

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО
ВОЕННАЯ АКАДЕМИЯ СВЯЗИ**

Е. Н. Боборыкина М. А. Соколов

ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
2023**

Аннотация

УДК 537.2

Боборыкина Е. Н. Элементы электростатики: учеб. пособие /
Е. Н. Боборыкина, М. А. Соколов. – СПб., 2023. – 41 с.

Целью настоящего пособия является изложение основных определений и законов электростатики в вакууме, необходимых для решения простых задач. Первая (теоретическая) часть пособия примерно соответствует материалу двух лекций. Во второй части приводятся несколько типичных задач с подробными решениями.

Пособие предназначено в первую очередь для студентов тех специальностей дневной, вечерней и заочной форм обучения, лекционный курс физики которых включает не более 72 академических часов.

Ил. 27. Библиогр.: 4 назв.

Содержание

1	Введение	1
2	Основные теоретические сведения	2
2.1	Элементарные факты	2
2.2	Электрическое поле и силовые линии	4
2.3	Непрерывное распределение зарядов	5
2.4	Электростатическая теорема Гаусса. Примеры ее применения	6
2.4.1	Теорема Гаусса в терминах силовых линий	6
2.4.2	Строгая формулировка	9
2.4.3	Электрическое поле равномерно заряженной нити	10
2.4.4	Дифференциальная форма теоремы Гаусса	11
2.5	Потенциал электростатического поля	12
2.5.1	Консервативность электростатического поля	12
2.5.2	Потенциал электрического поля	15
2.5.3	Потенциал поля точечного заряда	15
2.5.4	Принцип суперпозиции потенциалов	16
2.5.5	Эквипотенциальные поверхности	17
2.5.6	Связь потенциала и напряженности электростатического поля	18
2.5.7	Уравнения Пуассона и Лапласа. Примеры распределения потенциала	19

2.5.8	Энергия системы зарядов	22
2.6	Проводники в электростатическом поле	23
2.7	Емкость. Конденсаторы	25
2.8	Диэлектрики в электрическом поле. Диэлектрическая проницаемость среды	27
3	Задачи	30
3.1	Закон Кулона. Неустойчивость системы зарядов	30
3.2	Малые колебания в электрическом поле	31
3.3	Сила действующая на диполь в неоднородном поле	32
3.4	Силовые линии электрического поля	33
3.5	Электрическое поле на оси тонкого кольца	35
3.6	Электрическое поле на оси тонкого диска	37
3.7	Электрическое поле плоскости с вырезанным круглым отверстием	38
3.8	Плотность индуцированного заряда	39

1 Введение

Систематическое изучение электрических явлений началось только в XVI - XVII веках. Английский медик и физик Уильям Гилберт объяснил (ок. 1600), почему янтарь, если его потереть, притягивает легкие предметы (пушинки, кусочки ткани). В его интерпретации трение устраняет из тела "электрическую жидкость" или "дух" (spirit). Отто фон Герике (середина XVII века) построил первый электростатический генератор, использующий трение. Стефан Грей обнаружил, что электричество появляется не только с помощью трения, но и может быть передано от тела к телу по проволоке (1729). Он также открыл, что заряд на наэлектризованном теле располагается на поверхности. В течении XVIII века, вплоть до 1770-х годов, многие исследователи внесли свой вклад в изучение электрических явлений. Среди них Шарль Дюфе (открыл существование двух видов электричества), Бенджамин Франклин (постулировал существование в телах равного количества положительного (+) и отрицательного (-) электричества, причем электризация сводится к удалению из тел части (+) или (-) электричества. В процессе электризации начальная сумма (+) и (-) электричества остается равной нулю).

Итак, к моменту публикации Шарлем Кулоном закона взаимодействия зарядов (1788) было известно, что (в принятой сейчас терминологии)

- все тела могут электризоваться тем или иным способом. Электризация сводится к обмену зарядами между телами;
- существуют два вида зарядов;
- заряд сохраняется;
- существуют изоляторы, в которых заряд не может свободно перемещаться, и проводники в которых может;
- заряды одного знака отталкиваются, разных знаков - притягиваются.

Настоящее пособие посвящено **электростатике в вакууме** - малой части того раздела физики, который называется "Электродинамикой". В электростатике не рассматривается направленное движение зарядов, т.е. электрический ток. Например, *процесс* перераспределения зарядов при соприкосновении двух тел электростатикой не изучается, а важным является только *начальное* и *конечное* распределение зарядов в этих телах. При этом хаотическое тепловое движение заряженных частиц не учитывается, поскольку оно не изменяет количество зарядов в любом физически малом объеме тела.

В последующем, для краткости, термин "электрическое" будет заменять термин "электростатическое".

2 Основные теоретические сведения

2.1 Элементарные факты

В этом разделе будет уточнен и расширен список открытий, перечисленных во Введении.

Фундаментальными объектами изучения в электростатике являются **точечные заряды** и **электростатические поля**. Точечный заряд является моделью реальной частицы, переносящей электрический заряд, размеры которой меньше, чем 10^{-15} м. Перечислим некоторые свойства зарядов и дадим несколько определений.

- В природе существуют электрические заряды двух видов: положительные и отрицательные. Заряды одного знака - отталкиваются, разных знаков - притягиваются.
- Электрический заряд **дискретен** или **квантован**. Это означает, что существует наименьший элементарный заряд e , а все остальные заряды Q являются его кратными ($Q = ne, n \in Z$). В единицах системы СИ величина элементарного заряда $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Наименьшим¹ экспериментально обнаруженным зарядом обладают электроны (отрицательным) и протоны (положительным). Протоны (вместе с нейтронами) входят в состав атомных ядер.
- Полным зарядом физической системы называется алгебраическая сумма всех элементарных зарядов этой системы. Закон **сохранения заряда** гласит: *полный заряд любой замкнутой системы не изменяется со временем.*
- Сила взаимодействия между двумя точечными зарядами подчиняется закону Кулона

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{F}_{12} — сила, действующая на второй заряд со стороны первого, \mathbf{r}_{12} — вектор, начинающийся в точке, где находится первый заряд, и заканчивающийся в точке, где располагается второй. Модуль вектора $r_{12} = |\mathbf{r}_{12}|$ равен расстоянию между частицами. Далее, в формуле (2.1) q_1, q_2 — величины зарядов, k — числовой коэффициент, равный (в системе единиц СИ) для вакуума $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф. Постоянная $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м называется диэлектрической постоянной. Заряды q_1, q_2 являются величинами алгебраическими. Это означает, что $q_1 q_2 > 0$, если заряды одного знака, и $q_1 q_2 < 0$, если заряды разных знаков. В первом случае векторы \mathbf{F}_{12} и \mathbf{r}_{12} направлены в одну сторону, во втором — в противоположные. В скалярной форме закон Кулона (2.1) имеет вид

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (2.2)$$

¹В физике элементарных частиц считается, что все сильно взаимодействующие частицы (адроны) состоят из кварков, заряд которых составляет $\pm e/3, \pm 2e/3$. В свободном состоянии кварки не обнаружены.

где F - сила взаимодействия двух зарядов, r - расстояние между ними.

2.2 Электрическое поле и силовые линии

В физике полагают, что электрические заряды, находящиеся на некотором расстоянии друг на друга, взаимодействуют посредством силового **электрического поля**. Любой заряд создает в окружающем пространстве такое поле, а другие заряды "чувствуют" это поле и "откликаются" на него в соответствии с законом Кулона (2.1).

Силовой характеристикой электрического поля является его **напряженность**. *Напряженностью в данной точке пространства* (на Рис. 1 это точка А) *называется вектор \mathbf{E} , длина которого численно равна силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в эту точку*. На электрический заряд величины q в поле с напряженностью \mathbf{E} будет действовать сила

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (2.3)$$

Из закона Кулона немедленно следует, что напряженность электрического поля точечного заряда дается формулой

$$\mathbf{E} = k \frac{q}{r^3} \mathbf{r}. \quad (2.4)$$

Здесь заряд, создающий поле, имеет величину q и \mathbf{r} есть вектор, направленный от q в точку наблюдения. Напряженность в системе СИ измеряется в В/м.

Характер электрического поля в пространстве удобно визуализировать графически **силовыми линиями**. *Линия называется силовой, если векторы напряженности электрического поля касательны к этим линиям в любых их точках* (см. Рис. 1).

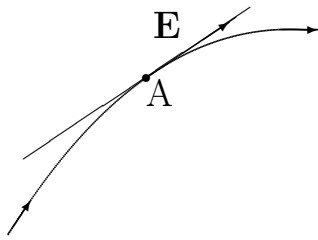


Рис. 1

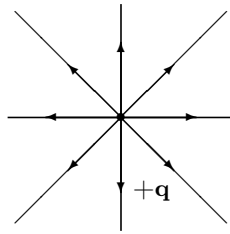


Рис. 2

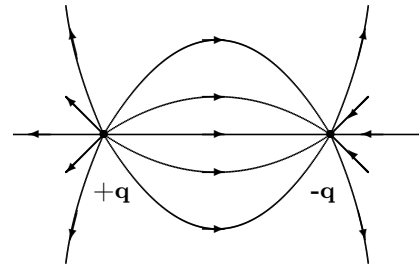


Рис. 3

Силовые линии обладают следующими важными свойствами:

- они начинаются и заканчиваются в точках, где расположены заряды, или одним концом уходят в бесконечность. Это свойство имеет важную физическую интерпретацию: *единственным источником электрического поля являются заряды*;
- силовые линии не пересекаются.

Силовые линии проходят тем гуще, чем сильнее электрическое поле в данной области (т.е. где больше его напряженность). На Рис. 2 и 3 приведены примеры силовых линий электрических полей, порожденных положительным зарядом и электрическим диполем (системой двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов).

2.3 Непрерывное распределение зарядов

При электризации тел происходит перераспределение огромного числа зарядов, сравнимого с количеством атомов в этих телах. Поэтому бывает удобным отвлечься от точечности зарядов и характеризовать их распределение внутри тел **объемной плотностью** (своего рода плотностью "электрической жидкости" Уильяма Гилберта). **Средняя объемная плотность** заряда в теле равна

$$\langle \rho \rangle = \frac{Q}{V}, \quad (2.5)$$

где Q - полный заряд тела, V - его объем. Иногда бывает необходимым знать точное распределение зарядов внутри тела. Такое распределение дается **объемной плотностью** $\rho = \rho(\mathbf{r})$, зависящей от координат

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}. \quad (2.6)$$

В формуле (2.6) ΔV - объем, содержащий точку $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$, Δq - заряд, заключенный в этом объеме. Предел берется таким образом, что точка \mathbf{r} все время остается внутри объема ΔV . Объемная плотность зарядов в системе СИ измеряется в Кл/м³. По известной плотности можно найти полный заряд тела

$$Q = \iiint_V \rho(\mathbf{r}) dV \equiv \int_V \rho(\mathbf{r}) dV, \quad \text{где } dV = dx dy dz. \quad (2.7)$$

Интегрирование в формуле (2.7) производится по всему объему тела V .

Иногда заряд распределен тонким слоем вблизи поверхности тела или вдоль тонкой проволоки. В этом случае говорят об **поверхностной плотности** σ и **линейной плотности** λ заряда, соответственно. Они определяются по аналогии с объемной плотностью

$$\sigma(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}, \quad \lambda(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}, \quad (2.8)$$

где ΔS (Δl) - площадь области на поверхности (длина отрезка кривой), содержащей точку \mathbf{r} , Δq - заряд, заключенный в этой области (отрезке кривой). Пределы берутся таким образом, что точка \mathbf{r} все время остается внутри площадки ΔS или элемента длины Δl . Поверхностная и линейная плотности зарядов в системе СИ измеряется в Кл/м² и Кл/м, соответственно.

2.4 Электростатическая теорема Гаусса. Примеры ее применения

2.4.1 Теорема Гаусса в терминах силовых линий

Электростатическая теорема Гаусса связывает электрический заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности с потоком электрического поля через эту поверхность. Понятие потока векторного поля имеет наглядную

интерпретацию в терминах силовых линий. Представим себе положительный заряд q окруженный сферой S (см. Рис 4). Все силовые линии, исходящие из этого заряда, пересекут сферу S и расходящимися лучами уйдут в бесконечность. Договоримся, что заряд в 1 Кл порождает $N \gg 1$ силовых линий. Тогда заряд в q Кл породит $n = qN$ силовых линий (положительный заряд порождает исходящие линии, отрицательный - входящие). Все эти силовые линии пересекут сферу по одному разу.

Пусть теперь замкнутая поверхность S' более сложной формы окружает пространственную область V' , в которой расположены два заряда разных знаков $q_1 > 0, q_2 < 0$ и разной величины (см. Рис 5). В этом случае силовые линии, исходящие из заряда q_1 , могут (направления силовых линий на Рис. 5 не указаны)

- не пересекая поверхности, закончиться на заряде q_2 (линия 1);
- закончиться на заряде q_2 (линия 2) дважды пересекая поверхность S' , сначала выходя в окружающее пространство, затем возвращаясь внутрь;
- уходить в бесконечность пересекая S' один раз (линия 3) или три раза (линия 4);
- заканчиваться на заряде q_2 приходя извне (линия 5);
- приходить извне, пересечь область V' и вернуться в окружающее пространство (линия 6).

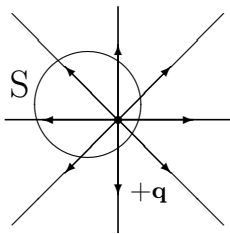


Рис. 4

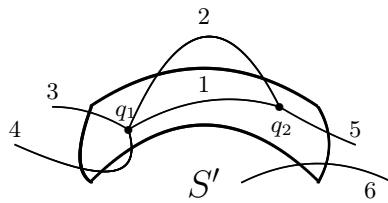


Рис. 5

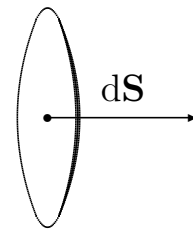


Рис. 6

Из приведенного примера (хотя он не исчерпывает всех возможностей) легко заметить, что

- если силовая линия "связывает" заряды q_1 и q_2 , то она либо вообще не пересекает границу области V' , либо пересекает ее четное число раз;

- если силовая линия начинается на заряде q_1 но не заканчивается на заряде q_2 , или заканчивается на заряде q_2 не начавшись на заряде q_1 , то она пересекает поверхность S' нечетное число раз;
- если силовая линия начинается вне V' и заканчивается также вне этой области, то она пересекает границу S' четное число раз.

Рассмотренный простой пример нетрудно обобщить на систему произвольного числа зарядов, окруженную замкнутой поверхностью (попробуйте это сделать в качестве упражнения).

Определим **поток электрического поля** через замкнутую поверхность как величину, пропорциональную разности количества силовых линий n^+ покидающих область, ограниченную этой поверхностью и количества силовых линий n^- входящих в эту область

$$\Phi = \Phi_0(n^+ - n^-), \quad (2.9)$$

где Φ_0 - некоторый коэффициент.

Приведенное определение корректно, поскольку каждая силовая линия, начавшаяся внутри объема и покинувшая объем (независимо от количества пересечений его границы) будет давать вклад $+1$ в n^+ . В случае обратного направления силовой линии ее вклад в поток будет $+1$ в n^- . В случаях, когда силовая линия имеет начало и конец по одну сторону замкнутой поверхности, ее вклад в поток будет нулевым.

Учитывая соглашение о количестве силовых qN линий, порожденных положительным зарядом или поглощенных отрицательным, легко видеть, что поток электрического поля через замкнутую поверхность будет пропорционален полному заряду Q , находящемуся внутри поверхности

$$\Phi = \Phi_0(n^+ - n^-) = \Phi_0 N \sum_i q_i \sim Q. \quad (2.10)$$

В формуле (2.10) суммирование идет по всем зарядам q_i , заключенным внутри поверхности S' .

По сути это и есть теорема Гаусса, связывающая поток электрического поля через замкнутую поверхность с полным зарядом, находящимся внутри. Чтобы сформулировать ее строго, необходимо дать определение потока векторного поля в математических терминах.

2.4.2 Строгая формулировка

Рассмотрим бесконечно малую площадку dS , помещенную в электрическое поле. Такую площадку называют ориентированной и пишут $d\mathbf{S}$, если для нее выбран вектор нормали $d\mathbf{n}$. В этом случае $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$ (Рис. 6).

Пусть силовые линии электрического поля перпендикулярны площадке (Рис. 7, слева). Поскольку густота силовых линий пропорциональна величине напряженности E поля, естественно определить поток поля как

$$d\Phi = E dS.$$

Если рассматриваемая площадка dS не перпендикулярна силовым линиям, то количество пересекающих ее линий уменьшится (Рис. 7, справа)

$$d\Phi = E dS \cos \alpha.$$

Полученное выражение можно принять за строгое определение потока, поскольку количество линий, пересекающих площадку, зависит от E , площади dS и ориентации площадки, по отношению к направлению поля \mathbf{E} .

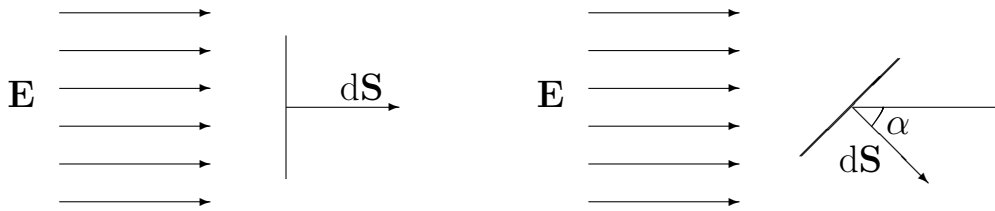


Рис. 7

Принимая во внимание сказанное выше и определение скалярного произведения векторов, приходим к формуле

$$d\Phi = (\mathbf{E}, d\mathbf{S}), \quad (2.11)$$

компактно выражающей поток электрического поля. Поток через любую конечную поверхность Σ , как замкнутую, так и не замкнутую, дается интегралом

$$\Phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}). \quad (2.12)$$

В случае замкнутой поверхности пишут символ \oint вместо \int .

Сформулируем электростатическую теорему Гаусса: *поток электрического поля через любую замкнутую поверхность равен (в вакууме) полному заряду в области, ограниченной этой поверхностью, деленному на диэлектрическую постоянную*

$$\Phi_{\Sigma} = \oint_{\Sigma} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \frac{Q_{\Sigma}}{\varepsilon_0}. \quad (2.13)$$

Мы не будем приводить строго доказательства этой теоремы (такое доказательство можно найти почти в любом курсе общей физики), а сошлемся на рассуждения, которые нас привели к формуле (2.10).

Электростатическая теорема Гаусса чрезвычайно важна для качественных рассуждений, однако на практике с ее помощью можно рассчитать только поля созданные телами, обладающими высокой степенью симметрии. Мы приведем в качестве примера расчет поля созданного равномерно заряженной нитью.

2.4.3 Электрическое поле равномерно заряженной нити

Рассмотрим бесконечную прямую нить с линейной плотностью заряда τ . Построим мысленно цилиндр, ось которого совпадает с нитью (на Рис. 8 представлена вертикальная и горизонтальная проекции цилиндра), основание имеет радиус R , а длина образующей равна h .

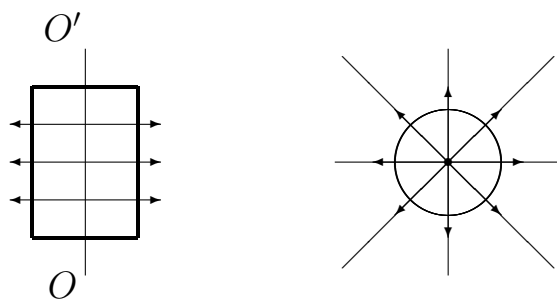


Рис. 8

Из соображений симметрии ясно, что векторы напряженности электростатического поля, создаваемого нитью, будут направлены вдоль лучей, исходящих от нити перпендикулярно ей самой. При этом модули векторов \mathbf{E} будет зависеть только от расстояния до нити. Эти свойства означают, что

силовые линии не будут пересекать основания цилиндра (т.е. поток электрического поля через основания будет равен нулю), а поток через боковую поверхность $S_{\text{бок}}$ равен

$$\Phi_{\text{бок}} = \int_{\text{бок}} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = E \int_{\text{бок}} dS = ES_{\text{бок}} = 2\pi RhE = \frac{\tau h}{\varepsilon_0},$$

где τh - полный заряд заключенный внутри цилиндра. В приведенной цепочке равенств использовалась перпендикулярность векторов \mathbf{E} и $d\mathbf{S}$. Последнее равенство есть следствие теоремы Гаусса (2.13). Выражая из полученной формулы E , приходим к формуле

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}. \quad (2.14)$$

С помощью теоремы Гаусса нетрудно найти напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad (2.15)$$

где σ - поверхностная плотность зарядов. Напряженность \mathbf{E} одинакова во всех точках пространства, а силовые линии представляют собой прямые, перпендикулярные плоскости. Такое поле называется **однородным**.

2.4.4 Дифференциальная форма теоремы Гаусса

Для вывода дифференциальной формы теоремы Гаусса (2.13) применим формулу Гаусса - Остроградского, связывающую поток векторного поля через замкнутую поверхность с плотностью источников этого поля (в нашем случае электрического поля с плотностью заряда $\rho(x, y, z)$)

$$\oint_{\Sigma} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \int_{V_{\Sigma}} \text{div } \mathbf{E} dV. \quad (2.16)$$

В формуле (2.16) используется **оператор дивергенции**, который определяется формулой

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (2.17)$$

где (E_x, E_y, E_z) - компоненты электрического поля \mathbf{E} , являющиеся функциями координат. По смыслу $\operatorname{div} \mathbf{E}$ есть поток поля \mathbf{E} через бесконечно малую замкнутую поверхность, окружающую точку с координатами (x, y, z) . Строгое определение

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Sigma_{\Delta V}} (\mathbf{E}, d\mathbf{S})}{\Delta V}.$$

При непрерывном распределении зарядов в пространстве имеем из теоремы Гаусса, формул (2.7) и (2.16)

$$\oint_{\Sigma} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \int_{V_{\Sigma}} \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \varepsilon_0^{-1} \int_{V_{\Sigma}} \rho(x, y, z) dV.$$

Далее, из последнего равенства следует

$$\int_{V_{\Sigma}} (\operatorname{div} \mathbf{E} - \varepsilon_0^{-1} \rho) dV = 0.$$

С учетом произвольности выбора поверхности Σ и, следовательно, объема V_{Σ} , ограниченного этой поверхностью, подинтегральное выражение в полученной формуле равно нулю

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.18)$$

Уравнение (2.18) является дифференциальной (или локальной) формой электостатической теоремы Гаусса. Если в нашем распоряжении есть электростатическое поле, заданное как функция координат $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$, то, вычислив дивергенцию $\operatorname{div} \mathbf{E}$, мы сможем сказать, в какой точке с координатами (x, y, z) есть электрический заряд ($\rho(x, y, z) \neq 0$), а в какой - нет ($\rho(x, y, z) = 0$).

2.5 Потенциал электростатического поля

2.5.1 Консервативность электростатического поля

Напомним, что силовое векторное поле называется **потенциальным** (или **консервативным**) если работа его сил по любому замкнутому контуру равна нулю. Математически условие консервативности поля имеет

вид

$$\oint_{\gamma} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = 0, \quad (2.19)$$

где интегрирование ведется по произвольному контуру γ , расположенному в области действия поля. С учетом формулы (2.3), связывающей силу, действующую на заряд q в электрическом поле с напряженностью этого поля $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, условие консервативности запишется в форме

$$\oint_{\gamma} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0. \quad (2.20)$$

Условие консервативности можно представить в эквивалентной (2.20) форме. Отметим в пространстве две любые точки: (a) и (b). Соединим эти точки двумя произвольными кривыми. Полученную замкнутую линию можно рассматривать как контур γ . Равная нулю работа электрических сил по переносу заряда q вдоль этого контура (маршрут указан на Рис.9) определена формулой (2.19). Представим контур γ как объединение двух частей: γ_{ab} - нижняя ветвь, и γ_{ba} - верхняя ветвь. Формулу (2.19) перепишем в виде

$$\oint_{\gamma} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = \int_{\gamma_{ab}} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) + \int_{\gamma_{ba}} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = \int_{\gamma_{ab,u}} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) - \int_{\gamma_{ab,l}} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = 0,$$

откуда

$$\int_{\gamma_{ab,u}} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = \int_{\gamma_{ab,l}} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}).$$

В левой части полученного соотношения перенос заряда от точки (a) к точке (b) происходит по верхней ветви $\gamma_{ab,u}$, в правой части в этом же направлении - по нижней ветви $\gamma_{ab,l}$.

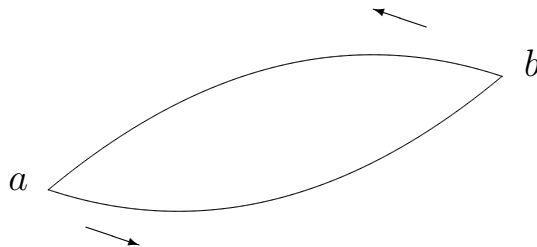


Рис. 9

Таким образом нами показано, что критерий консервативности электрического поля можно сформулировать по-другому: *электрическое поле консервативно, если работа его сил по переносу заряда между двумя произвольными точками не зависит от пути переноса.*

Осталось доказать, что электростатическое поле консервативно. Докажем сначала консервативность поля, создаваемого точечным зарядом q .

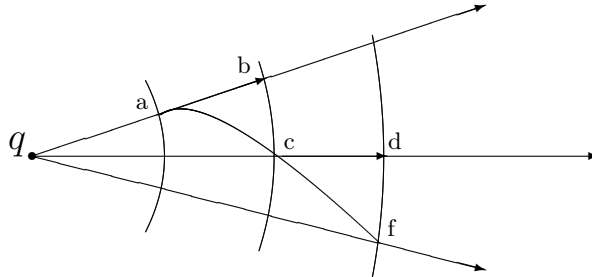


Рис. 10

Для простоты рассмотрим перемещение этим полем "пробного" заряда δq в плоскости по траектории точки acf . На Рис. 10 показаны силовые линии, исходящие лучами из заряда и проходящие через точки a , c , и f . Проведем через эти точки окружности. Заменяем траекторию acf другим путем, включающим перемещение вдоль луча ab , по дуге bc , вдоль другого луча cd и, наконец, по дуге df . Очевидно, что работа электрического поля совершается только при перемещении вдоль лучей ab и cd . Увеличив количество окружностей между двумя крайними на Рис. 10 и повторив наше построение, получим новый путь, состоящий из большего количества звеньев (прямых участков вдоль лучей и дуг окружностей). При этом суммарная длина прямолинейных участков L в обоих случаях будет одинаковой и равной разности радиусов окружностей, которым принадлежат точки a и f : $L = R_f - R_a$.

Если мы будем увеличивать количество окружностей в нашем построении, то получаемый путь будет иметь все больше звеньев и лучше приближать исходную траекторию при неизменном результате: работа поля происходит только на прямолинейных участках, расположенных на лучах. Это рассуждение можно повторить для любой траектории, соединяющей точки a и f . Таким образом, *поле, создаваемое точечным зарядом консервативно.* Поскольку все электрические поля порождаются зарядами (воз-

можно очень большим их числом), а суперпозиция консервативных полей есть консервативное поле, то доказано, что любое электрическое поле консервативно.

2.5.2 Потенциал электрического поля

Из консервативности электрического поля следует, что каждой его точке можно сопоставить число ϕ , называемое **потенциалом**, таким образом, что интеграл

$$\int_{(1)\gamma}^{(2)} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -(\phi_2 - \phi_1) \quad (2.21)$$

равен разности потенциалов ϕ_1, ϕ_2 в начальной и конечной точках ((1) и (2), соответственно) независимо от пути интегрирования γ . Вычисление работы сил поля по переносу заряда из одной точки в другую сводится к вычислению разности потенциалов $-(\phi_2 - \phi_1)$ начальной и конечной точек и умножения этой разности на величину заряда

$$A_{12} = \int_{(1)\gamma}^{(2)} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = -q(\phi_2 - \phi_1) = -q\Delta\phi. \quad (2.22)$$

В системе единиц СИ потенциал измеряется в вольтах (В). Произведение заряда на потенциал $q\phi$ измеряется в единицах энергии - джоулях.

2.5.3 Потенциал поля точечного заряда

Поместим точечный заряд величины q в начало координат. Напряженность электростатического поля, создаваемого таким зарядом, дается формулой (2.4)

$$\mathbf{E} = k \frac{q}{r^3} \mathbf{r}.$$

Возьмем две точки на луче, выходящем из начала координат (например, на оси OX), с расстояниями до начала r_1, r_2 . Используя формулу (2.21)



Рис. 11

и тот факт, что перемещение идет вдоль оси, получаем

$$-(\phi_2 - \phi_1) = \int_{r_1}^{r_2} E(x) dx = kq \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right).$$

Из последней формулы следует, что в качестве потенциала точечного заряда необходимо взять

$$\phi(\mathbf{r}) = k \frac{q}{r} + const, \quad (2.23)$$

где $r = |\mathbf{r}|$. Постоянную удобно выбрать так, чтобы формула имела простой вид. В нашем случае естественно положить $const = 0$. Этот выбор соответствует утверждению, что в бесконечно далекой точке потенциал равен нулю. Вообще, *если рассматривается система зарядов занимающая конечный объем, то, как правило, полагают*

$$\phi(\infty) = 0.$$

2.5.4 Принцип суперпозиции потенциалов

Свойство аддитивности потенциала или, эквивалентно, принцип суперпозиции потенциалов, заключается в следующем. Если в некоторой области пространства действует несколько электростатических полей, потенциалы которых в этой области $\phi_i = \phi_i(\mathbf{r})$, то результирующий потенциал находится по формуле

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_i \phi_i(\mathbf{r}). \quad (2.24)$$

Если речь идет о полях, порожденных точечными зарядами, формула (2.24) принимает вид

$$\phi(\mathbf{r}) = k \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \quad (2.25)$$

где \mathbf{r}_i - радиус-векторы точек расположения зарядов, \mathbf{r} - радиус-вектор точки наблюдения.

2.5.5 Эквипотенциальные поверхности

Пространственные поверхности, все точки которых обладают одинаковым потенциалом, называются **эквипотенциальными**. Рассмотрим две

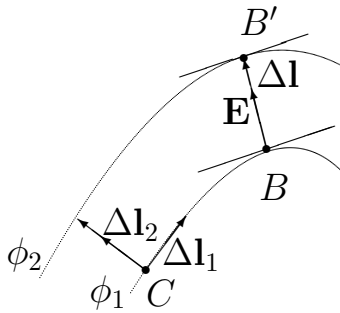


Рис. 12

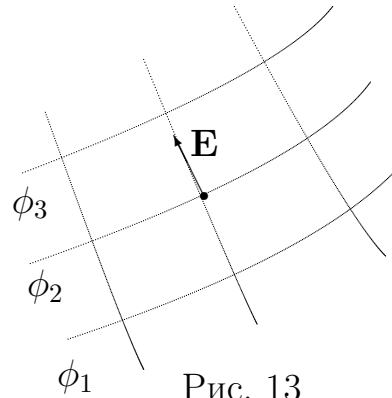


Рис. 13

близкие эквипотенциальные поверхности с потенциалами ϕ_1 и ϕ_2 (на Рис. 12 они изображены кривыми линиями). Выберем на первой эквипотенциальной поверхности произвольную точку C . Смещение заряженной частицы из этой точки **вдоль** поверхности (вектор $\Delta \mathbf{l}_1$) не сопровождается работой электрического поля потому, что изменение потенциала равно нулю $\Delta \phi = 0 = A/q = (\mathbf{E}, \Delta \mathbf{l}_1)$. При ненулевых векторах \mathbf{E} и $\Delta \mathbf{l}_1$ такое равенство может выполняться только в том случае, когда они взаимно перпендикулярны $\mathbf{E} \perp \Delta \mathbf{l}_1$. Следовательно, вектор напряженности электрического поля в точке A направлен вдоль вектора $\Delta \mathbf{l}_2$, **перпендикулярного** эквипотенциальной поверхности. Поскольку подобное рассуждение можно провести для любой точки эквипотенциальной поверхности, заключаем, что *вектор напряженности электрического поля в любой точке перпендикулярен эквипотенциальной поверхности, проведенной через эту точку*. Обобщая это наблюдение, приходим к следующему утверждению: *система силовых линий электрического поля взаимно перпендикулярна с системой его эквипотенциальных поверхностей* (Рис. 13).

При заданном потенциале $\phi_0 = const$, соответствующая эквипотенциальная поверхность определяется уравнением

$$\phi(x, y, z) = \phi_0. \quad (2.26)$$

При перемещении заряда по эквипотенциальной поверхности не совершается работы. Этот факт мы использовали при доказательстве консервативности электрического поля.

Вернемся к Рис. 12. Пусть электрическое поле переместило единичный положительный заряд вдоль вектора напряженности \mathbf{E} из точки B , расположенной на первой эквипотенциальной поверхности, в точку B' на второй. Тогда работа, совершенная силами поля, будет равна разности потенциалов (ср. с определением (2.22))

$$A_{BB'} = 1 \text{ Кл} \cdot E \Delta l = 1 \text{ Кл} \cdot (\phi_B - \phi_{B'}) = -1 \text{ Кл} \cdot \Delta \phi_{B'B}.$$

В этой формуле $\Delta l = |\Delta \mathbf{l}|$ – расстояние между эквипотенциальными поверхностями, измеренное вдоль силовой линии. Знак "минус" показывает, что вектор напряженности поля направлен в сторону уменьшения потенциала. Выражая напряженность E , получаем

$$E = -\frac{\Delta \phi}{\Delta l}. \quad (2.27)$$

Соотношение (2.27) является приближенным. Оно тем более точно, чем ближе расположены эквипотенциальные поверхности (чем меньше Δl).

2.5.6 Связь потенциала и напряженности электростатического поля

Соотношение (2.27) является приближенным и, кроме этого, не отражает векторного характера напряженности электрического поля. Формула (2.21) позволяет это сделать: для бесконечно малого смещения $d\mathbf{l}$ получаем

$$(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -d\phi. \quad (2.28)$$

В правой части этого соотношения стоит дифференциал потенциала, являющегося функцией от координат $\phi = \phi(x, y, z)$

$$d\phi(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz.$$

С другой стороны, скалярное произведение в левой части раскрывается как

$$(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = E_x dx + E_y dy + E_z dz.$$

Сравнивая последние две формулы и принимая во внимание равенство (2.28) и независимость приращений dx, dy, dz , получаем

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

Учитывая эти соотношения, напряженность электростатического поля можно записать в виде

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k} \right),$$

где $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ - единичные векторы вдоль осей OX, OY, OZ , соответственно. Определим **градиент** потенциала формулой

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (2.29)$$

Тогда связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом можно коротко записать как

$$\mathbf{E} = - \text{grad } \phi. \quad (2.30)$$

Из этой формулы и определения градиента следует, что *вектор напряженности направлен в сторону уменьшения потенциала*. Если в каком-то направлении, например, вдоль оси OX , потенциал не изменяется, то компонента напряженности E_x вдоль этой оси равна нулю.

2.5.7 Уравнения Пуассона и Лапласа. Примеры распределения потенциала

Соотношение (2.30)

$$\mathbf{E} = - \text{grad } \phi.$$

связывает потенциал и напряженность электрического поля. С другой стороны, дифференциальная форма теоремы Гаусса (2.18)

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

связывает напряженность с распределением заряда в пространстве. Исключая из этих соотношений напряженность, т. е. подставляя в (2.18) вместо E_x, E_y, E_z их выражения из (2.30) $E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}$ т.д., получаем уравнение Пуассона

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.31)$$

Если в рассматриваемой области зарядов нет ($\rho = 0$), то уравнение (2.31) становится однородным

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.32)$$

и в этом случае называется уравнением Лапласа. Сумма вторых производных в (2.31), (2.32), обозначаемая Δ , называется оператором Лапласа или лапласианом.

Задачи, связанные с решением уравнений Лапласа и Пуассона - компетенция математической физики и в настоящем пособии мы не будем ими заниматься, а рассмотрим только два простых примера: потенциал электрического поля между двумя параллельными бесконечными плоскостями (по сути - поле внутри плоского конденсатора при условии $d \ll \sqrt{S}$, где d - расстояние между пластинами, S - площадь пластин) и поле внутри заряженной металлической сферы.

Найдем распределение потенциала в пространстве между двух бесконечных параллельных плоскостей, потенциал которых ϕ_1 и ϕ_2 . Расстояние между пластинами d . Проведем ось OX перпендикулярно пластинам так, чтобы нулевая отметка 0 совпадала с левой пластиной. Тогда правая пластина расположится при координате d .



Рис. 14

Из соображений симметрии потенциал электрического поля будет изме-

няться только вдоль оси OX . Следовательно, уравнение Лапласа принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0.$$

Общее решение этого уравнения содержит две неопределенные постоянные C_1, C_2

$$\phi(x) = C_1x + C_2.$$

Решение уравнения должно удовлетворять **граничным** условиям

$$\phi(0) = \phi_1, \quad \phi(d) = \phi_2.$$

Используя эти условия, получаем решение

$$\phi(x) = \frac{\phi_2 - \phi_1}{d}x + \phi_1. \quad (2.33)$$

Теперь найдем распределение потенциала внутри пустой сферы радиуса R , потенциал которой равен ϕ_0 . Сферическая симметрия задачи позволит свести трехмерное уравнение Лапласа к одномерному. Для этого необходимо перейти к сферическим координатам

$$x = r \cos \psi \sin \theta, \quad y = r \sin \psi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

в которых уравнение (2.32) будет иметь вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi^2} = 0.$$

Как следствие сферической симметрии потенциал будет зависеть только от радиуса $\phi = \psi(r)$, поэтому в написанном выше уравнении остается только первое слагаемое

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 0.$$

Полученное обыкновенное дифференциальное уравнение легко интегрируется

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{c_1}{r^2}, \quad \text{или} \quad \phi = -\frac{c_1}{r} + c_2,$$

где c_1, c_2 - произвольные постоянные. Решение уравнения содержит два слагаемых: постоянную c_2 и выражение, соответствующее потенциалу точечного заряда, помещенного в центр сферы. Поскольку по условию задачи внутреннее пространство сферы пусто, следует положить $c_1 = 0$ и $c_2 = \phi_0$. Таким образом, все внутреннее пространство сферы вплоть до ее самой имеет постоянный потенциал $\phi = \phi_0$ и, следовательно, внутри сферы напряженность электрического поля равна нулю $\mathbf{E} = -\text{grad}\phi = 0$.

Как правило, факт равенства нулю напряженности электрического поля в любой точке внутри равномерно заряженного тонкого слоя доказывается непосредственно способом, изобретенным еще Ньютоном (правда, для поля гравитационного, силы которого тоже пропорциональны обратному квадрату расстояния). В этом тексте нам показалось необходимым продемонстрировать на простейших примерах метод решения электростатических задач с помощью выведенного выше уравнения Лапласа. Но надо понимать, что даже небольшое усложнение условий задачи, делает ее решение более трудоемким.

2.5.8 Энергия системы зарядов

Поместим заряд q_1 в поле заряда q_2 (2.23). Если расстояние между зарядами равно r_{12} , то энергия первого заряда в поле второго равна

$$W_{12} = k \frac{q_2}{r_{12}} \cdot q_1.$$

Энергия второго заряда в поле первого имеет симметричный вид

$$W_{21} = k \frac{q_1}{r_{12}} \cdot q_2.$$

Очевидно, что выражение

$$W = W_{12} = W_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \tag{2.34}$$

можно считать энергией взаимодействия двух зарядов. Определение (2.34), можно интерпретировать как работу, которую необходимо совершить, чтобы удалить заряды q_1 и q_2 на бесконечно большое расстояние друг от друга.

Если система зарядов включает в себя произвольное их количество n , то энергией этой системы называют сумму энергий всех различных пар зарядов

$$W = \sum_{i < j}^n k \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^n k \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \quad (2.35)$$

В первой сумме суммирование распространяется на все номера i, j зарядов с условием $i < j$, чтобы энергия пары зарядов не учитывалась дважды. Во второй сумме это ограничение отсутствует, но в качестве компенсации введен множитель $1/2$.

Формулу (2.35) удобно модифицировать. Введем суммарный потенциал ϕ_i поля всех зарядов $j \neq i$ в точке, где находится заряд с номером i

$$\phi_i = \sum_{j \neq i}^n k \frac{q_j}{r_{ij}}.$$

Тогда (2.35) переписывается в виде

$$W = \frac{1}{2} \sum_i^n q_i \phi_i. \quad (2.36)$$

2.6 Проводники в электростатическом поле

Электрические поля порождаются электрическими зарядами, которые переносятся подвижными частицами. В зависимости от вида вещества и физических условий, в которых это вещество находится, частицы могут перемещаться на макроскопические расстояния или могут двигаться только внутри объемов, размеры которых равны, примерно, размерам молекул. Вещества первого типа называются **металлами** или **проводниками**, вещества второго типа – **изоляторами** или **диэлектриками**.

Рассмотрим какой-либо проводник. В целом он электрически нейтрален т.е. количество зарядов одного знака равно количеству зарядов другого. Свободными зарядами в металлах являются отрицательно заряженные электроны. Пусть проводник помещен во внешнее электрическое поле $\mathbf{E}_{\text{внеш}}$ (Рис. 15). Электроны под его влиянием будут смещаться в сторону, противоположную направлению напряженности, и создадут на одном из концов тела избыток отрицательного заряда. В тоже время, на другом конце образуется избыток положительного заряда. Макроскопическое движение элект-

тронов будет продолжаться до тех пор, пока созданное перемещенными зарядами поле внутри проводника $\mathbf{E}_{\text{внут}}$ не скомпенсирует внешнее поле. Следовательно, после того как перемещение зарядов прекратится, внутри проводника электрическое поле станет равным нулю $\mathbf{E}_{\text{рез}} = \mathbf{E}_{\text{внеш}} + \mathbf{E}_{\text{внут}} = 0$.

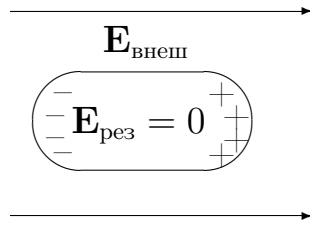


Рис. 15

Из равенства нулю напряженности электрического поля внутри проводника вплоть до его границ, определения градиента (2.29) и формулы (2.30), немедленно следует постоянство потенциала $\phi(x, y, z) = const$ в объеме проводника и на его поверхности. Следовательно, поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью.

Перераспределение зарядов в проводнике под действием внешнего электрического поля называется **электростатической индукцией**, а сам перемещенный заряд – **индуцированным**. Электростатическая индукция приводит не только к исчезновению внутреннего поля в проводнике, но также изменяет внешнее поле вокруг него. Подобное изменение может указать результат измерения напряженности поля вблизи проводников.

Если на проводник поместить **избыточный** заряд, то под действием кулоновских сил взаимного отталкивания он распределится в очень тонком слое вблизи поверхности проводника, не проникая глубоко внутрь. Движение избыточного заряда под влиянием внешнего поля будет продолжаться до тех пор, пока проекция вектора $\mathbf{E}_{\text{рез}}$ на касательную плоскость в любой точке поверхности проводника не станет равной нулю. Таким образом, поверхность заряженного проводника (как и проводника электрически нейтрального), когда перемещение зарядов заканчивается, является эквипотенциальной, и силовые линии вблизи проводника перпендикулярны его поверхности. Из-за равенства нулю $\mathbf{E}_{\text{рез}}$ внутри заряженного проводника, потенциал по всему его объему остается постоянным.

2.7 Электроемкость. Конденсаторы

Рассмотрим уединенный незаряженный проводник. Чтобы удалить с него на большое расстояние некоторый заряд q , необходимо совершить работу против кулоновских сил, так как на проводнике останется заряд $-q$. Поскольку совершенная работа в электростатике пропорциональна разности потенциалов, проводник после удаления заряда приобретет некоторый потенциал. Опыты показывают, что этот потенциал линейно зависит от величины удаляемого заряда. Коэффициент пропорциональности называется **емкостью** проводника

$$C = \frac{q}{\phi}. \quad (2.37)$$

Емкость проводника зависит только от его формы. Например, емкость уединенного проводящего шара радиуса R равна

$$C = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (2.38)$$

Конденсатором называется система двух проводников (обкладок). Говорят, что конденсатор заряжен, если обкладкам сообщены равные по величине и противоположные по знаку заряды. **Емкостью конденсатора** называется отношение положительного заряда на обкладке к напряжению между обкладками

$$C_{\text{конд}} = \frac{q}{U}. \quad (2.39)$$

Рассмотрим конденсатор, состоящий из двух больших параллельных пластин площадью S , расположенных на малом расстоянии d друг от друга. В этом случае электрическое поле между пластин конденсатора можно рассматривать как однородное поле, созданное двумя бесконечными плоскостями (см. формулу (2.15)). Если пластины заряжены зарядами $\pm q$, то плотности зарядов на них $\sigma = \pm q/S$. Из-за разных знаков зарядов на пластинах, векторы напряженности электрических полей, созданных этими пластинами внутри конденсатора, направлены в одну сторону, поэтому напряженность E внутри конденсатора равна

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.40)$$

Так как это поле однородно, можно использовать формулу (2.33), чтобы найти разность потенциалов между пластинами

$$U = Ed = \frac{d\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{dq}{\varepsilon_0 S}.$$

В соответствии с определением (2.39), получаем выражение для емкости плоского конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \quad (2.41)$$

Несколько конденсаторов можно соединить в батарее последовательно (см. Рис. 16, слева) или параллельно (Рис. 16, справа). При последователь-

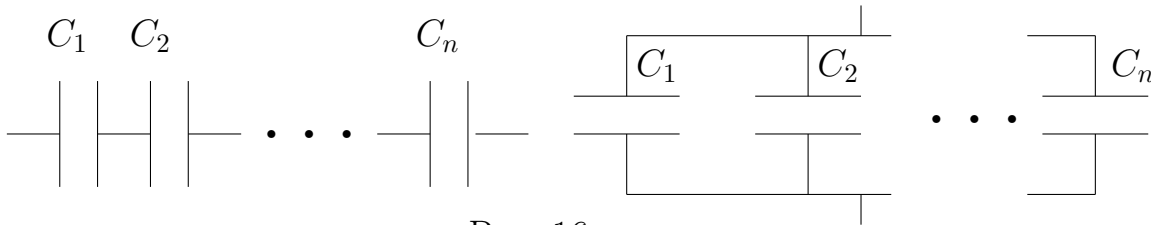


Рис. 16

ном подключении к источнику питания на пластинах каждого из конденсаторов индуцируется одинаковый заряд $\pm q$, а напряжение источника U делится между конденсаторами

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n.$$

При параллельном подключении на пластины каждого конденсатора подается одинаковое напряжение U , заряд же делится между конденсаторами

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n.$$

В соответствии с приведенными формулами, емкости батарей определяются как (выведите!)

$$C = \sum_i^N C_i \quad (2.42)$$

для параллельного соединения и

$$\frac{1}{C} = \sum_i^N \frac{1}{C_i} \quad (2.43)$$

для последовательного соединения конденсаторов.

Заряженный конденсатор обладает энергией, которая может быть вычислена по одной из формул

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (2.44)$$

Первое из равенств в (2.44) вытекает непосредственно из (2.36). Действительно, все заряды на первой пластине обладают энергией $q\phi_1/2$, тогда как заряды на второй пластине - энергией $-q\phi_2/2$, где $\phi_1 > \phi_2$ есть потенциалы первой и второй пластин, соответственно. Тогда полная энергия всех зарядов т.е. энергия самого конденсатора является суммой

$$W = \frac{1}{2}q\phi_1 - \frac{1}{2}q\phi_2 = \frac{qU}{2}.$$

Две другие формулы в (2.44) вытекают из первой и определения емкости конденсатора.

2.8 Диэлектрики в электрическом поле. Диэлектрическая проницаемость среды

Система двух одинаковых по величине, но противоположных по знаку зарядов, расположенных на некотором расстоянии друг от друга, называется **электрическим диполем**. На диполь, помещенный во внешнее электрическое поле, будет действовать пара сил, стремящихся его развернуть (Рис. 17).

Рассмотрим нейтральную молекулу, состоящую из n положительных и n отрицательных зарядов. По формуле

$$\mathbf{R}_c^\pm = \frac{\sum_{i=1}^n q_i^\pm \mathbf{R}_i^\pm}{\sum_{i=1}^n q_i^\pm},$$

аналогичной формуле для вычисления центра масс, мы находим "центры" положительных и отрицательных зарядов (в первом случае суммируются все положительные заряды, во втором – все отрицательные, \mathbf{R}_i – радиус-векторы, указывающие положения зарядов). Если "центры" положительных

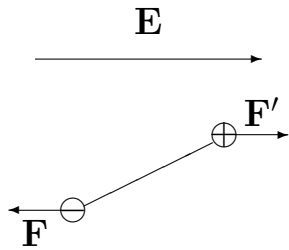


Рис. 17

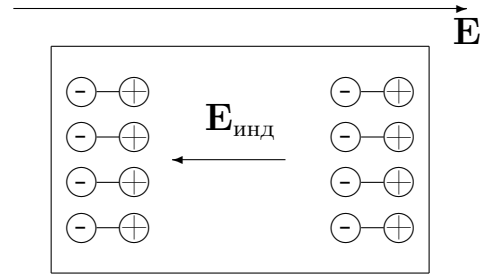


Рис. 18

и отрицательных зарядов совпадают $\mathbf{R}_c^+ = \mathbf{R}_c^-$, то молекула называется **неполярной**. Если имеет место неравенство $\mathbf{R}_c^+ \neq \mathbf{R}_c^-$, то она называется **полярной**. В этом случае молекулу можно рассматривать как диполь с положительным зарядом $q = \sum_{i=1}^n q_i^+$ и с расстоянием между зарядами $l = |\mathbf{R}_c^+ - \mathbf{R}_c^-|$.

Диэлектрики, состоящие из полярных или неполярных молекул, называются, соответственно, полярными или неполярными. Под влиянием внешнего электрического поля в неполярной молекуле происходит смещение зарядов, и она становится полярной (это процесс, аналогичный электростатической индукции). Таким образом, оба типа молекул испытывают ориентирующее воздействие электрического поля. Ориентация молекул диэлектрика вдоль направления линий напряженности внешнего электрического поля $\mathbf{E}_{\text{внеш}}$ называется **поляризацией** диэлектрика. Ориентация молекул не является строгой, поскольку всегда существует хаотическое (тепловое) движение молекул, препятствующее этому.

Каждая полярная молекула, как и диполь (см. Рис. 3), создает в окружающем пространстве собственное электрическое поле. Так как даже в небольшом объеме диэлектрика содержится огромное количество диполей, их одинаковая ориентация вдоль линий напряженности приводит к появлению индуцированного коллективного поля с напряженностью $\mathbf{E}_{\text{инд}}$, направленного всегда в сторону, противоположную внешнему полю (Рис. 18). Это наглядно можно представить, поместив прямоугольный образец диэлектрика в электрическое поле. В результате поворота диполей на гранях образуется нескомпенсированный заряд создающий $\mathbf{E}_{\text{инд}}$. Суперпозиция внешнего поля \mathbf{E} и индуцированного $\mathbf{E}_{\text{инд}}$ дает электрическое (эффективное) поле $\mathbf{E}_{\text{эфф}}$ внутри диэлектрика

$$\mathbf{E}_{\text{эфф}} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{инд}}.$$

Отношение величин внешнего и эффективного полей

$$\varepsilon = \frac{E}{E_{\text{эфф}}}, \quad (2.45)$$

называется **относительной диэлектрической проницаемостью** диэлектрика. Она определяет величину ослабления внешнего электрического поля в диэлектрике (для вакуума $\varepsilon = 1$). Это ослабление необходимо учитывать во всех случаях, где идет речь о силовых эффектах в веществе, вызванных электрическими полями. Например, закон Кулона (2.1) в веществе с диэлектрической проницаемостью ε переписывается в виде

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{k q_1 q_2}{\varepsilon R_{12}^3} \mathbf{R}_{12}. \quad (2.46)$$

В простых случаях однородной и изотропной среды (электрические свойства которой одинаковы во всех точках и по всем направлениям) переход от формулы справедливой в вакууме к формуле, пригодной для вещества, осуществляется заменой диэлектрической постоянной ε_0 на произведение $\varepsilon\varepsilon_0$:

$$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon\varepsilon_0.$$

В приведенном примере закона Кулона эта замена имеет вид замены коэффициента k

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}.$$

3 Задачи

3.1 Закон Кулона. Неустойчивость системы зарядов

- Три точечных заряда расположены на прямой с одинаковым интервалом. Крайние заряды имеют равную величину Q . Чему равен средний заряд q , если система находится в равновесии? Является ли это равновесие устойчивым?

Очевидно, что равновесие возможно только тогда, когда знак заряда q будет противоположен знаку зарядов Q . Положим $Q, q > 0$.

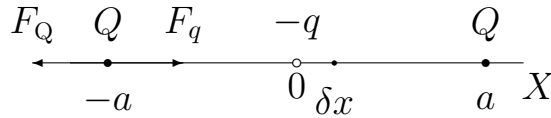


Рис. 19

Для равновесия левого заряда необходимо равенство модулей кулоновских сил F_q и F_Q , действующих на него со стороны зарядов q и Q , соответственно

$$F_q = k \frac{Qq}{a^2} = k \frac{Q^2}{(2a)^2} = F_Q.$$

После сокращений получаем (восстанавливая знак) $q = -Q/4$. Поскольку расположение зарядов Q симметрично по отношению к заряду q , то приведенное соотношение является ответом на первый вопрос задачи.

Для ответа на второй вопрос, найдем потенциальную энергию системы трех зарядов на прямой с учетом смещения заряда $q = -Q/4$ на малое расстояние δx из положения равновесия. Воспользовавшись формулой (2.35)

$$W = \sum_{i < j}^n k \frac{q_i q_j}{r_{ij}},$$

получаем

$$W = k \frac{Q^2}{2a} + k \frac{Qq}{a - \delta x} + k \frac{Qq}{a + \delta x} = -\frac{kQ^2}{2a} \frac{\delta x^2}{a^2 - \delta x^2}.$$

При малых отклонениях δx потенциальная энергия представляет собой почти квадратичную функцию с максимумом $W = 0$ при $\delta x = 0$

$$W \approx -\frac{kQ^2}{2a^3}\delta x^2.$$

Сила, действующая на заряд q

$$F = -\frac{dW}{d\delta x} = \frac{kQ^2}{a^3}\delta x,$$

будет направлена вдоль оси OX при отклонениях $\delta x > 0$, и в обратном направлении при $\delta x < 0$. Из этого следует, что сила в обоих случаях направлена от положения равновесия (в точке $\delta x = 0$) и само это положение рассматриваемой системы зарядов является неустойчивым.

Утверждение, которое было доказано выше, является частным случаем теоремы Ирншоу гласящей, что устойчивая статическая конфигурация электрических зарядов невозможна.

3.2 Малые колебания в электрическом поле

- Пусть два одинаковых положительных заряда Q закреплены на расстоянии $2a$ друг от друга. С какой частотой будет совершать малые колебания третий заряд, если он может двигаться вдоль прямой, перпендикулярной линии, соединяющей заряды Q и пересекающей эту линию на расстоянии a от каждого из зарядов?

Пусть заряд $-q$ массы m может двигаться вдоль оси OY , пересекающей под прямым углом ось OX , на которой расположены два одинаковых заряда Q (Рис. 20). Найдем период малых колебаний заряда $-q$.

Потенциальная энергия заряда $-q$, находящегося на оси OY в поле двух одинаковых зарядов Q дается формулой

$$W(y) = -2k\frac{qQ}{\sqrt{a^2 + y^2}},$$

где y - отклонение заряда $-q$ от линии, соединяющей заряды Q . Минимум

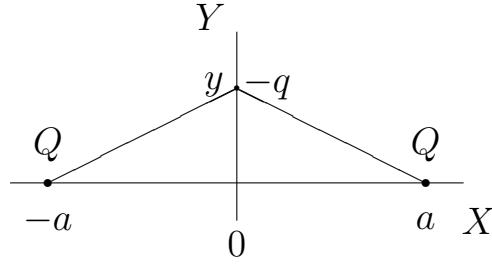


Рис. 20

потенциальной энергии находится в нуле. Поскольку колебания предполагаются малыми ($y \ll a$), разложим потенциальную энергию в окрестности минимума в ряд по y до квадратичного члена включительно

$$W(y) \approx -\frac{2kqQ}{a} \left(1 - \frac{y^2}{2a^2} + \mathcal{O}(y^4)\right).$$

Как видно, с точностью до несущественной постоянной энергия заряда совпадает с энергией гармонического осциллятора. Сила, действующая на заряд $-q$, равна

$$F(y) = -\frac{dW}{dy} \approx -\frac{2kqQ}{a^3}y.$$

Уравнение движения заряда будет иметь вид

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2kqQ}{a^3}y.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением гармонических колебаний

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0,$$

получаем искомую частоту колебаний заряда $-q$

$$\omega = \sqrt{\frac{2kqQ}{a^3m}}.$$

3.3 Сила действующая на диполь в неоднородном поле

- *Определите силу, действующую на диполь со стороны равномерно заряженной бесконечной нити с линейной плотностью заряда τ . Диполь ориентирован по лучу, исходящему из нити и перпендикулярному ей. Электрический момент диполя p . Расстояние от нити до*

диполя R считать много большим, чем расстояние между зарядами диполя $R \gg l$.

Если электрически нейтральное тело помещено в однородное электрическое поле, то сила, действующая на это тело равна нулю. Если же поле неоднородно, то результирующая сила, вообще говоря, нулю не равна.

Векторы напряженности электрического поля, порожденного равномерно заряженной бесконечной нитью, направлены вдоль лучей, исходящих из нити и перпендикулярны ей, а их модуль определяется формулой (2.14)

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R},$$

где R - расстояние от нити до точки наблюдения. По условию задачи диполь ориентирован так, как показано на Рис. 21

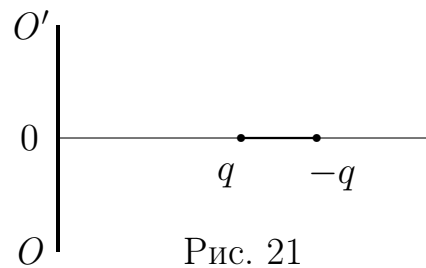


Рис. 21

Если расстояние от заряженной нити до заряда q равно R , то расстояние от нити до $-q$ равно $R + l$. В соответствии с формулой (2.14), на диполь действует сила

$$F = \frac{q\tau}{2\pi\epsilon_0 R} - \frac{q\tau}{2\pi\epsilon_0(R + l)} = \frac{q\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{l}{R(R + l)}.$$

Учитывая неравенство $R \gg l$ и определение дипольного момента $p = ql$, получаем окончательно

$$F \approx \frac{p\tau}{2\pi\epsilon_0 R^2}.$$

3.4 Силовые линии электрического поля

- Два точечных заряда $+q_1 > 0$ и $-q_2 < 0$, причем $q_1 > q_2$, расположены на горизонтальной оси на расстоянии a друг от друга. Под каким

углом войдет силовая линия в заряд $-q_2$, если она вышла под углом α из заряда $+q_1$? Угол отсчитывается от горизонтальной оси OX .

Поскольку система обладает цилиндрической симметрией, достаточно рассмотреть картину силовых линий на плоскости, содержащей ось, проходящую через заряды q_1, q_2 (Рис. 22)

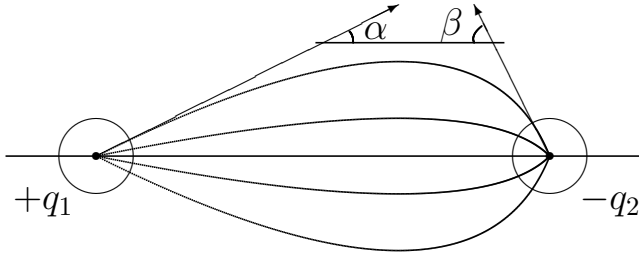


Рис. 22

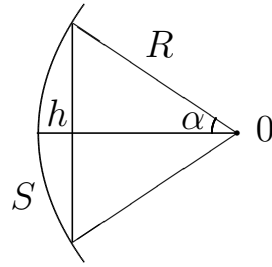


Рис. 23

Из рисунка видно, что любая силовая линия, выходящая из заряда q_1 под углом к оси симметрии меньшим, чем угол α , войдет в заряд $-q_2$ (силовые линии не пересекаются!). Примем во внимание, что из-за сферической симметрии распределения силовых линий, порождаемых точечным зарядом, число этих линий в любом телесном угле, пропорционально площади области на поверхности сферы, стягивающей данный телесный угол.

Окружим заряды $+q_1$ и $-q_2$ сферами настолько малого радиуса R , что влиянием электрического поля любого из этих зарядов на поле в окрестности другого можно пренебречь (напомним, что поле точечного заряда $E(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$).

Рассмотрим сферический сегмент, отсекаемый от сферы, окружающей заряд q_1 , плоскостью, перпендикулярной оси OX (Рис. 23). При высоте сегмента h_1 , его площадь равна $S_1 = 2\pi R h_1$. Если заряд в 1 кулон испускает N силовых линий, то плотность линий, пересекающих сферу, можно найти по формуле

$$\sigma_1 = \frac{q_1 N}{4\pi R^2}.$$

Умножив σ_1 на площадь сегмента S_1 , получаем число силовых линий, пересекающих этот сегмент

$$N_1 = \frac{q_1 N h_1}{2R}.$$

Аналогичные формулы мы получаем для силовых линий, входящих в заряд q_2

$$S_2 = 2\pi R h_2, \quad \sigma_2 = \frac{q_2 N}{4\pi R^2}, \quad N_2 = \frac{q_2 N h_2}{2R}.$$

Чтобы установить соответствие между размерами сегментов, пересекаемых одинаковым количеством испущенных и поглощенных зарядами q_1 и q_2 силовых линий, приравняем N_1 и N_2 . В результате приходим к простому соотношению

$$q_1 h_1 = q_2 h_2 \quad \text{или} \quad \frac{q_2}{q_1} = \frac{h_1}{h_2},$$

своего рода закону сохранения. Выразим h_1 и h_2 через углы α и β

$$h_1 = R - R \cos \alpha = R(1 - \cos \alpha) = 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad h_2 = 2R \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

и подставим в предыдущую формулу

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} \quad \text{или} \quad \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}. \quad (3.1)$$

Выражение (3.1) решает поставленную задачу. Обратим внимание, что окончательный ответ не зависит от расстояния между зарядами. Этот факт является следствием точечности зарядов.

Приведенные выше рассуждения могут показаться не слишком строгими. В более корректной математической форме ответ (3.1) для этой задачи получается из решения дифференциального уравнения силовых линий, характеризующих электрическое поле двух зарядов (см. [4]).

3.5 Электрическое поле на оси тонкого кольца

- *Найти электрическое поле на оси симметрии тонкого заряженного кольца. Радиус кольца R , его заряд q .*

Из симметрии задачи очевидно, что заряд распределен на кольце равномерно с плотностью

$$\tau = \frac{q}{2\pi R}$$

и напряженность электрического поля на оси OZ направлена вдоль этой оси. Действительно, рассмотрим произвольный диаметр кольца $|AB|$. Рассмотрим, также, два бесконечно малых отрезка кольца с зарядом dq , расположенных в точках A и B (на Рис. 24 направления силовых линий не

указаны). Расстояния от этих отрезков до точки наблюдения C одинаковы ($|AC| = |BC|$). Следовательно, порождаемые зарядами dq в точке C напряженности, скажем $d\mathbf{E}$ и $d\mathbf{E}'$, будут равны по модулю $dE = dE'$. Поскольку направлены векторы $d\mathbf{E}$, $d\mathbf{E}'$ под одинаковыми углами к оси симметрии (так как треугольник ACB равнобедренный), то суперпозиция этих векторов параллельна оси симметрии. Это свойство будет выполняться для любой пары отрезков, выбранных указанным образом.

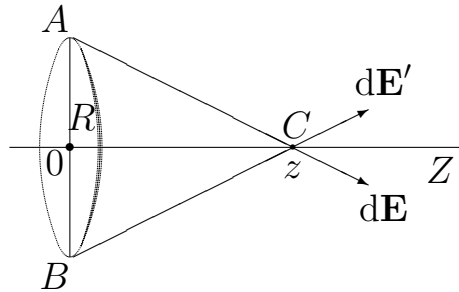


Рис. 24

Рассмотрим бесконечно малый отрезок кольца длиной dl и зарядом

$$dq = \tau dl = \frac{q}{2\pi R} dl.$$

Его вклад в потенциал поля кольца в точке C с координатой z на оси OZ дается формулой

$$d\phi = k \frac{dq}{(R^2 + z^2)^{1/2}}.$$

Суммирование вкладов всех малых отрезков кольца приводит к формуле потенциала поля кольца в точке C с координатой z

$$\phi_c(z) = \int_{\text{кольцо}} d\phi = \frac{k\tau}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \cdot \int_{\text{кольцо}} dl = \frac{k\tau}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \cdot 2\pi R = \frac{kq}{(z^2 + R^2)^{1/2}}. \quad (3.2)$$

Поскольку напряженность поля направлена вдоль оси OZ , то вычисление градиента потенциала сводится к взятию производной по z

$$E(z) = - \frac{d\phi}{dz} = \frac{kqz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (3.3)$$

Из полученной формулы видно, что напряженность поля равна нулю при $z = 0$ и в пределе $z \rightarrow \pm\infty$. Поскольку $E(z)$ непрерывна, то она содержит

точки экстремумов. Чтобы их найти, приравняем производную напряженности $E(z)$ к нулю

$$\frac{dE(z)}{dz} = kq \frac{R^2 - 2z^2}{(z^2 + R^2)^{5/2}} = 0.$$

Из этой формулы немедленно следует, что максимум модуля напряженности достигается при

$$z = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя это значение в формулу (3.3), получаем

$$E_{\text{экст}} = \pm \frac{2kq}{3\sqrt{3}R^2}.$$

3.6 Электрическое поле на оси тонкого диска

- *Найти электрическое поле на оси симметрии тонкого заряженного диска. Радиус диска R , его заряд Q . Считать, что заряд диска распределен равномерно по его площади.*

Разобьем диск на множество колец бесконечно малой ширины, радиус которых изменяется от 0 до R (см. Рис. 25). Рассмотрим кольцо с радиусом $r < R$ и шириной dr . Воспользуемся полученной выше формулой для тонкого кольца (3.3), заменив $R \rightarrow r$ и $q \rightarrow 2\pi r dr \cdot Q/(\pi R^2)$, где $2\pi r dr$ - площадь кольца, $\sigma = Q/(\pi R^2)$ - плотность заряда на диске.

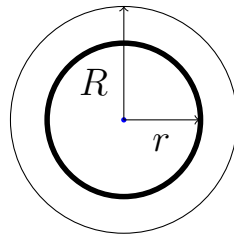


Рис. 25

В результате получаем напряженность электрического поля в точке с координатой z , созданную рассматриваемым кольцом

$$dE = \frac{2kzQrdr}{R^2(z^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Чтобы учесть вклады в напряженность от всех колец, необходимо проинтегрировать полученное выражение от 0 до R . Сделать это не трудно используя замену переменных $r^2 \rightarrow x$. В результате получаем

$$E(z) = \frac{2kQ}{R^2} \left(1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right). \quad (3.4)$$

Проверить правильность полученной формулы можно устремив $R \rightarrow \infty$, что соответствует "расширению" диска до бесконечной равномерно заряженной плоскости. Как и ожидается, получаем формулу (2.15).

3.7 Электрическое поле плоскости с вырезанным круглым отверстием

- *Бесконечная плоскость равномерно заряжена с плотностью заряда $\sigma > 0$. В плоскости вырезано круглое отверстие с радиусом R . Найти напряженность электрического поля на перпендикуляре к плоскости, проходящем через центр отверстия.*

Для решения этой задачи воспользуемся принципом суперпозиции. Предположим, что место круглого отверстия в плоскости занимает бесконечно тонкий диск радиуса R , равномерно заряженный зарядом с плотностью $-\sigma$, а сама плоскость восстанавливает свою целостность. Т.е. в пространстве одновременно существует бесконечная плоскость (без вырезов!) и совмещенный с ней диск. С учетом разности знаков поверхностной плотности заряда плоскости и диска можно сказать, что полученная конструкция эквивалентна заряженной плоскости с круглым отверстием.

Положим, что плоскость содержит оси OX и OY , а ось OZ проходит через центр диска, который располагается в начале координат. Тогда напряженность электрического поля, создаваемого бесконечной заряженной плоскостью, определяется формулой (2.14), а напряженность поля диска на его оси симметрии (оси OZ) - формулой (3.4). С учетом разности знаков поверхностной плотности заряда плоскости и диска, получаем на оси OZ

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}.$$

Из полученной формулы следует, что при $z \rightarrow \infty$ напряженность поля стремится к значению, соответствующему плоскости без выреза. В точке

$z = 0$ напряженность непрерывна и $E(z) = 0$. Напомним, что при переходе заряженной плоскости без удаленного диска напряженность испытывает скачок $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

3.8 Плотность индуцированного заряда

- Определить распределение плотности заряда на проводящей заземленной плоскости, индуцированного точечным зарядом q .

Для решения задачи воспользуемся приемом, называемым *методом изображений*. Его суть заключается в замене проводящих поверхностей набором фиктивных зарядов расположенных так, что на месте этих проводящих поверхностей остаются эквипотенциальные поверхности. Рассмотрим заземленную проводящую бесконечную плоскость и заряд $+q$, расположенный на расстоянии a от этой плоскости (см. Рис. 26)

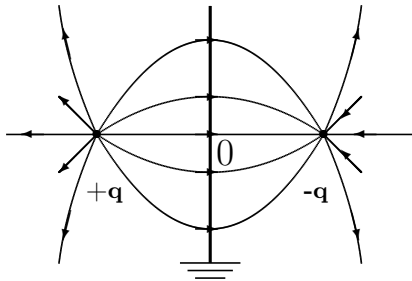


Рис. 26

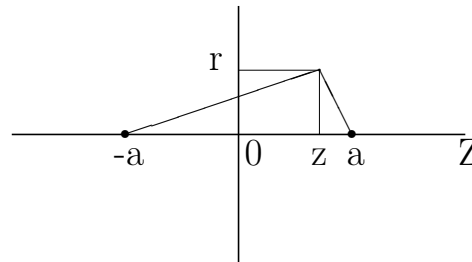


Рис. 27

Поскольку проводящая плоскость эквипотенциальна, то силовые линии, испущенные зарядом, входят в плоскость перпендикулярно, а поскольку она заземлена, то ее потенциал равен нулю $\phi = 0$. Если мы поместим заряд $-q$ в точку, расположенную (по отношению к плоскости) зеркально-симметрично заряду q , и мысленно удалим заземленную плоскость, то обнаружим, что на ее месте осталась эквипотенциальная поверхность (поскольку из-за симметрии силовые линии пересекают ее по нормали) с потенциалом $\phi = 0$ (поскольку любая точка поверхности равноудалена от обоих зарядов, одинаковых по модулю, но противоположных по знаку). Это построение позволяет сразу, используя только закон Кулона, рассчитать силу, с которой заземленная плоскость притягивает заряд

$$F = k \frac{q^2}{4a^2}.$$

Чтобы найти распределение плотности зарядов на проводящей заземленной плоскости заметим, что это распределение должно быть симметрично относительно оси, проходящей через заряды $\pm q$, т.е. представлять собой концентрические окружности постоянной плотности σ с центром в точке O . Пусть заряд $+q$ расположен в точке с координатой $-a$ на оси OZ , а заряд $-q$ в точке a на той же оси, и расстояние точки наблюдения A от OZ равно r . Тогда потенциал в A имеет вид

$$\phi_A = qk \left(\frac{1}{\sqrt{(a+z)^2 + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{(a-z)^2 + r^2}} \right).$$

Поскольку векторы \mathbf{E} перпендикулярны заземленной поверхности, чтобы найти их модули достаточно взять производную по z и положить $z = 0$. Получаем

$$\sigma = \varepsilon_0 E_z = - \left. \frac{d\phi_A}{dz} \right|_{z=0} = \frac{2\varepsilon_0 k q a}{(a^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Список литературы

- [1] Иродов И.Е., Электродинамика, Основные законы. М., Бинум, 2009.
- [2] Сивухин Д.В., Общий курс физики в 5 тт., том 3, Электричество, М., ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [3] Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А., Основы физики. Курс общей физики в 2 тт., том. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика, Под ред. А.С. Кингсеп, М., ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [4] Миролубов Н. Н., Костенко М. В., Левинштейн М. Л., Тиходеев Н. Н., Методы расчета электростатических полей, М., Высшая школа, 1963.