Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ФИЛИПОВСКИЙ ВЛАДИМИР МИХАЙЛОВИЧ

Дискретные системы управления

Методические указания
к практическим занятиям и лабораторным работам

Санкт-Петербург
2022

УДК 681.5.01

Филиповский В.М. Дискретные системы управления. Методические указания к практическим занятиям и лабораторным работам: - СПб.: СПбПУ, 2022. - 61 с.

Пособие соответствует ФГОС ВО по направлению подготовки 27.03.04 «Управление в технических системах» (уровень бакалавриата).

В пособии представлены основные формулы и соотношения, характеризующие математические модели дискретных систем автоматического управления, описаны критерии устойчивости подобных систем, способы получения переходных процессов в дискретных системах.

В данном пособии содержится большое количество задач, позволяющих студентам изучить такие основополагающие понятия, как решетчатые функции, передаточные функции дискретных систем, исследовать поведение этих систем как в пространстве z- и w-изображений, так и во временном пространстве.

Значительное внимание уделено различным методикам анализа и синтеза дискретных систем.

Приведены методические указания, способствующие рациональному решению предложенных задач и лучшему пониманию изучаемых разделов.

В примерах выполнения отдельных заданий показано использование необходимых стандартных функций MathCad и MatLab.

Настоящее пособие предназначено студентам Высшей Школы Киберфизических систем и Управления (программы «Управление в технических системах» и «Дискретные системы») в качестве пособия по освоению курса «Дискретные системы автоматического управления».

Ключевые слова: Дискретная система автоматического управления, математическая модель, решетчатая функция, разности, разностные уравнения, z-преобразование, w-преобразование, передаточные функции, устойчивость дискретной системы, критерии устойчивости Джури и Шура-Кона, критический коэффициент усиления, переходный процесс в дискретной системе, синтез финитного регулятора, переоборудование, полиномиальный синтез, прямой программный синтез дискретной системы.

Содержание

Введение

Дискретная система [discrete system] —кибернетическая система, все элементы которой, а также связи между ними (то есть обращающаяся в системе информация) имеют дискретный характер.

Дискретная система управления - система управления, в которой присутствует хотя бы один элемент, производящий квантование сигналов.

Дискретная (импульсная) система управления, - система управления, в которой между двумя или больше её элементами информация передаётся последовательностью импульсных сигналов. Применяется, например, в телемеханических системах, в станках с программным управлением и других. Сфера применения дискретных систем непрерывно расширяется в связи с использованием микропроцессорной техники и управляющих ЭВМ.

Приведенные определения дискретных систем, с учетом отмеченной их особенности: использование микропроцессорной техники при построении этих систем и квантование сигналов в них, - позволяют судить о широте распространения подобных кибернетических систем.

На практике использование высокочастотных микропроцессоров для управления реальными динамическими объектами позволяет такие системы управления рассматривать как непрерывные, применяя для анализа и их синтеза методы, разработанные для непрерывных систем. Но в случае быстродействующих систем автоматического управления разработчики вынуждены учитывать основную особенность дискретных систем - импульсный характер сигналов, протекающих в этих системах. Следовательно, возникает необходимость применения математического аппарата, описывающего поведение (анализ) дискретных (импульсных) систем управления.

В настоящем пособии рассматриваются математические модели дискретных сигналов и систем, методы анализа их устойчивости, исследование поведения импульсных систем управления во временной области, а также различные методики синтеза цифровых регуляторов.

Все рассмотренные разделы теории дискретных систем автоматического управления сопровождаются практическими задачами с методическими указаниями их правильного решения и контрольными вопросами, позволяющими лучше понять поведение и особенности данных систем.

При выполнении заданий студенты имеют возможность на практике понять и изучить сигналы (решетчатые функции), имеющие место в дискретных системах, дискретные передаточные функции, описывающие их поведение, разными способами выполнить синтез дискретного регулятора, получить навыки в построении моделей и исследовании подобных систем с применением специальных программных пакетов, таких как: MathCad, MatLab и других.

1. Дискретные сигналы. Решетчатые функции. Разности

Определение решетчатой функции

Решётчатой называется функция, полученная из непрерывной функции путём замены непрерывного аргумента дискретным. Решётчатая функция равна значению исходной непрерывной функции в момент квантования, а в остальное время решётчатая функция не существует.

Операция замены непрерывной функции решётчатой:

$$f[n \cdot T] = f(t)\big|_{t=n\cdot T}\,;\; n = 0,\,1,\,2,\ldots \qquad (1.1)$$

где $f(t)$ – непрерывная функция;

T – интервал (период) квантования (дискретизации) аргумента.

Различают размерные и безразмерные решётчатые функции.

Размерные решётчатые функции $f[n \cdot T]$ – функции аргумента $n \cdot T$, измеряемого в секундах.

Безразмерные решётчатые функции $f[n]$ – функции безразмерного аргумента n при фиксированном значении интервала (периода) квантования T.

Непрерывные функции, совпадающие с заданными дискретами решётчатой функции, называются огибающими решётчатой функции.

Кроме функций вида (1.1), называемых несмещёнными, различают также смещённые решётчатые функции, значения которых определены для смещённых моментов времени:

$$t = n \cdot T + \Delta T = (n + \varepsilon) \cdot T\,;$$

где $\varepsilon = \dfrac{\Delta T}{T}$ и $|\Delta T| < T$.

Образование смещённой решётчатой функции:

$$f[n \cdot T, \varepsilon] = f(t)\big|_{t=(n+\varepsilon)\cdot T}\,. \qquad (1.2)$$

Математики вместо формулы (1. 1) для определения значения решетчатой функции используют выражение:

$$\text{f [nT] = f(t) }\delta\text{(t - nT),} \qquad (1.3)$$

а для всей последовательности импульсов:

$$f^*(t) = \sum_{n=o}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - nT) = \sum_{n=o}^{\infty} f(nT) \cdot \delta(t - nT). \qquad (1.4)$$

Важное замечание: В дискретной системе выходные сигналы ее непрерывной части могут быть представлены как непрерывными зависимостями, так и решетчатыми функциями. Входные и выходные переменные дискретных (цифровых) блоков системы определены лишь в дискретные моменты времени, поэтому могут быть представлены только решетчатыми функциями! Исключением является выходной сигнал экстраполятора.

Разности решётчатых функций

Аналогом производных непрерывной функции для решётчатой функции являются разности. Различают прямые и обратные, разделённые и неразделённые разности. Разности бывают, равно как и производные, первого, второго и так далее порядков, то есть первые, вторые и тому подобные разности.

Производная непрерывной функции ***f(t)*** определяется как:

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \quad (1.5)$$

Если принять: $t = nT, \quad \Delta t = T$, то можно получить:

$$\lim_{T \to 0} \frac{f[(n+1)T] - f[nT]}{T} = \lim_{T \to 0} \frac{\Delta f[nT]}{T} = f'(t) = \frac{df(t)}{dt}.$$

Прямые разности неудобны тем, что для их вычисления в точке "**n**" необходимо знать значение исходной функции в следующей, "**(n+1)-**й" точке.

Поэтому чаще используют ***обратные*** разности, обозначаемые символом **∇** ("набла")

1. Разделённые разности:

1.1. Прямая разделённая разность:

$$\Delta f[n \cdot T] = \frac{f[(n+1) \cdot T] - f[n \cdot T]}{T}. \quad (1.6)$$

1.2. Обратная разделённая разность:

$$\nabla f[n \cdot T] = \frac{f[n \cdot T] - f[(n-1) \cdot T]}{T}. \quad (1.7)$$

2. Неразделённые разности:

2.1. Прямая неразделённая разность:

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n]. \quad (1.8)$$

2.2. Обратная неразделённая разность:

$$\nabla f[n] = f[n] - f[n-1]. \quad (1.9)$$

Задание №1

1. Для непрерывной функции $f(t)$ на отрезке [0, T] найти значения смещенных и несмещенных решетчатых функций при заданных T_1, T_2 и T_3 - интервалах квантования: $f_1[n \cdot T_1, 0]$, $f_2[n \cdot T_2, 0]$ и $f_3[n \cdot T_3, 0]$ и $f_4[n \cdot T_1, \varepsilon]$, $f_5[n \cdot T_2, \varepsilon]$ и $f_6[n \cdot T_3, \varepsilon]$.
2. Определить производную временной функции $f(t)$.
3. Для интервала квантования T_2 вычислить прямые и обратные разделенные и неразделенные разности несмещенной решетчатой функции.
4. Построить все функции п.1 (для каждого T на своем графике).
5. Построить производную и разделенные разности, полученные в п.2. и п.3.
6. Сравнить по графикам прямую и обратную разделенные разности между собой и производной $f(t)$ (п.3.)
7. Сравнить результаты и сделать соответствующие выводы. По неразделенной разности определить для каждой решетчатой функции величину относительной погрешности представления $f(t)$.

Варианты заданий

Задача	Функция $f(t)$
1.1	$\varphi - \beta \cdot e^{-\gamma t} - 0{,}5 \cdot \alpha \cdot \sin(\omega \cdot t)$
1.2	$\alpha - \beta \cdot t - 0{,}5 \cdot \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$
1.3	$\alpha \cdot t + \beta \cdot e^{-\gamma t} + \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$

1.4	$\varphi - \beta \cdot e^{-\gamma t} - 0{,}5 \cdot \alpha \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$
1.5	$\alpha + \beta \cdot t^2 + 0{,}5 \cdot \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$

α - номер варианта, задаваемого преподавателем.

$\beta = 7 - \alpha$, $\omega = 2\pi \cdot \alpha$, $\varphi = {}^{2\pi}\!/_{\alpha}$, $\gamma = {}^{\alpha}\!/_{(\alpha+5)}$, $T = \alpha^{-1}\ c$, $T_1 = \alpha^{-1}/5\ c$, $T_2 = \alpha^{-1}/25\ c$; $T_3 = \alpha^{-1}/100\ c$, $\varepsilon = 0.05 \cdot \alpha + 0.2$.

Методические указания

1. Полученные табличные значения решетчатых функций должны обязательно содержать столбцы дискретного и соответствующего непрерывного аргументов.
2. При построении графиков располагайте их на всей ширине листа, выполнив удобное масштабирование по обеим осям.
3. Дискретная и непрерывная модели – это модели одного объекта (одной функции), значит, общность свойств должна проявляться (следите за тем, чтоб графики были "похожи друг на друга").
4. Оси на графиках необходимо подписывать.
5. На одном рисунке располагать графики двух-трех сравниваемых функций.
6. При использовании машинных средств для выполнения вычислений удостоверьтесь, что вычисления выполняются правильно. Для этого выполните несколько вычислений вручную.

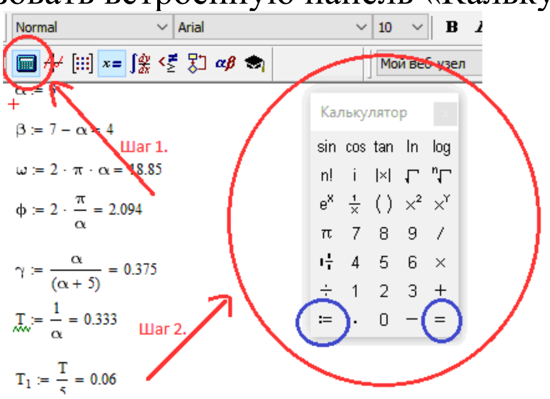
Контрольные вопросы

1. Что такое решетчатая функция? Как она получается?
2. В чем отличие смещенных от несмещенных решетчатых функций?
3. Как правильно построить смещенную решетчатую функцию?
4. Почему разности решетчатых функций - аналог производных непрерывной функции?
5. Какая из разделенных разностей ближе к производной и при каких условиях?
6. Почему удобнее (выгоднее) использовать обратную разность?

Пример выполнения задания

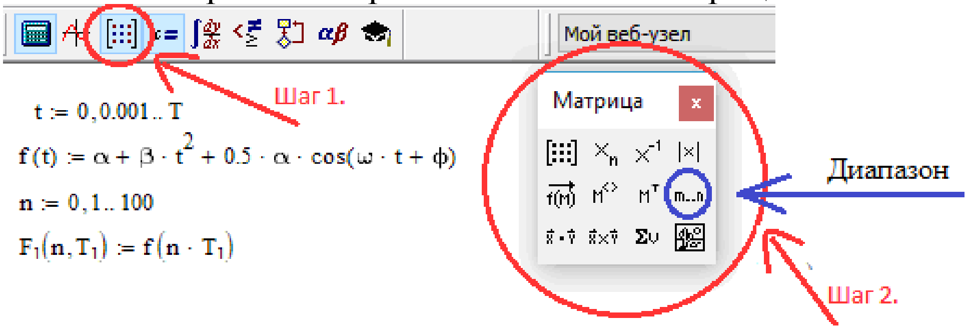
Дано: непрерывная функция: $\alpha + \beta \cdot t^2 + 0{,}5 \cdot \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$.

В среде Mathcad записываются все формулы согласно заданию. Для записи формул можно использовать встроенную панель «Калькулятор»:



Задаются параметры согласно номеру варианта. Для этого на вызванной панели инструментов «Калькулятор» используются два знака: «Присвоение», которое обозначается как «:=», и «Рассчитать численно», которое обозначается как «=».

Для определения диапазона изменяемой переменной в среде MathCad на панели инструментов выбирается встроенная панель «Матрица»:



и в вызванной панели «Матрица» нажимают на значок «Переменная диапазон» и задают интервал времени от 0 до T с нужным шагом.

Далее, также используя панель «Калькулятор», задают функцию, согласно варианту.

1. Для получения значений решетчатых функций определяются требуемые диапазоны изменения n и решетчатые функции (как показано на рис. выше).

Несмещенные решетчатые функции являются функциями от двух аргументов, поэтому они инициализированы в виде: F(n,T), где T- интервал квантования. Для индексирования функции следует нажать на клавишу «ю» при английской раскладке клавиатуры.

Для получения значений несмещенных решетчатых функций в среде MathCad после записи несмещенных решетчатых функций с помощью встроенной панели «Калькулятор» выбирается значок «=», и среда автоматически выводит рассчитанные значения для разных n:

$n =$	$F_1(n,T_1) =$	$F_2(n,T_2) =$	$F_3(n,T_3) =$
0	2.25	2.25	2.25
1	1.551	1.951	2.17
2	2.914	1.72	2.093

Примечание: Для каждой из решетчатых функций следует определить свое n, проиндексировав его, и задав "свой" диапазон его изменения.

Проверка значений несмещенных решетчатых функций выполнена в среде Excel:

n	nT1	f[nT1]	nT2	f[nT2]	nT3	f[nT3]
0	0,000	2,250	0,000	2,250	0,000	2,250
1	0,067	1,553	0,013	1,958	0,003	2,170
2	0,134	2,934	0,026	1,730	0,007	2,093
3	0,201	4,543	0,039	1,579	0,010	2,020
4	0,268	4,263	0,052	1,514	0,013	1,951

2. Находим значения смещенных решетчатых функций.

Смещенный момент времени определяется как:

$$t = nT + \Delta T = (n + \varepsilon)T, \text{где } \varepsilon = \frac{\Delta T}{T}.$$

В среде MathCad формулы смещенных решетчатых функций выглядят следующим образом:

$$F_4(n, T_1, \varepsilon) := f[(n+\varepsilon)\cdot T_1]$$

$$F_5(n, T_2, \varepsilon) := f[(n+\varepsilon)\cdot T_2]$$

$$F_6(n, T_3, \varepsilon) := f[(n+\varepsilon)\cdot T_3]$$

а полученные значения будут представлены в виде таблицы:

n =	$F_4(n, T_1, \varepsilon) =$	$F_5(n, T_2, \varepsilon) =$	$F_6(n, T_3, \varepsilon) =$
0	1.77	2.139	2.222
1	1.838	1.862	2.143
2	3.591	1.658	2.067

Примечание: Здесь также для каждой из функций следует определить свое n, проиндексировав его и задав диапазон изменения.

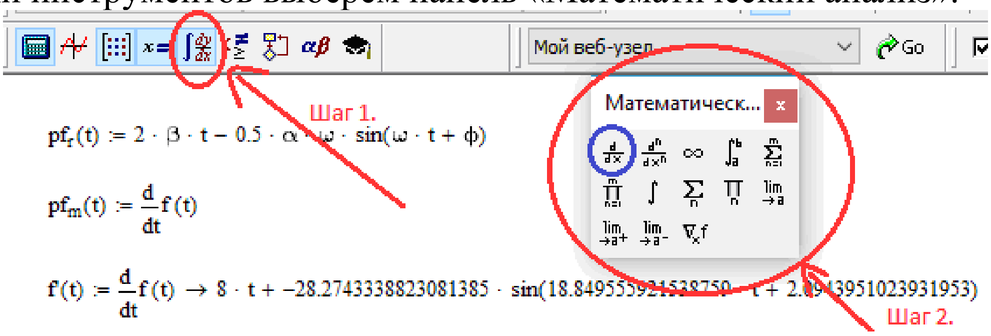
Проверить полученные значения смещенных решетчатых функций можно также в среде Excel:

n	(n+e)T1	f[nT1, ε]	(n+e)T2	f[nT2, ε]	(n+e)T3	f[nT3, ε]
0	0,023	1,769	0,005	2,142	0,001	2,222
1	0,090	1,846	0,018	1,870	0,004	2,143
2	0,157	3,613	0,031	1,667	0,008	2,067

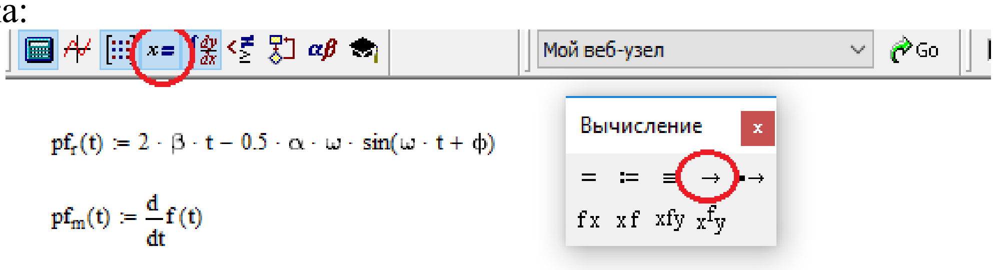
3. Вычисление производной и разностей для исходной функции f(t).

Для дифференцирования в среде MathCad выполняются следующие действия:

На панели инструментов выберем панель «Математический анализ».



На этой панели выбирается значок «Производная». На рабочем листе после оператора производной вписывается вычисляемое выражение. Для вывода полученного выражения производной функции используется встроенная панель «Вычисление» и значок «Вычислить аналитически», который выглядит как стрелочка:



В результате получают выражение для производной:

$$f'(t) := \frac{d}{dt}f(t) \rightarrow 8\cdot t + -28.2743338823081385\cdot\sin(18.849555921538759\cdot t + 2.0943951023931953)$$

Для проверки следует вручную продифференцировать исходную функцию. Результаты должны совпасть.

Вычисление значений производной и разностей для исходной функции f(t) выполняется в том же порядке, что и получение решетчатых функций.

Затем в среде MathCad записываются формулы прямой и обратной разделенных и неразделенных разностей:

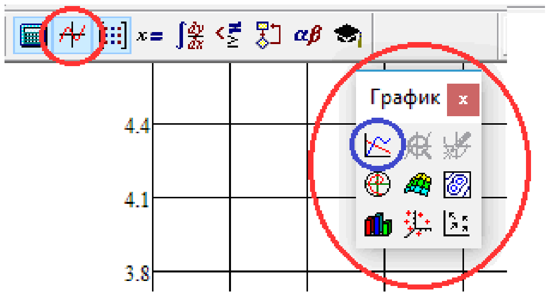
$T_2 = 0.013$

$$\Delta f(n, T_2) := \frac{(F_2(n+1, T_2) - F_2(n, T_2))}{T_2} \qquad df(n, T_2) := \frac{(F_2(n, T_2) - F_2(n-1, T_2))}{T_2}$$

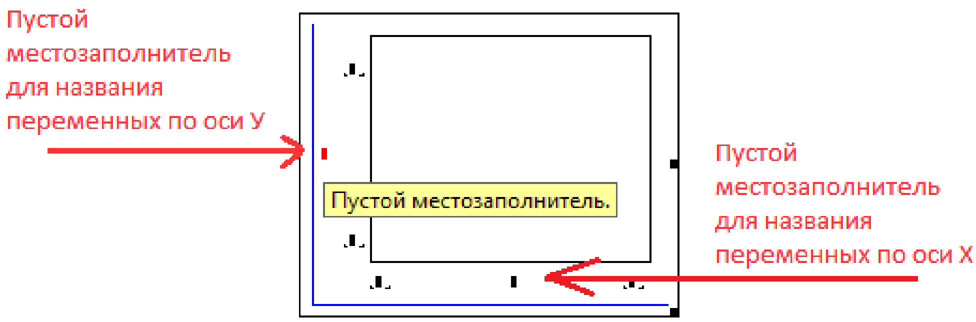
$$\Delta F(n) := F_2(n+1, T_2) - F_2(n, T_2) \qquad dF(n) := F_2(n, T_2) - F_2(n-1, T_2)$$

И получаются соответствующие таблицы значений.
Рекомендуется проверить значения разностей в среде Excel.

4. Построение графиков полученных зависимостей.
Для создания графиков на панели инструментов используется панель «График»:



Значок «График Х-У» из панели «График» вставляется на пустое место в файле MathCad.
На появившемся пустом графике в пустые местозаполнители X и Y записываются названия переменных:



При вторичном нажатии на график открывается окно свойств, где можно изменять свойства этого графика, включая цвет кривых, толщину и прочее...
Чтобы отобразить несколько кривых на одном графике нужно после названия каждой переменной в местозаполнителе ставить запятую.
Можно построить графики и в среде Excel.

Рекомендация. Задание лучше полностью выполнить в среде Excel.

2. *Z*-преобразование сигнала

Краткие теоретические сведения

При исследовании импульсных (дискретных) систем большое распространение получило *Z*-преобразование, которое связано с дискретным преобразованием Лапласа (*S*-преобразованием Лапласа решетчатой функции (1.4)):

$$X^*(s) = \int_0^\infty x^*(t)\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty x(t)\cdot \delta(t-nT)\cdot e^{-st}dt =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty x(t)\cdot \delta(t-nT)\cdot e^{-st}dt = \sum_{n=0}^\infty x(nT) e^{-sTn}. \qquad (2.1)$$

На практике под *z*-преобразованием понимают изображение решётчатой функции, полученное по следующим формулам:

1. Для несмещённой функции:

$$X(z,0) = X(z) = \sum_{n=0}^\infty x[n]\cdot z^{-n}. \qquad (2.2)$$

2. Для смещённой функции:

$$X(z,\varepsilon) = \sum_{n=0}^\infty x[n,\varepsilon]\cdot z^{-n}. \qquad (2.3)$$

где $z = e^{s\cdot T}$; $s = \alpha + j\cdot\omega$ – оператор Лапласа; Т – период квантования.

Поскольку $e^{sT} = e^{\left(s + j\frac{2k\pi}{T}\right)T} = z$, то все бесконечные периодические повторения полюсов (и нулей) образов сигналов (и, соответственно, передаточных функций) на плоскости ***S*** дискретного преобразования Лапласа (см. Рис. 2.1.) преобразуются в одну точку плоскости ***Z*.**

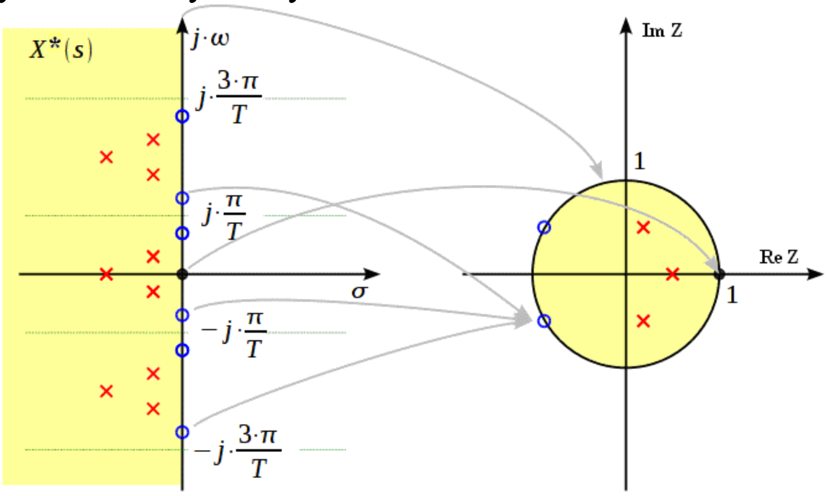


Рис. 2.1. Преобразование комплексной ***S***-плоскости в комплексную ***Z***-плоскость

Основным способом получения *z*-преобразования дискретного сигнала из известного s-преобразования Лапласа соответствующего непрерывного сигнала является методика, основанная на использовании **вычетов**.

Пусть задано изображение некоторого непрерывного сигнала в следующем виде:

$$X(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_0\cdot s^m+b_1\cdot s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}\cdot s+b_m}{a_0\cdot s^n+a_1\cdot s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\cdot s+a_n}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{m}b_i\cdot s^{m-j}}{\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\cdot s^{n-i}}. \qquad (2.4)$$

Тогда z-преобразование соответствующей решетчатой функции будет определено по формуле:

$$X(z,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\operatorname{Re}s(X(s),s_i)\cdot e^{\varepsilon\cdot s_i\cdot T}}{1-z^{-1}e^{s_i\cdot T}}; \qquad (2.5)$$

где $\operatorname{Re}s(X(s),s_i)$ – вычет функции $X(s)$ в точке s_i;

ε – смещение решётчатой функции;

$s_i,\ i=\overline{1,n}$ – корни полинома знаменателя $A(s)$ (полюса $X(s)$);

T – период квантования.

Вычеты можно определять двумя способами:

1. С использованием пределов:

$$\operatorname{Re}s(X(s),s_i)=\lim_{s\to s_i}(s-s_i)\cdot X(s). \qquad (2.6)$$

2. Через производную:

$$\operatorname{Re}s(X(s),s_i)=\frac{B(s_i)}{A'(s_i)}; \qquad (2.7)$$

где $A'(s_i)=\left.\dfrac{dA(s)}{ds}\right|_{s=s_i}$ – производная знаменателя передаточной функции.

Подставляя полученные значения вычетов в формулу (2.5), можно получить z-преобразование дискретного сигнала.

Для случая кратных корней в знаменателе X(s) z-преобразование находится по формуле:

$$\mathrm{X}(\mathrm{z},\varepsilon)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{X}(\mathrm{s})\,e^{\varepsilon sT}}{1-z^{-1}e^{sT}},\mathrm{s_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(m_i-1)!}\cdot\lim_{s\to s_i}\left(\frac{\partial^{m_i-1}}{\partial s^{m_i-1}}\left(\frac{\mathrm{X}(\mathrm{s})(s-s_i)^{m_i}e^{\varepsilon sT}}{1-z^{-1}e^{sT}}\right)\right).$$

Для получения временной (решетчатой) функции $x[(n+\varepsilon)T]$ (оригинала X(z,ε)) выполняется обратное **Z**-преобразование:

$$x[(n+\varepsilon)T]=Z^{-1}\{X(z,\varepsilon)\}=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z,\varepsilon)z^{n-1}dz,$$

где C – контур, охватывающий область сходимости $X(z,\varepsilon)z^{n-1}$. Контур должен содержать все особые точки (полюса, вычеты) подинтегральной функции.

Обычно интеграл по контуру вычисляется с помощью вычетов. Тогда

$$x[n,\varepsilon]=\sum_{i=1}^{M}\mathrm{Res}\left(X(z,\varepsilon)z^{n-1},z_i\right), \qquad (2.8)$$

где z_i - полюсы функции $F(z)=X(z,\varepsilon)z^{n-1}$.

Для простого полюса вычет находится по формуле:

$$\mathrm{Res}(F(z),z_i)=\mathrm{Res}\left(X(z,\varepsilon)z^{n-1},z_i\right)=(z-z_i)F(z)\big|_{z=z_i}=\lim_{z\to z_i}(z-z_i)z^{n-1}X(z,\varepsilon),$$

а в случае корня кратности m:

$$\operatorname{Res}\left(F(z), z_i\right) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_i} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[\left(z - z_i\right)^m F(z) \right].$$

Дополнение. Для получения оригинала непрерывной функции пользуются формулами:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty} F(s) e^{st} \cdot ds. \qquad \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(s) e^{st} \cdot ds = \sum_{k=1}^{n} res\left[F(s) e^{st}, s_k \right].$$

Вычет подинтегральной функции в полюсе s_1 порядка m может быть определен как:

$$res_1 = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[F(s) e^{st} (s - s_1)^m \right] \Bigg|_{s=s_1}.$$

Таблица некоторых z-преобразований

Таблица 1

G(s)	*g(t)*	*G(z)*
$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{\left(z-e^{-aT}\right)^2}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{z\left(1-e^{-aT}\right)}{(z-1)\left(z-e^{-aT}\right)}$
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$t-\frac{1-e^{-at}}{a}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z\left(1-e^{-aT}\right)}{a(z-1)\left(z-e^{-aT}\right)}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$Sin(\omega t)$	$\frac{z \cdot \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cdot \cos(\omega T) + 1}$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$Cos(\omega t)$	$\frac{z \cdot (z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cdot \cos(\omega T) + 1}$

Задание №2

1. Задано изображение непрерывного сигнала по Лапласу *X(s)*.
2. Определить *z*-преобразование решетчатой функции этого сигнала *X(z)* с помощью вычетов:
   а) без смещения; б) со смещением: $\varepsilon = 0{,}05 \cdot \alpha$.
3. Сравнить полученный результат с табличными значениями (подставив численные значения для своего варианта).
4. Найти оригиналы непрерывного (п.1.) и дискретного (смещенного и несмещенного) (п.2.) сигналов, выполнив обратные преобразования.

5. Построить графики всех сигналов.
6. Исследовать влияние интервала квантования на вид решетчатой функции.
7. Сделать соответствующие выводы.

Варианты заданий

Задача	Изображение сигнала		Задача	Изображение сигнала
2.1	$X(s)=\dfrac{1}{1+\tau\cdot s}$		2.5	$X(s)=\dfrac{1}{s^2\cdot(1+\tau\cdot s)}$
2.2	$X(s)=\dfrac{1}{s\cdot(1+\tau\cdot s)}$		2.6	$X(s)=\dfrac{1}{(1+\tau\cdot s)(1+5\cdot\tau\cdot s)}$
2.3	$X(s)=\dfrac{1}{(1+\tau\cdot s)(1+10\cdot\tau\cdot s)}$		2.7	$X(s)=\dfrac{1}{s\cdot(1+5\cdot\tau\cdot s)}$
2.4	$X(s)=\dfrac{1}{(1+\tau\cdot s)^2}$			

$\tau=0.01\cdot\alpha$, α - номер варианта, задаваемого преподавателем.

Методические указания

1. Определение *z*-преобразования дискретного сигнала проводить с помощью вычетов (вручную), встроенные функции MathCad использовать для сравнения результатов. MathCad "складывает" дроби (приводит их к общему знаменателю) с ошибками.
2. Для устранения ошибки "сложения" дробей в среде MathCad рекомендуется отдельно вычислять дополнительные множители для каждой дроби, выполнять умножения этих множителей на числители дробей и сложение результатов.
3. Использование MatLab позволяет выполнить *z*-преобразование практически без ошибок.
4. Получение оригиналов непрерывного сигнала и решетчатых функций выполнить с помощью вычетов. Сравнить результаты с табличными.
5. Для сравнения, можно получить оригиналы в среде MathCad с помощью встроенных функций `Forig(t)` и `Fdorig(n)`.
6. При построении графиков: по оси абсцисс откладывать значение от нуля, оси подписывать, размерности величин обозначать.
7. При построении графиков дискретных сигналов со смещением и без него следить за их совпадением (близостью друг к другу).
8. Графики непрерывного сигнала и дискретного (решетчатые функции) должны совпадать при одинаковых значениях аргумента.
9. Интервал квантования для большей наглядности менять в 10 и более раз.
10. Для большей достоверности получаемых результатов правильность вычислений в MathCad можно также проверить в MatLab (некоторые функции его работают более корректно). Если есть возможность, - пользоваться иными ресурсами.
11. Проверку правильности получения изображений можно выполнить в MatLab, используя функции получения импульсной переходной характеристики, и Simulink, задавшись звеном с передаточной функцией, равной изображению сигнала, с подачей на его вход δ(t).

Контрольные вопросы

1. Почему бесконечное число полюсов (нулей) s-преобразования по Лапласу преобразуется в одну точку на плоскости z?
2. Какой основной метод получения z-преобразования дискретного сигнала?
3. Как можно определить вычеты?
4. Как выглядит z-преобразование для $G(s) = \dfrac{1}{1+T\cdot s+T^2\cdot s^2}$?

Пример выполнения задания

Согласно заданному варианту выбирается изображение сигнала и значение α:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s\cdot(1+\tau\cdot s)} \quad \text{и} \quad \alpha = 1. \text{ Здесь } \tau = 0.01 \text{ с}, \quad \varepsilon = 0.05.$$

Находим корни полинома *A(s)* знаменателя изображения сигнала (полюса *X(s)*):
Приравняв знаменатель *A(s)* к нулю: $s\cdot(1+\tau\cdot s)=0$, получаем полюса:

$s_1 = 0$ и $s_2 = -1/\tau$, то есть $s_2 = -100$.

Вычислим вычеты с использованием пределов (1 способ) для полученных полюсов:

$$\operatorname{Re}s(X(s),0) = \lim_{s\to 0}(s-0)\cdot\frac{1}{s\cdot(1+\tau\cdot s)} = 1,$$

$$\operatorname{Re}s(X(s),-100) = \lim_{s\to -100}(s-(-100))\cdot\frac{1}{s\cdot(1+\tau\cdot s)} = -1.$$

Определив полюса и вычеты, подставляем их в формулу z-преобразования:

$$X(z,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{M}\frac{\operatorname{Re}s(X(s),s_i)\cdot e^{\varepsilon\cdot s_i\cdot T}}{1-e^{-(s-s_i)\cdot T}} = \frac{1}{1-e^{-s\cdot T}} + \frac{-1\cdot e^{-100\cdot\varepsilon T}}{1-e^{-(s+100)\cdot T}}.$$

Произведем замену: $z = e^{sT}$:

$$X(z,\varepsilon) = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{-1\cdot e^{-100\cdot\varepsilon T}}{1-z^{-1}e^{-100\cdot T}} = \frac{z}{z-1} - \frac{z\cdot e^{-100\cdot\varepsilon T}}{z-e^{-100\cdot T}}.$$

а) Найдем z-преобразование решетчатой функции без смещения:

$$X(z,0) = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{-1\cdot e^{-100\cdot 0T}}{1-z^{-1}e^{-100\cdot T}} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-100\cdot T}}.$$

Приведем к общему знаменателю:

$$X(z,0) = \frac{z^2 - z\cdot e^{-100\cdot T} - z^2 - z}{(z-1)\cdot\left(z-e^{-100\cdot T}\right)} = \frac{z\cdot\left(1-e^{-100\cdot T}\right)}{(z-1)\cdot\left(z-e^{-100\cdot T}\right)}.$$

Z-преобразование для заданного изображения *X(s)* совпало со значением из таблицы z-преобразований!

б) Найдем z-преобразование решетчатой функции со смещением ε = 0.05:

$$X(z,\,0.05) = \frac{z\cdot\left(z-e^{-100\cdot T}\right)-(z-1)\cdot z\cdot e^{-5T}}{(z-1)\cdot\left(z-e^{-100\cdot T}\right)} = \frac{z\cdot\left(z-z\cdot e^{-5T}-e^{-100\cdot T}+e^{-5T}\right)}{(z-1)\cdot\left(z-e^{-100\cdot T}\right)}.$$

Найдем оригинал дискретного сигнала, выполнив обратное преобразование по формуле:

$$x[n,\varepsilon]=Z^{-1}\{X(z,\varepsilon)\}=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z,\varepsilon)z^{n-1}dz=\sum_{i=1}^{M}\mathrm{Res}\left(X(z,\varepsilon)z^{n-1},z_i\right).$$

Здесь С – контур, охватывающий область сходимости $X(z,\varepsilon)z^{n-1}$, z_i - полюсы функции $F(z)=X(z,\varepsilon)z^{n-1}$. Контур должен содержать все особые точки (полюса, вычеты) подынтегральной функции $F(z)$.
Для простого полюса вычет находится по формуле:

$$\mathrm{Res}(F(z),z_i)=\mathrm{Res}\left(X(z,\varepsilon)z^{n-1},z_i\right)=(z-z_i)F(z)\Big|_{z=z_i}=\lim_{z\to z_i}(z-z_i)z^{n-1}X(z,\varepsilon).$$

Найдем полюсы функции:

$$F(z)=X(z,0)\cdot z^{n-1}=\frac{z\cdot\left(1-e^{-100\cdot T}\right)\cdot z^{n-1}}{(z-1)\cdot\left(z-e^{-100\cdot T}\right)}=\frac{\left(1-e^{-100\cdot T}\right)\cdot z^{n}}{(z-1)\cdot\left(z-e^{-100\cdot T}\right)}.$$

Это будут $z = 1$ и $z = e^{-100T}$.
Вычет для первого полюса:

$$\mathrm{Res}(F(z),1)=(z-1)F(z)\Big|_{z=1}=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\left(1-e^{-100\cdot T}\right)\cdot z^{n}}{(z-1)\cdot\left(z-e^{-100\cdot T}\right)}=1.$$

Вычет для второго полюса:

$$\mathrm{Res}\left(F(z),e^{-100T}\right)=\left(z-e^{-100T}\right)F(z)\Big|_{z=e^{-100T}}=\lim_{z\to e^{-100T}}\left(z-e^{-100T}\right)\frac{\left(1-e^{-100\cdot T}\right)\cdot z^{n}}{(z-1)\cdot\left(z-e^{-100\cdot T}\right)}=-e^{-100nT}.$$

Рассчитав вычеты, получим и оригинал дискретного сигнала (несмещенную решетчатую функцию):

$$x[n,0]=\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Res}\left(X(z,0)z^{n-1},z_i\right)=1-e^{-100nT}.$$

Замечание. Получение смещенной решетчатой функции выполняется аналогично (выполните это самостоятельно!).

Найдем оригинал непрерывного сигнала по его изображению $X(s)=\dfrac{1}{s\cdot(1+\tau\cdot s)}$ с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty}X(s)e^{st}\cdot ds=\sum_{k=1}^{n}res\left[X(s)e^{st},s_k\right].$$

Вычеты, как и выше, вычисляются по формуле:

$$res\left[X(s)e^{st},s_k\right]=\lim_{s\to s_k}(s-s_k)X(s)e^{st}=\lim_{s\to s_k}(s-s_k)\frac{e^{st}}{s\cdot(1+\tau\cdot s)}$$

Полюса заданного изображения непрерывного сигнала были найдены выше и составляют 0 и -100. После подстановки их получаем:

$$res\left[X(s)e^{st},0\right]=\lim_{s\to 0}(s-0)X(s)e^{st}=\lim_{s\to 0}(s-0)\frac{e^{st}}{s\cdot(1+\tau\cdot s)}=1.$$

$$res\left[X(s)e^{st},-100\right]=\lim_{s\to -100}(s-(-100))X(s)e^{st}=\lim_{s\to -100}(s+100)\frac{e^{st}}{s\cdot(1+\tau\cdot s)}=-e^{-100t}.$$

Подставим вычеты в формулу обратного преобразования Лапласа и получим оригинал: $x(t)=1-e^{-100t}$.

Далее строим графики обоих сигналов и наблюдаем их полное совпадение в общих точках. График дискретного сигнала строим, в соответствии с заданием, для трех разных Т.

Дополнительно следует получить оригинал (смещенную решетчатую функцию) для изображения $X(z, 0.05)$.

Данное задание может быть также выполнено в средах MathCad или MatLab, но с учетом методических рекомендаций, приведенных выше, а именно:
Так как MathCad "складывает" дроби (приводит их к общему знаменателю) с ошибками, то рекомендуется отдельно вычислять дополнительные множители для каждой дроби, выполнять умножения каждого из множителей на числители дробей и сложение результатов.

Если выполнять задание в среде MatLab, то ошибок с Z-преобразованием при грамотном использовании данной среды не будет.

Для выполнения Z-преобразования в этой среде удобно воспользоваться функциями: `numden, sym2poly, solve, diff, subbs, limit, simplify` и других.

В среде MatLab может быть выполнено сравнительное моделирование звеньев с передаточными функциями равными изображениям, определенными в настоящей работе, с помощью встроенных функций `impulse` и `dimpulse`.

Моделированием в среде Simulink также можно проверить правильность получения Z-изображения сигнала. Только надо подобрать звенья с такими передаточными функциями, чтоб их выходные сигналы соответствовали желаемым (проверяемым) изображениям. Например, для непрерывного сигнала передаточная функция звена определяется как: W(s) = X(s) / G(s), где X(s) - заданное изображение сигнала, G(s) - изображение сигнала, подаваемого на вход звена. Для Z-преобразования - аналогично.
Вторым способом подтвердить правильность получения Z-изображения сигнала в среде Simulink можно, задав звено с передаточной функцией, равной изображению этого сигнала (W(s) = X(s) и W(z) = X(z)), подав на вход $\delta(t)$ - импульсное воздействие. Получить данный сигнал можно путем дифференцирования единичной ступенчатой функции 1(t) с помощью, например, реального дифференцирующего звена.

3. Устойчивость дискретных систем

Под устойчивостью линейной системы, в том числе и дискретной, обычно понимают ее свойство (способность) возвращаться к первоначальному состоянию после прекращения действия внешних возмущений. В качестве эталонного воздействия, воздействующего на систему с целью исследования ее устойчивости, обычно используют функцию Дирака: $\delta(t)$.

Устойчивость является необходимым условием работоспособности любой системы управления.

Корневой критерий устойчивости линейной дискретной системы

Линейная дискретная система может быть описана разностным уравнением:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \ldots + a_n y[0] = b_0 g[n] + b_1 g[n-1] + \ldots + b_m g[n-m], \quad (3.1)$$

или соответствующим уравнением в операторной форме:

$$\left(a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}\right) y(z) = \left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}\right) g(z), \quad (3.2)$$

либо

$$\left(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n\right) y(z) = \left(b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_m z^{n-m}\right) g(z), \quad (3.2')$$

а также передаточной функцией:

$$\Phi(z) = \frac{y(z)}{g(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_m z^{n-m}}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}}. \quad (3.2'')$$

Решение уравнения (3.1) состоит из двух частей: $y[k] = y_{св}[k] + y_{в}[k]$, где первая часть определяет свободное, а вторая – вынужденное движение системы.

Для оценки устойчивости дискретной САУ, как и в случае непрерывной системы, исследуется свободное движение. Оно может быть найдено при решении однородного разностного уравнения (без правой части)

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \ldots + a_n y[0] = 0. \quad (3.3)$$

Решение (3.3) ищется в виде

$$y_{св}[k] = \sum_{i=0}^{n} c_i z_i^k, \quad (3.4)$$

где c_i - постоянные коэффициенты, а z_i - корни уравнения

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \quad (3.5)$$

(проверяется подстановкой (3.4) в (3.3)).

Уравнение (3.5) называется характеристическим. Оно обычно получается из передаточной функции замкнутой системы $\Phi(z)$ (3.2'') приравниванием к нулю полинома ее знаменателя.

Тогда говорят, что линейная дискретная система ***асимптотически***

устойчива, если её собственное движение с течением времени затухает и стремится к нулю, то есть

$$\lim_{k\to\infty} y_{св}[k] = 0\,. \tag{3.6}$$

Если $\lim\limits_{k\to\infty} y_{св}[k] = \infty$, то дискретная система называется ***неустойчивой***.

И, наконец, если $\lim\limits_{k\to\infty} y_{св}[k] = Const \neq 0$ или не существует, то говорят, что дискретная система находится ***на границе устойчивости***.

Отсюда следует, что условие (3.6) с учетом (3.4) будет выполнено тогда и только тогда, когда корни характеристического уравнения располагаются внутри единичного круга на **z**-плоскости.

Основное условие устойчивости: для того чтобы линейная дискретная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения (полюсы системы) были по модулю меньше единицы: $|z_i| < 1, \quad i = \overline{1,n}$.

На рис. 3.1, *а* показано расположение полюсов устойчивой дискретной системы четвертого порядка. Если хотя бы один полюс системы находится за пределами единичной окружности (рис. 3.1, *б*), то дискретная система неустойчива. При наличии полюса на единичной окружности (рис. 3.1, *в*) система находится на границе устойчивости.

Положение нулей передаточной функции (корней полинома в числителе) не влияет на устойчивость дискретной системы.

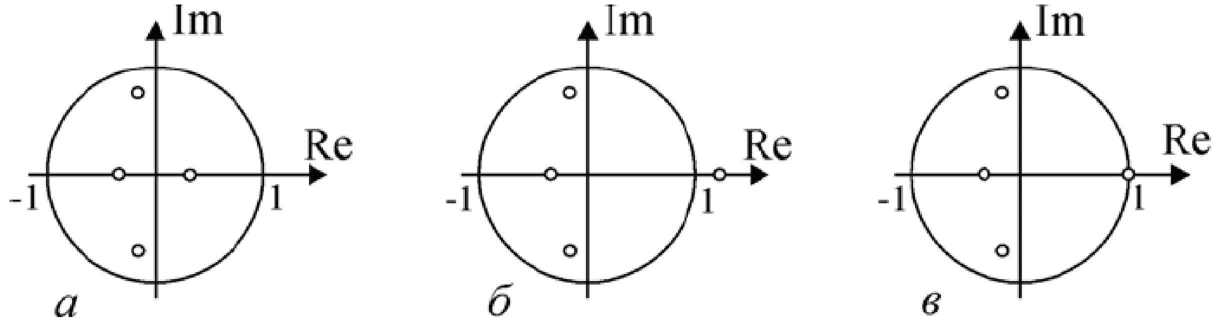


Рис. 3.1. Расположение полюсов дискретной системы:
а – устойчивая система, *б* – неустойчивая система, *в* – система на границе устойчивости.

Критерий устойчивости Шур-Кона

Для оценки устойчивости дискретной САУ можно использовать *критерий Шур-Кона*. Пусть задана передаточная функция замкнутой системы в следующем виде:

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 \cdot z^n + b_1 \cdot z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} \cdot z + b_n}{a_0 \cdot z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot z + a_n} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} b_i \cdot z^{n-i}}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \cdot z^{n-i}}\,. \tag{3.7}$$

Из коэффициентов полинома знаменателя передаточной функции (3.7) (характеристического уравнения системы) составляется последовательность матриц:

$$B_{1k}=\begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-(k-1)} & a_{n-(k-2)} & \cdots & a_n \end{pmatrix},\quad B_{2k}=\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix},$$

$$B_k=\left(\begin{array}{c:c} B_{1k} & B_{2k} \\ \hdashline B_{2k}^T & B_{1k}^T \end{array}\right), \tag{3.8}$$

$k=1, 2, \ldots, n$. Матрица B_k размерности $(2k\times 2k)$ имеет блочную структуру.

Для установления факта устойчивости дискретной системы необходимо вычислить определители матриц B_k. Например, первый определитель вычисляется как:

$$\Delta_1=\det B_1=\begin{vmatrix} a_n & a_0 \\ a_0 & a_n \end{vmatrix}=a_n^2-a_0^2\,. \tag{3.9}$$

Второй определитель - определитель матрицы:

$$\Delta_2=\det B_2=\left|\begin{array}{cc:cc} a_n & 0 & a_0 & 0 \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & a_0 \\ \hdashline a_0 & a_1 & a_n & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & 0 & a_n \end{array}\right|. \tag{3.10}$$

Получим n определителей. Если все нечётные определители меньше нуля (отрицательны), а все чётные - положительны, то такая система устойчива. Если хотя бы один определитель не соответствует данному требованию, то система неустойчива.

Таким образом, использование критерия Шур-Кона требует вычисления определителей матриц порядка до $2\cdot n$. Задача эта весьма трудоёмкая.

Критерий устойчивости Джури

Полином знаменателя передаточной функции (3.2) имеет вид:

$$N(z)=a_0\cdot z^n+a_1\cdot z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\cdot z+a_n \quad \text{при } a_0>0\,. \tag{3.11}$$

Для проверки устойчивости по критерию Джури необходимо составить следующую таблицу.

Таблица коэффициентов Джури

Таблица 2

№ строки	коэффициенты при степенях z								
	z^n	z^{n-1}	z^{n-2}	z^{n-3}	$\ldots$	z^k	$\ldots$	z^1	z^0
1 2	a_0 a_n	a_1 a_{n-1}	a_2 a_{n-2}	a_3 a_{n-3}	$\ldots$ $\ldots$	a_{n-k} a_k	$\ldots$ $\ldots$	a_{n-1} a_1	a_n a_0
3 4	b_0 b_{n-1}	b_1 b_{n-2}	b_2 b_{n-3}	b_3 b_{n-4}	$\ldots$ $\ldots$	b_{n-k} b_{k-1}	$\ldots$ $\ldots$	b_{n-1} b_0	
5	c_0	c_1	c_2	c_3	$\ldots$	c_{n-k}	$\ldots$		

6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	c_{n-5}	…	c_{k-2}	…		
… …	… …	… …	… …	… …	… …	… …	… …		
$2\cdot k+1$ $2\cdot k+2$	f_0 f_{n-k}	f_1 f_{n-k-1}	f_2 f_{n-k-2}	f_3 f_{n-k-3}	… …	f_{n-k} f_0			
… …	… …	… …	… …	… …	… …				
$2\cdot n-5$ $2\cdot n-4$	s_0 s_3	s_1 s_2	s_2 s_1	s_3 s_0					
$2\cdot n-3$ $2\cdot n-2$	r_0 r_2	r_1 r_1	r_2 r_0						

Значения элементов таблицы определяют следующим образом:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}; \qquad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}. \tag{3.12}$$

Аналогично вычисляются остальные коэффициенты, используя значения коэффициентов, расположенных в предыдущей паре строк. В отличие от критерия Шур-Кона, здесь при заполнении таблицы вычисляются определители второго порядка, что значительно упрощает вычисления.

Для устойчивости ДСАУ необходимо и достаточно, чтобы соблюдались следующие неравенства:

$$\begin{cases} N(1) > 0 \\ (-1)^n \cdot N(-1) > 0 \\ a_0 > |a_n| \\ |b_0| > |b_{n-1}| \\ |c_0| > |c_{n-2}| \\ \ldots \\ |f_0| > |f_{n-k}| \\ \ldots \\ |s_0| > |s_3| \\ |r_0| > |r_2| \end{cases}. \tag{3.13}$$

Критерий Джури по количеству вычислений выгоднее критерия Шур-Кона, поэтому он предпочтительнее в использовании. Критерий Джури также можно применять для определения области устойчивости - области возможных вариаций параметров ДСАУ, при которых система остается устойчивой.

Математические модели экстраполяторов

В импульсных (дискретных системах) имеет место проблема восстановления (фильтрации) дискретного сигнала (решетчатой функции) в аналоговой форме. Поскольку идеальный фильтр физически невозможно построить, то применяют реальный фильтр - **экстраполятор**.

Экстраполяторы бывают: *0-го порядка*, экстраполирует (т.е. запоминает) значение решётчатой функции e[nT] в момент квантования непрерывной функции e(t) ИИЭ на часть (γT) или весь интервал квантования T. Есть экстраполятор *1-го порядка*, кроме такого же запоминания функции e[nT], запоминает первую прямую разность РФ, вычисленную на предыдущем интервале Δ e[(n-1), T], и добавляет её к сигналу e[nT]. Известны экстраполяторы и более высоких порядков.

Пусть задана дискретная САУ с экстраполятором (рис. 3.2).

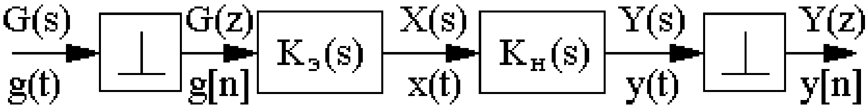


Рис.3.2

Ниже приведены основные характеристики некоторых экстраполяторов.

Экстраполятор нулевого порядка

Передаточная функция экстраполятора:

$$K_{э0}(s)=\frac{1-e^{-s\cdot T}}{s}. \qquad (3.10)$$

Амплитудная характеристика определяется по следующей формуле:

$$A(\omega)=T\cdot\frac{\sin\frac{\omega\cdot T}{2}}{\frac{\omega\cdot T}{2}}=\frac{2}{\omega}\cdot\sin\frac{\omega\cdot T}{2}. \qquad (3.11)$$

Фазовая характеристика экстраполятора имеет вид:

$$\varphi(\omega)=-\frac{\omega\cdot T}{2}. \qquad (3.12)$$

Получение дискретной несмещенной передаточной функции непрерывной части системы с экстраполятором нулевого порядка осуществляется по следующей формуле:

$$K(z,0)=\overline{Z}\{K_{э0}(s)\cdot K_{н}(s)\}=\overline{Z}\left\{\frac{\left(1-e^{-s\cdot T}\right)\cdot K_{н}(s)}{s}\right\}=\frac{z-1}{z}\cdot\overline{Z}\left\{\frac{K_{н}(s)}{s}\right\}; \qquad (3.13)$$

Смещенная ПФ может быть получена как:

$$K(z,\varepsilon)=\overline{Z}_{\varepsilon}\{K_{э0}(s)\cdot K_{н}(s)\}=\frac{z-1}{z}\cdot\overline{Z}_{\varepsilon}\left\{\frac{K_{н}(s)}{s}\right\}. \qquad (3.14)$$

Точные формулы несмещенного и смещенного Z-преобразования приведены в материале к предыдущему заданию (см. (2.5)).

Экстраполятор нулевого порядка с запоминанием на неполный интервал квантования

Передаточная функция имеет вид:

$$K_{э0\gamma}(s)=\frac{1-e^{-\gamma\cdot s\cdot T}}{s}. \qquad (3.15)$$

Амплитудная характеристика определяется по следующей формуле:

$$A(\omega)=T\cdot\frac{\sin\frac{\gamma\cdot\omega\cdot T}{2}}{\frac{\omega\cdot T}{2}}=\frac{2}{\omega}\cdot\sin\frac{\gamma\cdot\omega\cdot T}{2}. \qquad (3.16)$$

Фазовая характеристика:

$$\varphi(\omega)=-\frac{\gamma\cdot\omega\cdot T}{2}. \qquad (3.17)$$

Дискретная передаточная функция непрерывной системы определяется по формуле:

$$K(z,0)=\bar{Z}\left\{K_{э0\gamma}(s)\cdot K_{н}(s)\right\}=\bar{Z}\left\{\frac{\left(1-e^{-\gamma\cdot s\cdot T}\right)\cdot K_{н}(s)}{s}\right\}=$$
$$=\bar{Z}\left\{\frac{K_{н}(s)}{s}\right\}-\bar{Z}\left\{\frac{e^{-\gamma\cdot s\cdot T}\cdot K_{н}(s)}{s}\right\}=K_1(z,0)-z^{-1}\cdot K_1(z,\varepsilon_1), \tag{3.18}$$

где $K_1(z,0)=\bar{Z}\left\{\frac{K_{н}(s)}{s}\right\}$, $K_1(z,\varepsilon)=\bar{Z}_{\varepsilon}\left\{\frac{K_{н}(s)}{s}\right\}$ и $\varepsilon_1=1-\gamma$.

Получение смещённой ПФ может быть выполнено:

$$K(z,\varepsilon)=\bar{Z}_{\varepsilon}\left\{K_{э0\gamma}(s)\cdot K_{н}(s)\right\}=\bar{Z}_{\varepsilon}\left\{\frac{\left(1-e^{-\gamma\cdot s\cdot T}\right)\cdot K_{н}(s)}{s}\right\}=$$
$$=\bar{Z}_{\varepsilon}\left\{\frac{K_{н}(s)}{s}\right\}-\bar{Z}_{\varepsilon}\left\{\frac{e^{-\gamma\cdot s\cdot T}\cdot K_{н}(s)}{s}\right\}=K_1(z,\varepsilon)-K_{\gamma}(z,\varepsilon_1), \tag{3.19}$$

где $K_1(z,\varepsilon)=\bar{Z}_{\varepsilon}\left\{\frac{K_{н}(s)}{s}\right\}$, $K_{\gamma}(z,\varepsilon_1)=z^{-1}\cdot K_1(z,\varepsilon_1)$ и $\varepsilon_1=1-\gamma+\varepsilon$ при $\varepsilon<\gamma$;

$K_{\gamma}(z,\varepsilon_1)=K_1(z,\varepsilon_1)$ и $\varepsilon_1=\varepsilon-\gamma$ при $\varepsilon>\gamma$.

Экстраполятор первого порядка

Передаточная функция данного экстраполятора, его амплитудная и фазовая характеристики имеют вид:

$$K_{э1}(s)=\left(1-e^{-s\cdot T}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2\cdot T}\right). \tag{3.20}$$

$$A(\omega)=T\cdot\left(\frac{\sin\frac{\omega\cdot T}{2}}{\frac{\omega\cdot T}{2}}\right)^2\cdot\sqrt{1+(\omega\cdot T)^2}=\frac{1}{T}\cdot\left(\frac{2\cdot\sin\frac{\omega\cdot T}{2}}{\omega}\right)^2\cdot\sqrt{1+(\omega\cdot T)^2}. \tag{3.21}$$

$$\varphi(\omega)=arctg\left(\frac{\omega\cdot T\cdot\cos(\omega\cdot T)+\sin(\omega\cdot T)}{\cos(\omega\cdot T)+\omega\cdot T\cdot\sin(\omega\cdot T)}\right). \tag{3.22}$$

Переход в область z непрерывной части системы осуществляется по формуле:

$$K(z,0)=\bar{Z}\left\{K_{э1}(s)\cdot K_{н}(s)\right\}=\bar{Z}\left\{\left(1-e^{-s\cdot T}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2\cdot T}\right)\cdot K_{н}(s)\right\}=$$
$$=\left(\frac{z-1}{z}\right)^2\cdot\bar{Z}\left\{\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2\cdot T}\right)\cdot K_{н}(s)\right\}. \tag{3.23}$$

В случае получения смещенной передаточной функции следует воспользоваться выражением:

$$K(z,\varepsilon)=\bar{Z}_{\varepsilon}\left\{K_{э1}(s)\cdot K_{н}(s)\right\}=\left(\frac{z-1}{z}\right)^2\cdot\bar{Z}_{\varepsilon}\left\{\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2\cdot T}\right)\cdot K_{н}(s)\right\}. \tag{3.24}$$

Вычисление смещенного преобразования $\bar{Z}_{\varepsilon}\{\ldots\}$ было рассмотрено ранее, в предыдущей части пособия, например (2.5).

Программно-реализуемый эквивалентный экстраполятор первого порядка

В некоторых случаях бывает удобным воспользоваться приближенной математической моделью экстраполятора первого порядка:

$$K_{эп1}(z) = \frac{3z-1}{2z}. \qquad (3.25)$$

Переход в область z непрерывной части системы осуществляется по формуле:

$$K(z,0) = K_{эп1}(z) \cdot \overline{Z}\{K_{н}(s)\} = \frac{3z-1}{2z}\overline{Z}\{K_{н}(s)\}. \qquad (3.26)$$

Идея получения эквивалентного экстраполятора была решена в 80-х годах 20-го века С.А. Ковчиным и китайским ученым Чжань Ан Нянь (Zhan An Nian, Associat Professor) из Лоянского технологического института (провинция Хенань).

Базируясь на интерполяционной формуле Ньютона 2-го порядка, можно записать: $X_1[n,\gamma] = X[n] + \frac{\nabla X[n]}{T}\cdot\gamma$. Тогда, вычислив "среднее значение $X_1[n,\gamma]$" на интервале квантования T с помощью интеграла:

$$J = \frac{\int\limits_0^T X_1[n,\gamma]d\gamma}{T} = \frac{\left.\left(X[n]\gamma + \frac{\nabla X[n]}{T}\frac{\gamma^2}{2}\right)\right|_0^T}{T} = X[n] + \frac{\nabla X[n]}{2} = X[n] + \frac{X[n]-X[n-1]}{2} = \frac{3X[n]-X[n-1]}{2},$$

и можно получить модель эквивалентного экстраполятора первого порядка (3.25).

Задание №3

1. Задана разомкнутая ДСАУ (прямой тракт):

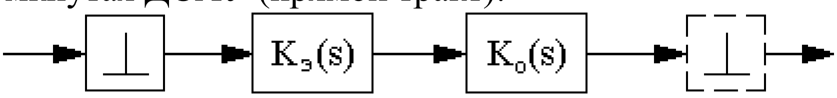


Рис. 3.3.

Передаточные функции непрерывной части системы $K_O(s)$ и экстраполятора $K_Э(s)$ определяются соответствующим вариантом задания.

2. Получить передаточные функции разомкнутой и замкнутой дискретных систем для трех различных периодов квантования (с кратностью 5).
3. Оценить устойчивость разомкнутой ДСАУ по корням характеристического уравнения.
4. Оценить устойчивость замкнутой ДСАУ по критерию Джури.
5. Выполнить моделирование разомкнутой и замкнутой систем. Исследовать влияние экстраполятора (первого и нулевого порядков) на переходную характеристику замкнутой системы.
6. Оценить влияние периода квантования на устойчивость замкнутой ДСАУ.
7. Сделать соответствующие выводы.

Задача №3.1

Выполнить задание 3 при $K_o(s)=\dfrac{K(1+T_4 s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s)}$, где

$T_1=\alpha$ с; $T_2=0.1\alpha$ с; $T_3=0.01\alpha$ с; $T_4=0.001\alpha$ с; K = α.

На входе - Экстраполятор первого порядка.

Задача №3.2

Выполнить задание 3 при $K_o(s)=\dfrac{K(1+T_3 s)}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$, где

$T_1=\alpha$ с; $T_2=0.1\alpha$ с; $T_3=0.01\alpha$ с; K = α.

На входе - Экстраполятор нулевого порядка.

Задача №3.3

Выполнить задание 3 при $K_o(s)=\dfrac{K(1+T_3 s)}{\left(1+T_1 s+T_1^2 s^2\right)(1+T_2 s)}$, где

$T_1=\alpha$ с; $T_2=0.1\alpha$ с; $T_3=0.01\alpha$ с; K = α.

На входе - экстраполятор первого порядка.

Задача №3.4

Выполнить задание 3 при $K_o(s)=\dfrac{K(1+T_2 s)}{s\left(1+T_1 s+T_1^2 s^2\right)}$, где

$T_1=\alpha$ с; $T_2=0.1\alpha$ с; K = α.

На входе - экстраполятор нулевого порядка.

Задача №3.5

Выполнить задание 3 при $K_o(s)=\dfrac{K(1+T_3 s)}{\left(1+0.5T_1 s+T_1^2 s^2\right)(1+T_2 s)}$, где

$T_1=\alpha$ с; $T_2=0.1\alpha$ с; $T_3=0.01\alpha$ с; K = α.

На входе - экстраполятор первого порядка.

Задача №3.6 (α < 6)

Выполнить задание 3 при $K_o(s)=\dfrac{K(1+T_2 s)}{s\left(1+0.5T_1 s+T_1^2 s^2\right)}$, где

$T_1=\alpha$ с; $T_2=0.1\alpha$ с; K = α.

Для **п.2.** $K_э(s)$:

На входе - экстраполятор нулевого порядка

Примечание. Номер варианта α задается преподавателем.

Методические указания

1. Определение *z*-преобразования передаточной функции проводить с помощью вычетов (вручную), встроенные функции MathCad использовать для

сравнения результатов. MathCad " складывает дроби (приводит их к общему знаменателю) с ошибками.

2. Правильность вычислений в MathCad можно проверить в других ресурсах (например, в MatLab). MatLab содержит корректные функции деления полиномов, сложения дробей и другие полезные приложения).
3. Если в передаточной функции непрерывной системы (с учетом экстраполятора) имеются кратные корни, рекомендуется разложить ее на простые слагаемые (простые дроби).
4. Получение передаточных функций в MathCad и MatLab может выполнено с ошибками. Причина их заключается в том, что возможны одинаковые корни в числителе и знаменателе этих ДПФ. Для проверки этого факта следует определить нули и полюса с последующим сокращением на одинаковые множители числителя и знаменателя ПФ (упростить!!!)
5. Правильность получения дискретных передаточных функций проверять путем сравнительного моделирования разомкнутых (непрерывной и дискретных) систем, например, в среде Simulink. Моделирование непрерывной системы рекомендуется выполнять с учетом экстраполятора.
6. При получении дискретной передаточной функции начать преобразования с T = 1c. Если замкнутая система окажется устойчивой, - увеличивать T. В случае неустойчивости - уменьшать.
7. В том случае, если замкнутая дискретная система неустойчива и находится "далеко" от границы устойчивости, проверьте устойчивость замкнутой непрерывной системы. В случае ее неустойчивости измените в нужную сторону коэффициент усиления K. Для подбора K можно построить АФЧХ непрерывного объекта. Рекомендуется подобрать такой K, при котором путем изменения T можно получить устойчивую и неустойчивую замкнутую дискретную систему.
8. Сравнительное моделирование систем (см. п.5 Задания) выполнять только для замкнутой непрерывной системы с разными экстраполяторами. Обязательно проверить влияние T на качество переходного процесса в данных системах.
9. Для большей достоверности рекомендуется часть вычислений выполнить вручную. Программы, особенно на интернет-ресурсах, вычисляют с ошибками! Ошибки имеются и в продуктах фирмы Microsoft. Проверено на практике!

Контрольные вопросы

1. При каких условиях системы будут устойчивы?
2. Какое расположение должны иметь полюса устойчивой ПФ в z-плостткости?
3. Сформулируйте критерий устойчивости Шур-Кона.
4. Почему удобнее использовать критерий устойчивости Джури?
5. Что такое экстраполятор? Для чего он необходим?
6. Какие виды экстраполяторов вы знаете, в чем различия?
7. Какой сигнал формируется на выходе экстраполятора 1-го порядка?
8. Как получают дискретный аналог передаточной функции непрерывной системы?
9. Как найти критический интервал квантования?
10. Как найти ПФ замкнутой системы?

Пример выполнения задания

Исходными данными для выполнения задания является объект с передаточной функцией $K_o(s)=\dfrac{K(1+T_3 s)}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$ задания,

где К = 2; T_1 = 2 с; T_2 = 0,2 с; T_3 = 0,02 с.

Передаточная функция экстраполятора: $K_{э0}(s)=\dfrac{1-e^{-s\cdot T}}{s}$.

Период (интервал) квантования Т = 0,1.

Полиномы числителя B(s) и знаменателя A(s) передаточной функции объекта равны:

$$B(s)=K(1+T_3 s);\qquad A(s)=s(1+T_1 s)(1+T_2 s).$$

Получим дискретную несмещенную передаточную функцию непрерывной части системы по формуле (3.13):

$$K(z,0)=\bar{Z}\{K_{э0}(s)\cdot K_o(s)\}=\bar{Z}\left\{\frac{\left(1-e^{-s\cdot T}\right)\cdot K_0(s)}{s}\right\}=\frac{z-1}{z}\cdot\bar{Z}\left\{\frac{K_0(s)}{s}\right\}.$$

Для начала вычислим Z-преобразование для следующей передаточной функции:

$$K_{o1}(s)=\frac{K_0(s)}{s}.$$

В среде MathCAD определим коэффициенты числителя (koefNum) и знаменателя (koefDenom) передаточной функции $K_{o1}(s)$:

$$B_{o1}(s):=B(s)\qquad A_{o1}(s):=A(s)\cdot s$$

$$\text{koefNum}:=B_{o1}(s)\ \text{coeffs},s\ \rightarrow\begin{pmatrix}1\\0.02\end{pmatrix}\qquad \text{koefDenom}:=A_{o1}(s)\ \text{coeffs},s\ \rightarrow\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2.2\\0.4\end{pmatrix}$$

и корни полинома знаменателя $A_{o1}(s)$:

$$s\_:=\text{polyroots}(\text{koefDenom})\qquad s\_=\begin{pmatrix}-5\\-0.5\\0\\0\end{pmatrix}$$

Так среди корней имеются кратные, сначала определим вычеты для некратных корней: s_{-0} = -5, s_{-1} = -0.5. Производная полинома знаменателя $A_{o1}(s)$:

$$dA_{o1}(s):=\frac{d}{ds}A_{o1}(s)$$

Соответствующие вычеты будут равны:

$$R_0:=\frac{B_{o1}(s_{-0})}{dA_{o1}(s_{-0})}=-0.02\qquad R_1:=\frac{B_{o1}(s_{-1})}{dA_{o1}(s_{-1})}=2.2$$

Характеристический полином $A_{o1}(s)$ имеет корень s = 0 кратности 2. В этом случае для Z преобразований используем следующую формулу:

$$\mathrm{X}(z,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{X}(s)\,e^{\varepsilon sT}}{1-z^{-1}e^{sT}},s_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(m_i-1)!}\cdot\lim_{s\to s_i}\left(\frac{\partial^{m_i-1}}{\partial s^{m_i-1}}\left(\frac{\mathrm{X}(s)(s-s_i)^{m_i}e^{\varepsilon sT}}{1-z^{-1}e^{sT}}\right)\right)$$

Дискретная передаточная функция разомкнутой системы $K_{раз}(z)$ будет получена по следующей формуле:

$$K_{раз}(z) = \left(\frac{R_0 z}{z - e^{s_0 T}} + \frac{R_1 z}{z - e^{s_1 T}} + \lim_{s\to 0}\frac{\partial}{\partial s}\frac{B_{o1}(s)(s-0)^2 z}{A_{o1}(s)(z - e^{sT})}\right)\frac{z-1}{z} =$$

$$= \left(\frac{R_0}{z - e^{s_0 T}} + \frac{R_1}{z - e^{s_1 T}} + \lim_{s\to 0}\frac{\partial}{\partial s}\frac{K(1+T_3 s)}{(T_1T_2 s^2 + (T_1+T_2)s + 1)(z - e^{sT})}\right)(z-1).$$

Вычислим предел:

$$\lim_{s\to 0}\frac{\partial}{\partial s}\frac{K(1+T_3 s)}{(T_1T_2 s^2 + (T_1+T_2)s + 1)(z - e^{sT})} = \frac{KT_3(z-1) - K[(T_1+T_2)(z-1) - T]}{(z-1)^2}.$$

Тогда окончательно получим:

$$K_{раз}(z) = \left(\frac{R_0}{z - y_0} + \frac{R_1}{z - y_1} + \frac{c_1(z-1) + c_2}{(z-1)^2}\right)(z-1),$$

где $y_0 = e^{s_0 T}$, $y_1 = e^{s_1 T}$, $c_1 = K(T_3 - T_1 - T_2)$, $c_2 = KT$.

Рассчитаем коэффициенты y_0, y_1, c_1, c_2:

$y_0 := e^{s\_0 \cdot T} = 0.607$ $\quad y_1 := e^{s\_1 \cdot T} = 0.951$ $\quad c_1 := K \cdot (T_3 - T_1 - T_2) = -2.18$ $\quad c_2 := K \cdot T = 0.1$

Приведем $K_{раз}(z)$ к общему знаменателю (сложим дроби):

$$K_{раз}(z) = \frac{\big(B0(z) + B1(z) + B2(z)\big)(z-1)}{(z-y_0)(z-y_1)(z-1)^2} = \frac{B0(z) + B1(z) + B2(z)}{(z-y_0)(z-y_1)(z-1)}$$

где $B0(z) = R_0(z - y_1)(z-1)^2$

$B1(z) = R_1(z - y_0)(z-1)^2$

$B2(z) = [c_1(z-1) + c_2](z - y_0)(z - y_1)$

Определим в MathCAD числитель M(z) передаточной функции разомкнутой системы $K_{раз}(z)$:

$B_0(z) := R_0 \cdot (z - y_1) \cdot (z-1)^2$ $\quad B_1(z) := R_1 \cdot (z - y_0) \cdot (z-1)^2$ $\quad B_2(z) := [c_1 \cdot (z-1) + c_2] \cdot (z - y_0) \cdot (z - y_1)$

$M(z) := B_0(z) + B_1(z) + B_2(z)$ $\quad Mcoeffs := M(z)\ coeffs, z \rightarrow \begin{pmatrix} 0.00010270478972917547379 \\ 0.0012421471196698580299 \\ 0.00057412070731288013 4 \\ 2.0129999999999733482e\text{-}15 \end{pmatrix}$

Аналогично определим знаменатель N(z) передаточной функции разомкнутой системы $K_{раз}(z)$:

$N(z) := (z - y_1) \cdot (z - y_0) \cdot (z-1)$ $\quad Ncoeffs := N(z)\ coeffs, z \rightarrow \begin{pmatrix} -0.57694981038048668638 \\ 2.1347098945938341064 \\ -2.5577600842133 4742 \\ 1 \end{pmatrix}$

Представленная ниже функция module позволяет найти модули корней полинома:

$$module(A) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..last(A) \\ \quad x_i \leftarrow \sqrt{Re(A_i)^2 + Im(A_i)^2} \\ x \end{array} \right.$$

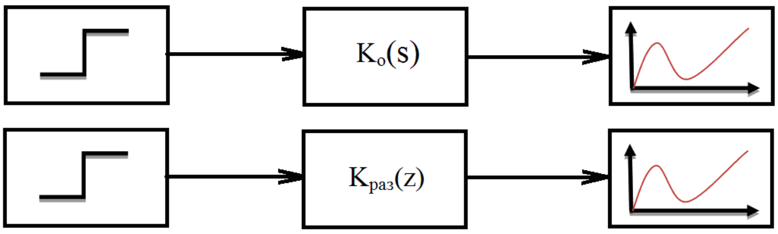
Получим корни полинома знаменателя и их модули:

$$\mathrm{Nroots} := \mathrm{polyroots}(\mathrm{Ncoeffs}) = \begin{pmatrix} 0.607 \\ 0.951 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{module}(\mathrm{Nroots}) = \begin{pmatrix} 0.607 \\ 0.951 \\ 1 \end{pmatrix}$$

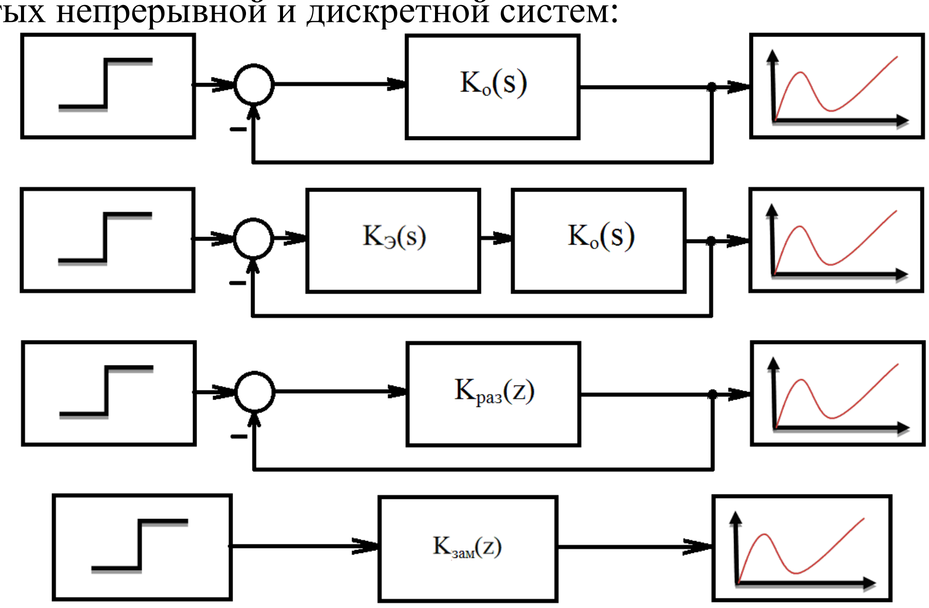
Таким образом, разомкнутая система находится на границе устойчивости.
Получим коэффициенты полинома знаменателя Q(z) передаточной функции замкнутой системы $K_{зам}(z)$:

$$Q(z) := M(z) + N(z) \qquad \mathrm{Qcoeffs} := Q(z)\ \mathrm{coeffs}, z \ \rightarrow \begin{pmatrix} -0.5768471055907575109 \\ 2.1359520417135039644 \\ -2.5571859635060345399 \\ 1.000000000000002013 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Qcoeffs} = \begin{pmatrix} -0.577 \\ 2.136 \\ -2.557 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для оценки устойчивости замкнутой системы по критерию Джури необходимо по формулам (3.12) заполнить соответствующую таблицу (таблица 2) и проверить неравенства (3.13).
Теперь для разных значений периода квантования T (задаем в начале в файле) строим переходные характеристики следующих систем:
1) разомкнутой непрерывной и дискретной системы



Это моделирование необходимо для проверки правильности получения дискретной передаточной функции разомкнутой системы. Перед звеном с ПФ $K_o(s)$ в модель включается экстраполятор.
2) замкнутых непрерывной и дискретной систем:



Последние моделирования необходимы для проверки правильности получения передаточных функций замкнутых дискретных систем. Кроме того по переходным характеристикам можно судить и о качестве систем, включая анализ их устойчивости.

Рекомендация 1. Для сравнения переходных характеристик исследуемых систем графики следует отображать на одном рисунке. То есть при моделировании необходимо воспользоваться многовходовым "осциллографом".
Рекомендация 2. После получения каждой ПФ определять ее нули и полюса с

последующим, если необходимо, упрощением этих ДПФ.
Рекомендация 3. Моделирование проводить сразу после получения очередной передаточной функции. Цель - подтверждение правильности ДПФ.

Проверку устойчивости замкнутой дискретной системы необходимо выполнить как по корням характеристического уравнения, так и методом Джури. Эти проверки выполняются аналогично проведенным выше.

Затем, в соответствии с заданием, изменяется интервал квантования Т с целью определения факта устойчивости (неустойчивости) дискретной системы. Для каждого значения Т устойчивость замкнутой системы проверяется как по переходной характеристике, так и по корневому критерию и критерию Джури.

Все вычисления с целью повышения качества (точности) получаемых передаточных функций лучше выполнять в среде **MatLab**, а моделирование систем - в приложении **Simulink.**

4. W-преобразования в дискретных системах

Краткие сведения о псевдочастотной области

Передаточная функция дискретной САУ в пространстве *z*-преобразований имеет вид:

$$K(z,0)=\frac{B(z,0)}{A(z,0)}=\frac{b_0\cdot z^n+b_1\cdot z^{n-1}+\ldots+b_{n-1}\cdot z+b_n}{a_0\cdot z^n+a_1\cdot z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\cdot z+a_n}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}b_i\cdot z^{n-i}}{\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\cdot z^{n-i}}. \tag{4.1}$$

Отсутствие в области *z* возможности использования частотных характеристик и методов исследования непрерывных САУ привело к необходимости искать такие преобразования, которые позволили бы вновь перейти к комплексным аргументам, мнимая часть которых является функцией частоты. Таким свойством обладает ***w*-преобразование.**

Переход от математической модели в *z*-преобразованиях к модели в *w*-преобразованиях выполняется путем замены (4.2):

$$z=\frac{1+\frac{T}{2}\cdot w}{1-\frac{T}{2}\cdot w}. \tag{4.2}$$

В результате подстановки (4.2) в (4.1) передаточная функция дискретной системы принимает вид:

$$K(w,0)=\frac{B(w,0)}{A(w,0)}=\frac{b_0\cdot w^n+b_1\cdot w^{n-1}+\ldots+b_{n-1}\cdot w+b_n}{a_0\cdot w^n+a_1\cdot w^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\cdot w+a_n}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}b_i\cdot w^{n-i}}{\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\cdot w^{n-i}}. \tag{4.3}$$

При *w*-преобразовании окружность единичного радиуса (граница области устойчивости дискретной системы в *z*-преобразованиях) отображается на мнимую ось. В результате областью устойчивости на плоскости *w* оказывается левая полуплоскость.

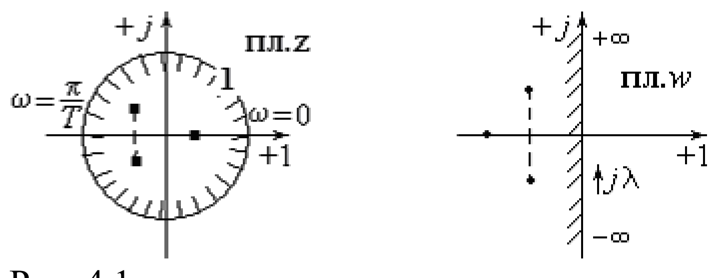


Рис. 4.1.

Поэтому для передаточных функций в области *w* применимы частотные критерии устойчивости, справедливые для непрерывных систем.

В области *w* вводится понятие псевдочастоты λ («псевдо» – потому, что выполняет в плоскости *w* роль частоты, но не равна частоте входного сигнала ω).

Для получения амплитудных и фазовых характеристик дискретной системы необходимо перейти в псевдочастотную область. Для этого в передаточной функции вида (4.3) аргумент *w* заменяется на $j\lambda$:

$$K(j\cdot\lambda)=K(w,0)\big|_{w=j\cdot\lambda}=\frac{B(j\lambda)}{A(j\lambda)}=U(\lambda)+j\cdot V(\lambda); \tag{4.4}$$

где $U(\lambda) = \mathrm{Re}[K(j\lambda)]$ – вещественная псевдочастотная характеристика дискретной системы;

$V(\lambda) = \mathrm{Im}[K(j\lambda)]$ – мнимая псевдочастотная характеристика.

Амплитудная характеристика дискретной системы в псевдочастотной области определяется по следующей формуле:

$$A(\lambda) = \sqrt{U^2(\lambda) + V^2(\lambda)}. \qquad (4.5)$$

Фазовая характеристика определяется как:

$$\varphi(\lambda) = arctg\frac{V(\lambda)}{U(\lambda)}. \qquad (4.6)$$

Примечание: Существует однозначная связь между псевдочастотой λ и частотой ω:

$$\lambda = \frac{2}{T}\cdot tg\frac{\omega\cdot T}{2} = \frac{\omega_к}{\pi}\cdot tg\frac{\omega\cdot T}{2}; \qquad \omega_к = \frac{2\pi}{T}. \qquad (4.7)$$

При малых значениях аргумента тангенс пропорционален своему аргументу. То есть получается, что $\lambda \approx \omega$.

Тангенс из приведённой выше формулы принимает следующие значения:

$$tg\frac{\omega\cdot T}{2} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad tg\,0 = 0; \\ \omega = \frac{\omega_к}{4} \Rightarrow \quad tg\frac{\omega_к\cdot T}{8} = tg\frac{2\cdot\pi\cdot T}{T\cdot 8} = tg\frac{\pi}{4} = 1; \\ \omega = \frac{\omega_к}{2} \Rightarrow \quad tg\frac{\omega_к\cdot T}{4} = tg\frac{2\cdot\pi\cdot T}{T\cdot 4} = tg\frac{\pi}{2} = \infty. \end{cases} \qquad (4.8)$$

Отсюда следует, что совпадение характеристик в частотной и псевдочастотной областях наблюдается при $\omega < \frac{\omega_к}{4}$. $\omega_к = \frac{2\cdot\pi}{T}$ $рад/с$ – частота квантования.

Задание №4

1. Задана структурная схема ДСАУ:

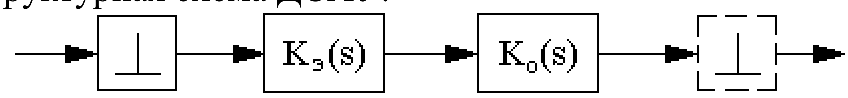


Рис. 4.2.

2. Определить передаточную функцию $K(z,\varepsilon)$ системы,

   где $K_э(s)$ – передаточная функция экстраполятора нулевого порядка;
   $K_о(s)$ – передаточная функция непрерывного объекта;
   $T = 0{,}5\cdot\alpha\ 10^{-3}\,c$ – период квантования.

   Внимание!!!! Получение $K(z,\varepsilon)$ выполнять с экстраполятором на полный интервал квантования (по обычным формулам z-преобразования).
3. Определить передаточную функцию $K(w,\varepsilon)$ системы. Сравнить полюса непрерывной $K_о(s)$ и дискретной $K(w,\varepsilon)$ передаточных функций.
4. Построить амплитудные и фазовые характеристики разомкнутой системы:
   - в частотной области: $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$;
   - в псевдочастотной области: $A(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$.
5. Получить передаточные функции замкнутой дискретной системы:

$$\Phi(w,\varepsilon)=\frac{K(w,\varepsilon)}{1+K(w,0)};\quad \Phi(w,0)=\frac{K(w,0)}{1+K(w,0)};\quad \Phi(z,\varepsilon)=\frac{K(z,\varepsilon)}{1+K(z,0)};\quad \Phi(z,0)=\frac{K(z,0)}{1+K(z,0)}.$$

Вычислить полюса всех передаточных функций замкнутой системы.

6. Проверить устойчивость непрерывной и дискретной замкнутых систем с помощью критерия Найквиста.
7. Выполнить моделирование замкнутых систем (непрерывной и дискретной, смещенной и несмещенной). Моделирование дискретной системы выполнить при $\gamma = 1$ и γ, определенном в задании.
8. Сделать соответствующие выводы.

Варианты заданий

Задача №4.1

$$K_э(s)=\frac{1-e^{-s\cdot T}}{s};\qquad K_o(s)=\frac{k_v}{s}\cdot\frac{1}{(1+\tau\cdot s)}.$$

где: $k_v=\alpha$ c^{-1}; $\varepsilon=0{,}05\cdot\alpha$; $\tau=\dfrac{(\alpha \bmod 2+1)\cdot T}{(\alpha+1)\bmod 2+1}$ c; $\gamma=0{,}95-\varepsilon$;

Задача №4.2

$$K_э(s)=\frac{1-e^{-s\cdot T}}{s};\qquad K_o(s)=\frac{k_v}{s}\cdot\frac{1}{(1+\tau\cdot s)}.$$

где: $k_v=\alpha$ c^{-1}; $\varepsilon=0{,}05\cdot\alpha+0{,}025$; $\tau=\dfrac{(\alpha \bmod 2+1)\cdot T}{(\alpha+1)\bmod 2+1}$ c; $\gamma=0{,}95-\varepsilon$;

Задача №4.3

$$K_э(s)=\frac{1-e^{-s\cdot T}}{s};\qquad K_o(s)=\frac{k}{(1+T_1\cdot s)\cdot(1+T_2\cdot s)}.$$

где: $k=\alpha$; $\varepsilon=0{,}05\cdot\alpha$; $T_1=\dfrac{(\alpha \bmod 2+1)\cdot T}{(\alpha+1)\bmod 2+1}$ c; $T_2=\dfrac{T_1}{\alpha+1}$ c; $\gamma=0{,}95-\varepsilon$;

Задача №4.4

$$K_э(s)=\frac{1-e^{-s\cdot T}}{s};\qquad K_o(s)=\frac{k}{(1+T_1\cdot s)\cdot(1+T_2\cdot s)}.$$

где: $k=\alpha$; $\varepsilon=0{,}05\cdot\alpha+0{,}025$; $T_1=\dfrac{(\alpha \bmod 2+1)\cdot T}{(\alpha+1)\bmod 2+1}$ c; $T_2=\dfrac{T_1}{\alpha+1}$ c; $\gamma=0{,}95-\varepsilon$

Задача №4.5

$$K_э(s)=\frac{1-e^{-s\cdot T}}{s};\qquad K_o(s)=\frac{k}{(1+2\cdot\xi\cdot T\cdot s+T^2\cdot s^2)}.$$

где: $k=\alpha$; $\varepsilon=0{,}05\cdot\alpha$; $\xi=0{,}07\cdot\alpha$; $\gamma=0{,}95-\varepsilon$;

Задача №4.6

$$K_э(s)=\frac{1-e^{-s\cdot T}}{s};\qquad K_o(s)=\frac{k}{(1+2\cdot\xi\cdot T\cdot s+T^2\cdot s^2)}.$$

где: $k=\alpha$; $\varepsilon=0{,}05\cdot\alpha+0{,}025$; $\xi=0{,}07\cdot\alpha$; $\gamma=0{,}95-\varepsilon$;

Примечание. α - Номер варианта, задаваемый преподавателем. Заданное γ учесть только при моделировании системы!

Методические указания

1. Обратите внимание, что интервал квантования T задан в миллисекундах (10^{-3} с).
2. Частотные характеристики непрерывной системы строятся без учета экстраполятора!!!!
3. Правильность получения дискретной ПФ разомкнутой системы проверить путем моделирования, сравнив результаты с моделированием непрерывной системы.
4. Фазовые характеристики непрерывной и дискретной систем должны быть представлены непрерывными кривыми. Фазовые характеристики лучше представить (и получать) в виде суммы арктангенсов. Для этого в передаточной функции дискретной системы найти ее нули и полюса.
5. При построении частотных характеристик обосновать выбранный диапазон частот.
6. В низкочастотной области должно наблюдаться совпадение частотных характеристик непрерывной и дискретной систем (при γ=1 и ε=0). Для проверки этого факта выполните предельные переходы в полученных результатах!!!!!
7. Значения амплитудных характеристик на малых частотах должны совпадать со значением статического коэффициента усиления системы (также при γ=1 и ε=0).
8. У каждой передаточной функции вычислить ее полюса. Выполнить сравнение их с полюсами других (соответствующих!!!) передаточных функций. Объяснить различие (если оно имеется).
9. В том случае, если замкнутая дискретная система окажется неустойчивой, измените коэффициент усиления разомкнутой. При этом повторите построение АФЧХ и получение передаточных функций замкнутых систем.
10. Часть вычислений рекомендуется выполнить вручную, сравнив полученные результаты с машинными.
11. Моделирование замкнутой дискретной системы при $\gamma = 1$ и γ, определенном в задании, выполнять как моделирование непрерывной системы с использованием экстраполятора (γ =1, - первый случай), и во втором, при заданном γ, дополнительно после экстраполятора вставить в схему умножитель, на второй вход которого поступают сигналы с формирователя импульсов длиной γT единичной высоты. Для придания получаемым результатам дискретного характера рекомендуется на выход замкнутой системы поставить экстраполятор нулевого порядка.
12. Правильность вычислений в MathCad или MatLab для большей достоверности сравнивать с результатами, полученными с помощью иных продуктов.

Контрольные вопросы

1. Как переходят из z-плоскости в w-плоскость?
2. Почему применяют w-преобразование?
3. Как модифицируется окружность из z-преобразования в w-преобразовании?
4. Какие критерии устойчивости применимы для ПФ в w-области? Опишите механизм определения устойчивости.
5. Что такое псевдочастота?
6. Как выглядит однозначная связь между псевдочастотой λ и частотой ω?

7. При каких условиях наблюдается совпадение характеристик в частотной и псевдочастотной области?
8. Опишите критерий устойчивости Найквиста для дискретной системы.
9. В каких осях строятся частотные характеристики?
10. При каких условиях системы будут устойчивы?

Пример выполнения задания

Согласно заданию, передаточные функции экстраполятора и объекта определяются выражениями:

$$K_э(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}; \;\; K_о(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)},$$

где $k = 1$, ε = 0,425, $T_1 = 0{,}002$ с, $T_2 = T_1/9$, $\gamma = 0{,}95 - \varepsilon$, $\alpha = 8$.

Определим дискретные передаточные функции $K(z, 0)$ и $K(z, \varepsilon)$ непрерывной части системы.

Z-преобразование выполняется по формуле (2.5), определенной в Задании 1:

$$X(z, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Res(X(s), s_i)e^{\varepsilon s_i T}}{1 - e^{-(s - s_i)T}},$$

где даны все соответствующие пояснения.

Получение дискретной смещенной ПФ непрерывной части системы с экстраполятором нулевого порядка осуществляется по формуле (3.14):

$$K(z,\varepsilon) = \overline{Z}_{\varepsilon}\{K_{э0}(s) \cdot K_o(s)\} = \overline{Z}_{\varepsilon}\left\{\frac{\left(1 - e^{-s \cdot T}\right) \cdot K_o(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z} \cdot \overline{Z}_{\varepsilon}\left\{\frac{K_o(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z} \cdot K_{нs}(z,\varepsilon).$$

$K_{\text{нs}}(z, \varepsilon)$ определяется в соответствии с выражением:

$$K_{\text{нs}}(z, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Res\left(\frac{K_о(s)}{s}, s_i\right) e^{\varepsilon s_i T}}{1 - z^{-1} e^{s_i T}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z \cdot Res\left(\frac{K_о(s)}{s}, s_i\right) e^{\varepsilon s_i T}}{z - e^{s_i T}}.$$

Получим $K_{\text{нs}}(z, \varepsilon)$:

$$K_{\text{нs}}(z, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \frac{z \cdot Res\left(\frac{K_о(s)}{s}, s_i\right) e^{\varepsilon s_i T}}{z - e^{s_i T}} = \frac{z}{z-1} - \frac{1{,}125 e^{-1912.5T} z}{z - e^{-4500T}} + \frac{0{,}125 e^{-212.5T} z}{z - e^{-500T}}.$$

Тогда смещенная передаточная функция дискретной системы будет иметь вид:

$$K(z, \varepsilon) = \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{1{,}125 e^{-1912.5T} z}{z - e^{-4500T}} + \frac{0{,}125 e^{-212.5T} z}{z - e^{-500T}}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1{,}125 e^{-1912.5T}(z-1)}{z - e^{-4500T}} + \frac{0{,}125 e^{-212.5T}(z-1)}{z - e^{-500T}}.$$

Несмещенная передаточная функция получается аналогично при ε = 0:

$$K(z, 0) = \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{1{,}125z}{z - e^{-4500T}} + \frac{0{,}125z}{z - e^{-500T}}\right) = 1 - \frac{1{,}125(z-1)}{z - e^{-4500T}} + \frac{0{,}125(z-1)}{z - e^{-500T}}.$$

Те же передаточные функции можно получить в MatLab:

$$K(z, \varepsilon) = \frac{4161z^2 + 2768z + 0{,}06449}{8014z^2 - 1085z + 0.00001652}.$$

$$K(z, 0) = \frac{138.2z + 2.758}{163.1z^2 - 22.07z + 0.0000003361}.$$

Соответствующие программы получения передаточных функций понятны из следующих рисунков:

```
diskr.m

function diskr
syms s;
syms z;

B = 1 * z;
A = s + 0.002222222222222*s^2 + 0.000000444444444444*s^3;

SS = solve(A, s);
Aproizv = diff(A);

Res1 = B/(subs(Aproizv, SS(1)));
Res2 = B/(subs(Aproizv, SS(2)));
Res3 = B/(subs(Aproizv, SS(3)));

T = 0.004;
W = ((z-1)/z)*(Res1/(z - exp(SS(1)*T))+Res2/(z - exp(SS(2)*T))+Res3/(z - exp(SS(3)*T)));

disp(vpa(collect(W,z), 4));
```

```
Command Window
>> diskr
(1.382e40*z + 2.758e38)/(1.631e40*z^2 - 2.207e39*z + 3.361e31)
fx
```

```
diskr.m

function diskr
syms s;
syms z;

B = 1 * z;
A = s + 0.002222222222222*s^2 + 0.000000444444444444*s^3;

SS = solve(A, s);
Aproizv = diff(A);

Res1 = B/(subs(Aproizv, SS(1)));
Res2 = B/(subs(Aproizv, SS(2)));
Res3 = B/(subs(Aproizv, SS(3)));

T = 0.004;
eps = 0.425;
W = ((z-1)/z)*(Res1*exp(eps*SS(1)*T)/(z - exp(SS(1)*T))+Res2*exp(eps*SS(2)*T)/(z - exp(SS(2)*T))+Res3*exp(eps*SS(3)*T)/(z - exp(SS(3)*T)));

disp(vpa(collect(W,z), 4));
```

```
Command Window
(4.161e43*z^2 + 2.768e43*z + 6.449e38)/(8.014e43*z^2 - 1.085e43*z + 1.652e35)
fx >>
```

После получения дискретных передаточных функций с целью проверки их правильности имеет смысл выполнить моделирование разомкнутых непрерывной и дискретной систем.

Переход от математической модели в Z-преобразованиях к модели в w-преобразованиях выполняется путем следующей замены:

$$z = \frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2} = \frac{2 + Tw}{2 - Tw}.$$

Получим W-преобразование функций $K(z, 0)$ и $K(z, \varepsilon)$ в Mathcad:

$$K_\varepsilon(z) := \frac{4161z^2 + 2769z + 0.06449}{8014z^2 - 1085z + 0.00001652}$$

$$K_{w\varepsilon}(w) := K_\varepsilon\left[\frac{(2 + T\cdot w)}{(2 - T\cdot w)}\right] \Bigg| \begin{array}{l}\text{collect}\\ \text{float}, 5\end{array} \rightarrow \frac{1.0402e14\cdot w + 3.4802e10\cdot w^2 + 4.3313e16}{2.0035e14\cdot w + 2.2748e11\cdot w^2 + 4.3306e16}$$

$$K_{w\varepsilon}(w) := \frac{0.00034802w^2 + 1.0402w + 433.13}{0.0022748w^2 + 2.0035w + 433.06}$$

$$K(z) := \frac{138.2z^2 + 2.758}{163.1z^2 - 22.07z + 0.000003361}$$

$$K_w(w) := K\left[\frac{(2 + T\cdot w)}{(2 - T\cdot w)}\right] \Bigg| \begin{array}{l}\text{collect}\\ \text{float}, 5\end{array} \rightarrow \frac{1.3544e15\cdot w + 1.4096e12\cdot w^2 + 3.5239e17}{1.631e15\cdot w + 1.8517e12\cdot w^2 + 3.5258e17}$$

$$K_w(w) := \frac{0.0018517w^2 + 1.3544 + 352.39}{0.0018517w^2 + 1.631w + 352.58}$$

Слева показано получение w-преобразования $K(z, \varepsilon)$, а справа – $K(z, 0)$.

Построение ЛАЧХ и ЛФЧХ в частотной и псевдочастотной областях выполняется в среде Mathcad по вполне понятным формулам:

Частотные характеристики не- прерывной системы:

$$K_0(i\cdot\omega)\ \Big|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{float},3\end{matrix} \rightarrow \frac{1}{(0.00222i)\cdot\omega + -4.44e\text{-}7\cdot\omega^2 + 1.0}$$

$$U(\omega) := \mathrm{Re}\left(K_0(i\cdot\omega)\right) \qquad U(\omega) := \frac{1 - 0.000000444\omega^2}{0.000000000000197\omega^4 + 0.0000040404\omega^2 + 1}$$

$$V(\omega) := \mathrm{Im}\left(K_0(i\cdot\omega)\right) \qquad V(\omega) := \frac{0.00222\omega}{0.000000000000197\omega^4 + 0.0000040404\omega^2 + 1}$$

$$\text{АЧХ}(\omega) := \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2} \qquad \text{ЛАЧХ}(\omega) := 20\cdot\log(\text{АЧХ}(\omega))$$

$$\text{ФЧХ}(\omega) := \mathrm{atan}(-\omega\cdot T_1) + \mathrm{atan}(-\omega\cdot T_2)$$

$$\omega := 0, 0.1 .. 10000$$

Частотные характеристики дискретной системы:

$$K_{w\varepsilon}(i\cdot\lambda) \rightarrow \frac{(1.0402i)\cdot\lambda + -0.00034802\cdot\lambda^2 + 433.13}{(2.0035i)\cdot\lambda + -0.0022748\cdot\lambda^2 + 433.06}$$

$$U_w(\lambda) := \mathrm{Re}\left(K_{w\varepsilon}(i\cdot\lambda)\right) \quad V_w(\lambda) := \mathrm{Im}\left(K_{w\varepsilon}(i\cdot\lambda)\right) \quad \text{АЧХ}_w(\lambda) := \sqrt{U_w(\lambda)^2 + V_w(\lambda)^2}$$

$$\text{ЛАЧХ}_w(\lambda) := 20\cdot\log\left(\text{АЧХ}_w(\lambda)\right) \quad \text{ФЧХ}_w(\lambda) := \mathrm{atan}\left(\frac{V_w(\lambda)}{U_w(\lambda)}\right) \quad \lambda := 0, 0.1 .. 10000$$

Соответствующие кривые стоятся по тем же правилам, что использованы в Примере выполнения Задания 1.

Передаточные функции замкнутой дискретной системы со смещением и без строятся в MathCAD с использованием следующих формул:

$$\Phi(w,\varepsilon) = \frac{K(w,\varepsilon)}{1+K(w,0)}; \quad \Phi(w,0) = \frac{K(w,0)}{1+K(w,0)}; \quad \Phi(z,\varepsilon) = \frac{K(z,\varepsilon)}{1+K(z,0)}; \quad \Phi(z,0) = \frac{K(z,0)}{1+K(z,0)}.$$

Программирование их понятно без всяких пояснений:

$$\Phi_\varepsilon(z) := \frac{K_\varepsilon(z)}{1 + K(z)}$$

$$\Phi_\varepsilon(z)\ \Big|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{float},3\end{matrix} \rightarrow \frac{-3.56e11\cdot z + -1.53e16\cdot z^2 + 8.99e16\cdot z^3 + 1.7e17\cdot z^4 + 5419.0}{-7.48e14\cdot z + 1.15e16\cdot z^2 + -1.26e17\cdot z^3 + 6.04e17\cdot z^4 + 1.14e7}$$

$$\Phi_\varepsilon(z) := \frac{-3.56\cdot z + -153000\cdot z^2 + 899000\cdot z^3 + 1700\cdot z^4 + 0.0000005419}{-7480\cdot z + 115000\cdot z^2 + -1260000\cdot z^3 + 6040000\cdot z^4 + 0.000114}$$

$$\Phi_{w\varepsilon}(w) := \frac{K_{w\varepsilon}(w)}{1 + K_w(w)}$$

$$\Phi_{w\varepsilon}(w)\ \Big|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{float},3\end{matrix} \rightarrow \frac{1.27e8\cdot w + 311253.0\cdot w^2 + 296.0\cdot w^3 + 0.0765\cdot w^4 + 1.81e10}{(w + 379.0)\cdot(w + 502.0)\cdot\left(440.0\cdot w + w^2 + 190918.0\right)}$$

$$\Phi_{w\varepsilon}(w)\ \Big|\begin{matrix}\text{collect}\\ \text{float},3\end{matrix} \rightarrow \frac{1.34e14\cdot w + 3.28e11\cdot w^2 + 3.12e8\cdot w^3 + 80562.0\cdot w^4 + 1.91e16}{2.65e14\cdot w + 8.1e11\cdot w^2 + 1.39e9\cdot w^3 + 1.05e6\cdot w^4 + 3.82e16}$$

$$\Phi_{w\varepsilon}(w) := \frac{1340\cdot w + 3.28\cdot w^2 + 0.00312\cdot w^3 + 0.0000080562\cdot w^4 + 191000}{2650\cdot w + 8.1\cdot w^2 + 0.0139\cdot w^3 + 0.00000105\cdot w^4 + 382000}$$

$$\Phi(z) := \frac{K(z)}{1 + K(z)}$$

$$\Phi(z)\ \Big|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{float},3\end{matrix} \rightarrow \frac{69100.0\cdot z^2 + 1379.0}{-11030.0\cdot z + 150600.0\cdot z^2 + 1379.0}$$

$$\Phi(z) := \frac{691\cdot z^2 + 13.79}{-110.3\cdot z + 1506\cdot z^2 + 13.79}$$

$$\Phi_w(w) := \frac{K_w(w)}{1 + K_w(w)}$$

$$\Phi_w(w)\ \Big|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{float},8\end{matrix} \rightarrow \frac{250000.0\cdot w^2 + 4.775941e10}{2.2020306e8\cdot w + 500000.0\cdot w^2 + 9.5361613e10}$$

$$\Phi_w(w) := \frac{2.5\cdot w^2 + 477594.1}{2202.03\cdot w + 5\cdot w^2 + 953616.13}$$

Устойчивость непрерывной и дискретной замкнутых систем проверяется с помощью критерия Найквиста.

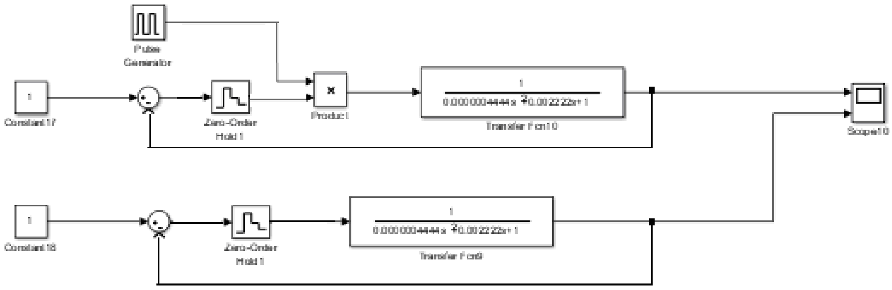
Для этого в MathCAD требуется построить годографы АФЧХ непрерывной и дискретной разомкнутых систем. Предварительно следует определить полюса (корни полиномов знаменателя) обеих передаточных функций. Далее, сопоставляя расположение корней на комплексной плоскости в поведением годографа Найквиста, можно делать вывод об устойчивости замкнутых систем.

Моделирование обеих замкнутых систем (непрерывной и дискретной) выполняется в среде Simulink.

1) $\gamma = 1, \varepsilon = 0$. Для моделирования системы в прямой тракт вставляется экс-

траполятор нулевого порядка, который есть в стандартных блоках Simulink. При этом в его параметрах следует указать значение периода квантования.

2) $\gamma = 0.575, \varepsilon = 0$. Для моделирования работы системы с таким экстраполятором дополнительно в схему вставляется блок умножения, но который поступают сигнал генератора импульсов длительностью γT и выходной сигнал экстраполятора.



Результаты моделирования кроме получения переходных характеристик позволяют подтвердить устойчивость систем, исследованную ранее по критерию Найквиста.

Моделирование непосредственно дискретных систем с использованием полученных выше передаточных функций замкнутых систем дает возможность подтвердить правильность их получения.

5. Передаточные функции дискретной системы

Основные соотношения в моделях дискретных систем

В дискретных системах, как и в непрерывных, существуют такие понятия, как разомкнутая и замкнутая системы, соответствующие передаточные функции. На Рис. 5.1 изображена структурная схема замкнутой дискретной системы (с единичной обратной связью).

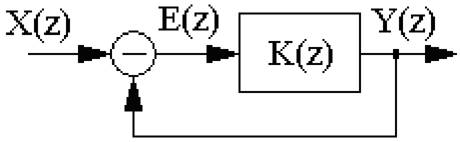


Рис. 5.1.

Так, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$K(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \ , \qquad (5.1)$$

где $A(z)$ и $B(z)$ - полиномы знаменателя и числителя (соответственно) передаточной функции (5.1), то передаточная функция той же замкнутой системы Φ(z) (изображенной на Рис. 5.1) определяется выражением:

$$\Phi(z) = \frac{M(z)}{N(z)} \ , \qquad (5.2)$$

причем $A(z)$ и $N(z)$ - являются характеристическими полиномами разомкнутой и замкнутой систем и будут определять соответствующие уравнения, характеризующие основные свойства дискретных систем, например, устойчивость. Поэтому данные уравнения носят названия характеристических уравнений.

В (5.1) и (5.2) выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{K(z)}{1+K(z)}; \\ M(z) &= B(z); \\ N(z) &= A(z) + B(z); \\ A(z) &= N(z) - M(z). \end{aligned} \qquad (5.3)$$

Переход от математической модели в z-преобразованиях к модели в w-преобразованиях выполняется путем замены аргумента z в соответствии с выражением:

$$z = \frac{1 + T/2 \cdot w}{1 - T/2 \cdot w} \,. \qquad (5.4)$$

Для получения частотных характеристик необходимо в передаточных функциях дискретной системы заменить w на $j\lambda$.

Задание №5

1. Задана ДСАУ:

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}; \quad \Phi(z) = \frac{b_0 \cdot z^5 + b_1 \cdot z^4 + b_2 \cdot z^3 + b_3 \cdot z^2 + b_4 \cdot z + b_5}{a_0 \cdot z^5 + a_1 \cdot z^4 + a_2 \cdot z^3 + a_3 \cdot z^2 + a_4 \cdot z + a_5},$$

   Φ(z) – передаточная функция системы в замкнутом состоянии.
2. Определить устойчивость замкнутой системы любым доступным способом.
3. Найти передаточные функции разомкнутой системы $K(z)$ и $K(w)$ (с учетом единичной обратной связи, при T = 10α мс, где α - вариант Задания).

4. Построить частотные характеристики АЧХ и ФЧХ разомкнутой системы.
5. Исследовать систему на устойчивость методом Найквиста.
6. Оценить влияние параметров передаточной функции ДСАУ (например, коэффициента усиления разомкнутой системы) на устойчивость замкнутой. Построить несколько годографов Найквиста для различных значений варьируемого параметра.
7. Выполнить моделирование замкнутых систем с различными коэффициентами усиления. В процессе моделирования определить критический коэффициент усиления.
8. Сделать выводы.

Варианты заданий

Задача №5.1

Выполнить задание 5 при следующих коэффициентах передаточной функции:

$a_0 = (3\cdot\alpha^2 + 45\cdot\alpha + 162)/8$; $a_1 = -(5\cdot\alpha^2 + 69\cdot\alpha + 252)/8$;

$a_2 = (7\cdot\alpha^2 + 83\cdot\alpha + 270)/16$; $a_3 = -(\alpha^2 + 8\cdot\alpha - 7)/8$; $a_4 = -(\alpha + 17)/4$;

$a_5 = 1$; $b_0 = 0$; $b_1 = 0{,}1\cdot a_1$; $b_2 = 0{,}2\cdot a_1$; $b_3 = 0{,}3\cdot a_1$;

$b_4 = 0{,}4\cdot a_4$; $b_5 = 0{,}5$;

Задача №5.2

Выполнить задание 5 при следующих коэффициентах передаточной функции:

$a_0 = (3\cdot\alpha^2 + 45\cdot\alpha + 162)/8$; $a_1 = (\alpha^2 + 21\cdot\alpha + 72)/8$;

$a_2 = -(\alpha^2 + 11\cdot\alpha + 90)/16$; $a_3 = -(\alpha^2 + 16\cdot\alpha + 65)/8$; $a_4 = -(\alpha + 1)/4$;

$a_5 = 1$; $b_0 = 0$; $b_1 = 0{,}1\cdot a_1$; $b_2 = 0{,}2\cdot a_1$; $b_3 = 0{,}3\cdot a_1$;

$b_4 = 0{,}4\cdot a_4$; $b_5 = 0{,}5$;

Задача №5.3

Выполнить задание 5 при следующих коэффициентах передаточной функции:

$a_0 = -(3\cdot\alpha^2 + 45\cdot\alpha + 162)/8$; $a_1 = -(5\cdot\alpha^2 + 69\cdot\alpha + 252)/8$;

$a_2 = -(7\cdot\alpha^2 + 83\cdot\alpha + 270)/16$; $a_3 = -(\alpha^2 + 8\cdot\alpha - 7)/8$; $a_4 = (\alpha + 17)/4$;

$a_5 = 1$; $b_0 = 0$; $b_1 = 0{,}1\cdot a_1$; $b_2 = 0{,}2\cdot a_1$; $b_3 = 0{,}3\cdot a_1$;

$b_4 = 0{,}4\cdot a_4$; $b_5 = 0{,}5$;

Задача №5.4

Выполнить задание 5 при следующих коэффициентах передаточной функции:

$a_0 = (3\cdot\alpha^2 + 45\cdot\alpha + 162)/8$; $a_1 = (5\cdot\alpha^2 + 93\cdot\alpha + 396)/8$;

$a_2 = (7\cdot\alpha^2 + 165\cdot\alpha + 846)/16$; $a_3 = (\alpha^2 + 36\cdot\alpha + 241)/8$; $a_4 = (3\cdot\alpha + 35)/4$;

$a_5 = 1$; $b_0 = 0$; $b_1 = 0{,}1\cdot a_1$; $b_2 = 0{,}2\cdot a_1$; $b_3 = 0{,}3\cdot a_1$;

$b_4 = 0{,}4\cdot a_4$; $b_5 = 0{,}5$;

Задача №5.5

Выполнить задание 5 при следующих коэффициентах передаточной функции:

$a_0 = -1.042 \cdot \alpha^2 + 6.25 \cdot \alpha + 194.8$; $a_1 = -0.625 \cdot \alpha^2 + 5.833 \cdot \alpha + 198.125$;

$a_2 = -0.708 \cdot \alpha^2 + 5.5 \cdot \alpha + 189.54$; $a_3 = -0.125 \cdot \alpha^2 + 2.1667 \cdot \alpha + 83.625$;

$a_4 = 0.25 \cdot \alpha + 15.417$; $a_5 = 1$; $b_0 = 0$; $b_1 = 0{,}1 \cdot a_1$; $b_2 = 0{,}2 \cdot a_1$;

$b_3 = 0{,}3 \cdot a_1$; $b_4 = 0{,}4 \cdot a_4$; $b_5 = 0{,}5$;

Примечание. α - номер варианта, задается преподавателем.

Методические указания

1. Правильность получения передаточной функции разомкнутой системы проверьте путем моделирования в Simulink.
2. Если исследуемая система неустойчива, путем изменения параметров системы добейтесь ее устойчивости.
3. В случае устойчивой системы, изменяя коэффициент усиления разомкнутой системы, сделать систему неустойчивой.
4. Амплитудные и фазовые характеристики строить в логарифмическом масштабе.
5. При получении частотных характеристик обосновать выбор диапазона частот.
6. Продемонстрировать факт устойчивости (неустойчивости) системы путем построения соответствующих годографов Найквиста.
7. Отдельно построить годограф Найквиста для системы, находящей на границе устойчивости.
8. Путем моделирования получить переходные характеристики замкнутой системы для случаев, когда система:
   - а) Устойчивая,
   - б) Неустойчивая,
   - в) Находится на границе устойчивости (при критическом коэффициенте усиления).
9. Для получения большей достоверности получаемых результатов проверяйте все вычисления в сторонних ресурсах. В наиболее важных местах проводите ручные вычисления.

Контрольные вопросы

1. Необходимое условие работоспособности системы?
2. Что получают из характеристического полинома системы?
3. Когда в системе наблюдается асимптотическая устойчивость?
4. Какой вид движения системы исследуют для определения устойчивости?
5. Для разных методов опишите условие неустойчивости системы.
6. Дайте краткую формулировку критерия Джури.
7. Опишите критерий устойчивости Найквиста?
8. Как найти ПФ замкнутой системы?

Пример выполнения задания

Для передаточной функции замкнутой дискретной системы

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}; \quad \Phi(z) = \frac{b_0 \cdot z^5 + b_1 \cdot z^4 + b_2 \cdot z^3 + b_3 \cdot z^2 + b_4 \cdot z + b_5}{a_0 \cdot z^5 + a_1 \cdot z^4 + a_2 \cdot z^3 + a_3 \cdot z^2 + a_4 \cdot z + a_5}; \; \Phi(z) = \frac{M(z)}{N(z)};$$

определяем в соответствии с заданием значения коэффициентов полиномов.

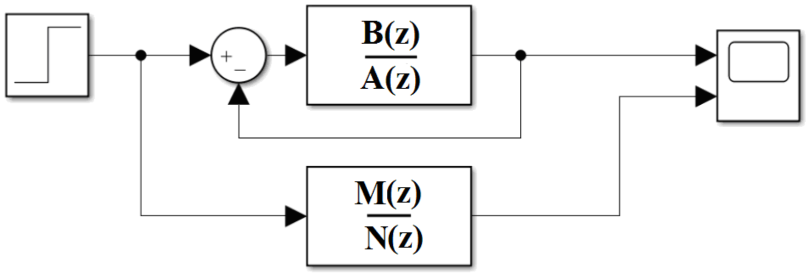
В Mathcad, на основании соотношений, определенных в задании, определим полиномы передаточных функций замкнутой и разомкнутой систем:

$$M(z) := b_0 \cdot z^5 + b_1 \cdot z^4 + b_2 \cdot z^3 + b_3 \cdot z^2 + b_4 \cdot z + b_5 \qquad N(z) := a_0 \cdot z^5 + a_1 \cdot z^4 + a_2 \cdot z^3 + a_3 \cdot z^2 + a_4 \cdot z + a_5$$

$$B(z) := M(z) \qquad A(z) := N(z) - M(z)$$

а также соответствующие передаточные функции.

Проверку полученных передаточных функций выполняем путем моделирования систем в среде Simulink по следующей схеме:



Используя встроенные функции Mathcad coeffs и polyroots определим корни полиномов знаменателя передаточных функций:

$$\text{coeffs\_N} := N(z)\ \text{coeffs}, z \ \rightarrow \qquad \text{roots\_N} := \text{polyroots}(\text{coeffs\_N}) =$$

С помощью вспомогательной функции module можно получить модули этих корней:

$$\text{module}(A) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..\text{last}(A) \\ \quad x_i \leftarrow \sqrt{\text{Re}(A_i)^2 + \text{Im}(A_i)^2} \\ x \end{array} \right. \qquad \text{module}(\text{roots\_N}) =$$

Полученные значения корней (их модули) позволяют судить об устойчивости системы.

Конкретные численные значения передаточных функций могут быть получены с помощью следующих операций:

$$\Phi(z) := \frac{M(z)}{N(z)}\ \text{float}, 5 \ \rightarrow \qquad K(z) := \frac{B(z)}{A(z)}\ \text{float}, 5 \ \rightarrow$$

Для вычисления K(w) следует в K(z) выполнить замену аргумента z и задать конкретное значение периода квантования:

$$z(w) := \frac{1 + \frac{T \cdot w}{2}}{1 - \frac{T \cdot w}{2}} \qquad K_w(w) := K\left(\frac{1 + \frac{T \cdot w}{2}}{1 - \frac{T \cdot w}{2}}\right) \qquad T := 0.0015 \qquad K_w(w) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow$$

При определении передаточной функции разомкнутой дискретной системы в w-преобразованиях, чтобы избавиться от многоэтажных дробей, имеет смысл использовать функцию упрощения (simplify). Кроме того следует указать формат значений коэффициентов передаточной функции, например: числа с плавающей точкой (float, 3). В противном случае значения коэффициентов будут отображены неправильно.

При преобразовании выражений, чтобы раскрыть скобки и привести подобные члены, удобно воспользоваться еще одной функцией: expand. Ее применение понятно из следующего примера:

Если определить

$$\text{den\_K}_w(w) := \left[(w + 1532.0) \cdot \left(1337.0 \cdot w + w^2 + 5.51e6\right) \cdot \left(2562.0 \cdot w + w^2 + 2.07e6\right)\right]$$

Тогда, результат применения этой функции имеет вид:

$$den\_K_w(w)\ expand\ \rightarrow 3.727230972e13\cdot w + 3.3744473608e10\cdot w^2 + 1.6978662e7\cdot w^3 + 5431.0\cdot w^4 + w^5 + 1.74735324e16$$

Для получения частотных характеристик дискретной системы следует перейти в псевдочастотную область, заменив в передаточной функции K(w) аргумент w на jλ, определив j как мнимую единицу.

Перед построением частотных характеристик определятся соответствующие функции:

$$A(\lambda) := \sqrt{Re(K(\lambda))^2 + Im(K(\lambda))^2}$$

$$L(\lambda) := 20 \cdot \log(A(\lambda))$$

$$\varphi(\lambda) := \begin{cases} atan2[(Re(K(\lambda))), Im(K(\lambda))] \cdot \dfrac{180}{\pi} & \text{if } \lambda < 226.799 \\ atan2[(Re(K(\lambda))), Im(K(\lambda))] \cdot \dfrac{180}{\pi} - 360 & \text{if } \lambda \geq 226.8 \end{cases}$$

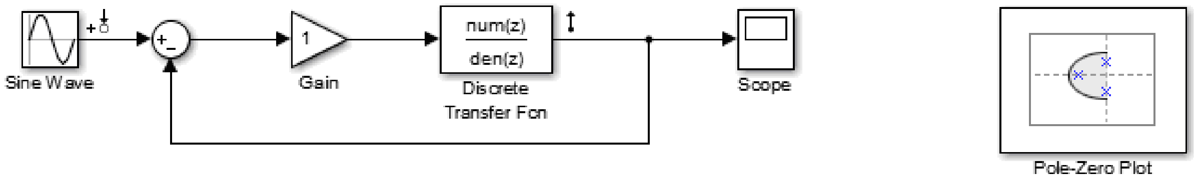
Устойчивость замкнутой системы проверим с помощью критерия Найквиста, построив АФЧХ K(jλ) разомкнутой системы, предварительно определив корни полинома знаменателя передаточной функции K(w) либо K(z).

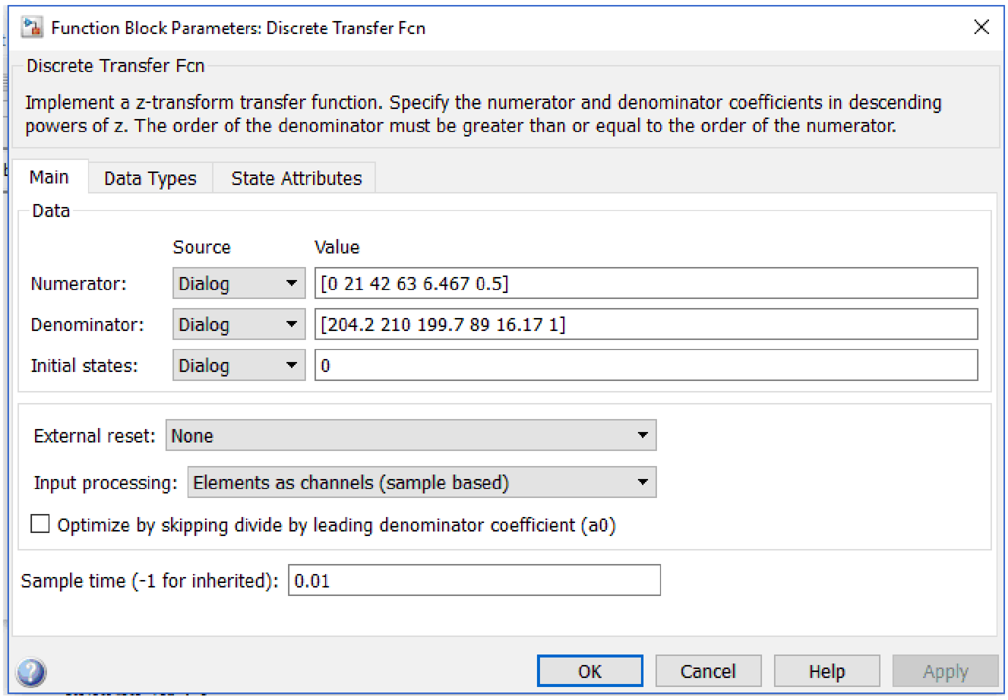
Исследование влияния коэффициента усиления K разомкнутой системы на устойчивость замкнутой выполним двумя способами. Сначала исследуем, как вариации K влияют на поведение годографа Найквиста, сделав соответствующие выводы.

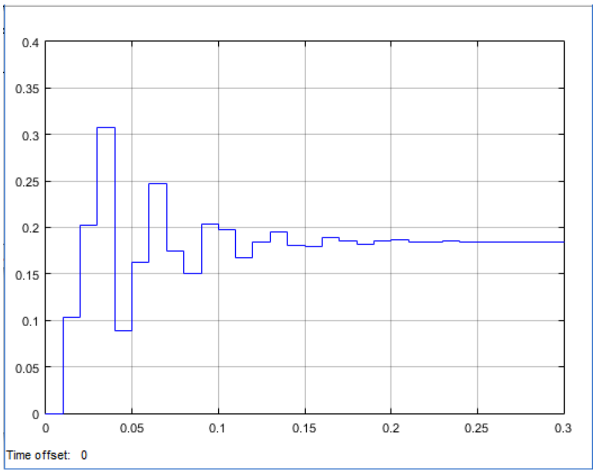
Затем выполним моделированием замкнутой системы с учетом различных значений коэффициента усиления K внедренного в эту систему пропорционального звена, то есть по качеству переходной характеристики.

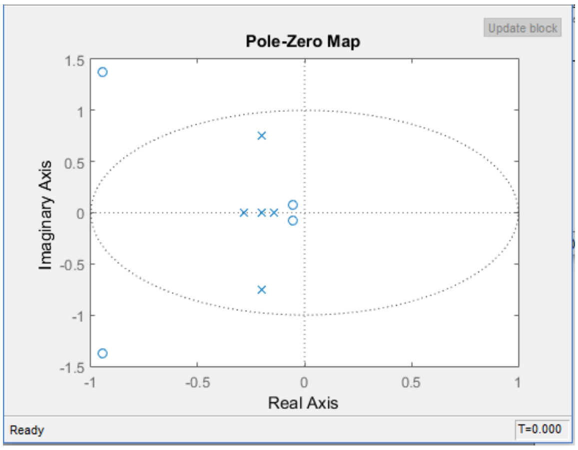
Результаты обоих способов исследования устойчивости должны дать одинаковые результаты.

Моделирование замкнутой системы, как и ранее, выполняется в среде Simulink. Пример построения моделируемой системы понятен из следующих рисунков:









Следует заметить, что построение частотных характеристик удобно выполнять в Excel (или Mathkad).

6. Переходные процессы в дискретных системах

Рекурсивные вычисления методом Джури

Пусть заданы z-преобразования входного сигнала и передаточной функции дискретной САУ в следующем виде:

$$X(z,0)=\frac{B_x(z,0)}{A_x(z,0)}=\frac{b'_0+b'_1\cdot z^{-1}+\ldots+b'_{k-1}\cdot z^{-k+1}+b'_k\cdot z^{-k}}{a'_0+a'_1\cdot z^{-1}+\ldots+a'_{k-1}\cdot z^{-k+1}+a'_k\cdot z^{-k}}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{k}b'_i\cdot z^{-i}}{\sum\limits_{i=0}^{k}a'_i\cdot z^{-i}}; \qquad (6.1)$$

$$\Phi(z,0)=\frac{B_\Phi(z,0)}{A_\Phi(z,0)}=\frac{b''_0+b''_1\cdot z^{-1}+\ldots+b''_{l-1}\cdot z^{-l+1}+b''_l\cdot z^{-l}}{a''_0+a''_1\cdot z^{-1}+\ldots+a''_{l-1}\cdot z^{-l+1}+a''_l\cdot z^{-l}}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{l}b''_i\cdot z^{-i}}{\sum\limits_{i=0}^{l}a''_i\cdot z^{-i}}. \qquad (6.2)$$

Тогда z-преобразование выходного сигнала определяется по формуле:

$$Y(z,0)=\Phi(z,0)\cdot X(z,0)=\frac{B_\Phi(z,0)}{A_\Phi(z,0)}\cdot\frac{B_x(z,0)}{A_x(z,0)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{m}b_i\cdot z^{-i}}{\sum\limits_{i=0}^{m}a_i\cdot z^{-i}}=\sum_{i=0}^{\infty}c_i\cdot z^{-i}. \qquad (6.3)$$

Для получения временной зависимости y[n] (решетчатой функции) существуют различные методики, например, основанные на использовании вычетов. В свое время Э.И.Джури предложил более простой способ получения оригинала y[n] по его изображению $Y(z)$.

Известно (см. формулу дискретного преобразования (2.1) или (2.2)), что:

$$Y(z,0)=\sum_{n=0}^{\infty}y[n]\cdot z^{-n}. \qquad (6.4)$$

Таким образом, сопоставляя (6.4) и (6.3), имеем: $c_0=y[0]$, $c_1=y[1]$, $c_2=y[2],\ldots$ и так далее.

Из формулы (6.3) получаем:

$$\begin{aligned}&b_0\cdot z^0+b_1\cdot z^{-1}+b_2\cdot z^{-2}+\ldots=\\&=a_0\cdot c_0\cdot z^0+(a_0\cdot c_1+a_1\cdot c_0)\cdot z^{-1}+(a_0\cdot c_2+a_1\cdot c_1+a_2\cdot c_0)\cdot z^{-2}+\ldots;\end{aligned} \qquad (6.5)$$

Откуда

$$\begin{aligned}&b_0=a_0\cdot c_0;\\&b_1=a_0\cdot c_1+a_1\cdot c_0;\\&b_2=a_0\cdot c_2+a_1\cdot c_1+a_2\cdot c_0;\\&\cdots\quad\cdots\quad.\end{aligned}$$

или в общем виде:

$$b_i=\sum_{j=0}^{i}a_j\cdot c_{i-j}. \qquad (6.6)$$

Соотношения (6.6) последовательно позволяют определить c_i, необходимые для получения дискретного процесса: $y[i]=c_i$.

При выводе общей формулы (см. ниже) учтено, что при $i > m$ часть коэффициентов a_j в (6.6) нулевые (равны нулю).

$$c_0 = \frac{b_0}{a_0};$$

$$c_1 = \frac{b_1 - c_0 a_1}{a_0};$$

$$c_2 = \frac{b_2 - c_1 a_1 - c_0 a_2}{a_0};$$

$$\ldots \quad \ldots$$

или в общем виде: $$c_k = \frac{b_k - \sum_{i=1}^{M} c_{k-i} a_i}{a_0}, \ldots \qquad (6.7)$$

$$b_k = 0 \text{ при } k > N, \quad c_{k-i} = 0 \text{ при } k - i < 0.$$

Метод приведения к разностному уравнению

Выше, в (6.3) показано, что изображение выходного сигнала

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_M z^{-M}} X(z).$$

Тогда элементарным преобразованием может быть получено операторное уравнение:

$$\left(a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_M z^{-M}\right) Y(z) = \left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}\right) X(z). \qquad (6.8)$$

Далее, с учетом теоремы смещения, когда $z^{-k} Y(z) = \overline{Z}\{y[t - kT]\}$, то есть z^{-k} это сдвиг аргумента на kT назад по времени, получают:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \ldots + a_M y[n-M] = b_0 g[n] + b_1 g[n-1] + \ldots + b_N g[n-N],$$

откуда

$$y[n] = \left(-a_1 y[n-1] - \ldots - a_M y[n-M] + b_0 g[n] + b_1 g[n-1] + \ldots + b_N g[n-N]\right) / a_0, \qquad (6.9)$$

Выражение (6.9) позволяет пошаговым методом получить решетчатую функцию $y[k], \quad k = 0, 1, 2, \ldots$, причем $y[0]$ вычисляется при нулевых начальных значениях: $y[-1] = y[-2] = \ldots = y[-m] = g[-1] = g[-2] = \ldots = g[-n] = 0$.

Значения $g[k] = g[kT], \quad k = 0, 1, 2, \ldots$ задаются в соответствии с характером входного воздействия $g(t)$.

Задание №6

1. Задана ДСАУ, определенная передаточной функцией

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 \cdot z^5 + b_1 \cdot z^4 + b_2 \cdot z^3 + b_3 \cdot z^2 + b_4 \cdot z + b_5}{a_0 \cdot z^5 + a_1 \cdot z^4 + a_2 \cdot z^3 + a_3 \cdot z^2 + a_4 \cdot z + a_5}.$$

2. По данным задания №5 (т.е. в соответствии со своим вариантом) определить изображения выходного сигнала $Y(z,0)$ при входных сигналах:
   - $x(t) = \alpha \cdot 1(t)$;
   - x(t) = sin(ωt), если α < 5,
   - x(t) = cos(ωt) при α > 4; ω = 0.1·α·π / T; Принять T = α/2 с; α - номер варианта из Задания №5.
3. Рассчитать переходный процесс системы:
   - по алгоритму Джури и

- методом приведения к разностному уравнению.

4. Выполнить моделирование системы с Simulink при различных входных сигналах.
5. Сделать выводы.

Методические указания

1. Построение кривых переходных процессов следует выполнять в последовательности, определенной Заданием.
2. Полученные двумя способами кривые переходного процесса при входном сигнале 1(t) сравнить с результатом моделирования системы.
3. Только при полной идентичности всех трех кривых переходить к получению переходного процесса при гармоническом входном сигнале.
4. Реакцию системы на гармонический сигнал отслеживать 1.5 ÷ 2.0 периода этого входного воздействия.
5. Для получения большей достоверности получаемых результатов проверяйте все вычисления в сторонних ресурсах. В наиболее важных местах проводите ручные вычисления (хотя бы получение нескольких точек переходного процесса).

Контрольные вопросы

1. Как найти ПФ замкнутой системы? Как получить ПФ разомкнутой системы?
2. Как, зная ПФ ДСАУ, получить изображение выходного сигнала?
3. Как получается равенство $c_i = y[i]$? Что оно собой представляет?
4. Какими способами можно получить переходную характеристику дискретной системы?
5. Какие существуют способы для получения оригинала дискретного сигнала по его изображению?
6. Можно ли по переходной характеристике системы судить об ее устойчивости? Поясните.

Пример выполнения задания

Для системы с передаточной функцией

$$\Phi(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0\cdot z^5+b_1\cdot z^4+b_2\cdot z^3+b_3\cdot z^2+b_4\cdot z+b_5}{a_0\cdot z^5+a_1\cdot z^4+a_2\cdot z^3+a_3\cdot z^2+a_4\cdot z+a_5}$$

в соответствии с заданием определяем коэффициенты полиномов числителя и знаменателя Φ(z).

В Mathcad производим следующие вычисления:

$$\mathrm{B}(z) := b0\cdot z^5 + b1\cdot z^4 + b2\cdot z^3 + b3\cdot z^2 + b4\cdot z + b5$$

$$\Phi(z) := \frac{\mathrm{B}(z)}{\mathrm{A}(z)} \qquad \mathrm{A}(z) := a0\cdot z^5 + a1\cdot z^4 + a2\cdot z^3 + a3\cdot z^2 + a4\cdot z + a5$$

$$\Phi(z) \to \frac{-0.8\cdot z + 10.049999999999999\cdot z^2 + 6.7\cdot z^3 + 3.35\cdot z^4 + 0.5}{78\cdot z^5 - 2\cdot z + 33.5\cdot z^4 + -13.5\cdot z^3 + -28.25\cdot z^2 + 1}$$

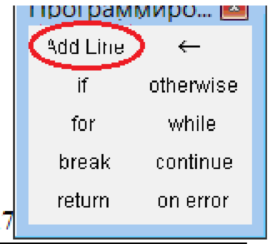
Входной сигнал (единичная ступенчатая функция), поступающий на систему, представляется изображением:

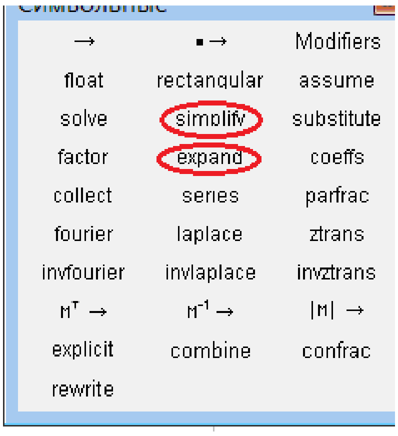
$$X(z)=\frac{z}{z-1}=\frac{1}{1-z^{-1}}.$$

Тогда изображение выходного сигнала будет определено как:

$$Y(z)=\varPhi(z)\cdot X(z).$$

Все вычисления реализованы Mathcad с применением функций expand и simplify и отдельной переменной denRez для вычисления полинома знаменателя:





$$xx(z) := \frac{z}{z-1}$$

$$rez(z) := \Phi(z) \cdot xx(z)$$

$$rez(z) \to \frac{z\cdot\left(-0.8\cdot z + 10.049999999999999\cdot z^2 + 6.7\ldots\right.}{(z-1)\cdot\left(78\cdot z^5 - 2\cdot z + 33.5\cdot z^4 + -13.5\cdot z^3 + -28.25\cdot z^2 + 1\right)}$$

$$denRez(z) := (z-1)\cdot\left(78z^5 - 2z + 33.5z^4 + -13.5z^3 + -28.25z^2 + 1\right)$$

$$denRez(z) \left| \begin{array}{l} simplify \\ expand \end{array} \right. \to 78.0\cdot z^6 - 44.5\cdot z^5 - 47.0\cdot z^4 - 14.75\cdot z^3 + 26.25\cdot z^2 + 3.0\cdot z - 1.0$$

В результате этих действий изображение выходного сигнала системы принимает вид:

$$Y(z) = \frac{3.35z^{-1} + 6.7z^{-2} + 10.05z^{-3} - 0.8z^{-4} + 0.5z^{-5}}{78 - 44.5z^{-1} - 47z^{-2} - 14.75z^{-3} + 26.25z^{-4} + 3z^{-5} - z^{-6}}$$

Получим решетчатую функцию (оригинал изображения Y(z)) методом Джури. Метод Джури основан на важном сопоставлении:

Если выполнить деление числителя изображения Y(z) на его знаменатель, можно получить следующие формулы:

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + c_4 z^{-4} + \ldots,$$

$$\text{где} \quad c_0 = \frac{b_0}{a_0}; \quad c_1 = \frac{b_1 - c_0 a_1}{a_0}; \quad c_2 = \frac{b_2 - c_1 a_1 - c_0 a_2}{a_0}; \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\text{или в общем виде}: \quad c_k = \frac{b_k - \sum_{i=1}^{M} c_{k-i} a_i}{a_0};$$

$b_k = 0$ при $k > N$, $c_{k-i} = 0$ при $k - i < 0$, N и M - порядки полиномов числителя и знаменателя изображения Y(z).

Сопоставив результат с формулой дискретного преобразования Лапласа:

$$Y(z,0) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n]\cdot z^{-n} = y[0]\cdot z^0 + y[1]\cdot z^{-1} + y[2]\cdot z^{-2} + \ldots,$$

получаем важное соотношение $y[k] = c_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Все эти формулы могут быть реализованы в любой вычислительной среде, например, в Excel.

По результатам вычислений (по вычисленным значениям c_k) строится зависимость $y[kT] = c_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$.

Второй способ получения оригинала y(n) основан на приведении

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_M z^{-M}} X(z)$$

к разностному уравнению

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \ldots + a_M y[n-M] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \ldots + b_N x[n-N]$$

и последующему его решению. Для этого необходимо выразить y(n):

$$y[n] = (-a_1 y[n-1] - \ldots - a_M y[n-M] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \ldots + b_N x[n-N]) / a_0 .$$

Здесь N – степень полинома числителя передаточной функции Φ(z), а M – степень его знаменателя.

Данное выражение позволяет пошаговым методом вычислить значения решетчатой функции: $y[k]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, причем $y[0]$ определяется при нулевых начальных значениях. Кроме того следует положить

$$y[-1] = y[-2] = \ldots = y[-m] = x[-1] = x[-2] = \ldots = x[-n] = 0 .$$

Значения $x[k] = x[kT]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ задаются в соответствии с характером входного воздействия $x(t)$. Для единичного ступенчатого воздействия $x[k] = Const = 1 \quad при \quad k \geq 0.$

При подаче на вход системы гармонического входного воздействия $x(t) = \sin(\omega t)$ процесс вычисления $y[k]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ также не вызывает проблем. Следует только учесть, что изображение гармонического сигнала:

$$X(z) = \frac{z \cdot \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cdot \cos(\omega T) + 1}, \qquad \text{а} \quad x[k] = \sin[kT\omega], \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Процесс получения решения $y[k]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ следует закончить, когда полная картина решения будет перед глазами (реакция на полтора - два периода входного сигнала).

Для проверки необходимо выполнить моделирование системы в среде Simulink, подавая на вход системы соответствующие входные воздействия.

7. Синтез дискретных систем

Синтез дискретной системы - это выбор структуры и определение параметров управляющего устройства, позволяющих получить систему с требуемыми характеристиками. Данные характеристики формируются с учетом желаемых показателей качества синтезируемой системы. Задача синтеза функциональной структуры ДСАУ и корректирующего устройства может быть решена различными способами.

Переоборудование. Реализация непрерывного регулятора в цифровой системе

Классические методы синтеза позволяют спроектировать непрерывный регулятор, описываемый передаточной функцией или соответствующим дифференциальным уравнением.

Задача переоборудования состоит в том, чтобы заменить спроектированный непрерывный регулятор цифровым устройством так, чтобы сохранить все существенные свойства непрерывной системы (устойчивость, качество, подавление постоянных возмущений).

Фактически задача переоборудования сводится к преобразованию передаточной функции $W_p(s)$ непрерывного регулятора дискретной передаточной функцией $W_p(z)$ цифрового фильтра. Чаще всего эта процедура выполняется заменой переменной s в передаточной функции регулятора некоторым эквивалентным выражением. Разработано несколько способов такой замены:

- Переоборудование **методом Эйлера:**

$$s \leftarrow \frac{z-1}{T}. \tag{7.1}$$

- Переоборудование **методом обратных разностей** :

$$s \leftarrow \frac{z-1}{zT}. \tag{7.2}$$

- Переоборудование **методом Тастина:**

$$s \leftarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}. \tag{7.3}$$

Перечисленными заменами методы переоборудования не исчерпываются. Существуют и более сложные выражения для преобразования $W_p(s)$ в $W_p(z)$.

Замечание. Для обеспечения близости динамических свойств непрерывной и переоборудованной дискретной систем необходимо еще на этапе синтеза непрерывного регулятора учесть факт запаздывания передачи (преобразования) информации в цифровом вычислительном устройстве. Этот учет обеспечивается добавлением значения периода квантования в дискретной системе к малым постоянным времени на этапе синтеза непрерывной системы.

Полиномиальный синтез

На рис. 7.1. изображена одноконтурная дискретная система:

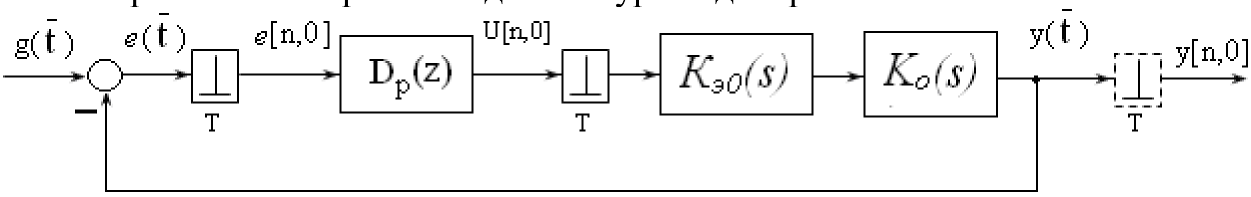


Рис. 7.1.

Аналоговая часть ДСАУ задана ПФ $K_O(s) = \dfrac{B(s)}{A(s)}$, (7.4)

где A(s) и B(s) – известные полиномы модели объекта.

Записывается ДПФ "не скорректированной" разомкнутой дискретной системы с экстраполятором нулевого порядка

$$K_{HC}(z,0) = \frac{B(z)}{A(z)} = \bar{Z}\{K_{Э0}(s)K_O(s)\}. \tag{7.5}$$

Обычно при записи ДПФ пользуются полиномами вида:

$$B(z) = B_0 z^k + B_1 z^{k-1} + B_2 z^{k-2} + \ldots + B_k z^0 \text{ и}$$

$$A(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_m z^0, \tag{7.6}$$

где $k \le m$ (степень полинома числителя не выше степени полинома знаменателя.

Таким образом, для дальнейших исследований можно рассматривать дискретную систему вида:

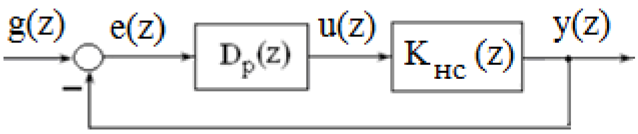


Рис. 7.2.

Предполагается, что дискретная коррекция будет реализована ***в полиномиальной форме*** с ДПФ вида:

$$D_p(z,0) = \frac{C_p(z)}{Q_p(z)}. \tag{7.7}$$

Тогда ДПФ скорректированной системы в разомкнутом виде будет определена выражением:

$$K_C(z,0) = \frac{B(z)}{A(z)} \frac{C_p(z)}{Q_p(z)} = \frac{R(z)}{D(z)},$$

а передаточная функция замкнутой системы, с учетом (7.7), примет вид:

$$\Phi(z,0) = \frac{\dfrac{B(z)}{A(z)} \dfrac{C_p(z)}{Q_p(z)}}{1 + \dfrac{B(z)}{A(z)} \dfrac{C_p(z)}{Q_p(z)}} = \frac{B(z)C_p(z)}{A(z)Q_p(z) + B(z)C_p(z)}. \tag{7.8}$$

Полином знаменателя ДПФ замкнутой системы

$$D_з(z) = A(z)Q_p(z) + B(z)C_p(z) \tag{7.9}$$

задается своими корнями. Следовательно, задача определения параметров передаточной функции дискретного регулятора $D_p(z,0)=\dfrac{C_p(z)}{Q_p(z)}$ может быть сведена к задаче модального синтеза (расположению полюсов (мод) на комплексной плоскости):

$$D_з(\mathrm{z})=\prod_{i=1}^{n}\left(z-z_i\right),\quad \left|z_i\right|<1,\quad i=1,2,\ldots,n\,. \tag{7.10}$$

Задача решения полиномиального уравнения (7.9) с учетом (7.10) получила название задачи размещения полюсов, решением которой являются полиномы $C_p(z)$ и $Q_p(z)$, превращающие (7.9) в тождество. При этом автоматически обеспечиваются необходимые устойчивость и качество системы в целом.

Полиномиальное уравнение (7.9) в общем случае имеет бесконечное множество решений вида:

$$C_p(\mathrm{z})=C_p^*(\mathrm{z})+A(\mathrm{z})U(\mathrm{z})\,;$$

$$Q_p(\mathrm{z})=Q_p^*(\mathrm{z})-B(\mathrm{z})U(\mathrm{z})\,,$$

где $C_p^*(z)$ и $Q_p^*(z)$ - любое решение уравнения (7.9), а $U(z)$ - произвольный полином, который может равняться нулю.

Выбор степеней полиномов, соответствующих минимальному решению уравнения (7.9) с учётом условия (7.10), и обеспечивающих теоретически любое качество регулирования, определяемое $D_з(z)$, осуществляется по выражениям:

$$\begin{aligned}&\deg D_з(\mathrm{z})=2\cdot\deg A(z)-1;\\&\deg Q_p(\mathrm{z})=\deg A(z)-1;\\&\deg C_p(\mathrm{z})=\deg A(z)-1.\end{aligned} \tag{7.11}$$

Если все корни желаемого характеристического полинома нулевые ($z_i=0$, $i=1...n$), замкнутая система будет обладать свойством финитности, когда переходный процесс в ней заканчивается за конечное число тактов.

В системах с астатизмом, что достигается, когда

$$Q_p(z)=\left(z-1\right)^j Q_p^1(z)\quad \text{и (или)}\quad A(z)=\left(z-1\right)^i A^1(z)\,,$$

определение минимальных степеней полиномов выполняется как:

$$\begin{aligned}&\deg D_з(\mathrm{z})=2\cdot\deg A(z)+j-1;\\&\deg Q_p^1(\mathrm{z})=\deg A(z)-1;\\&\deg C_p(\mathrm{z})=\deg A(z)+j-1.\end{aligned} \tag{7.12}$$

Метод прямого программного синтеза: Синтез по желаемой переходной характеристике

Данная методика синтеза выполняется, когда для ДСАУ можно задать типовые эталонные переходные функции (реакции на ступенчатый сигнал).

На основании математической модели ДСАУ (7.5) - (7.8), а также с учетом того, что $Y_{ж}(z,0)=\Phi_{ж}(z,0)\cdot G(z,0)$ $\left(\Phi_{ж}(z,0)=Y_{ж}(z,0)\cdot\left(G(z,0)\right)^{-1}\right)$, получают ***искомую*** ДПФ регулятора в преобразованной форме вида:

$$D_p(z,0)=\frac{A(z)\cdot \Phi_{ж}(z,0)}{B(z)\cdot(1-\Phi_{ж}(z,0))}=\frac{A(z)\cdot Y_{ж}(z,0)}{B(z)\cdot(G(z,0)-Y_{ж}(z,0))}, \qquad (7.13)$$

где $Y_{ж}(z,0)$ и $G(z,0)$ изображения желаемого "выхода" и "входа" модели скорректированной ДСАУ в "z" области.

Если принять $Y_{ж}(z,0)$ в виде $Y_{ж}(z^{-1})$:

$$Y_{ж}(z^{-1})=C_0z^0+C_1z^{-1}+C_2z^{-2}+\ldots, \qquad (7.14)$$

как реакцию ДСАУ на ступенчатый входной сигнал: *g(t)=1(t)* $\left(G(z,0)=(1-z^{-1})^{-1}\right)$, тогда выражение (7.13) приобретает вид:

$$D_p(z,0)=\frac{A(z)\cdot \Phi_{ж}(z,0)}{B(z)\cdot(1-\Phi_{ж}(z,0))}=\frac{A(z^{-1})\cdot Y_{ж}(z^{-1})\cdot(1-z^{-1})}{B(z^{-1})\cdot\left(1-Y_{ж}(z^{-1})\cdot(1-z^{-1})\right)}. \qquad (7.15)$$

Реализация рассматриваемой методики синтеза предполагает учет следующих условий:

- Чтобы коррекция была физически реализуема, нужно иметь равный или меньший порядок полинома числителя $C_p(z^{-1})$ по сравнению с порядком полинома знаменателя $Q_p(z^{-1})$, т.е. $\deg C_p(z^{-1})\le \deg Q_p(z^{-1})$. В том случае, если порядок полинома *B(z)* на один–два меньше порядка полинома *A(z),* то на эту разницу увеличивают порядок полинома $Y_{ж}(z^{-1})$ для знаменателя (7.15), беря дополнительные ординаты переходной функции, но не меняя порядок полинома $Y_{ж}(z^{-1})$ для числителя.
- Для вычисления в числителе (7.15) $Y_{ж}(z^{-1})\cdot(1-z^{-1})=Y_{ж}(z^{-1})-z^{-1}Y_{ж}(z^{-1})$ также в одном из слагаемых берется дополнительный член с целью получения в последовательности последнего значения равного нулю.
- Данная методика синтеза представляет собой компенсацию с помощью ДПФ регулятора нулей и полюсов ПФ объекта управления. Компенсация допустима только когда эти нули и полюса устойчивы. При компенсации неустойчивых множителей вся система в целом будет неустойчива при ненулевых начальных условиях. Поэтому период (интервал) квантования синтезированной дискретной системы должен быть выбран с учетом неравенства:

  $T\ge 1{,}1\cdot\dfrac{\pi}{\omega_{кр}}$, где $\omega_{кр}$ - критическая частота $K_o(s)$.

- Компенсация устойчивых полюсов объекта в цифровых системах приводит к повышенной чувствительности системы к изменению (вариации) параметров, а компенсация устойчивых нулей - к скрытым колебаниям, которые также нежелательны. Следовательно, по результатам синтеза необходимо выполнить моделирование синтезированной системы с целью проверки наличия (отсутствия) в системе скрытых колебаний.

Синтез финитного регулятора

В дискретных системах, в отличие от непрерывных, имеется возможность создать регулятор, при котором переходные процессы будут заканчиваться за конечное число периодов квантования. Такой регулятор и система называются финитными, а соответствующее управление – апериодическим.

Пусть Z-преобразование импульсной переходной функции (реакции системы на импульсное входное воздействие δ(t):

$$w(z) = \Phi(z) \cdot \Delta(z) = \Phi(z) \cdot 1,$$

имеет вид:
$$w(z) = \frac{b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + \ldots + b_k z^0}{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m z^0}.$$

Образ $w(z)$ можно представить в виде ряда Лорана, как разложение по отрицательным степеням аргумента z $\left(z^{-1}\right)$:

$$w(z) = c_0 z^0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \ldots$$

где коэффициенты разложения $\{c_i\}$ есть ординаты импульсной переходной функции $\{w[iT]\}$.

Конечное время переходного процесса имеет место, когда числитель образа выходного сигнала (передаточной функции дискретной системы Φ(z)) делится на знаменатель без остатка. Это возможно, если, например, знаменатель содержит только старшую степень аргумента, т.е. $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$. Тогда (записано для общего случая, когда k = m):

$$w(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_k z^0}{a_0 z^m}, \tag{7.16}$$

а Z-преобразование образа принимает вид

$$w(z) = c_0 z^0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \ldots + c_k z^{-m}. \tag{7.17}$$

Пусть ДПФ нескорректированной системы и регулятора записаны в виде:

$$K_{НС}(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \ldots + b_{m-1} z^1 + b_m z^0}{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1} z^1 + a_m z^0}, \qquad D_p(z) = \frac{C_p(z)}{Q_p(z)}.$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы будет определена как:

$$\Phi_{ж}(z) = \frac{D_p(z,0) \cdot K_{НС}(z,0)}{1 + D_p(z,0) \cdot K_{НС}(z,0)} = \frac{R(z)}{R(z) + D(z)} = \frac{R(z)}{D_з(z)} = \frac{B(z) C_p(z)}{A(z) Q_p(z) + B(z) C_p(z)}.$$

Следовательно, для определения параметров финитного регулятора необходимо решить полиномиальное уравнение

$$A(z) Q_p(z) + B(z) C_p(z) = z^{2m-1} \tag{7.18}$$

относительно полиномов $C_p(z)$ и $Q_p(z)$.

Здесь, как и для случая полиномиального синтеза, степени полиномов должны соответствовать выражениям (7.11).

Если полиномы A(z) и B(z) разлагаются на множители: $A(z) = A_н(z) \cdot A_у(z)$ и $B(z) = B_н(z) \cdot B_у(z)$, когда в полиномах $A_у(z)$ и $B_у(z)$ сосредоточены устойчивые корни, а в $A_н(z)$ и $B_н(z)$ - неустойчивые, регулятор может быть определен передаточной функцией

$$D_p(z) = \frac{C_p^1(z) \cdot A_у(z)}{Q_p^1(z) \cdot B_у(z)},$$

полиномы которого $C_p^1(z)$ и $Q_p^1(z)$ найдутся при решении упрощенного полиномиального уравнения

$$A_н(z)Q_p^1(z)+B_н(z)C_p^1(z)=z^{m_1}. \qquad (7.19)$$

В (7.19) степень m_1, по сравнению со степенью полиномиального уравнения (7.18), уменьшена на наибольшую степень полиномов $A_y(z)$ и $B_y(z)$. Порядки полиномов $C_p^1(z)$ и $Q_p^1(z)$ также стали меньше, чем было определено в (7.11).

Если нескорректированная система устойчива, то есть полюса (корни полинома знаменателя) передаточной функции $K_{НС}(z{,}0)$ по модулю меньше 1, можно определить параметры регулятора по более простой методике (так называемый метод Джури).

Полином числителя ДПФ компенсационного последовательно–включенного регулятора принимается равным полиному знаменателя ДПФ объекта:

$$C_p(z)=A(z) \quad \text{или} \quad C_p\left(z^{-1}\right)=A\left(z^{-1}\right). \qquad (7.20)$$

Тогда, с учетом получения финитного регулятора, когда корни полинома замкнутой системы нулевые $\left(B(z)+Q_p(z)=z^m\right)$ или $\left(B\left(z^{-1}\right)+Q_p\left(z^{-1}\right)=1\right)$, полином $Q_p\left(z^{-1}\right)$ будет определен выражением:

$$Q_p\left(z^{-1}\right)=1-B\left(z^{-1}\right), \qquad (7.21)$$

а ПФ регулятора примет вид:

$$D_p(z^{-1})=\frac{A\left(z^{-1}\right)}{1-B\left(z^{-1}\right)}. \qquad (7.22)$$

Задание №7

1. Задана разомкнутая ДСАУ (объект управления):

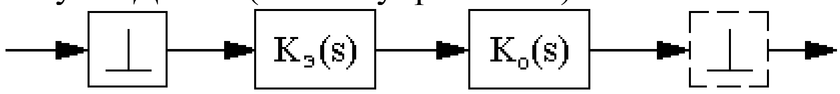


Рис. 7.3.

2. Передаточная функция непрерывной системы $K_o(s)$ определяется вариантом задания №3 либо задания №4 (по согласованию с преподавателем с учетом метода синтеза).
3. В системе применен экстраполятор нулевого порядка.
4. Выполнить расчет параметров регулятора дискретной системы методом, приведенным в таблице 3.
5. Выполнить моделирование синтезированной системы.
6. Оценить влияние вариации параметров объекта управления на качество системы по переходной характеристике.
7. Сделать соответствующие выводы.

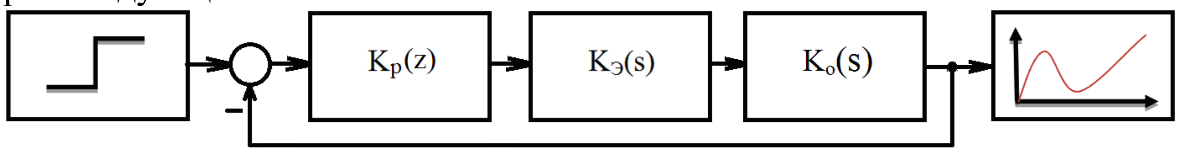
Таблица 3.

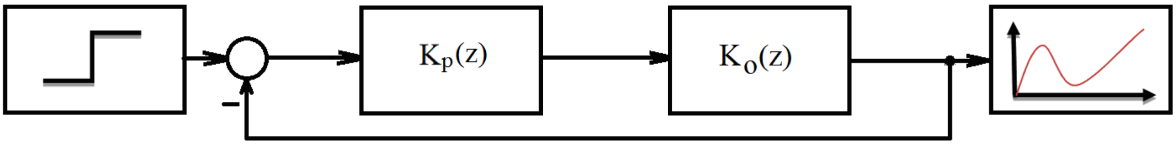
Ваш вариант в задании №4	Наименование метода синтеза
1, 5	Метод переоборудования. При трех различных значениях Т
2, 6	Метод полиномиального синтеза (При трех различных наборах корней)

3, 7	Прямой программный метод (по желаемой переходной характеристике).
4, 8	Метод синтеза финитного регулятора. Решить данную задачу как с помощью полиномиального уравнения, так и по алгоритму Джури.

Методические указания

1. При синтезе дискретной системы методом переоборудования предварительно выполнить синтез непрерывного регулятора, например, по модульному либо симметричному оптимуму (если в объекте управления имеется интегрирующее звено). Регулятор выбирать ПИ-типа. Значение периода квантования дискретной системы учесть на этапе синтеза путем вставки в систему апериодического звена с соответствующей постоянной времени. При синтезе эту постоянную отнести к "малым".
2. Переоборудование непрерывного регулятора выполнить всеми тремя способами.
3. Наборы корней (полюсов), необходимых для полиномиального синтеза, выбирать: а) нулевыми, б) равными 0.5, в) равномерно расположенными на отрезке вещественной оси (-1, +1).
4. Желаемую переходную характеристику для прямого программного метода синтеза задать самостоятельно из 6-8 последовательных значений y[nT].
5. При синтезе финитного регулятора методом Джури для случая, когда объект управления содержит интегрирующего звено, заменить его апериодическим звеном с большой постоянной времени.
6. Моделирование синтезированных систем управления выполнить в Simulink, собрав следующие схемы:





7. При моделировании системы, если при синтезе учтена временная задержка в вычислительном устройстве, вставить в схему моделирования соответствующий элемент (блок задержки на 1 такт).
8. Моделирование выполнять при ступенчатом и гармоническом входных воздействиях. Период гармонического входного сигнала следует подобрать исходя из быстродействия синтезированной системы.
9. Оценку влияния параметров на качество синтезированных системы выполняйте, изменяя поочередно параметры объекта управления от заданных значений с шагом 1.1 - 1.2 раза (на 10 - 20%) - по пять значений в обе стороны. Регулятор при этом не пересчитывается!!!! Качество системы характеризуйте по величине перерегулирования и времени первого согласования. Результаты исследования представьте соответствующими кривыми и переходными характеристиками систем при крайних значениях этих параметров.

Контрольные вопросы

1. В чем заключаются постановка и решение задачи синтеза дискрет-

ной системы?
2. Каковы этапы процедуры синтеза последовательного корректирующего устройства (цифрового регулятора) дискретной системы?
3. Как найти желаемый характеристический многочлен системы, если известны полюса системы?
4. Как осуществляется синтез управления по заданному расположению характеристических чисел замкнутой системы?
5. Как расположение корней характеристического уравнения влияет на переходную характеристику системы?
6. Чем определяется порядок астатизма дискретной системы?
7. Как связана точность отработки сигналов с порядком астатизма системы?
8. Как по виду дискретной передаточной функции определить порядок астатизма цифровой системы?
9. Какое влияние на качество управления в замкнутой системе оказывает замена непрерывного регулятора на цифровой?
10. Чем определяется качество переходных процессов в дискретной системе?

Пример выполнения задания

Методики синтеза дискретных систем, кроме лекционного материала, подробно изложены в файлах "Система", "Синтез по желаемой ПХ" и "Полиномиальный и Финитный синтез". О различных нюансах синтеза непрерывных систем автоматического управления описано в соответствующих лекциях по курсу Теория управления, часть 1.

Заключение

Дискретные системы автоматического управления, учитывая использование в них специальных вычислительных (микропроцессорных) устройств, находят широкое распространение в создаваемой человеком технике.

Математические модели данных систем, процессы, происходящие в них, существенно отличаются от тех, что протекают в непрерывных системах. Математический аппарат, применяемый для исследования дискретных систем также отличается от методов анализа непрерывных систем автоматического управления.

В настоящем учебном пособии рассмотрены такие основополагающие понятия, применяемые для описания процессов в дискретных системах, как решетчатые функции, разделенные и неразделенные разности, различные передаточные функции и переход от одного их вида к другому. На примере решения многочисленных задач закрепляются навыки анализа устойчивости дискретных систем, их поведения во временной области. Особое внимание уделено методикам синтеза и исследованию дискретных систем.

Все рассмотренные разделы теории дискретных систем автоматического управления сопровождаются задачами с методическими указаниями их правильного решения и контрольными вопросами, позволяющими лучше понять поведение и особенности данных систем.

Список рекомендуемой литературы

1. Куо Б.(Бенджамин). Теория и проектирование цифровых систем управления – М.: Машиностроение, 1986 – 448 с.
2. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления / Пер. с англ. Б.И. Копылова. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. - 832 с.
3. Васильев Е. М. Теория автоматического управления. Дискретные системы: учебное пособие / Е. М. Васильев, В. Г. Коломыцев. - Пермь: изд-во Перм. Нац. Исслед. Политех. Ун-та, 2012. - 152 с.
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. – С.-Петербург: изд. «Профессия», 2003. - 752 с.
5. Лурье Б.Я., Энрайт П.Дж. Классические методы автоматического управления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 640с.

Приложение. Варианты заданий

Таблица П-1

№ варианта	**Задача** (две первые цифры - номер задачи из соответствующего задания, последняя цифра - значение варианта α)				
1	1.1.1	2.1.2	3.4.1	4.1.4	5.5.1
2	1.1.2	2.1.3	3.5.1	4.1.5	5.1.2
3	1.1.3	2.1.4	3.6.1	4.1.6	5.2.2
4	1.1.4	2.1.5	3.1.2	4.1.7	5.3.2
5	1.1.5	2.1.6	3.2.2	4.2.1	5.4.2
6	1.1.6	2.1.7	3.3.2	4.2.2	5.5.2
7	1.1.7	2.2.1	3.4.2	4.2.3	5.1.3
8	1.1.8	2.2.3	3.5.2	4.2.4	5.2.3
9	1.1.9	2.2.3	3.6.2	4.2.5	5.3.3
10	1.2.1	2.2.4	3.1.3	4.2.6	5.4.3
11	1.2.2	2.2.5	3.2.3	4.2.7	5.5.3
12	1.2.3	2.2.6	3.3.3	4.3.1	5.1.4
13	1.2.4	2.2.7	3.4.3	4.3.2	5.2.4
14	1.2.5	2.3.1	3.5.3	4.3.3	5.3.4
15	1.2.6	2.3.2	3.6.3	4.3.4	5.4.4
16	1.2.7	2.3.3	3.1.4	4.3.5	5.5.4
17	1.2.8	2.3.4	3.2.4	4.3.6	5.1.5
18	1.2.9	2.3.5	3.3.4	4.3.7	5.2.5
19	1.3.1	2.3.6	3.4.4	4.4.1	5.3.5
20	1.3.2	2.3.7	3.5.4	4.4.2	5.4.5
21	1.3.3	2.4.1	3.6.4	4.4.3	5.5.5
22	1.3.4	2.4.2	3.1.5	4.4.4	5.1.6
23	1.3.5	2.4.3	3.2.5	4.4.5	5.2.6
24	1.3.6	2.4.4	3.3.5	4.4.6	5.3.6
25	1.3.7	2.4.5	3.4.5	4.4.7	5.4.6
26	1.3.8	2.4.6	3.5.5	4.4.8	5.5.6
27	1.3.9	2.5.1	3.6.5	4.5.1	5.1.7
28	1.4.1	2.5.2	3.1.6	4.5.2	5.2.7
29	1.4.2	2.5.3	3.2.6	4.5.3	5.3.7
30	1.4.3	2.5.4	3.3.6	4.5.4	5.4.7
31	1.4.4	2.5.5	3.4.6	4.5.5	5.5.7
32	1.4.5	2.5.6	3.5.6	4.5.6	5.1.8
33	1.4.6	2.6.1	3.6.6	4.5.7	5.2.8
34	1.4.7	2.6.2	3.1.7	4.5.8	5.3.8
35	1.4.8	2.6.3	3.2.7	4.6.1	5.4.8
36	1.4.9	2.6.4	3.3.7	4.6.2	5.5.8
37	1.5.1	2.6.5	3.4.7	4.6.3	5.1.9
38	1.5.2	2.6.6	3.5.7	4.6.4	5.2.9
39	1.5.3	2.7.1	3.1.8	4.6.5	5.3.9
40	1.5.4	2.7.2	3.2.8	4.6.6	5.4.9
41	1.5.5	2.7.3	3.3.8	4.6.7	5.5.9
42	1.5.6	2.7.4	3.4.8	4.6.8	5.1.1
43	1.5.7	2.7.5	3.5.8	4.1.1	5.2.1
44	1.5.8	2.7.6	3.1.1	4.1.2	5.3.1
45	1.5.9	2.1.1	3.3.1	4.1.3	5.4.1