исходов Y. Более того, исходы y оцениваются в данном случае по однокритериальной схеме, так как задана одна функция f (y) (целевая функция), характеризующая «полезность» исходов.

Таким образом, говоря о задаче ПР, сформулированной в виде (3.2.1), мы имеем в виду выбор решения (альтернативы) x в условиях, когда целевая функция задана, но задана не совсем точно – она содержит неопределенный параметр z. Решая задачу (3.2.1), мы можем определить x лишь как некоторую функцию параметра z : x = x (z). Если никакой информацией о факторе неопределенности z мы не располагаем, то и результат максимизации J произволен. При наличии статистической неопределенности мы предполагаем, что z – случайная величина, закон распределения которой известен.

Методологически важно различать две основные ситуации: 1) исход $y \in Y$, соответствующий принятому решению x, реализуется многократно; 2) исход y реализуется однократно. Например, выбор конструктивных параметров x изделия, выпускаемого серийно, дает пример многократной реализации исхода одного и того же выбора. Напротив, оптимальный выбор параметров уникального изделия – пример второй ситуации.

Обратимся к методам ПР при наличии многократно реализованного исхода. В этих случаях задачу (3.2.1) естественно заменить некоторой вероятностной задачей. Вполне разумным представляется выбор такой альтернативы x, которая максимизирует математическое ожидание критерия, т.е. является решением задачи

$$J_1(x) = \overline{J(x,z)} \to \max_{x \in X}, \qquad (3.2.2)$$

где черта сверху означает математическое ожидание случайной величины J (x, z). Правило выбора оптимальной альтернативы на основе решения задачи оптимизации (3.2.2) называется <u>критерием математического ожидания</u> (или <u>критерием Байеса-Лапласа</u>). Если предположить, что функционал J характеризует «полезность» или «доход», полученный от решения x и реализовавшегося исхода y, то математическое ожидание можно рассматривать как «средний доход», и, решая задачу (3.2.2), мы фактически максимизируем «средний доход».

Пример 2. Вернемся к ситуации, описанной в примере 3 из введения. Обозначим через p вероятность появления контролера (вероятность его непоявления равна, следовательно, 1–p). Функция J(x,z) может быть представлена в виде матрицы доходов 3.2.2 (перед потерями поставили знак минус).

Таблица 3.2.2.

X	Z	
	z_1 (p)	z_2 (1 – p)
x_1	– 2	– 2
x_2	– 8	0

В таблице J (x_1, z_1) = –2 и т.д. Имеем теперь:

$$\overline{J(x_1,z)} = p(-2) + (1-p)(-2) = -2,$$

$$\overline{J(x_2,z)} = p(-8) + (1-p)\cdot 0 = -8p.$$

Следовательно, согласно критерию (3.2.2), надо предпочесть первую альтернативу x_1 (брать билет) второй, если –2 > –8p, т.е. p > 1/4. В противном случае более предпочтительной следует признать альтернативу x_2. Если считать, что каждый вагон имеет одинаковые шансы посещения контролером, число вагонов равно k, а число контролеров равно r (предполагается, что $r \le k$), то можно положить, что $p \cong r/k$. Таким образом, если на 4 вагона приходится более 1 контролера, выгоднее брать билет!

Пример 3 (продолжение примера о замене вратаря). Будем численно оценивать исходы игры по получаемым очкам: В – 2 очка, Н – 1 очко, П – 0 очков. Тогда таблица, задающая функционал J(x,z), получается непосредственно из табл. 3.2.1 и имеет вид табл. 3.2.3.

Таблица 3.2.3.

X	Z					
	z_1 (7/48)	z_2 (7/16)	z_3 (7/24)	z_4 (1/48)	z_5 (1/16)	z_6 (1/24)
x_1	2	1	0	2	1	0
x_2	1	1	1	0	0	0

Аналогично предыдущему примеру вычисляем:

$$\overline{J(x_1,z)} = 2(7/48) + 1(7/16) + 2(1/48) + 1(1/16) = 5/6;$$
$$\overline{J(x_2,z)} = 1(7/48) + 1(7/16) + 1(7/24) = 7/8.$$

Имеем $\overline{J(x_2,z)} > \overline{J(x_1,z)}$ и поэтому, руководствуясь критерием числа ожидаемых очков, принимаем решение, что в подобных ситуациях нецелесообразно заменять вратаря. «В среднем» такая стратегия приведет к успеху, хотя в каждой конкретной игре, конечно, может реализоваться любой возможный исход.

Упражнение. Указанный в последнем примере критерий (число очков) может быть неадекватен цели принимающего решение. Легко представить себе ситуацию, когда выигрыш оценивают числом t, показывающим, во сколько раз выигрыш важнее ничьей (при этом может быть, что t > 2). Определите, при каком t выгоднее предпочесть альтернативу x_1 (заменить вратаря). Ответ: $t \geq 2{,}25$.

Замена задачи $J(x, z) \to \max$ задачей $J_1 = M\{J(x, z)\} \to \max$, где $M\{\ldots\}$ - знак математического ожидания – не единственный способ перехода к статистической постановке. Можно поступить и иначе. Например, определенную роль может играть дисперсия критериальной функции J. И, может быть, имеет смысл иногда поступиться немного значением математического ожидания для уменьшения возможного разброса результатов, т.е. уменьшения значения дисперсии:

$$J_2(x) = \overline{J(x,z)} - k\overline{[J(x,z) - \overline{J(x,z)}]^2} \to \max_x . \qquad (3.2.3)$$

Здесь $\overline{[J(x,z) - \overline{J(x,z)}]^2}$ – дисперсия случайной величины J (x, z); k – заданная постоянная. Эту постоянную целесообразно интерпретировать как <u>степень несклонности к риску</u>. Действительно, k определяет «степень важности» дисперсии по отношению к математическому ожиданию случайной величины J. Увеличение значения k приводит, вообще говоря, к уменьшению «среднего дохода» $\overline{J(x,z)}$, но зато уменьшается и вероятность отклонения от «среднего дохода» (в том числе, в сторону его уменьшения). Таким образом, чем больше k, тем менее склонно к риску лицо, принимающее решение. Критерий (3.2.3) обычно называется <u>критерием ожидаемое значение – дисперсия</u>.

Трудности решения задач (3.2.2), (3.2.3) связаны с высокой трудоемкостью процедуры вычисления математического ожидания. Мы должны сначала задать значения компонент вектора x и лишь затем провести усреднение – операцию, связанную, вообще говоря, с вычислением многомерных интегралов и поэтому требующую значительных затрат машинного времени. Иначе говоря, в отличие от детерминистской постановки задачи оптимизации, функционалы J_1, J_2 не заданы в явном виде как функции x. Все это часто заставляет заменять эти задачи на другие. Если решение задачи

$$J(x,z) \to \max_x$$

при фиксированном значении случайного параметра z сравнительно просто определяется, то вместо критерия математического ожидания применяется следующий критерий:

$$J_3(x) = J(x, \bar{z}) \to \max_x ,$$

где $\bar{z}$ – математическое ожидание случайной величины z. Здесь важно понимать, что задача максимизации функции J_3 вовсе не эквивалентна такой же задаче для J_1 из (3.2.2). Переход от J_1 к J_3 носит неформальный характер и требует каждый раз дополнительного обоснования и объяснения.

Таким образом, в случае многократной реализации исхода принятого решения проблема выбора мало чем отличается от ситуаций, в которых случайные факторы отсутствуют. Дополнительные сложности здесь носят чисто вычислительный характер и связаны с необходимостью выполнения операций усреднения.

Рассмотрим еще один часто упоминаемый критерий – <u>критерий (принцип) недостаточного основания Бернулли</u>. Этот критерий, по существу, применяется в условиях полной неопределенности, когда информация о вероятностях состояния среды z_i отсутствует.

Сам Яков Бернулли (1654 – 1705) формулировал его следующим образом: если нет данных к тому, чтобы считать одно событие из полной системы несовместимых событий более вероятным, чем другие, то все события нужно считать равновероятными.

В контексте нашей задачи при конечности рассматриваемых множеств этот принцип приводит к оценочной функции

$$y_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_{ij} \to \max_i .$$

При этом, очевидно, множитель $\frac{1}{m}$ может быть опущен без изменения вводимого упорядочения альтернатив и мы приходим просто к операции суммирования «доходов» по строкам матрицы решений.

При практическом использовании рассмотренных статистических критериев могут возникать, однако, значительные трудности, например, связанные с построением набора $\{z_i\}$ состояний среды (в дискретном случае). Обычно вполне справедливо указывается, что состояния z_i должны быть несовместны, а сам набор $\{z_i\}$ обладать свойством полноты – в обычном статистическом смысле. К сожалению, соблюдение этих важных требований часто тоже не спасает ситуации.

Пример. В определенных условиях следующие два набора состояний среды удовлетворяют вышеприведенным требованиям:

Набор 1: z_1 – цель неподвижна;

z_2 – цель перемещается.

Набор 2: z_1 – цель неподвижна;

z_2 – цель перемещается влево;

z_3 – цель перемещается вправо.

Однако, если соответствующие две задачи решать, например, по критерию недостаточного основания Бернулли, то получим различные результаты. Другими словами, проблема формирования наборов $\{z_i\}$ для сложных ситуаций принятия решения – отдельная и далеко не тривиальная задача.

Ситуация становится еще более сложной, если исход принятого решения реализуется однократно («одноразовое использование решения»). Такой случай характерен, в частности, при решении задач оптимального выбора параметров уникальных изделий, например, мостов, ирригационных сооружений, финансовых проектов, программных продуктов и т.п. При этом информация о статистических характеристиках факторов неопределенности, даже если она и имеется, не имеет никакого смысла: какова бы ни была вероятность того, что значение некоторого числового параметра неопределенности z будет равно 10^{10} или 10^{-10}, мы ничего не сможем сказать о значении функционала J(x,z), которое реализуется в действительности при конкретном выборе x. Здесь мы в силу уникальности ситуации уже не можем «рассчитывать на средний случай». Такого типа задачи принятия решений необходимо решать особыми нестатистическими методами, либо (опять же допуская определенный риск) переходить к другой философии и, по существу, заменять вероятности некоторыми «коэффициентами уверенности» и т.п.

3.3. Критерии принятия решений в условиях полной неопределенности.

Как уже указывалось, применение методов теории вероятностей при однократной реализации исхода принятого решения, вообще говоря, неправомерно. Методологически близкая ситуация возникает и в случаях многократной реализации исхода, но при дополнительном предположении, что либо распределение вероятностей параметра z неизвестно, либо параметр неопределенности z изменяется неизвестным образом, но <u>не является случайным</u> (не обладает свойством статистической устойчивости).

В указанных ситуациях информация о факторе неопределенности z обычно имеет вид

$$z \in Z, \tag{3.3.1}$$

где Z – некоторое множество. Но подобной информации также недостаточно для однозначного решения задачи выбора альтернативы x. Напомним, что мы по-прежнему рассматриваем задачу оптимизации

$J(x,z) \to \max\limits_{x}$. Из решения этой задачи мы можем определить вектор x как функцию z:

$$x = x\,(z). \qquad (3.3.2)$$

Формула (3.3.2) позволяет лишь отобразить множество неопределенности природных факторов Z на множество $G_x \subset X$, которое естественно назвать множеством неопределенности решений x. Выбор конкретного элемента из множества G_x может основываться на введении различных разумных гипотез о поведении среды. Одна из важнейших гипотез такого типа называется гипотезой антагонизма. Она состоит в предположении, что среда ведет себя «наихудшим» (для принимающего решение) образом. В итоге в качестве оптимальной альтернативы выбирается решение следующей задачи оптимизации:

$$J_4(x) = \min_{z \in Z} J(x,z) \to \max_{x \in X}. \qquad (3.3.3)$$

Из последнего соотношения видно, что для вычисления значения функционала J_4 (x) при фиксированном значении x решается задача минимизации J (x, z) по z, т.е. подбирается «наихудший» возможный вариант z. Соответствующее значение J и берется в качестве значения функционала J_4, соответствующего заданному x. Принцип выбора оптимальной альтернативы x* на основе решения задачи (3.3.3) называется также принципом гарантированного результата или принципом максимина (используется также название критерий Вальда). Число J_4 (x*) = J* называется гарантированной оценкой, а сам элемент x* – гарантирующим решением. Смысл введенных названий состоит в том, что, каково бы ни было значение параметра неопределенности z, выбор x = x* согласно формуле (3.3.3) гарантирует, что при любом z значение целевого функционала J (x, z) будет не меньше, чем J* (докажите последнее замечание). Оценочная функция данного критерия для дискретного случая имеет вид:

$$y_i = \min_j y_{ij}$$

Очевидно, что если значение функционала J(x,z) отражает не «полезность» альтернативы x, не «доход», а, напротив, – «потери», то исходная задача состоит в минимизации функции J(x,z), а максиминный критерий превращается в <u>минимаксный</u>:

$$J_5(x) = \max_{z \in Z} J(x,z) \to \min_{x \in X}. \quad (3.3.4)$$

Максиминный критерий является крайне осторожным, «пессимистичным», что может иногда приводить к нелогичным выводам, противоречащим здравому смыслу.

Таблица 3.3.1.

X	Z	
	z_1	z_2
x_1	10 100	100
x_2	10 000	10 000

<u>Пример</u>. Пусть функция J(x,z) задана с помощью табл. 3.3.1., где элементы матрицы решений имеют смысл «потерь», заданных в некоторых условных единицах и которые следует минимизировать. При выборе решения x_1 или x_2 мы по-прежнему не знаем, какое значение z_1 или z_2 примет фактор неопределенности z. Применение минимаксного критерия приводит к выбору x_2. Но интуитивно мы склонны выбрать x_1, поскольку совсем не исключено, что реализуется «состояние природы» z_2 и наш проигрыш будет существенно уменьшен (равен 100 ед.). В то же время при выборе x_2 мы гарантированно получим потери в 10 000 ед. при любом значении z.

Таблица 3.3.2.

X	Z			
	z_1	z_2	…	z_S
x_1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1S}
x_2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2S}
…	…	…	…	…
x_n	y_{n1}	y_{n2}	…	y_{nS}

Предположим теперь, что задана табл. 3.3.2., представляющая функционал J (x, z). Здесь введены обозначения $y_{ij} = J(x_i, z_j)$. Таким образом мы предполагаем конечность множеств X, Z. Поясним на этом примере, как можно исправить положение с излишней «осторожностью» максиминного (или минимаксного) критерия. Введем новую матрицу вместо $\{y_{ij}\}$ следующим образом:

$$r_{ij} = \begin{cases} \max\limits_{k=1,\dots,n} y_{kj} - y_{ij}, & \text{если y – «доход»;} \\ y_{ij} - \min\limits_{k=1,\dots,n} y_{ki}, & \text{если y – «потери».} \end{cases}$$

Иначе говоря, r_{ij} есть разность между наилучшим значением в столбце j и значением y_{ij} при том же j. Следовательно, обработка матрицы $\{y_{ij}\}$ идет «по столбцам».

Построенная таким способом матрица $\{r_{ij}\}$ называется <u>матрицей сожалений</u>, так как, по существу, каждое число r_{ij} выражает «сожаление» лица, принимающего решение, по поводу того, что он не выбрал наилучшего решения относительно состояния z_j.

<u>Критерий минимального сожаления</u>, предложенный Сэвиджем, состоит в применении минимаксного критерия (независимо от того, какой характер имели элементы y_{ij} – «дохода» или «потерь») к матрице сожалений $\{z_{ij}\}$:

$$J_6(x) = \max_{j=1,\dots,S} r_{ij} \to \min_{i=1,\dots,n} \Rightarrow i_*, x^* = x_{i_*},$$

т.е. числа r_{ij} всегда носят характер «потерь» и их необходимо минимизировать. Соответствующая оценочная функция (при условии, что исходная матрица является матрицей доходов) имеет вид:

$$y_i = \max_j (\max_i y_{ij} - y_{ij}) \to \min_i .$$

Обратимся снова к последнему примеру. Матрица сожалений будет иметь вид табл. 3.3.3. В этом случае имеем:

Таблица 3.3.3.

X	Z	
	z_1 (ед.)	z_2 (ед.)
x_1	100	0
x_2	0	9 900

$$i = 1: \max_{j=1,2} y_{ij} = \max\{100,0\} = 100;$$

$$i = 2: \max_{j=1,2} y_{ij} = \max\{0,9900\} = 9900.$$

В результате, согласно критерию Сэвиджа, выбираем первую альтернативу x_1, к чему мы и стремились интуитивно.

Следующий критерий оптимальности принимаемого решения называется критерием Гурвица. Этот критерий охватывает ряд различных подходов к принятию решений: от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного.

Наиболее оптимистичный подход (в предположении, что y_{ij} означает «выигрыш» или «доход») состоит в выборе x^* из условия

$$\max_i \max_j y_{ij} \Rightarrow i_*; x^* = x_{i_*}. \quad (3.3.5)$$

Аналогично при наиболее пессимистичных предположениях выбираемое решение соответствует

$$\max_i \min_j y_{ij}. \qquad (3.3.6)$$

Критерий Гурвица, называемый также критерием пессимизма – оптимизма, сводится к взвешенной комбинации обоих способов, устанавливая баланс между случаями предельного оптимизма и крайнего пессимизма. Если y_{ij} означает «прибыль» (т.е. соответствующие величины необходимо максимизировать), то выбирается решение из условия

$$\max_i \{\alpha \max_j y_{ij} + (1-\alpha) \min_j y_{ij}\},\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Оценочная функция для случая «доходов» имеет, следовательно, вид:

$$y_i = \alpha \max_j y_{ij} + (1-\alpha) \min_j y_{ij} \to \max_i.$$

В том случае, когда y_{ij} представляет «затраты», оптимальное решение удовлетворяет аналогичному соотношению:

$$\min_i \{\alpha \min_j y_{ij} + (1-\alpha) \max_j y_{ij}\}.$$

При $\alpha = 1$ имеем случай предельного оптимизма (3.3.5); при $\alpha = 0$ – случай крайнего пессимизма (3.3.6.). Промежуточные значения показателя пессимизма-оптимизма α характеризуют ту или иную склонность лица, принимающего решение, к пессимизму или оптимизму. При отсутствии явно выраженной склонности целесообразно полагать $\alpha = ½$.

В непрерывном случае, когда аргументы функционала J(x,z) не обязаны принадлежать конечным множествам, имеем:

$$\max_{x \in X} \{\alpha \max_{z \in Z} J(x,z) + (1-\alpha) \min_{z \in Z} J(x,z)\} \Rightarrow x^*,$$

или

$$J_7(x) = \alpha \max_{z \in Z} J(x,z) + (1-\alpha) \min_{z \in Z} J(x,z) \to \max_{x \in X}.$$

Аналогично для критерия Сэвиджа:

$$J_8(x) = \max_{z \in Z} r(x,z) \to \min_{x \in X},$$

где (в предложении, что функционал J требуется максимизировать)

$$r(x,z) = \max_{x \in X} J(x,z) - J(x,z).$$

Таблица 3.3.4.

X	Z			
	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	5	10	18	25
x_2	8	7	8	23
x_3	21	18	12	21
x_4	30	22	19	15

Пример. Одно из предприятий, занимающееся обслуживанием населения, должно определить уровень предложения услуг так, чтобы удовлетворить потребности клиентов в течение предстоящих праздников. Точное число клиентов неизвестно, но ожидается, что оно может принять одно из четырех значений: $z_1 = 200$, $z_2 = 250$, $z_3 = 300$, $z_4 = 350$. Для каждого из этих возможных значений z_i существует наилучший уровень предложения (с точки зрения возможных затрат). Отклонения от этих уровней приводят к дополнительным затратам либо из-за превышения предложения над спросом, либо из-за неполного удовлетворения спроса.

Затраты J (в усл. ед.) приведены в табл. 3.3.4., где x_i означают варианты уровней предложения, среди которых надлежит найти оптимальный. Заметим, что все отраженные в табл. 3.3.3. уровни предложения оказываются наилучшими для соответствующих значений z_i. Так, x_1 оказывается наилучшим при $z = z_1$, x_2 – при $z = z_2$, x_3 – при $z = z_3$ и x_4 – при $z = z_4$. Таким образом, «лишних» x_i в табл. 3.3.4. не содержится. Применение минимаксного критерия к выбору решения позволяет получить гарантированное значение $J^* = 21$ и $x^* = x_3$. Критерий Сэвиджа приводит к матрице сожаления:

$$\{r_{ij}\} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 10 & 10 \\ 3 & 0 & 0 & 8 \\ 16 & 11 & 4 & 6 \\ 25 & 15 & 11 & 0 \end{vmatrix}$$

В результате минимаксной обработки матрицы $\{r_{ij}\}$ получаем $x^* = x_2$, что соответствует «сожалению», равному 8.

Критерий Гурвица при $\alpha = ½$ приводит к выбору решения $x^* = x_1$ или $x^* = x_2$. Необходимые промежуточные результаты представлены в табл. 3.3.5.

Упражнения. 1. Примените минимаксный критерий в приведенном примере, если четвертое значение возможного числа клиентов z_4 исключено. Ответ. Минимаксное значение равно 8 и соответствует решению x_2.

2. Примените критерий Сэвиджа, предполагая, что решение x_2 исключено.

Таблица 3.3.5.

X	$\min\limits_j y_{ij}$	$\max\limits_j y_{ij}$	$\alpha \min\limits_j y_{ij} + (1-\alpha) \max\limits_j y_{ij}$	Примечание
x_1	5	25	15	$\min\limits_i$
x_2	7	23	15	
x_3	12	21	16,5	
x_4	15	30	22,5	

Ответ. Минимаксное значение $r_{ij} = 10$ и соответствует выбору x_1.

3. Решите этот пример с помощью критерия Гурвица при $\alpha = 0{,}75$. Ответ. Следует выбрать x_1 со значением целевой функции 10.

3.4. Некоторые трудности.

Рассмотренные в предыдущем разделе критерии обладают целым рядом недостатков и логических противоречий. Это довольно тонкие вопросы и мы здесь не имеем возможности дать достаточно полное изложение этих проблем. Рассмотрим только несколько примеров и наводящих соображений, позволяющих уяснить характер возможных затруднений.

Пример 1. Рассмотрим случай, когда ЛПР (лицо, принимающее решение) не может остановиться ни на одном из предложенных критериев: 1) максиминном, 2) Гурвица (α = ¾) и 3) недостаточного основания Бернулли при выборе альтернативы согласно заданной матрице «доходов» (табл. 3.4.1).

Таблица 3.4.1.

X	Z		
	z_1	z_2	z_3
x_1	2	12	–3
x_2	5	5	–1
x_3	0	10	–2

Поэтому ЛПР решает считать альтернативу x_i предпочтительнее, чем x_j в том и только в том случае, если на это указывает большинство из трех рассмотренных критериев.

Легко проверить, что порядок полученных предпочтений имеет вид

1) $x_2 \succ x_3 \succ x_1$;

2) $x_3 \succ x_1 \succ x_2$;

3) $x_1 \succ x_2 \succ x_3$.

Таким образом, большинство критериев указывает на то, что $x_1 \succ x_2$ (критерии 2) и 3)), $x_2 \succ x_3$, $x_3 \succ x_1$:

$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_1$

Получили так называемый «порочный круг» (нарушение транзитивности) – уже знакомый нам парадокс группового выбора на основе принципа большинства.

Пример 2. Ранее мы уже вводили упорядочение вида:

$x_1 \overset{p}{\succ} x_2 \leftrightarrow [\forall z \in Z : F(x_1, z) \geq F(x_2, z),$ причем хотя бы для одного z неравенство строгое].

Это свойство строгого доминирования одной строки матрицы решений (для дискретного случая) над другой. Интуитивно представляется естественным, чтобы «хороший» критерий удовлетворял следующему требованию.

Аксиома 1. Если $x' \overset{p}{\succ} x''$, то x'' не может быть оптимальным.

В то же время применение максиминного (минимаксного) критерия и критерия Гурвица к матрице доходов

X	Z		
	z_1	z_2	z_3
x_1	0	1	3/4
x_2	0	1	1/2

приводит к оптимальности как x_1, так и x_2. А это противоречит казалось бы очевидной аксиоме 1, так как в данном случае $x_1 \overset{p}{\succ} x_2$ и x_2 не должно быть оптимальным.

Рассмотрим еще одно «очевидное» требование к «хорошему» критерию.

Аксиома 2. Добавление к матрице решений новой строки, которая доминируется одной из уже имеющихся строк, не влияет на оптимальность прежних решений.

Однако следующая жизненная ситуация показывает и правомерность подхода, связанного с нарушением аксиомы 2.

Пример 3. [Кини, Райфа]. Человек, блуждая в чужом городе в обеденное время, случайно набрел на скромный ресторан и нерешительно входит в него. Официант сообщает ему, что меню нет и что посетитель может получить либо отварную лососину за 2,5 $ либо бифштекс за 4 $. В первоклассном ресторане он выбрал бы бифштекс, но учитывая, что ему неизвестна обстановка, и учитывая разницу цен, он выбирает лососину. Вскоре официант возвращается из кухни и многословно извиняется, упрекая неразговорчивого шеф-повара, что тот упустил сказать ему, что в меню есть также жареные улитки и лягушачьи лапки, то и другое по 4,5 $. Оказывается, что наш герой питает отвращение к тому и другому и предпочел бы им лососину, тем не менее он отвечает: «Прекрасно, я переменю свой заказ на бифштекс».

Очевидно, это является нарушение вроде бы обоснованной аксиомы 2, ибо предполагается, что каждая из вновь добавленных альтернатив (улитки и лягушачьи лапки) в любом случае проигрывает уже имеющейся альтернативе –лососине, т.е. является доминируемой. Но можем ли мы сказать, что посетитель действует неразумно? Он, подобно многим другим, заключил, что лишь в «хороших» ресторанах подаются улитки и лягушачьи лапки, и поэтому риск получить плохой бифштекс, по его мнению, уменьшается.

Данные рассуждения, конечно, поддаются критике, но мы теперь уже не так уверены в бесспорности аксиомы 2.

Пример 4. Еще одно возможное возражение против весьма распространенного критерия Гурвица состоит в том, что для нижеследующей задачи выбора он дает решение, противоречащее здравому смыслу. Действительно, рассмотрим матрицу доходов

X	Z				
	z_1	z_2	z_3	...	z_{100}
x_1	0	1	1	...	1
x_2	1	0	0	...	0

Согласно критерию Гурвица оба решения x_1 и x_2 равноценны и их оценки для любого α равны $1 - \alpha$. Однако если истинное состояние среды z_i совершенно неизвестно, то интуитивно мы бы предпочли x_1, подразумевая, что реальным состоянием «вероятнее» окажется одно из состояний $z_2 \div z_{100}$, а не z_1.

Здесь, по существу, возникают почти философские проблемы, связанные с понятием «полного незнания» и т.д. Ведь интуитивно мы все равно предположили, что вероятность реализации одного из состояний $z_2 \div z_{100}$ выше, чем у z_1.

Основной вывод заключается в том, что сложность проблемы принятия решений в значительной степени определяться самим процессом формализации задачи, например, в виде соответствующей матрицы решений. Это далеко не формальный акт и он должен выполняться опытным системным аналитиком, специалистом в конкретной предметной области.

3.5. Принятие решений в условиях конфликта (элементы теории игр).

Снова будем считать, что задача принятия решений сформулирована в виде задачи оптимизации

$$J(x, z) \to \max_{x \in X}, z \in Z. \tag{3.5.1}$$

В отличие от предыдущих случаев, когда параметром z управляла «природа», здесь мы предполагаем, что параметр z управляется «разумным» противником, преследующим собственные цели. Эти цели выражаются с помощью задачи ПР, аналогичной (3.5.1):

$$I(x, z) \to \max_{z \in Z}, x \in X. \tag{3.5.2}$$

Такого типа конфликтные задачи ПР первоначально были формализованы как задачи анализа салонных игр, что придало всей терминологии несколько легкомысленное звучание. Так, обе противоборствующие стороны называются игроками, выбираемые ими альтернативы (соответственно x и z) – ходами, правила выбора решений – стратегиями, значения функционалов J и I – выигрышами, а вся теория ПР с неопределенностью типа «активный партнер» – теорией игр. Иногда задачи ПР в условиях «природных» неопределенностей, которые мы рассматривали в предыдущем разделе, называются играми против природы.

Итак, пусть два субъекта А и Б, располагающие возможностью выбора соответственно элементов $x \in X$ и $z \in Z$, стремятся к достижению своих целей, представленных в виде (3.5.1) , (3.5.2).

Расхождение между функционалами I и J определяет степень антагонизма игроков. В частном случае может оказаться, что $J = -I$ при любых x и z; такую ситуацию, возникающую в игре двух субъектов, называют антагонистической, строго конкурентной или игрой с нулевой суммой ($J + I = 0$). Однако чисто антагонистическая ситуация является в известном смысле вырожденной. Наиболее типичен конфликт, в котором интересы игроков не совпадают, но и не строго противоположны.

Легко представить себе ситуацию, когда не два, а k игроков максимизируют свои выигрыши p_i $(x^1, x^2, \dots, x^k)$, $i = 1, \dots, k$. В этом случае, например для первого игрока, выбирающего решение x^1, остальные x^i будут составлять фактор неопределенности z: $p_1(x_1, z) \to \max\limits_{x^1 \in X}$, $z = (x^2, \ldots, x^k)$. Если $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 0$, то мы по-прежнему говорим об игре с нулевой суммой, хотя термин «антагонистическая игра» здесь уже неприменим. Далее мы будем рассматривать только игры двух лиц.

Итак, пусть две стороны А и Б стремятся к достижению своих целей:

$$A : J(x, z) \to \max_{x \in X}, z \in Z;$$

$$Б : I(x, z) \to \max_{z \in Z}, x \in X.$$

Оба лица, принимающие решения (ЛПР), или оба «игрока», располагают возможностью выбора x и z соответственно. Далее для определенности будем полагать, что $X \subset E^n$, $Z \subset E^m$, т.е. x и z – числовые векторы соответствующих размерностей.

Таблица 3.5.1.

X	Z	
	z_1 = Н	z_2 = П
x_1 = Н	(1, 1)	(10, 0)
x_2 = П	(0, 10)	(7, 7)

Пример такой постановки задачи уже приводился – это пример 4 из введения (дилемма заключенного). Проводя рассуждения со стороны первого игрока (игрока А), легко установить, что оба функционала J и I задаются табл. 3.5.1. На пересечении строки i и столбца j в табл. 3.5.1 стоит пара чисел (p, q), где $p=J(x_i,z_j)$, $q=I(x_i,z_j)$. В данном примере, очевидно, требуется минимизировать функционалы J и I, а не максимизировать.

Далее мы везде будем считать себя игроком А и проводить рассуждения с позиций его интересов.

В связи с тем, что исход нашего выбора решения зависит от выбора игрока Б, необходимо сделать какие-то предположения о его возможном поведении в процессе решения задачи. Правомерность подобных предположений (гипотез) впрямую зависит от характера информированности сторон о поведении другой стороны.

При принятии решений в условиях риска (а подобные задачи, как уже говорилось, могут также относиться к теории игр – игр против природы) мы, по существу, предполагали, что сторона Б («природа») действует не целенаправленно. Мы предполагали, что каждый выбор $z = z_i$ (при дискретном множестве z) характеризуется своей вероятностью, т.е. мы могли оценить частоту появления тех или иных z_i и в соответствии с этим строили свою стратегию поведения. Это одна из возможных гипотез. При игре с «осмысленным» противником, который преследует в процессе принятия своих решений вполне определенные цели, разумно прибегать к иным гипотезам, лучше отражающим существо такой задачи. По сути дела особым характером вводимых гипотез данный раздел теории ПР и выделяется в отдельную теорию – теорию игр.

Будем различать следующие основные гипотезы (случаи).

Г и п о т е з а 1. Каждый из субъектов А и Б не имеет информации о выборе, который сделан второй стороной. Дополнительные гипотезы о характере поведения второго игрока отсутствуют. В этом случае можно поступать аналогично решению задачи в условиях полной неопределенности. Это, по существу, в точности тот же случай, и мы можем воспользоваться известным принципом наилучшего гарантированного результата. Для субъекта А гарантированная оценка будет равна

$$J^* = \max_{x \in X} \min_{z \in Z} J(x,z), \qquad (3.5.3)$$

а для субъекта Б

$$I^* = \max_{z \in Z} \min_{x \in X} I(x,z). \qquad (3.5.4)$$

Решая задачи максимизации (3.5.3) , (3.5.4), мы находим и векторы x*, z*, реализующие соответствующие гарантированные оценки.

Пример 1. Дадим графическую иллюстрацию применения принципа гарантированного результата. Пусть J(x,z) = $x^2 - z^2$, I(x,z) = – J(x,z) и требуется минимизировать J и I. В результате мы имеем антагонистическую игру:

$$J(x,z) = x^2 - z^2 \to \min_{x \in X}, z \in Z;$$
$$J(x,z) = -I(x,z) = x^2 - z^2 \to \max_{z \in Z}, x \in X.$$

Будем считать, что X = Z = R есть множества всех вещественных чисел (здесь мы использовали то очевидное обстоятельство, что вместо поиска минимума функции I можно искать максимум функции – I = J). Для данного примера гарантированная оценка находится из условия

$$J^* = \min_x \max_z J(x,z).$$

Обозначим

$$\varphi(x) = \max_z J(x,z). \qquad (3.5.5)$$

Таким образом, для вычисления одного значения функции φ для фиксированного x необходимо решить задачу оптимизации (3.5.5). Получим

$$\varphi(x) = \max_z (x^2 - z^2) = x^2,$$

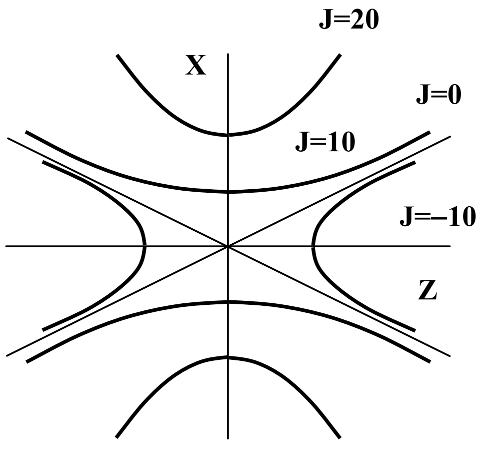
так как любой z ≠ 0 приводит к уменьшению функции J. Теперь находим

$$\min_x \varphi(x) = \min_x x^2 = 0,$$

что достигается при $x = 0$. Таким образом, мы получим $J^* = 0$ и при этом $x^* = 0$. Это гарантированный результат, ибо при любом z мы будем иметь значение J не хуже (т.е. не больше), чем нуль, т.е. при любом z

$$J\ (x^*, z) = J\ (0, z) = -z^2 \leq J^0 = 0.$$

На рис. 3.5.1. а) представлены линии постоянного уровня функционала J (x, z) на плоскости (x, z). Напомним, что линией уровня называется геометрическое место точек на плоскости, где J = C = const. Меняя постоянную C, мы будем получать различные линии уровня. Если функция зависит более чем от двух переменных, то следует говорить не о линиях уровня, а о поверхностях уровня. На рис. 3.5.1. б) изображена зависимость J (x, z) в трехмерном пространстве, имеющая характерный вид «седла». Можно считать, что соответствующая поверхность «склеена» из двух видов парабол: $y_1 = x^2$, $y_2 = -z^2$. При выборе гарантирующего решения $x^* = 0$ мы при различных z будем всегда находиться на параболе A (рис. 3.5.1. б)), обеспечивая выполнение неравенства $J \leq J^* = 0$.



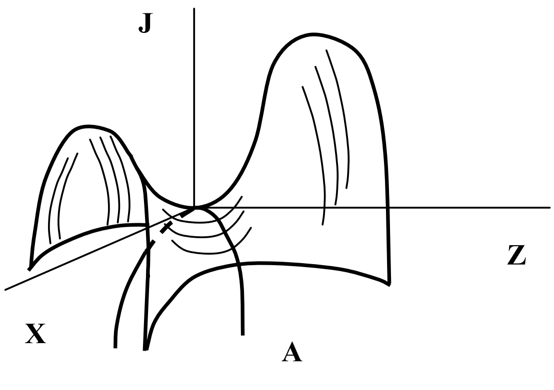


Рисунок 3.5.1.

Г и п о т е з а 2. Предполагаем, что субъект Б следует принципу максимина и выбирает z* из условия (3.5.4):

$$I^* = \max_{z \in Z} \min_{x \in X} I(x, z).$$

Тогда мы можем выбирать x согласно правилу

$$J(x, z^*) \to \max_{x \in X}, \qquad (3.5.6)$$

где z^* – гарантирующее решение второго игрока. Обозначим решение задачи (3.5.6) через x^{**}. При этом оказывается, что

$$J^{**} = J\,(x^{**}, z^*) \geq J^*, \qquad (3.5.7)$$

где J^* – наша гарантированная оценка, получаемая по принципу максимина.

<u>Упражнение</u>. Доказать неравенство (3.5.7).

На примерах легко убедиться, что неравенство (3.5.7) может быть строгим, и, следовательно, следуя гипотезе 2, мы в случае ее правомерности можем получить реальный выигрыш, выбирая решение x^{**}, а не x^*.

Таблица 3.5.2.

X	Z			
	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	5	– 10	9	0
x_2	6	7	8	1
x_3	8	7	15	2
x_4	3	4	– 1	4

<u>Пример 2</u>. Игра с нулевой суммой задана с помощью табл. 3.5.2, где числа на пересечении строк и столбцов означают наш выигрыш, т.е. проигрыш игрока Б – нашего соперника. Наша гарантирующая стратегия $x^* = x_3$, а гарантированная оценка $J^* = 2$. (Если бы мы выбрали другое решение, отличное от x_3, то могли бы в зависимости от действий игрока Б

получить и меньшее значение выигрыша, чем 2). Аналогично для игрока Б (он в отличии от нас стремится минимизировать наш выигрыш, а тем самым и свой проигрыш) имеем $z^* = z_4$, $I^* = 4$. Действительно, игрок Б выбирает тот столбец, в котором максимальное число было бы наименьшим. В первом столбце максимальное число равно 8, во втором – 7, в третьем – 15 и в четвертом – 4. Следовательно выбирая $z^* = z_4$, игрок Б никогда не проиграет больше четырех условных единиц потерь.

Если выбирать x^{**} из условия

$$J(x, z^*) \to \max_{x \in X},$$

то мы получаем $x^{**} = x_4$, $J(x^{**}, z^*) = J^{**} = 4 > J^* = 2$. Таким образом, следуя гипотезе 2, можно, вообще говоря, получить лучший результат по сравнению с принятием решений на основе принципа гарантированного результата.

Г и п о т е з а 3. Мы теперь можем допустить, что субъект рассуждает точно так же, как и в предыдущем случае, т.е. использует не стратегию z^*, а аналогичную стратегию z^{**}. Поэтому мы можем это учесть и выбирать оптимальное решение с учетом уже этой гипотезы:

$$J(x, z^{**}) \to \max_{x \in X} \Rightarrow x^{***}, J^{***}.$$

Г и п о т е з а 4. Возможен другой сорт гипотез: мы по условиям игры знаем первый ход субъекта Б (он нам его обязан сообщить). Тогда наше поведение будет определяться стратегией в виде функции $x = x(z)$. Мы можем ее определить в результате решения задачи оптимизации

$$J(x, z) \to \max_{x \in X}. \qquad (3.5.8)$$

Условие (3.5.8) позволяет для каждого фиксированного z определить искомое значение x, т.е. задать функцию x (z).

Для этого случая мы также можем определить гарантированный результат $\hat{J}$

$$\hat{J} = \min_{z\in Z} \max_{x\in X} J(x, z) = \min_{z\in Z} J(x(z), z).$$

Результат $\hat{J}$ будет отличаться от значения J*, найденного согласно гипотезе 1. Именно, во всех случаях будем иметь

$$\hat{J} \geq J^*. \tag{3.5.9}$$

Таким образом, принятие гипотезы 4 вновь позволяет улучшить результат, полученный по принципу максиминного гарантированного результата.

Докажем неравенство (3.5.9), которое имеет вид

$$\min_{z\in Z} \max_{x\in X} J(x, z) \geq \max_{x\in X} \min_{z\in Z} J(x, z).$$

Для любых фиксированных x', z', очевидно, справедливо неравенство

$$\varphi_1 (z') \geq \varphi_2 (x'), \tag{3.5.10}$$

где

$$\varphi_1(z') = \max_x J(x, z'); \quad \varphi_2(x') = \min_z J(x', z).$$

Действительно, пусть

$$\max_x J(x, z') = J(x'', z');$$

$$\min_z J(x', z) = J(x', z'').$$

Отсюда имеем следующую цепочку неравенств:

$$\varphi_1 (z') = J (x'', z') \geq J (x', z') \geq J (x', z'') = \varphi_2 (x').$$

Таким образом, (3.5.10) доказано. Далее, так как x', z' могут быть любыми, то их можно выбрать следующим образом:

$$x' = \arg\max_{x\in X} \varphi_2(x); \quad z' = \arg\min_{z\in Z} \varphi_2(z).$$

Подставляя эти значения в (3.5.10), приходим к (3.5.9).

В качестве примера рассмотрим игру, представленную в табл. (3.5.2). Для этой игры, как мы видели,

$$J^* = \max_x \min_z J(x, z) = 2$$

Для $\hat{J}$ имеем:

$$\hat{J} = \min_z \max_x J(x,z) = 4.$$

Упражнение. Проверьте приведенные числа.

Г и п о т е з а 5. Пусть Б знает наш первый ход. В этом случае естественно предположить, что он будет придерживаться стратегии z = z (x), которая строится в результате решения оптимизационной задачи

$$I(x,z) \to \max_{z \in Z} \Rightarrow z = z(x) \qquad (3.5.11)$$

(именно так мы поступали при принятии гипотезы 4). Принятие этих допущений, т.е. допущения о том, что мы сообщили свой ход субъекту Б, а также допущения об использовании Б стратегии z (x), позволяет нам таким образом воздействовать на выбор субъекта Б, чтобы он в максимальной степени соответствовал нашим целям. Именно, мы можем выбирать x из условия

$$J(x, z(x)) \to \max_{x \in X} \Rightarrow \tilde{x}.$$

Если максимум в соотношении (3.5.11) достигается не в одной точке z, а на некотором множестве M(x), то наш гарантированный результат $\tilde{J}$ определяется из условия:

$$\tilde{J} = \max_{x \in X} \min_{z \in M(x)} J(x,z).$$

Общим для всех рассмотренных случаев является предположение, что обе стороны, участвующие в игре, не только точно знают свои цели, но и полностью информированы о целевых функциях «противника» или партнера по игре. Для реальных конфликтных ситуаций это не всегда выполняется. Гораздо чаще мы не знаем точно целей наших партнеров, которые, в свою очередь, имеют ограниченную информацию о наших намерениях. Кроме того, необходимо учитывать и возможную сознательную дезинформацию, «блеф» со стороны каждого из игроков. Да и игроков может быть не два, а больше. Формальные модели указанных, а также других игровых ситуаций могут быть построены, но соответствующий материал выходит за рамки этой книги.

До сих пор мы рассматривали проблемы принятия решений в играх двух лиц с позиций одного из игроков. На ту же проблему можно взглянуть со стороны некоторого третьего «нейтрального» лица. Нас здесь будут интересовать некоторые характеристики решения в целом с учетом целевых функций всех игроков. Наиболее важными характеристиками являются, во-первых, <u>свойства эффективности</u> принимаемых решений по получаемым игроками «выигрышам», а во-вторых, <u>свойства устойчивости</u> решений. С позиций третьего лица – «арбитра» игра двух лиц с целевыми функциями

$$\begin{aligned} &J(x,z) \to \max_{x \in X}, \\ &I(x,z) \to \max_{z \in Z} \end{aligned} \tag{3.5.12}$$

может трактоваться как многокритериальная (в данном случае – двухкритериальная) задача оптимизации на множестве L = X × Z. Аргументом при этом является вектор $\eta \in L$, $\eta = (x, z)$, а задача (3.5.12) принимает обычный вид многокритериальной задачи:

$$\begin{aligned} &J(\eta) \to \max_{\eta \in L}; \\ &I(\eta) \to \max_{\eta \in L.} \end{aligned} \tag{3.5.13}$$

При анализе эффективности решения задачи (3.5.13) можно снова воспользоваться уже знакомым принципом Парето – важнейшим из принципов отбора рациональных решений. Этот принцип позволяет отбросить все те решения (альтернативы выбора), которые могут быть заменены другими, обеспечивающими лучшие (в данном случае – большие) значения целевых функций всех игроков одновременно или части игроков, но без уменьшения значений целевых функций остальных субъектов, участвующих в игре. Решения, которые не могут быть указанным образом улучшены, мы и называем эффективными или Парето-оптимальными. Такие эффективные решения обладают тем свойством, что улучшать значение целевой функции одного из игроков можно только за счет других субъектов. Казалось бы, задача выбора рациональных компромиссных решений и должна решаться только в пределах множества Парето (которое в теории игр называется также «переговорным множеством»). Ведь совершенно ясно, что любое решение, находящееся вне этого множества, может быть улучшено сразу для вех игроков. Однако реальная ситуация часто оказывается значительно сложнее. Основной вопрос заключается в том, что на самом деле выбор η осуществляется не одним лицом, а несколькими. На самом деле здесь мы имеем игру, а не обычную многокритериальную задачу. Важнейшее значение приобретает другой принцип принятия решений, связанный с понятием устойчивости.

Определение. Будем называть точку $\hat{\eta} = (\hat{x}, \hat{z})$ устойчивым решением или точкой равновесия игры (3.5.12), если

$$\max_{x \in X} J(x, \hat{z}) = J(\hat{x}, \hat{z});$$

$$\max_{z \in Z} I(\hat{x}, z) = I(\hat{x}, \hat{z}).$$

При выборе устойчивого решения $\hat{\eta}$ говорят также, что достигнута ситуация равновесия.

Из приведенного определения непосредственно следует, что неустойчивость какой-либо ситуации проявляется в том, что в случае ее возникновения ей грозит распад, который обусловлен возможностями одного из игроков за счет изменения только своей стратегии улучшить свое положение за счет других. На этом основании возник так называемый принцип устойчивости Нэша (по имени автора – американского математика Джона Нэша). Он гласит, что выбор рациональной стратегии η должен производиться среди множества точек равновесия. Равновесные решения называются также оптимальными по Нэшу. Данный принцип отражает очень важное свойство коллективного решения. Именно, если оба субъекта А и Б смогли договориться о том, чтобы придерживаться выбора $x = \hat{x}$, $z = \hat{z}$, то тот субъект, который нарушает договоренность, прежде всего и пострадает: свойство устойчивости решения дает известную гарантию против нарушения договоренности.

Замечание. Все вышеизложенное справедливо и для случая N игроков, где N > 2.

Рассмотрим теперь связь двух сформулированных принципов выбора решений – принципа Парето и принципа Нэша. Возникает вопрос, насколько хороши устойчивые решения в отношении их эффективности, т.е. в отношении выигрышей, получаемых игроками в разновесных точках. Ведь каждый игрок может рассматривать выбор своего решения как принятие решения в условиях неопределенности (другой игрок выступает в качестве «природной» неопределенности или неопределенности среды). При этом можно воспользоваться принципом наилучшего гарантированного результата и выбрать соответствующую максиминную стратегию, гарантирующую ему независимо от действий другого игрока некоторый минимальный результат. Не получит ли он в таком случае больший выигрыш, чем в ситуации равновесия? Тогда все рассуждения о равновесии вообще не нужны. Справедливо, однако, следующее утверждение: в ситуации равновесия каждый из игроков получает выигрыш, не меньший, чем соответствующий гарантированный максиминный результат.

Докажем данное утверждение. Пусть $(\hat{x}, \hat{z})$ – точка равновесия игры (3.5.12) и x* – максиминная стратегия игрока А. Тогда

$$\max_{x \in X} \min_{z \in Z} J(x, z) = \min_{z \in Z} J(x^*, z).$$

Отсюда, используя определение устойчивого решения, имеем

$$\hat{J} = J(\hat{x}, \hat{z}) \geq J(x^*, \hat{z}) \geq \min_{z \in Z} J(x^*, z) = \max_{x \in X} \min_{z \in Z} J(x, z) = J^*.$$

Таким образом, доказано, что $\hat{J} \geq J^*$.

Следовательно, «максиминное возражение» не проходит и анализ равновесия принимаемых решений имеет под собой реальную основу. Вместе с тем оказывается (и это принципиально), что устойчивое решение может не принадлежать к числу эффективных, т.е. к множеству Парето. А это уже серьезное замечание (которое ниже будет доказано с помощью соответствующего опровергающего примера). В итоге мы имеем явное противоречие между эффективностью принимаемых решений и их защищенностью от «несанкционированных» действий других игроков. Таким образом, противоречие между оптимальностью по Парето и оптимальностью по Нэшу есть противоречие между выгодностью и устойчивостью.

Только в случаях, когда устойчивые решения являются одновременно паретовскими, можно эффективно использовать принцип Нэша для решения реальных задач. В противном случае мы всегда будем выбирать между эффективностью и надежностью принимаемых решений. В этом, по-видимому, состоит одна из важных первопричин многих конфликтов и неудачных решений в человеческом обществе. Поэтому одним из важных направлений теории ПР и системного анализа является изучение систем, в которых устойчивые точки принадлежат множеству Парето.

Пример 3. Пусть к нерегулируемому перекрестку едут на высокой скорости под прямым углом друг к другу два автомобиля. У каждого из водителей есть две стратегии: 1) снизить скорость до безопасной (безопасная стратегия – стратеги Б), 2) продолжать ехать на высокой скорости (рискованная стратегия – стратегия Р). Если оба водителя будут придерживаться стратегии Б, то это приведет к благополучному исходу, оцениваемому для каждого водителя числом 1. Если оба водителя следуют стратегии Р, то происходит авария и потери каждого отражаются отрицательным числом (–9). При других комбинациях (Б, Р) или (Р, Б) исход оценивается числом 0 для снизившего скорость (за потерю времени) и числом 3 для двигающегося на высокой скорости (за экономию времени). В итоге имеем игру, представленную в табл. 3.5.3. Числа в таблице представляют соответствующие доходы.

Таблица 3.5.3.

1	2	
	Б	Р
Б	(1, 1)	(0, 3)
Р	(3, 0)	(–9, –9)

В данном случае ситуации (Б, Б), (Р, Р) являются, очевидно, неустойчивыми, так как каждый из водителей может получить лучший результат за счет одностороннего изменения своего решения. Например, водитель 1 может в ситуации (Б, Б) получить лучший для себя результат, изменив стратегию на стратегию Р. В этом случае он получит выигрыш 3 вместо 1. То же справедливо в ситуации (Б, Б) и для игрока 2. Аналогично проверяется и неустойчивость ситуации (Р, Р).

Ситуации (Б, Р) и (Р, Б), напротив, обе являются устойчивыми, так как, если они возникли, ни у одного из игроков нет оснований для одностороннего изменения стратегии своего поведения.

Упражнения. 1. Покажите, что в приведенном примере оптимальной по Парето не является только ситуация (Р, Р). Таким образом, в данной задаче существуют ситуации – (Б, Р), (Р, Б), которые оптимальны одновременно и по Парето, и по Нэшу.

2. Рассмотрите снова пример 4 из введения (дилемма заключенного). Определите, какие стратегии поведения заключенных являются оптимальными по Парето, а какие – по Нэшу. Установите, что решение (П,П) будет устойчивым по Нэшу, но не оптимальным по Парето, что и доказывает ранее сделанное замечание.

4. МНОГОСТАДИЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ.

4.1. Постановка задачи.

Понятие многостадийного (многоэтапного, многошагового) процесса принятия решений весьма многогранно и разнообразно. Поэтому могут рассматриваться совершенно различные модели многостадийности от простых до достаточно сложных. Мы здесь остановимся на обсуждении некоторых традиционных подходов к проблеме, позволяющих уяснить главные черты и особенности многостадийных процессов принятия решений в условиях неопределенности. В частности, будем предполагать, что решаемая проблема является одноцелевой. Например, весьма часто цель всей операции заключается в максимизации «доходов» (прибыли, полезности) или минимизации «затрат». Предполагается, что получение «доходов» реализуется на каждом этапе процесса принятия решений, а затем эти «доходы» суммируются (принцип аддитивности).

Рассматриваемая далее модель многостадийного процесса принятия решений предполагает наличие некоторого графа, носящего название «дерева решений» и, по существу, описывающего, как можно попадать из заданного множества начальных вершин в заданное множество конечных вершин графа. При этом с каждой вершиной графа ассоциируется некоторое состояние S_i , в котором находится объект принятия решений, а дуги, выходящие из вершины, соответствуют возможным переходам из одного состояния в другое в зависимости от принимаемых решений.

На рис. 4.1.1. дан пример так называемого детерминистского дерева решений.

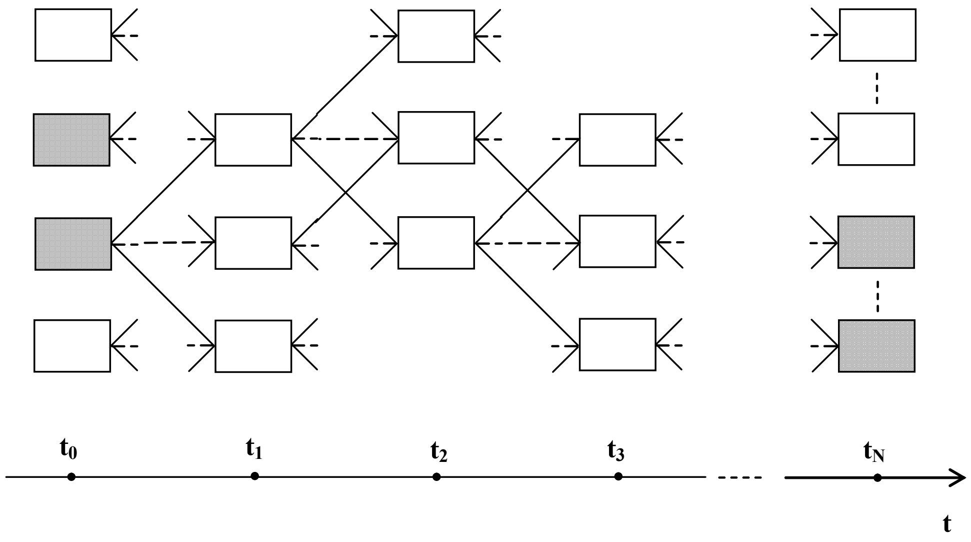


Рисунок 4.1.1.

Здесь и далее предполагается, что процесс разворачивается во времени и движение по графу осуществляется слева направо. Допустимые начальные и конечные вершины заштрихованы. Считается, что каждая ветвь графа имеет свой вес – вещественное число – означающее соответствующие локальные «затраты» на переход в другое состояние. Основная задача состоит в оптимальном выборе начальной вершины (из множества допустимых) и пути из нее в любую из допустимых конечных вершин. Оптимальность понимается в смысле построения допустимого пути, реализующего минимальные суммарные затраты (задача выбора минимального пути на графе). В частном случае множества допустимых начальных и конечных вершин могут быть одноэлементными.

В приведенном примере граф содержит только так называемые основные или «решающие» вершины (рис. 4.1.2.).

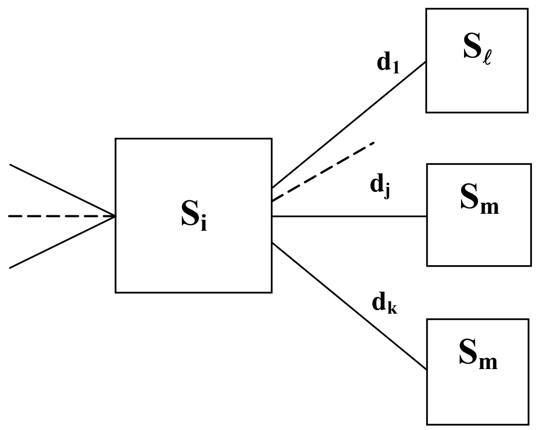


Рисунок 4.1.2.

В каждую такую вершину можно попасть различными способами, что показывается наличием нескольких дуг, входящих в вершину. При этом считается, что система (объект принятия решений) находится в определенном фазовом состоянии S_i, а число состояний конечно. Из вершины S_i исходит несколько дуг графа, соответствующих различным решениям, которые могут быть приняты в данном состоянии. Выбор конкретной альтернативы d_i приводит к переходу системы в новую «решающую» вершину (новое состояние).

Более сложная ситуация возникает, когда выбор конкретного решения d_i определяет не конкретное новое состояние системы, а задает некоторую лотерею на множестве возможных новых состояний (плотность распределения вероятности) (рис. 4.1.3.).

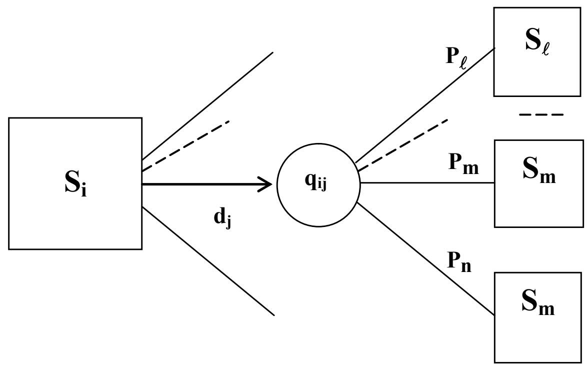


Рисунок 4.1.3.

Фактически в конечномерном случае (который и рассматривается) это означает, что после выбора d_i мы попадаем в некоторую «случайную» вспомогательную вершину q_{ij} и далее переходим в одно из возможных для данного этапа состояний S_ℓ, …, S_m, S_n в соответствии с заданными вероятностями p_ℓ, …, p_m, p_n (рис. 4.1.3.), где

$$\sum_{i=\ell,\dots,m,n} p_i = 1 .$$

Это случай так называемой вероятностной неопределенности. В случае полной неопределенности структура рис. 4.1.3. сохраняется, но стрелки, исходящие из вершины q_{ij} уже не будут иметь весов (соответствующие вероятности отсутствуют).

В пределах одного и того же графа (дерева решений), описывающего конкретную ситуацию, могут реализоваться все возможные виды переходов.

Перейдем теперь к методологии решения сформулированных многоэтапных задач принятия решений.

4.2. Детерминистский случай. Метод Беллмана.

Основная схема и главная идея метода Беллмана применительно к рассматриваемой проблематике достаточно проста и естественна. Рассмотрим конкретный пример детерминистского дерева решений (рис. 4.2.1.)

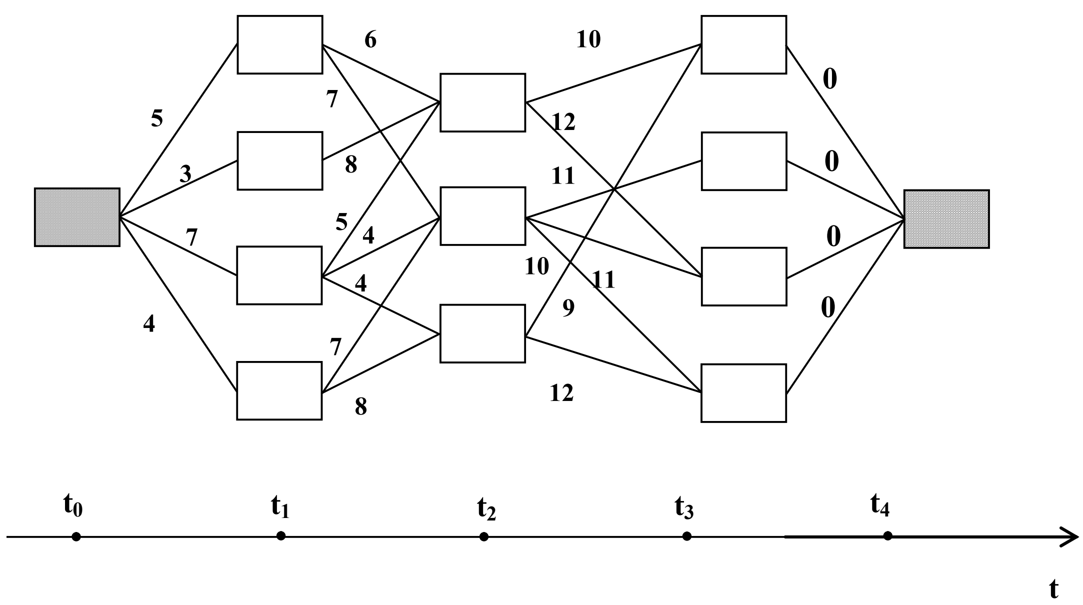


Рисунок 4.2.1.

На рис. 4.2.1. одна начальная и одна конечная вершина. Легко видеть, что, по существу, конечными являются все четыре вершины, соответствующие моменту времени t_3. Однако с помощью введения фиктивной вершины для t_4 удалось свести задачу к графу с одной конечной вершиной. Точно так же можно поступать и с начальными вершинами, если их несколько. Числа у дуг графа означают трудоемкости (затраты), обеспечивающие переход от одной «решающей» вершины к другой. Дуги на промежутке $[t_3, t_4]$ имеют нулевые веса, что и означает, что все вершины, отвечающие t_3, являются, по существу, конечными. Главная задача заключается в выборе оптимального в смысле суммарных затрат пути, соединяющего начальную и конечную вершины.

Основная вычислительная идея метода Беллмана состоит из двух моментов: во-первых, задача поиска оптимального пути начинает решаться с конца, а во-вторых, исходная задача погружается в множество аналогичных задач с различными начальными вершинами и одной и той же конечной вершиной. При этом предполагается, что в качестве начальной вершины последовательно выступают все без исключения вершины графа.

Реализуем метод Беллмана для приведенного примера. Будем продвигаться по графу справа налево, выставляя определенные числа внутри каждой из вершин (помечая вершины) и указывая оптимальные направления движения из каждой вершины с помощью одной или нескольких стрелок. При этом числа внутри квадратиков-вершин будут означать всегда одно и то же – это суммарные затраты, которые получаются при движении из данной вершины, выбранной в качестве начальной, по оптимальному пути (т.е. это наименьшие из возможных затрат). Например, если мы имеем ситуацию, изображенную на рис. 4.2.2. а), где вершины 2, 3, 4 уже помечены, и надо пометить вершину 1, то будем рассуждать следующим образом (все вершины на рис. 4.2.2. для удобства объяснения пронумерованы в правом верхнем углу).

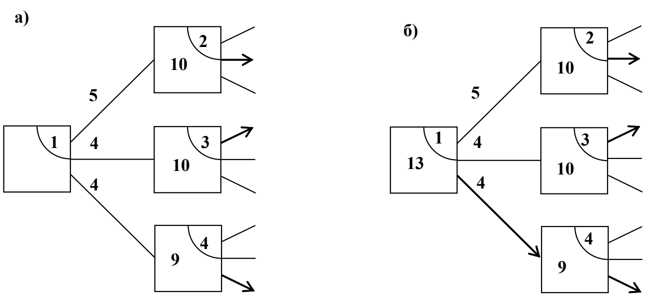


Рисунок 4.2.2.

Если в качестве начальной взять вершину 1, то поиск оптимального пути из нее сводится к сравнению трех чисел: 5 + 10 = 15, 4 + 10 = 14, 4 + 9 = 13. Наименьшее из этих чисел – 13 и, следовательно, именно число 13 мы запишем в вершине 1, а стрелочкой соединим 1 и 4 вершины (рис. 4.2.2. б)). Действительно, по построению число 9 (полученное на предыдущем этапе) означает минимально возможные потери при движении из вершины 4, как из начальной в фиксированную конечную вершину. Затраты в 4 единицы необходимы для перехода из вершины 1 в вершину 4. В итоге мы и получаем число 13. В двух других возможных случаях мы имеем большие затраты и, следовательно, оптимальный маршрут из вершины 1 лежит через вершину 4.

Продвигаясь справа налево, мы, обрабатывая последовательно вертикальные слои вершин, пометим весь граф (рис. 4.2.3.).

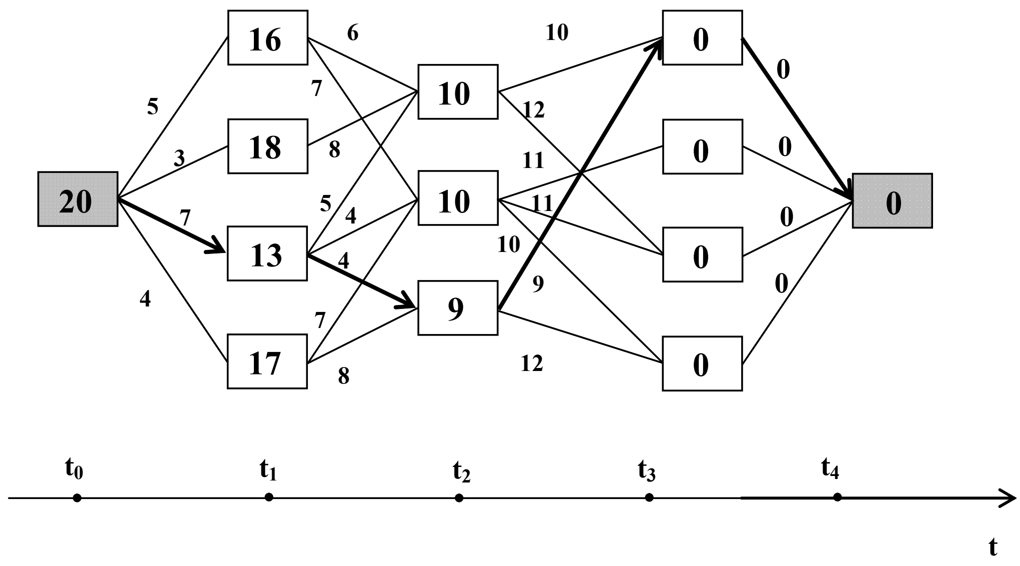


Рисунок 4.2.3.

Для восстановления искомого оптимального пути достаточно пройти теперь уже слева направо в направлении стрелок, начиная из уже помеченной начальной вершины (оптимальный путь на рис. 4.1.6. выделен). Число 20 означает минимально возможные затраты и получается уже на первом этапе после пометки графа. Оптимальный путь, очевидно, может быть и не единственным.

Согласно методу Беллмана одновременно находятся все возможные оптимальные пути.

Можно видеть, что проведенная процедура позволяет находить абсолютный глобальный минимум. Предыдущие рассуждения легко преобразуются к строгому доказательству данного утверждения. В то же время важно понимать, что глобально оптимальная стратегия не есть суперпозиция локально оптимальных стратегий. Скажем, при попытке построения оптимального пути на графе рис. 4.1.6. при движении слева направо и выборе каждый раз стрелок с наименьшим весом мы, конечно, терпим неудачу и получаем результат:

$3 + 8 + 10 = 21,$

что больше 20.

Пример. Можно дать содержательную интерпретацию многоэтапной задачи принятия решений, представленной графом на рис. 4.1.4. Основная задача может быть сформулирована следующим образом. Некоторая фирма для реализации проекта должна осуществить постройку здания с привлечением субподрядчиков. На этапе $[t_0, t_1]$ необходимо выполнить нулевой цикл и возвести фундамент. Свои услуги для выполнения этого этапа предложили четыре фирмы, и стоимость работ составляет 5, 3, 7, 4 условных единиц соответственно. Возникает вопрос, какую фирму выбрать? На втором этапе $[t_1, t_2]$ на построенном фундаменте необходимо возвести стены и кровлю. Имеются три фирмы, согласные выполнить указанный объем работ. Однако при этом возникают определенные требования к качеству и конструкции фундамента. Не на любом фундаменте фирма имеет возможность возводить свои стены из своего материала. Поэтому на графе на промежутке $[t_1, t_2]$ каждый квадратик t_1 соединяется не с каждым квадратиком t_2. Даны только допустимые в указанном выше смысле соединения. Веса у дуг означают, как и прежде, стоимость работ.

Точно так же на этапе $[t_2, t_3]$ мы имеем четыре фирмы, осуществляющие внутренние и отделочные работы и завершающие строительство здания.

Основная задача состоит в экономии затрат по привлечению субподрядчиков. Выше эта задача была решена методом Беллмана.

4.3. Многостадийные процессы в условиях неопределенности.

Методику решения многостадийных задач принятия решений в условиях неопределенности мы поясним с помощью конкретного примера. В основе по-прежнему лежит метод Беллмана, а также те методы раскрытия неопределенностей, которые обсуждались в предыдущих главах.

Пример. Торговая фирма должна выполнить оптовые закупки товара у внешнего производителя с последующей его перепродажей в течение года в своих торговых точках. Фирма должна принять решение о закупке крупной партии товара или небольшой партии. Впоследствии, если была закуплена небольшая партия, можно докупить товар у производителя (может быть по новым оптовым ценам), а при первоначальной покупке крупной партии существует опасность убытков из-за возможного невысокого спроса на этот товар на внутреннем рынке. Таким образом, решение, в основном, определяется будущим спросом, который заранее достоверно неизвестен. Кроме того, предполагается, что спрос со временем может измениться. По условиям контракта дополнительные закупки товара фирма сможет выполнить лишь через 4 месяца после начала календарного года при условии, что вначале была закуплена небольшая партия. Вопрос о дополнительных закупках встанет, если установится достаточно высокий спрос на товар. Необходимо обеспечить правильные решения как при первоначальной закупке, так и возможной дополнительной закупке товара с целью обеспечения максимальной ожидаемой прибыли, получаемой в течение одного года.

Ежемесячная торговая прибыль, получаемая фирмой в каждой из возможных ситуаций, представлена в табл. 4.3.1.

Таблица 4.3.1.

	Z_1 (высокий)	Z_2 (низкий)
x_1 (малая партия)	50	40
x_2 (крупная партия)	200	60

В данном модельном примере мы предположили, что спрос может быть либо «высоким», либо «низким». В принципе возможен более подробный подход с более точными градациями спроса. Кроме того, предполагается, что суммарный торговый ежемесячный доход от продажи докупленной через четыре месяца продукции будет несколько меньше, чем при первоначальной закупке крупной партии и составит 180 у.е. в месяц при высоком спросе и 40 у.е. – при низком спросе. (Причины этого могут быть различными, в том числе связанными с условиями дополнительной аренды складских помещений, изменением закупочных оптовых цен и т.п.).

Затраты на закупку крупной и мелкой партий товара соответственно составляют 1000 и 200 у.е., а затраты на возможную дополнительную закупку товара (через четыре месяца) равны 840 у.е.

Будем считать, что проведенные маркетинговые исследования показали, что вероятность высокого спроса на данный товар составляет 0.75, а низкого, соответственно, – 0.25.

Требуется рекомендовать руководству торговой компании такое решение проблемы, чтобы в итоге обеспечить максимальный ожидаемый объем прибыли через год. В данном случае, очевидно, что раз уровень спроса достоверно неизвестен, то речь идет о задаче принятия решений в условиях неопределенности. В частности, можно говорить о максимизации математического ожидания объема прибыли (ожидаемой прибыли). В действительности, в каждом отдельном случае, расчет может не совпадать с реально полученными результатами, но «в среднем», при многократном повторении описанной ситуации выбора, расчетные значения прибыли дадут хорошую оценку для фактически полученной средней прибыли. Если же описанная выше ситуация с торговой компанией является уникальной (единичной), то, по-видимому, целесообразно при выработке решения использовать не критерий математического ожидания, а, например, критерий Гурвица или Сэвиджа. Для полной гарантии расчеты должны быть основаны на максиминном критерии. Применение принципа гарантированного результата в любом случае полезно, по крайней мере на первой стадии исследования, с целью предварительной оценки имеющихся потенциальных возможностей и выбора окончательного критерия.

В силу модельного характера рассматриваемой проблемы мы далее не будем вдаваться в детали соответствующих экономических интерпретаций. Представим сформулированную задачу в виде дерева решений (рис. 4.3.1.).

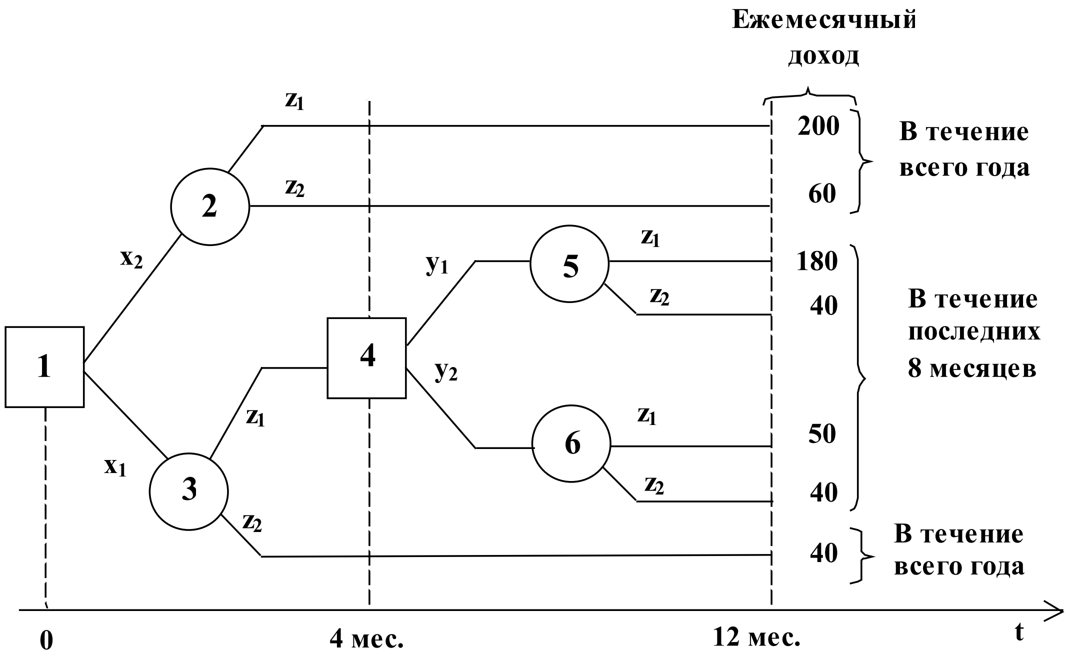


Рисунок 4.3.1.

Здесь квадратиками изображены «решающие» вершины, а кружками – вспомогательные вершины, описывающие неопределенное состояние среды. Внутри указаны номера вершин графа. Обозначения x_1, x_2, z_1, z_2 соответствуют табл. 4.3.1., а переменные y_i означают следующее:

y_1 – решение о дополнительных закупках товара через четыре месяца;

y_2 – решение об отказе от дополнительных закупок.

Дадим решение задачи, воспользовавшись критерием математического ожидания для раскрытия неопределенностей.

Согласно общей рецептуре метода Беллмана решение задачи начинается движением по «решающим» вершинам графа справа налево. Таким образом, вначале обрабатывается «решающая» вершина 4 (рис. 4.3.2.).

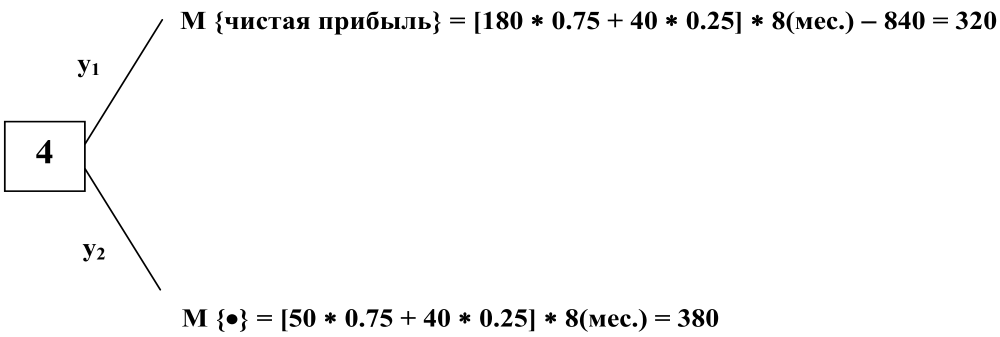


Рисунок 4.3.2.

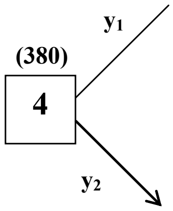


Рисунок 4.3.3.

Из полученных двух чисел 380 оказывается большим (мы максимизируем «доходы»). Этим числом помечается вершина 4, а стрелка совпадает с направлением y_2 (рис. 4.3.3.).

Далее переходим к вершине 1 (рис. 4.3.4.).

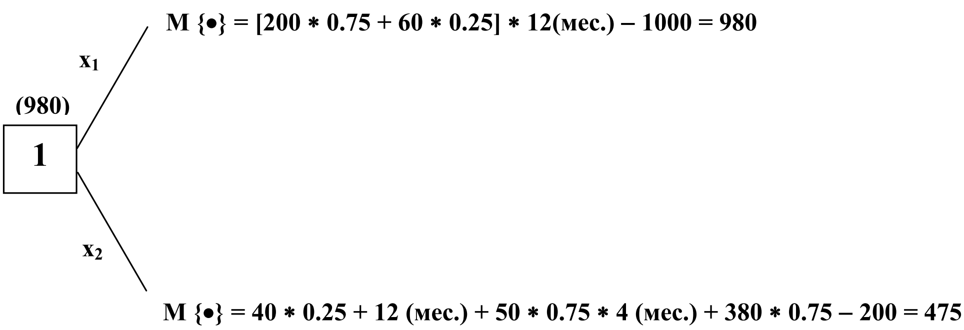


Рисунок 4.3.4.

Основной вывод состоит в том, что с позиций критерия математического ожидания выгоднее в вершине 1 идти по направлению x_2, т.е. сразу закупать крупную партию товара (при данных числовых характеристиках задачи). Ожидаемая прибыль составит при этом 980 условных единиц в год.

При обработке вершины 4 мы фактически имели дело с «решающей» матрицей, представленной в табл. 4.3.2., где

$600 = 180 * 8 - 840$; $-520 = 40 * 8 - 840$;

$400 = 50 * 8$; $320 = 40 * 8$,

Таблица 4.3.2.

Y	Z	
	z_1 (0.75)	z_2 (0.25)
y_1	600	– 520
y_2	400	320

а матрица является матрицей доходов (в ней представлена суммарная прибыль за последние восемь месяцев).

В вершине 1 имеем «решающую» матрицу («доходов»), представленную в табл. 4.3.3., где

$380 = 50 * 4 + 380 - 200$; $280 = 40 * 12 - 200$;

$1400 = 200 * 12 - 1000$; $-280 = 60 * 12 - 1000$.

Таблица 4.3.3.

X	Z	
	z_1 (0.75)	z_2 (0.25)
x_1	380	280
x_2	1400	– 280

Решим теперь ту же самую задачу, используя принцип гарантированного результата. В вершине 4 по-прежнему имеем матрицу «доходов», представленную в табл. 4.3.2. Используя принцип гарантированного результата, заключаем, что оптимальным решением является решение y_2, так как наихудший возможный результат при этом равен 320 единицам «дохода», а при выборе y_1 можем получить потери в объеме 520 единиц. С вершиной 4 теперь ассоциируется число 320, а стрелка пойдет в направлении y_2.

Далее переходим к вершине 1 с матрицей 4.3.4. (она уже отличается от матрицы табл. 4.3.3.).

Таблица 4.3.4

X	Z	
	z_1	z_2
x_1	320	280
x_2	1400	-280

Здесь:

$320 = 50 * 4 + 320 - 200.$

По критерию гарантированного результата лучшей оказывается альтернатива x_1 с гарантированным «доходом» в 280 у.е. в год. Следовательно, первоначально рекомендуется закупить небольшую партию товара. Если сразу установится высокий спрос на товар (и продержится четыре месяца), то мы окажемся в «решающей» вершине 4 и получим прибыль в $50 * 4 + 320 - 200 = 320$ у.е. за год. Причем через четыре месяца согласно принципу гарантированного результата рекомендуется не делать дополнительных закупок товара (решение y_2 считается оптимальным в вершине 4).

Таким образом, при наличии ситуации неопределенности на различных этапах многошаговой проблемы принятия решений метод

Беллмана позволяет указывать оптимальные стратегии поведения в любой «решающей» вершине (т.е. в любом состоянии, в котором может оказаться реальная система). Все эти стратегии представляют для пользователя несомненный интерес, ведь из-за наличия неопределенностей заранее достоверно невозможно установить, какая траектория развития системы реализуется в действительности.

Представленная методика решения многостадийных задач естественным образом обобщается на более сложные многоальтернативные деревья решений.

5. МЕТОДЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА НА ОСНОВЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ.

Решением многокритериальной задачи, сформулированной в разд. 2, является соответствующее множество Парето – множество недоминируемых по Парето альтернатив. Это множество может оказаться достаточно обширным, а пользователя обычно интересует выбор какого-то одного «наилучшего» варианта или небольшого их числа. Если какая-либо дополнительная информация о задаче отсутствует, то множество Парето – это лучшее, что можно предложить. Однако при наличии дополнительной информации о системе предпочтений пользователя могут быть развиты различные методы сужения исходного множества альтернатив – более сильные, чем методы, основанные на доминировании по Парето. Весьма часто исходной информацией для таких методов выступает само множество Парето и ставится задача его сужения с целью выбора одной или нескольких альтернатив в качестве окончательного результата. Некоторые возможные подходы к решению этой проблемы рассмотрены далее.

5.1. Адаптивные процедуры выбора

Эти методы основаны на гипотезе о существовании некоторой «функции потерь» u(x), определенной на исходном множестве альтернатив X:

$$u : X \to R,$$

где R – множество вещественных чисел. Основная задача состоит в выборе одного из элементов $x^* \in X$, такого, что

$$x^* = \arg\min_{x \in X} u(x).$$

Можно вместо «функции потерь» ввести аналогичную «функцию полезности» и ставить задачу ее максимизации. В ряде случаев мы так и будем поступать. Это стандартная задача нелинейного программирования о поиске минимизатора. Отличие рассматриваемой ситуации от типовой задачи нелинейного программирования заключается в следующем. Мы здесь предполагаем, что функция u(x) описывает цель операции выбора, и предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР) устроены очень просто: чем меньше значение функции потерь, тем лучше. Главное предположение состоит в том, что функция u(x) считается заранее <u>неизвестной</u> (в противном случае мы просто воспользовались бы методами конечномерной скалярной оптимизации для выбора наилучшей альтернативы).

Далее от ЛПР, решающего многокритериальную задачу выбора, мы будем требовать не оценки значения u(x) для конкретного $x \in X$ (что достаточно сложно), а только способности сравнения двух альтернатив по их векторным оценкам. Как будет ниже показано, этого оказывается достаточно, чтобы реализовать, например, такой метод поиска минимума нулевого порядка как метод Нелдера-Мида (разд. 5.1.1). При этом ЛПР выступает в качестве своеобразного измерительного устройства, но ему, как было отмечено, не требуется указывать значения u(x) (что очень важно), а только фиксировать: хуже, лучше, одинаково. Здесь, конечно, существуют свои трудности, связанные, например, с возможной противоречивостью ответов ЛПР, но они преодолимы и мы здесь на них не будем останавливаться.

Рассматриваемые адаптивные процедуры часто оказываются более эффективными и легко реализуемыми, чем так называемые апостериорные процедуры, связанные с явным восстановлением функции u(x) (теория полезности). Действительно, построение u(x) в явном виде позволяет, в частности, упорядочить все альтернативы, что не требуется для решения исходной задачи выбора. В результате проделывается «лишняя» работа, вызывающая необходимость ЛПР отвечать на многочисленные достаточно сложные и неестественные для него вопросы.

5.1.1. Метод Нелдера-Мида

Метод Нелдера-Мида – НМ-метод (или метод деформируемого многогранника) – является стандартным методом нелинейного программирования и изучается в соответствующих курсах по теории конечномерной скалярной оптимизации. Однако мы здесь для полноты изложения кратко укажем основные элементы этого метода, что при необходимости может оказаться и достаточным для написания соответствующей программы.

НМ-метод решает задачу поиска минимизатора x* некоторой заданной функции u:

$$X \xrightarrow{u} R, X \subset R^n,$$
$$x^* = \arg\min_{x \in X} u(x).$$

Прообразом НМ-метода явился симплексный метод Спендли, Хекста и Химсворта, основная идея которого состоит в следующем.

В пространстве поиска R^n строится равносторонний многогранник (регулярный симплекс) с количеством вершин равным n + 1 (для n = 2 – это будет равносторонний треугольник). Далее выясняется, какая из вершин симплекса является наихудшей в смысле значения функции u(x). Для этого можно вычислить u(x) во всех вершинах (если функция u(x) задана аналитически или алгоритмически). Но можно производить попарные сравнения вершин, пользуясь категориями «больше», «меньше», «равно», как указывалось ранее.

Найденная наихудшая вершина заменяется на новую вершину, которая является отражением наихудшей вершины относительно центра тяжести оставшихся вершин. Получается новый симплекс, где вся процедура повторяется. В результате симплекс передвигается по пространству поиска в сторону искомого минимизатора функции u(x) (рис. 5.1.1.1.)

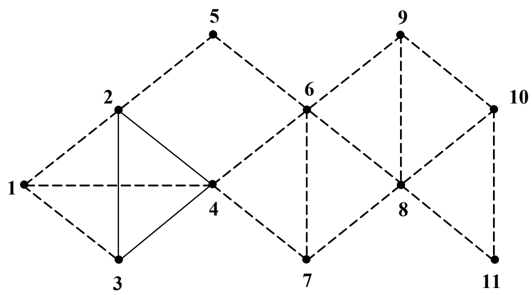


Рисунок 5.1.1.1.

На самом деле в таких процедурах принимаются специальные меры, предотвращающие циклы (циклические движения), а также используются правила уменьшения размера симплекса.

Описанный метод испытывает определенные трудности в связи с отсутствием механизма ускорения поиска в перспективных направлениях, а также в связи с продвижением вдоль искривленных оврагов и хребтов функции u(x). В НМ-метод внесены соответствующие усовершенствования, и симплекс получает возможность изменять свою форму, вытягиваться, сжиматься и, таким образом, не будет оставаться симплексом. Поэтому для него используется более подходящее название – деформируемый многогранник, а сам метод часто называется методом деформируемого многогранника.

Основные операции НМ-метода:

1. Отражение – проектирование худшей вершины x^h через центр тяжести x^c оставшихся вершин (рис. 5.1.1.2.):

$x^r = x^c + \alpha(x^c - x^h),\ \alpha > 0.$

Здесь x^c – не вершина, а точка центра тяжести вершин 2, 3.

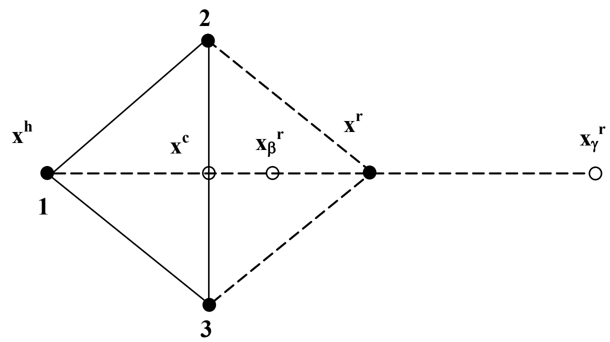


Рисунок 5.1.1.2.

2. Растяжение. Если значение функции u(x) в точке x^r оказывается лучше, чем в лучшей вершине из списка {1, 2, 3}, то выполняется растяжение в γ раз (γ > 1 – коэффициент растяжения), и точка x^r заменяется на точку x_γ^r.

3. Сжатие. Если в отраженной вершине x^r значение функции u(x) хуже, чем во всех других вершинах (кроме x^h), то производится сжатие (с коэффициентом $0 < \beta < 1$) и точка x^r заменяется на точку x_β^r.

4. <u>Редукция</u>. Если в отраженной вершине значение функции u(x) хуже, чем в точке x^h, то весь многогранник сжимается в 2 раза относительно лучшей вершины x^b (рис. 5.1.1.3.).

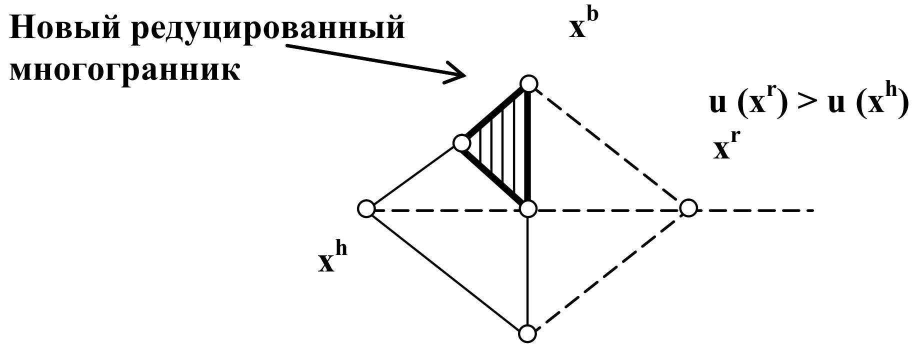


Рисунок 5.1.1.3.

5. В остальных случаях операции 2, 3, 4 не производятся, а сам процесс продолжается для нового многогранника $\{2, 3, x^r\}$.

6. <u>Окончание процесса</u> производится, когда выполняется условие приблизительного равенства значений функции в вершинах текущего многогранника и в центре тяжести многогранника без учета худшей вершины. Могут быть использованы и другие условия окончания процесса.

5.1.2. Реализация адаптивной процедуры выбора на основе НМ-метода

Итак, решается следующая основная задача:

$$f_i(x) \to \min_{x \in X}, \ (i = 1, ..., m), \ X \subset R^n,$$

где X – множество альтернатив; через F = f (X) обозначим множество допустимых оценок.

Основная гипотеза: в многокритериальной задаче, в которой необходимо выбрать единственную альтернативу x* из всех возможных (или небольшое число «наилучших» альтернатив), необходимо предположить, что существует единственная, хотя, возможно, и неизвестная ЛПР цель операции, описываемая скалярной функцией u(x), причем

$$x^* = \arg\min_{x \in X} u(x).$$

Будем предполагать также, что эта функция u(x) «согласована» с векторным отображением $f = (f_1, ..., f_m)$ в том смысле, что

$$\forall \arg\min_{x \in X} u(x) \in P(X),$$

где P (X) – множество Парето заданной многокритериальной задачи.

Из теории многокритериальной оптимизации известно (см. разд. 2.), что при определенных предположениях о выпуклости множества достижимости F найдутся такие весовые коэффициенты

$$\alpha_i^* \geq 0, i = 1, ..., m; \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* = 1,$$

что линейная функция

$$J(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* f_i(x)$$

достигает своего минимума в точке x*, так как последняя является точкой Парето. Поэтому нет никакой разницы, определять ли x* или соответствующие весовые коэффициенты α^*.

Согласно этой основной идее процесс выбора будет протекать следующим образом.

Каждому $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ будет соответствовать точка $x(\alpha) \in P(X)$, полученная как решение задачи минимизации линейной свертки

$$J(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \to \min_{x \in X} \qquad (5.1.2.1.)$$

любым методом скалярной оптимизации. Векторная оценка f (x(α)) будет одновременно оценкой α. А далее во множестве

$$A = \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \Big| \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1\},\ , A \subset R^m$$

реализуется НМ-метод, позволяющий последовательно находить:

$\alpha^* \to x^* = x\ (\alpha^*) \to f^* = f\ (x^*)$.

Таким образом, в отличие от возможного «прямого» подхода, когда процедура НМ-метода реализуется непосредственно во множестве $X \subset R^n$, мы здесь работаем в пространстве весовых коэффициентов R^m, причем, как правило, $m << n$. Правда, мы вынуждены решать вспомогательные оптимизационные задачи в пространстве R^n при минимизации функционала линейной свертки (5.1.2.1) для каждого пробного α. Но эти задачи решаются не в режиме диалога с пользователем и поэтому могут быть решены с меньшими временными затратами. Наиболее трудоемкая «диалоговая» часть процедуры выбора реализуется в пространстве R^m существенно меньшей размерности и в этом главный выигрыш построенной «косвенной» процедуры.

Важно отметить, что предлагаемый «косвенный» подход оказывается реализуемым и в случае, если X является множеством (конечным или бесконечным) объектов произвольной природы, т.е. требование $X \subset R^n$ является в данном случае, вообще говоря, непринципиальным. Важно лишь, чтобы для каждого из элементов $x \in X$ можно было вычислить соответствующую векторную оценку f (x) согласно заданному отображению

$$X \xrightarrow{f} R^m.$$

Если абстрактные объекты из X являются непараметризованными (т.е. с ними не ассоциируются какие-либо числовые векторы), то обычно множество X оказывается конечным и вспомогательные задачи минимизации (5.1.2.1) решаются простым перебором вариантов. При этом диалоговый НМ-метод по-прежнему реализуется в числовом непрерывном пространстве весовых коэффициентов R^m, как это и было описано выше.

Дополнительное преимущество рассмотренной косвенной реализации по сравнению с прямой реализацией НМ-метода во множестве $X \subset R^n$ заключается в том, что здесь мы гарантированно осуществляем выбор строго в пределах множества Парето и поэтому гарантируется эффективность получаемых решений, независимо от системы предпочтений ЛПР.

Легко видеть также, что вместо линейной свертки (5.1.2.1) можно использовать более эффективную свертку Джоффриона, реализующую принцип лексикографического упорядочения, не требуя свойства выпуклости множества достижимости F.

5.2. Выбор на основе метода t-упорядочения

Пусть решается детерминистская многокритериальная задача

$$f_i(x) \to \max,\ f_i : X \to R,\ i = \overline{1, m}, \qquad (5.2.1)$$

где X − произвольное абстрактное множество. В данном разделе будем предполагать, что все критериальные функции f_i отражают «полезность» объекта с позиций различных критериев и являются соизмеримыми в том смысле, что значения каждой критериальной функции изменяются в одних и тех же пределах [a, b]:

$$\forall x \in X : 0 \le a \le f_i(x) \le b\,,\ \ i = \overline{1, m}\,. \qquad (5.2.2)$$

Таким образом, мы предполагаем, что оценочные шкалы критериев являются числовыми и одинаковыми.

Отметим, что предположение о соизмеримости критериев является существенным и требует для каждой решаемой задачи отдельного обоснования и исследования.

Требование, связанное с необходимостью приведения всех числовых шкал к единому промежутку выглядит весьма невинно и формально достигается с помощью, например, следующих простых преобразований:

$$\bar{f}_i(x) = a + (b - a)\frac{f_i(x) - \min f_i}{\max f_i - \min f_i}\,. \qquad (5.2.3)$$

Здесь $\max f_i$, $\min f_i$ – максимальные и минимальные значения f_i соответственно. Новые оценочные функции $\bar{f}_i$ будут изменяться уже в пределах заданного промежутка [a, b]. При этом наименее предпочтительный по любому из частных критериев вариант получит оценку «a», а наиболее предпочтительный – оценку «b». Часто полагают $a = 0$, $b = 1$. Могут использоваться и другие (может быть, нелинейные) формулы нормировки, аналогичные (5.2.3).

Многие полагают, что проблемы соизмеримости числовых критериев вовсе не существует. Достаточно воспользоваться любыми соотношениями типа (5.2.3). Однако, это, к сожалению, не так. Рассмотрим конкретный пример, показывающий, что отношение доминирования, устанавливаемое в пространстве нормированных оценок, неинвариантно (из-за изменения нижних и верхних границ) относительно изменения рассматриваемой совокупности объектов X.

Пусть для трех объектов $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ имеем следующие оценки по трем частным критериям $f = (f_1, f_2, f_3)$:

$$f(x_1) = (10, 10, 3);\ \ f(x_2) = (8, 8, 10);\ \ f(x_3) = (0, 0, 0).$$

Тогда для преобразованных оценок при $[a, b] = [0, 1]$ получим

$$\overline{f}(x_1) = (1,1,0.3);\ \ \overline{f}(x_2) = (0.8,0.8,1);\ \ \overline{f}(x_3) = (0,0,0).$$

Если предположить, что все три частные критерия равноправны и нас интересует средняя оценка для каждого объекта, то тогда

$$\overline{f}_1(x_1) + \overline{f}_2(x_1) + \overline{f}_3(x_1) = 2.3 < \overline{f}_1(x_2) + \overline{f}_2(x_2) + \overline{f}_3(x_2) = 2.6$$

и, следовательно, объект x_2 оказывается более предпочтительным, чем объект x_1 (по «средней полезности»).

Но если исключить объект x_3, как наихудший по всем трем критериям, то получим обратное утверждение. Действительно, в этом случае

$$\overline{f}(x_1) = (1,1,0);\ \ \overline{f}(x_2) = (0,0,1)$$

и

$$\overline{f}_1(x_1) + \overline{f}_2(x_1) + \overline{f}_3(x_1) = 2 > \overline{f}_1(x_2) + \overline{f}_2(x_2) + \overline{f}_3(x_2) = 1.$$

Итак, мы получили обескураживающий результат. Если исходная совокупность объектов X содержит три объекта x_1, x_2, x_3, то оказывается, что объект x_2 лучше, чем объект x_1. Если же исключить из рассмотрения (худший по всем критериям) объект x_3, то получим, что объект x_1 оказывается лучше, чем объект x_2. Безобидная на первый взгляд процедура нормировки оказывается на деле весьма сложной, так как приводит к явно анти-интуитивным результатам. Можно пытаться исправить ситуацию и, например, фиксировать верхние и нижние границы критериальных функций раз и навсегда (для данной задачи) независимо от конкретного набора объектов и их оценок. При этом мы получим однозначность, но ситуация в целом вряд ли улучшится, так как установленные границы, по существу, и будут определять соответствующее отношение доминирования, и в этом смысле произвол сохраняется.

Итак, пусть критериальные функции (или просто – критерии) соизмеримы и удовлетворяют условиям (5.2.2). В качестве примера изначально соизмеримых критериев можно привести систему школьных оценок по нескольким предметам f_i.

<u>Определение 1</u>. Нормированные критерии f_i и f_j называются равноценными, (что записывается в виде $f_i = f_j$), если всякие две векторные оценки Z, W, где

$$\begin{aligned} &Z = (z_1, ..., z_i, ..., z_j, ..., z_m), Z = f(x), x \in X \\ &W = (z_1, ..., z_i + \delta, ..., z_j - \delta, ..., z_m) \end{aligned} \qquad (5.2.4)$$

одинаковы по предпочтительности при любом δ (большим или меньшим нуля), удовлетворяющим неравенствам:

$$a \le z_i + \delta \le b,\ a \le z_i - \delta \le b.$$

Легко видеть, что суммы частных оценок в позициях i, j у векторных оценок Z, W совпадают.

Таким образом, если, например, два школьника оцениваются по четырем предметам и имеют оценки (которые необходимо максимизировать)

$$Z = (5, 4, 4, 3),\ W = (5, 5, 3, 3) \tag{5.2.5}$$

то при условии равноценности критериев f_2, f_3 приведенные векторные оценки будут одинаковы по предпочтительности, так как $4 + 4 = 5 + 3$, а остальные оценки совпадают.

Следовательно, если критерии f_i, f_j равноценны, то можно «забрать» δ единиц у частной оценки z_j в (5.2.4) и «передать» их частной оценке z_i. При этом получим векторную оценку, одинаковую с исходной по предпочтительности.

Если в приведенном примере (5.2.5) считать, что оценка Z предпочтительнее, чем W, то естественно предположить, что критерий f_3 важнее критерия f_2. Дадим соответствующее определение.

Определение 2. Критерий f_i более важен, чем критерий f_j (что записывается в виде $f_i > f_j$), если векторная оценка

$$Z = (z_1, ..., z_i, ..., z_j, ..., z_m)$$

менее предпочтительна, чем оценка

$$W = (z_1, ..., z_i + \delta, ..., z_j - \delta, ..., z_m),$$

где

$$\delta \in \{\delta > 0 \mid z_i + \delta \le b,\ a \le z_j - \delta\}.$$

Таким образом, перенос δ единиц ($\delta > 0$) с частной оценки z_j на частную оценку z_i приводит к улучшению ситуации, если $f_i > f_j$.

Введенные определения 1, 2 показывают, как может интерпретироваться дополнительная ординальная (порядковая) информация пользователя (ЛПР) об относительной важности частных критериев, на основе которой и происходит сокращение множества Парето решаемой многокритериальной задачи. Важно понимать, что одна и та же ординальная информация, задаваемая в виде цепочки равенств и неравенств, например, вида

$$f_i > f_j = f_k > f_\ell,$$

в других процедурах выбора может получать совершенно иную интерпретацию, что, в свою очередь, может приводить и к другим системам предпочтений, и к другим результатам выбора. Соответствующие вопросы рассмотрены в этой главе далее.

Приведенные в определениях 1, 2 интерпретации ординальной информации ЛПР позволяют строить отношения доминирования более сильные, чем отношение Парето (что и приводит к сужению последнего, а это наша основная задача). Рассмотрим пример.

Пусть

$$Z = (1,\ 0.5,\ 0.1,\ 0.2);$$

$$W = (0.4,\ 0.9,\ 0.1,\ 0.2)$$

и пусть утверждается, что критерий f_1 важнее, чем f_2 : $f_1 > f_2$.

Эти векторные оценки, очевидно, несравнимы по Парето. Рассмотрим оценку

$$W' = (0.8,\ 0.5,\ 0.1,\ 0.2),$$

полученную из W с помощью «переноса» числа 0.4 со второй позиции в первую. Имеем, согласно определению 2

$W' \succ W$,

так как более важному критерию f_1 в оценке W' соответствует большая оценка (0.8 вместо 0.4). И, так как имеем

$Z \overset{P}{\succ} W'$

(доминирование по Парето), то естественно считать

$Z \succ W' \succ W$

и в результате

$Z \succ W$.

Таким образом, оценки Z, W оказываются уже сравнимыми, и оценка W может быть отброшена. Мы здесь везде предполагаем, что рассматриваемые отношения доминирования являются транзитивными.

Методы упорядочения альтернатив, основанные на рассмотренной процедуре «переноса» (transfer) с учетом ординальной информации пользователя, будем называть методами t-упорядочения.

Рассмотрим укрупненный алгоритм, реализующий метод t-упорядочения.

В качестве исходной информации для алгоритма t-упорядочения принимается множество S высказываний пользователя (ЛПР) об относительной важности частных критериев вида:

$S = \{f_i = f_j; \ldots; f_q > f_p\}$.

Мы будем предполагать, что множество S скорректировано следующим образом. Во-первых, необходимо проверить и при необходимости обеспечить непротиворечивость высказываний из S, может быть, с помощью проведения дополнительного диалога с пользователем для уточнения его системы предпочтений. Во-вторых, необходимо расширить множество S за счет добавления новых высказываний, являющихся транзитивными следствиями уже имеющихся (выполнить операцию транзитивного замыкания). Именно, если мы, например, уже ввели два высказывания

$f_i > f_j$; $f_j > f_k$,

то естественно ввести новое высказывание

$f_i > f_k$

и т.п.

Пусть теперь $Z = (z_1, ..., z_m)$; $W = (w_1, ..., w_m)$ – две векторные оценки, которые необходимо сравнить с учетом дополнительной скорректированной информации S.

Если эти оценки сравнимы по Парето, то задача решена. В противном случае вектор Z фиксируется, а по вектору W формируются следующие два множества (может быть, бесконечные, даже если исходные множества оценок конечны).

1. WE – множество W-эквивалентных векторов (включающее сам вектор W), полученное из W с помощью всех возможных переносов δ между парами равноценных критериев. Следовательно, множество WE строится с учетом всех данных типа $f_i = f_j$ из S.

2. WI – множество W-улучшенных векторов, каждый из которых получен с помощью возможных переносов δ с учетом всех данных

$f_i = f_j,\ \ f_q > f_p.$

При этом предполагается, что переносы согласно информации $f_q > f_p$ производятся только с целью улучшения вновь полученного вектора и, по крайней мере, одна такая улучшающая передача выполнена для любого вектора из WI.

Далее новое отношение предпочтения $\overset{t}{\succ}$ строится следующим образом:

$$Z \overset{t}{\succ} W \leftrightarrow [\exists W' \in WE : Z \overset{p}{\succ} W'] \vee [\exists W'' \in WI : Z \underset{\sim}{\overset{p}{\succ}} W''] . \qquad (5.2.6)$$

Здесь через $\left(\underset{\sim}{\overset{p}{\succ}}\right)$ обозначено нестрогое предпочтение вида

$$Z \underset{\sim}{\overset{p}{\succ}} W \leftrightarrow \forall i \in [1:m] : z_i \geq w_i .$$

Определение (5.2.6) имеет весьма простой смысл. Если вектор Z строго лучше, чем некоторый вектор W′, эквивалентный W, или нестрого лучше, чем некоторый вектор W″, который, в свою очередь, строго лучше, чем W, то полагаем, что Z строго лучше W.

«Прямой» метод построения рассмотренного отношения доминирования $\left(\overset{t}{\succ}\right)$ в общем случае является практически нереализуемым из-за непреодолимых алгоритмических трудностей в общем случае и значительных вычислительных затрат в случаях когда само построение алгоритмически возможно. Уже отмечалось, в частности, что множества WE, WI практически всегда будут содержать бесконечное число элементов и о каких-то процедурах простого перебора не может быть и речи. Поэтому для реализации построения отношения доминирования $\left(\overset{t}{\succ}\right)$ был предложен иной подход, реализованный в системе Quick Choice.

Частным случаем изложенного метода t-упорядочения является метод, предложенный В.В. Подиновским (далее – метод П-упорядочения). Он основан на том, что мы имеем возможность формировать множества, аналогичные WE и WI с помощью перестановок численных значений оценок между равноценными и неравноценными критериями. Например, пусть дана векторная оценка

$$Z = (5, 10, 6)$$

и известно, что $f_1 > f_2$. Тогда по Подиновскому оценка

$$Z' = (10, 5, 6),$$

полученная из Z перестановкой чисел 5, 10, будет признана лучшей, чем Z, так как на место более «важного» критерия f_1 пришло большее значение (10 вместо 5). Если бы критерии f_1 и f_2 были равноценными, то оценки Z, Z′ считались бы эквивалентными.

Очевидно, в методе П-упорядочения множества WE, WI оказываются конечными и могут быть практически построены без особых вычислительных проблем.

Недостатком метода П-упорядочения является его недостаточная «мощность». Например, пусть ставится задача сравнения двух векторных оценок

$$W = (7, 9, 6),$$

$Z = (5, 10, 6)$

при наличии ординальной информации $f_1 > f_2$. Эти оценки, очевидно, несравнимы по Парето. Несравнимы они и по методу П-упорядочения (никакие перестановки численных значений оценок между f_1, f_2 не приводят к их сравнимости по Парето). В то же время легко видеть, что согласно методу t-упорядочения для

$Z' = (6, 9, 6)$,

полученной из Z с помощью переноса $\delta = 1$ со второй позиции в первую, мы имеем

$Z' \succ Z,\ \ W \succ Z' \succ Z$

и, следовательно,

$W \overset{t}{\succ} Z$.

В то же время с позиций «физического смысла» метод t-упорядочения представляется столь же естественным, что и метод Подиновского.

5.3. Задачи с малым числом критериев и альтернатив

Решается многокритериальная задача

$$f_i\,(x) \to \max,\ \ i = 1, ..., m, \tag{5.3.1}$$

где $x \in X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Таким образом, X – конечное множество, содержащее n элементов x_i. Предполагается, что числа m, n относительно невелики, так как именно они в рассматриваемых ниже методах будут определять трудоемкость диалога с пользователем в реальном времени по извлечению дополнительной информации о задаче.

Ниже будут рассмотрены метод Саати и метод Коггера и Ю.

5.3.1. Проблема ранжирования объектов по «важности». Матрица попарных сравнений

Пусть задано конечное множество объектов

$P = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$

и нам необходимо построить вектор

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$

с неотрицательными вещественными компонентами α_i, такими, что

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

Числа α_i будем интерпретировать как весовые коэффициенты, определяющие «важность» или «полезность» объектов p_i. Чем большее значение α_i соотносится с объектом p_i, тем выше «полезность» этого объекта. Например, в исходной многокритериальной задаче (5.3.1) ранжироваться могут частные критерии f_i, а также непосредственно альтернативы x_i из X.

Основным объектом в рассматриваемых методах является треугольная матрица S, называемая здесь матрицей попарных сравнений:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1m} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2m} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \alpha_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Элемент $\alpha_{ij} = \alpha_i / \alpha_j$ матрицы интерпретируется как коэффициент превосходства i-го объекта p_i над j-ым объектом p_j из множества P. Если $\alpha_i / \alpha_j > 1$, то объект p_i «важнее» объекта p_j и т.д.

Предполагается, что пользователь или ЛПР имеет возможность отвечать на вопросы типа: «Во сколько раз объект p_i превосходит объект p_j по важности?»

Коэффициенты α_{ij} могут выбираться пользователем из фиксированной балльной шкалы, например (Саати):

$$\left\{\frac{1}{9},\frac{1}{8},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,2,3,4,5,6,7,8,9\right\}.$$

Для облегчения работы пользователя целые числа шкалы могут получать соответствующую смысловую интерпретацию, например:

1 – равная важность;

3 – слабое превосходство;

5 – сильное превосходство;

7 – очень сильное превосходство;

9 – абсолютное превосходство;

2, 4, 6, 8 – промежуточные случаи.

Очевидно, что шкала должна содержать (и содержит) соответствующие обратные значения.

5.3.2. Методы Саати и Коггера и Ю

Задача состоит в отыскании вектора весовых коэффициентов

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$

по известной матрице попарных сравнений S.

Согласно методу Саати по треугольной матрице S строится следующая полнозаполненная матрица $\bar{S}$:

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & ... & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & 1 & \alpha_{23} & ... & \alpha_{2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & ... & 1 \end{bmatrix},$$

где элементы нижней треугольной части α_{ij} $(i > j)$ матрицы удовлетворяют соотношениям

$\alpha_{ij} = 1/\alpha_{ji}$.

Легко доказать, что искомый вектор

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$

является собственным вектором матрицы $\bar{S}$, соответствующим максимальному собственному числу матрицы $\lambda = m$ и может быть найден как решение системы уравнений:

$$\bar{S}\alpha = \lambda_{max}\alpha . \qquad (5.3.2.1)$$

Существует единственное решение данной системы линейных алгебраических уравнений, удовлетворяющее условию

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

Если матрица системы (5.3.2.1) задана неточно, то предлагается численно определять ее максимальное собственное число и соответствующий собственный вектор.

Собственно метод Саати сводится к следующему.

Предполагается, что частные критерии f_i не обязательно являются числовыми функциями и могут иметь качественный неформальный характер. В этом случае для каждого частного критерия f_i ставится задача ранжирования объектов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ с построением на основе диалога с пользователем соответствующей матрицы попарных сравнений и определением вектора весов

$$\alpha^i = (\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i) .$$

Полученные числа α_j^i интерпретируются как значения $f_i(x_j)$, $j = \overline{1, n}$. Таким образом, каждая альтернатива получает уже числовую оценку по каждому из частных критериев.

Далее осуществляется аналогичная операция по ранжированию самих частных критериев по важности с построением вектора весов

$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$.

В качестве оптимальной альтернативы (их может быть несколько) выбираем

$$x^* = \arg\max_i J(x_i),$$

где

$$J(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k f_k(x_i), \ \ i = \overline{1,n}; \ \ f_k(x_i) = \alpha_i^k.$$

Метод Коггера и Ю отличается от метода Саати тем, что для нахождения вектора весовых коэффициентов ранжируемых объектов используется не система уравнений (5.3.2.1), а система вида

$$TS\alpha = \alpha, \qquad (5.3.2.2)$$

где S – треугольная матрица попарных сравнений, а

$T = \mathrm{diag}\,[1/m, 1/m\text{-}1, \ldots, 1]$.

В данном случае матрица системы – треугольная, что облегчает решение задачи.

5.3.3. Обсуждение

При практическом использовании рассмотренных методов возникает целый ряд вопросов.

В стандартных вариантах алгоритмов предполагается, что все элементы матрицы попарных сравнений S определяются независимо в результате диалога, что может приводить к противоречивости ответов пользователя в смысле нарушений очевидных равенств вида

$$\alpha_{ik}\alpha_{kj} = \alpha_{ij}\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_k}\cdot\frac{\alpha_k}{\alpha_j} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\right).$$

Если, как это и рекомендуется авторами, продолжать решать системы (5.3.2.1), (5.3.2.2), то непонятен смысл механизма обработки заведомо противоречивой информации.

Таким образом, процедура независимой оценки элементов α_{ij} вызывает определенные сомнения и трудности.

С другой стороны, если полагать, что мы должны в конечном итоге получить непротиворечивую информацию от пользователя – может быть, с помощью дополнительных уточняющих вопросов – то тогда можно поступать значительно проще.

В этом случае можно вообще отказаться от решения каких-либо систем уравнений. Действительно, для непосредственного определения

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$

достаточно, например, получить от пользователя цепочку коэффициентов превосходства вида

$\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1m}$

или

$$\alpha_{12}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{m-1,m}. \tag{5.3.3.1}$$

При этом существенно сокращается трудоемкость диалога и достигается непротиворечивость информации.

Могут быть предложены процедуры получения от пользователя избыточной информации для уточнения его оценок на основе определенных механизмов усреднения, но это – предмет отдельного рассмотрения.

Продолжим обсуждение. Ясно, что применение фиксированной балльной шкалы Саати со смысловой интерпретацией в определенной степени провоцирует пользователя на дачу противоречивых в указанном выше смысле ответов. Действительно, пусть, например, объект p_1 абсолютно превосходит объект p_2 и $\alpha_{12} = 9$ согласно шкале. Пусть также объект p_2 абсолютно превосходит объект p_3 и, следовательно, $\alpha_{23} = 9$. Спрашивается, какое число назовет пользователь в качестве α_{13} – тоже 9 или 81? Последнее число в шкале отсутствует.

По-видимому, в подобных процедурах целесообразно использовать так называемые «транзитивные» шкалы типа:

слабое превосходство = a,
сильное превосходство = aa,
очень сильное превосходство = aaa, (5.3.3.2)
абсолютное превосходство = aaaa и более.

В этом случае мы в значительной степени будем избавлены от весьма неожиданных согласно шкале Саати утверждений типа: если объект p_1 слабо превосходит объект p_2 ($\alpha_{12} = 3$), а объект p_2, в свою очередь, слабо превосходит объект p_3 ($\alpha_{23} = 3$), то объект p_1 абсолютно превосходит объект p_3 ($\alpha_{13} = 9$)!

Согласно шкале (5.3.3.2) комбинация двух слабых превосходств дает сильное превосходство, два сильных превосходства дают абсолютное превосходство и т.д. Получаемые согласно этой шкале результаты имеют весьма понятную смысловую интерпретацию. Выбор конкретного значения для базы шкалы «а» - это отдельный вопрос. Можно, например, положить а = 1.5 или а = 2 с получением следующих двух шкал:

Таблица 5.3.3.1

Смысловая интерпретация	а = 1.5	а = 2
слабое превосходство	1.5	2
сильное превосходство	2.25	4
очень сильное превосходство	3.38	8
абсолютное превосходство	5.06 и более	16 и более

5.3.4. Простой алгоритм выбора

В данном разделе предлагается простой алгоритм выбора на основе информации (5.3.3.1). Поясним принципиальную схему метода на конкретном примере.

Рассмотрим проблему выбора научного руководителя студентом старшего курса. Глобальный показатель «качества», характеризующий правильность выбора, будем связывать с общим удовлетворением работой в конкретной научной группе. Этот показатель является достаточно расплывчатым и неопределенным, поэтому используются соответствующие критерии-заместители, и задача трансформируется к некоторой многокритериальной задаче. Будем рассматривать следующие частные критерии оптимальности, характеризующие в совокупности исходный глобальный показатель:

1. Перспективность проводимых в группе исследований с позиций последующего трудоустройства (f_1).
2. Личный интерес студента к проводимым исследованиям (f_2).
3. Возможность получения дополнительной заработной платы в процессе обучения (f_3).

4. Связь научной группы с конкретными фирмами, принимающими на работу молодых специалистов (f_4).
5. Профессионализм, характер и человеческие качества лично научного руководителя (f_5).
6. Состав научной группы и отношения в коллективе (f_6).

Предполагается, что все введенные частные показатели необходимо максимизировать, т.е. большему значению каждого показателя будет соответствовать более желаемое состояние для студента.

Рассмотрим ситуацию выбора, когда имеется три потенциальных научных руководителя, обозначенных буквами A, B, C.

Будем следовать предлагаемому простому алгоритму выбора с транзитивной шкалой и базой a = 2 (см. табл. 5.3.3.1). Построим вектор весов для сформулированных частных критериев. Необходимо задать пользователю пять вопросов, и определить в результате вектор коэффициентов превосходства (5.3.3.1). Будем считать, что по результатам диалога были получены следующие данные:

$\alpha_{12} = 2$, $\alpha_{23} = 4$, $\alpha_{34} = 1/4$, $\alpha_{45} = 1$, $\alpha_{56} = 4$.

Здесь равенство $\alpha_{12} = 2$, например, означает, что частный критерий f_1 в два раза превосходит по «важности» критерий f_2 и т.д.

Воспользовавшись соотношением

$\alpha_{ij} = \alpha_i/\alpha_j$

и условием нормированности вектора α, непосредственно получаем:

$\alpha_1 = 0.364$; $\alpha_2 = 0.182$; $\alpha_3 = 0.045$; $\alpha_4 = 0.182$; $\alpha_5 = 0.182$; $\alpha_6 = 0.045$.

Далее переходим к процедуре вычисления значений частных критериев оптимальности, соответствующих трем вариантам A, B, C.

Вначале с помощью того же самого подхода ранжируем варианты A, B, C по критерию f_1 (перспективность исследований). Пусть пользователь указал следующие значения коэффициентов превосходства:

$\alpha^1_{12} = 1; \alpha^1_{23} = 1/2$.

Соответствующий вектор весов α^1 имеет компоненты

0.250, 0.250, 0.500,

которые интерпретируются как значения функции f_1 для трех вариантов A, B, C:

f_1 (A) = 0.250; f_1 (B) = 0.250; f_1 (C) =0.500.

Аналогично определяем значения остальных частных критериев для вариантов A, B, C:

$$\alpha^2_{12} = 2; \alpha^2_{23} = 2;$$

f_2 (A) = 0.571; f_2 (B) = 0.286; f_2 (C) =0.143.

$$\alpha^3_{12} = 1; \alpha^3_{23} = 1;$$

f_3 (A) = 0.333; f_3 (B) = 0.333; f_3 (C) =0.333.

$$\alpha^4_{12} = 1/2; \alpha^4_{23} = 1/4;$$

f_4 (A) = 0.091; f_4 (B) = 0.182; f_4 (C) =0.727.

$$\alpha^5_{12} = 4; \alpha^5_{23} = 2;$$

f_5 (A) = 0.727; f_5 (B) = 0.182; f_5 (C) =0.091.

$$\alpha^6_{12} = 1/2; \alpha^6_{23} = 2;$$

f_6 (A) = 0.250; f_6 (B) = 0.500; f_6 (C) =0.250.

Воспользовавшись методом линейной свертки,

$$J(x_i) = \sum_{k=1}^{6} \alpha_k f_k(x_i),$$

получим значения обобщенного критерия оптимальности для трех вариантов $x_1 = A$, $x_2 = B$, $x_3 = C$:

$J(A) = 0.364 * 0.250 + 0.182 * 0.571 + 0.045 * 0.333 + 0.182 * 0.091 +$
$+ 0.182 * 0.727 + 0.045 * 0.250 = 0.370.$

$J(B) = 0.364 * 0.250 + 0.182 * 0.286 + 0.045 * 0.333 + 0.182 * 0.182 +$
$+ 0.182 * 0.182 + 0.045 * 0.500 = 0.247.$

$J(C) = 0.364 * 0.500 + 0.182 * 0.143 + 0.045 * 0.333 + 0.182 * 0.727 +$
$+ 0.182 * 0.091 + 0.045 * 0.250 = 0.383.$

Следовательно, наиболее перспективным с позиций применяемого метода признается выбор руководителя С. Однако видно, что выбор А оказывается почти столь же хорошим.

Замечание. Ясно, что если нет оснований считать множество достижимости рассматриваемой многокритериальной задачи выпуклым, целесообразно вместо линейной свертки в качестве обобщенного критерия использовать свертку Джоффриона, основанную на комбинации линейной и максиминной сверток.

Легко подсчитать, что в предложенном методе общее число сравнений объектов по важности, выполняемых пользователем, равно

$N_1 = m - 1 + m(n - 1),$

где m – число частных критериев, n – количество альтернатив.

В стандартных процедурах Саати и Коггера и Ю число сравнений равно

$$N_2 = \frac{m^2 - m}{2} + m\frac{n^2 - n}{2},$$

что может быть существенно больше N_1. Так для $m = 6$, $n = 10$ имеем:

$N_1 = 59$, $N_2 = 285$.

Кроме того, как уже указывалось, при использовании предлагаемого подхода нет необходимости решать какие бы то ни было линейные системы, и искать собственные числа матриц.

5.4. Метод ограничений

Простым и часто применяемым методом сжатия множества Парето является метод ограничений.

Решается стандартная многокритериальная задача

$$\begin{aligned} &f_i(x) \to \max, x \in D, \\ &f_i : D \to R, i = 1,\dots,m, \end{aligned} \qquad (5.4.1)$$

где D – произвольное абстрактное множество.

На первом этапе одним из известных методов строится множество Парето P(D). Далее метод ограничений реализуется в соответствии со следующей последовательностью шагов.

Шаг1. Пользователю предлагается назначить нижние допустимые границы t_i для всех m критериальных функций:

$$f_i(x) \geq t_i,\ i = 1, \dots, m. \qquad (5.4.2)$$

Предполагается, что указанные значения критериальных функций дают удовлетворяющие пользователя варианты.

Шаг2. Строится подмножество множества Парето, состоящее из точек, удовлетворяющих неравенствам (5.4.2):

$D_t = \{x \in P(D) \mid f_i(x) \geq t_i,\ i = 1, ..., m\},\ D_t \subset P(D).$

Шаг3. Если D_t – пустое множество, то пользователю предлагается ослабить требования с помощью уменьшения какого-то из чисел t_i. Далее переходим к шагу 2. Если D_t не пусто – переходим к шагу 4.

Шаг4. Выбирается $\forall\ x \in D_t$ и предъявляется пользователю в качестве кандидата на «решение» задачи (5.4.1). Если решение удовлетворяет пользователя, то процесс завершается. В противном случае переходим к шагу 5.

Шаг5. Пользователю предлагается назначить новую (увеличенную) нижнюю границу по одному из критериев и осуществляется переход к шагу 2.

Как правило, в процессе диалога пользователь получает дополнительную информацию о задаче в виде диапазонов изменения векторных оценок для элементов множества Парето или множеств D_t. Иногда целесообразно иметь информацию о так называемой «идеальной» точке, соответствующей лучшим возможным значениям по всем критериям (такая точка реально обычно не существует, но позволяет оценить множество допустимых верхних границ). Кроме того, в процессе решения «хорошая» СППР должна информировать пользователя о структуре множеств P(D), D_t. Например, для случая конечного множества D пользователь на шаге 4 возможно захочет уточнить свой выбор (даже если он его первоначально и удовлетворил) с помощью просмотра других точек из D_t, удовлетворяющих той же системе ограничений. Должна быть обеспечена также возможность возврата назад к прежним вариантам и возможность выбора новых начальных условий, новых критериев и т.д.

Метод ограничений целесообразно использовать на завершающей стадии процесса выбора, например, после применения метода t-упорядочения. Тогда в качестве исходного для метода ограничений множества будет использоваться не P(D), а некоторое его подмножество, что сократит наиболее трудоемкую диалоговую часть процедуры выбора.

Непосредственно в методе ограничений какая-либо ординальная информация не используется, а сокращение исходного множества альтернатив производится в процессе поступления дополнительной информации от пользователя в виде последовательности наборов нижних границ $\{t_i\}$.

5.5 Рандомизированные стратегии принятия решений

В данном разделе мы рассмотрим еще один подход к интерпретации ординальной информации пользователя об относительной важности частных критериев оптимальности многокритериальной задачи (5.4.1).

Основная идея заключается в следующем. Рассматривается какая-либо скалярная свертка (обычно линейная) векторного критерия оптимальности

$f = (f_1, ..., f_m)$ с весовыми коэффициентами $\{\alpha_i\}$. Например, вводится следующий «обобщенный», «глобальный», «сводный» и т.п. критерий:

$$J(x,\alpha) = \langle f(x),\alpha \rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x), \tag{5.5.1}$$

где $\alpha=(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ – вектор неотрицательных весовых коэффициентов, удовлетворяющих условию

$\sum \alpha_i = 1$.

Далее, поступающая от пользователя ординальная информация вида

$f_j \succ f_k$ или $f_\ell \sim f_p$

интерпретируется с помощью соответствующих неравенств:

$$\alpha_j \geq \alpha_k \quad \text{или} \quad \alpha_\ell = \alpha_p. \qquad (5.5.2)$$

В результате исходное множество весовых коэффициентов

$A = \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)|\ \alpha_i \geq 0,\ \sum \alpha_i = 1\}$

сужается до некоторого подмножества $\overline{A} \subset A$. Для любого $\alpha \in \overline{A}$ выполняются все неравенства (5.5.2). В частном случае может быть $\overline{A} = A$.

Считаем, что α – случайный вектор с равномерной плотностью распределения во множестве $\overline{A}$. Тогда значение $J(x,\alpha)$ для любого фиксированного x также будет случайной величиной. Оптимальное значение x^* предлагается выбирать из условия

$$x^* = \arg\max_x M\{J(x,\alpha)\}, \qquad (5.5.3)$$

где $M\ \{\cdot\}$ – знак математического ожидания.

Описание основной идеи закончено. Дадим некоторые комментарии.

Если используется линейная свертка (5.5.1), то

$M\ \{J\ (x, \alpha)\} = < f\,(x), M\ \{\alpha\} >$

и задача сводится к определению математических ожиданий весовых коэффициентов, одних и тех же для любого x. Полученные математические ожидания $M\{\alpha_i\}$ будут играть роль весовых коэффициентов в стандартном методе линейной свертки (см. разд. 2.3.) со всеми вытекающими особенностями. В частности, при невыпуклой структуре множества f(D) заведомо (независимо от ординальной информации пользователя) выпадают из рассмотрения эффективные решения, лежащие на невыпуклых участках границы. Последнее замечание определяет существенный и определяющий недостаток рассмотренного подхода. Однако, если f (D) – выпуклое множество, то отмеченных трудностей не возникает.

Пример. Рассмотрим многокритериальную задачу выбора (5.4.1) с m = 2. Пусть множество достижимости f (D) невыпукло и представлено на рис. 5.5.1.

Множество Парето в пространстве оценок, очевидно, совпадает с отрезком границы [a, c]. При условии «одинаковой важности» критериев f_1, f_2 пользователь в качестве окончательного решения, вполне возможно, выбрал бы точку «b», где $f_1 = f_2$. Однако, как следует из рассмотрения в разд. 2.3., при любых наборах весовых коэффициентов α с помощью конструкции (5.5.1.) могут быть получены только точки «a» и «c». Точка «b» не будет решением ни при каких видах ординальной информации пользователя.

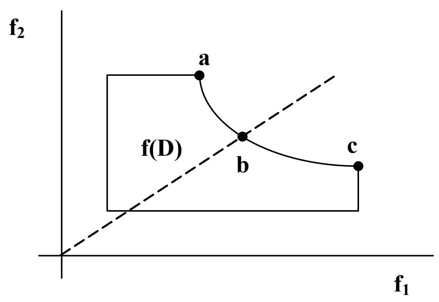


Рисунок 5.5.1.

Основная проблема при численной реализации данного метода заключается в организации процедуры «вбрасывания» заданного количества
m-мерных случайных точек в построенную, обычно достаточно сложную, область $\overline{A}$. В простейших случаях результат может быть получен аналитически.

Пример. Пусть решается многокритериальная задача (5.4.1.) с m = 2 и пусть из ординальной информации,

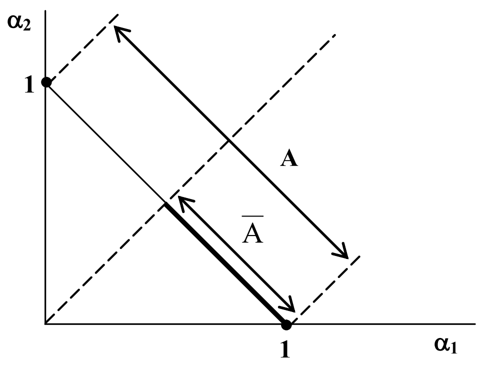


Рисунок 5.5.2.

заданной пользователем, получим $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Тогда множества A и $\overline{A}$ могут быть представлены с помощью рис. 5.5.2.

В данном случае, очевидно,

$$M\{\alpha_1\} = 0.75; \; M\{\alpha_2\} = 0.25.$$

(Это координаты середины отрезка $\overline{A}$).

Таким образом, мы имеем более чем однозначную интерпретацию достаточно слабого утверждения пользователя о том, что $\alpha_1 > \alpha_2$. В этом также заключается определенная особенность метода: он, может быть, излишне категоричен.

В общем случае произвольной структуры множества f (D), когда его выпуклость не может быть гарантирована, целесообразно в соответствии с рекомендациями разд. 2.3. использовать метод лексикографической оптимизации:

$$J(x,\alpha) = \left\{ \min_i \alpha_i f_i(x), \sum_{i=1}^{m} f_i(x) \right\} \to \max_{x \in D} \qquad (5.5.4)$$

или

$$J(x,\alpha) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) \to \max_{x \in X(\alpha)},$$

$$X(\alpha) = \operatorname{Arg}\max_{x \in D} \min_i \alpha_i f_i(x).$$

При этом оптимальная точка x* также находится согласно выражению (5.5.3).

Простейшая прямая реализация изложенного метода на основе свертки (5.5.4) состоит в следующем. Пусть множество D – конечно. Для каждого $x \in D$ генерируется последовательность $\alpha^1, ..., \alpha^N$ векторов $\alpha \in \overline{A}$ в соответствии с равномерной плотностью распределения вероятностей. Для каждого α^k из этой последовательности вычисляется значение $J(x, \alpha^k)$ по формуле (5.5.4). Далее вычисляется среднее значение J как оценка для

$M\{J(x, \alpha)\}$ при данном x. В соответствии с полученными значениями $M\{J(x, \alpha)\}$ для всех x выбирается наилучшая точка x* согласно представлению (5.5.3).

6. КОММЕНТАРИЙ

Мы изложили некоторые из важнейших проблем, входящих в теорию принятия решений. Основное содержание этой дисциплины схематично представляется в следующем виде:

1) математическое описание – создание модели ситуации выбора;

2) анализ неопределенностей, формализация понятия цели, формирование критериев и целевых функций;

3) решение возникающих оптимизационных и других математических задач.

Приведенная последовательность действий достаточно условна, так как указанные разделы тесно переплетаются в процессе решения конкретной практической задачи. Однако основные моменты исследования здесь отражены.

Построение модели ситуации выбора, – а с него начинается любое исследование – требует глубокого понимания специфики процесса. Мы по существу рассмотрели два языка, на которых может быть сформулирована проблема ПР: язык бинарных отношений и критериальный язык описания выбора. Язык бинарных отношений является более общим по сравнению с критериальным языком, поскольку не требует численной оценки качества каждой отдельно взятой альтернативы. Напротив, критериальный язык применяется, если сравнение альтернатив сводится к сравнению соответствующих им чисел. При этом мы допускали многокритериальность, т.е. возможность оценки альтернативы с помощью не одного числа, а нескольких.

Еще более общим языком, который нами ранее не рассматривался, является язык функций выбора. Пусть U – фиксированная совокупность непустых подмножеств множества альтернатив A. Функцией выбора (на U) называется отображение C, сопоставляющее всякому множеству $B \in U$ подмножество $C\ (B) \subseteq B$ (т.е. подмножество «выбранных», «наиболее предпочтительных» альтернатив). В частном случае, если задано отношение предпочтения R, функцию выбора можно определить равенством $C\ (B) = Max_R\ B$. В этом случае множество C (B) совпадает с ядром – множеством максимальных элементов из B по отношению R. В результате мы приходим к уже изученной постановке задаче ПР.

Следовательно, задачи, сформулированные на языке бинарных отношений, описываются также с помощью функций выбора. Обратный вопрос о возможности введения бинарного отношения предпочтения по заданной функции выбора оказывается значительно более тонким.

Учитывая, что в настоящее время в приложениях наиболее часто применяется критериальный язык описания предпочтений, можно считать, что следующая важнейшая группа проблем – это формирование критериев и целевых функций (функционалов). Эти проблемы, как мы видели, решаются в тесной связи с методами преодоления различных видов неопределенностей на основе тех или иных гипотез.

Сделаем несколько общих, но важных для практики замечаний относительно применения оптимизационного подхода в теории ПР.

Критерий оптимальности – это, вообще говоря, некоторое правило, позволяющее отличать «оптимальные» решения от «неоптимальных». Простейший критерий связан, например, с заданием на множестве альтернатив некоторого функционала $J : A \to E$ и с утверждением, что оптимальными признаются такие альтернативы из множества А, которые доставляют максимум функционалу J на А.

Функционал J при этом называется целевым функционалом (или целевой функцией). Довольно часто допускается вольность речи и сам функционал J называется критерием. При этом обычно говорят о задаче максимизации (или минимизации) «критерия J».

Важно также отличать цель принятия решений от отражающего эту цель критерия (или критериев). Приведем пример. Общую цель службы скорой медицинской помощи можно сформулировать как «доставка больного в больницу в наилучшем состоянии, возможном при данных обстоятельствах». Эту цель достаточно трудно формализовать. Поэтому при анализе систем скорой помощи используется критерий «время реагирования» (в технических системах – это «время отклика»). Этот критерий определяется как время, истекшее между получением вызова скорой помощи и прибытием машины к больному. Другой критерий, используемый при исследовании эффективности работы службы скорой помощи, – это «время доставки» – время между получением вызова и прибытием больного в больницу. Смысл введения этих критериев состоит в предположении, что более краткие времена «реагирования» и «доставки» способствуют достижению общей цели системы скорой помощи, хотя полностью ее и не отражают (успех дела, в частности, зависит от квалификации персонала, его умения оказать эффективную немедленную помощь и т.д.).

Изложенная ситуация оказывается достаточно общей: критерии и отвечающие им целевые функции характеризуют цель лишь косвенно, иногда лучше, иногда хуже, но всегда приближенно. В этой связи обычно говорят о критериях-заместителях, т.е. таких критериях, которые лишь косвенно характеризуют степень достижения связанной с ними цели. В сущности, все критерии являются «заместителями», так как ничто не поддается абсолютно точному измерению.

Все предыдущее изложение, по-видимому, в достаточной степени прояснило тот факт, что среди используемых в теории ПР математических методов особую роль играют методы решения оптимизационных задач. Они составляют фундамент системы математического обеспечения проблем принятия решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Петровский А.Б. Теория принятия решений. - М.: Изд. Центр «Академия», 2009.
2. Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. Исследование операций. - М.: Изд. Центр «Академия», 2008.
3. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.