Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Г. В. Баденко, В. Р. Мешков

Математическая физика

задачи с непрерывным спектром

Учебное пособие

Санкт-Петербург, 2022

УДК 517.958

Баденко Г. В., Мешков В. Р. Математическая физика: задачи с непрерывным спектром: учеб. пособие. — 2022. — 23 с.

Метод Фурье разделения переменных может приводить к сингулярным задачам на собственные значения, набор решений которых представляет собой совокупность функций, непрерывно зависящих от вещественного параметра λ. Такие задачи называют задачами с непрерывным спектром. Решение таких задач ищется в виде непрерывной линейной комбинации собственных функций — в виде интеграла Фурье.

В пособии с подробными комментариями разобраны примеры решения задач с непрерывным спектром из различных областей физики. При этом во всех задачах используется классическая схема метода Фурье, чтобы продемонстрировать полную аналогию с методом Фурье дискретного спектра.

Пособие предназначено для студентов Физико-механического института, обучающихся по направлениям подготовки 01.06.01 — «Математика и механика», 01.03.02 — «Прикладная математика и информатика», 01.04.02 — «Прикладная математика и информатика», 01.03.03 — «Механика и математическое моделирование», 01.04.03 — «Механика и математическое моделирование», 03.03.01 — «Прикладные математика и физика», 03.04.01 — «Прикладные математика и физика», 15.03.03 — «Прикладная механика», 15.04.03 — «Прикладная механика». Пособие также будет полезно всем обучающимся, интересующимся поиском аналитических решений задач математической физики.

Предполагается, что читатель владеет основами классического метода Фурье, в частности, знает алгоритм разделения переменных и умеет решать стандартные задачи Штурма–Лиувилля.

Оглавление

Предисловие

Классический метод Фурье основан на процедуре *разделения переменных* — построении частных решений вида $X(x)T(t)$. Однако решения такого вида существуют лишь в случае, когда уравнение и граничные условия (г. у.) по *ведущей переменной* являются однородными.

Если уравнение или г. у. неоднородны, то можно исправить это при помощи выделения *частного решения*. Такие задачи разобраны в пособии авторов [1]. Частное решение часто интересно само по себе, поскольку может представлять, например, стационарную часть решения, режим установившихся колебаний и т. п. С инженерной точки зрения, выделение таких составляющих — безусловно правильный подход.

Единый подход к решению задач математической физики, в том числе неоднородных, даёт обобщённый метод Фурье или *метод конечных интегральных преобразований* (в дискретном случае называемый также методом Гринберга). Он позволяет решать как однородные, так и неоднородные задачи по единой схеме. Это удобно, но у такого подхода есть и недостатки. В частности, при наличии в исходной задаче неоднородностей в граничных условиях получаются неравномерно сходящиеся ряды или интегралы. Процедура «улучшения сходимости» — выделение и аналитическое суммирования (интегрирование) «медленной» части оказывается зачастую не проще построения частного решения. Мы планируем в дальнейшем разобрать решения задач этим методом отдельно.

Во втором семестре курса математической физики СПбГПУ на практических занятиях изучаются задачи с *непрерывным спектром*. Непрерывный спектр появляется в сингулярных задачах Штурма–Лиувилля, то есть в задачах, где интервал изменения переменной неограничен, либо уравнение имеет особенности на концах интервала. Когда спектр оказывается непрерывным, разложение по собственным функциям задачи представляет собой уже не ряд, а интеграл Фурье. Однако схема классического метода Фурье при этом практически не изменяется. Именно это демонстрируют решаемые в пособии задачи.

Мы разберём несколько типичных задач с непрерывным спектром из различных областей физики, которые решаются по схеме классического метода Фурье. Большинство из задач однородные. В неоднородной задаче 1 использован способ выделения частного решения.

В качестве основной книги для изучения метода Фурье с единых позиций мы рекомендуем пособие [2]. Довольно много задач разобрано с применением пакета Maple в книге [4]. Отдельно методу интегральных преобразований (обобщённому методу Фурье) посвящена книга [5].

Задачи Штурма–Лиувилля с непрерывным спектром и формулы разложения

Условия разложимости функции $f(x)$ по системе собственных функций Штурма–Лиувилля непрерывного спектра всегда сводятся к двум требованиям: 1) функция $f(x)$ должна удовлетворять *условиям Дирихле*, т. е. иметь конечное число максимумов/минимумов и точек разрыва на любом конечном участке области определения ЗШЛ; 2) функция $f(x)$ должна быть *абсолютно интегрируемой* на области определения ЗШЛ с весом ЗШЛ:

$$f(x) \in L_1([a,b]) : \int_a^b |f(x)| r(x)\, dx < \infty.$$

Если ЗШЛ, имеющая непрерывный спектр, с весом $r(x)$ задана на интервале $[a,b]$, а функция $f(x)$ удовлетворяет приведённым выше условиям, то она допускает разложения в интеграл Фурье по непрерывной системе собственных функций $\{X_\lambda(x)\}$, а именно,

$$f(x) = \int_{[\lambda]} \frac{\langle f, X_\lambda \rangle}{N_\lambda^2} X_\lambda(x)\, d\lambda.$$

Здесь $[\lambda]$ означает спектр собственных значений, а нормировочный коэффициент $N_\lambda^2 > 0$ зависит от вида задачи Штурма–Лиувилля.

Замечание. Во всех задачах Штурма–Лиувилля непрерывного спектра всегда получается один и тот же спектр собственных значений — $\lambda \in (0, \infty)$.

Скалярное произведение $\langle f, X_\lambda \rangle$ обозначает интеграл по интервалу определения ЗШЛ от произведения функций с весом $r(x)$ ЗШЛ:

$$\langle f, X_\lambda \rangle = \int_a^b f(x) X_\lambda(x) r(x)\, dx.$$

Вот наиболее часто встречающиеся задачи Штурма–Лиувилля с непрерывным спектром и соответствующие формулы разложения в интеграл Фурье.

- $\sin$-разложение Фурье

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & x \in \mathbb{R}^+, \\ X(0) = 0, \ |X| < \infty. \end{cases}$$

$$X_\lambda(x) = \sin\sqrt{\lambda}x, \quad f(x) = \int_0^\infty \frac{\langle f, X_\lambda \rangle}{\pi\sqrt{\lambda}} X_\lambda(x)\, dx.$$

- $\cos$-разложение Фурье

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & x \in \mathbb{R}^+, \\ X'(0) = 0, \ |X| < \infty. \end{cases}$$

$$X_\lambda(x) = \cos\sqrt{\lambda}x, \quad f(x) = \int_0^\infty \frac{\langle f, X_\lambda\rangle}{\pi\sqrt{\lambda}} X_\lambda(x)\,dx.$$

- Обобщённое $\cos$-разложение Фурье

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & x \in \mathbb{R}^+, \\ X'(0) - \alpha X(0) = 0, & |X| < \infty. \end{cases}$$

$$X_\lambda(x) = \alpha\sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad f(x) = \int_0^\infty \frac{\langle f, X_\lambda\rangle}{\pi\sqrt{\lambda}(\alpha^2+\lambda)} X_\lambda(x)\,dx.$$

- Разложение Ханкеля (Фурье–Бесселя)

$$\begin{cases} (rR')' + \lambda r R = 0, & r \in \mathbb{R}^+, \\ |R| < \infty. \end{cases}$$

$$R_\lambda(r) = J_0(\sqrt{\lambda}r), \quad f(r) = \int_0^\infty \frac{\langle f, R_\lambda\rangle}{2} R_\lambda(r)\,dr.$$

- Разложение Вебера

$$\begin{cases} (rR')' + \lambda r R = 0, & r \in [a, \infty), \\ R(a) = 0, & |R| < \infty. \end{cases}$$

$$R_\lambda(r) = N_0(\sqrt{\lambda}a)J_0(\sqrt{\lambda}r) - J_0(\sqrt{\lambda}a)N_0(\sqrt{\lambda}r),$$

$$f(r) = \int_a^\infty \frac{\langle f, R_\lambda\rangle}{2(J_0^2(a) + N_0^2(a))} R_\lambda(r)\,dx.$$

Перейдём к рассмотрению конкретных примеров.

Задача 1. **Полупространство с периодически меняющейся во времени температурой поверхности.**

Условие. Начальная температура полупространства $x \geq 0$ равна нулю. С момента времени $t = 0$ температура поверхности начинает меняться по закону $A\sin\omega t$. Изучить распространение температурных волн в полупространстве.

Постановка задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in \mathbb{R}^+, \\ u\big|_{x=0} = A\sin\omega t, & |u| < \infty, \\ u\big|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Замечание. Мы всегда стремимся к уменьшению числа параметров в формулировке задачи с целью сделать решение более прозрачным. Так, например, в уравнении теплопроводности $u_t = k u_{xx}$ участвует параметр k — температуропроводность материала. Однако, если мы сделаем замену переменной $\tau = kt$, то уравнение перейдёт в $u_\tau = u_{xx}$. Во всех задачах мы предполагаем, что такие преобразования выполнены.

Построение частного решения. Граничное условие здесь неоднородное. Построим частное решение уравнения, удовлетворяющее этому условию. Поскольку производная по t в уравнении нечётного порядка, она переводит синус в косинус и наоборот. Поэтому решение следует искать в виде

$$u_0(x,t) = S(x)\sin\omega t + C(x)\cos\omega t.$$

Подставляя эту форму в уравнение и собирая коэффициенты при функционально независимых $\sin\omega x$ и $\cos\omega x$, получаем систему уравнений для определения функций $S(x)$ и $C(x)$:

$$\begin{cases} S'' + \omega C = 0, \\ C'' - \omega S = 0, \\ S(0) = A,\ C(0) = 0, \quad |S| < \infty,\ |C| < \infty. \end{cases} \tag{1.2}$$

Исключая неизвестную C, приводим систему к одному уравнению 4-го порядка

$$\begin{cases} S'''' + \omega^2 S = 0, \\ S(0) = A,\ S''(0) = 0,\ |S| < \infty. \end{cases} \tag{1.3}$$

Корни характеристического уравнения $\mu^4 + \omega^2 = 0$ суть

$$\mu_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{2}}(1 \pm \mathrm{i})$$

при всех четырёх возможных сочетаниях знаков.

С учётом условия ограниченности, в решении нужно оставить только слагаемые с затухающими экспонентами. Таким образом, получаем решение задачи (**1.3**) в виде

$$S(x) = \mathrm{e}^{-\nu x}(B_1\sin\nu x + B_2\cos\nu x), \quad \nu = \sqrt{\frac{\omega}{2}}.$$

Из граничных условий (**1.3**) находим постоянные $B_1 = 0$, $B_2 = A$, а затем с помощью первого уравнения (**1.2**) получаем $C(x) = -A\,\mathrm{e}^{-\nu x}\sin\nu x$. (Проделайте сами.)

Окончательный вид решения задачи (**1.2**) таков:

$$u_0(x,t) = A\,\mathrm{e}^{-\nu x}(\cos\nu x\sin\omega t - \sin\nu x\cos\omega t) = A\,\mathrm{e}^{-\nu x}\sin(\omega t - \nu x).$$

Р е ш е н и е о д н о р о д н о й з а д а ч и. Выделяя полученное частное решение, как составляющую решения исходной задачи (**1.1**) — $u(x,t) = u_0(x,t) + v(x,t)$, получим однородную постановку

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ v\big|_{x=0} = 0, \quad |v| < \infty, \\ v\big|_{t=0} = -u_0\big|_{t=0} = -C(x) = A\,\mathrm{e}^{-\nu x} \sin \nu x. \end{cases} \tag{1.4}$$

Решим эту задачу классическим методом Фурье. Подставляя в уравнение и граничные условия функцию $v(x,t)$ в виде произведения $X(x)T(t)$ и разделяя переменные (проделайте самостоятельно), получим для временно́й составляющей уравнение $T' + \lambda T = 0$, а для X-составляющей задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ X(0) = 0, \ |X| < \infty. \end{cases} \tag{1.5}$$

Эта задача имеет непрерывный спектр $\lambda \in (0, \infty)$, а её собственными функциями являются

$$X_\lambda(x) = \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Функция $f(x) \in L_1(\mathbb{R}^+)$ (абсолютно интегрируемая на полуоси) может быть разложена в интеграл Фурье по собственным функциям задачи (**1.5**):

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\langle f, X_\lambda \rangle}{\pi \sqrt{\lambda}} X_\lambda(x)\, d\lambda \tag{1.6}$$

Замечание. Угловыми скобками $\langle f, g \rangle$ мы обозначаем *скалярное произведение* функций f и g, ассоциированное с задачей Штурма–Лиувилля. Если ЗШЛ определена на интервале $[a, b]$, а уравнение содержит весовую функцию $r(x)$ (вспомните общий вид ЗШЛ), то соответствующее скалярное произведение есть

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) r(x)\, dx.$$

Уравнение для T имеет общее решение $T_\lambda(t) = D_\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$. Таким образом, разделение переменных в уравнении (**1.4**) приводит нас к частным решениям следующего вида:

$$D_\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \sin \sqrt{\lambda} x, \quad \lambda > 0.$$

Будем искать решение задачи (**1.4**) в виде (непрерывной) линейной комбинации таких частных решений:

$$v(x,t) = \int_0^\infty D_\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} X_\lambda(x)\, d\lambda. \tag{1.7}$$

Остаётся определить только коэффициент D_λ этого разложения.

Подставляя комбинацию (**1.7**) в начальное условие, получаем с учётом (**1.6**)

$$v\big|_{t=0} = \int_0^\infty D_\lambda X_\lambda(x)\,d\lambda = -C(x) = -\int_0^\infty \frac{\langle C, X_\lambda\rangle}{\pi\sqrt{\lambda}} X_\lambda(x)\,d\lambda.$$

Как отсюда видно, искомый коэффициент разложения равен

$$D_\lambda = -\frac{\langle C, X_\lambda\rangle}{\pi\sqrt{\lambda}}.$$

Замечание. При вычислении скалярного произведения $\langle f, X_\lambda\rangle$ можно сэкономить массу усилий, если пользоваться уравнениями и г. у., которым удовлетворяют функции $f(x)$ и $X_\lambda(x)$ (возьмите это за правило). При этом явные выражения для функций использовать практически не приходится. Следующее вычисление даёт пример этой техники.

Для вычисления скалярного произведения $\langle C, X_\lambda\rangle$ будем использовать (**1.2**) и (**1.5**). Имеем (значок $(**)$ означает двукратное интегрирование по частям)

$$\langle C, X_\lambda\rangle = \int_0^\infty C X_\lambda\,dx \overset{(\mathbf{1.5})}{=\!=\!=} -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty C X_\lambda''\,dx \overset{(**)}{=\!=\!=}$$
$$= -\frac{1}{\lambda}\big(CX_\lambda' - C'X_\lambda\big)\Big|_0^\infty - \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty C'' X_\lambda\,dx \overset{(\mathbf{1.2}),(\mathbf{1.5})}{=\!=\!=\!=\!=} \frac{\omega}{\lambda^2}\int_0^\infty S X_\lambda''\,dx \overset{(**)}{=\!=\!=}$$
$$= \frac{\omega}{\lambda^2}\big(SX_\lambda' - S'X_\lambda\big)\Big|_0^\infty + \frac{\omega}{\lambda^2}\int_0^\infty S'' X_\lambda\,dx \overset{(\mathbf{1.2})}{=\!=\!=} -\frac{\sqrt{\lambda}A\omega}{\lambda^2} - \frac{\omega^2}{\lambda^2}\int_0^\infty C X_\lambda\,dx$$

Получили возвратный интеграл. Рассматривая начало и конец цепочки равенств, находим

$$\langle C, X_\lambda\rangle = -\frac{\sqrt{\lambda}A\omega}{\lambda^2+\omega^2} \quad\Longrightarrow\quad D_\lambda = \frac{A\omega}{\pi(\lambda^2+\omega^2)}.$$

Формула (**1.7**) даёт решение однородной задачи:

$$v(x,t) = \frac{A\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda^2+\omega^2} X_\lambda(x)\,d\lambda.$$

О т в е т. Объединяя решение однородной задачи и найденное ранее частное решение $u_0(x,t)$, записываем окончательное решение исходной задачи (**1.1**)

$$u(x,t) = A\,\mathrm{e}^{-\nu x}\sin(\omega t - \nu x) + \frac{A\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda^2+\omega^2}\sin\sqrt{\lambda}x\,d\lambda, \quad \nu = \sqrt{\frac{\omega}{2}}.$$

Задача 2. **Задача стационарной теплопроводности в первом квадранте плоскости.**

Условие. Требуется найти стационарное распределение температуры в первом квадранте $(x, y \geq 0)$ плоскости (x, y). Граница $y = 0$ поддерживается при нулевой температуре, граница $x = 0$ теплоизолирована, за исключением участка $y \in [0, a]$, в пределах которого подводится тепло потоком постоянной плотности q.

Постановка задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = -q\big(\eta(y) - \eta(y-a)\big) = -qf(y), \\ u\big|_{y=0} = 0, \quad |u| < \infty. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $\eta(\cdot)$ — функция Хевисайда.

Задача (**2.1**) однородна по переменной y. Выберем y в качестве ведущей переменной, тогда задачу можно решать классическим методом Фурье.

Замечание. Выбор знака в граничном условии здесь и в аналогичных случаях можно обосновать из физических соображений. Если на поверхности происходит подвод тепла, то градиент температуры направлен в сторону внешней нормали к поверхности — температура убывает вглубь тела. В данном случае это означает, что производная $\partial_x u$ отрицательна вблизи поверхности.

Решение. Согласно схеме метода Фурье, мы ищем частные решения вида $u(x, y) = X(x)Y(y)$, удовлетворяющие уравнению и (одногодным) г. у. по ведущей переменной. После подстановки произведения $X(x)Y(y)$ в уравнение и условия по y, получаем уравнение

$$X'' - \lambda X = 0 \tag{2.2}$$

для X-составляющей и задачу Штурма–Лиувилля по переменной y

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, \quad y \in \mathbb{R}^+, \\ Y(0) = 0, \ |Y| < \infty. \end{cases} \tag{2.3}$$

Задача (**2.3**) имеет непрерывный спектр $\lambda \in (0, \infty)$ и собственные функции

$$Y_\lambda(y) = \sin\sqrt{\lambda}y.$$

Обратимся ко второму уравнению (**2.2**). Его общее решение может быть записано в эквивалентных формах

$$X_\lambda(x) = C_1 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}x + C_2 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}x = D_1 \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x} + D_2 \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x}.$$

Замечание. Первая форма решения, как правило, является предпочтительной, если решается краевая задача на конечном отрезке: обычно так получаются более простые выражения для постоянных и более компактное решение. Однако в задачах на полуоси первая форма неудобна, так как обе функции неограниченны. В таком случае нужно использовать вторую форму решения. При этом слагаемое с растущей экспонентой отбрасывается.

Учитывая условие ограниченности $|u| < \infty$, которое должно выполняться по обеим переменнным, мы приходим к выводу, что искомые частные решения суть

$$D_\lambda\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}\, Y_\lambda(y).$$

Будем искать решение задачи (**2.1**) в виде (непрерывной) линейной комбинации таких частных решений:

$$u(x,y) = \int_0^\infty D_\lambda\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}\, Y_\lambda(y)\, d\lambda. \tag{2.4}$$

Задача сводится к определению коэффициента D_λ этого разложения.

Подставляя представление (**2.4**) в граничное условие по x и вспоминая формулу разложение (**1.6**), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\int_0^\infty \sqrt{\lambda} D_\lambda Y_\lambda(y)\, d\lambda = -qf(y) = -q\int_0^\infty \frac{\langle f, Y_\lambda\rangle}{\pi\sqrt{\lambda}} Y_\lambda(y)\, d\lambda.$$

Из равенства интегралов следует формула для коэффициента разложения

$$D_\lambda = q\frac{\langle f, Y_\lambda\rangle}{\pi\lambda}. \tag{2.5}$$

Вычислим скалярное произведение $\langle f, Y_\lambda\rangle$. С учётом определения функции $f(y)$ (см. (**2.1**)) имеем

$$\langle f, Y_\lambda\rangle = \int_0^\infty \big(\eta(y) - \eta(y-a)\big) Y_\lambda(y)\, dy = \int_0^a Y_\lambda(y)\, dy =$$
$$= \int_0^a \sin\sqrt{\lambda}y\, dy = \frac{1-\cos\sqrt{\lambda}a}{\sqrt{\lambda}}.$$

О т в е т. Подставляя найденный коэффициент (**2.5**) в представление (**2.4**), приходим к окончательному решению

$$u(x,y) = \frac{q}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\sqrt{\lambda}a}{\lambda^{3/2}}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x} \sin\sqrt{\lambda}y\, d\lambda =$$
$$= \frac{2q}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\mu a}{\mu^2}\, \mathrm{e}^{-\mu x} \sin\mu y\, d\mu.$$

Последняя замена $\sqrt{\lambda} \to \mu$ делается исключительно в целях придания выражению наиболее компактной формы.

Задача 3. **Симметричная задача электростатики в плоской бесконечной полосе.**

Это несложная задача, к которой, однако, мы сделаем по ходу решения несколько важных замечаний.

У с л о в и е. Найти распределение электрического потенциала в бесконечной полосе ширины $2h$ при следующем распределении потенциала на границе. Участки $x \in [-a, a]$ верхней и нижней границы имеют потенциал V_1, а оставшаяся (бесконечная) часть границы — потенциал V_2.

П о с т а н о в к а. Потенциал $u(x, y)$ электростатического поля удовлетворяет уравнению Лапласа. Рассматриваемая задача — это *задача Дирихле* (вспомните классификацию) в полуполосе:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [-h, h], \\ u\Big|_{y=\pm h} = \begin{cases} V_1, & |x| \le a, \\ V_2, & |x| > a, \end{cases}, \quad |u| < \infty. \end{cases} \tag{3.1}$$

Замечание. О симметрии. Прежде чем приступать к решению задачи, полезно проанализировать ожидаемый характер решения с точки зрения симметрии. В данном случае форма области (полоса) и граничные условия таковы, что потенциал $u(x, y)$ является чётной функцией обеих переменных: $u(x, y) = u(|x|, |y|)$. Значит, достаточно рассматривать лишь подобласть $x, y \ge 0$, поставив на условных «границах» $x = 0$ и $y = 0$ условия симметрии.

Замечание. Условия на бесконечности. Потенциал на границе задан здесь функцией, которая не стремится к нулю на бесконечности, а следовательно не является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$, $f(x) \notin L_1(\mathbb{R})$. Такую функцию нельзя разложить в интеграл Фурье. Однако это затруднение легко преодолеть, построив частное решение, которое удовлетворяет граничным условиям на бесконечности. В рассматриваемой задаче такое частное решение совершенно очевидно — $u_0 = \text{const} = V_2$.

С учётом сделанных замечаний мы переформулируем задачу следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times [0, h], \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad |u| < \infty, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \quad u\Big|_{y=h} = (V_1 - V_2)\big(1 - \eta(x - a)\big) = (V_1 - V_2) f(x). \end{cases} \tag{3.2}$$

Условия второго рода здесь — это условия симметрии (чётности); $\eta(\cdot)$ — ступенчатая функция Хевисайда.

В качестве ведущей переменной выберем x, поскольку задача (**3.2**) по x однородна. Решение будем строить классическим методом Фурье.

Р е ш е н и е. Сначала методом разделения переменных найдём частные решения вида $u(x,y)=X(x)Y(y)$, удовлетворяющие уравнению и г. у. по x. Подставляя произведение $X(x)Y(y)$ в уравнение и условия (проделайте), получаем для Y-составляющей уравнение

$$Y''-\lambda Y=0, \tag{3.3}$$

а по ведущей переменной — задачу Штурма–Лиувилля с условием 2-го рода

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, & x\in\mathbb{R}^+,\\ X'(0)=0, \ |X|<\infty. \end{cases} \tag{3.4}$$

Задача (**3.4**) имеет непрерывный спектр $\lambda\in(0,\infty)$ и собственные функции вида

$$X_\lambda(x)=\cos\sqrt{\lambda}x.$$

Замечание. Значение $\lambda=0$. Формально, в задаче с условиями второго рода значение $\lambda=0$ является собственным: ему соответствует собственная функция $X_0=1$. Таким образом, мы можем считать спектром задачи полуоткрытый интервал $\lambda\in[0,\infty)$. Однако в задачах с непрерывным спектром нет никакой разницы между спектрами $(0,\infty)$ и $[0,\infty)$, поскольку добавление отдельной точки к интервалу интегрирования никак не влияет на значение интеграла по спектру. В таких случаях мы будем считать спектром открытый интервал $(0,\infty)$.

Запишем теперь общее решение уравнения (**3.3**) (см. второе замечание к задаче 2)

$$Y_\lambda(y)=C_1\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}y+C_2\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}y.$$

Одно из граничных условий по y однородное и выполняется оно, очевидно, только при $C_1=0$.

Итак, разделением переменных мы построили частные решения уравнения, удовлетворяющие всем условиям задачи (**3.2**), за исключением условия при $y=h$. Эти частные решения суть

$$C_\lambda\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}yX_\lambda(x),\quad \lambda>0.$$

Будем искать решение задачи (**3.2**) в виде непрерывной комбинации найденных частных решений:

$$u(x,y)=\int_0^\infty C_\lambda\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}yX_\lambda(x)\,d\lambda. \tag{3.5}$$

Остаётся определить коэффициент C_λ. Для этого воспользуемся оставшимся граничным условием:

$$u\big|_{y=h} = \int_0^\infty C_\lambda \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}h X_\lambda(x)\, d\lambda = (V_1-V_2) f(y) = (V_1-V_2)\int_0^\infty \frac{\langle f, X_\lambda\rangle}{\pi\sqrt{\lambda}} X_\lambda(x)\, d\lambda.$$

Здесь мы в очередной раз использовали формулу разложения (**1.6**). Сравнивая интегралы, находим формулу для коэффициента разложения

$$C_\lambda = \frac{V_1 - V_2}{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}h}\frac{\langle f, X_\lambda\rangle}{\pi\sqrt{\lambda}}. \qquad (\mathbf{3.6})$$

Находим скалярное произведение $\langle f, Y_\lambda\rangle$ с учётом определения функции $f(y)$ (см. (**3.2**)). Имеем

$$\langle f, X_\lambda\rangle = \int_0^\infty \big(1 - \eta(x-a)\big) X_\lambda(x)\, dx = \int_0^a X_\lambda(x)\, dx = \\ = \int_0^a \cos\sqrt{\lambda}x\, dx = \frac{\sin\sqrt{\lambda}a}{\sqrt{\lambda}}.$$

О т в е т. Подставляя найденное скалярное произведение в (**3.6**) и далее в (**3.5**), а также вспоминая про выделенное в самом начале рассуждений частное решение V_2, приходим к решению исходной задачи (**3.1**)

$$u(x,y) = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{\lambda}a}{\lambda}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}y}{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}h}\cos\sqrt{\lambda}x\, d\lambda = \\ = V_2 + 2\frac{V_1 - V_2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\mu a}{\mu}\frac{\operatorname{ch}\mu y}{\operatorname{ch}\mu h}\cos\mu x\, d\mu.$$

Задача 4. **Задача Дирихле для кругового сектора с неоднородными граничными условиями по угловой переменной.**

Замечание. В предыдущих примерах непрерывный спектр возникал при решении задач на неограниченном интервале. Однако это не всегда так. Сейчас мы рассмотрим задачу, где все переменные заданы на ограниченных промежутках и тем не менее появляется непрерывный спектр.

У с л о в и е. Найти распределение потенциала в плоской области, имеющей вид четверти круга радиуса a. На круговой части границы, а также на одном из прямолинейных её участков потенциал равен нулю. На втором радиальном отрезке потенциал меняется по радиусу линейно.

П о с т а н о в к а. Решать задачу нужно, разумеется, в полярных координатах (r,φ). Уравнение Лапласа и граничные условия имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (r,\varphi) \in [0,a]\times[0,\pi/2], \\ u\big|_{r=a} = 0, \quad |u| < \infty, \\ u\big|_{\varphi=0} = 0, \quad u\big|_{\varphi=\pi/2} = Ar = Af(r). \end{cases} \tag{4.1}$$

Замечание. О выборе ведущей переменной. В стационарных задачах (обе переменные геометрические) (Почему не бывает ЗШЛ по времени t?) мы можем выбирать, какую из переменных взять в качестве ведущей. Прежде всего мы обращаем внимание на неоднородности в граничных условиях: классический метод Фурье предполагает, что ЗШЛ ставится по переменной, которой соответствуют однородные г. у.. Если условия неоднородны по обеим переменным, то мы смотрим, где их возможно привести к однородным, выделяя частное решение. Например, если функции в г. у. имеют разрывы, строить частное решение нецелесообразно: это не проще, чем решить всю задачу.

В данном случае мы видим, что условия по r однородны. Поэтому возьмём в качестве ведущей переменной радиус.

Р е ш е н и е. Проведём разделение переменных. Полагаем $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ и подставляем это выражение в уравнение Лапласа, предварительно домножив его на r^2:

$$\Phi r(rR')' + R\Phi'' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{r(rR')'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda.$$

Как видно, для угловой составляющей получается уравнение

$$\Phi'' - \lambda\Phi = 0. \tag{4.2}$$

Для R-составляющей с учётом однородных условий по r получаем следующую сингулярную задачу Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} (rR')' + \lambda\dfrac{R}{r} = 0, \quad r \in [0,a], \\ R(a) = 0, \ |R| < \infty. \end{cases} \tag{4.3}$$

Её общее решение удобно взять в следующей форме:

$$R(r) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}\ln\frac{r}{a} + C_2\cos\sqrt{\lambda}\ln\frac{r}{a}.$$

Обе функции при любом $\lambda > 0$ ограниченны на всем интервале, но из условия при $r = a$ следует $C_2 = 0$.

Таким образом, задача (**4.3**) действительно имеет непрерывный спектр $\lambda > 0$, а её собственные функции имеют вид

$$R_\lambda(r) = \sin\sqrt{\lambda}\ln\frac{r}{a}.$$

Обратимся теперь к уравнению (**4.2**) для угловой составляющей. Запишем его общее решение

$$\Phi_\lambda = C_1 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}\varphi + C_2 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda}\varphi.$$

Сразу воспользуемся однородным условием при $\varphi = 0$, из которого следует $C_2 = 0$.

Мы построили систему частных решений уравнения, удовлетворяющих всем условиям постановки (**4.1**), кроме условия при $\varphi = \pi/2$. Эти частные решения имеют вид

$$C_\lambda \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}\varphi R_\lambda(r), \quad \lambda > 0.$$

Будем искать решение задачи (**4.1**) в виде непрерывной комбинации

$$u(r,\varphi) = \int_0^\infty C_\lambda \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}\varphi R_\lambda(r)\, d\lambda. \tag{4.4}$$

Необходимо определить коэффициент разложения C_λ. Из граничного условия при $\varphi = \pi/2$, получаем

$$u\big|_{\varphi=\pi/2} = \int_0^\infty C_\lambda \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}\,{}^{\pi}\!/_{2} R_\lambda(r)\, d\lambda = Af(r) = A\int_0^\infty \frac{\langle f, R_\lambda\rangle}{\pi\sqrt{\lambda}} R_\lambda(r)\, d\lambda.$$

Замечание. Для задач Штурма–Лиувилля с неединичным весом скалярное произведение должно этот вес включать. В частности, для задачи (**4.3**) мы имеем

$$\langle f, R_\lambda\rangle = \int_0^a f(r) R_\lambda(r)\frac{dr}{r}.$$

Отметим также, что формула разложения по системе $\{R_\lambda\}$ с точностью до определения скалярного произведения совпадает по виду с формулой (**1.6**).

Как и в предыдущих задачах, сравнивая интегралы, получаем выражение для коэффициента C_λ

$$C_\lambda = \frac{A}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,{}^{\pi}\!/_{2}}\frac{\langle f, R_\lambda\rangle}{\pi\sqrt{\lambda}}. \tag{4.5}$$

Осталось вычислить скалярное произведение $\langle f, R_\lambda\rangle$. Имеем

$$\langle f, R_\lambda\rangle = \int_0^a f(r)R_\lambda(r)\frac{dr}{r} = \int_0^a R_\lambda(r)\, dr = \int_0^a \sin\sqrt{\lambda}\ln\frac{r}{a}\, dr.$$

В последнем интеграле сделаем замену

$$\ln\frac{r}{a} = -t \quad\Rightarrow\quad r = a\,\mathrm{e}^{-t} \quad\Rightarrow\quad dr = -a\,\mathrm{e}^{-t}\, dt,$$

в результате чего найдём (проделайте самостоятельно)

$$\langle f, R_\lambda\rangle = a\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\sin\sqrt{\lambda}t\, dt = \frac{a\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}.$$

О т в е т. Окончательное решение задачи (**4.1**) получаем, используя формулы (**4.5**) и (**4.4**):

$$u(r,\varphi) = \frac{Aa}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+\lambda}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\varphi}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\pi/2}\sin\sqrt{\lambda}\ln\frac{r}{a}\,d\lambda = \\ = \frac{2Aa}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mu}{1+\mu^2}\frac{\operatorname{sh}\mu\varphi}{\operatorname{sh}\mu\pi/2}\sin\mu\ln\frac{r}{a}\,d\mu.$$

Задача 5. **Задача о свободных колебаниях полубесконечной натянутой струны.**

У с л о в и е. Полубесконечная струна с закреплённым концом $x = 0$ покоится в прямолинейном состоянии. В момент времени $t = 0$ участку струны $x \in [0, a]$ вблизи закрепленного конца равномерно распределённой поперечной силой придаётся импульс. Изучить движение струны.

П о с т а н о в к а. Движение струны описывается волновым уравнением

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad |u| < \infty, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = p\big(\eta(x) - \eta(x-a)\big) = pf(x). \end{cases} \tag{5.1}$$

Здесь $\eta(\cdot)$ — функция Хевисайда.

Уравнение и граничные условия по x однородны, поэтому задачу будем решать классическим методом Фурье.

Замечание. Решение этой задачи нетрудно построить и методом бегущих волн Даламбера. Однако, стоит её немного усложнить, например, изменив распределение начального импульса, и метод Даламбера станет сложно реализуемым, в то время как метод Фурье по-прежнему будет работать.

Р е ш е н и е. Прежде всего найдём частные решения вида $u(x,t) = X(x)T(t)$, удовлетворяющие уравнению и (однородным) г. у. по x. Уравнение (**5.1**) симметрично относительно переменных, поэтому при разделении переменных для X-составляющей и T-составляющей получаются одинаковые уравнения вида

$$T'' + \lambda T = 0 \tag{5.2}$$

Задача Штурма–Лиувилля нам уже хорошо знакома:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ X(0) = 0, \ |X| < \infty. \end{cases} \tag{5.3}$$

Она имеет непрерывный спектр $\lambda \in (0, \infty)$ и собственные функции

$$X_\lambda(x) = \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Уравнение (**5.2**) имеет такое же тригонометрическое общее решение

$$T_\lambda(t) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}t + C_2 \cos\sqrt{\lambda}t.$$

Сразу воспользуемся первым (однородным) начальным условием, из которого следует $C_2 = 0$.

Таким образом, мы построили искомые частные решения:

$$C_\lambda \sin\sqrt{\lambda}t X_\lambda(x).$$

Полное решение задачи (**5.1**) будем, как обычно, искать в виде непрерывной линейной комбинации частных решений:

$$u(x,t) = \int_0^\infty C_\lambda \sin\sqrt{\lambda}t X_\lambda(x)\, d\lambda. \qquad (\mathbf{5.4})$$

Определим коэффициент C_λ. Для этого подставим решение в указанной форме во второе начальное условие (см. формулу разложение (**1.6**)). Получаем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \int_0^\infty \sqrt{\lambda} C_\lambda X_\lambda(x)\, d\lambda = pf(x) = p\int_0^\infty \frac{\langle f, X_\lambda\rangle}{\pi\sqrt{\lambda}} X_\lambda(x)\, d\lambda.$$

Из равенства интегралов следует формула для коэффициента разложения

$$C_\lambda = p\frac{\langle f, X_\lambda\rangle}{\pi\lambda}. \qquad (\mathbf{5.5})$$

Вычислим скалярное произведение $\langle f, X_\lambda\rangle$. Заметим, что это вычисление повторяет уже проделанное нами в задаче 2, поэтому запишем результат сразу:

$$\langle f, X_\lambda\rangle = \int_0^\infty \big(\eta(x) - \eta(x-a)\big) X_\lambda(x)\, dx = \frac{1-\cos\sqrt{\lambda}a}{\sqrt{\lambda}}.$$

О т в е т. Подставляя найденный коэффициент (**5.5**) в представление (**5.4**), записываем решение

$$u(x,t) = \frac{p}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\sqrt{\lambda}a}{\lambda^{3/2}} \sin\sqrt{\lambda}t \sin\sqrt{\lambda}x\, d\lambda =$$
$$= \frac{2p}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\mu a}{\mu^2} \sin\mu t \sin\mu x\, d\mu.$$

Разберём ещё задачи с использованием цилиндрических функций.

Задача 6. **Задача Коши для уравнения теплопроводности в цилиндрических координатах.**

У с л о в и е. В начальный момент времени $t = 0$ температура однородного пространства распределена следующим образом. Нагрета область в виде бесконечного цилиндра радиуса a, температура в этой части пространства распределена по закону $A(a^2 - r^2)$. Вне цилиндрической «сердцевины» температура равна нулю. Изучить динамику распределения температуры.

П о с т а н о в к а. Из условия ясно, что температура в пространстве будет зависеть только от радиуса r в цилиндрической системе координат: $u = u(r, t)$. Получаем такую постановку:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad r \in \mathbb{R}^+, \\ u\big|_{t=0} = A(a^2 - r^2)\big(1 - \eta(r-a)\big) = Af(r), \quad |u| < \infty. \end{cases} \tag{6.1}$$

Замечание. Задача Коши — это задача во всём пространстве, то есть задача без граничных условий. Если такая задача ставится в цилиндрической или сферической системе координат, то роль г. у. играет условие ограниченности, которое должно выполняться как при $r \to \infty$, так и при $r \to 0$. Таким образом, условия по r в подобных задачах всегда «однородны».

Р е ш е н и е. Построим частные решения вида $u(r, t) = R(r)T(t)$. Разделяя переменные (проделайте), для T-составляющей получаем уравнение первого порядка

$$T' + \lambda T = 0, \tag{6.2}$$

а для радиальной составляющей — задачу Штурма–Лиувилля с уравнением Бесселя порядка ноль:

$$\begin{cases} (rR')' + \lambda rR = 0, \quad r \in \mathbb{R}^+, \\ |R| < \infty. \end{cases} \tag{6.3}$$

Напомним вид общего решения уравнения Бесселя:

$$R(r) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} r) + C_2 N_0(\sqrt{\lambda} r).$$

Здесь J_0 и N_0 — функции Бесселя порядка 0 первого и второго рода соответственно. Функция второго рода неограниченна в нуле. Следовательно, собственные функции задачи (**6.3**) имеют вид

$$R_\lambda(r) = J_0(\sqrt{\lambda} r), \quad \lambda > 0.$$

Непрерывный спектр здесь, как и во всех других задачах, заполняет открытый интервал $\lambda \in (0, \infty)$.

Уравнение (**6.2**) имеет затухающее экспоненциальное решение

$$T_\lambda(t) = C\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}t}\,.$$

Таким образом, мы построили искомые частные решения:

$$C_\lambda\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}t}\,R_\lambda(r).$$

Полное решение задачи (**6.1**) ищем в виде непрерывной линейной комбинации частных решений:

$$u(r,t) = \int_0^\infty C_\lambda\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}t}\,R_\lambda(r)\,d\lambda. \qquad (\mathbf{6.4})$$

Для вычисления коэффициента разложения C_λ используем начальное условие и формулу разложения по собственным функциям задачи (**6.3**). Получаем

$$u\big|_{t=0} = \int_0^\infty C_\lambda R_\lambda(r)\,d\lambda = Af(r) = A\int_0^\infty \frac{\langle f, R_\lambda\rangle}{2} R_\lambda(r)\,d\lambda.$$

Из равенства интегралов следует формула для коэффициента разложения

$$C_\lambda = A\frac{\langle f, R_\lambda\rangle}{2}. \qquad (\mathbf{6.5})$$

Скалярное произведение $\langle f, R_\lambda\rangle$, связанное с ЗШЛ (**6.3**), имеет вид

$$\langle f, R_\lambda\rangle = \int_0^\infty f(r)R_\lambda(r)r\,dr.$$

Вычислим его, используя уравнение и условия задачи (**6.3**), а также свойства $f(r)$: $f' = -2r$, $(rf')' = -4r$. Имеем

$$\begin{aligned}\langle f, R_\lambda\rangle &= \int_0^a fR_\lambda r\,dr \overset{(\mathbf{6.3})}{=\!=} -\frac{1}{\lambda}\int_0^a f(rR_\lambda')'\,dr \overset{(**)}{=\!=} \\ &= -\frac{1}{\lambda}\big(rfR_\lambda' - rf'R_\lambda\big)\big|_0^a - \frac{1}{\lambda}\int_0^a (rf')'R_\lambda dr = -\frac{2a^2R_\lambda(a)}{\lambda} + \\ &+ \frac{4}{\lambda}\int_0^a R_\lambda r\,dr \overset{(\mathbf{6.3})}{=\!=} -\frac{2a^2R_\lambda(a)}{\lambda} - \frac{4}{\lambda^2}\int_0^a (rR_\lambda')'\,dr.\end{aligned}$$

Используя производную функции Бесселя $J_0'(x) = -J_1(x)$, получаем окончательно

$$\langle f, R_\lambda\rangle = \frac{2a}{\lambda}\Big(\frac{2}{\sqrt{\lambda}}J_1(\sqrt{\lambda}a) - aJ_0(\sqrt{\lambda}a)\Big).$$

О т в е т. Найденное скалярное произведение подставляем в (**6.5**), а затем в (**6.4**) и получаем решение

$$u(r,t) = Aa\int_0^\infty \Big(\frac{2}{\sqrt{\lambda}}J_1(\sqrt{\lambda}a) - aJ_0(\sqrt{\lambda}a)\Big)\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}J_0(\sqrt{\lambda}r)\,d\lambda =$$
$$= 2Aa\int_0^\infty \frac{1}{\mu^2}\big(2J_1(\mu a) - \mu a J_0(\mu a)\big)\,\mathrm{e}^{-\mu^2 t}\,J_0(\mu r)\,d\mu.$$

Задача 7. Задача о свободных осесимметричных колебаниях бесконечной мембраны.

У с л о в и е. В начальный момент времени $t = 0$ бесконечная плоская мембрана покоится в недеформированном состоянии. В момент времени $t = 0$ точки кольцевой области $r \in [a, b]$ под действием равномерно распределённой импульсной поперечной силы мгновенно приобретают скорость A. Изучить процесс распространения волн на мембране.

П о с т а н о в к а. Если ввести полярные координаты с началом в центре кольца, то отклонение мембраны от положения равновесия будет зависеть только от радиуса r и времени: $u = u(r,t)$. Постановка задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad r \in \mathbb{R}^+, \\ u\Big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = A\big(\eta(r-a) - \eta(r-b)\big) = Af(r), \quad |u| < \infty. \end{cases} \tag{7.1}$$

Таким образом, мы здесь рассматриваем осесимметричную задачу Коши для двумерного волнового уравнения.

Р е ш е н и е. Найдём частные решения вида $u(r,t) = R(r)T(t)$, удовлетворяющие условию ограниченности на всей плоскости. Разделяя переменные, для T-составляющей получаем уравнение тригонометрических функций

$$T'' + \lambda T = 0, \tag{7.2}$$

а для радиальной составляющей — задачу Штурма–Лиувилля, вполне аналогичную рассмотренной в предыдущей задаче:

$$\begin{cases} (rR')' + \lambda r R = 0, \quad r \in \mathbb{R}^+, \\ |R| < \infty. \end{cases} \tag{7.3}$$

Как мы уже знаем, эта задача имеет непрерывный спектр $\lambda \in (0, \infty)$ и собственные функции

$$R_\lambda(r) = J_0(\sqrt{\lambda}r).$$

Обратимся к уравнению для T-составляющей (**7.2**). Его общее решение есть

$$T_\lambda(t) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}t + C_2 \cos\sqrt{\lambda}t,$$

причём из первого начального условия сразу следует $C_2 = 0$.

Следовательно, условиям задачи удовлетворяют частные решения вида

$$C_\lambda \sin\sqrt{\lambda}t R_\lambda(r).$$

Полное решение задачи (**7.1**) будем строить в виде непрерывной линейной комбинации частных решений

$$u(r,t) = \int_0^\infty C_\lambda \sin\sqrt{\lambda}t R_\lambda(r)\,d\lambda. \tag{7.4}$$

Подставим эту форму во второе начальное условия и получим равенство для нахождения коэффициента разложения C_λ. Формулу разложения по собственным функциям задачи (**7.3**) мы уже использовали в предыдущей задаче. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \int_0^\infty \sqrt{\lambda} C_\lambda R_\lambda(r)\,d\lambda = Af(r) = A\int_0^\infty \frac{\langle f, R_\lambda\rangle}{2} R_\lambda(r)\,d\lambda.$$

Отсюда получаем формулу для коэффициента разложения

$$C_\lambda = A\frac{\langle f, R_\lambda\rangle}{2\sqrt{\lambda}}. \tag{7.5}$$

Остаётся вычислить скалярное произведение $\langle f, R_\lambda\rangle$. С учётом вида функции $f(r)$ имеем

$$\langle f, R_\lambda\rangle = \int_0^\infty \big(\eta(r-a) - \eta(r-b)\big) R_\lambda r\,dr = \int_a^b R_\lambda r\,dr \overset{(7.3)}{=\!=}$$
$$= -\frac{1}{\lambda}\int_0^a (rR_\lambda')'\,dr = -\frac{1}{\lambda} rR_\lambda'\Big|_a^b = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\big(bJ_0(\sqrt{\lambda}b) - aJ_0(\sqrt{\lambda}a)\big).$$

О т в е т. Наконец, подставляем найденное скалярное произведение в (**7.5**), затем в (**7.4**) и получаем окончательный ответ

$$u(r,t) = \frac{A}{2}\int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\big(bJ_0(\sqrt{\lambda}b) - aJ_0(\sqrt{\lambda}a)\big)\sin\sqrt{\lambda}t J_0(\sqrt{\lambda}r)\,d\lambda =$$
$$= A\int_0^\infty \frac{1}{\mu}\big(bJ_0(\mu b) - aJ_0(\mu a)\big)\sin\mu t J_0(\mu r)\,d\mu.$$

Задачи для самостоятельного решения

В заключение приведём небольшой список задач, которые читатель может решить самостоятельно, закрепив полученные навыки. Все задачи из списка можно решить, используя классический вариант метода Фурье, выделяя, при необходимости, частное решение.

1. На оси бесконечного заземлённого цилиндра радиуса a помещен точечный заряд q. Найти распределения электрического потенциала $u(r, z)$. Указание: использовать формулу
$$\int_0^\infty \frac{\cos \mu z}{\sqrt{a^2 + z^2}} dz = K_0(\mu a),$$
где K_0 — модифицированная функция Бесселя второго рода порядка 0.

2. Основание полубесконечного цилиндра радиуса a имеет температуру $u = 1$, на боковой поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры с коэффициентом теплообмена α. Найти распределение температуры $u(r, z)$; сосчитать полный тепловой поток через основание.

3. В бесконечной пластине толщины h проделано цилиндрическое отверстие радиуса a. Стенка отверстия и верхняя грань пластины имеют температуру $u = 1$, нижняя поверхность поддерживается при нулевой температуре. Найти распределение температуры $u(r, z)$.

4. Найти распределение электрического потенциала внутри бесконечного цилиндриа радиуса a при следующем распределении потенциала на цилиндрической поверхности: $u = V_1$ при $z < 0$ и $u = V_2$ при $z > 0$.

5. Идеальная жидкость втекает в полуплоскость через отрезок $x \in [a, b]$ и вытекает через отрезок $x \in [-b, -a]$; остальная часть границы непроницаема. Скорость жидкости на открытых участках перпендикулярна границе и равна по модулю V_0. Найти распределение потенциала скорости $u(x, y)$.

6. Участок $x \in [-a, a]$ нижней грани бесконечной пластины толщины h имеет температуру $u = 1$, остальная часть нижней поверхности и вся верхняя — нулевую температуру. Найти распределение температуры $u(x, y)$; сосчитать полный тепловой поток через нагретый участок.

7. В начальный момент времени температура неограниченного пространства нулевая везде, за исключением цилиндрической области $(r, z) \in [0, a] \times \mathbb{R}$, где она равна равна T_0. Найти распределение температуры $u(r, t)$ в последующие моменты времени.

8. Начальная форма полубесконечной струны задана функцией $\delta f(x)$, где

$$f(x) = x\eta(x) - 2(x-a)\eta(x-a) + (x-2a)\eta(x-2a),$$

$\eta(\cdot)$ — функция Хевисайда. Конец струны закреплен. Найти закон колебаний.

9. Область на плоскости — угол с раствором $60°$; на лучах, ограничивающих угол, потенциал задан следующим образом: в точках, находящихся на расстоянии $r \in [a, b]$ от вершины угла, $u = 1$, в остальных точках границы $u = 0$. Найти потенциал внутри угла.

Список литературы

[1] Баденко Г. В., Мешков В. Р. Математическая физика: метод приведения к однородной задаче: электронное учебное пособие. — СПб.: СПбПУ. — 2022. — 23 с. Интернет-ресурс: https://elib.spbstu.ru/dl/5/tr/2022/tr22-84.pdf.

[2] Бабич В. М., Григорьева Н. С. Ортогональные разложения и метод Фурье: учебное пособие. — Л.: Изд-во Ленинградского ун-та. — 1983. — 240 с.

[3] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: учебник для вузов. — М.: Изд-во Московского гос. ун-та. —- 2004. -— 798 с.

[4] Голоскоков Д. П. Курс математической физики с использованием пакета Maple. — СПб.: Изд-во «Лань». — 2015. —- 576 с.

[5] Омельченко А. В. Методы интегральных преобразований в задачах математической физики. — М.: Изд-во МЦНМО. — 2010. — 184 с.

[6] Суслова И. Б.; Баденко Г. В. Математическая физика: онлайн-курс. — Санкт-Петербург, 2016. — Интернет-ресурс: https://openedu.ru/course/spbstu/MATHPH/.

[7] Жукова-Малицкая Г. А., Кузьмин Ю. Н. Математическая физика: учебное пособие. СПб: Изд-во Политехн. ун-та. — 2010. — 116 с.

[8] Баденко В. Л., Баденко Г. В. Специальные разделы высшей математики. Математическая физика: учебное пособие. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. — 2014. — Интернет-ресурс: https://elib.spbstu.ru/dl/2/3890.pdf.