Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ФИЛИПОВСКИЙ ВЛАДИМИР МИХАЙЛОВИЧ

Дискретные системы в пространстве состояний

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2022

УДК 681.5.01

Филиповский В.М. **Дискретные системы в пространстве состояний**: Учебное пособие / В.М. Филиповский. – СПб., 2022. – 35 с.

Пособие соответствует ФГОС ВО по направлению подготовки 27.03.04 «Управление в технических системах» (уровень бакалавриата).

В учебном пособии представлены базовые положения современной теории управления и основного аппарата теории — метода пространства состояний. Рассмотрены различные формы векторно-матричной записи математических моделей дискретных систем, включая разностные уравнения и модель в пространстве состояний, с переходом от одной формы модели к другой. Излагаются основные свойства и особенности систем управления, а также методы анализа и синтеза линейных дискретных систем автоматического управления. Ряд методов синтеза проиллюстрирован примерами.

Настоящее пособие предназначено студентам Высшей Школы Киберфизических систем и Управления (программа «Управление в технических системах») в качестве пособия по освоению курсов «Теория автоматического управления» и «Дискретные системы».

Ключевые слова: Дискретная система автоматического управления, математическая модель, решетчатая функция, разности, разностные уравнения, система разностных уравнений, вектор состояния системы, устойчивость системы, устойчивость по Ляпунову, управляемость, наблюдаемость, наблюдатель Люинбергера, синтез систем, метод модального синтеза.

Оглавление

Введение

Формирование классической теории автоматического управления, посвященного изучению линейных непрерывных систем, завершилось в основном к концу первой половины двадцатого столетия.

Во второй половине прошлого века производство выдвинуло ряд задач управления нелинейными системами, первоначально при их рассмотрении «в малом», т.е. при незначительных отклонениях параметров от заданных значений, а затем появилась необходимость управления «в большом». Наконец, в последние десятилетия двадцатого века создались благоприятные условия для развития теории дискретных систем и современного математического аппарата пространства состояния.

Система автоматического управления (САУ) представляет собой совокупность информационно-сенсорных и управляющих устройств, преобразующих информацию о состоянии управляемого физического объекта и внешней среды и обеспечивающих управление этим объектом в соответствии с поставленными задачами. Характер сигналов в системе, как управляющих, так и содержащих необходимую для выработки управления информацию, обычно рассматривают в качестве классификационного признака этих систем.

Определение 1. Система называется дискретной, если сигналы в ней изменяются только в дискретные моменты времени, т. е. являются дискретными. Если сигналы изменяются непрерывно, то систему относят к классу ***непрерывных*** САУ. Таким образом, понятие дискретной системы связано с понятием дискретного сигнала, т. е. сигнала, значения которого определены только в дискретные моменты времени t_i, $i = 1, 2, ..., n, \dots$

Как правило, в системе автоматического управления имеет место квантование сигналов. Квантование может быть: по уровню сигнала и по времени. Как только в состав САУ включается цифровой вычислитель, или микропроцессорное устройство автоматики, немедленно возникают два квантования - по уровню и по времени.

Определение 2. Дискретной называется система, в состав которой помимо непрерывных динамических звеньев входит хотя бы один элемент, производящий квантование непрерывного сигнала в прерывистый (дискретный).

Система с квантованием только по времени — *импульсная*. Система с квантованием по уровню — *релейная*. Система с квантованием и по времени и по уровню — *цифровая*.

Применение дискретных сигналов в автоматических системах может быть вызвано разными причинами. Одна из них — это специальная дискретизация сигнала, выполняемая с целью защиты сигнала от помех при его передаче по каналу связи. Для этого непрерывный сигнал заменяется последовательностью импульсов, один из параметров которых (амплитуда, ширина, частота) содержит информацию о дискретных значениях сигнала. Такой способ дискретизации сигнала называется *импульсной модуляцией* и применяется в *импульсных системах*.

Импульсная модуляция сигнала бывает необходимой в связи с особенностями объекта управления. Например, двигателем постоянного тока целесообразно управлять, изменяя только ширину импульса управляющего напряжения при сохранении его амплитуды. Таким образом, дискретным становится сигнал управления.

Основной причиной дискретизации сигналов в современных (*цифровых*) САУ является широкое использование вычислительной техники для обработки информации и формирования сигналов управления.

Дискретность сигнала может быть связана и с устройством датчиков информации, применяемых в автоматической системе. Например, при использовании цифровых датчиков положения, угла поворота или скорости измеряемая информация доступна только в дискретные моменты времени.

Определение 3. **Под дискретной системой понимается** техническое устройство или программа, осуществляющая преобразование входной дискретной последовательности в другую дискретную последовательность в соответствии с заданным алгоритмом.

Дискретное представление математической модели автоматической системы будет единственно возможным, если речь идет о системе принятия решений, логическом управлении, цифровых автоматах. Такая система может вообще не содержать непрерывной части, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Системы обработки (преобразования) сигналов также относятся к дискретным системам.

Приведенные Определения позволяют системы разной природы объединить в единую группу **дискретных систем**, что дает возможность применения одного и того же математического аппарата для их исследования и проектирования (синтеза). Определение 3 для некоторого класса систем может быть тождественным Определению 1.

1. Математические модели дискретных систем

Дискретные системы для целей исследования и проектирования представляются различными математическими моделями.

Как и непрерывные, дискретные модели могут описываться как временными зависимостями, так и передаточными функциями.

Во временной области дискретные системы автоматического управления имеют три формы математического описания:

- решетчатой функции, являющейся аналогом описания непрерывных сигналов при помощи импульсной переходной функции;
- разностных уравнений вход-выход, являющихся аналогом дифференциальных уравнений;
- разностных уравнений в переменных состояний, являющихся аналогом описания непрерывных систем в пространстве состояний.

Разностное уравнение часто используется для описания цифровых вычислительных средств.

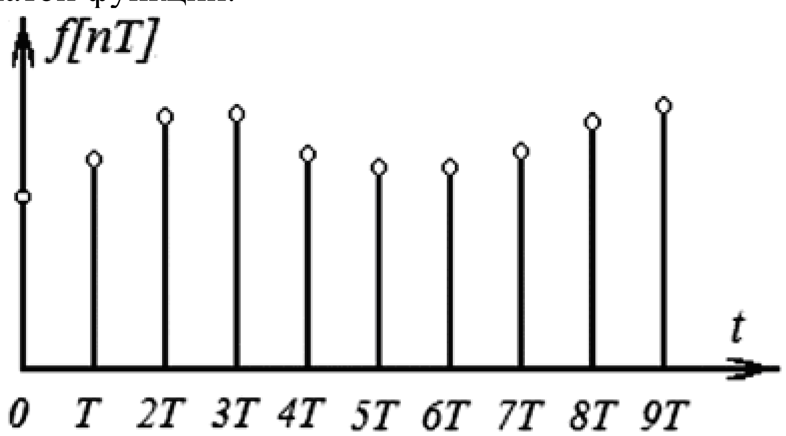
В основу передаточных функций положены преобразования Лапласа, Z-преобразование. Математические модели дискретных систем в этом случае представляются структурными схемами, в которых каждый элемент системы описан своей передаточной функцией. Дискретной системе также ставится в соответствие передаточная функция системы.

1.1.Решетчатая функция

Исходя из приведенных во Введении Определений дискретной системы, последняя характеризуется прежде всего сигналами, изменяющимися в дискретные моменты времени. Для описания таких сигналов используется решетчатая функция.

Решетчатая функция (РФ) – функция, значения которой определены только для дискретных равноотстоящих друг от друга значений независимой переменной (аргумента).

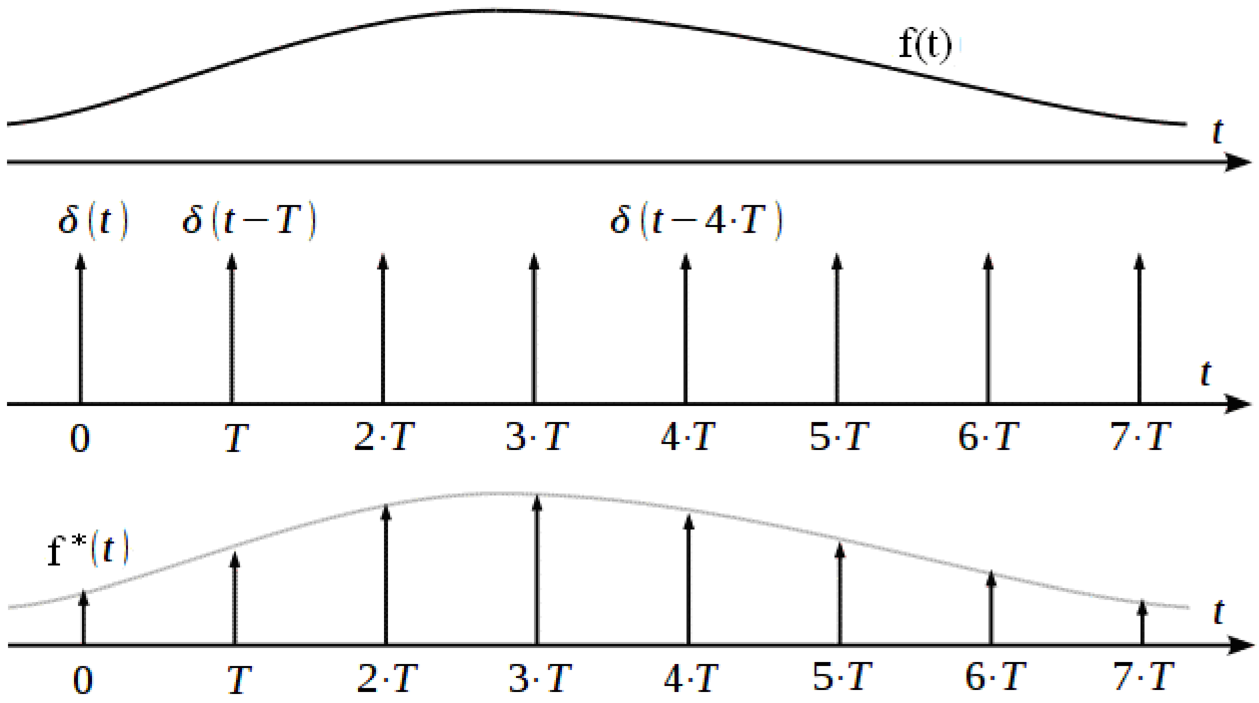
Решетчатая функция может быть получена в результате замены непрерывной зависимости на дискретную, определенную в дискретные моменты времени nT, n=0,1, 2, … Непрерывной функции $f(t)$ соответствует РФ $f[nT]$, или $f(nT)$, или $f^*(t)$, где T – период квантования, а $f[nT]$, $f(nT)$, $f^*(t)$ – обозначения решетчатой функции. При этом непрерывная функция является огибающей решетчатой функции.



При заданном значении периода квантования T непрерывной функции *f(t)* соответствует однозначная РФ *f[nT]*.

Решетчатые функции необязательно отражают непрерывные функции. Любую таблицу, составленную из определенных величин через равные интервалы аргумента, можно рассматривать как решетчатую функцию. Так как *n* есть целое число, обозначающее номер ординаты, для которой дается значение решетчатой функции, то расстояние между соседними значениями независимой переменной равно единице. В случае дискретного аргумента РФ обозначается как *f[n]* или *f(n)*.

Решетчатую функцию можно рассматривать как результат модуляции непрерывной функции *f(t)* импульсной последовательностью $\delta(t)$:



Таким образом, дается более строгое определение РФ [1]:

"***Решетчатая функция** $f^*(t)$ **– это квантованный сигнал, … , представляющий собой последовательность импульсов, площадь которых равна амплитуде исходного непрерывного сигнала** f(t) **в дискретные моменты времени***".

Следовательно, РФ это импульсная функция, состоящая из периодически следующих друг за другом δ–импульсов, площадь которых равна значениям непрерывного сигнала в те же моменты времени.

Тогда каждое отдельное значение РФ определяется выражением:

$$f[nT] = f(t)\,\delta(t - nT).$$

А вся совокупность импульсов решетчатой функции будет описана как:

$$f^*(t) = \sum_{n=o}^{\infty} f(t)\cdot\delta(t-nT) = \sum_{n=o}^{\infty} f(nT)\cdot\delta(t-nT). \qquad (1.\,1)$$

1.2. Разности. Разностные уравнения

В непрерывных системах для описания процессов, протекающих в них, используются производные и дифференциальные уравнения, связывающие входную и выходную переменные системы. По аналогии с производными, в дискретных системах разработан математический аппарат разностей и, соответственно, разностных уравнений.

Разностные уравнения определяются как уравнения, содержащие конечные разности искомой функции $y = y(t)$:

$$\mathbf{a_m\Delta^m y[n]+a_{m-1}\Delta^{m-1}y[n]+...+a_0y[n] = b_k\Delta^k x[n]+b_{k-1}\Delta^{k-1}x[n]+...+b_0x[n],} \quad (1.2)$$

где $\mathbf{\Delta^k f[n] = \Delta^{k-1} f[n+1] - \Delta^{k-1} f[n]}$ - конечная разность k-го порядка функции $\mathbf{f(t)}$, вычисленная в точке $\mathbf{t = t_n}$. $\mathbf{f[n]= f[t_n]}$.

Но так как конечная разность определяется соотношением, связывающим дискретный набор значений функции $y(t)$, соответствующих дискретной последовательности аргументов $t_1, t_2, ..., t_n$, то в разностном уравнении после подстановки этих разностей остаются значения функции, вычисленные для этих аргументов:

$$\mathbf{c_m y[n]+c_{m-1}y[n-1]+...+c_0y[n-m] = d_k x[n]+d_{k-1}x[n-1]+...+d_0x[n-k],} \quad (1.3)$$

или

$$\mathbf{a_0y[m]+a_1y[m-1]+...+a_my[0] = b_0x[k]+b_1x[k-1]+...+b_kx[0].} \quad (1.4)$$

Разностное уравнение — уравнение, связывающее значение некоторой неизвестной функции $y(t)$ в любой точке с её значением в одной или нескольких точках, отстоящих от данной на определенный интервал (вычисленных для ряда *равноотстоящих значений аргумента t*).

Порядком разностного уравнения называется разность между последним и первым моментами времени.

Разностные уравнения (как и дифференциальные) различают однородные и неоднородные.

Одним из важных свойств систем является их физическая реализуемость. Линейная дискретная система, описываемая разностным уравнением (1.4), является **физически реализуемой**, если:

- при нулевых начальных условиях реакция $\mathbf{y[m]}$ не может возникнуть раньше воздействия $\mathbf{x[k]}$;
- значения реакции в каждый момент времени $\mathbf{n}$ зависят только от текущего ($\mathbf{n=m}$) и предшествующих ($\mathbf{n<m}$) значений воздействия, но не зависят от его последующих значений.

Таким образом, на основании изложенного можно определить:

Дискретная система будет физически реализуемой, если в уравнении (1.4) выполняется: $\mathbf{k<m}$ или $\mathbf{k=m}$.

Общее решение неоднородного разностного уравнения, по аналогии с неоднородным дифференциальным уравнением, представляется в виде суммы переходной (свободной) и вынужденной составляющих.

Разностные уравнения можно разрешить аналитически по той же методике, что и дифференциальные уравнения. Например, для однородного разностного уравнения (1.4), приравняв правую часть нулю, находят корни $\mathbf{z_1 \ldots z_m}$ характеристического уравнения:

$$\mathbf{a_0z^m + a_1z^{m-1} + ... + a_mz^0 = 0.} \quad (1.5)$$

Тогда свободная составляющая движения рассчитывается как:

$$y[n] = A_1 z_1^n + A_2 z_2^n + \cdots + A_{m-1} z_{m-1}^n + A_m z_m^n, \quad (1.6)$$

где $\boldsymbol{A_i}$ постоянные "интегрирования", n – интервалы квантования процесса: $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Ясно, что для затухающего, т.е. устойчивого движения, необходимо иметь все корни характеристического уравнения: $|z_i|$ **<1** (по модулю меньше единицы).

Решение неоднородного уравнения (1.4) выполняется, как и для дифференциальных уравнений, методом вариации произвольных постоянных. Об этой процедуре решения разностных уравнений рассказывалось в курсе "Вычислительная математика".

Разностные уравнения могут быть получены и для непрерывных систем. Такое возможно при численном решении соответствующих дифференциальных уравнений методами Рунге-Кутта или с помощью разностной схемы Адамса.

Разностное уравнение вход-выход (1.4) может быть записано и в компактной форме. Для этого вводится специальный оператор сдвига, обозначаемый, например, **z**, характеризующий запаздывание (опережение) сигнала по времени. Смысл данного оператора понятен из следующих выражений:
$y[n+1] = z \cdot y[n]$, $y[t_{n+1}] = z \cdot y[t_n]$, $y[n] = z^{-1} \cdot y[n+1]$, $y[t_n] = z^{-1} \cdot y[t_{n+1}]$.

Тогда уравнение (1.4) будет переписано в операторном виде:

$$A(z)y[n] = B(z)x[n], \qquad (1.7)$$

где $A(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m$, $B(z) = b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + \ldots + b_k$, - соответственно собственный и входной полиномы дискретной системы.

На практике обозначение оператора сдвига **z** совпадает по написанию с оператором Z-преобразования, о чем будет рассказано ниже в соответствующих разделах.

1.3. Изображения дискретных сигналов, передаточные функции

Дискретные функции, как и сигналы в аналоговых системах, также подвергаются преобразованиям с тем, чтобы иметь возможность проводить расчеты и моделирование систем в области изображений, а не в области временных функций.

В основу получаемых при этом форм математических моделей положено преобразование Лапласа: $X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$, которое для дискретного сигнала (решетчатой функции $f^*(t)$ вида (1.1)) позволяет получить изображение:

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-sTn}. \qquad (1.8)$$

Изображение $F^*(s)$, определяемое (1.8), называется дискретным преобразованием Лапласа для решетчатой функции $f^*(t)$. $F^*(s)$ обладает существенным недостатком, заключающимся в бесконечном периодическом повторении полюсов и нулей в математическом выражении образа.

С целью исключения бесконечных повторов полюсов (и нулей) в образах $F^*(s)$ ряд ученых предложили применить другое конформное преобразование дискретных сигналов $f^*(t)$ при математическом моделировании дискретной системы. Это дискретное преобразование было названо "зет - преобразованием" и обозначено символом $\overline{Z}$. Оно получается удобной заменой аргумента

$z = e^{sT}$ в выражении (1.8):

$$F(z) = \overline{Z}\{ f[nT]\} = \overline{Z}\left\{f^*(t)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] \cdot z^{-n} . \qquad (1.9)$$

В некоторых источниках Z–преобразование называется **преобразованием Лорана**. Введение Z–преобразования дискретных сигналов позволило, по аналогии с непрерывными системами, ввести в рассмотрение передаточные функции как отдельных звеньев, так и всей системы целиком.

Важнейшим свойством Z–преобразования, наряду со свойством линейности, является **свойство запаздывания**:

Сдвигу аргумента *оригинала* (РФ) *вправо* (запаздыванию) на "k" целых тактов соответствует умножение в области изображений на z^{-k}. Аналогичному сдвигу аргумента РФ *влево* (упреждению) соответствует умножение в области изображений на z^{+k}. При нулевых начальных условиях эти свойства записываются в таком виде:

Запаздывание: $\overline{Z}\{ f[nT - kT]\} = \overline{Z}\{ f[(n-k)T]\} = z^{-k}F(z)$,

Упреждение: $\overline{Z}\{ f[nT + kT]\} = \overline{Z}\{ f[(n+k)T]\} = z^{k}F(z)$.

Применение Z–преобразования ко входному *x(t)* и выходному *y(t)* сигналам звена (объекта, системы) (при нулевых начальных условиях) позволяет получить математическую модель этого объекта в виде передаточной функции:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n} = \frac{B(z)}{A(z)} . \qquad (1.10)$$

Полиномы в числителе B(z) и знаменателе A(z) передаточной функции (1.10) совпадают с точностью до коэффициентов с полиномами B(L) и A(L) разностного уравнения вход-выход (1.7) для одной и тоже же дискретной системы. Подобная ситуация имеет место и в тождественности полиномов, характеризующих математические модели непрерывной системы в виде дифференциального уравнения вход-выход и соответствующей передаточной функции.

1.4. Математические модели дискретных систем

Анализ и синтез технических систем при современном развитии вычислительной техники удобнее вести, используя метод пространства состояний. Перед традиционными методами (операторным или частотным) он имеет следующие преимущества:

- описание в пространстве состояний удобно для решения задач на ЭВМ;
- позволяет унифицировать описание одномерных и многомерных систем;
- может применяться к нелинейным и нестационарным системам.

Переход к описанию дискретной системы в пространстве состояний осуществляется различными способами. Далее рассматриваются два из них. Первый способ заключается в прямом переходе от разностного уравнения путем введения соответствующих переменных состояния; второй — основан на использовании аналитического решения дифференциального уравнения непрерывной части импульсной системы.

Описание дискретных систем в пространстве состояний аналогично по форме описанию непрерывных систем. Путем введения промежуточных переменных (координат состояния) динамика дискретной системы управления или объекта представляется системой разностных уравнений первого порядка.

Пусть дискретная система описывается разностным уравнением:

$$y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\ldots+a_ny(k-n)=$$
$$=b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+\ldots+b_mu(k-m).$$

где $u(k)$ – входной сигнал системы, а $y(k)$ – её выходная координата. Система имеет n-й порядок, поэтому вводят переменные состояния: $x_1(k)$ … $x_n(k)$. Тогда уравнения состояния записываются в виде:

$$\begin{cases} x_1(k+1)=x_2(k), \\ x_2(k+1)=x_3(k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(k+1)=-a_nx_1(k)-a_{n-1}x_2(k)-\ldots-a_1x_n(k)+u(k), \\ y(k)=b_mx_1(k)+b_{m-1}x_2(k)+\ldots+b_1x_m(k). \end{cases}$$

Полученная система приводится к векторно-матричной форме:

$$\begin{cases} X(k+1)=AX(k)+Bu(k), \\ y(k)=CX(k), \end{cases} \qquad (1.11)$$

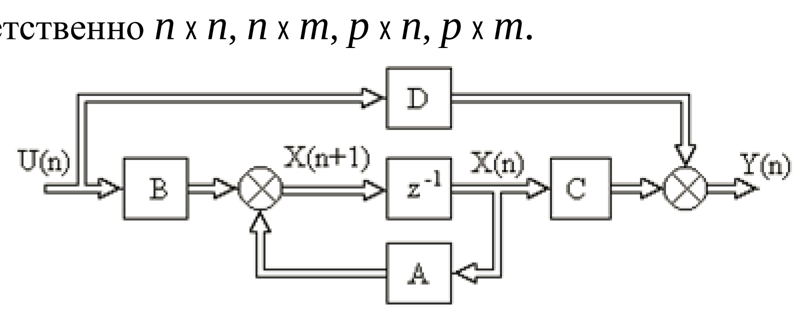
где $C=\begin{pmatrix} b_m & b_{m-1} & \ldots & b_1 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}$,

$$X(k)=\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \ldots \\ x_n(k)\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1\end{pmatrix}.$$

В общем случае уравнения в переменных состояния записывают в виде:

$$\begin{cases} X(k+1)=AX(k)+BU(k), \\ y(k)=CX(k)+DU(k), \end{cases} \qquad (1.11')$$

где A – матрица системы, B – матрица управления (входа), C – матрица выхода (наблюдения), D – матрица связи имеют размерности, как и в непрерывных системах, соответственно $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$, $p \times m$.



В реальных системах матрица связи D обычно равна нулю, поэтому в дальнейшем ее можно не учитывать.

Матрица системы A определяет устойчивость и другие показатели качества работы системы, матрица управления B характеризует влияние на переменные состояния входного воздействия, а матрица наблюдения С устанавливает связь выходной величины системы с вектором переменных состояния. Выбор переменных состояния в дискретных системах, как и в непрерывных, является неоднозначной операцией, т.е. векторное разностное уравнение зависит от выбранных переменных состояния. Однако все возможные векторные уравнения эквивалентны, так как описывают один и тот же динамический процесс связи выходной переменной системы с входным воздействием.

В качестве примера: Разностное уравнение второго порядка

$$y(k) = 0{,}5v(k-1) + 0{,}3v(k-2) + 1{,}5y(k-1) - 0{,}5y(k-2)$$

приводится к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k), \\ x_2(k+1) = -0{,}5x_1(k) + 1{,}5x_2(k) + v(k), \\ y(k) = 0{,}3x_1(k) + 0{,}5x_2(k). \end{cases}$$

или в векторно-матричной форме:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(k), \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Аналогично, непрерывные системы могут быть представлены математической моделью в виде системы дифференциальных и алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \dot{X} = \overline{A}X + \overline{B}U, \\ Y = \overline{C}X + \overline{D}U, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{X} = \overline{A}X + \overline{B}U, \\ Y = \overline{C}X. \end{cases} \tag{1.12}$$

Решение данной системы будет определяться выражениями:

$$X(t) = Exp\left(\overline{A}(t-t_0)\right)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} Exp\left(\overline{A}(t-\tau)\right)\overline{B}U(\tau)d\tau,$$

$$Y(t) = \overline{C} \cdot Exp\left(\overline{A}(t-t_0)\right)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \overline{C} \cdot Exp\left(\overline{A}(t-\tau)\right)\overline{B}U(\tau)d\tau,$$

или, если на интервале квантования положить $U(\tau) = U(k)$ (постоянное), то

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + BU(k), \\ Y(k) = CX(k), \end{cases} \tag{1.13}$$

где $A = Exp\left(T\overline{A}\right)$, $\quad B = \int_0^T Exp\left((T-\tau)\overline{A}\right)d\tau \cdot \overline{B}, \quad C = \overline{C}.$

Выражения (1.11) (или (1.13)) определяют поведение системы в дискретные моменты времени. То есть являются дискретной моделью непрерывной системы в пространстве состояний.

2. Основные свойства дискретных систем

Полученная в предыдущем разделе математическая модель дискретной системы в виде системы уравнений (1.11) позволяет провести предварительный анализ исходной системы. Данный анализ выполняется на предмет проверки устойчивости системы, возможность управления ей и по входным и выходным сигналам определения вектора состояния (наблюдаемость системы).

2.1. Решение уравнений состояния. Критерий устойчивости

Рассмотрим первое матричное уравнение состояния системы (1.11):

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k). \qquad (2.1)$$

Его можно решить итерационным методом, если известны начальное условие системы: $X(0)$ и последовательность управляющих воздействий $u(k)$ для всех значений k:

$$k = 0: \quad X(1) = AX(0) + Bu(0);$$

$$k = 1: \quad X(2) = AX(1) + Bu(1) = A \cdot \big(AX(0) + Bu(0)\big) + Bu(1) = $$
$$= A^2 X(0) + ABu(0) + Bu(1);$$

$$k = 2: \quad X(3) = AX(2) + Bu(2) = A \cdot \big(A^2 X(0) + ABu(0) + Bu(1)\big) + Bu(1) =$$
$$= A^3 X(0) + A^2 Bu(0) + ABu(1) + Bu(2);$$

. . . .

$$k = n-1: \quad X(n) = A^n X(0) + A^{n-1} Bu(0) + A^{n-2} Bu(1) + \ldots + Bu(n-1). \qquad (2.2)$$

Решение уравнения (2.1) в общем виде будет определяться выражением:

$$X(k) = A^k X(0) + \sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m} Bu(m). \qquad (2.3)$$

Для линейных систем можно ввести понятие ***устойчивости системы***, поскольку устойчивость одного (произвольного) решения (2.3) разностного уравнения (2.1) означает, что все остальные решения также устойчивы. Заметим, что это утверждение справедливо даже тогда, когда матрицы A и B зависят от k , т.е. для линейных нестационарных систем. Итак, линейная дискретная система (2.1) называется устойчивой, если все решения (2.3) устойчивы.

Более того, линейная система (2.1) ***устойчива*** (***асимптотически устойчива***) тогда и только тогда, когда устойчиво (асимптотически устойчиво) тривиальное решение $X(k) \equiv 0$ однородной системы

$$X(k+1) = AX(k). \qquad (2.4)$$

Это означает, что для устойчивости необходимо и достаточно, что при любых начальных условиях $X(0) = X_0$ решение системы (2.4) оставалось ограниченным, а для асимптотической устойчивости — стремилось к нулю при любом $X(0)$: $\lim\limits_{k\to\infty} X(k) = 0$.

Из алгебры матриц известно, что по теореме подобия $A = S^{-1}\Lambda S$, где Λ – диагональная матрица собственных чисел матрицы A (когда все собственные числа различны), а S – некоторая неособенная матрица. Тогда выражение (2.3) будет преобразовано к виду:

$$X(k) = S^{-1}\Lambda^k S X(0) + \sum_{m=0}^{k-1} S^{-1}\Lambda^{k-1-m} S B u(m). \qquad (2.5)$$

С учетом того, что $\Lambda^k = diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k)$, решение (2.5) будет асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда $\Lambda^k = diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k) \to 0$ (нулевой матрице), а такое возможно, когда $|\lambda_i| < 1, \quad i = \overline{1, n}.$

2.2. Управляемость, достижимость и наблюдаемость дискретных систем

При решении задач управления методами теории пространства состояний предварительно рассматриваются некоторые фундаментальные свойства динамических систем, которые не встречаются в классической теории управления, оперирующей только входными и выходными сигналами элементов рассматриваемой системы. Такими свойствами являются *достижимость, управляемость и наблюдаемость*. Наличие этих свойств у объектов управления позволяет рассчитать управление с помощью простых математических операций.

Определение 1. Состояние X(t_m) линейной системы (2.1) **достижимо**, если существует момент времени $t_m > t_0$ и такое входное (управляющее) воздействие, которое переводит начальное состояние системы X(t_0) = 0 в желаемое состояние X(t_m), при условии, что интервал (t_m - t_0) конечен.

Определение 2. Состояние X(t_0) линейной системы (2.1) **управляемо**, если существует момент времени $t_m > t_0$ и такое входное (управляющее) воздействие, которое переводит состояние системы X(t_0) в состояние X(t_m) = 0 (начало координат), при условии, что интервал (t_m - t_0) конечен.

Примечание. Для непрерывных систем вида (1.12) каждое *достижимое* состояние *управляемо*. Поэтому при анализе непрерывных систем говорят только об управляемости.

Определение 3. Дискретная система (2.1) называется **полностью управляемой**, если для произвольного начального состояния X(t_0) существует последовательность неограниченная последовательность управляющих воздействий $u(t_i)$, i=0, 1, 2... m-1, переводящая систему в некоторое конечное состояние X(t_m).

Теорема 1. Состояние системы X(t_m) ≠ 0 *достижимо*, если и только если ранг **матрицы достижимости** $K_d = \left(B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B\right)$ равен размерности пространства состояний n.

Доказательство.

В п. 2.1 получено (см. (2.2)), что решение системы (2.1) за n тактов достигает значения:

$$X(n) = A^n X(0) + A^{n-1}Bu(0) + A^{n-2}Bu(1) + \ldots + Bu(n-1).$$

Полагая X(0) = X(t_0) = 0 и X(n) = X(t_n), это выражение можно привести к матричной форме:

$$X(t_n) = \left(A^{n-1}B \vdots A^{n-2}B \vdots \ldots \vdots B\right) \cdot \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \ldots \\ u(n-1) \end{pmatrix} = \left(B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B\right) \cdot \begin{pmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \ldots \\ u(0) \end{pmatrix}.$$

Последнее матричное равенство представляет собой систему уравнений, разрешаемую относительно вектора управляющих воздействий. Данная система имеет решение, если матрица $\left(B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B\right)$ неособенная, то есть ее ранг равен n.

Теорема доказана.

Теорема 2. Состояние X(t_0) ≠ 0 системы (2.1) *управляемо*, если и только если ранг **матрицы управляемости** $K_u = \left(A^{-n}B \vdots A^{-n+1}B \vdots \ldots \vdots A^{-1}B\right)$ равен размерности пространства состояний *n*.

Доказательство.

Аналогично доказательству Теоремы 1 из (2.2) получаем:

$$X(n) = A^n X(0) + A^{n-1}Bu(0) + A^{n-2}Bu(1) + \ldots + Bu(n-1).$$

Полагая X(0) = X(t_0) и X(n) = X(t_n) = 0, переписываем последнее выражение:

$$-A^n X(t_0) = A^{n-1}Bu(0) + A^{n-2}Bu(1) + \ldots + Bu(n-1), \quad \text{или}$$

$$X(t_0) = -A^{-n}\left(A^{n-1}Bu(0) + A^{n-2}Bu(1) + \ldots + Bu(n-1)\right) =$$

$$= -A^{-n}\left(A^{n-1}B \vdots A^{n-2}B \vdots \ldots \vdots B\right) \cdot \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \ldots \\ u(n-1) \end{pmatrix} =$$

$$= -\left(A^{-1}B \vdots A^{-2}B \vdots \ldots \vdots A^{-n}B\right) \cdot \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \ldots \\ u(n-1) \end{pmatrix} = -\left(A^{-n}B \vdots A^{-n+1}B \vdots \ldots \vdots A^{-1}B\right) \cdot \begin{pmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \ldots \\ u(0) \end{pmatrix}.$$

Последнее выражение позволяет определить искомую последовательность управляющих воздействий, при условии, что ранг матрицы $K_u = \left(A^{-n}B \vdots A^{-n+1}B \vdots \ldots \vdots A^{-1}B\right)$ равен n.

Теорема доказана.

Следствие. Для того, чтобы система (2.1) была *управляемой*, то есть матрица управляемости K_u имела ранг n, необходимо чтобы ранг матрицы достижимости K_d был равен n и матрица системы A была неособенной.

Доказательство.

Очевидно, что теорема 2 справедлива только при невырожденной матрице A. Известно, что ранг матрицы останется неизменным, если ее умножить на невырожденную матрицу. Поэтому, если матрицу управляемости $K_u = \left(A^{-n}B \vdots A^{-n+1}B \vdots \ldots \vdots A^{-1}B\right)$ умножить слева на A^n, получим матрицу до-

стижимости $K_d = \left(B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B\right)$, то есть при det (A) ≠ 0 $K_d = A^n K_u$.
Таким образом условия достижимости и управляемости эквивалентны, если матрица A не вырождена.

Следствие доказано.

На практике многие авторы не разделяют понятия (и, соответственно, матрицы) управляемости и достижимости, считая необязательным условие неособенности матрицы A для управляемости системы, что становится понятным из следующей теоремы.

Теорема 3. Линейная дискретная система (2.1) будет *полностью управляемой*, если ранг матрицы управляемости $K_u = \left(B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B\right)$ равен n.

Доказательство.

Как и при доказательстве теорем 1 и 2, рассмотрим выражение (2.2) при произвольных $X(0) = X(t_0)$ и $X(n)=X(t_n)$:

$$X(n) = A^n X(0) + A^{n-1}Bu(0) + A^{n-2}Bu(1) + \ldots + Bu(n-1), \quad \text{или}$$

$$X(t_n) - A^n X(t_0) = A^{n-1}Bu(0) + A^{n-2}Bu(1) + \ldots + Bu(n-1) =$$

$$= \left(A^{n-1}B \vdots A^{n-2}B \vdots \ldots \vdots B\right) \cdot \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \ldots \\ u(n-1) \end{pmatrix} = \left(B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B\right) \cdot \begin{pmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \ldots \\ u(0) \end{pmatrix}.$$

Как следует из последнего выражения, для определения последовательности управляющих воздействий при произвольных $X(0) = X(t_0)$ и $X(n)=X(t_n)$, определяющих вектор $X(t_n) - A^n X(t_0)$, необходимо и достаточно, чтоб ранг матрицы $\left(B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B\right)$ был равен n. В дальнейшем данная матрица называется матрицей управляемости K_u.

Теорема доказана.

Для организации управления системой необходимо иметь информацию о текущем ее состоянии, то есть о значениях вектора состояния $x(t_k)$ в каждый момент времени. Однако некоторые из переменных состояния являются абстрактными, не имеют физических аналогов в реальной системе или же не могут быть измерены. Измеряемыми и наблюдаемыми являются физические выходные переменные $y(t_k)$.

Таким образом, возникает вопрос: можно ли определить вектор состояния по измеряемому вектору выхода и вектору входа?

Определение 4. Состояние $X(t_0)$ называется наблюдаемым, если по последовательности наблюдений $\{Y(t_k)\}$, $\{U(t_k)\}$, $k = 0, \ldots, m$, его можно однозначно определить на конечном интервале времени $t_m - t_0$.

Теорема 4. Система (1.11) наблюдаема, если и только если ранг матрицы наблюдаемости $K_н = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ равен размерности пространства состояний.

Доказательство теоремы 4 выполняется по аналогии с непрерывным случаем, с использованием решения (2.2) системы (2.1) и учитывая, что $Y(t_k) = CX(t_k)$. Предлагается доказать самостоятельно.

Наблюдаемость означает, что имеется возможность определить состояние в момент t_0 по будущим значениям выходной переменной. В задачах управления, однако, имеются обычно только прошлые значения выходной переменной. Поэтому Калманом в дополнение к наблюдаемости введено понятие восстанавливаемости.

Определение 5. Состояние $X(t_0)$ системы **восстанавливаемо**, если оно может быть определено по прошлым значениям выходной переменной $Y(k)$, $t_k < t_0$, и если интервал $t_k - t_0$ конечен.

Так как понятия наблюдаемости и восстанавливаемости относительны по отношению друг к другу, то и критерии наблюдаемости и восстанавливаемости систем идентичны.

В случае не полностью восстанавливаемой системы при наблюдении выходной переменной всегда существует неопределенность в определении действительного состояния системы, так как к любому возможному состоянию можно добавить произвольный вектор, принадлежащий подпространству невосстанавливаемых состояний. Самое лучшее, на что можно рассчитывать в данной ситуации, состоит в следующем.

Любое состояние, принадлежащее подпространству невосстанавливаемых состояний, обладает тем свойством, что движение системы из этого состояния при нулевом входном сигнале сходится к нулю (движение будет определяться парой (A, C)). Это соответствует случаю, когда любое состояние, принадлежащее подпространству невосстанавливаемых состояний, принадлежит также подпространству устойчивых состояний системы. Тогда, что бы ни было принято в качестве невосстанавливаемой компоненты состояния, ошибка никогда не будет неограниченно возрастать.

Таким образом, если некоторые выходные компоненты системы не наблюдаемы, но устойчивы, то такая система называется **обнаруживаемой**. Другими словами, система обнаруживаема тогда и только тогда, когда выходные компоненты, соответствующие неустойчивым собственным значениям матрицы A, наблюдаемы.

3. Синтез дискретных систем

Для синтеза линейных дискретных систем в основном применяются методы, аналогичные непрерывным САУ. По форме используемых математических моделей их можно разделить на частотные (на основе дискретных передаточных функций с использованием W-преобразования), корневые (распределение нулей и полюсов на z-плоскости) и методы управления по состоянию, так называемые методы модального синтеза. Математические модели систем в пространстве состояний могут быть применены также для синтеза оптимального управления с помощью методов: принцип максимума и динамическое программирование.

При синтезе модального управления с помощью пропорциональной обратной связи по состоянию требуется обеспечить желаемое распределение полюсов САУ. Задача всегда имеет решение (для одномерных ОУ оно единственное), если пара матриц (**A**, **B**) управляема. Методика задания желаемого распределения полюсов и вычисления матрицы обратной связи полностью аналогична непрерывным системам.

3.1. Постановка задачи синтеза модального управления

Основным объектом исследования является стационарная дискретная система, описываемая следующим линейным разностным уравнением:

$$X[(k+1)\cdot \mathrm{T}] = A\cdot X[k\cdot \mathrm{T}] + B\cdot u[k\cdot \mathrm{T}], \tag{3.1}$$

где Т – период квантования, k – момент отсчёта, $X[k\cdot \mathrm{T}]$ – состояние системы (вектор размерности n), $u[k\cdot \mathrm{T}]$ – управляющее воздействие (вектор размерности m), $\boldsymbol{A}$ – матрица системы (размерности $n\times n$), характеризующая динамические свойства системы (свободное движение); $\boldsymbol{B}$ – матрица управления (размерности $n\times m$), характеризующая влияние управляющих воздействий.

Свободное движение системы полностью определяются корнями ее характеристического уравнения:

$$X\left[k\cdot T\right] = C_1\lambda_1{}^k + C_2\lambda_2{}^k + \ldots + C_n\lambda_n{}^k .$$

Корни уравнения однозначно зависят от его коэффициентов. Поэтому под модальным управлением понимается целенаправленное изменение коэффициентов характеристического уравнения объекта с помощью специальных обратных связей в системе.

Метод синтеза модального управления позволяет в системе (3.1) при формировании управляющего сигнала с помощью обратной связи по состоянию

$$u[k\cdot \mathrm{T}] = -K\cdot X[k\cdot \mathrm{T}], \tag{3.2}$$

где $\boldsymbol{K}$ – матрица коэффициентов обратной связи (размерности $m\times n$), задать замкнутой системе желаемый набор собственных чисел и, следовательно, требуемую динамику и свойства.

Подставив (3.2) в (3.1), получим:

$$X[(k+1)\cdot \mathrm{T}] = (A - B\cdot K)\cdot X[k\cdot \mathrm{T}]. \tag{3.3}$$

Таким образом, при модальном управлении вместо системы (3.1) рассматривается система (3.3), и главной задачей синтеза является нахождение матрицы $\boldsymbol{K}$, позволяющей сместить собственные числа исходной системы к желаемым.

При подборе собственных чисел замкнутой системы необходимо учитывать следующее правило: собственные числа матрицы (**A** – **B**·**K**) могут быть выбраны произвольным образом тогда и только тогда, когда пара матриц [**A**; **B**] полностью управляема.

На практике для удобства период квантования T в выражениях (3.1), (3.2) и (3.3) опускается, что позволяет для выполнения синтеза оперировать упрощенными записями:

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k),$$
$$u(k) = -K \cdot X(k),$$
$$X(k+1) = \left(A - B \cdot K\right)X(k).$$

3.2. Модальное управление в дискретной системе канонической формы

Если математическая модель дискретной системы представляет собой систему разностных уравнений в фазовых переменных вида (1.11) (каноническая форма дискретной системы):

$$\xi(k+1) = A_н\xi(k) + B_н u(k), \tag{3.4}$$

где $\xi(k) = \begin{pmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \cdots \\ \xi_n(k) \end{pmatrix}$, $A_н = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdots & & & & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$, $B_н = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$,

то синтез модального управления для данной задачи решается относительно просто. Матрица $K_н$ обратной связи $u(k) = -K_н \cdot \xi(k)$ в такой системе рассчитывается исходя из желаемого характеристического уравнения

$$\varphi(s) = z^n + \gamma_1 z^{n-1} + \ldots + \gamma_n \tag{3.5}$$

замкнутой системы:

$$\xi(k+1) = \left(A_н - B_н K_н\right)\xi(k). \tag{3.6}$$

Так как матрица этой системы управления

$$A_н - B_н K_н = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdots & & & & \\ -a_n - k_1 & -a_{n-1} - k_2 & -a_{n-2} - k_3 & \dots & -a_1 - k_n \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

в последней строке содержит элементы, определяющие коэффициенты характеристического уравнения, то сравнивая (3.7) с (3.5), можно получить:

$\gamma_n = a_n + k_1,$		$k_1 = \gamma_n - a_n,$	
$\gamma_{n-1} = a_{n-1} + k_2,$	откуда:	$k_2 = \gamma_{n-1} - a_{n-1},$	(3.8)
$\dots$		$\dots$	
$\gamma_1 = a_1 + k_n,$		$k_n = \gamma_1 - a_1.$	

Таким образом для системы $\xi(k+1) = A_н\xi(k) + B_н u(k)$ найдена матрица обратной связи $K_н$ (3.8) ($u(k) = -K_н\xi(k)$) по желаемому характеристическому уравнению (3.5) синтезированной системы и характеристическому уравнению матрицы $A_н$ объекта управления (3.4).

Математические модели реальных дискретных систем обычно далеки от канонической формы. Поэтому для системы

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k) \tag{3.9}$$

выполняется неособенное преобразование координат

$$\xi(k) = MX(k), \tag{3.10}$$

где матрица M такая что

$$A_н = MAM^{-1}, \quad B_н = MB. \tag{3.11}$$

Таким образом, с помощью преобразования (3.10) вычисляются матрицы (3.11), и система (3.9) приводится к каноническому виду (3.4), для которой отыскивается регулятор, определяемый матрицей обратной связи $K_н$ с коэффициентами (3.8).

Для перехода к исходным переменным следует учесть преобразование (3.10). Тогда обратная связь для системы (3.9) будет иметь вид:

$$u(k) = KX(k), \qquad где \quad K = K_н M. \tag{3.12}$$

Матрица M преобразования координат (3.10) вычисляется в результате следующей последовательности действий.

Сначала составляется $K_u = \left(B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B\right)$ - матрица управляемости системы (3.9), затем выделяется нижняя строка ее обратной матрицы:

$$M_1 = \begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix} \cdot K_u^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix} \cdot \left(B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B\right)^{-1}$$

и далее вычисляются строки искомой матрицы преобразования M:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_1 A \\ \ldots \\ M_1 A^{n-1} \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Правомерность алгоритма нахождения матрицы М доказывается следующей теоремой.

Теорема. Для системы (3.9) , матрица управляемости которой K_u имеет ранг n, существует неособенное преобразование координат (3.10), определяемое матрицей M (3.13), приводящее (3.9) каноническому виду (3.4).

Доказательство.

Пусть матрица M записывается в виде:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n} \\ \ldots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \ldots \\ M_n \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Тогда, подставляя (3.14 в (3.10), и выбирая первую компоненту, получаем:

$$\xi_1(k) = M_1 X(k)\,, \qquad (***)$$

затем, увеличивая индекс времени на 1: $\xi_1(k+1) = M_1 X(k+1)$,

а с учетом (3.9): $\xi_1(k+1) = M_1 AX(k) + M_1 Bu(k)$.

В полученном выражении полагаем

$$M_1 Bu(k) = 0\,. \qquad (*)$$

В результате получаем (записываем) первое уравнение системы (3.4):

$$\xi_1(k+1) = \xi_2(k) \qquad (**)$$

и важное соотношение:

$$\xi_2(k) = M_1 AX(k)\,. \qquad (***)$$

В выражении (***) сдвигаем индекс времени на 1:

$$\xi_2(k+1) = M_1 AX(k+1)\,,$$

и с учетом (3.9): $\xi_2(k+1) = M_1 A^2 X(k) + M_1 ABu(k)$.

В последнем выражении также полагаем

$$M_1 ABu(k) = 0\,. \qquad (*)$$

И, как и выше, получаем:

$$\xi_2(k+1) = \xi_3(k) \qquad (**)$$

и

$$\xi_3(k) = M_1 A^2 X(k)\,. \qquad (***)$$

Подобные действия выполняем n-1 раз и получаем тройки аналогичных выражений. Если сгруппировать их, то можно получить три системы уравнений:

$$\begin{cases} \xi_1(k+1) = \xi_2(k), \\ \xi_2(k+1) = \xi_3(k), \\ \ldots \\ \xi_{n-1}(k+1) = \xi_n(k); \end{cases} \quad \begin{cases} M_1 Bu(k) = 0, \\ M_1 ABu(k) = 0, \\ \ldots \\ M_1 A^{n-2} Bu(k) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1(k) = M_1 X(k), \\ \xi_2(k) = M_1 AX(k), \\ \ldots \\ \xi_{n-1}(k) = M_1 A^{n-2} X(k), \\ \xi_n(k) = M_1 A^{n-1} X(k). \end{cases} \qquad (3.15)$$

Последняя (правая) система (3.15) определяет матрицу M преобразования (3.10) в соответствии с выражением (3.13):

$$\begin{cases} \xi_1(k) = M_1 X(k), \\ \xi_2(k) = M_1 AX(k), \\ \ldots \\ \xi_{n-1}(k) = M_1 A^{n-2} X(k), \\ \xi_n(k) = M_1 A^{n-1} X(k); \end{cases} \Rightarrow \quad \xi(k) = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_1 A \\ \ldots \\ M_1 A^{n-2} \\ M_1 A^{n-1} \end{pmatrix} X(k) \Rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_1 A \\ \ldots \\ M_1 A^{n-2} \\ M_1 A^{n-1} \end{pmatrix}.$$

В последнем уравнении правой системы (3.15) увеличим индекс времени на единицу: $\xi_n(k+1) = M_1 A^{n-1} X(k+1)$,

и с учетом (3.9) получим: $\xi_n(k+1) = M_1 A^n X(k) + M_1 A^{n-1} Bu(k)$.

Потребуем $$M_1 A^{n-1} B = 1.$$

Это равенство должно выполняться, чтоб с учетом уравнений средней в (3.15) системе вектор $B_н = MB$ (см. (3.11)) имел вид $B_н = (0 \quad 0 \quad \ldots 0 \quad 1)^T$ (см. (3.4)).

Таким образом системы в (3.15) дополняются еще парой уравнений:

$$\xi_n(k+1) = M_1 A^n X(k) + u(k) \quad и \quad M_1 A^{n-1} B u(k) = u(k).$$

Из средней системы (3.15) (с учетом дополнительного уравнения) получаем:

$$\begin{cases} M_1 B u(k) = 0, \\ M_1 A B u(k) = 0, \\ \ldots \\ M_1 A^{n-2} B u(k) = 0, \\ M_1 A^{n-1} B u(k) = u(k); \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} M_1 B \\ M_1 A B \\ \ldots \\ M_1 A^{n-2} B \\ M_1 A^{n-1} B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Откуда однозначно определяется строка M_1:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{n-1} B \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \cdot K_u^{-1}.$$

Полученное для M_1 выражение совпадает с определенным ранее в (3.13)!

Левая система (3.15) после преобразования дополнительного уравнения к виду

$$\xi_n(k+1) = M_1 A^n X(k) + u(k) \quad \Rightarrow \quad \xi_n(k+1) = M_1 A^n M^{-1} \xi(k) + u(k)$$

представляет собой математическую модель дискретной системы канонической формы с матрицами, определенными в (3.4):

$$\begin{cases} \xi_1(k+1) = \xi_2(k), \\ \xi_2(k+1) = \xi_3(k), \\ \ldots \\ \xi_{n-1}(k+1) = \xi_{n-2}(k), \\ \xi_n(k+1) = M_1 A^n M^{-1} \xi(k) + u(k). \end{cases}$$

Теорема доказана.

Следовательно, матрица преобразования M определена выражением (3.13) верно.

Примечание. Необходимо еще доказать, что матрица M - неособенная!!!!

3.3. Синтез модального управления при нескольких управляющих сигналах

Метод синтеза систем с одним управляющим сигналом, рассмотренный в п. 3.2., с небольшим изменением можно распространить и на системы с несколькими входными сигналами, когда вектор управляющих воздействий имеет размерность m:

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k), \quad B \in R^{n\times m}, \quad U \in R^{m\times 1}. \tag{3.16}$$

Пара матриц [$\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{B}$] всё также должна быть полностью управляемой.

Прежде чем перейти к определению матрицы обратной связи $\boldsymbol{K}$ (размерности $m\times n$) рассмотрим систему с одним входом:

$$X(k+1) = AX(k) + \overline{B}u(k), \quad \overline{B} \in R^{n\times 1}, \quad u \in R. \tag{3.17}$$

Пусть матрицы управления в (3.16 и (3.17) связаны между собой соотношением:

$$\overline{B} = B \cdot W, \quad W \in R^{m\times 1}, \tag{3.18}$$

где матрица $\boldsymbol{W}$ выбирается так, чтобы выполнялось условие: система (3.17) была управляемой.

Тогда с помощью обратной связи

$$u(k) = -\overline{K}X(k) \tag{3.19}$$

собственные значения матрицы $A - \overline{B}\cdot\overline{K}$ размещаются в тех же точках, что и желаемые собственные значения для матрицы $A - B{\cdot}K$ замкнутой системы (3.16).

Следовательно, задача сводится к синтезу обратной связи по состоянию для системы (3.17) с одним входом. Для этого, в соответствии с методикой, рассмотренной в п. 3.2., вычисляется матрица $\overline{K}$. Тогда с учетом равенства $B\cdot K = \overline{B}\cdot\overline{K}$ будет определена и матрица обратной связи K для системы (3.16):

$$K = W\cdot\overline{K}. \tag{3.20}$$

Очевидно, что в общем случае матрица W не является единственной. Требуется только, чтобы она удовлетворяла условию управляемости пары матриц $[A,\ B{\cdot}W]$ (пары $\left[A,\ \overline{B}\right]$).

3.4. Синтез модального управления с помощью матричного уравнения Сильвестра

Данная методика полностью аналогична непрерывному случаю, когда для системы $\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$ требовалось определить матрицу обратной связи K: $u(t) = KX(t)$.

Пусть имеется линейная n-мерная дискретная система управления

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k). \tag{3.21}$$

Требуется найти закон формирования управляющих воздействий

$$u(k) = KX(k), \tag{3.22}$$

такой, чтобы замкнутая система

$$X(k+1) = \left(A + BK\right)X(k) \tag{3.23}$$

обладала бы желаемыми свойствами, определяемыми дискретной эталонной моделью:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \Gamma\xi(k), \\ v(k) = H\xi(k), \end{cases} \tag{3.24}$$

то есть поведение вектора $\xi(k)$ задает желаемое движение вектора $X(k)$ с точностью до линейного преобразования

$$X(k) = M\xi(k), \tag{3.25}$$

а изменение вектора выхода эталонной модели $v(k)$ определяет требуемое управление $u(k)$ для системы (3.21):

$$u(k) = v(k). \tag{3.26}$$

Процессы в эталонной модели (решение системы (3.24)) определяются матрицей Γ, ее собственными числами, то есть коэффициентами характеристического уравнения данной матрицы.

Размерность вектора $\xi(k)$ совпадает с размерностью вектора $X(k)$ пространства состояний системы (3.21), то есть равна n. Размерность $v(k)$, – вектора выхода системы (3.24), совпадает с размерностью вектора управляющих воздействий $u(k)$ системы (3.21), то есть равна m.

Для решения сформулированной задачи синтеза необходимо, чтобы система (3.21), определяемая парой матриц (A,B), была полностью управляемой, а система (3.24), определяемая матрицами (Γ,H), – полностью наблюдаемой.

Таким образом, если задаться желаемой матрицей Γ и произвольной матрицей H (при выполнении единственного условия полной наблюдаемости пары матриц (Γ,H)), можно получить требуемый закон управления (3.22) в системе (3.21).

Рассматривая (3.26) с учетом (3.22) и (3.25) $\big(u(k) = v(k)$, $v(k) = H\xi(k)$, $u(k) = KX(k)$, $X(k) = M\xi(k)\big)$, будем иметь

$$H\xi(k) = KM\xi(k) \text{ или } H = KM. \tag{3.27}$$

Кроме того, используя (3.23), (3.24) и (3.25): $\big(X(k+1) = (A+BK)X(k)$, $\xi(k+1) = \Gamma\xi(k)$, $X(k) = M\xi(k)\big)$, последовательно получаем:

$$M\xi(k+1) = (A+BK)M\xi(k),$$
$$M\xi(k+1) = M\Gamma\xi(k),$$
$$M\Gamma\xi(k) = (A+BK)M\xi(k),$$
$$M\Gamma = (A+BK)M,$$
$$M\Gamma = AM + BKM,$$

а с учетом (3.27)

$$M\Gamma - AM = BH \,. \tag{3.28}$$

Уравнение (3.28), называемое **уравнением Сильвестра**, полученное с учетом матриц A и B исходной и Γ и H эталонной систем, разрешается относительно матрицы M преобразования координат (3.25).

Тогда искомая матрица обратной связи (3.22) системы (3.21) с учетом (3.27) будет определена как

$$K = HM^{-1} \,. \tag{3.29}$$

Замечание. Уравнение Сильвестра имеет единственное решение относительно матрицы M, если выполняются следующие условия:

- объект управления (3.21) полностью управляем,
- эталонная модель (3.24) полностью наблюдаема,
- матрицы A и Γ не имеют одинаковых корней в своих характеристических уравнениях,
- собственные числа матрицы Γ – простые,
- матрица H – полного ранга.

4. Наблюдатель в дискретных системах

При решении практических задач управления методами пространства состояния часто встречаются случаи, когда не все переменные состояния оказываются измеряемыми. Данный факт имеет место обычно в сложных объектах управления, в объектах с распределенными параметрами и так далее.

Для управления этими объектами, после синтеза обратной связи по вектору состояния системы, необходимо оценивать неизмеряемые переменные состояния объекта по его измеряемым входам и выходам.

Задачи, в которых невозможно непосредственно измерить все компоненты вектора состояния, относятся к категории задач управления при неполной информации. В общем случае различают детерминированные и статистические методы оценивания вектора состояния.

Как было определено в п. 2.2., состояние $X(t_0)$ называется наблюдаемым, если по последовательности наблюдений $\{Y(t_k)\}$, $\{U(t_k)\}$, $k = 0, \ldots, m$, его можно однозначно определить на конечном интервале времени t_m - t_0.

Таки образом, требуется рассчитать наблюдатель дискретной системы, который по измерениям входных и выходных переменных объекта восстанавливает вектор состояния объекта при условии, что этот объект наблюдаем. Восстановление вектора состояния необходимо, как следует из схемы Рис. 4.1., для замыкания системы управления если не по вектору состояния, то хотя бы по его восстановленному значению.

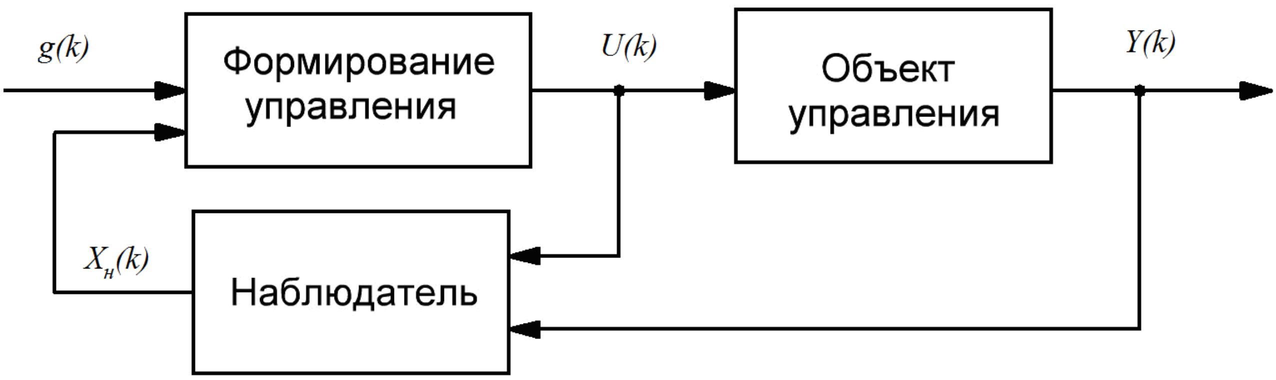


Рис.4.1. Функциональная схема САУ с наблюдателем полного порядка

4.1. Определение математической модели наблюдателя

Рассмотрим объект со многими входами и многими выходами, который описывается в пространстве состояний уравнениями

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + BU(k), \\ Y(k) = CX(k), \end{cases} \qquad (4.1)$$

У объекта p выходов $(\mathrm{p} \le \mathrm{n})$, где n – порядок объекта. Предполагается, что выходные переменные объекта линейно независимы, так что ранг матрицы C равен p. Компоненты входного вектора U являются измеряемыми возмущающими переменными. Кроме того, система (4.1) наблюдаема, если и только если ранг матрицы наблюдаемости $K_н = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ равен размерности пространства состояний, то есть n.

Описываемый ниже наблюдатель был предложен Луенбергером (*David* Gilbert *Luenberger,* born September 16, 1937). Основная идея основывается на предположении, что матрицы A, B и C в системе уравнений (4.1) известны, то есть для объекта управления может быть построена соответствующая модель, являющаяся частью наблюдателя.

Наблюдатель представляет из себя отдельное (не интегрированное в объект управления) устройство, с помощью которого можно оценить как измеряемые, так и неизмеряемые переменные состояния объекта по его измеряемым входам и выходам. Согласно Луенбергеру наблюдатель – это динамическая модель, описываемая уравнением

$$X_н(k+1) = A_1 X_н(k) + B_1 U(k) + B_2 Y(k). \quad (4.2)$$

Задача заключается в нахождении таких матриц A_1, B_1, B_2, при которых $X_н(k)$ стремится асимптотически к $X(k)$.

Рассмотрим разность уравнений состояния (4.1) и (4.2):

$$X(k+1) - X_н(k+1) = AX(k) + BU(k) - A_1 X_н(k) - B_1 U(k) - B_2 CX(k). \quad (4.3)$$

Пусть векторы состояния наблюдателя $X_н(k)$ и системы $X(k)$ в k-й момент времени совпадают, то есть $X(k) = X_н(k)$. И в следующие (например, в (k+1)-й и далее) моменты времени равенство векторов также выполняется:

$$X(k+1) - X_н(k+1) = \left(A - B_2 C - A_1\right)X(k) + \left(B - B_1\right)U(k) = 0.$$

Получили равенство, выполняющееся при различных вариациях своих компонент $X(k)$ и $U(k)$. Таким образом, должно выполняться:

$$A - B_2 C - A_1 = 0, \qquad B - B_1 = 0.$$

Из этих уравнений можно получить соотношения для матриц A_1, B_1, B_2, при которых система (4.2) является наблюдателем полного порядка системы (4.1):

$$\begin{cases} A_1 = A - B_2 C, \\ B_1 = B. \end{cases} \quad (4.4)$$

Пусть $B_2 = K$, где K - матрица, определяющая свойства наблюдателя. Тогда система (4.4) примет вид:

$$\begin{cases} A_1 = A - KC, \\ B_1 = B, \\ B_2 = K. \end{cases} \quad (4.5)$$

С помощью (4.5) наблюдатель (4.2) может быть представлен следующим выражением:

$$X_н(k+1) = A_1 X_н(k) + B_1 U(k) + B_2 Y(k) =$$

$$= (A - KC)\cdot X_н(k) + B\cdot U(k) + K\cdot Y(k) =$$
$$= A\cdot X_н(k) + B\cdot U(k) + K\big(Y(k) - C\cdot X_н(k)\big) =$$
$$= A\cdot X_н(k) + B\cdot U(k) + K\big(Y(k) - Y_н(k)\big).$$

Таким образом, математическая модель наблюдателя представляется разностным матричным уравнением:

$$X_н(k+1) = A\cdot X_н(k) + B\cdot U(k) + K\big(Y(k) - Y_н(k)\big). \tag{4.6}$$

Уравнение (4.6) позволяет сделать вывод о том, что наблюдатель состоит из модели системы (4.1) с дополнительным воздействием в качестве входной переменной, которое пропорционально разности $\big(Y(k) - Y_н(k)\big)$ наблюдаемой переменной $Y(k)$ и его предсказанного значения $Y_н(k) = CX_н(k)$. Основополагающая идея состоит в том, что в структурную схему вводится дополнительная обратная связь по ошибке $\big(Y(k) - Y_н(k)\big)$ оценки вектора $Y(k)$, заведомо обеспечивающая асимптотическое затухание ошибки $\big(X(k) - X_н(k)\big)$ оценки вектора состояния. То есть, если векторы состояния системы и наблюдателя в начальный момент времени не совпадают, то должно выполняться $X_н(k) \to X(k)$ при $k \to \infty$. Выбор матрицы K в (4.6) определяется, как будет показано ниже, скоростью сходимости $X_н(k) \to X(k)$.

Структурная схема системы с наблюдателем изображена на Рис. 4.2.

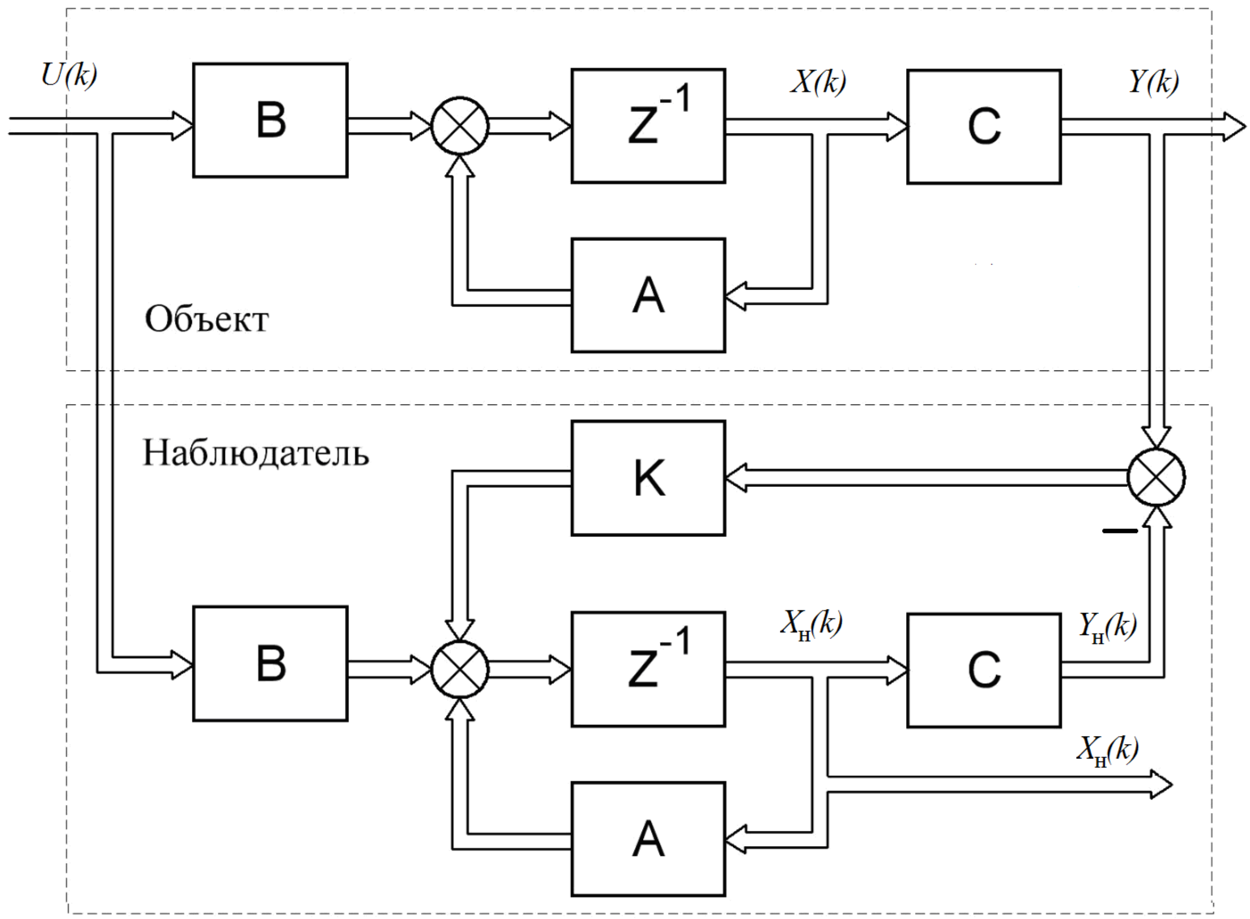


Рис. 4.2. Структурная схема дискретной системы с наблюдателем.

4.2. Об ошибке восстановления

Исследуем устойчивость наблюдателя и поведение ошибки восстановления $E(k) = X(k) - X_н(k)$, свидетельствующей о рассогласовании между истинным значением переменной состояния системы и наблюдаемым значением.

Вектор ошибки $E(k)$ можно получить, вычитая уравнение наблюдателя (4.2) из уравнения объекта (4.1):

$$E(k) = X(k) - X_н(k), \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} E(k+1) &= X(k+1) - X_н(k+1) = \\ &= AX(k) + BU(k) - A\cdot X_н(k) - B\cdot U(k) - K\big(Y(k) - Y_н(k)\big) = \\ &= AX(k) + BU(k) - A\cdot X_н(k) - B\cdot U(k) - K\big(CX(k) - CX_н(k)\big) = \\ &= A\big(X(k) - X_н(k)\big) - KC\big(X(k) - X_н(k)\big) = \big(A - KC\big)\big(X(k) - X_н(k)\big). \end{aligned}$$

В результате получаем динамическую систему:

$$E(k+1) = \big(A - KC\big)E(k), \tag{4.7}$$

движение которой определяется собственными числами матрицы $\big(A - KC\big)$.

И если пара (A, C) – наблюдаема, то из теории управления следует, что для системы (4.7) можно подобрать такую матрицу K, при которой задача будет решена при требуемом качестве.

Следовательно ошибка восстановления $E(k)$, удовлетворяющая разностному уравнению (4.7), обладает необходимым свойством:

$$E(k) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

при всех $E(0)$ тогда и только тогда, когда наблюдатель является асимптотически устойчивым.

4.3. Условия существования обратной матрицы К

Рассмотрим теперь, при каких условиях существует матрица коэффициентов K, которая стабилизирует наблюдатель и, таким образом, всегда обеспечивает стремление к нулю ошибки восстановления.

На основании уравнения наблюдателя (4.6), полученного в п. 4.1, имеем:

$$X_н(k+1) = A\cdot X_н(k) + B\cdot U(k) + K\big(Y(k) - CX_н(k)\big). \tag{4.8}$$

Модель наблюдателя (4.8) дает более полное представление о его структуре по сравнению с выражением (4.2).

С учетом (4.7) уравнение (4.8) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} X_н(k+1) &= A\cdot X_н(k) + B\cdot U(k) + KC\big(X(k) - X_н(k)\big) = \\ &= A\cdot X_н(k) + B\cdot U(k) + KCE(k) = \\ &= A\cdot X_н(k) + B\cdot U(k) + KC\big(A - KC\big)E(k-1). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Кроме того, в п.4.2 получено, что ошибка восстановления в рассматриваемом наблюдателе изменяется в полном соответствии с уравнением (4.7):

$$E(k+1) = \big(A - KC\big)E(k). \tag{4.10}$$

Полюса наблюдателя (т.е. характеристические числа матрицы $(A\text{-}KC)$ могут быть произвольно расположены в комплексной плоскости (при ограничении, что комплексные полюса образуют комплексно-сопряженные пары) соответствующим выбором матрицы коэффициентов K тогда и только тогда, когда система (4.1) является полностью восстанавливаемой (наблюдаемой).

Докажем вышесказанное.

Отметим, что

$$\det\left(zE-\left(A-KC\right)\right)=\det\left(zE-\left(A^T-C^TK^T\right)\right),$$

так что характеристические числа матрицы $(A\text{-}KC)$ равны числам матрицы $\left(A^T-C^TK^T\right)$. Однако, характеристические числа $\left(A^T-C^TK^T\right)$ можно произвольно размещать путем соответствующего выбора матрицы K тогда и только тогда, когда пара $\left(A^T,C^T\right)$ является полностью управляемой. Собственные числа матриц $(A\text{-}KC)$ и $\left(A^T-C^TK^T\right)$ равны друг другу (потому что определители этих матриц одинаковы).

Но матрицы $\left(A^T,C^T\right)$ управляемы, если ранг матрицы

$K_u=\left(C^T\vdots A^TC^T\vdots\ldots\ \vdots\left(A^T\right)^{n-1}C^T\right)$ равен n. Транспонируем матрицу K_u:

$$\left(K_u\right)^T=\left(C^T\vdots A^TC^T\vdots\ldots\ \vdots\left(A^T\right)^{n-1}C^T\right)^T=\begin{pmatrix}C\\ CA\\ \cdots\\ CA^{n-1}\end{pmatrix}=K_н.$$

Получили матрицу наблюдаемости $K_н$ системы (4.1). При транспонировании ранг матрицы не меняется. Следовательно, условие управляемости пары матриц $\left(A^T,C^T\right)$ эквивалентно условию наблюдаемости пары $(A,\ C)$. Что и требовалось доказать.

Таким образом, для выбора коэффициентов матрицы К можно воспользоваться методом синтеза модального управления (см. Раздел 3).

4.4. Об апериодических наблюдателях

Рассмотрим стационарный наблюдатель в форме записи (4.9) для стационарной дискретной системы (4.2).

Пусть все полюса наблюдателя размещаются в начале координат, т.е. все характеристические числа матрицы $(A\text{-}KC)$ являются нулевыми. Тогда характеристический полином матрицы $(A\text{-}KC)$ имеет вид:

$$\det\left(zE-\left(A-KC\right)\right)=\left(z-0\right)^n=z^n. \tag{4.11}$$

Согласно теореме Кэли-Гамильтона при подстановке матрицы в ее характеристический полином получается нулевая матрица (иными словами, матрица является корнем своего характеристического полинома).

То есть должно выполняться $\left(A-KC\right)^n=0$.

Далее, повторяемым применением разностного уравнения (4.7) для ошибки восстановления получим соотношения:

$$E(1) = (A - KC)E(0),$$

$$E(2) = (A - KC)E(1) = (A - KC)^2 E(0),$$

. . . .

$$E(n-1) = (A - KC)^{n-1} E(0),$$

$$E(n) = (A - KC)^n E(0) = 0 \cdot E(0) = 0.$$

Таким образом, любое значение начальной ошибки $E(0)$ уменьшается до нуля самое большее за n шагов. Следовательно, система является наблюдаемой (восстанавливаемой). И выбор матрицы коэффициентов K обеспечивает асимптотическую устойчивость наблюдателя, если система (4.2) - наблюдаема. Аналогично апериодического закону управления наблюдатели с таким свойством называются ***апериодическими наблюдателями***. Такие наблюдатели осуществляют полное точное восстановление вектора состояния самое большее за n шагов.

4.5. Замкнутая система управления с наблюдателем

Рассмотрим замкнутую дискретную систему автоматического управления, изображенную на Рис. 4.1. Такая система описывается уравнениями:

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + BU(k), \\ Y(k) = CX(k), \\ X_н(k+1) = A \cdot X_н(k) + B \cdot U(k) + K\big(Y(k) - CX_н(k)\big), \\ U(k) = -\overline{K}X_н(k). \end{cases} \qquad (4.12)$$

Здесь $\overline{K}$ - матрица коэффициентов обратной связи системы (4.1), рассчитанная отдельно для обеспечения желаемого набора корней характеристического уравнения замкнутой системы $X(k+1) = \big(A - B\overline{K}\big)X(k)$.

Система (4.12) путем вычитания третьего уравнения системы из первого и с учетом полученного выше уравнения для описания ошибки восстановления (4.7) последовательно преобразуется к виду

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) - B\overline{K}X_н(k). \\ E(k+1) = (A - KC)E(k), \\ E(k) = X(k) - X_н(k); \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) - B\overline{K}\big(X(k) - E(k)\big), \\ E(k+1) = (A - KC)E(k); \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} X(k+1) = \big(A - B\overline{K}\big)X(k) - B\overline{K}E(k), \\ E(k+1) = (A - KC)E(k); \end{cases}$$

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} X(k+1) \\ E(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A-B\overline{K}) & -B\overline{K} \\ 0 & (A-KC) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(k) \\ E(k) \end{pmatrix}.$$

Как видим, поведение последней системы определяется корнями характеристического уравнения:

$$\det\left(zE - \begin{pmatrix} (A-B\overline{K}) & -B\overline{K} \\ 0 & (A-KC) \end{pmatrix} \right) = \det\left(zE - \left(A - B\overline{K}\right)\right) \cdot \det\left(zE - \left(A-KC\right)\right) = 0.$$

Полученное выражение для определителя позволяет сделать важный вывод:

Корни характеристического уравнения замкнутой системы управления с наблюдателем есть объединение желаемого спектра корней замкнутой системы управления и корней характеристического уравнения системы наблюдения. Наблюдатель не влияет на динамику замкнутой дискретной системы. К ее движениям только добавляются быстрые движения наблюдателя.

4.6. Особенности построения наблюдателей в различных системах

Реальные дискретные системы (4.1) имеют векторы выхода $Y(k)$ разных размерностей. Так, если система (4.1) имеет скалярную наблюдаемую переменную $Y(k)$, то получается единственное решение матрицы коэффициентов K для заданного множества полюсов наблюдателя. Однако, в случае многомерных систем матрица коэффициентов обратной связи K определяется неоднозначно. И каждое из решений может быть реализовано исходя из обеспечения заданного набора корней характеристического уравнения.

Наблюдатели, рассмотренные в настоящем разделе, являются системами той же размерности, что и наблюдаемая система, то есть - наблюдатели полной размерности. Поскольку уравнение выходной переменной имеет вид $Y(k) = CX(k)$, уже существует p уравнений относительно неизвестного состояния $X(k)$ (полагая, что p – размерность переменной $Y(k)$). Ясно, что можно (и это следует сделать) построить наблюдатель пониженного порядка размерности n-p, чтобы восстановить $X(k)$ полностью. Такой наблюдатель, называемый редуцированным, строится по той же методике, что и для непрерывных систем.

В случае не полностью восстанавливаемой системы при наблюдении выходной переменной всегда существует неопределенность в определении действительного состояния системы, так как к любому возможному состоянию можно добавить произвольный вектор, принадлежащий подпространству невосстанавливаемых состояний. Самое лучшее, на что можно рассчитывать в данной ситуации, состоит в следующем.

Любое состояние, принадлежащее подпространству невосстанавливаемых состояний, обладает тем свойством, что движение системы из этого состояния при нулевом входном сигнале сходится к нулю (движение будет определяться парой $(A,\ C)$). Это соответствует случаю, когда любое состояние, принадлежащее подпространству невосстанавливаемых состояний, принадлежит также подпространству устойчивых состояний системы. Тогда, что бы ни было принято в качестве невосстанавливаемой компоненты состояния, ошибка никогда не будет неограниченно возрастать.

Таким образом, если некоторые выходные компоненты системы не наблюдаемы, но устойчивы, то мы назовем такую систему обнаруживаемой. Другими словами, система обнаруживаема тогда и только тогда, когда выходные компоненты, соответствующие неустойчивым собственным значениям матрицы A, наблюдаемы.

Определение. Пара (A, C) системы (4.1) *обнаруживаема*, если существует действительная матрица K такая, что матрица (A-KC) устойчива, то есть для всех собственных значений z_i матрицы (A-KC) справедливо условие $|z_i| < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Следовательно, для обнаруживаемой, не полностью восстанавливаемой системы также можно строить редуцированный (пониженной размерности) наблюдатель, обеспечивающий только устойчивое движение системы (4.7).

Заключение

Теория автоматического управления, как составная часть технической кибернетики, - наука построения технических систем. Математические методы и средства позволяют выявить основные свойства систем автоматического управления и дать рекомендации для их проектирования. Метод переменных состояния - один из основных современных методов анализа и синтеза управления.

В настоящем учебном пособии рассмотрено применение метода переменных состояния решению задач анализа и синтеза дискретных систем автоматического управления. Показаны разновидности моделей дискретных систем в пространстве состояний, проведен анализ линейных дискретных систем управления. Рассмотрены различные методы синтеза дискретных САУ в пространстве состояний.

Первые разделы пособия посвящены математическим моделям дискретных систем с использованием векторно-матричной формы записи их моделей и дан анализ их устойчивости.

Последние разделы содержат различные методы синтеза дискретных систем управления. Отдельно рассмотрена проблема наблюдения вектора состояния в дискретных САУ. Рассмотренные методики не являются исчерпывающими. Значительная часть их, включая синтез адаптивных и оптимальных дискретных систем, осталась вне настоящего пособия и может быть рассмотрена самостоятельно при углубленном изучении теории автоматического управления систем с моделями в пространстве состояний.

Список рекомендуемой литературы

1. Куо Б.(Бенджамин). Теория и проектирование цифровых систем управления – М.: Машиностроение, 1986 – 448 с.
2. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления / Пер. с англ. Б.И. Копылова. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. - 832 с.
3. Васильев Е. М. Теория автоматического управления. Дискретные системы: учебное пособие / Е. М. Васильев, В. Г. Коломыцев. - Пермь: изд-во Перм. Нац. Исслед. Политех. Ун-та, 2012. - 152 с.
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. – С.-Петербург: изд. «Профессия», 2003. - 752 с.
5. Лурье Б.Я., Энрайт П.Дж. Классические методы автоматического управления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 640с.
6. Филиповский В.М. Системы управления в пространстве состояний: учебное пособие / В. М. Филиповский; СПбПУ Петра Великого. — Санкт-Петербург, 2022. — 75 с.