Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ФИЛИПОВСКИЙ ВЛАДИМИР МИХАЙЛОВИЧ

Системы управления в пространстве состояний

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2022

УДК 681.5.01

Филиповский В.М. **Системы управления в пространстве состояний**: Учебное пособие / В.М. Филиповский. – СПб., 2022. – 75 с.

Пособие соответствует ФГОС ВО по направлению подготовки 27.03.04 «Управление в технических системах» (уровень бакалавриата).

В учебном пособии представлены базовые положения современной теории управления и основного аппарата теории — метода пространства состояний. Рассмотрены различные формы векторно-матричной записи математических моделей динамических систем, включая форму Коши и модель в пространстве состояний, с переходом от одной формы модели к другой. Излагаются основные свойства и особенности систем управления, а также методы анализа и синтеза линейных и нелинейных систем автоматического управления. Ряд методов синтеза проиллюстрирован примерами.

Настоящее пособие предназначено студентам Высшей Школы Киберфизических систем и Управления (программы «Управление в технических системах») в качестве пособия по освоению курса «Системы автоматического управления».

Ключевые слова: Система автоматического управления, математическая модель, система дифференциальных уравнений, форма Коши, вектор состояния системы, устойчивость системы, устойчивость по Ляпунову, функция Ляпунова, синтез систем, метод модального синтеза, линеаризация обратными связями, структурный синтез.

Оглавление

Введение

Теория управления в настоящее время является одной из важнейших технических наук общего применения. Она дает основную теоретическую базу для изучения и проектирования любых автоматических и автоматизированных систем во всех областях техники и деятельности человека.

Теория автоматического управления изучает процессы управления, методы их исследования и основы проектирования автоматических систем и входит в науку под общим названием кибернетика.

Теория управления прошла значительный путь своего развития. Были созданы методы анализа устойчивости, качества и точности регулирования непрерывных и линейных систем, базирующиеся на частотных методах. Математические модели таких систем могут быть представлены в виде структурной схемы или ориентированного графа.

Современная теория управления, основу которой заложили известные работы Л.С.Понтрягина, Р.Беллмана и Р.Калмана, базируется на описании систем в пространстве состояний. Описание в пространстве состояний представляет собой общий взгляд на любые системы и пригодно для исследования и синтеза сложных систем, как многомерных, так и многосвязных. С математической точки зрения описание систем в пространстве состояний означает использование методов матричного исчисления и векторного анализа.

Понятие состояния является определяющим в современной теории управления.

Состояние системы – это совокупность таких значений переменных, знание которых, наряду с входными функциями и уравнениями, описывающими динамику системы, позволяет определить её будущее состояние и выходную переменную.

Вектор состояния системы - минимальный набор координат, однозначно определяющих состояние системы в любой конкретный момент времени.

Пространство состояний — один из основных методов описания поведения динамической системы во временной области. Движение системы в пространстве состояний представляется кривой (траекторией движения системы) и отражает изменение положения вектора состояния в этом пространстве.

В пространстве состояний создаётся модель динамической системы, включающая набор переменных входа, выхода и состояния, связанных между собой дифференциальными уравнениями первого порядка, записанными в матричной форме. Эта система дифференциальных уравнений первого порядка представляет собой основу математической модели многомерной динамической системы и называется уравнением состояния. Модели в пространстве состояний описывают поведение объекта управления или системы в целом во временной области и позволяют работать не только с линейными системами и нулевыми начальными условиями.

Исследование системы управления во временной области с помощью переменных состояния предпочтительнее как по методическим соображениям, так и благодаря удобству обозначений и простоте проведения анализа. Преимущество методического характера обусловливается возможностью охарактеризовать систему понятием «состояние системы», которому соответствует точка в определённом евклидовом пространстве, а поведение системы во времени характеризуется траекторией, описываемой этой точкой.

Метод пространства состояний в теории управления способствует совершенствованию методов проектирования (синтеза) сложных динамических систем. Последнее требует значительного увеличения объема перерабатываемой информации и более сложных методов формирования законов управления. Применение матриц и векторов позволяет записывать в более компактном виде, как уравнения системы управления, так и их решение. Во временной области уравнения могут быть исследованы численными методами с использованием ЭВМ. В этом случае представление системы в пространстве состояний оказывается особенно удобным.

1. Уравнения динамики САУ

В теории автоматического управления имеют дело не с реальными системами, а с их моделями. Эти модели чаще всего представлены дифференциальными уравнениями.

Математические **модели систем** обычно получают на основании ***совокупности (системы)*** неоднородных дифференциальных уравнений от нулевого до второго порядка. В ней "выходами" и "входами" будут промежуточные (***внутренние***) переменные. Такая система уравнений определяется с учетом принятого представления о математических моделях всех элементов, составляющих данную САУ, и информационных связей между ними, то есть по структурной схеме системы. Механическая часть ***физически реальной*** САУ описывается уравнениями Лагранжа (второго или первого рода), электрическая часть - уравнениями электродинамики, а информационная часть - уравнениями теории электронных цепей.

Вся эта совокупность уравнений позволяет получить математическую модель системы в виде развернутого дифференциального уравнения n-го порядка, связывающего выходные переменные системы со входными.

Кроме дифференциального уравнения высокого порядка математическая модель системы может быть представлена в одной из стандартных форм:

- в виде передаточных функций - W(s), Φ(s), Φ_ε(s);
- в форме Коши;
- в пространстве состояний;
- в фазовом пространстве (в фазовых переменных);
- решение относительно регулируемой величины - $y(t)$.

1.1. Уравнения системы "вход-выход"

Развернутое дифференциальное уравнение динамической системы для случая одного входа и одного выхода обычно записывается в виде:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y \quad = \quad b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + b_m x\,, \tag{1.1}$$

или, с учетом оператора дифференцирования $p = \dfrac{d}{dt}$, операторным уравнением:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n) y(t) \quad = \quad (b_0 p^m + \ldots + b_m) x(t)\,. \tag{1.1'}$$

Откуда получается:

$$y(t) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n} x(t)\,. \tag{1.2}$$

Если обозначить $Q(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$ - собственный полином системы, $R(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m$ - входной полином, тогда динамика системы будет определяться выражениями:

$$Q(p) \cdot y(t) = R(p) \cdot x(t) \quad \text{или} \quad y(t) = \frac{R(p)}{Q(p)} x(t)\,. \tag{1.2'}$$

При наличии второго входного сигнала (возмущения) уравнение, описывающее систему, усложняется:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y \quad = \quad b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + b_m x \quad + \quad c_0 \frac{d^k z}{dt^k} + \ldots + c_k z\,, \tag{1.3}$$

или в операторной форме: $$y(t) = \frac{R(p)}{Q(p)} x(t) + \frac{G(p)}{Q(p)} z(t)\,, \tag{1.3'}$$

где $G(p) = c_0 p^k + c_1 p^{k-1} + \ldots + c_k$ - полином возмущения.

Полученные уравнения называются **уравнениями вход-выход**.

1.2. Преобразование Лапласа и передаточные функции

Известно, что используемый выше оператор дифференцирования p имеет тесную связь с переменной s интегрального преобразования Лапласа, которая является комплексной величиной. Для линейных дифференциальных уравнений с постоянными параметрами при нулевых начальных условиях и точностью до обозначения оператор p соответствует переменной s, то есть $p=s$.

Это обстоятельство позволяет использовать для решения приведенных выше дифференциальных уравнений, а также для моделирования САУ, интегральное преобразование Лапласа. Для перехода от реальных функций времени – оригиналов к их изображениям по Лапласу и обратно применяется прямое и обратное интегральные преобразования вида:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]; \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt\,. \tag{1.4}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]; \quad f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds\,. \tag{1.4'}$$

При этом $f(t)$ называют оригиналом, а $F(s)$ – изображением. Полагают, что функция $f(t)$ обладает следующими свойствами:

- $f(t)$ определена и кусочно–дифференцируема на всей положительной числовой полуоси ($0 \le t < \infty$);
- $f(t)=0$ при $t<0$;
- существуют такие положительные числа М и С, при которых выполняется соотношение: $f(t) \le M \cdot e^{-ct}$ при $0 \le t < \infty$.

В этом случае система (1.3) описывается **передаточными функциями**:

$$\Phi_x(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R(s)}{Q(s)}, \quad \Phi_z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{G(s)}{Q(s)},$$

а математическая модель системы в операторной форме принимает вид:

$$Y(s) = \Phi_x(s) X(s) + \Phi_z(s) Z(s)\,, \tag{1.3''}$$

Коэффициенты полиномов R(s), Q(s) и Gs) в (1.3") идентичны коэффициентам соответствующих полиномов в (1.3’), если обе формы математической модели описывают процессы в одной системе при нулевых начальных условиях.

1.3. Модели системы в пространстве состояний

Форма Коши - матричная форма записи системы дифференциальных уравнений (ДУ), разрешенных исключительно относительно первых производных координат (переменных) системы управления.

Пространство состояний - матричная форма записи системы ДУ САУ, адаптированная для теории управления путем выделения из формы Коши алгебраических уравнений, связывающих внутренние координаты САУ с выходной (выходными). Применяется для описания систем большого порядка, как правило, с несколькими входами/выходами и с перекрестными связями.

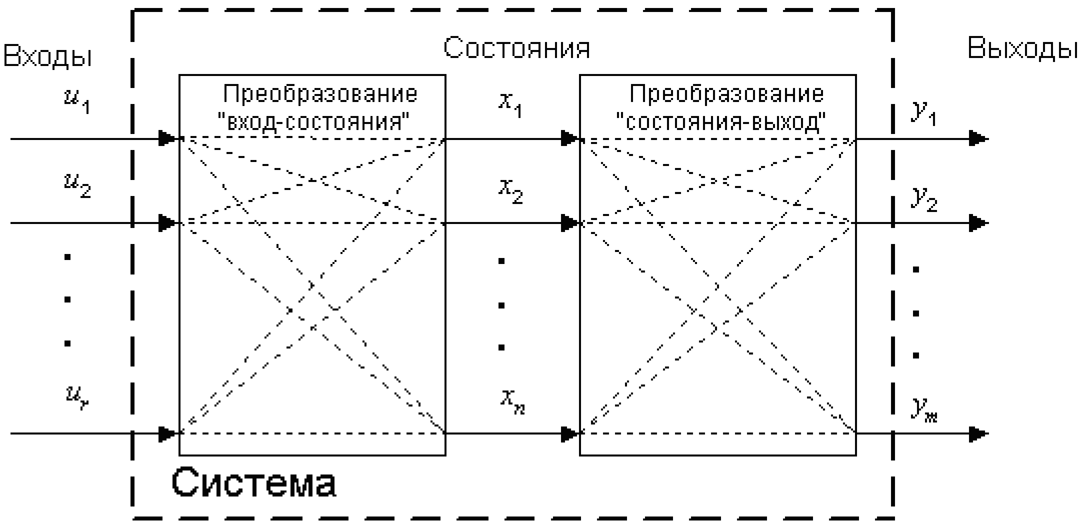
Под **состоянием системы** понимается минимально-необходимый набор значений переменных величин системы, способных однозначно и единственным образом определить положение системы в любой момент времени t.

Для описания таких систем, как показано на рисунке, используются три набора параметров (три вектора):

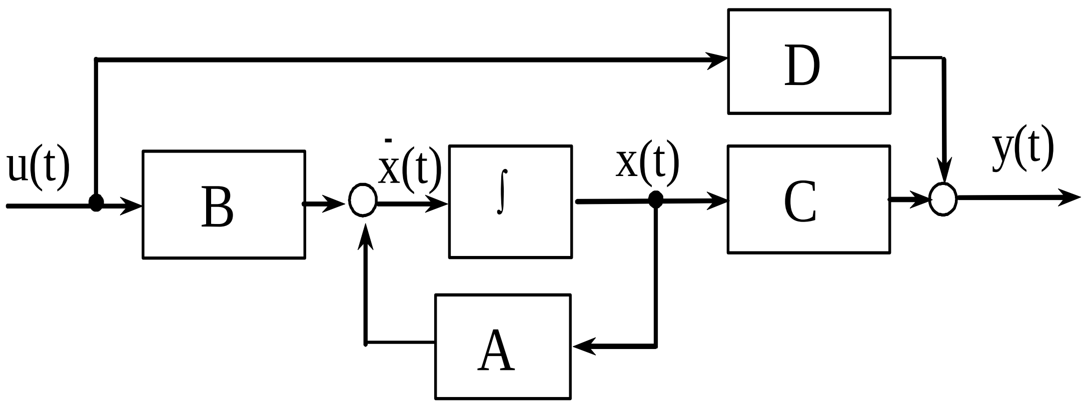
- вектор входных воздействий (управлений);
- вектор переменных состояния;
- вектор выходных параметров;

и два преобразования:

- преобразование “входы-состояния”;
- преобразование “состояния-выходы”.



Широкое распространение, обусловленное разработанным математическим аппаратом, получили линейные модели многомерных систем в пространстве состояний, имеющие вид:



$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU, \\ Y = CX + DU, \end{cases} \tag{1.5}$$

где X - вектор состояний системы, Y - вектор выходных управляемых величин, U - вектор входных воздействий (задающих и возмущающих); A, B, C, D – матрицы системы, A – матрица системы, B – матрица управления, C – матрица наблюдения (иногда: матрица выхода), D – матрица связи.

Уравнения (1.5) несут большой объем информации о динамических свойствах системы с r входами и m выходами при $t_0 \le t \le T$. Первое уравнение определяет динамические характеристики системы и представляет собой компактную запись системы n линейных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных первого порядка (нормальная форма Коши).

Второе уравнение является уравнением выхода системы и представляет собой компактную запись системы m линейных алгебраических уравнений.

Матрица системы A, элементы которой определяются структурной схемой системы и значениями ее параметров, характеризует динамические свойства системы, ее свободное движение. Матрица управления B характеризует влияние внешних воздействий на переменные состояния системы, то есть определяет чувствительность системы к внешним воздействиям (задающим и возмущающим). Матрица наблюдения C характеризует связь выходной величины системы с вектором состояния. Обычно не все составляющие вектора состояния являются наблюдаемыми сигналами, т.е. могут быть измерены с помощью каких-либо датчиков, в то время как выходной сигнал всегда наблюдаем. Матрица связи D устанавливает связь выходной величины системы с внешним воздействием. Таким образом, четверка матриц A, B, C, D полностью определяет систему управления. Часто матрица D является нулевой, это означает, что в системе нет явной прямой связи.

Математическая модель системы в пространстве состояний (1.5) получается на основании соответствующих законов, описывающих функционирование конкретных звеньев системы, с последующим переходом к векторно-матричной формы записи. Об этом подробно рассматривалось в курсе «Математические модели технических систем».

Вектором фазовых переменных системы называется такой вектор переменных состояния, когда каждая компонента вектора (кроме первой) есть производная предыдущей по номеру компоненты. А математическая модель в этом случае называется **моделью системы в фазовом пространстве** (моделью в фазовых переменных).

Возможно преобразование одной формы математической модели к другой.

Пример 1. В данном примере выполнено преобразование к системе (1.5) в фазовых переменных уравнения вход-выход (1.1) вида:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y \quad = \quad b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m u$$

при начальных условиях $y(t_0) = y^0; \quad y'(t_0) = y^1; \quad \ldots; \quad y^{(n-1)}(t_0) = y^{n-1}.$

После введения вектора состояния системы (вектора фазовых переменных) получают:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = u(t) - a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \ldots - a_1 x_n. \end{cases}$$

Данная система уравнений представляется в матричной форме

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad y = CX,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix},$$

где

$$C = (b_m, \quad b_{m-1}, \quad \ldots, \quad b_0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0).$$

Вектор начальных значений, когда $b_m = 1$, $b_{m-1} = \ldots = b_0 = 0$, определяется как

$$X(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ \ldots \\ y^{n-1} \end{pmatrix}.$$

В более общем случае для нахождения значений вектора $X(t_0)$ существуют другие (более сложные) формулы.

Пример 2. Преобразование уравнения вход-выход для случая нескольких входов к системе уравнений в пространстве состояний.

$$a_0 \frac{d^4 y}{dt^4} + a_1 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_3 \frac{dy}{dt} + a_4 y = b_0 \frac{d^2 u}{dt^2} + b_1 \frac{du}{dt} + b_2 u + c_0 \frac{d^3 v}{dt^3} + c_1 \frac{d^2 v}{dt^2} + c_2 \frac{dv}{dt}.$$

Дифференциальное уравнение системы первоначально записывается в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{d}{dt}\underbrace{(a_0 y)}_{X_1} + a_1 y - c_0 v}_{X_2}\right) + a_2 y - c_1 v - b_0 u}_{X_3}\right) + a_3 y - c_2 v - b_1 u}_{X_4}\right) + a_4 y - b_2 u = 0.$$

Откуда последовательно получают: $a_0 y = X_1$,

$$\frac{d}{dt} X_1 + a_1 y - c_0 v = X_2, \qquad \frac{d}{dt} X_2 + a_2 y - c_1 v - b_0 u = X_3,$$

$$\frac{d}{dt} X_3 + a_3 y - c_2 v - b_1 u = X_4, \qquad \frac{d}{dt} X_4 + a_4 y - b_2 u = 0.$$

Можно положить $a_0 = 1$, что достигается делением исходного дифференциального уравнения на a_0, откуда $X_1 = y$, а полученная система будет приведена к форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = -a_1 X_1 + X_2 + c_0 v, \\ \dot{X}_2 = -a_2 X_1 + X_3 + c_1 v + b_0 u, \\ \dot{X}_3 = -a_3 X_1 + X_4 + c_2 v + b_1 u, \\ \dot{X}_4 = -a_4 X_1 + b_2 u. \end{cases}$$

Или в матричной форме: $\dot{X} = AX + BU, \quad y = CX,$ где $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & c_0 \\ b_0 & c_1 \\ b_1 & c_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Преобразование дифференциального уравнения вход-выход с несколькими входами к системе в фазовых переменных.

$$a_0 \frac{d^4 y}{dt^4} + a_1 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_3 \frac{dy}{dt} + a_4 y = b_0 \frac{d^2 u}{dt^2} + b_1 \frac{du}{dt} + b_2 u + c_0 \frac{d^3 v}{dt^3} + c_1 \frac{d^2 v}{dt^2} + c_2 \frac{dv}{dt}.$$

Матрица системы А и матрица управления В однозначно определяются коэффициентами дифференциального уравнения (собственного полинома системы) (при $a_0 = 1$):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система – линейная, поэтому отклик системы на сумму воздействий равен сумме откликов на каждое воздействие.

1. Пусть $v = 0$. Тогда:

$$\dot{X}_u = AX_u + Bu.$$

На выходе схемы:

$$y_1 = bX_u, \quad b = \begin{pmatrix} b_2 & b_1 & b_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Пусть $u = 0$. Тогда:

$$\dot{X}_v = AX_v + Bv.$$

На выходе схемы:

$$y_2 = cX_v, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & c_2 & c_1 & c_0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, выход системы от одновременного воздействия обоих входных сигналов будет определяться выражением:

$$y = y_1 + y_2 = bX_u + cX_v.$$

Полученные уравнения позволяют записать математическую модель системы в виде:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} b & c \end{pmatrix} \cdot X, \quad \text{где} \quad X = \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}.$$

Как следует из этих уравнений, вектор состояния, матрица системы, матрица управления и матрица наблюдения имеют блочную структуру.

Система, в математической модели которой все коэффициенты a_i и b_j полиномов $Q(p)$ и $R(p)$ в (1.1), как и элементы матриц A и B в (1.5), есть постоянные величины, называется ***стационарной***. В случае переменных (во времени) коэффициентов система называется ***нестациаонарной***.

1.4. Математические модели нелинейных систем

Динамическая система называется ***нелинейной,*** если значение хотя бы одного из коэффициентов в (1.1) или (1.5) зависит от величины *какой-либо переменной САУ* (входной, внутренней или выходной), такая.

К нелинейным системам автоматического управления (НСАУ) относятся все технические устройства с обратной связью, математические модели которых описываются *неоднородными нелинейными дифференциальными уравнениями,* например, для одного входа и одного выхода, вида:

$$f\left(y^{(n)},\, y^{(n-1)},\, \dots,\, y,\; x^{(m)},\; x^{(m-1)},\; \dots,\; x\right) = 0\,, \tag{1.6}$$

либо *системой нелинейных дифференциальных уравнений*:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i\left(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\right), \quad i = 1,2,\dots,n\,. \tag{1.7}$$

В векторной форме система (1.7) записывается как

$$\dot{X}(t) = F\left(X(t)\right), \tag{1.7'}$$

где $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad F\left(X(t)\right) = \begin{pmatrix} f_1\left(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\right) \\ f_2\left(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\right) \\ \vdots \\ f_n\left(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\right) \end{pmatrix}.$

В некоторых случаях нелинейное дифференциальное уравнение (1.6) приводят к линейному виду (линеаризуют). Эта операция выполняется с помощью формулы Тейлора. После отбрасывания старших производных (2-й степени и выше) получают:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y_0} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{y_0'} \Delta y' + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\Big|_{y_0^{(n)}} \Delta y^{(n)} + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial x'}\Big|_{x_0'} \Delta x' + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^{(m)}}\Big|_{x_0^{(m)}} \Delta x^{(m)} = 0, \tag{1.8}$$

то есть линейное уравнение с постоянными коэффициентами. А с учетом того, что $\Delta y^{(n)} = \dfrac{d^n \Delta y}{dt^n}$:

$$a_0 \frac{d^n \Delta y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}\Delta y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{d\Delta y}{dt} + a_n \Delta y = b_0 \frac{d^m \Delta x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1}\Delta x}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1}\frac{d\Delta x}{dt} + b_m \Delta x\,. \tag{1.8'}$$

Уравнение (1.8') описывает поведение звена только в окрестности некоторой точки $\left(x_0, x_0', x_0'' \dots, x_0{}^{(m)}, y_0, y_0' \dots, y_0{}^{(n)}\right)$, называемой точкой линеаризации, или рабочей точкой.

При значительном удалении от точки линеаризации данное уравнение как правило несправедливо. Полученное уравнение также называется уравнением в отклонениях или уравнением вариации. Практически отклонения Δx и Δy заменяют на x и y. Тогда окончательно получают линейное дифференциальное уравнение:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + \dots b_m x\ . \tag{1.9}$$

Аналогичным образом может быть линеаризована и система дифференциальных уравнений (1.7), если вектор-функции этой системы разложить в ряд

Маклорена по переменным x_i, выделив линейные члены. Система уравнений (1.7) в результате этих математических операций будет преобразована к виду:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(0)\cdot x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(0)\cdot x_2 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(0)\cdot x_n + R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad (1.10)$$

или в векторно-матричной форме

$$\dot{X}(t) = J\cdot X(t) + R(X(t)), \quad (1.10')$$

где J – матрица Якоби, составленная из частных производных вектор-функции $F(X)$,а компоненты вектор-функции $R(X)$ описывают члены второго порядка малости относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Предполагается, что элементы матрицы Якоби – непрерывные функции.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Значения частных производных в матрице Якоби вычисляются в точке разложения (1.7) в ряд, в основном в точке равновесия системы (например, X=0).

Линеаризованная система

$$\dot{X}(t) = J\cdot X(t), \quad (1.11)$$

полученная из (1.10') в результате выделения линейной части, называется **системой уравнений первого приближения** по отношению к исходной системе (1.10) или (1.7).

1.5. Решение относительно регулируемой величины

Поведение САУ кроме рассмотренных математических моделей может быть представлено **решением относительно регулируемой величины - *y(t)***. Данная зависимость получается путем интегрирования дифференциального уравнения (1.1) или системы дифференциальных уравнений (1.5) относительно выходной переменной системы (регулируемой величины) $y(t)$. Решение дифференциальных уравнений выполняется методами математического анализа или иными способами.

Для линейных систем справедлив принцип суперпозиции: эффект, вызываемый суммой нескольких воздействий, равен сумме эффектов от нескольких воздействий в отдельности. Закон изменения вектора состояний линейной системы представляется суммой свободного и вынужденного движений:

$$X(t) = X_c(t) + X_в(t).$$

Свободное движение $X_c(t)$ происходит при отсутствии внешнего воздействия и ненулевых начальных условиях. Оно определяется решением однородной системы уравнений, соответствующей исходному уравнению состояний

$$\dot{X}(t) = A\cdot X(t)$$

с начальными условиями $X(t_0) = X_0$.

Вынужденное движение $X_в(t)$ – это реакция системы на внешнее воздействие $U(t)$ при нулевых начальных условиях. Оно определяется решением неоднородного уравнения (1.5) при нулевых начальных условиях.

Для многомерных нестационарных (в общем случае) систем поведение векторов состояния и выхода будет определяться по формулам

$$X(t) = \Phi(t,t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)U(\tau)d\tau \,, \tag{1.12}$$

$$Y(t) = C\Phi(t,t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} C\Phi(t,\tau)B(\tau)U(\tau)d\tau \,, \tag{1.12'}$$

где $\Phi(t, \tau)$ – переходная матрица, или матрица Коши, являющаяся решением матричного дифференциального уравнения:

$$\frac{d\Phi(t,\tau)}{d\,t} = A(t)\cdot\Phi(t,\tau) \tag{1.13}$$

с начальным условием $\Phi(\tau,\tau) = E$.

Первые слагаемые в (1.12) и (1.12’) описывают свободное движение системы, а вторые - вынужденное.

Для многомерных стационарных систем, описываемых уравнениями (1.5), законы изменения вектора состояния и вектора выхода находятся по формулам

$$X(t) = \Phi(t-t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)BU(\tau)d\tau \,, \tag{1.14}$$

$$Y(t) = C\Phi(t-t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} C\Phi(t-\tau)BU(\tau)d\tau \,, \tag{1.14'}$$

где $\Phi(t-\tau)$ – переходная матрица стационарной системы, зависящая от разности $(t-\tau)$. В данном случае решение уравнения (1.13) имеет вид:

$$\Phi(t,\tau) = \Phi(t-\tau) = Exp\big(A\cdot(t-\tau)\big). \tag{1.15}$$

Решения (1.14), (1.15) системы (1.5) получены в соответствии с формулой Коши-Лейбница, по аналогии со скалярным случаем:

Для однородного дифференциального уравнения $\dot{x} = ax$ решение $x(t) = c\cdot e^{at}$.

В случае неоднородного уравнения $\dot{x} = ax + b$ решение ищется в виде $x(t) = e^{at}\cdot c(t)$ (метод вариации произвольных постоянных). Если продифференцировать $x(t)$: $\dot{x} = ae^{at}c(t) + e^{at}\dfrac{dc(t)}{dt}$. Тогда, приравнивая $ae^{at}c(t) + e^{at}\dfrac{dc(t)}{dt} = ae^{at}c(t) + b$,

получают $\dot{c} = e^{-at}b$, откуда $c(t) = \int_0^t e^{-at}bd\tau + c$.

Окончательно $x(t) = e^{at}c + e^{at}\int_0^t e^{-at}bd\tau = e^{at}c + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bd\tau$.

2. Проблема устойчивости систем автоматического управления и методы её решения

2.1. Исходные положения

В теории систем автоматического управления понятие устойчивости является основной характеристикой систем, определяя их "работоспособность". Неустойчивая система - неработоспособна. При этом ссылаются на характер ***переходного процесса системы (в системе)***, указывая, что этот процесс должен быть устойчивым, сходящимся, а не расходящимся. ***Переходный процесс*** определяется решением ***неоднородного*** дифференциального уравнения математической модели САУ.

При рассмотрении линейной САУ под устойчивостью динамического процесса физической системы понимается способность его возвращаться к первоначальному состоянию ***после*** внешнего **импульсного** воздействия на систему. Поскольку этот процесс совершается ***после*** снятия воздействия, то, следовательно, он (динамический процесс) является одним из ***свободных движений*** изучаемой физической системы (не обязательно линейной).

Если ***любые*** свободные движения системы (свободной от всех имеющихся внешних воздействий на неё) устойчивы, то считается устойчивой ***собственно система.*** Такова физическая сущность проблемы устойчивости систем автоматического управления (линейных и нелинейных).

В математике решение произвольного дифференциального уравнения (или, шире, траектория динамической системы) называется **устойчивым**, если решения с близкими начальными условиями «не сильно отличаются» от исходного. Именно так определяется понятие **устойчивости траектории, динамического процесса** или **решения** дифференциального уравнения. Слова «не сильно отличаются» при этом можно формализовать по-разному, получая разные формальные определения устойчивости: устойчивость по Ляпунову, асимптотическую устойчивость и т.д. Обычно рассматривается задача **устойчивости тривиального решения в особой точке**, поскольку задача **устойчивости произвольной траектории (динамического процесса)** сводится к данной путем замены неизвестной функции или переменных.

В теории ЛСАУ, изучая проблему устойчивости, ***не разделяют понятий*** "устойчивости отдельных динамических процессов" и "устойчивости системы". Эти понятия равноценны. Благодаря постоянству параметров звеньев ЛСАУ и независимости процессов ***от величины начальных условий*** считают, если устойчив какой-либо процесс, то устойчива и сама ЛСАУ.

Совершенно иначе могут протекать динамические процессы в НСАУ. Во-первых, характер этих процессов может быть устойчивым или неустойчивым в зависимости от величины начальных условий. Во-вторых, различные комбинации одних и тех же звеньев в НСАУ приводят к разной динамике систем.

Для реальных нелинейных систем и их математических моделей различают следующие понятия (формы, виды) устойчивости ***отдельных свободных динамических процессов:***

Итак, свободные динамические процессы НСАУ могут быть ***устойчивы:***

"**в малом**", при малых отклонениях начальных условий (НУ);
"**в большом**", при больших отклонениях начальных условий;
"**в целом**", при любых отклонениях начальных условий;

Кроме того, эти же процессы (или сами НСАУ) могут быть устойчивы: "**орбитально**", "**асимптотически**", или "**абсолютно**".

Последние три формы устойчивости нуждаются в пояснениях.

Режим ***орбитальной*** устойчивость (автоколебаний) может возникнуть в НСАУ после ***начальных*** отклонений её координат на некоторые определенные величины, ***при которых, свободный динамический процесс не затухает а входит в режим*** моно- или полигармонических незатухающих колебаний с постоянным периодом и амплитудой. Такой режим может возникнуть из-за определенной структуры и комбинаций параметров НЧ и ЛЧ системы или быть специально реализован (создан).

Естественно, орбитальная устойчивость движений может быть и "в малом" и "в большом" и "в целом", что определяется амплитудой незатухающих колебаний. Технические устройства, основанные на использовании орбитальной устойчивости НСАУ "в большом", широко используются в современной радиотехнике, телевидении, промышленной электронике.

В технических устройствах НСАУ чаще используют элементы и блоки, орбитально устойчивые "в малом".

Асимптотическая устойчивость возможна в первых трех её формах, когда по окончании свободного движения система возвращается в "начальную" или близкую ***к особой*** точку (при наличии сил трения покоя) с нулевыми производными по всем координатам.

Если процессы устойчивы "в целом", то ***нелинейную систему*** можно считать устойчивой, поскольку в ней устойчивы движения при любых начальных отклонениях.

Абсолютной устойчивостью могут обладать системы ***с любыми нелинейностями, принадлежащими определенному классу,*** если они асимптотически устойчивы "в целом".

Сущность отдельных видов устойчивости будет пояснена позднее.

2.2. Постановка общей задачи исследования устойчивости движений динамических систем по Ляпунову. Определение устойчивости

Это определение "устойчивости" движений в любых физических системах дано в 1892г. великим российским математиком Александром Михайловичем Ляпуновым (1857 - 1918г.г.). Оно общепризнанно в мировой науке. Определение сложно для изучения (и усвоения), но очень ёмко по содержанию.

Во-первых, по физическому смыслу, как понимать состояние "устойчивости"? Это характер изменения (*свойство*) какого-то *динамического процесса* системы? Или "устойчивость" - это *свойство самой системы*, то есть любых её динамических процессов?

Во-вторых, чем вызваны динамические процессы, то есть каковы их причины?

В теории автоматического управления имеют дело не с реальными системами, а с их моделями. Следовательно, об устойчивости систем судят по устойчивости моделей. Поэтому проблема устойчивости САУ обсуждается в терминах и понятиях математики, но с учетом физической сущности системы.

Так как для определения устойчивости системы рассматриваются процессы в ней после снятия входного воздействия, то, следовательно, он (динамический процесс) является одним из *свободных движений* изучаемой физической системы. Причиной, вызвавшей это движение, является *энергия,* запасенная физической системой до начала движения, в момент приложения импульса.

Если *любые* свободные движения системы (свободные от всех имеющихся внешних воздействий на неё) устойчивы, то считается устойчивой *собственно система.* Такова физическая сущность проблемы устойчивости линейных и нелинейных систем автоматического управления.

В терминах математики для моделей САУ вышеизложенное означает, что необходимо исследовать различные решения ***однородного*** дифференциального уравнения, описывающего свободные движения модели при различных начальных условиях. В этих терминах и формулируются условия устойчивости динамических систем:

Определение устойчивости по А.М. Ляпунову.

1. Пусть движения системы *n-го* порядка описывается *n* дифференциальными уравнениями первого порядка, записанными в форме Коши:

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = f_i(y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots, y_{(n-1)}, y_n, t), \quad i=1,\ 2,\ 3, \ldots \tag{2.1}$$

где $y_i\ (t)$ - вещественная переменная (координата), характеризующая поведение системы***, одна из компонент вектора состояния системы****,* f_i - известная функция координат и времени.

2. Исходное состояние модели системы при $t=t_0$ определяется *начальными условиями*:

$$y_{10,}\ y_{20,}\ y_{30,} \ldots, y_{(n-2)0,}\ y_{(n-1)0,}\ y_{n0}. \tag{2.2}$$

3. Каждая совокупность начальных условий соответствует существованию единственного свободного решения системы (2.1) при $t>t_0$ в виде

$$y_i(t) = \bar{f}_i(y_{10}, y_{20}, y_{30}, \ldots, y_{(n-1)0}, y_{n0}, t_0), \quad i=1,\ 2,\ 3, \ldots \tag{2.3}$$

<u>в некотором пространстве G[y_i(t)] возможных реализаций этих координат</u>.

4. Свободные движения могут быть установившимися и неустановившимися, но все они являются ***возмущенными*** различными начальными условиями.

5. Назовем одно из таких движений (выделив произвольным образом) ***невозмущенным*** и обозначим:

$$y^*_i\ (t) = \bar{f}_i(y^*_{10}, y^*_{20}, y^*_{30}, \ldots, y^*_{(n-1)0}, y^*_{n0}, t_0), \quad i=1,\ 2,\ 3, \ldots \tag{2.4}$$

6. Изменим запись начальных условий, представив их в виде:

$$y_{10} = y^*_{10} + \varepsilon_1,\quad y_{20} = y^*_{20} + \varepsilon_2, \ldots,\quad y_{(n-1)0} = y^*_{(n-1)0} + \varepsilon_{(n-1)},\quad y_{n0} = y^*_{n0} + \varepsilon_n. \tag{2.5}$$

Движения системы (2.1), определенные по формуле (2.3) с начальными условиями (2.5), назовем возмущенными.

7. Введем новые переменные:

$$x_i(t) = y_i(t) - y_i{}^*(t), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.6}$$

называемые вариациями (отклонениями).

Условие устойчивости ***невозмущенного*** движения может быть сформулировано следующим образом:

Невозмущенное движение устойчиво по отношению к переменным $x_i(t)$, $i=1, 2, 3,\dots$, если при всякой, сколь угодно малой положительной величине ε, можно выбрать другую величину δ так, чтобы при всех возмущениях (вариациях $x_i(t_0)=x_{i0}$, $i=1, 2, 3,\dots$) соблюдались следующие условия:

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2(t)\Big|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{i=n} x_{i0}^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i^2 \le \delta, \quad \text{а при} \quad \forall t \ge t_1 > t_0 \quad \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2(t) < \varepsilon. \tag{2.7}$$

В противном случае невозмущенное движение ***неустойчиво.***

Очевидно, при $\lim\limits_{t\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{i=n} x_i^2(t) \to 0$ в (2.7) (то есть ε=0), динамический процесс будет ***асимптотически*** устойчив.

В условиях (2.7) ряд авторов вместо сумм квадратов записывают любые абсолютные значения отклонений, что не меняет сути метода. Обычно (2.7) записывается с использованием норм: $\|\bullet\|$, например, $\|X\| = \sum\limits_{i=1}^{i=n} x_i^2(t)$. Если принять $|\varepsilon| < |\delta|$, то (2.7) означает, что ***только для устойчивых движений*** существует определенная **область** их **притяжения** δ в область ε, охватывающая начало координат.

Чаще представляет интерес (и, следовательно, рассматривается) **несвободное (**вынужденное**) движение** системы.

Переходный процесс определяется решением ***неоднородного*** дифференциального уравнения математической модели САУ. Как же это увязывается с понятием устойчивости по Ляпунову, где исследуются однородные уравнения?

Решая такое уравнение, получают две составляющих переходного процесса $y(t) = y_{св}(t) + y_{вын}(t)$ – свободную и вынужденную. Вынужденная составляющая есть частное решение неоднородного дифференциального уравнения, записанного в виде:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{(n-1)} p + a_n) y(t) = (b_0 p^k + b_1 p^{k-1} + \dots + b_{(k-1)} p + b_k) g(t), \tag{2.8}$$

где g(t) внешнее воздействие на САУ.

Если принять, например, g(t) = **1**(t), тогда частное решение (2.8) будет получено из условия: $a_n \cdot y_{вын}(t) = b_k \cdot g(t)$ (когда производные входного и выходного сигналов равны нулю, что соответствует установившемуся состоянию системы), то есть $y_{вын}(t) = \dfrac{b_k}{a_n} \cdot 1(t).$

Свободную составляющую переходного процесса получают из решения однородного уравнения, приравняв правую часть выражения (2.8) к нулю:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{(n-1)} p + a_n) y_{св}(t) = 0. \tag{2.9}$$

Таким образом, проблема устойчивости системы (2.1) в смысле Ляпунова сводится к ***исследованию устойчивости переходного процесса модели САУ*** (2.9). Другими словами, задача анализа устойчивости некоторого переходного процесса представляет собой исследование свободного движения системы относительно его вынужденной составляющей.

2.3. Исследование устойчивости линейных систем в пространстве состояний

Математическая модель динамической системы в пространстве состояний, как показано в предыдущем разделе, описывается матричными уравнениями (1.5):

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU, \\ Y = CX. \end{cases}$$

Решение данной системы будет определяться выражениями (см. (1.14) и (1.14’)):

$$X(t) = Exp\big(A(t-t_0)\big)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} Exp\big(A(t-\tau)\big)BU(\tau)d\tau, \qquad (2.10)$$

$$Y(t) = C \cdot Exp\big(A(t-t_0)\big)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} C \cdot Exp\big(A(t-\tau)\big)BU(\tau)d\tau. \qquad (2.10’)$$

Из алгебры матриц известно, что по теореме подобия $A=S^{-1}\Lambda S$, где Λ – диагональная матрица собственных чисел матрицы A, а S – некоторая неособенная матрица.

Тогда при $t_0 = 0$ и $U=const$, и с учетом того что

$Exp(At) = E + A\dfrac{t}{1!} + A^2\dfrac{t^2}{2!} + A^3\dfrac{t^3}{3!} + \ldots$, будет получено:

$$Exp(At) = S^{-1}Exp(\Lambda t)S,$$

$$\int_0^t Exp(A(t-\tau))BUd\tau = S^{-1}\int_0^t Exp(\Lambda(t-\tau))d\tau\ SBU.$$

А так как $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ (для случая, когда собственные числа λ_i простые и вещественные), то и

$$Exp(\Lambda t) = diag(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}),$$

$$\int_0^t Exp(\Lambda(t-\tau))\,d\tau = diag\Big(\int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}d\tau, \int_0^t e^{\lambda_2(t-\tau)}d\tau, \ldots, \int_0^t e^{\lambda_n(t-\tau)}d\tau\Big) =$$

$$= diag\Big(\frac{1}{\lambda_1}e^{\lambda_1 t}, \frac{1}{\lambda_2}e^{\lambda_2 t}, \ldots \frac{1}{\lambda_n}e^{\lambda_n t}\Big).$$

Следовательно, решение $X(t)$ *и* $Y(t)$ есть линейная комбинация частных решений $e^{\lambda_i t}$.

Таким образом, решение (2.10) и (2.10') системы (1.5) будет устойчиво (асимптотически устойчиво), если все собственные числа матрицы А имеют отрицательные вещественные части: $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = \overline{1, n}.$

2.4. Устойчивость особых точек нелинейной системы

Рассмотрим нелинейную автономную систему, описываемую системой n дифференциальных уравнений (см. (1.6)):

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i\big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big), \quad i = 1,2,\dots,n.$$

или в векторной форме (см. 1.7)):

$$\dot{X}(t) = F\big(X(t)\big). \tag{2.10}$$

Система (2.10) имеет **особую точку** X^*, называемую **положением равновесия** системы, если вектор производных состояния системы в этой точке равен нулю. То есть $\dot{X}(t) = F\big(X^*(t)\big) = 0$.

Точка $X = 0$ (начало координат) называется **положением равновесия** системы (2.10), если

$$F(0) = \begin{pmatrix} f_1(0,0,\dots,0) \\ f_2(0,0,\dots,0) \\ \vdots \\ f_n(0,0,\dots,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если особой точкой (положением равновесия системы) является точка X^*, отличная от начала координат, то заменой переменных $Y = X - X^*$ исходная система (2.10) будет приведена к виду

$$\dot{Y}(t) = \overline{F}\big(Y(t)\big), \tag{2.10'}$$

с вектор-функцией $\overline{F}\big(Y(t)\big) = \begin{pmatrix} f_1\big(y_1(t) + x_1^*, y_2(t) + y_2^*, \dots, y_n(t) + x_n^*\big) \\ f_2\big(y_1(t) + x_1^*, y_2(t) + y_2^*, \dots, y_n(t) + x_n^*\big) \\ \vdots \\ f_n\big(y_1(t) + x_1^*, y_2(t) + y_2^*, \dots, y_n(t) + x_n^*\big) \end{pmatrix}$,

называемым дифференциальным матричным **уравнением в отклонениях**. Вектор $Y = X - X^*$ - **вектор отклонений** состояния системы от точки равновесия.

Будем считать, что данная система имеет положение равновесия $X = 0$, которое исследуется на устойчивость.

Если функции $f_i(X)$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности начала координат (в окрестности особой точки $X = 0$), то, как показано в разделе 1 (см. (1.10), (1.11)), разлагая их в ряд Макларена в окрестности этой точки, система уравнений (2.10) может быть приведена к виду:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(0)\cdot x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(0)\cdot x_2 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(0)\cdot x_n + R_i\big(x_1, x_2, \dots, x_n\big), \qquad i = 1,2,\dots,n,$$

или в векторно-матричной форме

$$\dot{X}(t) = J \cdot X(t) + R\big(X(t)\big), \tag{2.11}$$

где J – матрица Якоби, составленная из частных производных вектор-функции $F(X)$,а компоненты вектор-функции $R(X)$ описывают члены второго порядка малости относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \vdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \vdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Значения частных производных в матрице Якоби вычисляются в точке разложения в ряд, то есть в точке равновесия системы.

Таким образом, с целью исследовании на устойчивость исходной нелинейной системы (2.10) в особой точке (точке равновесия) рассматривается линейная система

$$\dot{X}(t) = J \cdot X(t), \tag{2.12}$$

называемая **системой уравнений первого приближения (линеаризованной системой)** по отношению к исходной системе (2.10).

Вопрос о том, в каких случаях исходная нелинейная система и соответствующая система уравнений первого приближения имеют одинаковый характер устойчивости, был разрешен А.М.Ляпуновым.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Если все собственные значения λ_i матрицы Якоби $\boldsymbol{J}$ имеют ***отрицательные действительные части***, то решение исходной системы в особой точке и нулевое решение $X = 0$ линеаризованной системы является ***асимптотически устойчивым***.

Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.

Если хотя бы одно собственное значение λ_i матрицы Якоби $\boldsymbol{J}$ имеет ***положительную действительную часть***, то решение исходной системы в особой точке и нулевое решение $X = 0$ линеаризованной системы является ***неустойчивым***.

В обоих случаях речь идет об **устойчивости нелинейной системы (2.10) в малом** (и устойчивости линеаризованной системы в целом!). И, как следует из приведенных теорем, вектор-функция $R(X)$ не влияет на устойчивость положения равновесия системы (2.10). Она определяет лишь размеры окрестности точки равновесия, в которой система остается устойчива (то есть область устойчивости системы).

В ***критических случаях***, когда действительные части всех собственных значений матрицы Якоби $\boldsymbol{J}$ неположительны: $Re\ \lambda_i \le 0$, причем существует хотя бы одно собственное значение с нулевой действительной частью, решение нелинейной системы (2.10) в точке равновесия (особой точке) может быть устойчивым или неустойчивым. В этом случае выяснить характер устойчивости системы (2.10) в рамках первого приближения невозможно и необходимо использовать другие методы исследования устойчивости.

Итак, приведенные теоремы Ляпунова позволяют исследовать устойчивость положения равновесия нелинейных систем в тех случаях, когда это положение характеризуется собственными значениями линеаризованных систем с ненулевой действительной частью. Такие точки равновесия называются ***грубыми***.

То есть область применения метода исследования устойчивости по первому приближению ограничена грубыми (структурно устойчивыми) системами.

2.5. Прямой метод А.М. Ляпунова исследования устойчивости движения в динамических системах

Метод Ляпунова называют "прямым", так как рассматриваются динамические процессы системы во временной области.

Метод позволяет исследовать устойчивость системы с помощью специально подобранных «пробных» скалярных V-функций (так называемых функций Ляпунова), не прибегая к решению самих дифференциальных уравнений системы, без нахождения собственных чисел характеристических уравнений.

Определение. Движение системы (динамический процесс системы) будет устойчивым, если функция Ляпунова удовлетворяет следующим требованиям:

- линии уровня функции Ляпунова $V(X) = C$ замкнуты;
- функция Ляпунова неотрицательна: $V(X) \geq 0$;
- скалярное произведение градиента функции Ляпунова и вектора скорости в любой точке траектории динамического процесса отрицательно: $\left(gradV(X), \dot{X}\right) < 0$.

В самом деле, скалярное произведение градиента функции Ляпунова и вектора скорости в любом точке своим знаком показывает направление вектора скорости относительно линий равного уровня функции Ляпунова. При знаке "минус" вектор скорости направлен внутрь линии равного уровня, в сторону убывания функции Ляпунова, к началу координат (угол между градиентом функции Ляпунова и вектором скорости системы - тупой, больше 90°). При противоположном знаке – наоборот. Естественно, в первом случае система устойчива. Во втором – нет.

Одновременно с функцией Ляпунова рассматривается другая функция: ***W(X)*** - производная функции Ляпунова, $W(X) = \dfrac{dV(X)}{dt}$.

Теорема (Эскиз формулировки). Пусть найдется такая функция $V(X) \geq 0$, что ее производная вдоль траектории системы $\dot{X} = F(X,t)$ отрицательна:

$$\left(W(X) = \frac{dV(X)}{dt} = \frac{\partial V(X)}{\partial X} \cdot \frac{dX}{dt} = \left(gradV(X), \dot{X}\right) = \left(gradV(X), F(X)\right) < 0\right),$$

тогда система будет устойчивой.

Определяют знакоопределенные и знакопостоянные V-функции.

- ***Знакоопределенная V-функция***. Это такая функция, которая во всем пространстве G[V(t)] имеет один знак, кроме начала координат, где она принимает нулевое значение.
- ***Знакопостоянная V-функция*** – функция, принимающая во всем пространстве G[V(t)] либо значения одного знака, либо нулевые значения (включая начало координат).

Для прямого метода устойчивости А. М. Ляпуновым сформулировано две теоремы.

Теорема 1. *Достаточным* условием устойчивости динамических процессов "в большом" будет знакоопределенность ***V***-функции и знакопостоянство ***W*** функции противоположного знака.

Теорема **2.** Если при знакоопределенности V-функции, W-функция также будет знакоопределенна (но другого знака), то динамический процесс в НСАУ будет устойчив асимптотически "в большом" (то есть заканчиваться покоем системы).

Сложность применения прямого метода Ляпунова для оценки устойчивости динамических процессов "в большом" заключается в нахождении ***V***-функций для конкретных моделей НСАУ. К настоящему времени функции Ляпунова построены практически для всех наиболее важных классов нелинейных систем, встречающихся на практике.

Кроме того, если функцию Ляпунова можно построить, то через нее удается (?) выразить динамические показатели качества системы: перерегулирование и время переходного процесса.

2.6. Исследование устойчивости линейных систем методом Ляпунова

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$\dot{X}(t) = AX(t)\,. \tag{2.13}$$

Положение равновесия системы (2.13) находится в точке $X(t) = 0_n$. Будем искать функцию Ляпунова в виде

$$V(X(t)) = X(t)^T P\, X(t) \tag{2.14}$$

с положительно определенной симметрической матрицей P.

Производная этой функции в силу уравнения (2.13) имеет вид:

$$\dot{V}(X(t)) = X(t)^T (A^T P + PA) X(t)\,. \tag{2.15}$$

Получили квадратичную форму. Поэтому, чтобы производная по времени от функции Ляпунова (2.14) была отрицательной, необходимо, чтобы квадратичная форма (2.15) была отрицательной, то есть матрица $A^T P + PA$ - отрицательно определенной. Обозначим

$$A^T P + PA = -G\,. \tag{2.16}$$

Так как $A^T P + PA = -G$ или $G = -\left(A^T P + PA\right)$, то матрица G - положительно определенная. Кроме того $G^T = -\left(A^T P + PA\right)^T = -\left(PA + A^T P\right) = G$, то есть матрица G – симметрическая. Уравнение (2.16) относительно матрицы P называется **уравнением Ляпунова.**

Чаще решается **обратная задача**. Если задать матрицу $G = G^T > 0$ (положительно определенную симметрическую), например $G = E$ (единичную), тогда для устойчивости линейной системы производная функции Ляпунова должна быть отрицательной $\left(\dot{V}(X(t)) < 0\right)$. В этом случае, если матрица P, найденная из уравнения (2.16), является положительно определенной матрицей, то система (2.13) – асимптотически устойчива в целом и матрица A имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями. Иначе динамическая система (2.13) будет неустойчивой.

Сформулирована и доказана следующая теорема:

Теорема 3. Необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости в целом положения равновесия линейной автономной системы (2.13) заключается в том, что для произвольной симметрической положительно определенной матрицы G существует симметрическая положительно определенная матрица P, найденная из уравнения (2.16).

Следствие. Если начало координат линейной автономной системы (2.13) устойчиво, то существует единственная функция Ляпунова вида (2.14), где матрица P удовлетворяет уравнению (2.16), и G - произвольная положительно определенная матрица.

Наряду с приведенной выше теоремой 3 справедливы следующие утверждения:

Утверждение 1. Достаточное условие устойчивости матрицы A.

Если n собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы А таковы, что $\lambda_i+\lambda_j \neq 0$, $i, j = \overline{1, n}$, то из уравнения Ляпунова при заданной матрице G матрица P определяется однозначно.

Утверждение 2. Необходимое условие устойчивости матрицы A.

Если матрица А устойчива и матрица G положительно определена, то матрица P также положительно определена.

Примечание 1. Для установления положительной определенности симметричной матрицы H можно воспользоваться **критерием Сильвестра**:

Матрица P положительно определена тогда и только тогда, когда все её угловые (ведущие) главные миноры положительны: $\Delta_i > o$ для $i = \overline{1, n}$, где Δ_i – угловые главные миноры i-го порядка матрицы P.

Матрица P отрицательно определена, если и только если знаки угловых главных миноров Δ_i этой матрицы чередуются, причём $\Delta_1 < o$.

Примечание 2. У положительно определенной симметрической матрицы все собственные числа положительные. У отрицательно определенной симметрической матрицы все собственные числа отрицательны.

3. Управляемость и наблюдаемость систем в пространстве состояний

3.1. Понятия управляемости и наблюдаемости систем

Конечной целью синтеза системы автоматического управления является создание управляющего устройства с целью придания системе желаемых динамических и статических свойств. Управляемость системы определяет возможность управления со стороны входа всеми компонентами вектора состояния динамической системы. Наиболее распространенным алгоритмом управления систем, синтезируемых с помощью методов пространства состояний, является алгоритм $u(t) = KX(t)$. Однако во многих случаях состояние системы $X(t)$ не измеряется, и, следовательно, управление согласно вышеприведенному соотношению не может быть непосредственно реализовано. Таким образом, возникает вопрос, можно ли определить вектор состояния по измеряемому выходу или по измеряемым выходам объекта со многими входами и многими выходами. Такая возможность определяется наблюдаемостью системы.

Наличие свойств управляемости и наблюдаемости у объектов управления позволяет рассчитывать управление этими объектами (проектировать системы управления) с помощью простых математических операций. Исследование системы управления на управляемость и наблюдаемость является одним из важных шагов в синтезе этих систем.

Описание системы управления в пространстве состояний удобно тем, что позволяет проводить анализ САУ на такие важные свойства как управляемость и наблюдаемость. Соответствующие определения и критерии для стационарных линейных систем получены Калманом.

Ру́дольф Э́миль Ка́лман (венг. *Kálmán Rudolf Emil*; род. 19 мая 1930, Будапешт, Венгрия) — инженер и исследователь в области теории управления. Внёс существенный вклад в современную теорию управления (считается одним из её основателей), наиболее известен как создатель фильтра Калмана.

Понятие управляемости связано с возможностью приведения системы в заданное состояние с помощью входных или управляющих воздействий.

Под **управляемостью** понимают существование управления $u(t)$, достаточного для перевода системы за конечное время $t_к - t_о$ из состояния $X_о$ в $X_к$, где $X_о$ и $X_к$ – две произвольные точки пространства состояний размерности n.

Определение 1. Система называется **управляемой (**вполне управляемой), если выбором управляющего воздействия $u(t)$ на интервале времени $[t_0, t_k]$ можно перевести ее из любого начального состояния $X(t_0)$ в произвольное заранее заданное конечное состояние $X(t_k)$.

Теорема Калмана I. Критерий управляемости для линейных стационарных систем.

Система будет управляемой тогда и только тогда, когда матрица управляемости $P = [\ B \mid AB \mid \ldots \mid A^{n-1}B\ ]$ имеет ранг n, равный размерности пространства состояний ($rankP$ = n). То есть пара (A,B) – управляема.

Доказательство Теоремы Калмана 1. будет приведено ниже (см. 3.2.).

Очевидно, что управляемость определяется свойствами матриц A и B. Необходимым условием управляемости является невырожденность матрицы A.

Понятие наблюдаемости связано с возможностью определения переменных состояния по результатам измерения выходных переменных.

Определение 2. Система называется **наблюдаемой** (вполне наблюдаемой), если по реакции $y(t)$ на выходе системы на интервале времени $[t_0, t_k]$ при заданном управляющем воздействии $u(t)$ можно определить начальное состояние $X(t_0)$.

Примечание. В приведенных определениях управляемости и наблюдаемости определен временной отрезок $[t_0, t_k]$. Это сделано исходя из возможности вычисления (определения) значений производных $y(t)$ и $u(t)$, используемых в процессе доказательства теорем Калмана.

Теорема Калмана II. Критерий наблюдаемости для линейных стационарных систем.

Система будет наблюдаема тогда и только тогда, когда матрица наблюдаемости N имеет ранг n, равный размерности пространства состояния. В этом случае говорят, что пара (A,C) – наблюдаема.

$$N = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Очевидно, что наблюдаемость определяется свойствами матриц A и C.

Доказательство

Имеется система, описываемая уравнениями:

$$\dot{X} = AX + Bu\,, \quad y = CX.$$

Последовательно дифференцируя, получают систему:

$$\begin{cases} y = CX\,; \\ \dot{y} = C\dot{X} = CAX + CBu; \\ \ddot{y} = CA\dot{X} + CB\dot{u} = CA^2X + CBu + CB\dot{u}; \\ \dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = CA^{n-1}X + CA^{n-2}Bu + \ldots + CBu^{(n-2)}. \end{cases}$$

После незначительных преобразований (переносов) система приводится к виду:

$$\begin{cases} y = CX\,; \\ \dot{y} - CBu = CAX\,; \\ \ddot{y} - CBu - CB\dot{u} = CA^2X\,; \\ \dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} - CA^{n-2}Bu - \ldots - CBu^{(n-2)} = CA^{n-1}X\,; \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} - CBu \\ \cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)} - CA^{n-2}Bu - \ldots - CBu^{(n-2)} \end{pmatrix}.$$

Полученная система разрешима относительно вектора X (имеет единственное решение), если ранг матрицы $\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \ldots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ равен **n.**

Напомним, что под рангом матрицы подразумевается наивысший из порядков отличных от нуля миноров этой матрицы. Ранг матрицы равен числу ее линейно независимых строк (столбцов).

3.2. Теорема Калмана I об управляемости линейной стационарной системы

Задача оценки управляемости – одна из важнейших задач оптимизации и синтеза систем. Наибольший вклад в её решение внёс Рудольф Эмиль Калман. Именно его критерий и применяется в настоящее время, так как он имеет простую формулировку, и даже для линейных систем большого порядка оценка управляемости производится довольно просто.

Рассмотрим систему, математическая модель которой в уравнениях пространства состояний имеет вид:

$$\dot{X} = AX + BU, \tag{3.1}$$

где X_n - вектор состояний системы; $A_{n\times n}$- матрица системы; $B_{n\times r}$ - матрица управления; U_r - вектор входных воздействий.

Как показано в разделе 1, для многомерных стационарных систем, описываемых уравнением (3.1), закон изменения вектора состояния определяется выражением:

$$X(t) = \Phi(t - t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)BU(\tau)d\tau \text{ , или}$$

$$X(t) = \Phi(t - t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} Z(t-\tau)U(\tau)d\tau\,, \tag{3.2}$$

где $Z_{nxr}(t-\tau) = \Phi(t-\tau)B$, $\Phi_{n\times n}(t-\tau) = Exp\left(A\cdot(t-\tau)\right)$– фундаментальная (переходная) матрица системы, или матрица Коши, являющаяся решением уравнения $\dfrac{d\Phi(t-\tau)}{d\,t} = A\cdot\Phi(t-\tau)$ с начальным условием $\Phi(\tau-\tau) = E$.

Теорема Калмана I. Система (3.1) будет управляемой тогда и только тогда, когда матрица управляемости $P = [B \mid AB \mid \ldots \mid A^{n-1}B]$ имеет ранг n, равный размерности пространства состояний (*rankP* = n).

Размерность матрицы управляемости $P_{n\times m}$, где $m=n\times r$, будет определяться блочными матрицами A^iB.

Предварительно докажем теоремы.

Теорема 1. Для того чтобы существовало программное управление, переводящее систему (3.1) из произвольного положения $X_0 = X(t_0)$ в любое другое положение $X_к = X(t_k)$ за время t_k- t_0 , необходимо и достаточно, чтобы матрица $F_{n\times n}=\int\limits_{t_0}^{t_k} Z(t_k-\tau)Z^T(t_k-\tau)d\tau$ была неособенной. При этом все множество программных управлений может быть задано формулой:

$$U(t)=Z^T(t_k-t)C+V(t)\,, \tag{3.3}$$

где C_n – постоянный вектор, подлежащий определению, $V_r\ (t)$ – некоторая вектор-функция, удовлетворяющая условию ортогональности: $\int\limits_{t_0}^{t_k} Z(t-\tau)V(\tau)d\tau=O_r$.

Доказательство. Перепишем формулу (3.2) в удобном виде при условии, что система должна перейти из положения $X(t_0)$ в любое заданное положение $X(t_k)$ за время t_k- t_0:

$$\int\limits_{t_0}^{t_k} Z(t-\tau)U(\tau)d\tau = X(t_k)-\varPhi(t-t_0)X(t_0)\,. \tag{3.4}$$

Очевидно, что для разрешения уравнения (3.4) относительно $U(t)$, необходимо определить его левую и правую части. После подстановки (3.3) в (3.4) и замены слагаемых, получим уравнение:

$$\int\limits_{t_0}^{t_k} Z(t-\tau)Z^T(t-\tau)d\tau\cdot C = X(t_k)-\varPhi(t-t_0)X(t_0)\ \text{, или}$$

$$F\cdot C=G\,. \tag{3.5}$$

Здесь вектор $G_n=X(t_k)-\varPhi(t-t_0)X(t_0)$- величина известная и определяется начальным и конечным положениями системы, а $F_{n\times n}=\int\limits_{t_0}^{t_k} Z(t-\tau)Z^T(t-\tau)d\tau$ - интегральная матрица.

Для того чтобы система (3.5) была разрешима относительно вектора C, необходимо и достаточно, чтобы матрица F была неособенной. Следовательно, вектор $U(t)$ может быть определен по формуле (3.3), а система управляема, - переведена в заданное положение за время t_k–t_0. Необходимость и достаточность выявлена.

Теорема доказана.

Теорема 2. Для того, чтобы матрица $F_{n\times n}=\int\limits_{t_0}^{t_k} Z(t-\tau)Z^T(t-\tau)d\tau$ была неособенной, необходимо и достаточно, чтобы строки $\{Z_1(t),\ \ Z_2(t),\ \ ...,\ \ Z_n(t)\}$ матрицы $Z(t-\tau)$, были линейно независимы.

Доказательство. **Достаточность**. Пусть строки $\{Z_1(t),\ \ Z_2(t),\ \ ...,\ \ Z_n(t)\}$ матрицы $Z(t-\tau)$ линейно независимы при $t\in[t_0,t_k]$. Тогда линейная комбинация $H^TZ(t-\tau)\neq O_{1\times r}$ при любом выборе постоянного вектора H, компоненты которого одновременно не равны нулю. Отсюда вытекает, что скалярное произведение

$\left(H^T Z(t-\tau),\quad H^T Z(t-\tau)\right) = H^T Z(t-\tau) Z^T(t-\tau) H > 0$ (положительно).

Проинтегрировав неравенство, получим $\int\limits_{t_0}^{t_k} \left[H^T Z(t-\tau) Z^T(t-\tau) H\right] d\tau > 0$, или

$$H^T \left[\int\limits_{t_0}^{t_k} Z(t-\tau) Z^T(t-\tau) d\tau\right] H > 0, \qquad \text{или} \quad H^T \cdot F \cdot H \;> 0. \tag{3.6}$$

Здесь $F = \int\limits_{t_0}^{t_k} Z(t-\tau) Z^T(t-\tau) d\tau$ - интегральная матрица. При любом векторе H, неравном нулевому $(H \neq 0)$, $H^T \cdot F \cdot H \;> 0$, что и означает положительную определенность матрицы F. Определитель положительно определенной матрицы отличен от нуля, следовательно, матрица F - неособенная.

Необходимость. Будем рассуждать от противного. Предположим, что интегральная матрица $F = \int\limits_{t_0}^{t_k} Z(t-\tau) Z^T(t-\tau) d\tau$ неособенная, а строки матрицы $Z(t-\tau)$: $\{Z_1(t),\quad Z_2(t),\quad ...,\quad Z_n(t)\}$ - линейно зависимы. Тогда существует такой вектор H, не весь равный нулю, когда линейная комбинация $H^T Z(t-\tau) = O_{1\times r}$ (равна нулю). Не трудно получить следующее:

$$Z^T(t-\tau) H = O_r \quad \Rightarrow \quad Z(t-\tau) \cdot Z^T(t-\tau) H = O_n.$$

Проинтегрировав последнее равенство, получим: $\left[\int\limits_{t_0}^{t_k} Z(t-\tau) Z^T(t-\tau) d\tau\right] H = O_n$ $\Rightarrow \quad F \cdot H = O_n$, а это возможно (при $H \neq O_n$) тогда, когда интегральная матрица $F = \int\limits_{t_0}^{t_k} Z(t-\tau) Z^T(t-\tau) d\tau$ - особенная. Противоречие с условием теоремы возникло из-за предположения, что строки матрицы $Z(t-\tau)$ линейно зависимы. Следовательно, для того, чтобы интегральная матрица F была неособенной, необходимо чтобы строки матрицы $Z(t-\tau)$ были линейно независимы.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы Калмана I

Достаточность. Пусть матрица управляемости $P = [\ B \mid AB \mid ... \mid \ A^{n-1}B\ ]$ имеет ранг n. Докажем, что система (3.1) будет управляемой.

Предположим противное, что система не управляема при rank$P = n$. Тогда, согласно теореме 1, интегральная матрица $F = \int\limits_{t_0}^{t_k} Z(t-\tau) Z^T(t-\tau) d\tau$ будет вырожденной. Если $\det F = 0$, то существует $H \neq 0$ такое, что

$$F \cdot H = O_n \Rightarrow H^T F \cdot H = 0 \Rightarrow \int\limits_{t_0}^{t_k} \varphi(t-\tau) \varphi^T(t-\tau) d\tau = 0, \tag{3.7}$$

где $\varphi(t-\tau) = H^T Z(t-\tau) = H^T e^{A\cdot(t-\tau)} \cdot B$ (см. (3.2)).

Но условие (3.7) выполняется, только если $\varphi(t-\tau)\equiv O_{1\times r}$. Тождественно будут равны нулю и производные: $\dfrac{d^k\varphi(t-\tau)}{dt^k}=0_{1\times r}, \quad k=0,1,\dots$, а именно:

$$H^T A^k e^{A\cdot(t-\tau)}\cdot B\equiv O_{1\times r}, \qquad k=0,1,\dots$$

И, в частности, при $\tau=t$ имеем:

$$H^T A^k\cdot B\equiv O_{1\times r}, \quad k=0,1,\dots$$

Тогда произведение вектора H и матрицы управляемости P имеет нулевые элементы: $H^T P=[H^T B \mid H^T AB \mid \dots \mid H^T A^{n-1}B]=\left[O_{1r} \mid O_{1r} \mid \dots \mid O_{1r}\right]=O_{n\times r}$, что противоречит условию, равносильному линейной независимости строк матрицы P.

Достаточность доказана.

Необходимость. Докажем, что если система (3.1) управляема, то rank$P$ = n. Будем рассуждать от противного. Предположим, что, несмотря на полную управляемость системы, имеет место неравенство: rank$P$ < n. В этом случае строки матрицы P линейно зависимы как постоянные векторы соответствующего пространства. Тогда существует ненулевая строка $(H^T)_{1\times n}\neq 0$ такая, что $H^T P=O_{1\times m}$ $\left(O_{1\times m}=\left[O_{1\times r} \mid O_{1\times r} \mid \dots \mid O_{1\times r}\right]\right.$, где $O_{1\times r}$ - составные нулевые строки), и, следовательно:

$$H^T B=O_{1\times r}, \quad H^T AB=O_{1\times r}, \quad \dots, \quad H^T A^{n-1}B=O_{1\times r}. \tag{3.8}$$

Как было определено в (3.2) $Z(t-\tau)=\Phi(t-\tau)\cdot B$. Согласно представлению переходной матрицы, как матричной экспоненты:

$$Z(t-\tau)=\Phi(t-\tau)\cdot B=e^{A\cdot(t-\tau)}\cdot B=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(t-\tau)^s\cdot A^s}{s!}B.$$

Рассмотрим линейную комбинацию строк этой матрицы с коэффициентами H^T:

$$H^T\cdot Z(t-\tau)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(t-\tau)^s\cdot H^T\cdot A^s\cdot B}{s!}. \tag{3.9}$$

Как было показано (см. (3.8)), первые n-1 слагаемых ряда (3.9) являются нулевыми строками. Покажем, что и все остальные члены ряда – нулевые строки.

Рассмотрим слагаемое $H^T\cdot A^n\cdot B$ и характеристический многочлен матрицы A: $\det(A-\lambda E)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_n$. По теореме Гамильтона – Кэли любая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена:

$$A^n+a_1A^{n-1}+\dots+a_nE=O_{n\times n}.$$

Домножим последнее равенство слева на строку H^T и справа на матрицу управления B соответственно, откуда выразим нужное слагаемое:

$$H^T\cdot A^n\cdot B=-a_1H^T\cdot A^{n-1}\cdot B-\dots-a_nH^T B.$$

Так как каждое слагаемое равно нулевой строке $O_{1\times r}$, что было показано выше, то и сумма будет равна нулевой строке. Следовательно, $H^T\cdot A^nB=O_{1\times r}$.

Далее, рассуждая по индукции, можно показать что, и остальные члены ряда будут нулевыми строками. Следовательно, $H^T\cdot Z(t-\tau)\equiv O_{1\times r}$. В этом случае строки матрицы $Z(t-\tau)$ - линейно зависимы. Значит, интегральная матрица $F=\int_{t_0}^{t_k}Z(t-\tau)Z^T(t-\tau)d\tau$ будет особенной по теореме 2, и, согласно теореме 1, система (3.1) не будет полностью управляемой. Противоречие с условием теоремы возникло из-за предположения, что rank$P$ < n. Следовательно, rank$P$ = n.

Необходимость доказана.

Теорема доказана.

Пример 1.

Дана система:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \qquad n = 2.$$

Проверим её управляемость:

$$rank\,\boldsymbol{P} = rank\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] = rank\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 1.$$

Следовательно, данная система является неуправляемой.

Пример 2.

Дана система:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad n = 2.$$

Проверим её управляемость:

$$rank\,\boldsymbol{P} = rank\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right] = rank\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = 2.$$

Следовательно, рассматриваемая система является управляемой.

3.3. Наблюдатели

Система называется наблюдаемой, если по выходным параметрам и входным воздействиям можно определить ее вектор состояния.

Необходимость наблюдателя вызвана тем, что для реализации закона управления $u(t) = KX(t)$ замкнутой системой необходима информация обо всех компонентах вектора состояния $X(t)$. Однако во многих случаях компоненты вектора $X(t)$ не измеряются (или измеряются не все), и, значит, управление согласно вышеприведенному соотношению не может быть непосредственно реализовано. Следовательно, необходимо устройство для определения (вычисления) компонентов вектора состояния $X(t)$.

Доказанная ранее теорема ***Калмана II*** дает один из способов определения вектора состояния $X(t)$ по $y(t)$, $u(t)$ и их производным. Другой способ определения вектора $X(t)$ - наблюдатель Люенбергера.

3.3.1. Наблюдатель (фильтр) Люенбергера

Наблюдатель Люенбергера представляет собой динамическую модель, описываемую уравнением:

$$\dot{X}_{н} = A_1X_{н} + B_1u + B_2y. \tag{3.10}$$

Существует несколько способов определения матриц A_1, B_1, B_2, определяющих модель наблюдателя (3.10). Здесь рассматривается один из возможных.

Основные моменты рассматриваемого метода:

1) Объект наблюдаемый. (Пара (A, C) – наблюдаема).

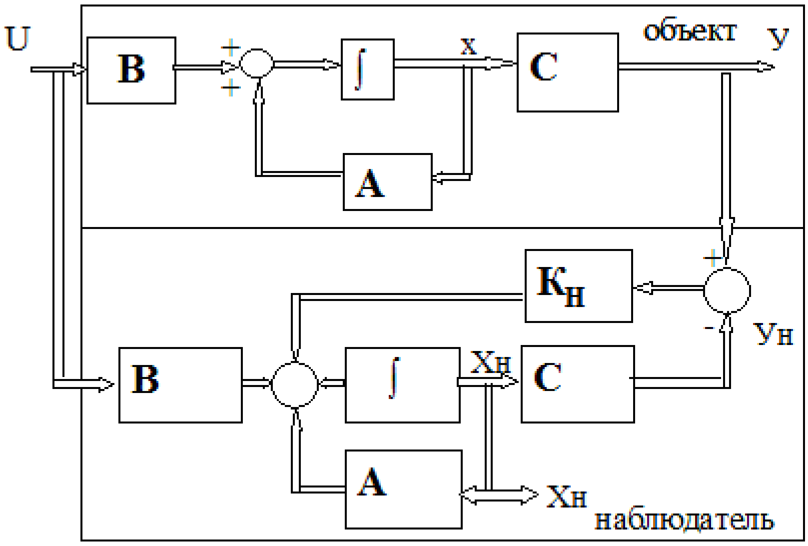
2) Наблюдатель – модель объекта, т.е. если $X(t_0) = X_{н}(t_0)$ (одинаковые начальные условия), то модель наблюдателя совпадает с моделью объекта $\dot{X} = AX + Bu$: $\quad \dot{X}_{н} = AX_{н} + Bu.$

3) Если $X_н(t_0) \neq X(t_0)$, то должно выполняться: $X_н(t) \to X(t)$, при $t \to \infty$.

Следовательно, наблюдатель (3.10) можно представить в виде:

$$\dot{X}_н = AX_н + Bu + K_н(y - CX_н),$$

где выбор матрицы $K_н$ определяется скоростью сходимости $X_н(t) \to X(t)$. Таким образом, получается, что модель наблюдателя – модель объекта с дополнительной обратной связью.



Для определения параметров этой обратной связи вычитают уравнение объекта из уравнения наблюдателя:

$$\dot{X}_н - X = A(X_н - X) - K_нC(X_н - X) = (A - K_нC)(X_н - X).$$

Получают динамическую модель $\dot{e} = (A - K_H C)e$, $e = X_н - X$, движение которой определяется собственными числами матрицы $A - K_H C$. И если пара (A, C) – наблюдаема, то, как следует из классической теории САУ, можно подобрать такую матрицу $K_н$, с которой задача $X_н(t) \to X(t)$ $(e \to 0)$ будет решена при требуемом качестве.

Например, при желаемом апериодическом движении системы $\dot{e} = (A - K_H C)e$ (экспоненциальный закон) можно рассчитать соответствующие значения коэффициентов матрицы обратной связи наблюдателя $K_н$ по аналогии с синтезом модального управления (об этом будет рассказано ниже). Следует учесть, что полоса пропускания $\omega_{0н}$ наблюдателя должна соотноситься с частотой среза ω_0 собственно системы управления как

$$\omega_{0н} = Q\omega_0, \quad \text{где} \quad Q = 3 \div 10.$$

Меньше – нежелательно, потому что переходный процесс относительного движения должен быть более быстрым по сравнению с процессами в системе управления.

А $Q > 10$ - нельзя, так как наблюдатель будет чувствителен к шумам.

Рассмотрим замкнутую систему управления с наблюдателем:

$$\begin{cases} \dot X = AX + Bu, \\ y = CX, \\ u = g - KX_н, \\ \dot X_н = AX_н + Bu + K_н(y - CX_н) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot X = AX + Bu, \\ u = g - KX_н, \\ \dot X_н - \dot X = (A - K_н C)(X_н - X). \end{cases}$$

Если обозначить $e = X_н - X$, тогда $X_н = e + X$,

а рассматриваемая система примет вид:

$$\begin{cases} \dot X = AX + Bg - BK(e + X), \\ \dot e = (A - K_н C)e. \end{cases}$$

Динамика этой системы определяется матрицей

$$\tilde A = \begin{pmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - K_н C \end{pmatrix}.$$

Наблюдатель не влияет на динамику системы управления (объект управления - регулятор), а лишь добавляет в это движение свои собственные числа, так как: $det(Es - \tilde A) = det(Es - A + BK) * det(Es - A + K_н C)$.

3.3.2. Редуцированный наблюдатель Люенбергера

В реальных системах автоматического управления часто имеет место ситуация, когда часть компонент вектора состояния $X(t)$ измеряется. И только некоторые его компоненты подлежат дополнительному определению для организации закона управления $u(t) = KX(t)$. Поэтому имеется возможность разработать (синтезировать) наблюдатель пониженной размерности. Одним из решений данной задачи может быть редуцированный (сокращенный) наблюдатель Люенбергера.

Пусть вектор выхода $y \in R^p$. Вводится дополнительный вектор $z \in R^q$, размерность которого такова, что $q + p = n$.

Тогда вектор состояния $X_н$ наблюдателя может быть определен как

$$X_н = C_2 y + C_1 z, \qquad C_2 \in R^{n\times p}, \qquad C_1 \in R^{n\times q}, \tag{3.11}$$

а наблюдатель будет определяться моделью:

$$\dot{\boldsymbol{z}} = A_н z + B_2 u + B_1 y. \tag{3.12}$$

Компоненты вектора y - линейно независимы. Требуется выбрать матрицы $A_н$, B_1, B_2, C_1, C_2, такие, что:

1) $X_н(t) \to X(t)$ по экспоненциальному закону;

2) $X_н$ являлось бы линейной комбинацией y и z в момент времени t.

Условие *2)* определяется выбором матриц C_1 и C_2.

Утверждение. Условие *1)* выполняется тогда и только тогда, когда:

a) матрица $A_н$ - устойчивая (отрицательно определенная),

b) Существует $(n - p)\times n$ матрица Π, такая, что $\Pi A - A_н \Pi = B_1 C$, *c)* $ПB = B_2$,

d) матрица $(C_1\ C_2)$ удовлетворяет уравнению $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} П \\ C \end{pmatrix} = E_n$.

Для доказательства данного утверждения задается некоторая прямоугольная матрица $П$ (подлежащая определению) и вводится в рассмотрение вектор $e = z - ПX$, откуда $z = e + ПX$.

Тогда $\dot{z} = П\dot{X} + \dot{e}$, или, с учетом уравнений объекта $(\dot{X} = AX + Bu)$ и наблюдателя (3.12):

$$ПAX + ПBu + \dot{e} = A_{н}z + B_1CX + B_2u = A_{н}e + A_{н}ПX + B_1CX + B_2u.$$

В полученном уравнении группируют члены:

$$(ПA - A_{н}П - B_1C)X + (ПB - B_2)u + \dot{e} - A_{н}e = 0,$$

и, приравнивая соответствующие группы слагаемых к нулю, получают следующие условия совместимости:

$$ПA - A_{н}П = B_1C, \qquad ПB = B_2., \qquad \dot{e} = A_{н}e.$$

Итак: Линейная связь между векторами X и z существует, если уравнение $ПA - A_{н}П = B_1C$ разрешимо относительно матрицы $П$ при произвольном выборе матрицы B_1, что возможно, когда матрицы A и $A_{н}$ не имеют одинаковых собственных чисел.

Решение уравнения $\dot{e} = A_{н}e$ имеет вид:

$$e(t) = z(t) - ПX(t) = exp(A_{н}(t - t_0))(z_0 - ПX_0) \qquad (3.13)$$

и определяется собственными числами матрицы $A_{н}$.

Кроме того, $X_{н} = C_1z + C_2y$ (так определено в начале пункта), а с учетом того, что $z = ПX + e$:

$$X_{н} = C_1ПX + C_2CX + C_1e = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} П \\ C \end{pmatrix} X + C_1e. \qquad (3.14)$$

Тогда, подставляя (3.13) в (3.14), получают:

$$X_{н}(t) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} П \\ C \end{pmatrix} X(t) + C_1\,exp(A_{н}(t - t_0))(z_0 - ПX_0).$$

В силу устойчивости матрицы $A_{н}$ все члены слагаемого:

$C_1\,exp(A_{н}(t - t_0))(z_0 - ПX_0)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$.

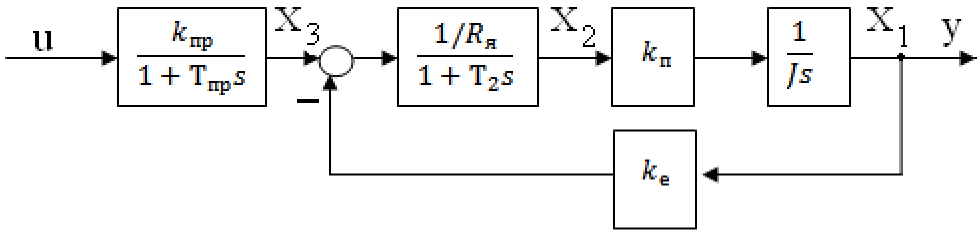
А так как требуется, чтобы $X_{н}(t) \to X(t)$ при $t \to \infty$, то при больших t должно выполняться равенство $X_{н}(t) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} П \\ C \end{pmatrix} X(t)$, откуда автоматически вытекает матричное уравнение $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} П \\ C \end{pmatrix} = E$.

Утверждение доказано.

Следствие: Если $rang(C_1 \;\; C_2) = n$, то $rang\begin{pmatrix} \Pi \\ C \end{pmatrix} = n$. И если $rangC = p$, то $rang\, \Pi = n - p$ (число линейно-независимых строк матрицы Π).

Результаты, полученные при доказательстве Утверждения, позволяют вычислить искомые матрицы, определяющие наблюдатель (3.11) и (3.12), что и будет продемонстрировано в следующем примере.

Пример. Построить редуцированный (неполного порядка) наблюдатель Люенбергера для системы третьего порядка на примере модели электропривода:



с параметрами: $k_{пр} = 10$, $T_{пр} = 0{,}02$, $R_я = 1$, $T_2 = 0{,}01$, $k_п = 1$, $k_e = 1$, $J = 1$.

По данной структурной схеме составляется математическая модель электропривода в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{k_п}{J} x_2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{-1}{T_2} x_2 + \dfrac{1}{R_я T_2}(x_3 - k_e x_1), \\ \dot{x}_3 = \dfrac{-1}{T_{пр}} x_3 + \dfrac{K_{пр}}{T_{пр}} u, \end{cases} \quad \text{или в матричной форме} \quad \begin{cases} \dot{X} = AX + Bu, \\ y = CX, \end{cases}$$

где матрицы A, B, C соответственно равны:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{k_п}{J} & 0 \\ \dfrac{-k_e}{T_2 R_я} & \dfrac{-1}{T_2} & \dfrac{1}{T_2 R_я} \\ 0 & 0 & \dfrac{-1}{T_{пр}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -100 & -100 & 100 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{k_{пр}}{T_{пр}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 500 \end{pmatrix}, \; C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть редуцированный наблюдатель описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{z} = A_н z + B_1 y + B_2 u, \\ X_н = C_1 z + C_2 y, \end{cases}$$

причем $B_2 = \Pi B$.

В общем случае $X_н, z, y, u$ – векторы, но в данном примере u и y – скалярные величины, векторами является только $X_н$ и z.

Будем считать, что наблюдатель построен, если известны коэффициенты матриц и векторов $A_н, B_1, B_2, C_1, C_2$ и Π. Для определения размеров матриц зададимся n=3 (порядок исходной системы), r =1 (порядок, на который понижаем).

Матрица $A_н$ имеет размер *(n-r)* x *(n-r) (2*x*2)*, матрица B_1 – *(n-r)* x *r* (2x1), матрицы C_1 и C_2 – размеров *n* x *(n-r)* (3x2) и *n* x *r* (3x1) соответственно. Матрица $П$ – *(n-r)* x *n* (2x3).

Для определение коэффициентов наблюдателя задаемся значениями матрицы $A_н$, причем для устойчивости системы необходимо, чтобы собственные числа этой матрицы имели отрицательные вещественные части, а также отличались от собственных чисел матрицы А, которые равны $\{-1{,}01;\ -98{,}99;\ -50\}$. Удобно сделать матрицу $A_н$ диагональной с вещественными значениями, например:

$$A_н = \begin{pmatrix} -1000 & 0 \\ 0 & -2000 \end{pmatrix}.$$

Также можно произвольно задаться матрицей (в данном случае вектором) B_1:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Остальные матрицы определяются из системы следующих уравнений:

$$\begin{cases} C_1 П + C_2 C = E_n, \\ ПA - A_н П = B_1 C. \end{cases}$$

Эти уравнения получены выше в результате доказательства Утверждения, определяющего условия существования редуцированного наблюдателя.

В результате решения данной системы уравнений получаем:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 171018{,}9 & -370509{,}75 \\ 3335000 & 3520000 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2850 \\ 18525 \end{pmatrix},$$

$$П = \begin{pmatrix} 4{,}999 \cdot 10^{-7} & -5{,}555 \cdot 10^{-6} & 5{,}847 \cdot 10^{-7} \\ 10^{-2} & -5{,}263 \cdot 10^{-6} & 2{,}699 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix},$$

а наблюдатель будет определяться системами:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -1000\, z_1 + 5y + 0{,}00029\, u, \\ \dot{z}_2 = -2000\, z_2 + 20y + 0{,}000135\, u. \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x_{1н} = y, \\ x_{2н} = 2850\, y + 171018{,}9 z_1 - 370509{,}75 z_2, \\ x_{3н} = 18525\, y + 3335000\, z_1 - 3520000\, z_2. \end{cases}$$

4. Синтез модального управления для линейной системы

Из классической теории САУ известно, что динамику системы автоматического управления можно сделать любой, наперед заданной. (Вспомним корректирующие устройства последовательного, параллельного, комбинированного типов, метод ЛАХ - как метод синтеза корректирующего устройства).

Можно ли сделать это при представлении модели системы в уравнениях переменных состояния?

4.1. Постановка задачи модального управления

Под модальным управлением понимается обеспечение в замкнутой системе автоматического управления заданного распределения корней ее характеристического уравнения. Корни характеристического уравнения системы полностью определяют ее свободное движение:

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t}.$$

Каждая составляющая такого движения, соответствующая отдельному корню λ_i (или паре комплексно сопряженных корней), в зарубежной литературе называется ***модой*** – отсюда и термин: **модальное управление**.

Корни уравнения однозначно зависят от его коэффициентов, поэтому под модальным управлением можно понимать целенаправленное изменение коэффициентов характеристического уравнения объекта с помощью специальных обратных связей в системе.

Пусть замкнутая система автоматического управления должна иметь динамику, заданную **эталонной моделью** в виде характеристического уравнения:

$$\varphi(s) = s^n + \gamma_1 s^{n-1} + \gamma_2 s^{n-2} + \ldots + \gamma_{n-1} s + \gamma_n. \tag{4.1}$$

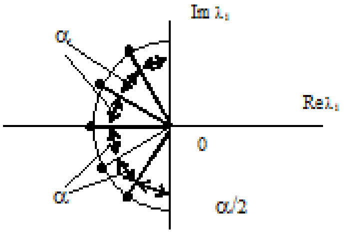
Эталонная модель (коэффициенты характеристического уравнения системы) выбирается исходя из требуемых динамических показателей качества (t_n - время переходного процесса, σ - перерегулирование, статическая и динамическая точности).

Статическая точность однозначно определяется через коэффициенты γ_i соответствующего характеристического полинома замкнутой системы степени n.

В технической литературе приводятся различные наборы стандартных характеристических полиномов 1-8 порядков и соответствующие им графики переходных процессов с указанными показателями качества (биноминальные полиномы Ньютона, полиномы Баттерворта и др.). Исходя из порядка объекта и заданных в техническом задании показателей качества САУ, для целей синтеза можно выбрать требуемый график переходного процесса и соответствующий ему «стандартный» характеристический полином, а затем, используя рассмотренный далее алгоритм, выполнить синтез модальных ОС, обеспечивающих заданные показатели качества САУ.

1. Модель в виде полинома Баттерворта.

Все корни характеристического полинома расположены в левой полуплоскости на одинаковом расстоянии от начала координат через равные углы.



Показатели: $\sigma = 15\%$, $t_n \le 8\dfrac{1}{\omega_0}$, $K_{cm} = \dfrac{\gamma_0}{\gamma_1}$.

K_{cm} - статический коэффициент (статическая точность).

ω_0 - радиус окружности (модуль корней).

n	Характеристический полином $\varphi(s) =$
1	$s + \omega_0$
2	$s^2 + 1{,}4\omega_0 s + \omega_0^2$
3	$s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3$
4	$s^4 + 2{,}6\omega_0 s^3 + 3{,}4\omega_0^2 s^2 + 2{,}6\omega_0^3 s + \omega_0^4$
5	$s^5 + 3{,}24\omega_0 s^4 + 5{,}24\omega_0^2 s^3 + 5{,}24\omega_0^3 s^2 + 3{,}24\omega_0^4 s + \omega_0^5$
6	$s^6 + 3{,}86\omega_0 s^5 + 7{,}46\omega_0^2 s^4 + 9{,}13\omega_0^3 s^3 + 7{,}46\omega_0^4 s^2 + 3{,}86\omega_0^5 s + \omega_0^6$

2. Вторая форма записи коэффициентов – биномиальная форма.

$\varphi(s) = (s + \omega_0)^n$ - характеристический полином с желаемым распределением (расположением) корней определяется как:

n	Характеристический полином $\varphi(s) =$
1	$s + \omega_0$
2	$s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2$
3	$s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3$
4	$s^4 + 4\omega_0 s^3 + 6\omega_0^2 s^2 + 4\omega_0^3 s + \omega_0^4$
5	$s^5 + 5\omega_0 s^4 + 10\omega_0^2 s^3 + 10\omega_0^3 s^2 + 5\omega_0^4 s + \omega_0^5$
6	$s^6 + 6\omega_0 s^5 + 15\omega_0^2 s^4 + 20\omega_0^3 s^3 + 15\omega_0^4 s^2 + 6\omega_0^5 s + \omega_0^6$

3. Третья форма коэффициентов характеристического полинома связана с минимумом интеграла от квадратичной ошибки:

$$\int_0^\infty \varepsilon^2(t)dt = \int_0^\infty (1 - y(t))^2 dt\,; \qquad y(0) = 1.$$

Эта форма характеристического полинома обеспечивает большое быстродействие и большую колебательность системы.

n	Характеристический полином $\varphi(s) =$
1	$s + \omega_0$
2	$s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2$
3	$s^3 + \omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3$
4	$s^4 + \omega_0 s^3 + 3\omega_0^2 s^2 + 2\omega_0^3 s + \omega_0^4$
5	$s^5 + \omega_0 s^4 + 4\omega_0^2 s^2 + 3\omega_0^3 s^2 + 3\omega_0^4 s + \omega_0^5$
6	$s^6 + \omega_0 s^5 + 5\omega_0^2 s^4 + 4\omega_0^3 s^3 + 6\omega_0^4 s^2 + 3\omega_0^5 s + \omega_0^6$

4. Четвертая форма обеспечивает минимум интеграла от абсолютной ошибки.

$$\int_0^\infty |\varepsilon(t)|dt \;\to\; \min$$

n	Характеристический полином $\varphi(s) =$
1	$s + \omega_0$
2	$s^2 + 1{,}4\omega_0 s + \omega_0^2$
3	$s^3 + 1{,}75\omega_0 s^2 + 2{,}15\omega_0^2 s + \omega_0^3$
4	$s^4 + 2{,}1\omega_0 s^3 + 3{,}4\omega_0^2 s^2 + 2{,}7\omega_0^3 s + \omega_0^4$

Способы задания эталонной модели не ограничиваются приведенными формами. Самостоятельно задаваясь необходимым спектром ($\lambda_{ж1}$, $\lambda_{ж2}$, … $\lambda_{жn}$) корней характеристического полинома, можно определить его желаемый вид (эталонную модель замкнутой системы).

Определение 1. Система называется ***модально управляемой*** по отношению к желаемому набору собственных чисел, если существует матрица обратной связи K:

$$u(t) = KX(t),$$

такая, что матрица $(A + B \cdot K)$ замкнутой системы:

$$\dot{X}(t) = (A + BK)X(t)$$

имеет желаемый набор собственных чисел (**моды – полюса**).

При этом, если необходимо изменить часть собственных чисел матрицы $\boldsymbol{A}$ ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$), остальные оставив неизменными, то не требуется, чтобы объект был полностью управляем. Достаточно, чтобы он мог допускать закон управления $u = KX$ с желаемым набором собственных чисел замкнутой системы $\dot{X} = (A + BK)X$.

Определение 2. Если система модально управляема по отношению к любому набору собственных чисел, то она называется ***полностью модально управляемой***.

Определение 3. Под синтезом **модального управления** понимается расчет матрицы обратной связи $\boldsymbol{K}$ регулятора обратной связи по вектору состояния $u = g - KX$ системы $\dot{X} = AX + Bu$ с целью обеспечения заданного расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы $\dot{X} = (A + BK)X$, определенных эталонной моделью (4.1).

4.2. Синтез модального управления для скалярного случая

Итак, требуется выполнить синтез модального регулятора $u = g - KX$ для динамической системы, так, чтобы спектр корней характеристического уравнения замкнутой системы соответствовал желаемой динамике, определяемой эталонной моделью (4.1).

Синтез осуществляется в три этапа.

1. Выбор расположения полюсов, имеющего целью удовлетворить заданным техническим требованиям (определение требуемых коэффициентов уравнения (4.1) системы).
2. Проектирование регулятора, обеспечивающего желаемое расположение полюсов.

2.1. Приведение математической модели объекта к нормальной форме, когда вектор состояния – вектор фазовых переменных.

2.2. Нахождение регулятора применительно к этому виду описания.

3. Преобразование регулятора к первоначальной форме математической модели.

Все этапы синтеза выполняются с помощью ЭВМ.

Пусть имеется объект $\dot{X} = AX + Bu$. (4.2)

Существует неособенное преобразование координат $Z = MX,$ (4.3)

приводящее систему (4.2) к нормальной форме $\dot{Z} = A_k Z + B_k u$, (4.4)

где матрицы $A_к$ и $B_к$ имеют вид:

$$A_к = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix}; \quad B_к = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Последняя строка матрицы A_k - коэффициенты характеристического уравнения матрицы A, записанные в обратном порядке с противоположными знаками.

Преобразуем (4.2) с учетом (4.3) $\Rightarrow$ $M^{-1}\dot{Z} = AM^{-1}Z + Bu \Rightarrow$ $MM^{-1}\dot{Z} = MAM^{-1}Z + MBu \Rightarrow \dot{Z} = MAM^{-1}Z + MBu$.

Тогда матрицы в (4.4) будут определены как: $A_k = MAM^{-1}, \quad B_k = MB$.

Пусть регулятор ищется в виде

$$u = g - K_к Z. \qquad (4.5)$$

Тогда замкнутая система имеет вид

$$\dot{Z} = A_k Z + B_k u, \quad \Rightarrow \quad \dot{Z} = (A_к - B_к K_к)Z + B_к g. \qquad (4.6)$$
$$u = g - K_к Z.$$

Получим характеристическое уравнение матрицы $\bar{A} = A_K - B_K K_K$.

Если $K_к = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, то $B_к K_к = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$;

$$\bar{A} = A_K - B_K K_K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_n - k_1 & -a_{n-1} - k_2 & -a_{n-2} - k_3 & -a_{n-3} - k_4 & \ldots & -a_1 - k_n \end{pmatrix};$$

тогда $det(sE - (A_к - B_к K_к)) = s^n + (a_1 + k_n)\, s^{n-1} + \ldots + (a_n + k_1) = 0.$ (4.7)

Сравнивая желаемый характеристический полином (4.1) с характеристическим полиномом замкнутой системы (4.7), можно, приравнивая коэффициенты при одинаковых ступенях S, получить:

$$\gamma_1 = a_1 + k_n, \qquad\qquad k_1 = \gamma_n - a_n,$$
$$\gamma_2 = a_2 + k_{n-1}, \quad \text{откуда:} \quad k_2 = \gamma_{n-1} - a_{n-1}, \tag{4.8}$$
$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$
$$\gamma_n = a_n + k_1, \qquad\qquad k_n = \gamma_1 - a_1.$$

Таким образом для системы $\dot{z} = A_k z + B_k u$ найдена матрица обратной связи $K_к$ (4.8) ($u = g - K_к z$) по желаемому характеристическому уравнению синтезированной системы и характеристическому уравнению матрицы $A_к$ объекта управления.

Учитывая преобразование координат (4.3), выполняют обратный переход и получают матрицу обратной связи (уравнение регулятора) в исходных переменных: $u = g - K_k M x$, $\quad u = g - Kx$, $\quad K = K_k M$. (4.5')

Таким образом, достигается требуемая динамика (4.1) объекта управления (4.2) замыканием системы обратной связью (4.5'), определяемой матрицей K.

Переход от математической модели вида (4.2) к нормальной форме (4.4) обычно выполняется без проблем. Например, сначала из (4.2) можно получить уравнение вход-выход системы в операторной форме, а затем уже перейти к системе уравнений в нормальной форме (в фазовых координатах).

Можно другим способом получить матрицу A_k. Для этого требуется развернуть определитель матрицы $A - \lambda E$, то есть получить характеристический полином:

$$Det(A - \lambda E) = \lambda^{\mathbf{n}} + a_1\lambda^{\mathbf{n-1}} + a_2\lambda^{\mathbf{n-2}} + \ldots + a_n,$$

а затем уже записать искомые матрицы A_k и B_k системы (4.4) в нормальной форме.

Прямой способ перехода от (4.2) к (4.4) выполняется чуть сложнее. Сначала составляется матрица управляемости системы (4.2) $P = \left(B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B\right)_{n\times n}$, затем находится ее обратная: P^{-1}, далее вычисляется искомая матрица $A_k = \left(P^{-1} \cdot A \cdot P\right)^T$.

Для нахождения матрицы M обратного преобразования координат (4.3) составляют матрицу управляемости системы в нормальной форме вида (4.4):

$$P_k = \left(B \vdots A_k B_k \vdots A_k^2 B_k \vdots \ldots \vdots A_k^{n-1} B_k\right)_{n\times n}.$$

После чего находится матрица преобразования координат $M = P_k \cdot P^{-1}$.

Пример.

$\dot{x} = Ax + Bu + B_\Sigma q$. Если $B_\Sigma \neq 0$, то имеется внешнее воздействие

$y = Cx$. (неавтономная система).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 465 & 0 & 0 \\ 0 & -16{,}1 & 1400 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 485 \\ 0{,}019 & 0 & 0 & -50 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C = (11{,}6*10^{-6} \quad 0 \quad 0 \quad 0);$$

Требование: $t_n = 0{,}16$ с; $\sigma \leq 15\%$; $K \geq 15$ с$^{-1}$

Астатизм I порядка (добротность)

$CF^{-1}B_{\Sigma} = -E$ -условие, обеспечивающее статическую ошибку, равную нулю, при наличии возмущения.

$F = A - BK$ - матрица замкнутой системы,

K – матрица обратной связи.

Синтез:

1) Назначаем эталонную модель (полином Баттерворта):

$\varphi(s) = s^4 + \gamma_3 \cdot s^3 + \gamma_2 \cdot s^2 + \gamma_1 \cdot s + \gamma_0$, где при $\omega_0 = \dfrac{8}{t_n} = 50$ с$^{-1}$:

$\gamma_0 = \omega_0^4 = 6{,}25 \cdot 10^6$; $\gamma_1 = 2{,}6 \cdot \omega_0^3 = 3{,}25 \cdot 10^5$;

$\gamma_2 = 3{,}4 \cdot \omega_0^2 = 8{,}5 \cdot 10^3$; $\gamma_3 = 2{,}6 \cdot \omega_0 = 130$.

$K_{cm} = \dfrac{\gamma_0}{\gamma_1} = 19{,}2$ с$^{-1}$ – статическая точность (условие выполнено).

2) Можно проверить, что пара (A, B) – управляема:

$rank\ P = rank\ [B, A \cdot B, A^2 \cdot B, A^3 \cdot B] =$

$$= rank \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6{,}51 \cdot 10^5 & -7{,}558 \cdot 10^7 \\ 0 & 1{,}4 \cdot 10^3 & -1{,}625 \cdot 10^5 & 1{,}662 \cdot 10^7 \\ 1 & -100 & 1000 & -1 \cdot 10^6 \\ 0 & 0 & 0 & 1237 \end{pmatrix} = 4 = n$$ – система управляема.

3) Найдем коэффициенты характеристического полинома матрицы A:

$\varphi_A(s) = det\ (sE - A) = s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$;

где $\alpha_0 = -5998965$, $\alpha_1 = 80500$, $\alpha_2 = 7415$, $\alpha_3 = 166{,}1$.

4) Матрица $\boldsymbol{A}$ и столбец B в нормальной форме:

$$A_{\boldsymbol{\kappa}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 \cdot 10^6 & -8{,}05 \cdot 10^4 & -7{,}415 \cdot 10^3 & -166{,}1 \end{pmatrix}, \quad B_\kappa = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5) Вычисляем матрицу M, преобразующую A к нормальной форме:

$$P_{\boldsymbol{\kappa}} = [B_\kappa, A_\kappa \cdot B_\kappa, A_\kappa^2 \cdot B_\kappa, A_\kappa^3 \cdot B_\kappa] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -166{,}1 \\ 0 & 1 & -166{,}1 & 2{,}017 \cdot 10^4 \\ 1 & -166{,}1 & 2{,}017 \cdot 10^4 & -2{,}2 \cdot 10^6 \end{pmatrix};$$

$$M = P_\kappa \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8{,}085 \cdot 10^{-5} \\ 1{,}536 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & -4{,}042 \cdot 10^{-3} \\ -7{,}68 \cdot 10^{-5} & 7{,}143 \cdot 10^{-4} & 0 & 0{,}202 \\ 3{,}84 \cdot 10^{-3} & -0{,}047 & 1 & -10{,}106 \end{pmatrix}.$$

6) Находим матрицу обратной связи K_κ ($K_{\kappa i} = \gamma_i - \alpha_i$):

$K_\kappa = (1{,}225 \cdot 10^7;\ 2{,}445 \cdot 10^5;\ 1{,}085 \cdot 10^3;\ -36{,}1)$.

7) Пересчитываем коэффициенты обратной связи для исходной системы: $K = K_\kappa \cdot M = (0{,}154;\ 2{,}479;\ -36{,}1;\ 586{,}059)$.

8) Управление $u = -0{,}154 \cdot x_1 - 2{,}479 \cdot x_2 + 36{,}1 \cdot x_3 - 586{,}059 \cdot x_4$.

4.3. Модальное управление по формуле Аккермана

Если процедура вычисления матрицы M вызывает проблемы, то для нахождения матрицы K регулятора $u = g - Kx$ можно воспользоваться формулой Аккермана:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot (A^n + \gamma_1 \cdot A^{n-1} + \ldots + \gamma_{n-1} \cdot A + \gamma_n \cdot E). \qquad (4.9)$$

Как следует из (4.9), для нахождении матрицы обратной связи K используется желаемое характеристическое уравнение (4.1) замкнутой системы автоматического управления и математическая модель разомкнутой системы управления (матрица системы A и матрица управляемости P).

Покажем, что формула (4.9) верна.

Пусть задана математическая модель динамической системы

$$\dot{X} = AX + Bu.$$

Предполагается, что регулятор формирует управляющий сигнал по формуле:

$$u = -Kx.$$

Здесь для удобства задающее воздействие положили равным нулю ($g = 0$).

Тогда математическая модель замкнутой системы принимает вид:

$$\dot{X} = (A - BK)X.$$

Обозначим матрицу состояния замкнутой системы:

$$\overline{A} = A - BK.$$

Определим характеристический полином замкнутой системы автоматического управления, задавшись желаемым размещением полюсов:

$$D(\lambda) = Det(\overline{A} - \lambda E) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \gamma_2 \lambda^{n-2} + \ldots + \gamma_n.$$

Составим матричный полином

$$D(A) = A^n + \gamma_1 A^{n-1} + \gamma_2 A^{n-2} + \ldots + \gamma_n E.$$

Теорема Гамильтона - Кэли, — классическая *теорема* линейной алгебры, утверждает, что любая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению, то есть

$$D(\overline{A}) = \overline{A}^n + \gamma_1 \overline{A}^{n-1} + \gamma_2 \overline{A}^{n-2} + \ldots \gamma_{n-1} \overline{A} + \gamma_n E = 0_{n \times n}. \qquad (4.10)$$

Выполним следующие преобразования:

$\overline{A} = A - BK,$

$\overline{A}^2 = (A - BK)\overline{A} = A(A - BK) - BK\overline{A} = A^2 - ABK - BK\overline{A},$

$\overline{A}^3 = (A^2 - ABK - BK\overline{A})\overline{A} = A^2(A - BK) - ABK\overline{A} - BK\overline{A}^2 = A^3 - A^2BK - ABK\overline{A} - BK\overline{A}^2,$

……………

$\overline{A}^n = \overline{A}^{n-1}\overline{A} = A^n - A^{n-1}BK - A^{n-2}BK\overline{A} - \ldots - ABK\overline{A}^{n-2} - BK\overline{A}^{n-1}.$

Подставим полученные выражения в (4.10):

$$D(\overline{A}) = A^n - A^{n-1}BK - A^{n-2}BK\overline{A} - \ldots - ABK\overline{A}^{n-2} - BK\overline{A}^{n-1} +$$
$$+\gamma_1\left(A^{n-1} - A^{n-2}BK - A^{n-3}BK\overline{A} - \ldots - ABK\overline{A}^{n-3} - BK\overline{A}^{n-2}\right) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\gamma_{n-2}\left(A^2 - ABK - BK\overline{A}\right) +$$
$$+\gamma_{n-1}(A - BK) +$$
$$+\gamma_n E = 0_{n\times n}.$$

В полученном матричном выражении раскроем скобки и члены с отрицательными знаками перенесем в правую часть:

$$A^n + \gamma_1 A^{n-1} + \gamma_2 A^{n-2} + \ldots + \gamma_{n-1}A + \gamma_n E =$$
$$= A^{n-1}BK + A^{n-2}BK\overline{A} + \ldots + ABK\overline{A}^{n-2} + BK\overline{A}^{n-1} +$$
$$+\gamma_1\left(A^{n-2}BK + A^{n-3}BK\overline{A} + \ldots + ABK\overline{A}^{n-3} + BK\overline{A}^{n-2}\right) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\gamma_{n-2}\left(ABK + BK\overline{A}\right) +$$
$$+\gamma_{n-1}(BK).$$

Учитывая, что слева $A^n + \gamma_1 A^{n-1} + \gamma_2 A^{n-2} + \ldots + \gamma_n E = D(A)$, выполним группировку в правой части:

$$D(A) = A^{n-1}B(K) + A^{n-2}B\left(K\overline{A} + \gamma_1 K\right) + A^{n-3}B\left(K\overline{A}^2 + \gamma_1 K\overline{A} + \gamma_2 K\right) +$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+ AB\left(K\overline{A}^{n-2} + \gamma_1 K\overline{A}^{n-3} + \ldots + \gamma_{n-3}K\overline{A} + \gamma_{n-2}K\right) +$$
$$+ B\left(K\overline{A}^{n-1} + \gamma_1 K\overline{A}^{n-3} + \ldots + \gamma_{n-2}K\overline{A} + \gamma_{n-1}K\right) =$$

(перепишем члены в обратном порядке)

$$= B\left(K\overline{A}^{n-1} + \gamma_1 K\overline{A}^{n-3} + \ldots + \gamma_{n-2}K\overline{A} + \gamma_{n-1}K\right) +$$
$$+ AB\left(K\overline{A}^{n-2} + \gamma_1 K\overline{A}^{n-3} + \ldots + \gamma_{n-3}K\overline{A} + \gamma_{n-2}K\right) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A^{n-3}B\left(K\overline{A}^2 + \gamma_1 K\overline{A} + \gamma_2 K\right) +$$
$$+ A^{n-2}B\left(K\overline{A} + \gamma_1 K\right) +$$
$$+ A^{n-1}B(K) =$$

(запишем в матричной форме)

$$= \left(B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B\right) \cdot \begin{pmatrix} K\overline{A}^{n-1} + \gamma_1 K\overline{A}^{n-3} + \ldots + \gamma_{n-2}K\overline{A} + \gamma_{n-1}K \\ K\overline{A}^{n-2} + \gamma_1 K\overline{A}^{n-3} + \ldots + \gamma_{n-3}K\overline{A} + \gamma_{n-2}K \\ \ldots\ldots\ldots \\ K\overline{A} + \gamma_1 K \\ K \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получили:

$$D(A)=\left(B\vdots AB\vdots A^2B\vdots\ldots\vdots A^{n-1}B\right)\begin{pmatrix} K\bar{A}^{n-1}+\gamma_1 K\bar{A}^{n-3}+\ldots+\gamma_{n-2}K\bar{A}+\gamma_{n-1}K \\ K\bar{A}^{n-2}+\gamma_1 K\bar{A}^{n-3}+\ldots+\gamma_{n-3}K\bar{A}+\gamma_{n-2}K \\ \cdots\cdots\cdots \\ K\bar{A}+\gamma_1 K \\ K \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Так как исходная система $\dot{X}=AX+Bu$ вполне управляема (так должно быть!!!), то первый сомножитель правой части (4.11) - матрица управляемости $P=\left(B\vdots AB\vdots\ldots\vdots A^{n-1}B\right)$ имеет ранг n, следовательно, она неособенная, то есть обратима. Значит, существует $P^{-1}=\left(B\vdots AB\vdots\ldots\vdots A^{n-1}B\right)^{-1}$.

Домножив слева обе части уравнения (4.11) на обратную матрицу управляемости, получим:

$$P^{-1}D(A)=\begin{pmatrix} K\bar{A}^{n-1}+\gamma_1 K\bar{A}^{n-3}+\ldots+\gamma_{n-2}K\bar{A}+\gamma_{n-1}K \\ K\bar{A}^{n-2}+\gamma_1 K\bar{A}^{n-3}+\ldots+\gamma_{n-3}K\bar{A}+\gamma_{n-2}K \\ \cdots\cdots\cdots \\ K\bar{A}+\gamma_1 K \\ K \end{pmatrix}.$$

В этом уравнении нас интересует только последняя строка K вектора правой части. Для ее извлечения следует умножить данное уравнение слева на вектор-строку (0 0 ... 1):

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}P^{-1}D(A)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} K\bar{A}^{n-1}+\gamma_1 K\bar{A}^{n-3}+\ldots+\gamma_{n-2}K\bar{A}+\gamma_{n-1}K \\ K\bar{A}^{n-2}+\gamma_1 K\bar{A}^{n-3}+\ldots+\gamma_{n-3}K\bar{A}+\gamma_{n-2}K \\ \cdots\cdots\cdots \\ K\bar{A}+\gamma_1 K \\ K \end{pmatrix}=K.$$

В результате получаем:

$$K=\left(0\ \ 0\ \ldots\ 1\right)\cdot\left(B\vdots AB\vdots\ldots\vdots A^{n-1}B\right)^{-1}\cdot\left(A^n+\gamma_1\cdot A^{n-1}+\ldots+\gamma_{n-1}\cdot A+\gamma_n\cdot E\right).$$

Таким образом, формула Аккермана (4.9) для определения матрицы обратной связи по состоянию получена!

4.4. Модальное управление при векторном воздействии

Задача модального управления состоит в нахождении матрицы линейных стационарных обратных связей K, которая обеспечивает замкнутой системе требуемые корни или коэффициенты характеристического полинома.

Линейная n-мерная система управления описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{X}(t)=AX(t)+BU(t), \quad (4.12)$$

где A – матрица системы размерности n×n, B – матрица управления размерности n×m; вектор состояния X(t) и вектор управляющих воздействий U(t) имеют размерности n и m соответственно. Матрица A имеет собственные числа ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$).

Задан желаемый n-мерный набор собственных чисел ($\lambda_{ж1}, \lambda_{ж2}, \ldots \lambda_{жn}$) для матрицы $\left(A+BK\right)$ замкнутой системы:

$$\dot{X}(t) = \left(A + BK\right)X(t), \tag{4.13}$$

полученной в результате замыкания (4.12) обратной связью

$$U(t) = K \cdot X(t). \tag{4.14}$$

Пусть Λ – диагональная матрица, состоящая из собственных чисел матрицы A, то есть $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$.

Тогда верны следующие соотношения:

$$R\cdot \Lambda = A\cdot R \text{ и} \tag{4.15}$$

$$\Lambda \cdot L = L\cdot A, \tag{4.16}$$

где R и L – матрицы размерности n×n, состоящие из правых и левых собственных векторов матрицы **A** соответственно.

$$R = \left(R_1 \mid R_2 \mid \ldots \mid R_n\right): \qquad A\cdot R_j = \lambda_j\cdot R_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.15'}$$

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_n \end{pmatrix}: \qquad L_j\cdot A = \lambda_j\cdot L_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4.16'}$$

Примечания. ***Если собственные числа матрицы A различны, то*:**

П1. Матрица левых собственных векторов может быть найдена как $L = R^{-1}$. (4.17)

В общем случае произведение $\boldsymbol{L \cdot R = R \cdot L \neq E}$.

П2. Выполнив замену переменных: $x(t) = Rz(t)$, (4.18)

можно преобразовать систему (4.12). Подставив (4.18) в (4.12), и, учитывая (4.15) и (4.17), получим:

$$\dot{z}(t) = \Lambda z(t) + LBu(t). \tag{4.19}$$

Если в каждой строке матрицы $L\cdot B$ существует хотя бы один ненулевой элемент, то система (4.19) модально управляема. Ненулевой элемент в строке $L_j\cdot B$ сообщает нам о том, какими управлениями из набора $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, образующими вектор u, можно воздействовать на компоненту вектора переменных z_j и изменять собственное значение λ_j матрицы A, соответствующее собственному вектору L_j.

Рассмотрим синтез модального управления для векторного случая. Исходная система (4.12) полностью управляема и rank B = m.

Желаемым собственным значениям $\{\lambda_{жj}\}$ замкнутой системы (4.13) соответствуют правые собственные вектора $\{R_{жj}\}$, подлежащие определению. Тогда для матрицы $\left(A+BK\right)$ замкнутой системы, по аналогии с (4.15'), запишем:

$$(A+B\cdot K)\cdot R_{жj} = \lambda_{жj}\cdot R_{жj}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{4.20}$$

или

$$(A - \lambda_{жj}\cdot E)\cdot R_{жj} = -B\cdot P_{жj}, \tag{4.21}$$

где $P_{жj} = K \cdot R_{жj}$ – столбец размером m×1. (4.22)

Уравнения (4.21 - 4.22) позволят определить неизвестные собственные векторы $R_{жj}$, *предварительно задавшись столбцами* $P_{жj}$ (матрицей $P_ж$). Нахождение векторов $R_{жj}$ и $P_{жj}$ зависит от того, совпадает ли желаемое собственное значение $\lambda_{жj}$ с собственным значением матрицы A.

1) Если желаемое собственное значение $\lambda_{жj}$ не является собственным значением матрицы A, то можно задаться *произвольным* (**любым**) ненулевым столбом $P_{жj} \neq 0_m$, но так, чтобы rank P = m. Тогда, учитывая, что rank B = m, из (4.21) получим:

$$R_{жj} = -(A - \lambda_{жj} \cdot \mathrm{E})^{-1} \cdot B \cdot P_{жj}, \qquad j = 1, \ldots, n, \quad P_{жj} \neq 0_m. \qquad (4.23)$$

2) Если желаемое собственное значение $\lambda_{жj}$ является собственным значением матрицы A, то тогда уравнение (4.20) разрешить относительно $R_{жj}$ по формуле (4.23) невозможно, так как матрица $(A - \lambda_{жj} \cdot E) = (A - \lambda_j \cdot E)$ – особенная (ее определитель равен нулю). В этом случае нахождение векторов $R_{жj}$ и $P_{жj}$ выполняется по следующей методике:

Пусть L_j – левый собственный вектор матрицы **A**, соответствующий собственному значению $\lambda_{жj} = \lambda_j$, которое необходимо сохранить. Тогда, умножив слева (4.21) на L_j, получим:

$$L_j \cdot (A - \lambda_{жj} \cdot E) \cdot R_{жj} = -L_j \cdot B \cdot P_{жj}. \qquad (4.24)$$

Учитывая, что (см. (4.16')) $L_j \cdot A = \lambda_{жj} \cdot L_j$ и $L_j \cdot (\lambda_{жj} \cdot E) = \lambda_{жj} \cdot L_j$,

соотношение (4.24) примет вид:

$$L_j \cdot B \cdot P_{жj} = 0. \qquad (4.25)$$

Таким образом, m-мерный столбец $P_{жj}$ должен удовлетворять соотношению (4.25). В частности, его можно выбрать нулевым ($P_{жj} = 0_m$).

Кроме того, при сохранении $\lambda_{жj} = \lambda_j$ сохраняется и соответствующий собственный вектор: ($R_{жj} = R_j$).

Следовательно, если $\lambda_{жj} = \lambda_j$, принимают:

$$P_{жj} = 0_m \quad \text{и} \quad R_{жj} = R_j. \qquad (4.23')$$

Получив весь набор собственных векторов $R_{жj}$ и столбцов $P_{жj}$, можно из (4.22) определить матрицу модального регулятора:

$$K = P_ж \cdot (R_ж)^{-1}. \qquad (4.26)$$

Пример.

Пусть система (4.12) определяется матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A: {0; 1; 2}.

Желаемые собственные числа: {– 1; – 2; – 3}.

Проверка системы на управляемость (по теореме Калмана 1):

$$rank\ P = rank\left(B_1 \vdots AB_1 \vdots A^2B_1 \vdots B_2 \vdots AB_2 \vdots A^2B_2\right) = rank\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Система полностью управляема, а значит и модально управляема.

Так как все собственные числа λ_j и $\lambda_{жj}$ различны, то для нахождения правых собственных векторов $R_{жj}$ используем формулу (4.23).

Определим $P_{ж} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad rank\ P_{ж} = 2.$

Тогда для $\lambda_{ж1} = -1$ имеем:

$R_{ж1} = -(A - \lambda_{ж1} \cdot E)^{-1} \cdot B \cdot P_{ж1} =$

$$= -\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6667 \\ 0 \\ 0.3333 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_{ж2} = -2$:

$R_{ж2} = -(A - \lambda_{ж2} \cdot E)^{-1} \cdot B \cdot P_{ж2} =$

$$= -\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.375 \\ 0 \\ 0.125 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_{ж3} = -3$:

$R_{ж3} = -(A - \lambda_{ж3} \cdot E)^{-1} \cdot B \cdot P_{ж3} =$

$$= -\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.25 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В итоге: $R_{ж} = \begin{pmatrix} -0.6667 & -0.375 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 \\ 0.3333 & 0.125 & 0 \end{pmatrix}.$

Вычислим искомую матрицу обратной связи:

$$K = P_{ж}\left(R_{ж}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.6667 & -0.375 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 \\ 0.3333 & 0.125 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -7 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим полученный результат.

Матрица замкнутой системы (системы с обратной связью):

$$\left(A+BK\right)=\begin{pmatrix}-4 & 0 & -6\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы: {– 1; – 2; – 3}, то есть модальный регулятор спроектирован правильно.

4.5. Синтез модального управления с помощью матричного уравнения Сильвестра

Имеется линейная n-мерная система управления

$$\dot{X}(t)=AX(t)+Bu(t). \tag{4.27}$$

Требуется найти закон формирования управляющих воздействий

$$u(t)=KX(t), \tag{4.28}$$

такой, что замкнутая система

$$\dot{X}(t)=\left(A+BK\right)X(t) \tag{4.29}$$

обладала бы желаемыми свойствами.

Пусть желаемые свойства системы (4.29) определяются эталонной моделью:

$$\begin{cases}\dot{\xi}(t)=\mathit{\Gamma}\xi(t),\\ v(t)=H\xi(t),\end{cases} \tag{4.30}$$

то есть поведение вектора $\xi(t)$ задает желаемое движение вектора $X(t)$ с точностью до линейного преобразования

$$X(t)=M\xi(t), \tag{4.31}$$

а изменение вектора выхода эталонной модели $v(t)$ определяет требуемое управление $u(t)$ в системе (4.27):

$$u(t)=v(t). \tag{4.32}$$

Процессы в эталонной модели (решение системы (4.30)) определяются матрицей Г, ее собственными числами, то есть коэффициентами характеристического уравнения данной матрицы.

Размерность вектора $\xi(t)$ совпадает с размерностью вектора $X(t)$ пространства состояний системы (4.27), то есть равна n. Размерность $v(t)$, – вектора выхода системы (4.30), совпадает с размерностью вектора управляющих воздействий $u(t)$ системы (4.27), то есть равна m.

Для решения сформулированной задачи синтеза необходимо, чтобы система (4.27), определяемая парой матриц (A,B), была полностью управляемой, а система (4.30), определяемая матрицами $(\mathit{\Gamma},H)$, – полностью наблюдаемой.

Таким образом, если задаться желаемой матрицей Г и произвольной матрицей Н (при выполнении единственного условия полной наблюдаемости пары матриц $(\varGamma, H)$), можно получить требуемый закон управления (4.28) в системе (4.27).

Рассматривая (4.32) с учетом (4.28) и (4.31) $\big(u(t)=v(t)$, $v(t)=H\xi(t)$, $u(t)=KX(t)$, $X(t)=M\xi(t)\big)$, будем иметь

$$H\xi(t)=KM\xi(t) \text{ или } H=KM. \tag{4.33}$$

Кроме того, используя (4.29), (4.30) и (4.31) $\big(\dot{X}(t)=(A+BK)X(t)$, $\dot{\xi}(t)=\varGamma\xi(t)$, $X(t)=M\xi(t)\big)$ последовательно получаем:

$$M\dot{\xi}(t)=(A+BK)M\xi(t),$$

$$M\dot{\xi}(t)=M\varGamma\xi(t),$$

$$M\varGamma\xi(t)=(A+BK)M\xi(t),$$

$$M\varGamma=(A+BK)M,$$

$$M\varGamma=AM+BKM,$$

а с учетом (4.33)

$$M\varGamma-AM=BH. \tag{4.34}$$

Уравнение (4.34), называемое **уравнением Сильвестра**, полученное с учетом матриц A и B исходной и $\varGamma$ и H эталонной систем, разрешается относительно матрицы M преобразования координат (4.31).

Тогда искомая матрица обратной связи (4.28) системы (4.27) с учетом (4.33) будет определена как

$$K=HM^{-1}. \tag{4.35}$$

Замечание. Уравнение Сильвестра имеет единственное решение относительно матрицы M, если выполняются следующие условия:

- объект управления (4.27) полностью управляем,
- эталонная модель (4.30) полностью наблюдаема,
- матрицы A и $\varGamma$ не имеют одинаковых корней в своих характеристических уравнениях,
- собственные числа матрицы $\varGamma$ – простые,
- матрица H – полного ранга.

5. Синтез нелинейных систем автоматического управления

5.1. Особенности различных подходов к синтезу нелинейных САУ

Проблема синтеза нелинейных САУ чрезвычайно сложна и многообразна. Она включает в себя синтез систем управления в рамках общепринятых критериев качества систем. При этими показателями понимаются: устойчивость, перерегулирование, время переходного процесса, точность, быстродействие, робастность и т. д.

Современное состояние теории автоматического управления показывает, что успешного решения данной проблемы по всему комплексу показателей качества и для всего многообразия систем с единых математических и методологических позиций не найдено. Поэтому предпринимаются довольно успешные попытки создания общих теоретических подходов по отдельным направлениям проблемы.

Среди исследований отечественных и зарубежных ученых, определивших современную концепцию синтеза заданной динамики нелинейных систем, можно привести работы А.М.Летова, В.И. Зубова, А.А. Андронова, В.И. Арнольда, А.Г. Александрова, Н.Н. Боголюбова, Н. Н.Еругина, Н.Н. Красовского, Н.Н. Боголюбова, О.А. Митропольского, Ю.Ф. Неймарка, Е.П. Попова, П.Д. Крутько, К.С. Колесникова, Ф.Л. Черноусько, К.В. Фролова, В.Ф. Журавлева, В.Б. Колмановского, Д.М. Климова, И. И. Кринецкого, А. ван дер Шафта, Р.У. Брокетга, Y.D. Landau, A. Isidori, M. Kristic, I. Kanellakopoulos, P.V. Kokotovic, S. Dubowsky, C.S.C. Lee, J.Y.S. Luh, J.J. Slotine, M.D. Stokic, T.J. Tarn и др.

Все разнообразие методов синтеза НСАУ может быть разделено на методы **параметрического синтеза** (когда структура регулятора задана и требуется найти только его параметры) и методы **структурного синтеза**, которые направлены на нахождение в аналитической форме априорно неизвестного закона управления и представляют наибольший интерес.

Ряд подходов к синтезу, например, опирающихся на метод функций Ляпунова, в значительной мере использует интуицию и опыт исследователя. Более перспективными представляются такие методы синтеза, которые допускают практически полную формализацию процесса построения управления. Примером такого метода является метод точной линеаризации, или линеаризации обратной связью, который близок к методам структурного синтеза Л.М.Бойчука, вычисляемого момента, обратных задач динамики и др.

Наиболее полная классификация методов синтеза нелинейных систем приведена в книге:
Ким, Д. П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы [Текст]/Д.П. Ким. — 2-е изд., испр. и доп. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 440с.

Методы синтеза систем управления:

- Метод обратной задачи динамики;

- Синтез систем с переменной структурой (с использованием скользящего режима);
- Синтез систем, основанный на методе функций Ляпунова;
- Синтез систем методом линеаризации обратной связью;
- Синтез стабилизирующих законов управления методом декомпозиции.

Данным перечнем методы синтеза нелинейных систем не ограничиваются. Ниже приведено описание некоторых из них.

5.2. Метод структурного синтеза нелинейных САУ

5.2.1. Постановка задачи структурного синтеза

Метод структурного синтеза нелинейных САУ был разработан Леонидом Михайловичем Бойчуком. Этот метод применим для объектов любого порядка, и дает возможность решать сравнительно широкий круг задач. Метод позволяет найти такую структуру управления, которая обеспечивает изменение во времени регулируемой величины согласно заданному дифференциальному уравнению. Тем самым при синтезе реализуются желаемые динамические свойства синтезируемой системы, учитывается требуемое качество регулирования.

Главная особенность метода заключается в том, что его процедура является относительно простой и сводится, прежде всего, к алгебраическим операциям. Структурный синтез состоит в определении схемы (формулы, структуры) замкнутой системы, то есть структуры регулятора, необходимого для отработки объектом некоторого задания.

Выбор структуры системы автоматического регулирования – это наиболее важный этап ее проектирования. Вполне очевидно, что многие варианты схем регуляторов могут давать удовлетворительные результаты. Выбор того или иного варианта определяется не только требованиями к точности и качеству регулирования, но также такими дополнительными соображениями, как надежность, простота схемы и конструкции, экономичность и т.д.

Первоначальное нахождение (задание) структуры системы, помимо включения таких функционально необходимых элементов, как усилители или исполнительные двигатели, обычно основано на определении корректирующих устройств, при включении которых передаточная функция системы (или дифференциальное уравнение движения) соответствуют желаемым. Поэтому, решая задачу синтеза, можно задаться **желаемым** дифференциальным уравнением системы, а затем подобрать такое управление, чтобы обеспечить ее движение согласно этому уравнению. При этом исходят из того, что свойства решения таких уравнений определяют по ряду показателей свойств соответствующих автоматических систем.

Пусть задана неизменяемая часть системы, называемая объектом управления (см. Рис. 5.1.). В эту часть системы могут входить также исполнительные устройства. Объект предполагается одномерным, то есть с одним управляющим воздействием u и с одной регулируемой величиной y. На объект действуют некоторые возмущения f.

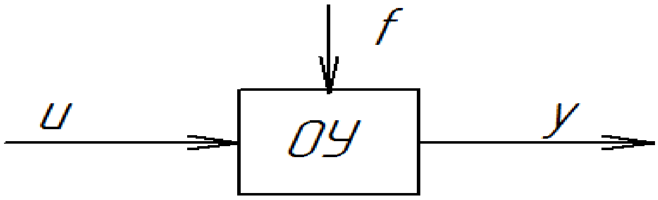


Рис. 5.1. Схема объекта управления (неизменяемой части системы)

Этот объект управления описывается дифференциальным уравнением n-го порядка:

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}, f_s, f_s', \dots, f_s^{(k)}, u) = 0; \tag{5.1}$$

$s = \overline{1, S}$, S – количество возмущений, поскольку на объект могут воздействовать несколько возмущений.

Требуемое дифференциальное уравнение замкнутой системы, описывающее ее заданную динамику, должно связывать регулируемую величину y и задающее воздействие $g = g(t)$, и может быть в общем случае нелинейным:

$$\Phi\left(y, y', \dots, y^{(n)}, g, g', \dots, g^{(r)}\right) = 0. \tag{5.2}$$

Дифференциальное уравнение (5.2) выбирается исходя из желаемых динамических и статических свойств замкнутой системы. Функция Φ должна быть такой, чтобы решение этого уравнения относительно $y(t)$ удовлетворяло необходимым показателям качества регулирования. В качестве требуемых (эталонных) уравнений могут быть использованы и линейные дифференциальные уравнения.

В некоторых случаях при построении дифференциального уравнения, описывающего желаемую динамику систему, может быть учтена зависимость регулируемой величины от возмущений:

$$\Phi\left(y, y', \dots, y^{(n)}, g, g', \dots, g^{(r)}, f_s, f_s', \dots, f_s^{(k)}\right) = 0. \tag{5.2'}$$

Таким образом, может быть сформулирована следующая **задача синтеза**:

Для объекта описываемого дифференциальным уравнением (5.1), необходимо найти управляющее воздействие, обеспечивающее замкнутой системе требуемое качество в соответствии с желаемым дифференциальным уравнением (5.2).

Решая совместно уравнения (5.1) и (5.2) (или (5.1) и (5.2’)), определяют искомое управление:

$$u = u\left(y, y', \dots, y^{(n)}, g, g', \dots, g^{(r)}, f_s, f_s', \dots, f_s^{(k)}\right). \tag{5.3}$$

Задача нахождения управляющего воздействия (5.3) (определение структуры регулятора) может быть решена по следующей схеме:

1. Выразить старшую производную из желаемого дифференциального уравнения (5.2);
2. Подставить ее в дифференциальное уравнение объекта управления (5.1);
3. Решить полученное уравнение относительно $u(t)$.

Функция управляющего воздействия зависит от регулируемой величины, задания, возмущений, все это обеспечивает движение замкнутой системы в соответствии с уравнением (5.2).

Выражение (5.3) представляет собой уравнение регулятора, на вход которого поступают данные о регулируемой величине, задании и возмущениях.

На Рис. 5.2. представлена общая схема замкнутой системы управления:

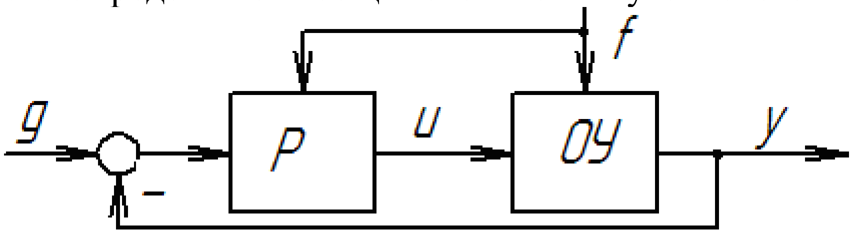


Рис. 5.2. Обощенная схема замкнутой системы управления

5.2.2. Структурный синтез систем в уравнениях с фазовыми переменными

Произвольный динамический объект (система) n-го порядка с одним управляющим воздействием и одной выходной величиной в любой момент времени однозначно определяет свое состояние n независимыми переменными. Такими переменными могут служить фазовые координаты, которые представляют собой значение выходной величины объекта, и ее (n-1) производных.

Однако фазовые координаты не позволяют предсказать движение объекта в следующий момент времени (через бесконечно малый интервал). Для этого необходимо знать и скорость их изменения в тот же момент времени. Например, для объекта 2-го порядка состояние однозначно определяется 2–мя величинами: выходной величиной и скоростью ее изменения. Чтобы рассчитать состояние объекта в любой ближайший момент времени необходимо знать вторую производную выходной величины объекта, то есть скорость изменения первой производной.

Существенная особенность скоростей изменения фазовых координат (переменных): из всех величин только скорость изменения фазовой переменной $y^{(n-1)}$ $\left(\frac{d}{dt}y^{(n-1)}\right)$, равная $y^{(n)}$ – высшей производной регулируемой величины объекта, в любой момент времени явно зависит от управляющего воздействия.

Ниже приведена система дифференциальных уравнений в фазовых переменных, которая демонстрирует эту зависимость:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dots \\ \dot{y}_{n-1} = y_n, \\ \dot{y}_n = F_1(y_1, y_2, \dots, y_n, f_1, f_2, \dots, f_S, u), \end{cases} \qquad (5.1')$$

причем $$\begin{cases} y_1 = y, \\ \dot{y}_1 = \dot{y}, \\ \dots \\ \dot{y}_n = y^{(n-1)}. \end{cases}$$

Здесь функция F_1 получена в результате разрешения уравнения (5.1) относительно высшей производной регулируемой величины.

В аналогичной (5.1’) форме переписывается и дифференциальное уравнение (5.2), определяющее желаемое движение синтезируемой системы:

$$\begin{cases} \dot{y}_{d1} = y_{d2}, \\ \dot{y}_{d2} = y_{d3}, \\ \dots \\ \dot{y}_{d(n-1)} = y_{dn}, \\ \dot{y}_{dn} = \Phi_1(y_{d1}, y_{d2}, \dots, y_{dn}, f_1, f_2, \dots, f_S, g). \end{cases} \qquad (5.2'')$$

Здесь желаемая выходная величина (и, соответственно, ее производные) обозначены индексом *d*: $y_d, \dots, \dot{y}_{di}, \dots$.

Данная форма позволяет в каждый момент времени определить заданные скорости изменения всех фазовых координат, включая и высшую производную регулируемой величины.

Таким образом, для обеспечения желаемого движения системы необходимо потребовать равенства высшей производной выходной координаты из (5.1’) желаемому значению из (5.2’’):

$$\dot{y}_n = \dot{y}_{dn} \quad \text{или} \quad y^{(n)} = y_d^{(n)}, \qquad (5.4)$$

где $y_d^{(n)}$ требуемое значение высшей производной выходной координаты синтезируемой системы.

Требование (равенство) (5.4) может быть записано в более общем виде:

$$\begin{cases} \dot{y}_{d1} = \dot{y}_1, \\ \dot{y}_{d2} = \dot{y}_2, \\ \dots \\ \dot{y}_{dn} = \dot{y}_n, \end{cases} \qquad (5.4')$$

которое будет использовано ниже для получения уравнения регулятора.

После подстановки в (5.4) выражений соответствующих производных переходят к уравнению:

$$F_1(y_1, y_2, \dots, y_n, f_1, f_2, \dots, f_S, u) = \Phi_1(y_{d1}, y_{d2}, \dots, y_{dn}, f_1, f_2, \dots, f_S, g). \qquad (5.5)$$

в результате решения которого с учетом (5.4’) и будет получено уравнение для желаемого управляющего воздействия (требуемый закон управления):

$$u = u(y_1, y_2, \dots, y_n, f_1, f_2, \dots, f_S, g), \text{ или}$$

$$u = u(y, y', \dots, y^{(n-1)}, f_1, f_2, \dots, f_S, g). \qquad (5.6)$$

Все входные величины, то есть возмущения, предполагаются измеряемыми. Функция F должна существовать и быть конечной при всех возможных значениях своих аргументов. Это связано с возможностью реализации полученного закона управления (регулятора).

Величина управления в каждый момент времени поддерживает необходимое соотношение между высшей производной выходной величины и координатами объекта и тем самым реализует дифференциальное уравнение требуемого движения синтезируемой системы управления.

Следовательно, управление в любой момент времени определяется через значения регулируемой величины, задающего воздействия, возмущения и их производных в тот же момент времени.

Недостатки:

1. Регулируемую величину объекта управления можно задавать только в переходном процессе (путем выбора требуемого дифференциального уравнения).
2. Принятые характеристики (коэффициенты) объекта управления могут отличаться от действительных, что вызывает отклонение переходного процесса в системе от задаваемой. В общем случае может потребоваться анализ синтезированной системы на устойчивость.
3. В дифференциальных уравнениях системы могут быть не учтены малые динамические параметры, которые иногда приводят к неустойчивости.
4. Обычно для вычисления производных необходимы дифференциаторы, точная реализация которых невозможна, что является дополнительной причиной проведения анализа синтезированной системы.

Пример 1.

Пусть объект управления (см. рис. 5.1), на который действует возмущение, описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

$$a_0\ddot{y} + a_1\dot{y}\ f \ = u\ .$$

Потребуем, чтобы реакция системы на задающее воздействие была такой, как в линейной системе второго порядка, дифференциальное уравнение движения которой имеет вид:

$$a_2\ddot{y} + a_3\dot{y} + (a_4 + C)y = Cg\ .$$

Необходимо синтезировать следящую систему, отрабатывающую некоторое задание $g(t)$ устойчиво и с удовлетворительным (в соответствие с заданным дифференциальным уравнением) качеством регулирования .

Свойства такой системы, в частности, вопросы устойчивости и качества регулирования, хорошо изучены. Из желаемого дифференциального уравнения находим требуемое значение второй производной выходной величины объекта:

$$\ddot{y}_d = \frac{1}{a_2}(Cg - (a_4 + C)y_d - a_3\dot{y}_d), \text{ или } \ddot{y}_d = \frac{1}{a_2}(Cg - (a_4 + C)y - a_3\dot{y}).$$

Подставляя его в уравнение объекта, получаем искомое управление в виде:

$$u = \frac{a_0}{a_2}(C(g-y) - a_4 y - a_3 \dot{y}) + a_1 \dot{y} f\ . \qquad (5.7)$$

Структурная схема синтезированной системы для примера 1 будет иметь вид:

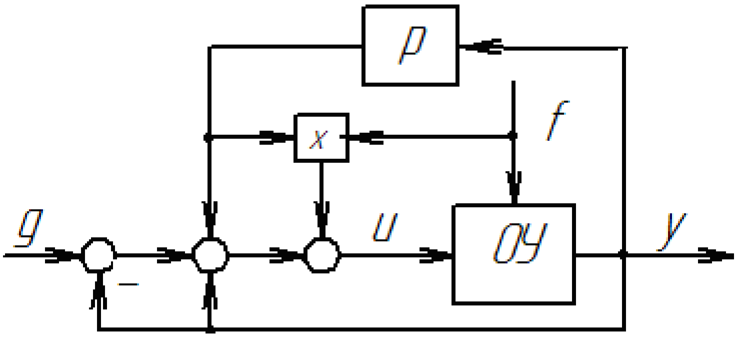


Рис. 5.3. Структурная схема синтезированной системы управления

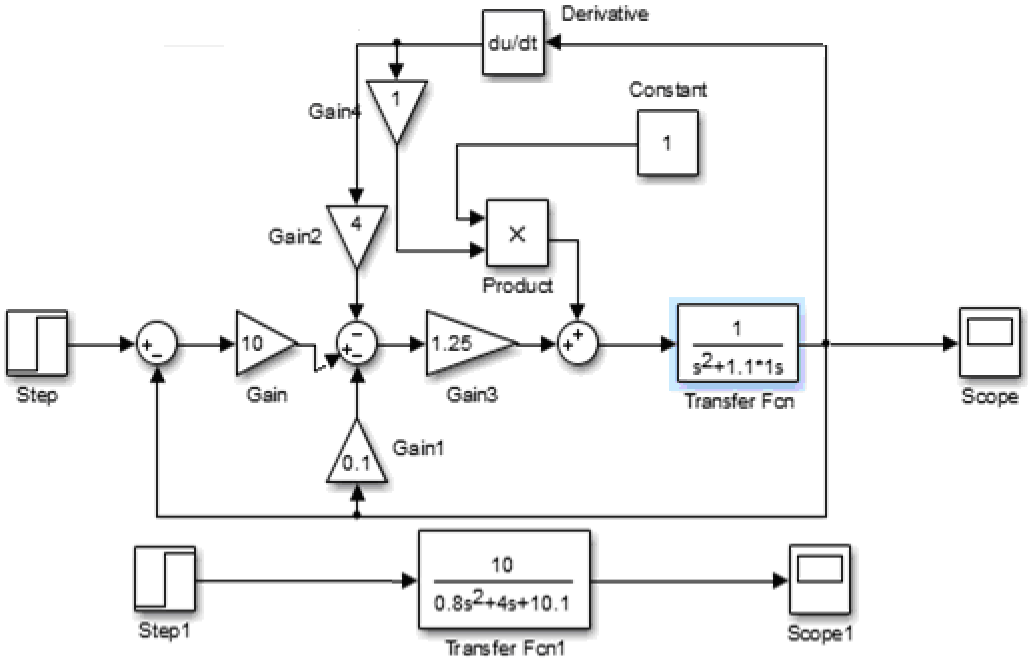
Замечание. В структурной схеме Рис. 5.3. предполагается, что входные сигналы поступают на сумматоры с соответствующими масштабирующими коэффициентами, определяемыми выражением (5.7).

В синтезированной системе управления требуется измерять возмущение, действующее на объект, и регулируемую величину, а также использовать дифференциатор и блок умножения.

Приложение. Для примера 1 выполнено моделирование в среде МатЛаб (см. Рис. 5.4.).

Верхняя структурная схема – это синтезированная система, а вторая – звено с передаточной функцией, определяемой желаемое движение.

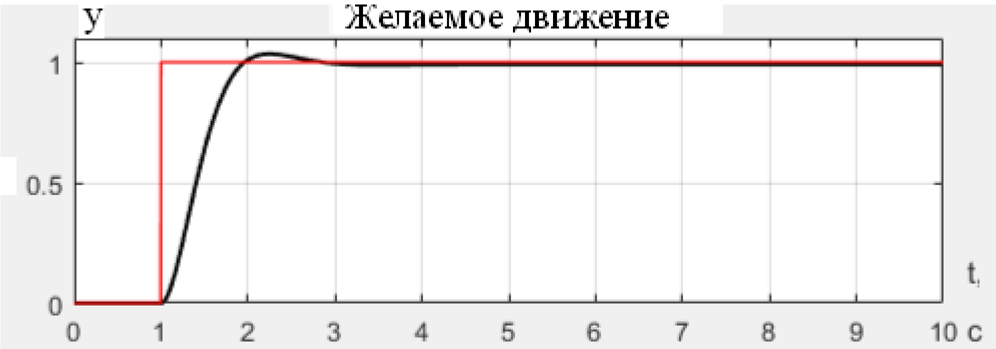
Моделирование системы выполнено для разных значений возмущающего воздействия М: 0.01 и 1.



A0=1; A1=1,1; A2=0,8; A3=4; A4=0,1; C=10.

Рис. 5.4. Схема моделирования синтезированной системы

Графики изменения выходной величины системы приведены на Рис. 5.5. следующих рисунках. Задающее воздействие представлено на графиках красным цветом.



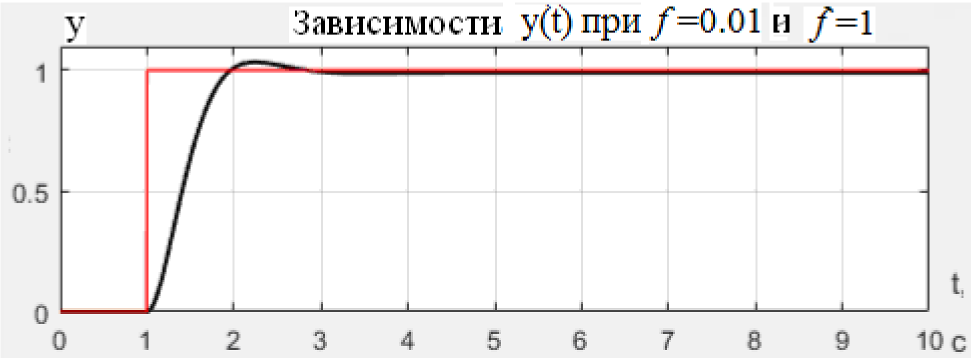


Рис. 5.5. Зависимости ω(t) при f =0,01 и f =1.

Можно сделать вывод, что поведение объекта всегда будет практически совпадать с желаемым в установившемся режиме, независимо от начальных условий. Величина возмущающего воздействия M также не влияет на время переходного процесса.

Пример 2.

Система управления скоростью вращения компрессора.

Рассмотрим синтез управления скоростью вращения компрессора, установленного на корабле и предназначенного для подачи воздуха в топку. Объект описывается нелинейным уравнением.

Дифференциальное уравнение объекта получаем из условия равновесия момента на валу компрессора: $$J\frac{d\omega}{dt} = M - M_c\,,$$

где J – момент инерции вращающихся масс;

ω – угловая скорость вращения вала;

M_c – момент сопротивления (аэродинамический);

M – вращающий момент паровой турбины, сочлененной с компрессором:

$$M = \frac{Q}{Q_{макс}}\left(M_{макс} - m_0\frac{\omega}{\omega_{макс}}\right)$$

где Q – расход пара, $Q_{макс}$, $\omega_{макс}$ – максимальное значение расхода пара и скорости вращения соответственно.

Относительное значение расхода пара равно: $$\frac{Q}{Q_{макс}} = F(u).$$

Здесь u – перемещение управляющего органа (клапана); характеристика $F(u)$ задается.

Момент сопротивления компрессора $M_c = \beta_c \left(\dfrac{\omega}{\omega_{макс}} \right)^2$,

где β_c – коэффициент аэродинамического сопротивления системы, который обычно считается постоянным.

При совместном решении уравнений, описывающих объект управления, получаем нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$J\frac{d\omega}{dt} = F(u)\left(M_{макс} - m_0 \frac{\omega}{\omega_{макс}} \right) - \beta_c \left(\frac{\omega}{\omega_{макс}} \right)^2. \qquad (5.8)$$

Требуется найти закон управления, такой, чтобы процесс регулирования был устойчивый и с приемлемым качеством, определяемым дифференциальным уравнением:

$$\dot{\varphi} + C\varphi = 0, \qquad (5.9)$$

где $\varphi = \omega_3 - \omega$, C – параметр системы.

Решение этого уравнения при $C > 0$ устойчиво и имеет одинаковый вид для различных законов изменения задающего воздействия. Из уравнения (5.9) найдем желаемое значение высшей производной регулируемой величины ω_d:

$\dot{\omega}_d = \dot{\omega}_3 + C(\omega_3 - \omega)$.

Подставив его в уравнение объекта (5.8), получим желаемое управляющие воздействие на объект управления:

$$u = F^{-1}\left(\frac{J(\dot{\omega}_3 + C(\omega_3 - \omega)) + \beta_c \left(\dfrac{\omega}{\omega_{макс}} \right)^2}{M_{макс} - m_0 \dfrac{\omega}{\omega_{макс}}} \right).$$

Структурная схема синтезированной системы для примера 2 приведена на рис. 5.6:

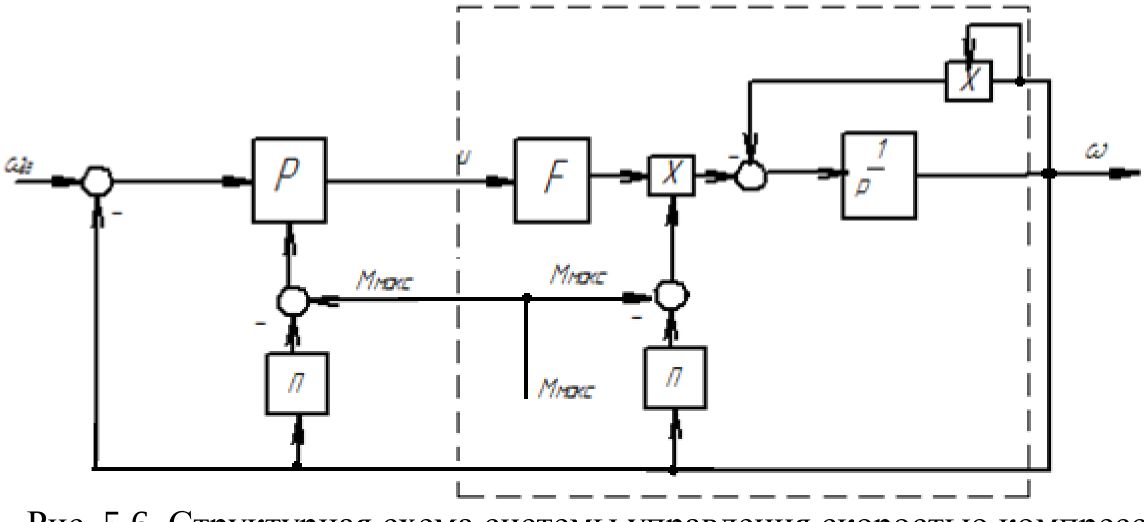


Рис. 5.6. Структурная схема системы управления скоростью компрессора

Система содержит объект управления, выделенный прерывистой линией, и регулятор Р. Объект управления и регулятор содержат нелинейные элементы, такие как квадратор, функциональный преобразователь, маштабирующий блок. Максимальный момент учтен как возмущение. Эта структура не изменяется в процессе работы и позволяет получить одинаковое качество регулирования для различных форм задающего воздействия.

Случаи многомерных систем, частных случаев, специальных систем функционального регулирования и их синтез не рассматривался.

5.3. Линеаризация обратными связями

Линеаризация обратными связями (ЛОС) – метод синтеза, заключающийся в использовании обратных связей для сведения нелинейной системы к линейной. При этом нелинейные элементы не заменяются приближенными эквивалентными звеньями, а остаются в математической модели системы, что полностью исключает погрешность линеаризации. То есть управление синтезируется на основе исходной системы с некоторыми добавками, а не на основе приближенной эквивалентной.

Пусть дана система вида:

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) + g(X)u, \\ y = h(X). \end{cases} \tag{5.10}$$

Необходимо найти преобразование координат $Z = T(X)$ и обратную связь $u = Q(X)$, которые и позволят привести систему (5.10) к линейному виду:

$$\begin{cases} \dot{Z} = AZ + Bv, \\ y = CZ, \end{cases} \tag{5.11}$$

где

$$C = [1, 0, 0, \ldots, 0], \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5.12}$$

В системе (5.11), определяемой матрицами (5.12), вектор состояния Z – вектор фазовых переменных. Таким образом, линейная система (5.11) представляет собой каскад интеграторов: $y = \iint \cdots \int V dt,$ а компоненты вектора Z есть последовательно вычисляемые производные выходной переменной y:

$$Z = \begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}. \qquad (5.13)$$

Векторное соотношение (5.13) совместно с уравнением $\frac{d^n y}{dt^n} = v$ позволяет получить преобразование координат $Z = T(X)$ и зависимость

$$u = \Theta(X, v), \qquad (5.14)$$

которая при $v = 0$ трансформируется в искомую ”линеаризующую” обратную связь $u = Q(X)$.

Далее, для придания линейной системе (5.11) желаемых динамических свойств, следует охватить ее обратной связью

$$v = -KZ, \qquad (5.15)$$

выбрав коэффициенты матрицы обратной связи K из условия требуемого спектра собственных чисел матрицы замкнутой системы $(A - BK)$ (метод модального синтеза линейной системы).

С учетом преобразования координат $Z = T(X)$ корректирующее управление (5.15) системы (5.11) приводится к виду:

$$v = -K \cdot T(X). \qquad (5.15')$$

Окончательно, с учетом (5.15’), управление (5.14) преобразуется к выражению

$$u = \Theta(X, \quad -K \cdot T(X)), \qquad (5.14')$$

на основании которого и вычисляется управляющее воздействие для системы (5.10) в функции от компонент вектора состояния X.

На этом синтез системы (5.10) методом линеаризации обратными связями считается завершенным. Синтезированная система будет представлена уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) + g(X)u, \\ u = \Theta(X, \quad -K \cdot T(X)), \\ y = h(X). \end{cases} \qquad (5.16)$$

По сути, управление U будет состоять из двух составляющих: компонента $u_1 = Q(X) = \Theta(X, 0)$ является результатом первого этапа синтеза, то есть позволяет линеаризовать систему (5.10), приводя ее к виду (5.11); компонента u_2 отвечает за динамические свойства системы и является результатом второго этапа синтеза, когда выбирается матрица обратной связи K в линейной системе (5.11).

При вычислении производных в (5.13) на практике для большинства управляемых систем имеет место ситуация:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial h(X)}{\partial X}\cdot\frac{dX}{dt}=\frac{\partial h(X)}{\partial X}\cdot\left(f(X)+g(X)u\right)=\frac{\partial h(X)}{\partial X}f(X),$$

когда $\frac{\partial h(X)}{\partial X}g(X)u=0$, то есть $\frac{\partial h(X)}{\partial X}g(X)=0$.

Стоит отметить, что производная $\frac{\partial h(X)}{\partial X}$ берется покомпонентно, то есть в результате дифференцирования получится строка:

$$\frac{\partial h(X)}{\partial X}=\left[\frac{\partial h(X)}{\partial x_1}\quad\frac{\partial h(X)}{\partial x_2}\quad\cdots\quad\frac{\partial h(X)}{\partial x_n}\right].$$

Далее, если продолжить дифференцирование, можно получить:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dX}{dt}=\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial h(X)}{\partial X}f(X)\right)\left(f(X)+g(X)u\right)=\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial h(X)}{\partial X}f(X)\right)f(X),$$

если $\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial h(X)}{\partial X}f(X)\right)g(X)u=0$, или $\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial h(X)}{\partial X}f(X)\right)g(X)=0$.

То есть в результате дифференцирования получается, что производная $\frac{d^2y}{dt^2}$ зависит только от вектора X (второе слагаемое обращается в ноль).

И такая ситуация может иметь место при последовательном дифференцировании выходной координаты k раз подряд:

$$\frac{d^ky}{dt^k}=\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}\right)\frac{dX}{dt}=\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}\right)\left(f(X)+g(X)u\right)=\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}\right)f(X),$$

при условии, что $\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}\right)g(X)=0$,

причем $$\frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}}=\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{d^ky}{dt^k}\right)\frac{dX}{dt}=\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{d^ky}{dt^k}\right)f(X)+\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{d^ky}{dt^k}\right)g(X)u.$$

Для удобства записи при решении данной задачи используется аппарат дифференциальной геометрии, а именно – **производные Ли**.

Выражения, определенные выше, записываются более компактно:

$$\frac{\partial h(X)}{\partial X}f(X)=L_fh(X) \text{ и } \frac{\partial h(X)}{\partial X}g(X)=L_gh(X), \tag{5.17}$$

где $L_fh(X)$ - производная Ли от *h(X)* по *X* через *f*, а $L_gh(X)$, соответственно, производная Ли от *h(X)* по *X* через *g*.

Также определяются производные Ли второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial h(X)}{\partial X}f(X)\right)f(X)=\frac{\partial}{\partial X}\left(L_fh(X)\right)f(X)=L_f^2h(X),$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial h(X)}{\partial X}f(X)\right)g(X)=\frac{\partial}{\partial X}\left(L_fh(X)\right)g(X)=L_gL_fh(X). \tag{5.18}$$

Второе выражение в (5.18) - смешанная производная Ли.

Аналогично (5.18) определяются производные Ли и более высоких порядков:

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}\right)f(X)=\frac{\partial}{\partial X}\left(L_f^{k-1}h(X)\right)f(X)=L_f^k h(X),$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}\right)g(X)=\frac{\partial}{\partial X}\left(L_f^{k-1}h(X)\right)g(X)=L_g L_f^{k-1}h(X). \qquad (5.19)$$

Кроме того, вводится понятие относительной степени, которое характеризует обнуление смешанных производных.

Относительная степень показывает: сколько раз необходимо продифференцировать y, чтобы получить явную зависимость выхода y от входа u.

Или строго:

Одномерная система имеет относительную степень r в области Ω, если

$$\forall X \in \Omega,$$

$$L_g L_f^i h(X)=0, \quad i=0,1,\dots,r-2,$$

$$L_g L_f^{r-1}h(x)\neq 0.$$

То есть по сути, наименьшее k, для которого не выполняется условие $\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}\right)g(X)=L_g L_f^{k-1}h(X)=0$ и будет являться относительной степенью: $r = k$.

Тогда, полагая порядок системы равным относительной степени $(r=n)$, где n - порядок системы, нужно выполнить дифференцирование выходной переменной системы n раз.

Таким образом, по определению относительной степени, при определенном виде $g(X)$, которое обеспечит $r = n$ (равенство относительной степени порядку системы), последовательно дифференцируя, можно получить:

$$\begin{aligned}
&y=h(X),\\
&\frac{dy}{dt}=L_f h(X),\\
&\frac{d^2y}{dt^2}=L_f^2 h(X),\\
&\dots\dots\dots\\
&\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}=L_f^{n-1}h(X),\\
&\frac{d^n y}{dt^n}=L_f^n h(X)+L_g L_f^{n-1}h(X)u.
\end{aligned} \qquad (5.20)$$

Так как относительная степень равна порядку системы, то смешанные производные Ли от 0 до (n-2)$^{\text{ого}}$ порядка равны нулю (по определению относительной степени). Что означает, что управляющее воздействие u не вносит прямого вклада в любую из (n-1) производных от y (по определению относительной степени). Данный случай чаще всего и присутствует на практике.

На основании (5.20) с учетом (5.13) автоматически определяется вектор фазовых переменных Z (преобразование координат $Z = T(X)$):

$$Z = \begin{pmatrix} h(X) \\ L_f h(X \\ L_f^2 h(X) \\ \cdots\cdots\cdots \\ L_f^{n-1} h(X) \end{pmatrix},$$

а математическая модель системы будет представлена системой дифференциальных уравнений (см. (5.11), (5.12)):

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \cdots\cdots \\ \dot{z}_n = V. \end{cases} \tag{5.21}$$

Приравнивая $\dot{Z}_n = Y^{(n-1)}$ к v в последнем уравнении системы (5.20), можно получить зависимость управляющего воздействия u от нового v, то есть определить связь u с X и v:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(X)} (-L_f^n h(X) + v). \tag{5.22}$$

Тогда при замыкании системы (5.11) обратной связью $v = -KZ$, получится система $\dot{Z} = \Psi Z$, где

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \cdots & -k_n \end{bmatrix}.$$

Выбирая коэффициенты обратной связи k_i, можно произвольным образом располагать полюса замкнутой системы (метод модального синтеза). Таким образом, зная k_i, из (5.22) получают выражение для вычисления управляющего воздействия в исходных координатах системы (5.10):

$$u = u_1 + u_2 = \frac{-L_f^n h(X)}{L_g L_f^{n-1} h(X)} + \frac{-KZ}{L_g L_f^{n-1} h(X)} = \frac{-L_f^n h(X)}{L_g L_f^{n-1} h(X)} - \frac{K \cdot T(X)}{L_g L_f^{n-1} h(X)}. \tag{5.23}$$

Пример 3.

Пусть дана система третьего порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_2, \\ y = x_3, \end{cases} \tag{5.24}$$

или в матричной форме записи: $\begin{cases} \dot{X} = f(X) + g(X)u, \\ y = h(X), \end{cases}$

где $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad f(X) = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 + x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad g(X) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h(X) = x_3$.

Необходимо продифференцировать последнее уравнение из (5.24) несколько раз, до появления явной зависимости от u:

$$\dot{y} = L_f h(X) + L_g h(X)U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 + x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U = x_2,$$

$$\ddot{y} = L_f^2 h(X) + L_g L_f h(X)U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 + x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 x_2 + x_3, \tag{5.25}$$

$$\dddot{y} = L_f^3 h(X) + L_g L_f^2 h(X)u = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 + x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & x_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u =$$

$$= x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 + x_1 x_3 + x_2 + x_2 u,.$$

Видно, что смешанная производная Ли не обращается в ноль только при взятии третьей производной от y, и следовательно, по определению, относительная степень равна трем, то есть порядку системы.

В результате дифференцирования получается преобразование координат $Z = T(X)$:

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(X) \\ L_f h(X) \\ L_f^2 h(X) \end{bmatrix}. \tag{5.26}$$

Далее нужно перейти к новым координатам:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \dot{z}_3 = v, \\ y = z_1. \end{cases} \tag{5.27}$$

Откуда, при дифференцировании последнего выражения из (5.26) и приравнивании его к v, можно получить уравнение:

$$L_f^3 h(X) + L_g L_f^2 h(X) u = v \quad \Rightarrow \quad x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 + x_1 x_3 + x_2 + x_2 u = v, \tag{5.28}$$

Отсюда (из (5.27) и (5.22)) получают связь старого управляющего воздействия с новым:

$$u = \frac{v - (x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 + x_1 x_3 + x_2)}{x_2} \tag{5.29}$$

Данное выражение (при v =0) характеризует обратные связи, которые необходимо ввести, чтобы система свелась к линейной вида (5.11) – (5.12).

Далее с помощью метода модального синтеза определяются коэффициенты матрицы обратной связи K из выражения $v = -KZ$, чтобы получить желаемые динамические свойства системы.

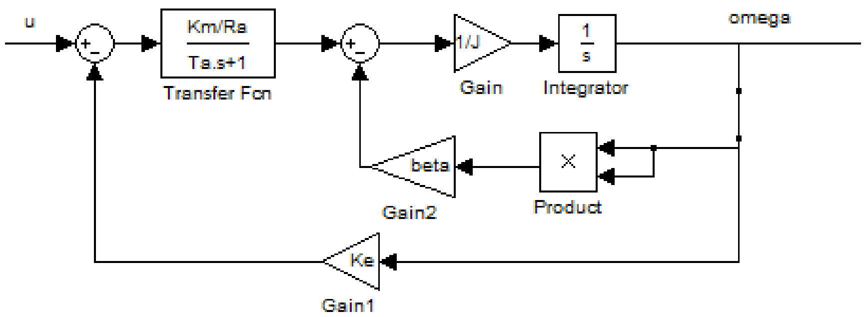
Окончательное выражение для управляющего воздействия будет иметь вид:

$$u = \frac{-(x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 + x_1 x_3 + x_2)}{x_2} - \frac{KZ}{x_2} = \frac{-(x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 + x_1 x_3 + x_2)}{x_2} - \frac{K \cdot T(X)}{x_2}, \tag{5.30}$$

Выражение (5.30) представляет собой обратные связи в системе (линеаризующие и корректирующие). Здесь T(X) определяется системой (5.26).

Пример 4.

Пусть дан двигатель постоянного тока с вентиляторной нагрузкой. Структурная схема системы, набранная в среде моделирования MatLab Simulink, имеет вид:



где K_m=0.3854 $\frac{Н \cdot м}{А}$, R_a=11 Ом, Ta=20 мс, J=0.0972 кг*м/с, β=1,

K_e=0.3854 $\frac{В \cdot с}{рад}$.

Для реализации метода ЛОС необходимо перейти к фазовым переменным, определив сначала передаточную функцию системы:

$$W_{ДПТ} = \frac{W_{ПР}}{1 + K_e \cdot W_{ПР}} = \frac{K_М}{K_e K_М + R_a (T_a p + 1)(Jp + \beta \cdot F(\omega))} = \frac{\omega}{u}. \tag{5.31}$$

Здесь $W_{ПР}$ – передаточная функция прямого тракта, равная

$$W_{ПР} = \frac{K_М / R_a}{T_a p + 1} \cdot \frac{1}{Jp + \beta \cdot F(\omega)}.$$

Далее из (5.31) получают математическую модель системы в виде дифференциального уравнения:

$$K_M u = K_e K_M \omega + R_a T_a J\ddot{\omega} + R_a J\dot{\omega} + R_a T_a \beta\dot{\omega}^2 + R_a \beta\omega^2 . \qquad (5.32)$$

Теперь выполняют замену переменных:

$$\begin{cases} x_1 = \omega, \\ \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = b \cdot u - (x_1 a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1^2 + a_4 x_2^2). \end{cases} \qquad (5.33)$$

Здесь $b = \dfrac{K_M}{R_a T_a J}$, $a_1 = \dfrac{K_e K_M}{R_a T_a L}$, $a_2 = \dfrac{1}{T_a}$, $a_3 = \dfrac{1}{T_a J}$, $a_4 = \dfrac{1}{J}$.

Так как в данном случае система (5.33) уже записана в фазовых координатах, следовательно, делать еще одну замену нет необходимости.

Приравняв $\dot{x}_2$ в (5.33) к новому входу v (как и в (5.21)), можно получить систему вида (5.11) с матрицами (5.12):

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bv, \\ \omega = CX, \end{cases} \qquad (5.34)$$

где $C = [1,\ 0]$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

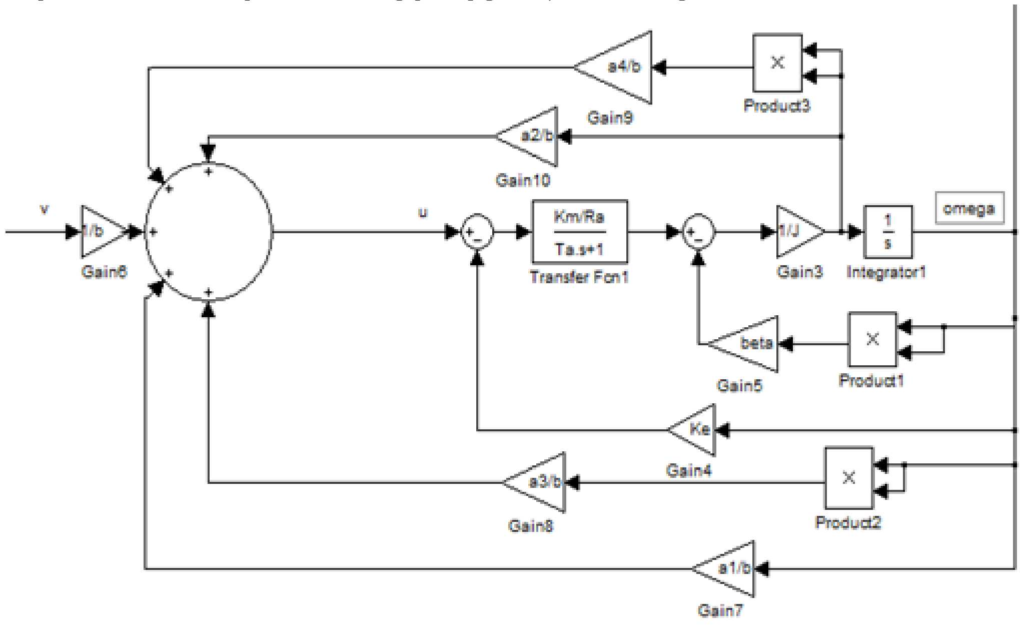
Выражение для линеаризующих обратных связей можно получить из последнего уравнения (5.33), приравняв правую часть к v. Тогда:

$$u = \frac{1}{b}v + \frac{a_1}{b}x_1 + \frac{a_2}{b}x_2 + \frac{a_3}{b}x_1^2 + \frac{a_4}{b}x_2^2. \qquad (5.35)$$

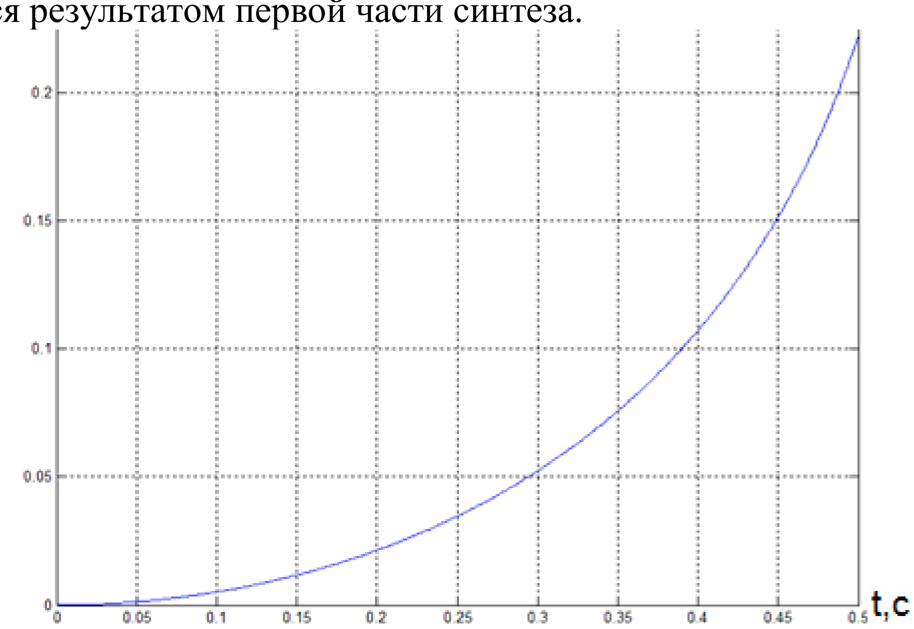
где $\dfrac{a_1}{b} = 0.38$, $\dfrac{a_2}{b} = 2.77$, $\dfrac{a_3}{b} = 28.54$, $\dfrac{a_4}{b} = 0.57$.

По сути, была выражена зависимость старого входа u от нового v с помощью дополнительных обратных связей.

Получилась следующая структура (Моделирование в MatLab Simulink®):



Переходная характеристика данной системы имеет вид параболы (см. рис. ниже), что совпадает с переходной характеристикой двойного интегратора. Следовательно, система сведена к линейной. Приведение к каскаду интеграторов является результатом первой части синтеза.



Далее, используя дополнительные обратные связи $v=-KX$, необходимо добиться качественного переходного процесса. На этом этапе элементы матрицы К могут быть определены методом подбора.

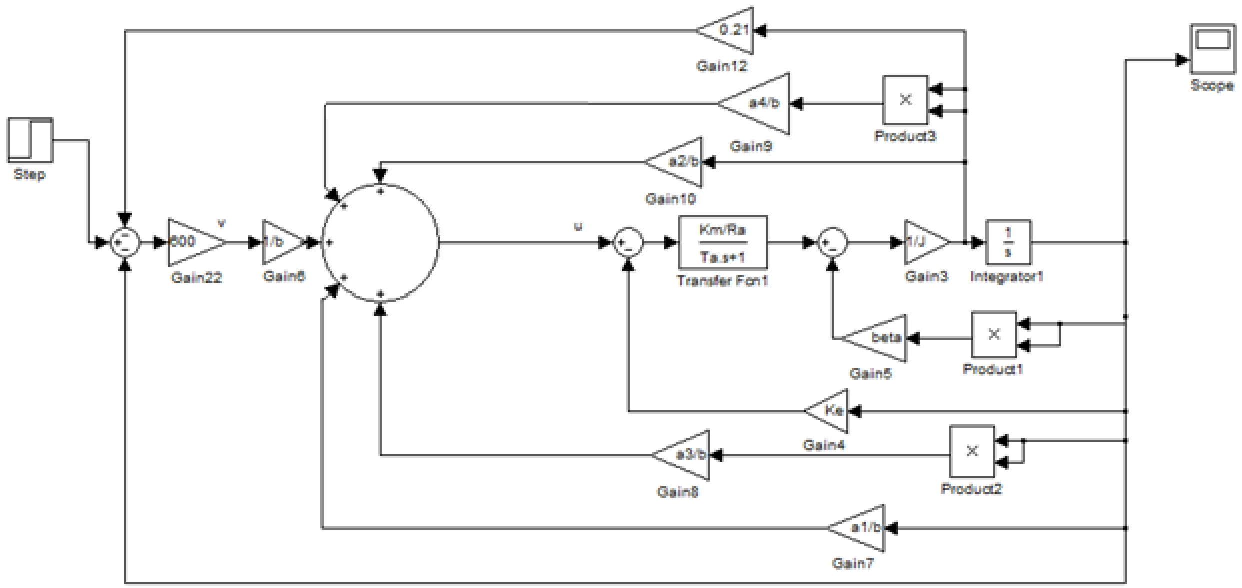
В результате получается:

$$v=-KX=-[600 \quad 126]\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=-(600\cdot x_1+126\cdot x_2) \tag{5.36}$$

Откуда выражение для *u:*

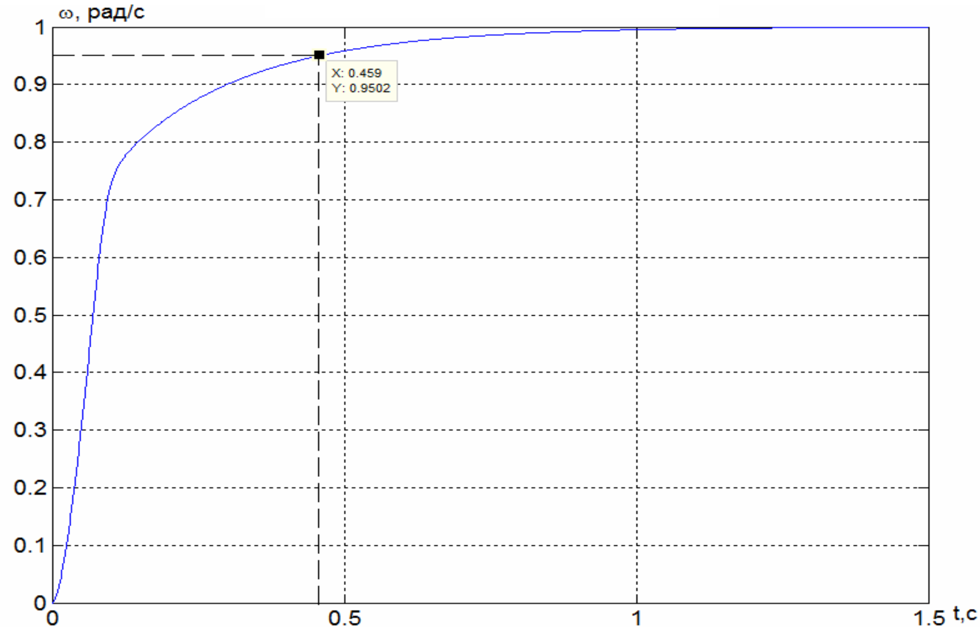
$$\begin{gathered} u=-\frac{1}{b}(600\cdot x_1+126\cdot x_2)+\frac{a_1}{b}x_1+\frac{a_2}{b}x_2+\frac{a_3}{b}x_1^2+\frac{a_4}{b}x_2^2= \\ =-33.3\omega-6.99\dot{\omega}+0.38\omega+2.77\dot{\omega}+28.54\omega^2+0.57\dot{\omega}^2. \end{gathered} \tag{5.37}$$

Окончательно, модель будет иметь вид:

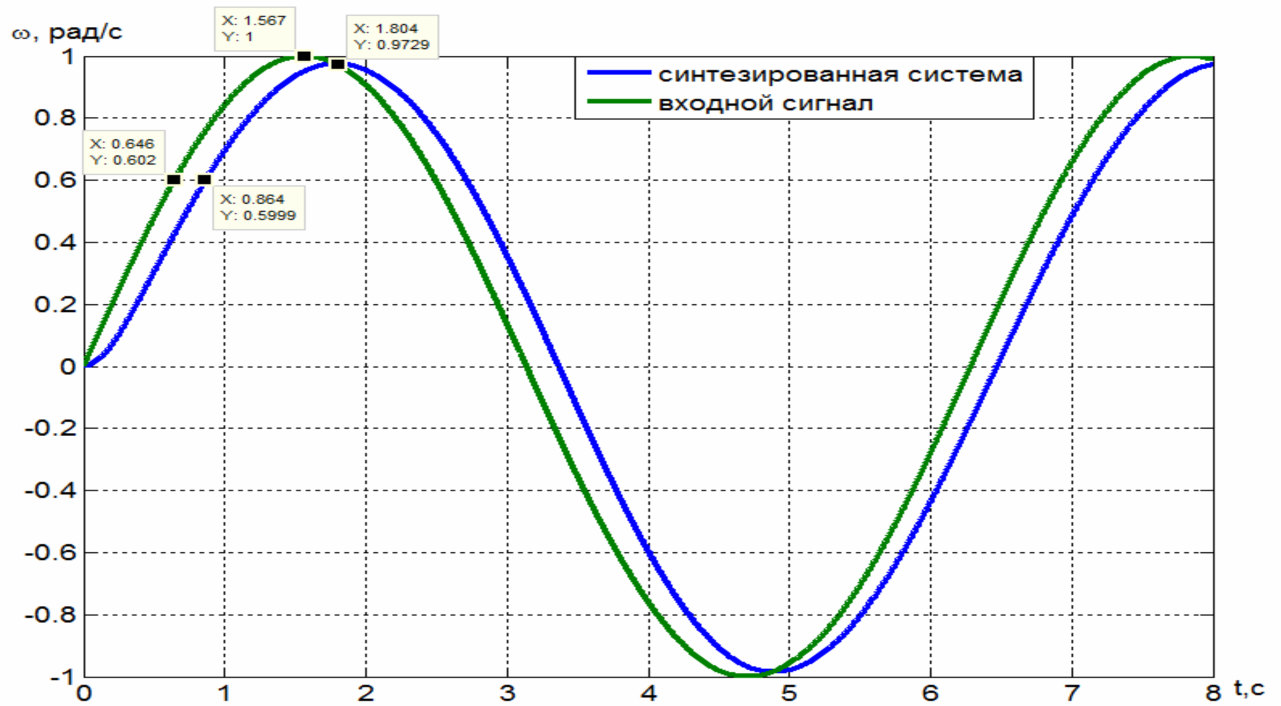


Gain12 имеет коэффициент усиления 0.21, а Gain22 – 600.

Переходная характеристика для этого случая изображена на графике (см. рис. ниже). Видно, что время переходного процесса (с коридором 5%) составляет 0.459 с, а установившееся значение равно заданному.



Если подать на вход гармонический сигнал, то можно получить следующую характеристику:



Видно, что выходная координата синтезированной системы соответствует по форме входному сигналу, однако с уменьшенной амплитудой (в 0.97 раз) и запаздыванием на $0.864 - 0.646 = 0.218c = 218мс$. То есть система отрабатывает гармонический сигнал с динамической ошибкой.

Следовательно, синтез проведен успешно, выходной сигнал синтезированной системы повторяет форму входного сигнала с допустимыми отклонениями по параметрам (амплитуда, фаза).

Пример показывает, что данный метод синтеза достаточно прост и нагляден.

5.4. Синтез нелинейных систем управления на основе функций Ляпунова

Известный русский ученый А.М. Ляпунов предложил достаточно общий подход к исследованию устойчивости динамических систем, который в настоящее время называется методом функций Ляпунова. Знание функции Ляпунова для конкретной системы позволяет дать оценку её устойчивости, оценку времени и качества регулирования, оценить область притяжения или влияние постоянно действующих возмущений. С помощью функций Ляпунова можно также осуществить синтез нелинейной системы управления. Ниже рассматривается алгоритм синтеза нелинейных систем управления, в основу которого положен метод функций Ляпунова для исследования устойчивости движений нелинейных систем.

Будем рассматривать стационарные нелинейные объекты, которые описываются уравнениями

$$\dot{X} = F(X) + B(X)u\,. \tag{5.38}$$

Если вектор-функция $F(X)$ дифференцируема и $F(0) = 0$, то уравнение (5.38) можно записать в форме

$$\dot{X} = AX + f(X) + B(X)u\,, \tag{5.39}$$

где A - некоторая постоянная устойчивая матрица, а $f(X)$ такова что $f(0) = 0$ и $F(X)=AX+f(X)$.

Задача управления объектами (5.38) или (5.39) заключается в определении управления $u = u(X)$ или, что то же самое, в построении некоторого регулятора таким образом, чтобы замкнутая система управления объектом (5.38) имела устойчивое в целом положение равновесия.

Будем рассматривать систему (5.38), у которой при $u = 0$ либо положение равновесия $X = 0$ является неустойчивым, либо переходные процессы не удовлетворяют требованиям, предъявляемым к качеству процессов управления.

Из уравнения Ляпунова

$$A^T P + PA = -D\,, \tag{5.40}$$

где D - положительно определенная матрица $(D > 0)$, находится P – симметричная положительно определенная матрица $(P > 0)$.

Выберем в качестве кандидата в функции Ляпунова для системы (5.39) положительно определенную квадратичную форму

$$V(X) = X^T PX\,. \tag{5.41}$$

Найдем ее производную по времени вдоль траекторий системы (5.39):

$$\dot{V}(X) = \dot{X}^T PX + X^T P\dot{X} = \left(AX + f(X) + B(X)u\right)^T PX + X^T P\left(AX + f(X) + B(X)u\right),$$

и с учетом (5.40) получим

$$\dot{V}(X) = -X^T DX + 2\left(X^T Pf(X) + X^T PB(X)u\right). \tag{5.42}$$

Для устойчивости системы (5.39) необходимо, чтобы производная $V(X)$ была отрицательно определенной $\left(\dot{V}(X) < 0\right)$, то есть должно выполняться:

$$-X^T DX + 2\left(X^T Pf(X) + X^T PB(X)u\right) < 0, \text{ или}$$

$$-0.5\cdot X^T DX + X^T Pf(X) + X^T PB(X)u \;<\; 0 \text{, либо}$$

$$X^T Pf(X) + X^T PB(X)u \;<\; 0.5\cdot X^T DX\,. \qquad (5.43)$$

С целью обеспечения некоторой скорости убывания функции Ляпунова *V(X)* (5.41) вдоль траектории системы (5.39) можно потребовать:

$$\dot V(X) = -k\cdot X^T DX < 0, \qquad (5.44)$$

что выполняется при любом положительном *k (k > 0)*; $\dot V(0) = 0.$

Тогда из (5.44) с учетом (5.42) получаем:

$$-X^T DX + 2\left(X^T Pf(X) + X^T PB(X)u\right) = -kX^T DX\,, \quad \text{или}$$

$$X^T Pf(X) + X^T PB(X)u = -0.5(k-1)X^T DX\,, \quad \text{либо}$$

$$X^T Pf(X) + X^T PB(X)u = \gamma\cdot X^T DX\,, \qquad (5.45)$$

где $\gamma = -0.5\cdot(k-1)$, *k > 0;* $\Rightarrow$ $\gamma < 0.5$.

Уравнение (5.45) позволяет получить аналитическое выражение для вычисления сигнала управления:

$$u(X) = \frac{\gamma\cdot X^T DX - X^T Pf(X)}{X^T PB(X)}\;. \qquad (5.46)$$

Управляющее воздействие (5.46) обеспечивает желаемую, определенную равенством (5.44), скорость убывания функции Ляпунова для системы (5.39).

Некоторые авторы [9] предлагают последнее неравенство в (5.43) с целью обеспечения конечной минимальной скорости убывания функции Ляпунова *V(X)* (5.41) вдоль траектории системы (5.39) привести к виду:

$$X^T Pf(X) + X^T PB(X)u \quad\le\quad \alpha\cdot X^T DX\,, \qquad (5.47)$$

где α – некоторое положительное число, строго меньшее 0.5: $0 \le \alpha < 0.5$.

Таким образом, для обеспечения отрицательной определенности производной по времени $\dot V(X)$ функции Ляпунова (5.41) управление *u(X)* можно определить следующим выражением:

$$u(X) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad X^T Pf(X) < \alpha X^T DX, \\ \dfrac{-X^T Pf(X)}{X^T PB(X)}, & \text{если} \quad X^T Pf(X) \ge \alpha X^T DX.\cdot \end{cases} \qquad (5.48)$$

Из этого выражения следует, что нелинейный регулятор, реализующий управление (5.48), должен содержать логическое устройство (ЛУ), назначение которого состоит в следующем.

Если $X^T Pf(X) < \alpha X^T DX$, то ЛУ обеспечивает *u=0*. Если же $X^T Pf(X) \ge \alpha X^T DX$, то управление вычисляется как $u(X) = \dfrac{-X^T Pf(X)}{X^T PB(X)}$.

Регулятор (5.48) формирует кусочно-непрерывное управляющие воздействие, которое обеспечивает устойчивость положения равновесия системы (5.38) в целом. Он состоит из непрерывной части и логического устройства.

Однако, такой регулятор является идеальным, то есть физически не реализуемым. Это связано с тем, что переключения в логической части регулятора должны быть мгновенными. Технически чрезвычайно сложно точно установить момент переключения ЛУ.

Можно потребовать, например, чтоб скорость убывания функции Ляпунова $V(X)$ определялась равенством:

$$\dot{V}(X) = -X^T DX \, , \tag{5.49}$$

что соответствует $k = 1$ в (5.44), $\gamma = 0$ в (5.45) и $\alpha = 0$ в (5.47).

С учетом (5.49) выражения для вычисления управляющего воздействия (5.46) и (5.48) сводятся к одной формуле:

$$u(X) = \frac{-X^T Pf(X)}{X^T PB(X)} \, . \tag{5.50}$$

Исследование выражений (5.46), (5.48) и (5.50) позволяет заметить, что при приближении вектора состояний X системы (5.38), или (5.39), к области, где $X^T PB(X) = 0$, управление $u(X)$, определяемое соответствующими формулами, резко возрастает и, как показывают эксперименты, может менять знак. Эти особенности приводят к невозможности его точной физической реализации.

На практике такие системы являются релейными и в них может наблюдаться скользящий режим.

Пример 1. Рассмотрим нелинейную систему второго порядка

$$\dot{X} = AX + f(X) + B(X)u,$$

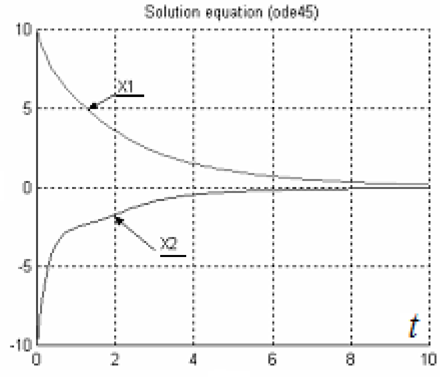
где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$, $f(X) = \begin{pmatrix} \sin(x_1 + x_2) \\ \sin(x_1) \end{pmatrix}$, $B(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

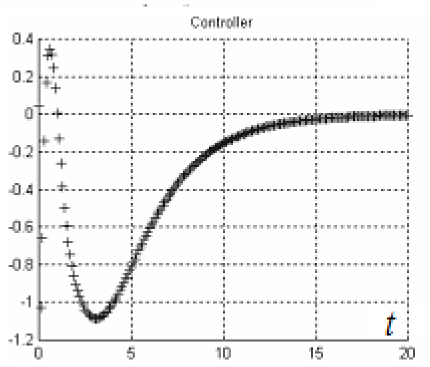
Собственные числа матрицы состояния A: $\lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{17} - 5}{2}$, то есть данная матрица - устойчива. Решение уравнения Ляпунова $A^T P + PA = -D$ будет определяться матрицей: $P = \begin{pmatrix} 1{,}55 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}15 \end{pmatrix}$.

В соответствии с выражением (5.50) управление u будет определяться формулой:

$$u = -\sin(x_1 + x_2) - \frac{0{,}25x_1 + 0{,}15x_2}{1{,}25x_1 + 0{,}25x_2} \sin(x_1).$$

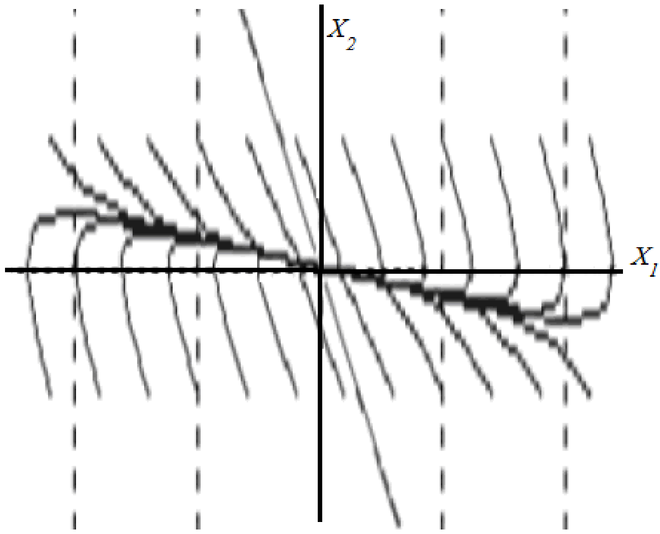
На следующих рисунках приведены графики изменения переменных состояния, а также кривая управления $u(t)$:





Графики переменных $x_1(t),\ x_2(t)$. График управления $u(t)$.

Ниже изображен фазовый портрет рассматриваемой системы. Из графиков видно, что положение равновесия системы является устойчивым.



Фазовый портрет системы

Пример 2. Рассмотрим систему (5.39),

где $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix},\quad f(X)=\begin{pmatrix}\sin(x_1+x_2)\\ \sin(x_1)\end{pmatrix},\quad B(X)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$

Здесь матрица А имеет пару комплексных корней. Как и в предыдущем примере, требуется решить уравнение Ляпунова относительно матрицы P, которая принимает вид $P=\begin{pmatrix}1{,}7 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}3\end{pmatrix}.$

Управляющее воздействие, обеспечивающее системе (5.39) заданную (5.49) скорость убывания функции Ляпунова (5.41), будет определяться выражением:

$$u=-\sin(x_1+x_2)-\frac{0{,}1x_1+0{,}3x_2}{1{,}7x_1+0{,}1x_2}\sin(x_1).$$

Заключение

Теория автоматического управления, как составная часть технической кибернетики, - наука построения технических систем. Математические методы и средства позволяют выявить основные свойства систем автоматического управления и дать рекомендации для их проектирования. Метод переменных состояния - один из основных современных методов анализа и синтеза управления.

В настоящем учебном пособии рассмотрены основные понятия метода переменных состояния. Показаны разновидности моделей систем в пространстве состояний, проведен анализ линейных и нелинейных систем управления. Рассмотрены различные методы синтеза как линейных , так и нелинейных непрерывных систем автоматического управления.

Первые разделы пособия посвящены математическим моделям систем с использованием векторно-матричной формы записи их моделей и дан анализ их устойчивости.

В третьем разделе рассмотрены проблемы устойчивости и наблюдаемости линейных систем.

Последние разделы содержат различные методы синтеза линейных и нелинейных систем управления, а именно: Методы модального синтеза, Метод структурного синтеза, Метод синтеза линеаризацией обратными связями и Синтез с использованием функции Ляпунова. Рассмотренные методики не являются исчерпывающими. Значительная часть их осталась вне настоящего пособия и может быть рассмотрена самостоятельно при углубленном изучении теории автоматического управления систем с моделями в пространстве состояний.

Список рекомендуемой литературы

1. Аверченков В. И. Основы математического моделирования технических систем: Учебное пособие / В. И. Аверченков, В. П. Федоров, М. Л. Хейфец. – 2-е издание, стереотипное – М.: Флинта, 2011. – 271 с.
2. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 288 с.
3. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: Учеб. пособие. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 464 с.
4. Ким, Д. П. Теория автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы : учебник и практикум для академического бакалавриата / Д. П. Ким. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 441 с.
5. Ерофеев А.А. Теория автоматического управления: Учебник для вузов / А.А. Ерофеев. - СПб.: Политехника, 2008. - 302 с.
6. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. 4-е изд., пер. и доп. / Е.И. Юревич. - СПб.: BHV, 2016. - 560 с.
7. Кузовков, Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства – М.: Машиностроение, 1976. – 184 с.
8. Попов Е.П., Бесекерский В.А.,. Теория систем автоматического управления / Е.П. Попов, В.А. Бесекерский. – Изд. 4-е, перераб. и доп. – Спб.: Изд-во «Профессия», 2003. – 752 с.
9. Ле Ч.Т., Гайдук А.Р., Синтез нелинейных систем управления на основе функций Ляпунова // Известия ТРТУ. Специальный выпуск “Технические науки”. Материалы III научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава, аспирантов и сотрудников ТРТУ. – Таганрог: Изд-во ТРТУ. 2006. №9(64). – С. 51-56.