Министерство образования и науки Российской Федерации
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Г.В. Баденко, В.Р. Мешков

Математическая физика: метод приведения к однородной задаче

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2022

УДК 517.958

Баденко Г.В., Мешков В.Р. Математическая физика: метод приведения к однородной задаче: учеб. пособие. 2022. – 23с.

Метод приведения к однородной задаче применяется к неоднородным задачам математической физики с разделяющимися переменными. В пособии представлено применение метода, в котором решение находим в виде суммы двух функций, причем для одной из этих функций составляется соответствующая однородная задача, а другая функция будет частным решением неоднородной задачи.

Пособие предназначено для студентов Физико-механического института, обучающихся по направлениям подготовки 01.06.01«Математика и механика», 01.03.02«Прикладная математика и информатика», 01.04.02«Прикладная математика и информатика», 01.03.03«Механика и математическое моделирование», 01.04.03«Механика и математическое моделирование», 03.03.01«Прикладные математика и физика», 03.04.01«Прикладные математика и физика», 15.03.03«Прикладная механика», 15.04.03«Прикладная механика». Пособие также будет полезно всем обучающимся, интересующимся поиском аналитических решений задач математической физики.

Оглавление

Введение 4

Задача о стационарном распределении температуры в брусе 5

Задача о распределении температуры в стенке толщиной **а** 10

Задача о распределение температуры в шаре. 13

Задача о распределение температуры в цилиндрическом проводнике. 17

Задачи для самостоятельного решения 21

Литература: 22

Введение

Неоднородными задачами математической физики с разделяющимися переменными являются задачи, в которых либо уравнения являются неоднородными, либо граничные условия являются неоднородными (в задачах гиперболического и параболического типов), либо граничные условия по одной из переменных (в задачах эллиптического типа), либо и уравнения и условия являются неоднородными.

Сущность метода приведения к однородной задаче состоит в том, что искомую функцию находим в виде суммы двух функций, причем для одной из этих функций составляется соответствующая однородная задача, другая функция будет частным решением неоднородной задачи. Этот метод целесообразно использовать в несложных случаях, так как при применении его потребуются некоторые искусственные приемы. Получаемая соответствующая однородная задача решается методом Фурье разделения переменных. Метод Фурье относится к аналитическим методам решения, позволяет получить решение в формульном виде. Полное изложение метода Фурье можно изучить в [1].

С постановками задач и классификацией задач можно ознакомиться в [1-5].

Рассмотрим этот метод на примерах нескольких задач.

Следует обратить внимание, что коэффициенты разложения в ряды Фурье вычисляются с использованием уравнений для задач Штурма-Лиувилля, а не непосредственной подстановкой разлагаемых функций.

Задача о стационарном распределении температуры в брусе

Найти стационарное распределение температуры $T(x, y)$ в брусе прямоугольного сечения, две грани которого (x=a и y=0) покрыты тепловой изоляцией, две другие поддерживаются при нулевой температуре (рис. 1).

В брусе выделяется тепло плотностью Q_0.

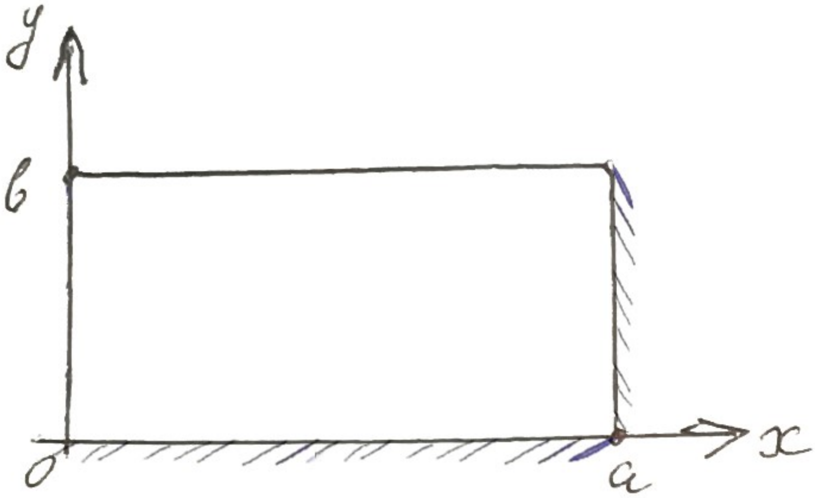

Рис. 1. Схема к задаче о стационарном распределении температуры в брусе

.

Напишем уравнение и граничные условия:

$$\Delta T = -\frac{Q_0}{k}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{Q_0}{k}$$

$$T(0, y) = 0$$

$$T(x, b) = 0$$

$$\frac{\partial T(a, y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = 0$$

Данная неоднородная задача относится к задачам эллиптического типа. Сведем эту задачу к соответствующей однородной задаче, выделяя частное $T_*(x)$ решение по переменной x (аналогично можно по переменной y)

Представим искомую функцию $T(\mathrm{x},\mathrm{y})$ как сумму двух функций: функции $T_*(x\ )$ и функции $T_{\text{одн}}(x,y)$, которая будет являться решением соответствующей однородной задачи.

$T(x,y) = T_{\text{одн}}(x,y) + T_*(x)$ подставим это в исходное уравнение

$$\frac{\partial^2 T_{\text{одн}}}{\partial x^2} + T_*''(x) + \frac{\partial^2 T_{\text{одн}}}{\partial y^2} = -\frac{Q_0}{k}$$

Задача для $T_{\text{одн}}(x,y)$	Задача *для* $T_*(x)$
$\frac{\partial^2 T_{\text{одн}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{\text{одн}}}{\partial y^2} = 0$ $T_{\text{одн}}(0,y) = 0$ $\frac{\partial T_{\text{одн}}(a,y)}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial T_{\text{одн}}(x,0)}{\partial y} = 0$ $T_{\text{одн}}(x,b) = T(x,b) - T_*(x) = -T_*(x)$ Задача для $\mathrm{T}_{\text{одн}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$является однородной по переменной x.	$T_*''(x) = -\frac{Q_0}{k}$ $T_*(0) = 0$ $T_*'(a) = 0$ Решение для $T_*(x)$: $T'(x) = -\frac{Q_0}{k}x + \mathrm{A}$ $T_*(x) = -\frac{Q_0}{2k}x^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}$ Применив условия, получаем $T_*(x) = \frac{Q_0 a}{k}x(1 - \frac{x}{2a})$

Решение задачи для $T_{\text{одн}}(x,y)$:

Методом Фурье разделения переменных ищем частные решения в виде произведений двух функций, каждая из которых зависит от одной переменной

$$T_{\text{одн}}(x,y) = X(x)Y(y)$$

и подставим в исходное уравнение для $T_{\text{одн}}(x, y)$:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

Отношение функций, зависящих от x, равно отношению функций, зависящих от переменной y. Следовательно, эти отношения являются константой. Обозначим её как $-\lambda$.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

Поделив переменные в уравнении в частных производных для функции $T_{\text{одн}}(x, y)$, получили два обыкновенных дифференциальных уравнения.

Поделив переменные в однородных условиях по переменной x и используя обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной x, получаем регулярную задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(a) = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

Собственные числа и собственные функции этой задачи:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n+1)}{2a}\right)^2, n = 0, 1, 2 \ldots$$

$X_n(x) = \sin\left[\frac{\pi(2n+1)}{2a}x\right]$ $n = 0, 1, 2 \ldots$:

С найденными λ_n решаем второе дифференциальное уравнение:

$Y''(y) - \lambda_n Y(y) = 0$

$$Y_n(y) = \widetilde{C_{1n}} \operatorname{ch}\left[\frac{\pi(2n+1)}{2a}y\right] + \widetilde{C_{2n}} \operatorname{sh}\left[\frac{\pi(2n+1)}{2a}y\right]$$

Используя условие $Y_n'(0) = 0$, получим что $\widetilde{C_{2n}} = 0$

Таким образом, мы получили бесконечное множество частных решений:

$$T_{\text{одн}n} = \widetilde{C_{1n}} \operatorname{ch}\left[\frac{\pi(2n+1)}{2a} y\right] \sin\left[\frac{\pi(2n+1)}{2a} x\right], n = 0, 1, 2 \dots$$

$$T_{\text{одн}}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{C_{1n}} \operatorname{ch}\left[\frac{\pi(2n+1)}{2a} y\right] \sin\left[\frac{\pi(2n+1)}{2a} x\right]$$

$$T_{\text{одн}}(x,b) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{C_{1n}} \operatorname{ch}\left[\frac{\pi(2n+1)}{2a} b\right] \sin\left[\frac{\pi(2n+1)}{2a} x\right] = -T_*(x)$$

Известную функцию $-T_*(x)$ разложили в ряд Фурье по ортогональной системе собственных функций регулярной задачи Штурма-Лиувилля.

Коэффициенты разложения $\widetilde{C_{1n}} \operatorname{ch}\left[\frac{\pi(2n+1)}{2a} b\right]$ можем вычислить

$$\widetilde{C_{1n}} \operatorname{ch}\left[\frac{\pi(2n+1)}{2a} b\right] =$$

$$-\frac{2}{a}\int_0^a \mathrm{T}_*(\mathrm{x})\mathrm{X}_\mathrm{n}(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \frac{2}{a\lambda_\mathrm{n}}\int_0^a \mathrm{T}_*(\mathrm{x})\mathrm{X}_\mathrm{n}''(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \frac{2}{a\lambda_\mathrm{n}}\left(\mathrm{T}_*(\mathrm{x})\mathrm{X}_\mathrm{n}'(\mathrm{x})\right|_0^a$$

$$-\int_0^a T_*' X_n'(x)dx) = -\frac{2}{a\lambda_n}\left(T_*' X_n(x)\right|_0^a$$

$$-\int_0^a T_*''(x) X_n(x)dx) = -\frac{2}{a\lambda_n}\int_0^a \frac{Q_0}{k} X_n(x)dx = -\frac{16a^2 Q_0}{k\pi^3(2n+1)^3}$$

<u>Ответ задачи:</u>

$$T(x,y) = T_*(x) + T_{\text{одн}}(x,y) =$$

$$= \frac{Q_0 a}{k} x(1 - \frac{x}{2a}) - \frac{16 Q_0 a^2}{\pi^3 k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{2a} x\right]}{(2n+1)^3} \cdot \frac{\operatorname{ch}\left[\frac{\pi(2n+1)}{2}\frac{y}{a}\right]}{\operatorname{ch}\left[\frac{\pi(2n+1)}{2}\frac{b}{a}\right]}$$

Ряд сходится равномерно.

Полученное решение удовлетворяет всем заданным граничным условиям.

Задача о распределении температуры в стенке толщиной **a**

Исследовать процесс распределения температуры в стенке толщиной **a**, грань x=0 которой поддерживается при температуре T_0, а грань x=a при нулевой. Начальная температура стенки нулевая.

Напишем уравнение и условия:

$$\Delta T - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$$

$$T(0,\tau) = T_0$$
$$T(a,\tau) = 0$$

$$T(x,\tau) = 0$$

Задача содержит неоднородное граничное условие по переменной x, а значит, является неоднородной задачей математической физики.

Данная неоднородная задача относится к задачам параболического типа. Сведем эту задачу к соответствующей однородной задаче, выделяя частное $T_*(x)$

Задача для $T_{\text{одн}}(x,y)$	*Задача для* $T_*(x)$
$\frac{\partial^2 T_{\text{одн}}}{\partial x^2} - \frac{\partial T_{\text{одн}}}{\partial \tau} = 0$ $T_{\text{одн}}(0,\tau) = 0$ $T_{\text{одн}}(a,\tau) = 0$ $T_{\text{одн}}(x,0) = -T_*(x)$ *Задача для* $T_{\text{одн}}(x,y)$*является однородной*	$T_*''(x) = 0$ $T_*(0) = T_0$ $T_*(a) = 0$ *Решение для* $T_*(x)$: $T_*(x) = \mathrm{A}x + \mathrm{B}$ *Применив условия, получаем* $T_*(x) = T_0(1 - \frac{x}{a})$

Решение задачи для $T_{\text{одн}}(x,\tau)$:

Методом Фурье разделения переменных ищем частные решения в виде произведений двух функций, каждая из которых зависит от одной переменной

$$T_{\text{одн}}(x,\tau) = X(x)Y(\tau)$$

и подставим в исходное уравнение для $T_{\text{одн}}(x,y)$:

$$X''(x)Y(\tau) + X(x)Y'(\tau) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y'(\tau)}{Y(\tau)}$$

Отношение функций, зависящих от x, равно отношению функций, зависящих от переменной τ. Следовательно, эти отношения являются константой. Обозначим её как $-\lambda$.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y'(\tau)}{Y(\tau)} = -\lambda$$

Поделив переменные в уравнении в частных производных для функции $T_{\text{одн}}(x,y)$, получили два обыкновенных дифференциальных уравнения.

Поделив переменные в однородных условиях по переменной x и используя обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной x, получаем регулярную задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(a) = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

Собственные числа и собственные функции этой задачи:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, n = 1, 2 \dots$$

$X_n(x) = \sin\left[\frac{\pi n}{a}x\right]$, $n = 1, 2 \dots$:

С найденными λ_n решаем второе дифференциальное уравнение:

$Y'(\tau) - \lambda_n Y(\tau) = 0$

$$Y_n(\tau) = C_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \tau}$$

$$T_{\text{одн}}(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \tau} \sin\frac{\pi n}{a} x$$

$$T_{\text{одн}}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{a} x = -T_*(x)$$

Известную функцию $-T_*(x)$ разложили в ряд Фурье по ортогональной системе собственных функций регулярной задачи Штурма-Лиувилля.

Коэффициенты разложения можем вычислить:

$$C_n = -\frac{2}{a}\int_0^a T_*(x) X_n(x) dx = \frac{2}{a\lambda_n}\int_0^a T_*(x) X_n''(x) dx = \frac{-2T_0}{\pi n}$$

<u>Ответ задачи:</u>

$$T(x,y) = T_*(x) + T_{\text{одн}}(x,\tau) = T_0\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{2T_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{a} x}{n} \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \tau}$$

Ряд сходится равномерно.

Полученное решение удовлетворяет всем заданным условиям.

Задача о распределение температуры в шаре.

Найти распределение температуры в шаре радиуса a, внутри которого, начиная с момента времени t=0, происходит выделение тепла плотностью Q_0. Начальная температура шара равна нулю, а на границе поддерживается постоянная температура T_0 (рис. 2)

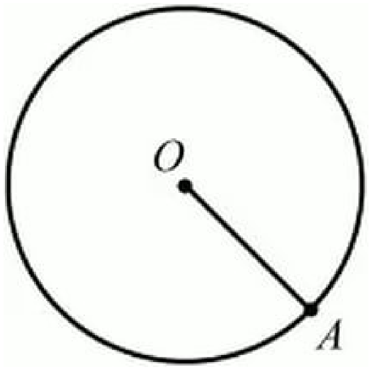

Рис. 2. Схема к задаче распределение температуры в шаре.

$$\Delta T-\frac{\partial T}{\partial \tau}=-\frac{Q_0}{k}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)-\frac{\partial T}{\partial \tau}=-\frac{Q_0}{k}$$

$$T|_{r=0}<\infty$$

$$T|_{r=a}=T_0$$

$$T|_{\tau=0}=0$$

$$T(r,\tau)-?$$

В этой задаче неоднородным является уравнение и неоднородным является граничное условие

Представим искомую функцию $T(r,\tau)$ как сумму двух функций: функции $T_*(r\ )$ и функции $T_{\text{одн}}(r,\tau)$, которая будет являться решением соответствующей однородной задачи.

$T(r,\tau)=T_{\text{одн}}(r,\tau)+T_*(r)$ подставим это в исходное уравнение

Задача для $T_{\text{одн}}(r,\tau)$	*Задача для* $T_*(r)$
$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T_{\text{одн}}}{\partial r}\right)-\frac{\partial T_{\text{одн}}}{\partial \tau}=0$ $T_{\text{одн}}(0,\tau)$ − ограниченное $T_{\text{одн}}(a,\tau)=0$ $T_{\text{одн}}(r,0)=-T_*(r)$ *Задача для* $T_{\text{одн}}(r,\tau)$*является однородной*	$(r^2T_*'(x))'=-\frac{Q_0r^2}{k}$ $T_*(0)$ − ограниченное $T_*(a)=T_0$ *Решение для* $T_*(r)$: $T'(x)=-\frac{Q_0}{3k}r+\text{A}/r^2$ $T_*(x)=-\frac{Q_0}{6k}r^2-\text{A}\frac{1}{r}+\text{B}$ *Применив условия, получаем* $T_*(x)=T_0+\frac{Q_0a^2}{6k}(1-\frac{r^2}{a^2})$

Решение задачи для $T_{\text{одн}}(r,\tau)$:

Методом Фурье разделения переменных ищем частные решения в виде произведений двух функций, каждая из которых зависит от одной переменной

$$T_{\text{одн}}(r,\tau)=X(r)Y(\tau)$$

и подставим в исходное уравнение для $T_{\text{одн}}(x,y)$:

$$\frac{(r^2X')'}{r^2}Y(\tau)+X(r)Y'(\tau)=0$$

$$\frac{(r^2X')'}{r^2X(r)}=-\frac{Y'(\tau)}{Y(\tau)}$$

Отношение функций, зависящих от x, равно отношению функций, зависящих от переменной τ. Следовательно, эти отношения являются константой. Обозначим её как $-\lambda$.

$$\frac{(r^2X')'}{r^2X(r)}=-\frac{Y'(\tau)}{Y(\tau)}=-\lambda$$

Поделив переменные в уравнении в частных производных для функции $T_{\text{одн}}(r,\tau)$, получили два обыкновенных дифференциальных уравнения.

Поделив переменные в однородных условиях по переменной r и используя обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной r, получаем сингулярную задачу Штурма-Лиувилля:

$(r^2X')' + \lambda r^2 X = 0$

X (0) – ограничено

X(a)=0

Спектр дискретный и вещественный

$\lambda_n = \frac{(\pi n)^2}{a^2}, n = 1, 2, \dots$

Собственными функциями являются*:*

$$X_n = \frac{sin\frac{\pi n}{a}r}{r},$$

$n = 1, 2, \dots$

С найденными λ_n решаем второе дифференциальное уравнение:

$Y'(\tau) - \lambda_n Y(\tau) = 0$

Решением этого уравнения являются: $Y_n(\tau) = C_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \tau}$

$$T_{\text{одн}}(r,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(r)Y_n(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \tau} \sin\frac{\pi n}{a} r$$

$$T_{\text{одн}}(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(r)Y_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{r} \sin\frac{\pi n}{a} x = -T_*(r)$$

Известную функцию $-T_*(r)$ разложили в ряд Фурье по ортогональной системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

Коэффициенты разложения можем вычислить:

$$C_n = -\frac{2}{a}\int_0^a T_*(r)X_n(r)dx = \frac{2a(-1)^n}{\pi n}(T_0 + \frac{Q_0 a^2}{k\pi^2 n^2})$$

$$T(r,\tau) = T_0 + \frac{Q_0 a^2}{6k}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + \frac{2a}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(T_0 + \frac{Q_0 a^2}{k\pi^2 n^2})e^{-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \tau}\sin\frac{\pi n}{a}r$$

Полученное решение удовлетворяет всем заданным условиям.

Задача о распределение температуры в цилиндрическом проводнике.

Найти распределение температуры в цилиндрическом проводнике радиуса a, внутри которого, начиная с момента времени t=0, происходит выделение тепла плотностью Q_0. Начальная температура проводника и температура поверхности равны нулю.

$$\Delta T - \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{Q_0}{k}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{Q_0}{k}$$

$$T|_{r=0} < \infty$$

$$T|_{r=a} = 0$$

$$T|_{\tau=0} = 0$$

$$T(r,\tau) - ?$$

В этой задаче неоднородным является уравнение.

Представим искомую функцию $T(r,\tau)$ как сумму двух функций: функции $T_*(r)$ и функции $T_{\text{одн}}(r,\tau)$, которая будет являться решением соответствующей однородной задачи.

$$T(r,\tau) = T_{\text{одн}}(r,\tau) + T_*(r)$$

Подставим $T(r,\tau)$ в исходное уравнение

Задача для $T_{\text{одн}}(r,\tau)$	*Задача для* $T_*(r)$
$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_{\text{одн}}}{\partial r}\right)-\frac{\partial T_{\text{одн}}}{\partial \tau}=0$ $T_{\text{одн}}(0,\tau)$ − ограниченное $T_{\text{одн}}(a,\tau)=0$ $T_{\text{одн}}(r,0)=-T_*(r)$ *Задача для* $T_{\text{одн}}(r,\tau)$ *является однородной задачей*	$(rT_*'(r))'=-\frac{Q_0 r}{k}$ $T_*(0)$ − ограниченное $T_*(a)=0$ *Решение для* $T_*(r)$: $T_*'(r)=-\frac{Q_0}{2k}r+\mathrm{A}/r$ $T_*(x)=-\frac{Q_0}{4k}r^2+\mathrm{A}\ln r+\mathrm{B}$ *Применив условия, получаем* $T_*(x)=\frac{Q_0a^2}{4k}(1-\frac{r^2}{a^2})$

<u>Решение задачи для</u> $T_{\text{одн}}(r,\tau)$:

Методом Фурье разделения переменных ищем частные решения в виде произведений двух функций, каждая из которых зависит от одной переменной

$$T_{\text{одн}}(r,\tau)=X(r)Y(\tau)$$

и подставим в исходное уравнение для $T_{\text{одн}}(x,y)$:

$$\frac{(rX')'}{r}Y(\tau)+X(r)Y'(\tau)=0$$

$$\frac{(rX')'}{rX(r)}=-\frac{Y'(\tau)}{Y(\tau)}$$

Отношение функций, зависящих от x, равно отношению функций, зависящих от переменной τ. Следовательно, эти отношения являются константой. Обозначим её как $-\lambda$.

$$\frac{(rX')'}{rX(r)}=-\frac{Y'(\tau)}{Y(\tau)}=-\lambda$$

Поделив переменные в уравнении в частных производных для функции $T_{\text{одн}}(r,\tau)$, получили два обыкновенных дифференциальных уравнения.

Поделив переменные в однородных условиях по переменной r и, используя обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной r, получаем сингулярную задачу Штурма-Лиувилля:

$(rX')' + \lambda rX = 0$

X (0) – ограничено

X(a)=0

Спектр задачи Штурма-Лиувилля дискретный и вещественный

$\lambda_n = \frac{(\gamma_n)^2}{a^2}, n = 1, 2, \dots$

Собственными функциями являются

$X_n(r) = J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right), n = 1, 2, \dots$

γ_n являются корнями уравнения $J_0(\gamma) = 0$

С найденными λ_n решаем второе дифференциальное уравнение:

$Y'(\tau) - \lambda_n Y(\tau) = 0$

Решением этого уравнения являются: $Y_n(\tau) = C_n \cdot e^{-\left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2 \tau}$

$$T_{\text{одн}}(r,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(r)Y_n(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \tau} J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right)$$

$$T_{\text{одн}}(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(r)Y_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right) = -T_*(x)$$

Известную функцию $-T_*(r)$ разложили в ряд Фурье по ортогональной системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

Коэффициенты разложения можем вычислить:

$C_n =$

$$= -\frac{1}{N_n^2}\int_0^a T_*(r)\, rX_n(r)dr = \frac{1}{N_n^2}\frac{1}{\lambda_n}\int_0^a T_*(r)(\, rX_n'(r))'dr = \frac{1}{N_n^2}\frac{1}{\lambda_n}\left(T_*(r)\, rX_n'(r)\right|_0^a$$

$$-\int_0^a T_*'(r)rX_n'(r)dr\,)= -\frac{1}{N_n^2}\frac{1}{\lambda_n}\left(T_*'(r)\, rX_n(r)\right|_0^a$$

$$-\int_0^a (T_*'(r)r\,)'X_n(r)dr\,)= -\frac{1}{N_n^2}\frac{Q_0}{\lambda_n k}\int_0^a rJ_0\left(\frac{\gamma_n}{a}r\right)dr = -\frac{1}{N_n^2}\frac{Q_0}{\lambda_n k}\frac{a^2J_1(\gamma_n)}{\gamma_n}$$

Вычислим $N_n^2 = \int_0^a rJ_0^2\left(\frac{\gamma_n}{a}r\right)dr = \frac{2}{a^2J_1^2(\gamma_n)}$

$$C_n = -\frac{2Q_0a^2}{k\gamma_n^3J_1(\gamma_n)}$$

Ответ*:*

$$T(r,\tau) = \frac{Q_0a^2}{4k}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) - \frac{2Q_0a^2}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\gamma_n}{a}r\right)}{\gamma_n^3J_1(\gamma_n)}e^{-\left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2\tau}$$

Полученное решение удовлетворяет всем заданным условиям.

Задачи для самостоятельного решения

1. В пластине толщиной ***a***, начиная с момента ***t=0,*** происходит тепловыделение ***Q***. Найти распределение температуры в пластине при условии, что грани излучают тепло по закону Ньютона. Температура среды равна $\boldsymbol{T_0}$, а начальная температура нулевая.

2. Начальная температура пластины толщиной ***a*** равна $\boldsymbol{T_0}$. В пластине, начиная с момента ***t=0,*** происходит тепловыделение ***Q***. Найти распределение температуры в пластине при условии, что грань ***x=a*** поддерживаются при нулевой температуре, а грань ***x=0*** теплоизолированная.

3. В пластине толщиной ***a***, начиная с момента ***t=0*** происходит тепловыделение ***Q exp(-в τ)***. Найти распределение температуры в пластине при условии, что грань ***x=0*** поддерживаются при нулевой температуре, а температура грани ***x=a*** равна $\boldsymbol{T_0}$, начальная температура нулевая.

Указание. Решение искать в виде:

$$T(x,\tau) = T_{\text{одн}}(x,\tau) + T_*(x)\boldsymbol{exp}(-\text{в}\tau)$$

4. В цилиндре радиуса ***a***, начиная с момента ***t=0,*** происходит тепловыделение ***Q***. Найти распределение температуры в цилиндре при условии, что боковая поверхность излучает тепло в окружающую среду по закону Ньютона. Начальная температура цилиндра $\boldsymbol{T_0}$

5. Найти распределение температуры в шаре радиуса ***a***. при условии, что начиная с момента ***t=0,*** в шаре происходит тепловыделение ***Q exp(-bτ).*** Поверхность шара излучает тепло в окружающую среду по закону Ньютона. Начальная температура шара $\boldsymbol{T_0}$

Указание. Решение искать в виде:

$$T(r,\tau) = T_{\text{одн}}(r,\tau) + T_*(r)\boldsymbol{exp}(-\text{в}\tau)$$

Литература:

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: учебник для вузов. М.: Изд-во Московского государственного университета. – 2004. – 798 с.
2. Голоскоков Д. П. Курс математической физики с использованием пакета Maple. СПб.: лань. – 2015. – 576 с
3. Омельченко А. В. Методы интегральных преобразований в задачах математической физики. М.: Из-во МЦНМО – 2010.- 184
4. Суслова И. Б.; Баденко Г. В. Математическая физика: онлайн-курс Свободный доступ из сети Интернет. [Санкт-Петербург, 2016. https://openedu.ru/course/spbstu/MATHPH/
5. Жукова-Малицкая Г.А.; Кузьмин Ю.Н. Математическая физика: учебное пособие. Санкт-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2010 – 116 с.
6. Баденко В.Л., Баденко Г.В. Специальные разделы высшей математики. Математическая физика: учебное пособие Санкт-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2014 Свободный доступ из сети Интернет (чтение, печать, копирование) (https://elib.spbstu.ru/dl/2/3890.pdf/)