

Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

М.А.Зеликман

ОСНОВЫ ФИЗИКИ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

Учебник

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением по
университетскому политехническому образованию в качестве
учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по
направлению подготовки магистров
«Техническая физика»*

Санкт-Петербург
Издательство СПбПУ
2019

УДК 531.9(075.8)
3-49

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук, профессор СПбПУ *Е. Ю. Перлин*

Доктор физико-математических наук, профессор ФТИ им. А. Ф. Иоффе *Н. Т. Баграев*

Зеликман М. А. **Основы физики сверхпроводников** : учебник / М. А. Зеликман. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2019. – 89 с.

Учебник соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Сверхпроводимость» направления магистерской подготовки 03.04.02.01 «Физика наноструктур и наноэлектроника».

Рассмотрены основные явления, имеющие место в сверхпроводниках, изложены результаты экспериментальных и теоретических исследований. Основное внимание уделено анализу новых идей и понятий, связанных со сверхпроводимостью.

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки магистров «Техническая физика».

Ил. 48. Библиогр.: 11 назв.

Печатается по решению
Совета по издательской деятельности Ученого совета
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

© Зеликман М. А., 2019
© Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого, 2015

ISBN 978-5-7422-4925-2

Введение

Настоящий учебник написан на основе курса лекций по «Основам физики сверхпроводников», который автор в течение ряда лет читал студентам старших курсов Института Физики, Нанотехнологий и Телекоммуникаций (ИФНИТ) СПбПУ Петра Великого.

Повышенный интерес к физике сверхпроводимости в последние годы объясняется открытием в 1986 г. высокотемпературных сверхпроводников, которое, с одной стороны, дало возможность использовать для охлаждения до перехода в сверхпроводящее состояние не дорогого жидкого гелия, а дешевого жидкого азота, а с другой стороны, пробудило надежду на получение сверхпроводимости при комнатных температурах.

Экспериментальные и теоретические исследования физики сверхпроводимости не только закладывают основы для создания сверхпроводников с необходимыми для технического использования свойствами, но и ведут к более глубокому пониманию различных разделов физики. В ходе этих исследований был открыт целый ряд явлений, не напрямую связанных с потерей сопротивления, таких как эффекты Мейсснера и Джозефсона, ступеньки Шапиро, квантование магнитного потока, макроскопическая когерентность волновых функций и т.д. Возникли новые физические образы и понятия: куперовские пары, абрикосовские вихри, промежуточное состояние, шубниковская фаза.

При создании настоящего курса автор ставил целью познакомить будущих физиков с этими оригинальными идеями и образами, которые обогатили не только физику твердого тела, но и всю фундаментальную физику.

Все изложение ведется с использованием международной системы единиц (СИ). На некоторых графиках, взятых из оригинальных работ, встречаются единицы также применяемой в электромагнетизме системы СГС, в частности Гаусс и Эрстед. Их перевод в СИ основывается на соотношениях $1 \text{ Гс} = 10^{-4} \text{ Тл}$, $1 \text{ Э} = 80 \text{ А/м}$. Следует иметь в виду, что большинство формул в системе СГС имеет другой вид.

ГЛАВА 1. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ

§1.1. Отсутствие электрического сопротивления

В 1908 году голландскому физикау Гайке Камерлинг-Оннесу удалось ожить последний инертный газ – гелий. Это открыло ему возможность исследования свойств веществ в области температур вблизи абсолютного нуля. Наиболее интересные результаты были получены при исследовании электрического сопротивления.

В то время в представлениях о механизме электропроводности имелось много пробелов. Правда, было известно, что перенос заряда обусловлен движением электронов. Были измерены температурные зависимости электрического сопротивления многих металлов. Было найдено, что при комнатных температурах сопротивление прямо пропорционально температуре. Удалось также установить, что при более низких температурах сопротивление падает все медленнее. В принципе можно было предполагать три возможных варианта:

1. При уменьшении температуры сопротивление плавно снижается до нуля (рис.1.1, кривая 1).
2. Сопротивление стремится к какому-то конечному значению (рис.1.1, кривая 2).
3. Сопротивление проходит через минимум и при очень низких температурах становится бесконечным (рис.1.1, кривая 3).

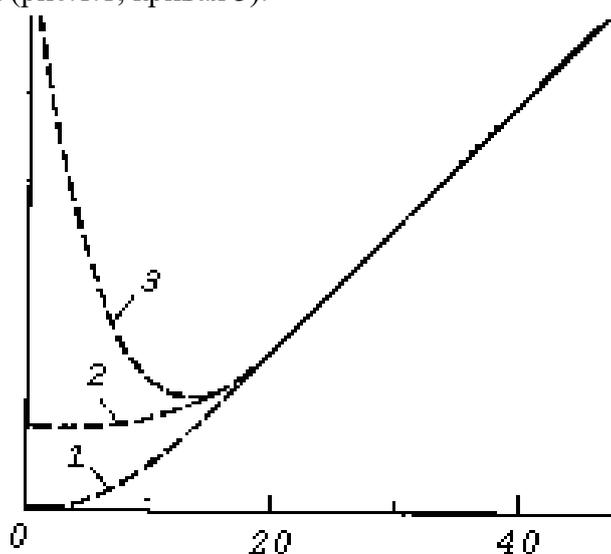


Рис 1.1. Температурная зависимость электрического сопротивления

На первый вариант наталкивало наблюдаемое на опыте быстрое снижение сопротивления с охлаждением. Третий вариант соответствовал представлению, согласно которому при низких температурах все электроны должны были закрепиться вблизи своих атомов и перестать быть свободными. Второй вариант находил свое подтверждение в опытах Оннеса на различных образцах платины и золота (рис.1.2), именно эти металлы в то время имелись в достаточно чистом виде. При приближении температуры к абсолютному нулю сопротивление стремилось к так называемому остаточному значению, величина которого зависела от чистоты образца. Оннес пришел к выводу, что платина и золото в чистом виде при температуре, стремящейся к абсолютному нулю, должны иметь исчезающе малые сопротивления.

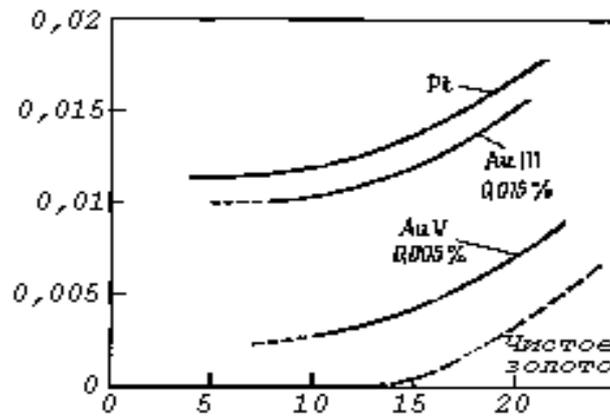


Рис. 1.2. Электрическое сопротивление различных металлов

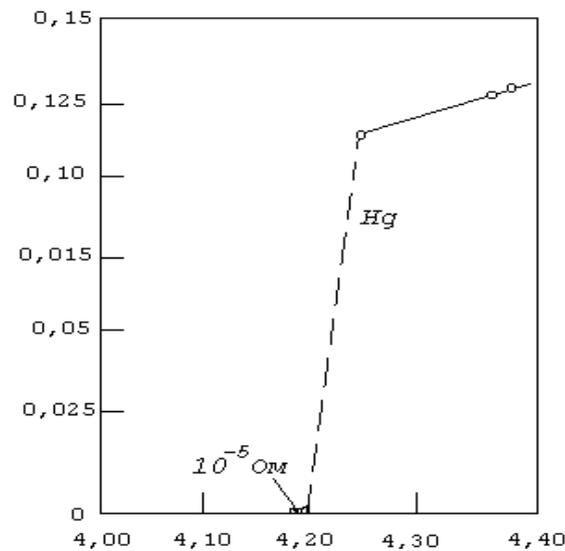


Рис 1.3. Сверхпроводимость ртути

Однако в 1911 году при исследованиях на ртути (ее можно было получить в еще более чистом виде) он обнаружил, что наблюдаемый эффект не имеет ничего общего с постепенным понижением сопротивления с температурой – изменение было скачкообразным (рис.1.3). Сам Оннес указал, что ртуть перешла в новое состояние и назвал его сверхпроводящим. О том, какое значение придавалось этому открытию, свидетельствует тот факт, что уже в 1913 году Камерлинг Оннесу была присуждена нобелевская премия по физике.

При взгляде на рис.1.3. возникает естественный вопрос: какова величина скачка сопротивления, иначе говоря, насколько правомерно говорить об исчезновении электрического сопротивления?

Для ответа на этот вопрос нужно было найти достаточно точный метод измерения сопротивления. В первых опытах измерения проводились на основе закона Ома. При этом можно было установить только тот факт, что сопротивление при скачке уменьшалось более, чем в тысячу раз, и становилось ниже предела чувствительности. Уже в 1914 году Оннес применил для измерения крайне малых значений сопротивления самый лучший метод: он измерял затухание тока в сверхпроводящем кольце. Если сопротивление существует, то из-за джоулевых потерь ток должен убывать со временем.

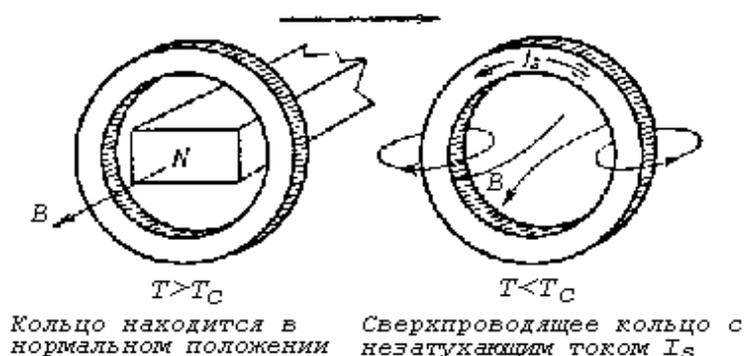


Рис. 1.4. Возникновение незатухающего тока в сверхпроводящем кольце.

Принцип метода изображен на рис 1.4. Пусть кольцо из сверхпроводящего материала, например, свинца, находится в нормальном состоянии, т.е. имеет температуру выше температуры перехода T_c . Магнит создает в кольце магнитное поле. Затем кольцо охлаждают до температуры, при которой оно становится сверхпроводящим. На магнитном поле это никак не сказывается. Теперь уберем магнит. По закону электромагнитной индукции в кольце возникнет индукционный ток. По скорости его затухания можно судить о величине сопротивления. Падение тока за 1 час на 1% соответствовало бы падению сопротивления при переходе в сверхпроводящее состояние на 8 порядков. К настоящему времени есть эксперименты, в которых не наблюдается изменений тока на протяжении десятилетий, что соответствует падению сопротивления не менее, чем на 15 порядков. Все эти данные позволяют с полным правом считать, что в сверхпроводящем состоянии электрическое сопротивление действительно *исчезает*.

Уже вскоре после открытия сверхпроводимости у ртути Оннесу удалось показать, что и другие металлы могут переходить в сверхпроводящее состояние. Температура перехода у них у всех оказалась очень низкой – несколько Кельвин. В течение десятилетий велись поиски материалов с более высокими температурами перехода. Оказалось, что многие металлы, а также полупроводники и сплавы обладают сверхпроводящими свойствами. Однако максимальная достигнутая критическая температура оказалась равной всего лишь 23 К - у сплава Nb_3Ge .

Сразу после открытия явления начались его теоретические исследования. Предлагались различные математические подходы, позволяющие рассчитать распределения токов, конфигурации магнитных полей и т.д. Но микроскопическая теория, объясняющая саму природу явления сверхпроводимости была создана лишь через 46 лет после открытия. В 1957 году Бардин, Купер и Шриффер показали, что при температурах ниже критической электроны проводимости связываются в пары, и объяснили природу этого связывания. В дальнейшем мы обсудим общие положения этой теории – так называемой теории БКШ, а также рассмотрим и другие теоретические подходы, существовавшие до ее создания и продолжающие быть полезными и в настоящее время.

После создания теории БКШ, когда стали понятны физические процессы, ответственные за сверхпроводимость, начались эксперименты в области искусственного создания материалов с высокой температурой перехода. Создавались вещества со сложной структурой – состоящие из плоскостей, одномерных нитевых структур и т.д. Но прогресса

достигнуть не удавалось, хотя проблема высокотемпературной сверхпроводимости, наряду с созданием термоядерных реакторов, считалась важной прикладной задачей современной физики.

И вот в 1986 году, когда ученые уже начали терять веру в то, что высокотемпературная сверхпроводимость может существовать, появилась статья Беднорца и Мюллера об обнаружении сверхпроводимости в новом классе веществ – керамиках – при температуре 35 К! Это был прорыв, скачок критической температуры в 1,5 раза после десятилетий топтания на месте, когда продвижение на 0,1 К считалось открытием. Началось бурное исследование нового класса веществ. Каждый месяц, каждая неделя приносили новые результаты: 40 К, 60 К, 90 К, 100 К. На настоящий момент рекордная достоверная критическая температура равна 135 К.

Можно спросить, какая же это высокотемпературная сверхпроводимость, если температуры находятся в области минус 150 – 180°С? Ведь все равно для существования сверхпроводимости материалы нужно сильно охлаждать. Разница в том, что ранее охлаждение до нужных температур можно было осуществить только при помощи гелия, поскольку только он оставался жидким в требуемом диапазоне температур. А гелий весьма дорог и его количества в природе не очень велики. При температурах же выше 77 К, т.е. температуры кипения азота, для охлаждения можно использовать жидкий азот, которого в природе много (вспомним состав воздуха), потому он весьма дешев.

Мы, в основном, будем обсуждать вопросы, касающиеся обычной (не высокотемпературной) сверхпроводимости. Дело в том, что теория высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) еще не создана, что связано со сложностью их кристаллической структуры. Большинство явлений, обнаруженных в обычных сверхпроводниках, имеют место и в ВТСП, так что отличия касаются только величин температур. Поэтому анализ этих явлений на примере обычных сверхпроводников позволяет войти в суть проблем и понять природу происходящих процессов. Сугубо ВТСП и специфике происходящих в них явлений посвящена только последняя глава книги.

§1.2. Выталкивание магнитного поля из сверхпроводников

Магнитные свойства сверхпроводников столь же нетривиальны, как и электрические. В 1933 году Мейсснер и Оксенфельд обнаружили, что сверхпроводник в магнитном поле ведет себя как идеальный диамагнетик, внутри которого магнитная индукция равна нулю. Иными словами, магнитное поле выталкивается из объема сверхпроводника. Это происходит за счет возникновения поверхностных экранирующих токов, которые своим магнитным полем полностью компенсируют внешнее поле во всем объеме образца. Это явление получило название эффекта Мейсснера.

На первый взгляд может показаться, что идеальный диамагнетизм сверхпроводников является следствием их нулевого сопротивления. Действительно, если сверхпроводник внести в магнитное поле, то в результате электромагнитной индукции возникнут индукционные токи, которые при отсутствии сопротивления не затухают со временем и продолжают экранировать и в дальнейшем.

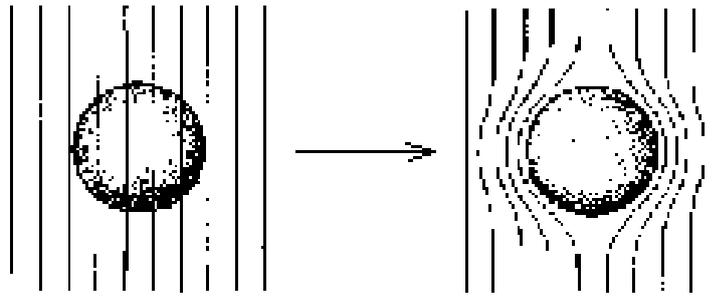


Рис.1.5. Эффект Мейсснера в сверхпроводящем шаре, охлаждаемом в постоянном внешнем магнитном поле

Однако такое объяснение возможно не всегда. Рассмотрим случай, когда образец внесен в магнитное поле при температуре выше критической, т.е. он еще не обладает сверхпроводящими свойствами. Тогда линии индукции пронизывают его, как это показано на рис.1.5а. Если теперь охладить образец ниже T_c , то в точке перехода линии индукции должны быть вытолкнуты из него (рис.1.5б). Этот очень важный результат не может быть получен просто из того факта, что сопротивление равно нулю. Из закона Ома $\vec{E} = \rho \vec{j}$ видно, что при $\rho = 0$ электрическое поле отсутствует. Из уравнения Максвелла $\partial \vec{B} / \partial t = \text{rot} \vec{E}$ следует, что индукция магнитного поля должна оставаться постоянной и не может измениться при переходе в сверхпроводящее состояние. Эффект Мейсснера противоречит этому результату, что дает основания считать, что идеальный диамагнетизм и отсутствие сопротивления являются двумя существенно независимыми свойствами сверхпроводящего состояния.

§1.3. Разрушение сверхпроводимости магнитным полем

Сверхпроводимость разрушается достаточно сильным магнитным полем. Пороговое, или критическое, магнитное поле H_c , необходимое для разрушения сверхпроводимости, зависит от температуры. На рис.1.6 показана зависимость критического поля от температуры для некоторых сверхпроводников. При критической температуре T_c критическое поле H_c равно нулю. С убыванием температуры оно возрастает, что для образцов в форме длинного цилиндра приближенно описывается соотношением

$$H_c(T) = H_c(0) \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right) \quad (1.1)$$

Разность свободных энергий единицы объема в нормальном и сверхпроводящем состоянии можно получить из следующих соображений. Сверхпроводящий образец во внешнем магнитном поле \vec{H}_e (внешним полем мы будем называть поле, создаваемое внешними источниками в отсутствие сверхпроводящей среды), меньшем критического, находится в мейсснеровском состоянии, когда за счет возникающих экранирующих токов внешнее магнитное поле выталкивается из него. Это означает, что по принципу суперпозиции магнитное поле, созданное этими экранирующими токами и необходимое для компенсации внешнего поля внутри образца, во всех точках в точности равно внешнему

полю и направлено противоположно ему. Плотность энергии этого поля равна $\mu_0 H_e^2/2$, а полная свободная энергия единицы объема равна $F_s + \mu_0 H_e^2/2$. При внешнем поле, равном критическому H_c , образец переходит в нормальное состояние, поскольку его энергия равна энергии в нормальном состоянии, т.е. $F_N = F_s + \mu_0 H_c^2/2$, откуда следует

$$F_N - F_s = \mu_0 H_c^2/2 \quad (1.2)$$

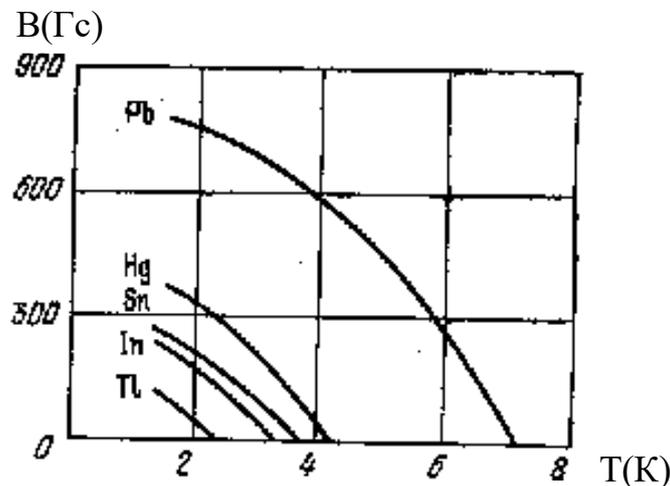


Рис.1.6. Зависимости критического поля от температуры для некоторых сверхпроводников

§1.4. Тип фазового перехода

В отсутствие внешнего магнитного поля переход в сверхпроводящее состояние представляет собой фазовый переход второго рода, т.е. происходит без выделения или поглощения тепла. При этом, в полном соответствии с теорией такого перехода, теплоемкость в точке перехода испытывает скачок.

Иначе обстоит дело, если процесс происходит во внешнем магнитном поле. В этом случае при переходе из сверхпроводящего состояния в нормальное тепло должно поглощаться и наоборот. Иначе говоря, в магнитном поле имеет место фазовый переход первого рода.

§1.5. Три вида сверхпроводников

С точки зрения поведения в магнитном поле сверхпроводники можно разделить на три основных типа. Следует отметить, что различия в поведении в магнитном поле свидетельствуют о существенных различиях в физике микропроцессов, происходящих в образцах.

В сверхпроводниках первого рода мейсснеровское состояние, когда магнитное поле выталкивается из объема сверхпроводника и отлично от нуля только в тонком приповерхностном слое, имеет место вплоть до некоторого критического поля H_c . Если поле превышает это значение, образец переходит в нормальное состояние.

Эффект выталкивания магнитного поля из образца можно представить следующим образом. Экранирующие токи, полностью компенсирующие внешнее магнитное поле внутри образца, сообщают ему магнитный момент. Чисто формально можно говорить о намагниченности \vec{M} , равной магнитному моменту единицы объема образца. Вектор

магнитной индукции внутри образца определяется выражением $\vec{B} = \mu_0(\vec{H}_e + \vec{M})$ (подробнее об этой формуле будет сказано в конце §2.2, стр.33). Часто в качестве характеристики поведения образца в магнитном поле \vec{H}_e принимается кривая намагничивания, т.е. зависимость намагниченности M от внешнего магнитного поля. На рис.1.7 приведена такая кривая для сверхпроводника первого рода.

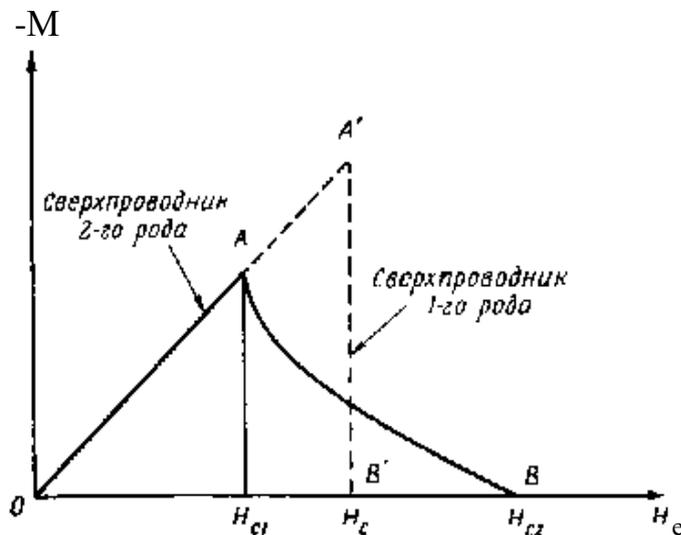


Рис.1.7. Кривые намагничивания сверхпроводников I-го и II-го рода, имеющих форму длинного цилиндра, в продольном поле

На том же рисунке сплошной линией изображена кривая намагничивания сверхпроводника второго рода. В этом случае значение H_C соответствует равенству свободных энергий в нормальном и сверхпроводящем состояниях, т.е. это значение внешнего поля, при котором образцу было бы энергетически выгодно перейти в нормальное состояние. Сравнивая кривые, можно видеть, что в сверхпроводниках второго рода существует некоторое критическое значение H_{C1} , меньшее H_C , при превышении которого внешним магнитным полем оно начинает проникать в объем образца. Далее с ростом магнитного поля магнитный момент образца монотонно снижается, т.е. поле все сильнее проникает в образец. При достижении полем значения H_{C2} , большего H_C , магнитный момент становится равным нулю, т.е. внешнее магнитное поле полностью подавило сверхпроводимость. Таким образом, можно сделать вывод, что сверхпроводник II-го рода в своем поведении не руководствуется простыми энергетическими соображениями, как это делает сверхпроводник I-го рода.

В сверхпроводниках III-го рода, или, как их иначе называют, жестких сверхпроводниках II-го рода, кривая намагниченности имеет совершенно иной вид (кривая 2 на рис.1.8). Явно виден гистерезисный характер кривой. При снятии внешнего поля поток остается заморожен в образце.

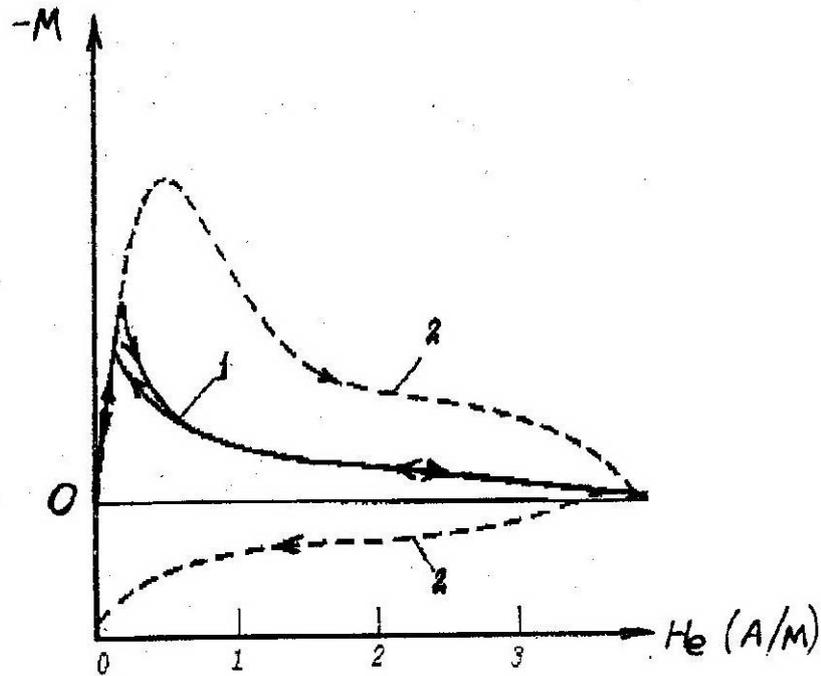


Рис.1.8. Кривые намагничивания сплава $Nb_{0,55}Ta_{0,45}$

1- очень хорошо отожженный образец, 2 - образец с большим количеством структурных дефектов.

Кристаллические решетки сверхпроводников III-го рода содержат большое количество дефектов, которые препятствуют движению вихревых нитей (о них мы подробно поговорим позже). При тщательном отжиге эти дефекты удается устранить, кривая намагничивания становится практически обратимой и соответствует сверхпроводнику II-го рода (кривая 1 на рис.1.8).

§1.6. Энергетическая щель

Различные эксперименты, такие как туннельный эффект, поглощение света и ультразвука и т.п., свидетельствуют о том, что при переходе вещества в сверхпроводящее состояние в его энергетическом спектре образуется щель, величина которой связана с критической температурой примерным соотношением

$$E_g = 2\Delta \approx 3,5kT_c, \quad (1.3)$$

где Δ - так называемая полуширина щели.

Обсудим эту ситуацию подробнее.

Рассмотрим сначала нормальный металл. В основном состоянии при $T = 0$ электроны заполняют все состояния внутри сферы Ферми. Чтобы получить возбужденное состояние, достаточно переместить один электрон из первоначально занятого состояния ($k \leq k_F$) в пустое ($k' > k_F$). При этом образуются две квазичастицы – электрон с импульсом $k' > k_F$ и дырка в том месте, где он раньше находился. Энергии возбуждений естественно отсчитывать от энергии Ферми:

$$\xi_{k'} = \frac{\hbar^2(k'^2 - k_F^2)}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{m} k_F (k' - k_F) \quad \text{при } k' > k_F \quad (1.4)$$

$$\xi_k = \frac{\hbar^2(k_F^2 - k^2)}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{m} k_F (k_F - k) \quad \text{при } k < k_F \quad (1.5)$$

Если оба импульса лежат близко к поверхности Ферми, то энергия $\xi_k + \xi_{k'}$, необходимая для их создания, мала. Иными словами, в металле могут существовать возбуждения со сколь угодно малыми энергиями. Зависимость энергии возбуждений $\varepsilon_k(k)$, описываемая соотношениями (1.4) и (1.5), на рис.1.9 представлена прямыми.

В сверхпроводнике дело обстоит иначе. Формулы (1.4) и (1.5) уже непригодны. Энергия необходимая для создания пары возбуждений должна превышать некоторую величину 2Δ , называемую «шириной щели», а энергия каждого из возникших двух возбуждений описывается формулой

$$\varepsilon_k = (\xi_k^2 + \Delta^2)^{1/2} \quad (1.6)$$

и не может быть меньше полуширины щели Δ . Зависимость $\varepsilon_k(k)$, описываемая соотношениями (1.6), изображена на рис.1.9.

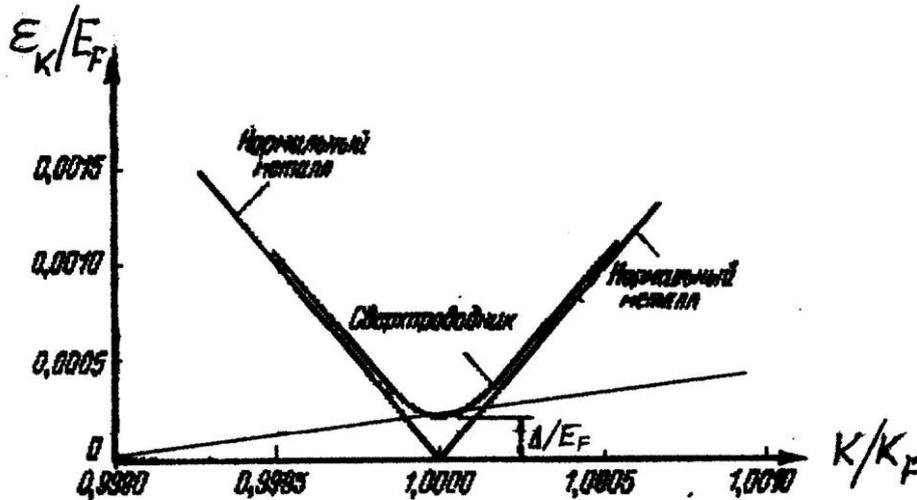


Рис.1.9. Энергия возбуждения в нормальном и сверхпроводящем состояниях как функция волнового вектора.

Рассмотрим кристаллическую решетку с общей массой M . Сверхпроводящий ток можно рассматривать как коллективное движение электронного газа относительно решетки. Можно сказать, что решетка движется со скоростью \vec{v} относительно электронного газа. "Трение" будет уменьшать эту скорость, только если в газе будут возникать возбуждения и кинетическая энергия решетки будет переходить в их энергию. Пусть возникло одно возбуждение с энергией E_k и импульсом $\hbar\vec{k}$. При этом из законов сохранения энергии и импульса имеем

$$\frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} Mv'^2 + E_k, \quad M\vec{v} = M\vec{v}' + \hbar\vec{k} \quad (1.7)$$

Из этих двух соотношений получим

$$0 = -\hbar\vec{k} \cdot \vec{v} + \frac{\hbar^2 k^2}{2M} + E_k \quad (1.8)$$

Считая массу кристалла M бесконечно большой, приходим к выводу, что существует минимальное значение скорости, при которой может быть выполнено условие (1.8):

$$v_c = \min \left(\frac{E_k}{\hbar k} \right) \quad (1.9)$$

При наличии щели в спектре возбуждений $E_k > 0$, и, следовательно, $v_c > 0$.

Наклонная прямая на рис.1.10 имеет угловой коэффициент, равный $\hbar k_F v_c / E_F$. Таким образом, в сверхпроводнике токи со скоростями меньше v_c протекают без потерь энергии, т.е. без затухания. Зная величину v_c , можно рассчитать критическую плотность тока. Она может оказаться весьма значительной.

§1.7. Одночастичное туннелирование

Исследование туннельного эффекта дает важную информацию об энергетическом спектре носителей тока. Отмеченные в предыдущем пункте особенности этого спектра в сверхпроводниках не могли не сказаться на виде туннельных характеристик. Именно анализируя результаты туннельных экспериментов, И.Живер в 1961 г. впервые доказал существование щели в энергетическом спектре сверхпроводников, за что в 1973 г. получил нобелевскую премию по физике.

Методика основывается на наблюдении туннельного тока через тонкий непроводящий слой, разделяющий два образца. Количество проходящих через барьер электронов зависит от числа электронов, падающих на барьер, вероятности туннелирования и числа свободных состояний по другую сторону барьера. Мы исключим из анализа вероятность туннелирования, так как она зависит от параметров барьера, а не от характеристик образца. Тогда величина туннельного тока будет определяться плотностью занятых состояний по одну сторону от барьера и плотностью свободных - по другую.

На рис.1.10 изображена наглядная картина одночастичного туннелирования между нормальным металлом и сверхпроводником при приложении между ними напряжения U . Отметим, что вдали от k_F кривая описывается формулой $\varepsilon_k = |E_F - \hbar^2 k^2 / 2m|$. На верхнем рисунке электрон, находившийся в состоянии $\vec{k} \uparrow$ под поверхностью Ферми нормального металла, туннелирует через пленку окисла в состояние $\vec{k}' \uparrow$ над ферми-поверхностью в сверхпроводнике. При этом слева остается дырка, соответствующая энергии возбуждения ε_α . Кроме того, помещая частицу в состояние $\vec{k}' \uparrow$, мы получаем в сверхпроводнике возбуждение с энергией $\varepsilon_\beta = \sqrt{\xi_{k'}^2 + \Delta^2}$.

Другой процесс показан на нижнем рисунке, он совпадает с рассмотренным, за исключением того, что квазичастица помещается в состояние $\vec{k}'' \downarrow$ под уровнем Ферми.

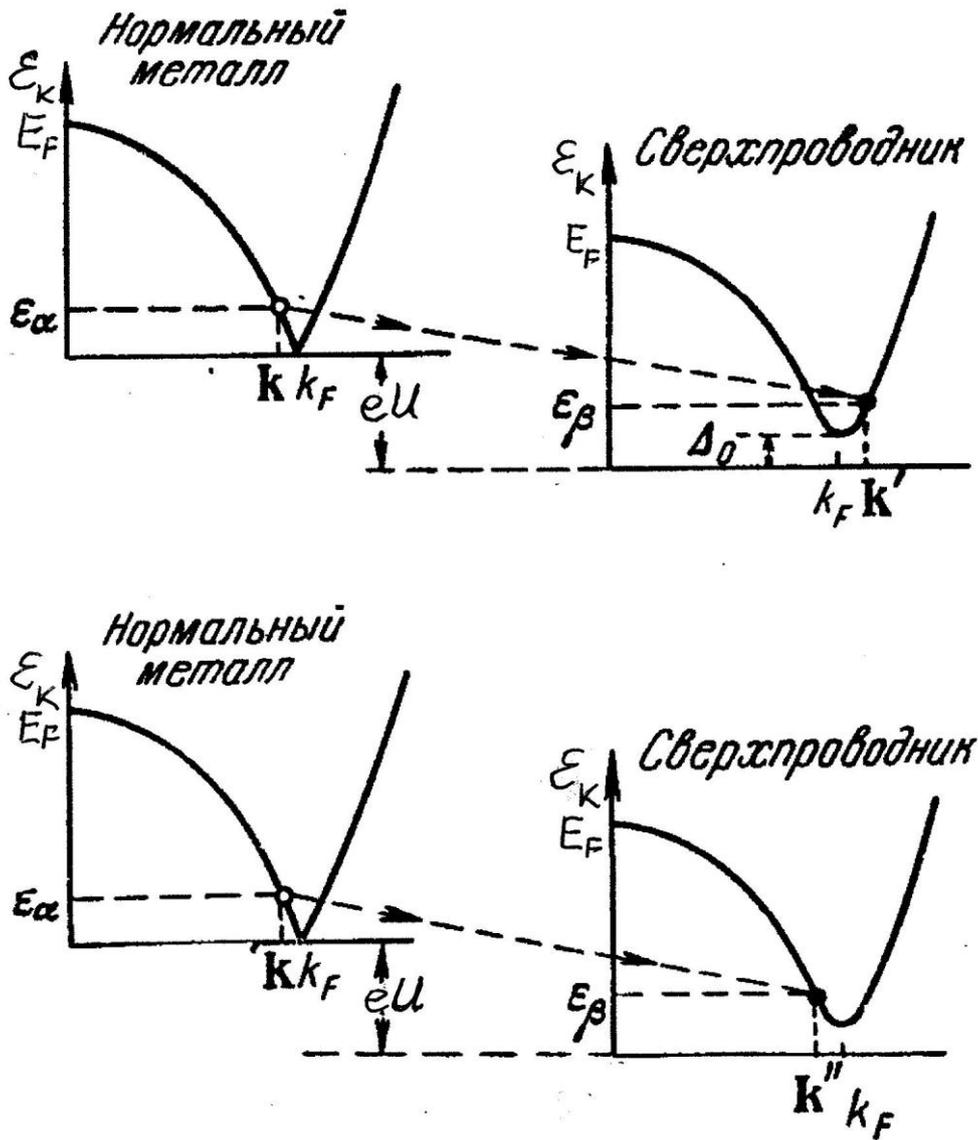


Рис.1.10. Одночастичное туннелирование между нормальным металлом и сверхпроводником при приложении между ними напряжения U .

Оба эти процесса могут идти, если сохраняется энергия: $\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta = eU$, т.е. при $U > \Delta/e$. При контакте двух нормальных металлов ток существует при любых, сколь угодно малых, напряжениях.

Вольтамперные характеристики для случаев металл-металл и металл-сверхпроводник приведены на рис.1.12 (кривые 1 и 2).

При рассмотрении явлений туннелирования часто полезна «полупроводниковая модель» спектра возбуждений (рис. 1.11). Однако использовать ее надо с осторожностью, так как состояния «над энергетической щелью» в этой модели являются на самом деле линейными комбинациями квазичастичных состояний над и под поверхностью Ферми. Если же говорить о состояниях одиночных электронов, то они существуют и внутри щели, как мы увидим в дальнейшем. В случае же полупроводников внутри щели одночастичные электронные состояния отсутствуют.

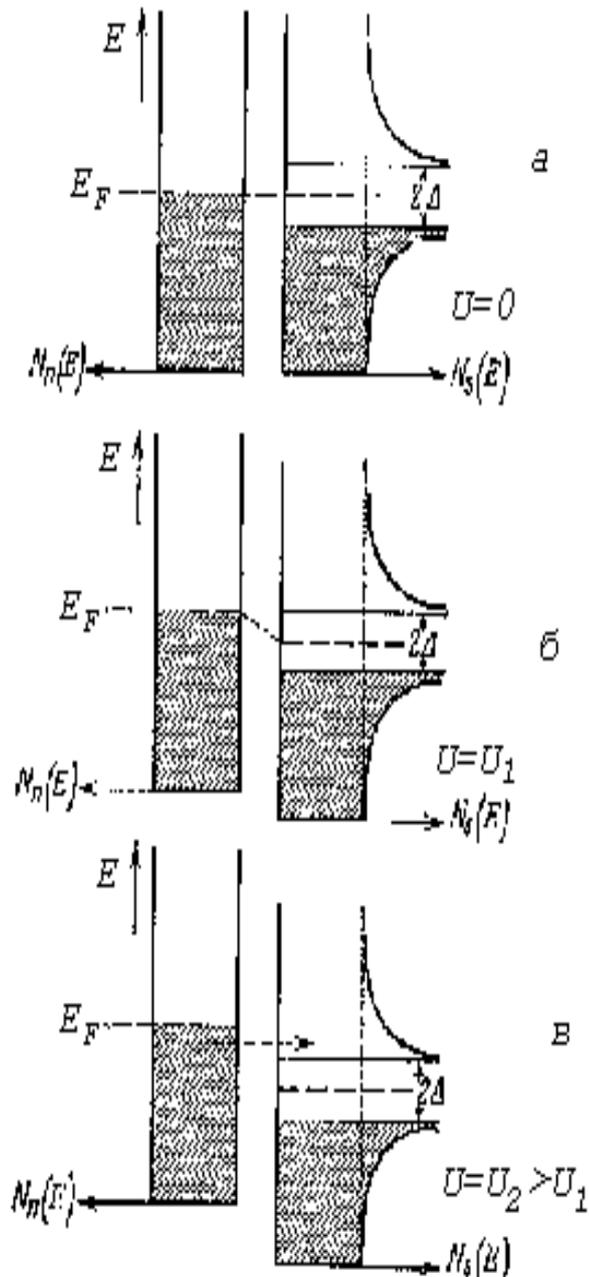


Рис.1.11. Туннелирование между нормальным металлом и сверхпроводником при $T=0$ (полупроводниковая модель).

В этой модели происходящее можно прокомментировать так. На рис.1.11а изображен контакт при отсутствии внешнего напряжения. Заполнение состояний показано штриховкой. По горизонтали отложена плотность состояний. Равновесное состояние устанавливается при выравнивании уровней Ферми. Переход электронов из одной части в другую отсутствует. Общий ток равен нулю. Вплоть до напряжения $U = \Delta/e$ туннельный ток отсутствует, так как электроны нормального металла не могут найти подходящих состояний в сверхпроводнике. При $U = \Delta/e$ начинается рост туннельного тока с вертикальной

касательной. Этот резкий подъем обусловлен высокой плотностью состояний в сверхпроводнике. При дальнейшем росте напряжения кривая приближается к туннельной характеристике двух нормальных металлов. При конечных температурах в металле имеется некоторое количество электронов с энергиями выше уровня Ферми, а щель в сверхпроводнике уменьшается. В этом случае характеристика принимает вид кривой 3 рис.1.12.

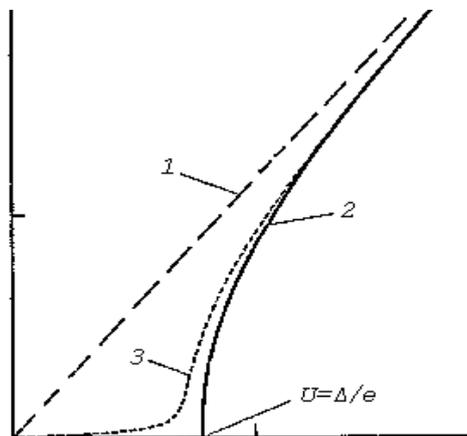


Рис.1.12. Вольтамперные характеристики туннельных контактов.

1 - нормальный металл / нормальный металл; 2 - нормальный металл / сверхпроводник, $T=0$;
3 - нормальный металл / сверхпроводник, $0 < T < T_c$.

Вольтамперная характеристика для контакта двух сверхпроводников. схематично представлена на рис.1.13.

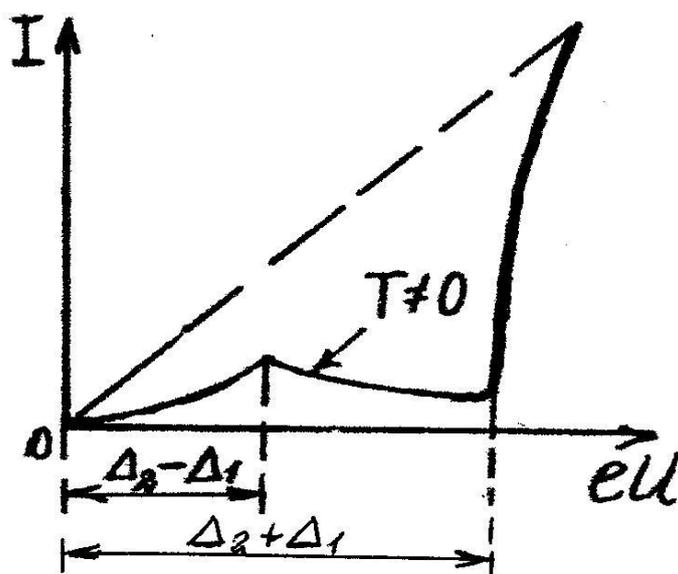


Рис.1.13. Туннелирование между двумя сверхпроводниками.

§1.8. Стационарный и нестационарный эффекты Джозефсона

В предыдущем пункте мы рассмотрели туннелирование отдельных электронов через изолирующую прослойку. Но, как мы увидим далее, в сверхпроводнике электроны объединены в куперовские пары. Поэтому естественно предположить, что в случае контакта двух сверхпроводников через достаточно тонкий слой диэлектрика могут туннелировать и пары целиком. Первым рассмотрел этот эффект Б.Джозефсон в 1962 г. За эти работы в 1973г. ему была присуждена Нобелевская премия. Он показал, что туннелирование куперовских пар становится существенным при толщине барьера 10-20 ангстрем. Кроме того, он предсказал несколько необычных и интересных явлений, имеющих место при туннелировании пар. Впоследствии все его предсказания блестяще подтвердились на эксперименте. Помимо своего принципиального значения для понимания сверхпроводимости эффекты Джозефсона (так принято теперь называть этот комплекс явлений) предоставляют интереснейшие возможности для их использования при проведении точнейших измерений. Подчеркнем, что особенно важную роль они играют в процессах, происходящих в высокотемпературных керамических сверхпроводниках, поскольку в них такие контакты уже существуют естественным образом (контакты между гранулами). Эти вещества по этой причине даже называют иногда джозефсоновскими средами.

Стационарный эффект Джозефсона - это протекание через тонкую изолирующую прослойку незатухающего сверхпроводящего тока при нулевом напряжении на контакте. Величина такого тока не может быть больше некоторого критического значения J_c .

Нестационарный эффект Джозефсона состоит в том, что при ненулевом напряжении на контакте через него протекает высокочастотный переменный ток, частота которого ν пропорциональна напряжению на контакте:

$$\nu = \frac{2eU_s}{h} \quad (1.10)$$

Для того чтобы понять практическую ситуацию, рассмотрим цепь, изображенную на рис.1.14. При протекании постоянного сверхпроводящего тока (стационарный эффект Джозефсона) напряжение на контакте равно нулю, т.е. все приложенное напряжение U_e падает на сопротивлении R , при этом сила тока, равная U_e/R , не должна превышать критическое значение J_c . Таким образом, стационарный эффект Джозефсона имеет место, пока $U_e \leq J_c R$. Если же $U_e > J_c R$, то начинается генерация высокочастотного тока. При этом математическое описание цепи становится весьма сложным.

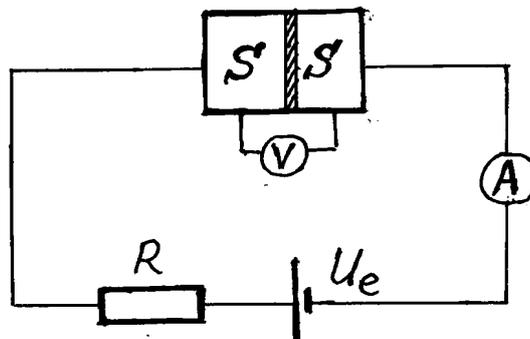


Рис.1.14. Схема для демонстрации эффектов Джозефсона

§ 1.9. Квантование потока

Рассмотрим замкнутое сверхпроводящее кольцо. В нем можно индукционным путем (например, как показано на рис.1.4) возбудить ток. Этот ток будет оставаться неизменным неограниченно долгое время. Казалось бы, что соответствующим подбором магнитного поля можно получить любое значение индуцированного незатухающего тока. Однако это не так. Ток в кольце может принимать дискретные значения. Это положение ясно сформулировал Ф.Лондон. Он пришел к заключению, что магнитный поток, пронизывающий сверхпроводящее кольцо, должен равняться целому числу так называемых квантов магнитного потока Φ_0 . Ситуация аналогична боровской модели атома, в которой разрешенные электронные состояния соответствуют различным значениям момента импульса, который может принимать только значения, равные целому числу постоянных Планка.

Величина кванта потока Φ_0 , по мнению Лондона, была равна h/e , где h - постоянная Планка, а e - заряд электрона. Этот вывод базировался на предположении, что ток переносится отдельными электронами. Однако впоследствии оказалось, что ток переносится так называемыми *куперовскими парами*, т.е. частицами с зарядом $2e$. Поэтому квант потока оказался вдвое меньше:

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = \frac{\pi\hbar}{e} \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ Вб} \quad (1.11)$$

Предсказания Лондона блестяще подтвердились экспериментом.

Отметим, что сформулированное выше условие квантования потока справедливо вне зависимости от того, создан ли магнитный поток, пронизывающий кольцо, током в самом кольце или же внешним магнитным полем. Если имеется внешнее поле, то сверхпроводящие токи в кольце установятся таким образом, чтобы суммарный магнитный поток через кольцо равнялся целому числу квантов потока.

Квантование магнитного потока, а также рассмотренные в предыдущем пункте эффекты Джозефсона, являются следствием так называемой *фазовой когерентности* всех куперовских пар. С точки зрения квантовой механики все пары находятся в одном квантовом состоянии, т.е. согласованы между собой по всем физическим параметрам, в частности, по фазам. Эта фазовая корреляция распространяется на очень большие (практически неограниченные) расстояния. Таким образом, все эти эффекты являются чисто квантовыми явлениями, но, в отличие от большинства таких явлений, проявляющихся в микромире (атомы, молекулы и т.п.), они имеют место в макроскопических системах.

§1.10. Изотопический эффект

В поисках объяснения эффекта сверхпроводимости экспериментаторы исследовали зависимость критической температуры от различных параметров. В частности, вопрос о том, влияет ли на сверхпроводимость решетка атомных остовов или она связана только с системой электронов, начал исследоваться уже в 1922 г. самим Оннесом. В основу исследования была положена весьма остроумная идея: различные изотопы одного и того же элемента, имеющие разные массы, с точки зрения электронной структуры идентичны. Поэтому выявление зависимости критической температуры от вида изотопа доказало бы, что решетка также участвует в создании феномена сверхпроводимости. Первые эксперименты не

показали такой зависимости, но в результате развития физики появились возможности получения в достаточных количествах изотопов с сильно различающимися массами. В 1950 г. такая зависимость была обнаружена несколькими группами физиков. При изменении массы атома изотопа ртути от 199,5 до 203,4 а.е.м. критическая температура изменялась от 4,185 К до 4,146 К.

Уже простейшие качественные соображения, высказанные Фрелихом, позволяли ожидать, что температура перехода должна быть обратно пропорциональна квадратному корню из массы атома:

$$T_c \sim M^{-0,5} \quad (1.12)$$

В дальнейшем теория БКШ подтвердила этот результат. Однако учет более тонких эффектов может приводить к отклонениям от этого соотношения.

Открытие изотопического эффекта подтвердило влияние на сверхпроводимость колебаний решетки и направило поиски теории сверхпроводимости в сторону электрон-фононных взаимодействий, что, в конечном итоге, и привело к построению теории БКШ.

§1.11. Применение сверхпроводников

Вопросы различных применений сверхпроводящих материалов стали обсуждаться практически сразу после открытия явления сверхпроводимости. Еще Камерлинг-Оннес считал, что с помощью сверхпроводников можно создавать экономичные установки для получения сильных магнитных полей. Однако реальное использование сверхпроводников началось в 50-х – начале 60-х годов XX века. В настоящее время работают сверхпроводящие магниты различных размеров и форм. Их применение вышло за рамки чисто научных исследований, и сегодня они широко используются в лабораторной практике, в ускорительной технике, томографах, установках для управляемой термоядерной реакции. С помощью сверхпроводимости стало возможным многократно повысить чувствительность многих измерительных приборов. Такие приборы названы сквидами (от англ. Superconducting Quantum Interference Devices). Особо следует подчеркнуть внедрение сквидов в технику, в том числе и в современную медицину.

Наибольшее применение сверхпроводники нашли в настоящее время в области создания сильных магнитных полей. Современная промышленность производит из сверхпроводников второго рода разнообразные провода и кабели, используемые для изготовления обмоток сверхпроводящих магнитов, с помощью которых получают значительно более сильные поля (более 20 Тл), чем при использовании железных магнитов. Сверхпроводящие магниты являются и более экономичными. Так, например, для поддержания в медном соленоиде с внутренним диаметром 4 см и длиной 10 см поля 100 кГс необходима электрическая мощность не менее 5100 кВт, которую нужно полностью отвести водой, охлаждающей магнит. Это означает, что через магнит надо прокачивать не менее 1 м³ воды в минуту, а затем ее еще охлаждать. В сверхпроводящем варианте такой объем магнитного поля создается достаточно просто, необходимо лишь сооружение гелиевого криостата для охлаждения обмоток, что является несложной технической задачей.

Другое преимущество сверхпроводящих магнитов состоит в том, что они могут работать в автономном режиме, без внешних источников.

Еще одно применение сверхпроводников – создание подшипников и опор без трения. Если над металлическим кольцом с током поместить сверхпроводящую сферу, то на ее

поверхности в силу эффекта Мейснера индуцируется сверхпроводящий ток, что приводит к появлению сил отталкивания между кольцом и сферой, и сфера может повиснуть над кольцом. Подобный же эффект может наблюдаться, если над сверхпроводящим кольцом поместить постоянный магнит. На этом может быть основано создание, например, новых видов транспорта. Речь идет о создании поезда на магнитной подушке, в котором будут полностью отсутствовать потери на трение о колею дороги. Модель такой сверхпроводящей дороги длиной 400 м была построена в Японии еще в 1970-х годах. Расчеты показывают, что поезд на магнитной подушке сможет развивать скорость до 500 км/ч. Такой поезд будет «зависать» над рельсами на расстоянии 2–3 см, что и даст ему возможность разогнаться до указанных скоростей.

В настоящее время широко используются сверхпроводящие объемные резонаторы, добротность которых может достигать $5 \cdot 10^{11}$.

Применение сверхпроводимости может привести к созданию сверхбыстрых электронно-вычислительных машин. Речь идет о так называемых криотронах – переключающих сверхпроводящих элементах. Такие устройства могут легко сочетаться со сверхпроводящими запоминающими элементами. Важным преимуществом криотронов перед обычными полупроводниковыми устройствами является отсутствие потребности в энергии в стационарном состоянии. После создания джозефсоновских контактов было предложено заменить ими криотроны, и оказалось, что время переключения такой системы составляет около 10^{-12} с. Именно это и открывает широкие перспективы для создания мощнейших вычислительных машин.

Наиболее перспективными направлениями широкого использования высокотемпературных сверхпроводников считаются криоэнергетика и криоэлектроника. В криоэнергетике уже разработана методика изготовления достаточно длинных (до нескольких километров) проводов и кабелей на основе висмутовых ВТСП-материалов. Этого уже достаточно для изготовления небольших двигателей со сверхпроводящей обмоткой, сверхпроводящих трансформаторов, катушек индуктивности и т. д.

В криоэлектронике разработана методика изготовления пленочных сквидов, которые по своим характеристикам практически не уступают гелиевым аналогам. Освоена методика получения совершенных магнитных экранов из ВТСП, в частности, для исследования биоманнитных полей. Из ВТСП созданы антенны, передающие линии, резонаторы, фильтры, смесители частоты и т. д.

ГЛАВА 2. ТЕОРИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

§2.1. Теория Бардина-Купера-Шриффера (БКШ)

2.1.1. Основные идеи и результаты.

Как было сказано в главе 1, микроскопическая теория, объясняющая саму природу явления сверхпроводимости, была создана лишь в 1957 году, через 46 лет после открытия сверхпроводимости.

Основным результатом, на котором базировалась эта теория, явился эффект группирования электронов в пары, открытый Л.Купером в 1956 году.

Купер рассмотрел задачу о поведении двух электронов при существовании притяжения между ними. При этом считалось, что остальные электроны образуют основное состояние, т.е., как в нормальном металле, в соответствии с принципом Паули заполняют всю сферу Ферми.

Расчет показал, что в этом случае поведение двух взаимодействующих электронов резко отличается от поведения этих электронов, если они изолированы от остальных. При наличии заполненной сферы Ферми при любом, сколь угодно малом притяжении эти два электрона образуют связанное состояние, которое имеет меньшую энергию и отделено от основного состояния нормального металла энергетической щелью. Оказалось, что наименьшей энергией (т.е. максимальной щелью) связанная пара обладает в том случае, когда составляющие ее электроны имеют антипараллельные спины и равные, но противоположно направленные импульсы.

Бардин, Купер и Шриффер обобщили результаты Купера на случай, когда все электроны связаны в пары. Тогда каждый электрон играет двойную роль. С одной стороны, в силу принципа Паули он создает ограничения на разрешенные значения волновых векторов других электронов, что дает им возможность группироваться в пары, несмотря на слабость притяжения. С другой стороны, этот электрон сам входит в состав одной из пар.

Таким образом, для объяснения группирования электронов в пары надо найти возможную причину притяжения между электронами. Теоретический анализ показал, что это притяжение может осуществляться за счет обмена фононами, т.е. за счет взаимодействия электронов с кристаллической решеткой. Такое взаимодействие можно наглядно представить следующим образом. В узлах решетки находятся положительно заряженные ионы. Электрон стремится притянуть их к себе. Таким образом, в окружающей электрон области происходит поляризация решетки, выражающаяся в скоплении положительных зарядов. Второй электрон, находящийся неподалеку, притягивается к этому скоплению, т.е. к первому электрону. Если рассматривать картину в динамике, то можно сказать, что один электрон при движении создает канавку, по которой выгодно двигаться второму электрону. Отсюда ясно, почему наиболее явно эффект проявляется для встречно движущихся электронов - каждый из них идет по следу, оставленному другим.

На первый взгляд, могут возникнуть сомнения в возможностях поляризации. Можно понять, что она уменьшает силу отталкивания, но может ли она заменить отталкивание притяжением? Для оценки ее возможностей рассмотрим взаимодействие точечного заряда с незаряженным шаром. Понятно, что поляризация, связанная с перераспределением зарядов на шаре, приведет к притяжению. Для компенсации этой силы нужно поместить на шар

какой-то заряд, одноименный с точечным. Пока заряд шара меньше этой величины, имеет место притяжение при одноименности зарядов!

Согласно теории БКШ, полуширина энергетической щели при нулевой температуре определяется выражением

$$\Delta(0) = 2\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{1}{U \cdot N(E_F)}\right), \quad (2.1)$$

где $U > 0$ - потенциал электрон-решеточного взаимодействия, $N(E_F)$ - плотность электронных состояний на уровне Ферми, ω_D - дебаевская частота кристалла.

Из выражения (2.1) понятно, почему теория сверхпроводимости создавалась с таким трудом и так долго. Это выражение нельзя разложить в степенной ряд по малому взаимодействию U , поэтому обычно используемый при расчете изменений в электронном спектре метод возмущений не мог привести к правильному результату, т.е. к возникновению щели.

Из (2.1) следует также интересный результат. В нормальных металлах сопротивление тем выше, чем выше взаимодействие электронов проводимости с решеткой, т.е. чем больше величина U . В сверхпроводниках же, чем больше U , тем выше критическая температура. Таким образом, чем выше сопротивление металла в нормальном состоянии, тем легче он переходит в сверхпроводящее. Однако эта закономерность имеет место для металлов со сравнимыми концентрациями электронов сверхпроводимости.

Из детальных расчетов следует, что критическая температура T_C связана с полушириной энергетической щели Δ соотношением

$$3,5k_B T_C = 2\Delta, \quad (2.2)$$

где k_B - постоянная Больцмана. Соотношение (2.2) подтверждает экспериментально полученную связь (1.3).

Как следует из теории БКШ, для создания в сверхпроводнике двух несвязанных электронов, т.е. двух возбужденных состояний, надо разорвать пару, т.е. затратить минимальную энергию 2Δ . Это значит, что минимальная энергия одного возбуждения (квазичастицы) равна Δ . Детальный расчет позволяет получить для энергии квазичастицы с импульсом p выражение

$$\varepsilon_p = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} - \varepsilon_F\right)^2 + \Delta^2}, \quad (2.3)$$

где ε_F - энергия Ферми.

Теоретически полученное выражение (2.3) совпадает с формулой (1.6), на основе которой в главе 1 было показано существование незатухающих сверхпроводящих токов. Это же свойство можно объяснить и другим способом. В отличие от электронов, являющихся фермионами, т.е. имеющих полуцелый спин, куперовская пара - это новая частица, имеющая спин, равный нулю. Частицы с целым спином называются бозонами и подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна. Для них не существует запрета Паули. Более того, все бозоны стремятся находиться в одном и том же состоянии. Происходит так называемая бозе-

конденсация - все куперовские пары выпадают в “конденсат”, т.е. имеют все одинаковые параметры. В частности, у всех пар одинаковый импульс. Казалось бы, в этом нет ничего особенного, ведь в пару входят электроны с противоположно направленными импульсами и поэтому импульс каждой пары равен нулю. Однако ситуация меняется, если вся совокупность пар приходит в движение, например, в электрическом поле. Все пары стремятся иметь одинаковый импульс. Это значит, что ни одна из них не может тормозиться, передавая энергию решетке, т.е. перенос заряда через решетку происходит без сопротивления.

Теория БКШ объясняет электронный спектр сверхпроводников, на основе чего можно предсказать практически все особенности поведения сверхпроводников. Следует отметить, что в случае “низкотемпературных” сверхпроводников наблюдается не только качественное, но и количественное согласие теории и эксперимента. В рамках этой теории объясняются также и многие свойства высокотемпературных сверхпроводников, хотя количественное согласие не столь хорошее.

2.1.2. Эффект Купера. Куперовские пары.

Рассмотрим взаимодействие двух электронов при полностью заполненной сфере Ферми.

Перенесем на этот случай концепцию квазичастиц, используемую в нормальных металлах. Электронные состояния вблизи уровня Ферми похожи на обычные частицы. Поэтому естественно отсчитывать энергии от уровня Ферми. Мы уже говорили об этом в §1.6.

Запишем уравнение Шредингера для двух взаимодействующих квазичастиц с одинаковыми $|\vec{k}|$:

$$(H_0(\vec{r}_1) + H_0(\vec{r}_2) + U(\vec{r}_1; \vec{r}_2))\Psi(\vec{r}_1; \vec{r}_2) = E\Psi(\vec{r}_1; \vec{r}_2) \quad (2.4)$$

Здесь $H_0(\vec{r}_1)$ - гамильтониан одной свободной частицы

$$H_0(\vec{r}_1)\psi_{\vec{k}}(\vec{r}_1) = |\xi_{\vec{k}}|\psi_{\vec{k}}(\vec{r}_1),$$

где волновая функция для свободной частицы имеет вид $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}_1) = V^{-1/2} \exp(i\vec{k}\vec{r}_1)$.

В основном состоянии полный импульс и полный спин должны равняться нулю. Поэтому построим волновую функцию в виде

$$\Psi(\vec{r}_1; \vec{r}_2) = V^{-1/2} \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}\uparrow}(\vec{r}_1) \psi_{-\vec{k}\downarrow}(\vec{r}_2) \quad (2.5)$$

Подставив (2.5) в (2.4), получим

$$2|\xi_{\vec{k}}|c_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}'} U_{\vec{k}\vec{k}'} c_{\vec{k}'} = E c_{\vec{k}} \quad (2.6)$$

Рассмотрим простейшую модель:

$$U_{\vec{k}\vec{k}'} = \begin{cases} -\lambda & \text{при } k_F - \omega_D / v_F < k, k' < k_F + \omega_D / v_F \\ 0 & \text{вне интервала} \end{cases} \quad (2.7)$$

Введем обозначение

$$I = \sum_{|\vec{k}'|=k_F+\omega_D/v_F}^{|\vec{k}'|=k_F-\omega_D/v_F} c_{\vec{k}}, \quad (2.8)$$

и получим

$$c_{\vec{k}} = \frac{\lambda}{2|\xi_{\vec{k}}| - E}. \quad (2.9)$$

Подставив (2.9) в (2.8), придем к уравнению самосогласования

$$I = \sum_{|\vec{k}'|=k_F+\omega_D/v_F}^{|\vec{k}'|=k_F-\omega_D/v_F} \frac{\lambda}{2|\xi_{\vec{k}}| - E} \quad (2.10)$$

Нас интересует основное состояние с отрицательной энергией. Введя обозначение $E = -2\Delta$ и преобразовав сумму в интеграл, получим

$$1 = \lambda N(E_F) \ln \frac{2\hbar\omega_D}{\Delta}$$

Отсюда следует

$$\Delta = 2\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{1}{\lambda N(E_F)}\right) \quad (2.11)$$

Мы видим, что $\Delta \neq 0$ при любой силе притяжения.

2.1.3. Энергетический спектр.

В эффекте Купера два взаимодействующих электрона отличаются от всех остальных, так как именно они изменяют свое состояние и группируются в пару. Остальные электроны остаются в исходном состоянии. На самом же деле, нужно учесть перестройку состояний всех электронов. Каждый из них, с одной стороны, в силу принципа Паули, создает ограничения на разрешенные значения волновых векторов других электронов, что дает им возможность группироваться в пары, несмотря на слабость притяжения. С другой стороны, этот электрон сам входит в состав одной из пар.

Для расчета энергетического спектра воспользуемся методом вторичного квантования, т.е. перейдем к представлению чисел заполнения. Нам надо минимизировать свободную энергию. Рассчитаем энергию основного состояния для случая притяжения электронов. Чтобы не вводить дополнительное условие постоянства числа частиц, будем отсчитывать их

энергию от химического потенциала μ , т.е. $\xi_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$.

В качестве модельного гамильтониана N электронов в объеме V примем

$$H = \sum_{\vec{k},\sigma} \xi_{\vec{k}} a_{\vec{k},\sigma}^+ a_{\vec{k},\sigma} + \frac{1}{2V} \sum_{\vec{k},\vec{k}',\sigma} U_{\vec{k}\vec{k}'} a_{\vec{k},\sigma}^+ a_{-\vec{k}',-\sigma}^+ a_{-\vec{k},-\sigma} a_{\vec{k},\sigma}, \quad (2.12)$$

где a^+ и a - операторы рождения и уничтожения, $U_{\vec{k}\vec{k}'}$ - матричный элемент энергии взаимодействия двух электронов. Первый член – собственная энергия электронов. Второе слагаемое - энергия взаимодействия между электронами, обусловленная обменом виртуальными фононами. В каждом члене суммы уничтожается пара электронов с противоположными спинами (σ и $-\sigma$) и квазиимпульсами (\vec{k} и $-\vec{k}$) и рождается другая пара с \vec{k}' и $-\vec{k}'$.

Слагаемые, отличающиеся только значениями спина σ , дают одинаковый вклад в (2.12), поэтому можно записать

$$H = 2 \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} a_{\vec{k},1/2}^+ a_{\vec{k},1/2} + \frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\vec{k}'} U_{\vec{k}\vec{k}'} a_{\vec{k},1/2}^+ a_{-\vec{k}',-1/2} a_{-\vec{k},-1/2} a_{\vec{k},1/2} \quad (2.13)$$

Задача об определении основного состояния и спектра возбуждений для системы с таким гамильтонианом может решаться разными способами: преобразование Боголюбова, суммирование диаграмм Фейнмана, метод спиновой аналогии и др. Решим ее с помощью канонического преобразования Боголюбова - введем квазичастичные операторы $A_{\vec{k}0}^-, A_{\vec{k}1}^-$ такими соотношениями:

$$a_{\vec{k},1/2}^- = u_{\vec{k}}^- A_{\vec{k}0}^- + v_{\vec{k}}^- A_{\vec{k}1}^{+} \quad a_{-\vec{k},-1/2}^- = u_{\vec{k}}^- A_{\vec{k}1}^- - v_{\vec{k}}^- A_{\vec{k}0}^{+} \quad (2.14)$$

где $u_{\vec{k}}^-$ и $v_{\vec{k}}^-$ - вещественные функции, симметричные относительно преобразования $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$.

Для всех ферми-операторов должны удовлетворяться перестановочные соотношения для антикоммутирующих: $\{a_i^+, a_k\} = \delta_{ik}$, $\{a_i, a_k\} = 0$, $\{a_i^+, a_k^+\} = 0$ и аналогично для A. Все они выполняются, если функции $u_{\vec{k}}^-$ и $v_{\vec{k}}^-$ удовлетворяют соотношениям:

$$u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 = 1 \quad (2.15)$$

Чтобы проверить это, вычислим, например, антикоммутатор:

$$\{a_{\vec{k},1/2}^- a_{\vec{k},1/2}^+\} = u_{\vec{k}}^2 \underbrace{\{A_{\vec{k}0}^- A_{\vec{k}0}^+\}}_{=1} + v_{\vec{k}}^2 \underbrace{\{A_{\vec{k}1}^+ A_{\vec{k}1}^-\}}_{=1} + u_{\vec{k}}^- v_{\vec{k}}^- \underbrace{\{A_{\vec{k}1}^+ A_{\vec{k}0}^+\}}_{=0} + u_{\vec{k}}^- v_{\vec{k}}^- \underbrace{\{A_{\vec{k}1}^- A_{\vec{k}0}^-\}}_{=0} = u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 = 1.$$

Тогда (2.13) преобразуется к виду:

$$H = E_0 + H_0 + H_1 + H_2,$$

где
$$E_0 = 2 \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^2 + \frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\vec{k}',\sigma} U_{\vec{k}\vec{k}'} u_{\vec{k}}^- v_{\vec{k}'}^- u_{\vec{k}}^- v_{\vec{k}'}^- \quad (2.16)$$

постоянное слагаемое, не зависящее от ферми-операторов и соответствующее энергии основного состояния;

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} [\xi_{\vec{k}} (u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2) - \frac{2u_{\vec{k}}^- v_{\vec{k}}^-}{V} \sum_{\vec{k}'} U_{\vec{k}\vec{k}'} u_{\vec{k}}^- v_{\vec{k}'}^-] (A_{\vec{k}0}^+ A_{\vec{k}0}^- + A_{\vec{k}1}^+ A_{\vec{k}1}^-) - \quad (2.17)$$

диагональная часть гамильтониана;

$$H_1 = \sum_{\vec{k}} [2\xi_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^- v_{\vec{k}}^- + \frac{1}{V} (u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2) \sum_{\vec{k}'} U_{\vec{k}\vec{k}'} u_{\vec{k}}^- v_{\vec{k}'}^-] (A_{\vec{k}0}^+ A_{\vec{k}1}^+ + A_{\vec{k}1}^- A_{\vec{k}0}^-) - \quad (2.18)$$

недиагональная часть гамильтониана, содержащая произведение двух ферми-операторов. Оператор H_2 содержит произведение четырех новых ферми-операторов. При исследовании возбужденных состояний малых энергий его можно опустить.

Пока функции $u_{\vec{k}}^-$ и $v_{\vec{k}}^-$ были произвольными, при условии (2.15). Выберем их так, чтобы обратить в нуль оператор (2.18). Для этого достаточно потребовать выполнения равенства

$$2\xi_{\vec{k}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} = -\frac{1}{V} (u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2) \sum_{\vec{k}'} U_{\vec{k}\vec{k}'} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'}, \quad (2.19)$$

Можно убедиться, что это равенство при выполнении (2.15) является одновременно условием минимума энергии основного состояния (2.16).

$$\text{Введем обозначение} \quad \Delta_{\vec{k}} \equiv -\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}'} U_{\vec{k}\vec{k}'} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'}. \quad (2.20)$$

Тогда из (2.15) и (2.19) можно выразить искомые $u_{\vec{k}}$ и $v_{\vec{k}}$ через $\xi_{\vec{k}}$ и $\Delta_{\vec{k}}$:

$$u_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\xi_{\vec{k}}}{\sqrt{\Delta_{\vec{k}}^2 + \xi_{\vec{k}}^2}} \right]; \quad v_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\xi_{\vec{k}}}{\sqrt{\Delta_{\vec{k}}^2 + \xi_{\vec{k}}^2}} \right] \quad (2.21)$$

Подставив (2.21) в (2.20), найдем нелинейное уравнение, определяющее $\Delta_{\vec{k}}$:

$$\Delta_{\vec{k}} = -\frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}'} \frac{U_{\vec{k}\vec{k}'} \Delta_{\vec{k}'}}{\sqrt{\Delta_{\vec{k}'}^2 + \xi_{\vec{k}'}^2}} \quad (2.22)$$

Подставляя (2.20) и (2.21) в (2.17), можно преобразовать диагональную часть гамильтониана к виду:

$$H_0^0 = \sum_{\vec{k}} \sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2} (A_{\vec{k}0}^+ A_{\vec{k}0} + A_{\vec{k}1}^+ A_{\vec{k}1}) \quad (2.23)$$

Таким образом, вследствие взаимодействия электронов друг с другом их спектр элементарных возбуждений имеет вид:

$$\varepsilon_{\vec{k}} = \sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2} \quad (2.24)$$

Каждому значению квазиимпульса \vec{k} соответствуют два типа возбуждений, относящихся к операторам рождения $A_{\vec{k}0}^+$ и $A_{\vec{k}1}^+$.

Изменение одночастичного спектра, обусловленное взаимодействием, определяется величиной $\Delta_{\vec{k}}$, которая является корнем уравнения (2.22).

Перейдем к исследованию этого уравнения. Оно имеет тривиальное решение $\Delta_{\vec{k}}=0$, соответствующее нормальному состоянию. Рассмотрим другие решения для простейшего случая

$$U_{\vec{k}\vec{k}'} = \begin{cases} -\lambda & \text{при } k_F - q < k, k' < k_F + q \\ 0 & \text{вне интервала} \end{cases} \quad (2.25)$$

В этом случае, как следует из (2.22), внутри указанного интервала величина $\Delta_{\vec{k}}$ также постоянна ($\Delta_{\vec{k}} = \Delta$), и уравнение (2.22) принимает вид:

$$1 = \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 + \xi_{\vec{k}}^2}} \quad (2.26)$$

Заменим сумму интегралом по правилу $\sum_{\vec{k}} \dots = V(2\pi)^{-3} \int \dots d^3k$. Полагая

химпотенциал равным $\mu = E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$, получим

$$\xi_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2(k^2 - k_F^2)}{2m} \approx \hbar^2 k_F \underbrace{(k - k_F)}_{\delta} / m.$$

Далее подставляем $d^3\vec{k} = 4\pi k_F^2 dk$, и равенство (2.26) принимает вид:

$$1 = \frac{\lambda k_F^2}{4\pi} \int_{-q}^q \left[\Delta^2 + \left(\frac{\hbar^2 k_F}{m} \delta \right)^2 \right]^{-1/2} d\delta \quad (2.27)$$

Вычисляя интеграл и разрешая уравнение относительно Δ , получим

$$\Delta = \frac{2\hbar^2 k_F q}{m(\exp(1/\lambda N(E_F)) - 1)}; \quad (2.28)$$

где $N(E_F) = \frac{mk_F}{2\pi^2 \hbar^2}$ - плотность электронных состояний на уровне Ферми (без учета спина).

Максимальное изменение волнового вектора электрона q соответствует максимальной (дебаевской) частоте виртуального фонона ω_D : $q = \omega_D / v_F$. В приближении слабой связи ($\lambda \cdot N(E_F) \ll 1$) получим окончательно

$$\Delta(0) = 2\hbar\omega_D \exp(-1/\lambda N(E_F)) \quad (2.29)$$

Становится понятным, почему теорию сверхпроводимости не удавалось создать на базе теории возмущений для учета взаимодействия. Теория возмущений дает поправки к энергии в виде степеней малой энергии взаимодействия λ , а полученная величина Δ стремится к нулю, как $\exp(-1/\lambda N(E_F))$, и при малых значениях λ не может быть разложена в ряд.

С целью выяснения физического смысла величины Δ выразим через нее энергию основного состояния E_0 . Подставив (2.20) и (2.21) в (2.16), получим

$$E_0 = \sum_{\vec{k}} \frac{\xi_{\vec{k}} (\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2} - \xi_{\vec{k}}) - \Delta_{\vec{k}}^2 / 2}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2}} \quad (2.30)$$

В случае тривиального решения $\Delta_{\vec{k}} = 0$, соответствующего нормальному состоянию, $E_0 = 0$. Если же $\Delta_{\vec{k}} \neq 0$, то $E_0 < 0$. Таким образом, это решение энергетически более выгодно, чем нормальное состояние. Заменив сумму интегралом и вычислив его, получим, что энергия снижается на $N(E_F)\Delta^2/2$.

При $\Delta_{\vec{k}} \neq 0$ функции $u_{\vec{k}}$ и $v_{\vec{k}}$ одновременно отличны от нуля, следовательно, новые фермиевские операторы A_0^+ и A_1^+ , соответствующие рождению новых элементарных возбуждений (квазичастиц), относятся к состояниям, являющимся суперпозицией

электронных и дырочных состояний. Значения $u_{\vec{k}}$ и $v_{\vec{k}}$ характеризуют вероятности различных состояний: $u_{\vec{k}}^2$ - это вероятность того, что при отсутствии возбуждений состояния

электронов с \vec{k} и $-\vec{k}$ не заняты одновременно, а $v_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\xi_{\vec{k}}}{\sqrt{\Delta_{\vec{k}}^2 + \xi_{\vec{k}}^2}} \right]$ - того, что оба

заняты.

Это позволяет ответить на вопрос, как распределены электроны по импульсам и энергиям. Ведь при переходе из нормального состояния в сверхпроводящее в образце остается то же самое количество электронов, но они уже не заполняют сферу Ферми.

На рисунке 2.1 приведены графики

а) вероятности заполнения одноэлектронного состояния с энергией E в нормальном металле,

б) $v_{\vec{k}}^2$ - вероятности того, что одноэлектронные состояния \vec{k} и $-\vec{k}$ заполнены в основном состоянии сверхпроводника.

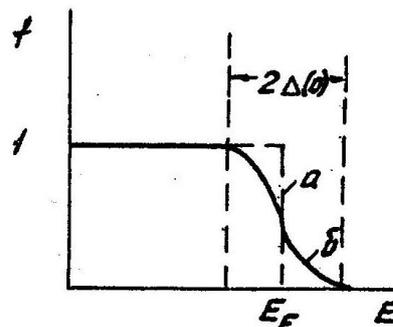


Рис.2.1.

Из графика 2.1б можно видеть, что, как и говорилось в §1.7, внутри щели одноэлектронные состояния заняты. Энергетическая щель существует в энергии элементарных возбуждений, а не в энергии одноэлектронных состояний.

Найдем плотность состояний в спектре возбуждений сверхпроводника, т.е. число состояний на единицу энергии. Состояния возбуждений, существовавшие в нормальном металле, из-за наличия щели переупорядочиваются. Так как при этом ни одно состояние не исчезает, то

$$N_n d\xi_{\vec{k}} = N_S d\varepsilon_{\vec{k}},$$

откуда, используя (2.24) и учитывая, что плотность состояний в нормальном металле вблизи уровня Ферми постоянна, получим

$$N_S(\varepsilon) = N(E_F) \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} \quad (2.35)$$

Это выражение использовалось при построении графика плотности состояний в сверхпроводнике на рис.1.11.

Полученные результаты объясняют процессы одночастичного туннелирования, изображенные на рисунке 1.10. Но туннелировать могут и пары электронов. На схеме сверхпроводящие электроны (входящие в состав пары) располагаются на нулевом уровне. При разрыве пары образуются два возбуждения (две квазичастицы). Все пары образуют так называемый «конденсат» (реально никакого конденсата нет, этот термин введен только в энергетическом пространстве). На рис.2.2 изображены возможные процессы туннелирования пары электронов между двумя сверхпроводниками. Первый процесс показан на рис.2.2а: в нем пара сверхтекучих электронов уходит из левого сверхпроводника, не оставляя в нем возбуждений, и занимает квазичастичные состояния в правом. Во втором процессе (рис.2.2б)

из левого образца уходят два сверхтекучих электрона, однако в нем остаются две квазичастицы. Электроны туннелируют в правый образец, где выпадают в конденсат, так что справа возбуждения не возникают.

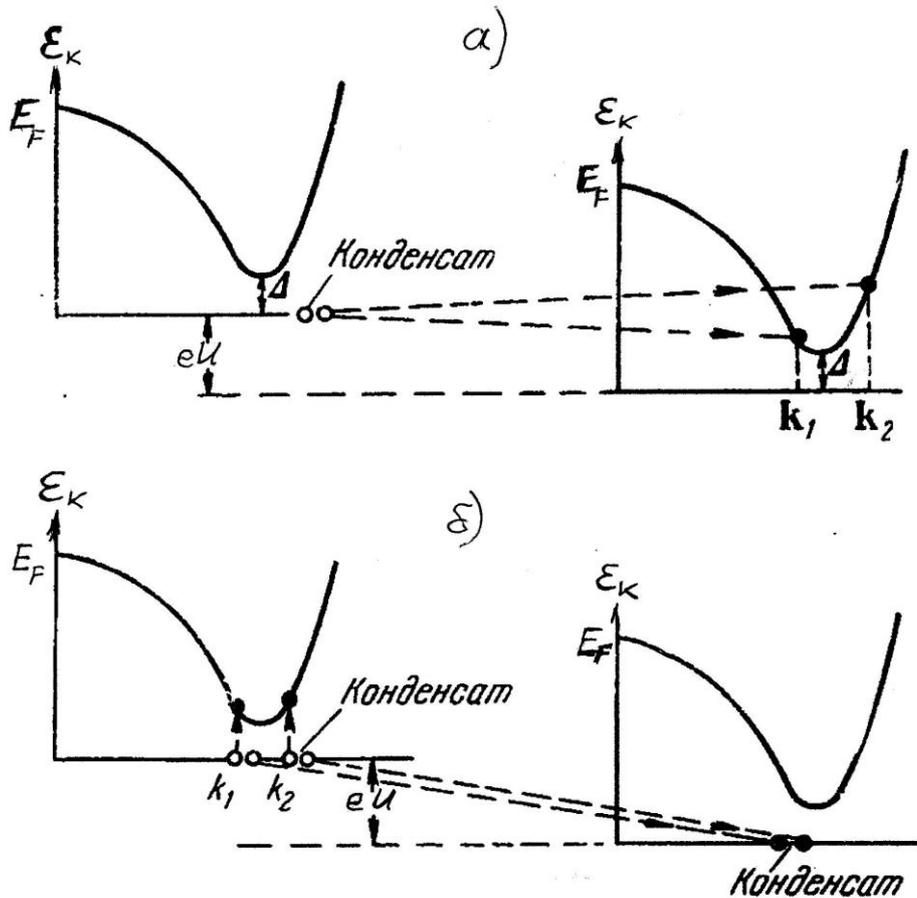


Рис.2.2. Туннелирование пар электронов.

Как было сказано выше, мы пренебрегли оператором H_2 , содержащим произведение четырех квазичастичных ферми-операторов. Это допустимо при малом количестве возбуждений. При температуре, отличной от нуля, оператор H_2 надо учитывать. Именно поэтому в (2.29) указано, что найденная величина Δ соответствует $T = 0$. Строгий расчет приводит к выражениям

$$2\xi_{\bar{k}}u_{\bar{k}}v_{\bar{k}} = (u_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2)\Delta \quad (2.36)$$

$$\Delta = \lambda \sum_{\bar{k}'} u_{\bar{k}'} v_{\bar{k}'} (1 - n_{\bar{k}'0} - n_{\bar{k}'1}) \quad (2.37)$$

Из формулы (2.37) видно, что величина щели зависит от количества квазичастиц и их распределения по энергии.

Рассчитаем зависимость Δ от температуры. Квазичастицы распределены по закону Ферми-Дирака:

$$n_{\bar{k}} = \frac{1}{\exp(\varepsilon_{\bar{k}} / k_B T) + 1} \quad (2.38)$$

Подставляя (2.36) и (2.38) в (2.37) и переходя к интегралу, получим

$$1 = \frac{\lambda g(E_F) \hbar \omega_D}{2} \int_0^{\xi} \frac{th \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2k_B T} d\xi \quad (2.39)$$

Полученная в итоге вычислений зависимость ширины энергетической щели от температуры приведена на рис.2.3.

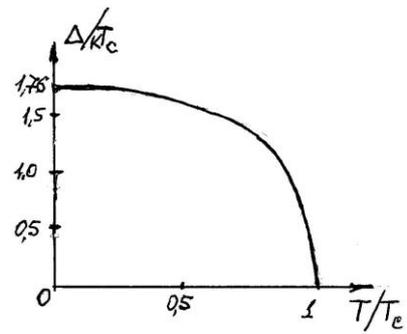


Рис.2.3. Зависимость $\Delta(T)$.

Мы рассмотрели ситуацию, когда электроны взаимодействуют только путем обмена виртуальными фононами, что обеспечивает притяжение, и не учитывали их кулоновское отталкивание. Строгий расчет показывает, что оно не очень эффективно препятствует появлению сверхпроводимости. В частности, иногда может оказаться, что даже при результирующем отталкивании сверхпроводимость, тем не менее, сохраняется. Объяснение этому можно найти, если учесть, что электрон движется, оставляя после себя «колею», заряженную положительно, на «рассасывание» которой требуется время.

§2.1.4. Незатухающие токи. Конденсация Бозе-Эйнштейна.

Почему же возникает сверхпроводимость, т.е. почему существуют незатухающие токи? Казалось бы, всё очень просто. Полученное в теории БКШ выражение (2.3) совпадает с формулой (1.6), на основе которой в §1.6 было объяснено существование незатухающих сверхпроводящих токов (см. формулу 1-9). Однако, как мы увидим далее, величина щели Δ уменьшается с ростом температуры и обращается в ноль при $T = T_c$. Кроме того, существует и так называемая бесщелевая сверхпроводимость. В этих случаях объяснение, приведенное в §1.6, неприменимо.

Рассмотрим другое объяснение. Главную роль в возникновении незатухающих токов играет интересное явление, получившее название «конденсация Бозе-Эйнштейна». В отличие от электронов, являющихся фермионами, т.е. имеющих полуцелый спин, куперовская пара - это новая частица, имеющая спин, равный нулю. Частицы с целым спином называются бозонами. Пары имеют разную энергию. Наименьшей энергией обладает пара, в которой электроны имеют равные по модулю и противоположно направленные импульсы. Пары, не соответствующие этому условию, также существуют, но имеют большую энергию. Бозоны подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна (поэтому так и называются): среднее число бозонов с энергией E_i равно

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/kT} - 1}$$

Величина μ называется химическим потенциалом и определяется из условия $\sum_i \langle n_i \rangle = N$.

Значение μ не может быть больше нуля, так как тогда при $E_i < \mu$ получили бы $\langle n_i \rangle < 0$.

Значит, $\mu \leq 0$.

Если при фиксированной концентрации бозонов n понижать температуру бозонного газа T , то химический потенциал μ , определяемый из условия $\sum_i \langle n_i \rangle = N$, будет увеличиваться, т.е., будучи отрицательным, уменьшаться по абсолютной величине. Он

достигнет значения $\mu = 0$ при температуре $T_0 = \frac{3.31}{(2S+1)^{2/3}} \frac{\hbar^2}{mk} n^{2/3}$, где S - спин частицы.

Но больше нуля μ быть не может! Поэтому, казалось бы, при $T < T_0$ условие $\sum_i \langle n_i \rangle = N$ не может быть выполнено.

На самом деле ситуация такова. Расчет показывает, что полное число частиц с энергиями $E_i > 0$ (при всех i) равно $N_{E>0} = N \cdot (T/T_0)^{3/2}$. Остальные $N_{E=0} = N \cdot [1 - (T/T_0)^{3/2}]$ частиц находятся в самом низшем состоянии, т.е. имеют энергию, равную нулю. При абсолютном нуле температуры все частицы системы (в нашем случае куперовские пары) находятся в этом состоянии, которое называют конденсатом. При повышении температуры некоторые пары покидают конденсат и начинают участвовать в тепловом движении.

Отметим: речь идет не о квазичастицах, пары не распадаются на электроны, они продолжают существовать в виде пар, но их импульсы не равны нулю, как у пар конденсата. Таким образом, не все пары находятся в конденсате! Неверно говорить, что существует только конденсат и неспаренные электроны.

При $T > T_0$ бозе-эйнштейновский конденсат исчезает: в нем не остается частиц. Термин «конденсация» возник по аналогии с понятием конденсации газа в жидкость, хотя эти явления совершенно различны, так как конденсация Бозе-Эйнштейна происходит в пространстве импульсов, а распределение частиц в координатном пространстве не меняется. Никакого перехода из «газа» в «жидкость» не будет!

Мы пока не говорили о квазичастицах, т.е. неспаренных электронах. Распад пар на электроны – отдельный процесс. После распада возникшие квазичастицы не являются бозонами, поэтому об их конденсации говорить нет смысла. В сверхпроводнике существуют неспаренные электроны, «несконденсировавшиеся» пары и конденсат из некоторой части пар.

Все куперовские пары, составляющие “конденсат”, имеют одинаковые параметры. В частности, у всех пар одинаковый импульс. Если конденсат покоится, т.е. импульс каждой пары равен нулю, то тока нет. Если же конденсат движется, то импульс всех конденсатных пар одинаков. Это значит, что ни одна конденсатная пара не может покинуть конденсат и передать энергию решетке, т.е. перенос заряда по решетке происходит без сопротивления.

Это и есть незатухающий ток. Для его существования необходимо выполнение двух условий:

- 1) температура ниже критической ($T < T_c$), чтобы какая-то часть электронов сгруппировалась в куперовские пары (т.е. чтобы были бозоны),
- 2) температура $T < T_0$, чтобы происходила конденсация части пар.

Значение температуры T_0 для атомов и молекул (они тоже бозоны) очень мало, например, для жидкого гелия-4 формула дает примерно 2,7 К, а для более тяжелых элементов еще меньше. При этих температурах все вещества, кроме гелия-4, находятся в твердом состоянии, так что об идеальном газе бозонов речь не идет.

Если же масса частиц имеет порядок массы электронов (сами электроны не подходят, они – фермионы, а нужны бозоны), то при типичном значении концентрации $n = 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ получим $T_0 \approx 10^4$ К. Поэтому в сверхпроводниках условие $T < T_0$ всегда выполнено, и существование сверхпроводимости определяется только условием $T < T_c$.

Кстати, гелий-4 - весьма экзотичное вещество, он остается жидким при всех температурах, а при $T < 2,17$ К приобретает сверхтекучесть, т.е. полностью теряет вязкость. В результате этого он приобретает способность с легкостью проходить через капилляры и узкие щели без какого-либо трения. Кроме того, он может тонкой жидкой пленкой вытекать из сосуда по его стенкам, Также благодаря сверхтекучести гелий способен циркулировать по кругу без затухания. Все эти факты объясняются конденсацией Бозе-Эйнштейна.

Казалось бы, теорию Бозе-Эйнштейна, созданную в 1925 году, в других ситуациях, кроме гелия, проверить не удастся. Но в 1995 году Корнелл и Виман получили первый бозе-конденсат, на котором предсказания теории подтвердились. Ученые использовали газ из атомов рубидия, охлаждённый до 170 нанокельвин. За эту работу им была присуждена Нобелевская премия по физике 2001 года.

В настоящее время конденсация Бозе-Эйнштейна продолжает находиться в центре внимания ученых. В качестве частиц рассматриваются фотоны, фононы, магноны, поляроны и другие бозоны.

§2.2.Магнитное поле внутри сверхпроводников

Теория БКШ объясняет причины перестройки энергетического спектра металла, в результате чего он становится сверхпроводником. Она не занимается непосредственно расчетом распределения полей и сверхпроводящих токов в образце в зависимости от его формы и характера внешнего магнитного поля. В последующих разделах будут изложены различные теоретические описания, рассматривающие сверхпроводник как макроскопическую среду. В этих описаниях основные уравнения получаются из условия минимума некоторого термодинамического потенциала. Эти уравнения позволяют рассчитывать зависимости от координат магнитных полей, сверхпроводящих токов и величины энергетической щели.

Настоящий параграф содержит некоторые сведения по электродинамике сплошных сред, которые будут использоваться в дальнейшем. В частности, вводятся понятия макроскопических характеристик поля, а также обосновывается возможность использования различных термодинамических потенциалов.

В качестве характеристики поля в сверхпроводнике может рассматриваться напряженность микроскопического поля \vec{h} в каждой точке. Это поле в стационарном случае удовлетворяет уравнениям $div \vec{h} = 0$ и $rot \vec{h} = \vec{j}_s$, где \vec{j}_s - плотность сверхпроводящего тока. Когда токи представляют собой макроскопические величины (например, в мейсснеровском состоянии), мы можем выделить их как отдельные источники поля, пренебрегая при этом диамагнетизмом вещества как таковым, т.е. считая магнитную проницаемость среды равной единице. В этом случае магнитная индукция связана с напряженностью микроскопического поля соотношением $\vec{B} = \mu_0 \vec{h}$.

В тех же ситуациях, когда имеются микроскопические токи и поле существенно меняется на малых расстояниях, имеет смысл отказаться от микроскопического анализа и перейти к макроскопическим характеристикам поля. Таковыми являются макроскопическая индукция \vec{B} и макроскопическая напряженность поля \vec{H} . Вектор магнитной индукции в среде определяется как средняя по объему (меньшему, чем характерный размер образца, но большему, чем характерное расстояние изменения поля) напряженность поля, умноженная на магнитную проницаемость вакуума: $\vec{B} = \mu_0 \langle \vec{h} \rangle$. В точках, где отсутствуют внешние источники поля (провода, катушки и т.д.), вектор \vec{B} удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \langle \vec{j}_s \rangle, \quad (2.40)$$

где $\langle \vec{j}_s \rangle$ - средняя плотность сверхпроводящего тока.

Определим вектор макроскопической напряженности поля \vec{H} соотношением

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \quad (2.41)$$

где \vec{M} - вектор намагниченности, равный магнитному моменту единицы объема образца.

Тогда вектор напряженности поля \vec{H} удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0. \quad (2.42)$$

Можно показать, что напряженность поля \vec{H} может быть найдена как частная производная плотности свободной энергии по магнитной индукции:

$$H = \frac{\partial F}{\partial B} \quad (2.43)$$

В вакууме имеем соотношения

$$\vec{H} = \vec{h}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \vec{h} \quad (2.44)$$

Из (2.42) и первого уравнения из (2.40) следует, что на границе двух различных сред должны выполняться следующие граничные условия

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau} \quad (2.45)$$

Если образец имеет форму длинного стержня и помещен во внешнее поле \vec{H}_e , параллельное его оси (внешним полем мы называем поле, создаваемое внешними источниками в отсутствие сверхпроводящей среды), то магнитное поле \vec{H} у поверхности снаружи образца равно внешнему. Из условия непрерывности касательной компоненты вектора \vec{H} (2.45) следует, что поле \vec{H} внутри образца у границы также равно \vec{H}_e . Тогда из уравнения (2.42) следует, что во всем образце поле \vec{H} однородно и равно \vec{H}_e . Именно этим объясняется использование вместо (2.41) соотношения $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H}_e + \vec{M})$ при построении графиков рис.1.7 и рис.1.8.

В термодинамике доказывается, что распределение магнитного поля при заданных внешних токах должно находиться из условия минимума не свободной энергии F , а термодинамического потенциала Гиббса G , связанного со свободной энергией соотношением

$$G = F - \int \vec{B} \vec{H} dV \quad (2.46)$$

Интеграл в (2.46) берется по всему пространству, т.е. и по области вне образца. Но, как показано выше, в случае образцов, бесконечных вдоль направления внешнего поля, поле во всех точках вне образца равно внешнему, т.е. энергия поля в этой области не зависит от распределения токов в образце. Поэтому эту часть энергии можно исключить из рассмотрения при минимизации потенциала Гиббса, тогда интегрирование в (2.46) будет проводиться только по объему образца.

Подчеркнем еще раз, что случай, когда образец представляет собой стержень, бесконечный вдоль направления внешнего поля, является особым. Согласно вышесказанному, при такой геометрии поле в любой точке вне образца равно внешнему, т.е. тому полю, которое было бы в этой точке в отсутствие образца. Это позволяет при минимизации потенциала Гиббса ограничиться интегрированием только по объему самого образца. Кроме того, как показано выше, в этом случае макроскопическая напряженность магнитного поля \vec{H} во всех точках внутри образца также равна напряженности внешнего поля \vec{H}_e . Иначе говоря, поле \vec{H} является однородным во всем пространстве. Этот факт часто позволяет упростить поиск решения. В дальнейшем рассмотрении мы будем чаще всего иметь дело именно с таким случаем. При другой геометрии возможность исключения из рассмотрения интеграла по области вне образца будет анализироваться специально. То же относится и к утверждению об однородности поля.

§2.3. Уравнение Ф. и Г. Лондонов

В 1935 году братья Ф. и Г. Лондоны показали, что в пределе, когда все поля и токи являются слабыми и медленно изменяются в пространстве, условие минимума свободной энергии приводит к простому соотношению между полями и токами.

В своей теории Лондоны основывались на «двухжидкостной» модели сверхпроводника, предложенной годом раньше Гортером и Казимиром. Эта модель предполагает существование в сверхпроводнике двух типов электронов - «нормальных» с концентрацией $n_n(T)$ и «сверхпроводящих» с концентрацией $n_s(T)$. Полная концентрация электронов проводимости $n = n_n + n_s$. Концентрация сверхпроводящих электронов убывает с ростом температуры и обращается в нуль при $T = T_c$. При $T \rightarrow 0$ она стремится к полной концентрации электронов. Сверхпроводящий ток обеспечивается незатухающим движением сверхпроводящих электронов, нормальные при этом ведут себя обычным образом.

Рассмотрим чистый металл с параболической зоной проводимости; эффективная масса электронов равна m . Свободная энергия имеет следующий вид:

$$F = \int F_s dV + E_k + E_m, \quad (2.47)$$

где F_s – отнесенная к единице объема энергия электронов в конденсированном состоянии в системе покоя, E_k – кинетическая энергия, связанная с незатухающими токами, а E_m – энергия магнитного поля. Скорость дрейфа \vec{v} электронов в точке \vec{r} связана с плотностью тока \vec{j}_s соотношением

$$n_s e \vec{v}(\vec{r}) = \vec{j}_s(\vec{r}), \quad (2.48)$$

где e – заряд электрона, n_s – концентрация “сверхпроводящих” электронов.

Кинетическую энергию можно записать в виде:

$$E_k = \frac{1}{2} \int n_s m v^2 dV, \quad (2.49)$$

где интеграл берется по объему образца. Выражение (2.49) справедливо при условии, что скорость $\vec{v}(\vec{r})$ – медленно меняющаяся функция координат.

Энергия, связанная с магнитным полем $\vec{h}(\vec{r})$, определяется соотношением:

$$E_m = \frac{\mu_0}{2} \int h^2 dV. \quad (2.50)$$

При этом магнитную проницаемость среды считаем равной 1, а сверхпроводящие токи учитываем явным образом.

Тогда поле $\vec{h}(\vec{r})$ связано с плотностью тока уравнением Максвелла:

$$\text{rot } \vec{h} = \vec{j}_s \quad (2.51)$$

Используя (2.49)-(2.51), представим свободную энергию F в виде

$$F = F_0 + \frac{\mu_0}{2} \int (h^2 + \lambda_L^2 |\text{rot } \vec{h}|^2) dV, \quad (2.52)$$

где $F_0 = \int F_s dV$, а величина λ_L , имеющая размерность длины, определяется следующим

образом:
$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}. \quad (2.53)$$

Отметим, что Лондоны считали, что ток переносится отдельными электронами. При $T=0$ все электроны являются “сверхпроводящими” и $n_s = n$. На самом деле, электроны сгруппированы в пары, поэтому вместо m , e и n_s следует подставить в (2.53) величины $2m$, $2e$, $n/2$. Легко видеть, что вид формулы (2.53) после этого не изменится, только n_s заменится на n . Для простых металлов, например Al, Sn и т.п., в которых масса m близка к массе свободного электрона, находим $\lambda_L \approx 0,05$ мкм.

Для простоты рассуждений будем подразумевать «хорошую» геометрию образца: длинный цилиндр, параллельный внешнему полю. Внешнее поле будем считать однородным. Как было показано в §2.2, в этом случае можно искать минимум интеграла только по объему образца, не учитывая области вне его.

Строго говоря, как было сказано выше, при постоянстве внешних токов, создающих поле, надо минимизировать потенциал Гиббса. Однако можно показать, что в рассматриваемой ситуации минимизация свободной энергии приводит к тому же результату.

Далее мы увидим, что уравнение Лондонов может быть получено в более общем случае из других соображений.

Минимизируем F из (2.52) относительно распределения поля $\vec{h}(\vec{r})$. При изменении поля $\vec{h}(\vec{r})$ на величину $\delta\vec{h}(\vec{r})$ свободная энергия F получит приращение δF :

$$\delta F = \mu_0 \int (\vec{h} \cdot \delta\vec{h} + \lambda_L^2 \text{rot} \vec{h} \cdot \text{rot} \delta\vec{h}) dV = \mu_0 \int (\vec{h} + \lambda_L^2 \text{rot} \text{rot} \vec{h}) \cdot \delta\vec{h} dV \quad (2.54)$$

При выводе (2.54) мы воспользовались формулой из векторного анализа $\text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b}$ для $\vec{a} = \delta\vec{h}$, $\vec{b} = \text{rot} \vec{h}$ и преобразовали $\text{rot} \vec{h} \cdot \text{rot} \delta\vec{h}$ в $\delta\vec{h} \cdot \text{rot} \text{rot} \vec{h} - \text{div}[\text{rot} \vec{h} \times \delta\vec{h}]$. При интегрировании по объёму сверхпроводника член с дивергенцией обращается в ноль, поскольку равен потоку вектора $\text{rot} \vec{h} \times \delta\vec{h}$ через поверхность сверхпроводника, а на поверхности в рассматриваемой геометрии поле равно внешнему, т.е. $\delta\vec{h} = 0$.

Следовательно, конфигурация поля внутри образца, дающая минимум свободной энергии, должна удовлетворять условию $\delta F = 0$, откуда следует уравнение

$$\vec{h} + \lambda_L^2 \text{rot} \text{rot} \vec{h} = 0 \quad (2.55)$$

Воспользовавшись уравнением Максвелла (2.51) можно переписать уравнение (2.55) в виде

$$\text{rot} \vec{j} = -\frac{\vec{h}}{\lambda_L^2} \quad (2.56)$$

Уравнение (2.55) или (2.56) называется уравнением Лондонов. Совместно с уравнением Максвелла (2.51) оно позволяет находить распределение полей и токов. Из него, в частности, следует, что внутри сверхпроводника поле не может быть однородным: $\vec{h}(\vec{r}) \neq \text{const}$. Рассмотрим еще несколько следствий из уравнения Лондонов.

2.3.1. Эффект Мейсснера

Применим теперь уравнение Лондонов (2.55) к задаче о проникновении магнитного поля в сверхпроводник. Выберем простейшую геометрию: поверхность образца совпадает с плоскостью xy , область $z < 0$ пуста (рис.2.4). Тогда поле \vec{h} и плотность сверхпроводящего тока \vec{j}_s зависят лишь от z .

Помимо уравнения (2.55), имеют место, как обычно, уравнения Максвелла

$$\text{rot} \vec{h} = \vec{j}_s \quad (2.57)$$

$$\text{div} \vec{h} = 0 \quad (2.58)$$

Из формулы (2.56) следует, что $h_z = 0$ (поскольку \vec{j} не зависит от x и y).

Выберем ось x вдоль направления поля \vec{h} . Тогда уравнение (2.58) удовлетворяется автоматически, а из уравнения (2.57) следует, что вектор плотности тока \vec{j}_s направлен вдоль

оси y :

$$\frac{dh}{dz} = j_s \quad (2.59)$$

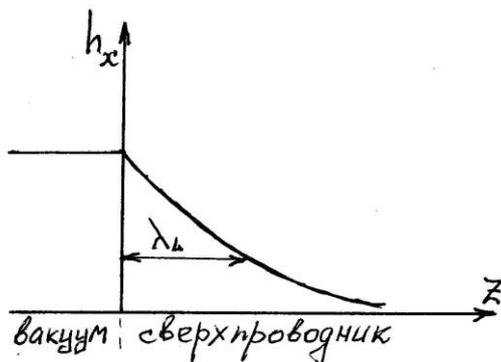


Рис.2.4. Проникновение слабого магнитного поля в сверхпроводник

Наконец, уравнение (2.55) дает

$$\frac{d^2h}{dz^2} = \frac{h}{\lambda_L^2} \quad (2.60)$$

Решение, конечное внутри сверхпроводника, является экспоненциально убывающим:

$$h(z) = h(0) \cdot \exp(-z/\lambda_L), \quad (2.61)$$

т.е. внутрь сверхпроводника поле проникает только на глубину λ_L . Этот результат, полученный для полупространства, легко обобщить на случай образца произвольной формы. Глубина проникновения λ_L мала, поэтому можно сказать, что слабое магнитное поле не проникает в макроскопический образец, или, иначе говоря, магнитное поле выталкивается из образца. Как уже говорилось ранее, этот результат был обнаружен в опытах Мейсснера и Оксенфельда в 1933 году еще до создания теории Лондонов.

2.3.2. Тонкие пленки в продольном магнитном поле

Рассмотрим образец, имеющий форму тонкой пленки (рис.2.5). По осям y и x он имеет бесконечные размеры, так что краевые эффекты можно не учитывать. Поле внутри образца также описывается уравнением:

$$\frac{d^2h}{dz^2} = \frac{h}{\lambda_L^2} \quad (2.62)$$

Однако теперь граничные условия имеют вид

$$h(d/2) = h(-d/2) = h_0 \quad (2.63)$$

Общее решение уравнения запишется в виде:

$$h(z) = C_1 \cdot \exp(-z/\lambda_L) + C_2 \cdot \exp(z/\lambda_L) \quad (2.64)$$

Из симметрии задачи по z следует равенство $C_1 = C_2$. Удовлетворяя граничные условия (2.63), получим окончательно

$$h(z) = h_0 \frac{ch(z/\lambda_L)}{ch(d/2\lambda_L)} \quad (2.65)$$

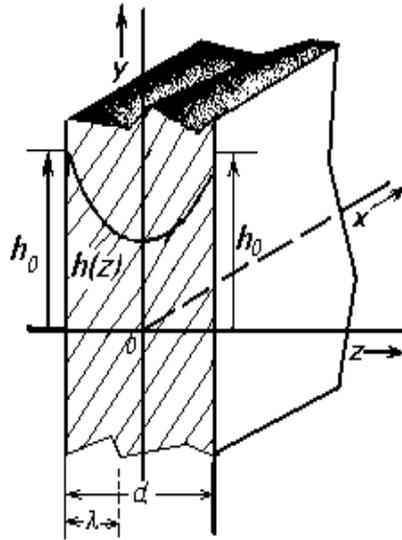


Рис.2.5. Распределение магнитного поля внутри тонкой сверхпроводящей пленки.

Зависимость (2.65) показана на рис.2.5. По мере уменьшения толщины пленки d эффективность ослабления поля снижается. При $d \ll \lambda_L$ поле практически равномерно пронизывает всю сверхпроводящую пленку. При этом энергия, затрачиваемая на выталкивание внешнего поля, мала и, следовательно, внешнее магнитное поле, необходимое для разрушения сверхпроводимости, оказывается больше аналогичного значения для массивного сверхпроводника.

§2.4. Соотношение Пиппарда

При выводе уравнения Лондонов предполагалось, что скорость $\vec{v}(\vec{r})$, или, что то же самое, плотность сверхпроводящего тока $\vec{j}(\vec{r})$, медленно изменяется в пространстве. Уточним, что значит “медленно”.

В конденсированной системе скорости двух электронов 1 и 2 коррелированы, если расстояние между ними R_{12} меньше определенной величины, обозначим ее ξ_0 . Наш вывод справедлив, если скорость $\vec{v}(\vec{r})$ мало меняется на расстояниях порядка ξ_0 . Для оценки ξ_0 заметим, что область существенных значений импульсов электронов задается неравенством

$$E_F - \Delta < \frac{p^2}{2m} < E_F + \Delta, \quad (2.66)$$

где E_F – энергия Ферми, Δ – полуширина энергетической щели.

Соответствующий разброс по импульсам равен $\Delta p = 2\Delta/v_F$, где $v_F = p_F/m$ – фермиевская скорость электронов. Из соотношения неопределенностей оценим ширину соответствующего волнового пакета $\delta x \approx \hbar/\Delta p$, на основании чего можно ввести характерную длину, называемую длиной когерентности сверхпроводника (иногда ее называют также размером пары):

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta}. \quad (2.67)$$

(Множитель $1/\pi$ введен из соображений удобства для дальнейшего.)

Из уравнения Лондонов следует, что характерной длиной изменения полей, токов и скоростей является длина λ_L , поэтому вывод этого уравнения справедлив лишь при условии $\lambda_L \gg \xi_0$.

В простых (непереходных) металлах глубина проникновения λ_L мала (сотни \AA). При этом фермиевская скорость велика (тысячи км/с), соответственно, велик и параметр ξ_0 (для Al $\xi_0 \approx 10^4 \text{\AA}$). Поэтому уравнение Лондонов непригодно для описания процессов в таких металлах. В этом случае необходимо заменить уравнение Лондонов (2.56) несколько более сложным. Его форма была предложена Пиппардом. В дальнейшем мы будем называть такие сверхпроводники сверхпроводниками первого рода. Те же сверхпроводники, для которых применимо уравнение Лондонов, т.е. выполнено условие $\lambda_L \gg \xi_0$, называются сверхпроводниками второго рода. Об этом мы будем подробно говорить в дальнейшем.

Исторически сложилось так, что в течение 20 лет после открытия эффекта Мейсснера эксперименты проводились главным образом на сверхпроводниках первого рода, и только потом началось исследование сверхпроводников второго рода. Парадоксально, что теория развивалась в обратном порядке: теория Лондонов была создана в 1935 году, а ее видоизменения для сверхпроводников первого рода были предложены Пиппардом лишь в 1953 году.

Для полноты картины интересно упомянуть о сверхпроводящих сплавах, в которых длина когерентности ξ_0 и глубина проникновения λ_L зависят от длины свободного пробега электронов. При ее уменьшении ξ_0 убывает, а λ_L растет. Поэтому часто оказывается, что добавление примесей в сверхпроводник первого рода переводит его в сверхпроводник второго рода.

Идею Пиппарда можно пояснить следующим образом.

Используя вместо поля $\vec{h}(\vec{r})$ векторный потенциал $\vec{A}(\vec{r})$, связанный с полем соотношением

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{B} = \mu_0 \vec{h}, \quad (2.68)$$

запишем уравнение Лондонов (2.56) $\text{rot } \vec{j} = -\vec{h}/\lambda_L^2$ в виде

$$\vec{j} = -\frac{\vec{A}}{\mu_0 \lambda_L^2} \quad (2.69)$$

Отметим, что соотношение (2.68) определяет вектор-потенциал $\vec{A}(\vec{r})$ неоднозначно. При выводе (2.69) мы выбрали его так, чтобы $\text{div } \vec{A} = 0$ (так называемая лондоновская калибровка).

Соотношение (2.69) применимо лишь в том случае, когда \vec{j} и \vec{A} медленно изменяются в пространстве. В общем случае можно предположить, что плотность тока $\vec{j}(\vec{r})$ в некоторой точке \vec{r} зависит от вектор-потенциала во всех соседних точках \vec{r}' , удовлетворяющих условию $|\vec{r} - \vec{r}'| < \xi_0$. Пиппард предложил следующее феноменологическое соотношение:

$$\vec{j}(\vec{r}) = C \int \frac{(\vec{A}(\vec{r}') \cdot \vec{R}) \vec{R}}{R^4} \exp\left(-\frac{R}{\xi_0}\right) dV', \quad \text{где } \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \quad (2.70)$$

Позже на базе микроскопической теории БКШ было показано, что точная связь тока с полем очень похожа на соотношение (2.70), но ее математическое выражение гораздо сложнее. Поэтому приближенный результат Пиппарда до сих пор не утратил своего значения.

§2.5. Теория Гинзбурга – Ландау

2.5.1. Основные уравнения

Теория Лондонов применима лишь к таким состояниям, в которых концентрация сверхпроводящих носителей заряда постоянна по объему образца. В 1950 году В.Л.Гинзбург и Л.Д.Ландау опубликовали теорию, не требующую постоянства концентрации n_s . Эта теория исходит из того, что переход из нормального (N) в сверхпроводящее (S) состояние представляет собой фазовый переход II рода, т.е. не сопровождается выделением или поглощением тепла.

Теорию таких переходов Ландау создал еще раньше. В ней присутствовал некий параметр, так называемый параметр порядка, который в новой фазе (в нашем случае – в сверхпроводящей фазе) равен нулю при $T=T_c$ и возрастает при уменьшении температуры. В качестве такого параметра порядка в сверхпроводнике Гинзбург и Ландау рассматривали волновую функцию $\psi(\vec{r})$, так что $|\psi(\vec{r})|^2$ равняется концентрации сверхпроводящих носителей заряда.

Отметим, что условием применимости теории Гинзбурга-Ландау является близость температуры образца к критической.

а) Рассмотрим сначала простейший случай, когда отсутствует магнитное поле и параметр ψ не зависит от координат. Поскольку величина ψ в сверхпроводящей фазе при приближении к T_c должна плавно спадать до нуля, то свободную энергию F_s вблизи T_c можно разложить в ряд по $|\psi|$:

$$F_s = F_N + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \dots \quad (2.71)$$

где F_N – свободная энергия в нормальном состоянии.

Обсудим выражение (2.71).

При $T=T_c$, т.е. $\psi=0$, энергия сверхпроводящего состояния равняется энергии нормального, это объясняет появление в (2.71) члена F_N . Отсутствие линейного члена по

$|\psi|$ объясняется соображениями симметрии, мы не будем касаться этого положения и просто примем его на веру.

Покажем теперь, что коэффициент α должен обращаться в ноль при $T = T_C$. Поскольку при $T < T_C$ энергия сверхпроводящего состояния должна быть меньше энергии нормального, то коэффициент α должен быть отрицательным. При $T > T_C$, т.е. по другую сторону перехода, α должен быть положительным. Значит, в самой точке перехода α обращается в ноль, откуда следует в наинизшем порядке по $(T - T_C)$

$$\alpha = k(T - T_C), \quad (2.72)$$

причем коэффициент k должен быть больше нуля.

Сама точка перехода должна быть устойчивой, т.е. при $\alpha = 0$ функция $F(|\psi|)$ должна иметь минимум при $|\psi| = 0$. Значит, член третьего порядка должен равняться нулю, а член четвертого порядка должен быть положительным. Отсюда следует положительность коэффициента β .

Вблизи T_C ограничимся двумя членами разложения, т.е. оборвем ряд на члене с $|\psi|^4$. Тогда коэффициенты α и β оказываются весьма просто связаны с термодинамическим критическим полем B_C и равновесной плотностью куперовских пар $n_S(\infty) = |\psi_\infty|^2$ на сколь угодно большом расстоянии от границы. Действительно, учитывая (1.2) $F_N - F_S = \mu_0 H_C^2 / 2$, получим следующее соотношение

$$F_S - F_N = \alpha |\psi_\infty|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi_\infty|^4 = -\frac{1}{2\mu_0} B_C^2 \quad (2.73)$$

Второе уравнение для α и β получим из условия минимальности F_S при равновесии, т.е.

$$\frac{\partial F_S}{\partial (|\psi|^2)} = 0, \text{ откуда следует}$$

$$\alpha + \beta |\psi_\infty|^2 = 0 \quad (2.74)$$

Решая систему уравнений (2.73), (2.74), находим

$$\alpha = -\frac{1}{\mu_0} \frac{B_C^2}{n_S(\infty)} \quad (2.75)$$

$$\beta = \frac{1}{\mu_0} \frac{B_C^2}{n_S^2(\infty)} \quad (2.76)$$

б) Теперь будем считать, что параметр порядка медленно изменяется от точки к точке. Можно показать, что в этом случае влияние магнитного поля на свободную энергию F_S

проявится в добавлении двух членов: $\frac{1}{2m'}|(-i\hbar\vec{\nabla} - e'\vec{A})\psi|^2$ и $\frac{B^2}{2\mu_0}$, где $m'=2m$ и $e'=2e$ –

масса и заряд частицы, т.е. куперовской пары, \vec{A} – векторный потенциал магнитного поля. Отметим, что при создании теории ее авторы, не зная о существовании куперовских пар, считали частицей электрон и полагали $m'=m$ и $e'=e$. Первый из этих членов получается обычно в квантовой механике из кинетической энергии при замене импульса частицы на обобщенный импульс в магнитном поле. Он описывает энергию сверхпроводящих токов, а также энергию, связанную с пространственной неоднородностью распределения куперовских пар. Второй член соответствует энергии магнитного поля.

Как говорилось в §2.2, распределение магнитного поля при заданных внешних токах должно находиться из условия минимума не свободной энергии F , а термодинамического потенциала Гиббса G . Для нахождения величины G_S образца надо из общего значения

$G=(F_S - BH)$ вычесть потенциал G внешнего поля, равный $\frac{B_e^2}{2\mu_0} - B_e H_e = -\frac{B_e^2}{2\mu_0}$. Пусть

образец представляет собой стержень, бесконечный вдоль направления внешнего поля (§2.2).

В этом случае макроскопическая напряженность магнитного поля \vec{H} равна напряженности внешнего поля \vec{H}_e . Учтя это, получим

$$G_S = F_N + \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 + \frac{(B - B_e)^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2m'}|(-i\hbar\vec{\nabla} - e'\vec{A})\psi|^2, \quad (2.77)$$

Физический смысл члена $\frac{(B - B_e)^2}{2\mu_0}$ состоит в том, что он дает энергию, необходимую

для того, чтобы магнитное поле, которое в отсутствие сверхпроводника равнялось \vec{B}_e , приняло текущее значение \vec{B} . При $\vec{B} = 0$ (мейсснеровская фаза) этот член дает полную энергию выталкивания.

Потенциал Гиббса всего образца получается путем интегрирования (2.77) по всему объему. Минимизируя получившееся выражение по ψ и \vec{A} с помощью вариационного метода и учитывая (2.40), получим два уравнения Гинзбурга-Ландау:

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m'}|(-i\hbar\vec{\nabla} - e'\vec{A})\psi|^2 = 0 \quad (2.78)$$

$$\vec{j}_s = \frac{e'\hbar}{2m'}(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi) - \frac{e'^2}{m'}|\psi|^2\vec{A}, \quad (2.79)$$

где ψ^* – комплексно сопряженная функция от ψ .

Из требования равенства нулю компоненты тока, перпендикулярной к границе сверхпроводника с вакуумом или диэлектриком, следует граничное условие к этой системе уравнений

$$\vec{n}(-i\hbar\vec{\nabla} - e'\vec{A})\psi = 0, \quad (2.80)$$

где \vec{n} - вектор нормали к границе. В случае границы сверхпроводника с нормальным металлом правая часть (2.80) принимает вид $i\lambda\psi$, где λ - отличная от нуля вещественная постоянная.

Решая систему уравнений (2.78) - (2.80) совместно с уравнениями Максвелла, можно найти $\psi(\vec{r})$ и $\vec{j}(\vec{r})$, а, следовательно, и $\vec{B}(\vec{r})$.

Отметим, что (2.79) в точности совпадает с выражением для плотности тока, вводимым в квантовой механике. Таким образом, применимость второго уравнения Гинзбурга-Ландау не ограничена условием близости температуры к критической.

2.5.2. Две характерные длины

Покажем, что уравнения Гинзбурга - Ландау (2.78) - (2.79) содержат две характерные длины.

а) Сначала рассмотрим случай, когда магнитные поля и токи отсутствуют. Выберем калибровку, в которой функция $\psi(\vec{r})$ вещественна и для простоты ограничимся одномерным случаем. Тогда уравнение (2.78) заметно упрощается:

$$-\frac{\hbar^2}{2m'} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha\psi + \beta\psi^3 = 0 \quad (2.81)$$

Это уравнение имеет два очевидных решения: 1) решение $\psi = 0$, относящееся к нормальному состоянию; 2) решение $\psi = \psi_0$, где $\psi_0^2 = -\alpha/\beta$, описывающее обычное сверхпроводящее состояние. Второе решение существует и отвечает более низкой энергии, когда $\alpha < 0$, т.е. когда $T < T_c$. Однако мы хотели бы рассмотреть также решения более общего вида, например, когда под действием какого-либо внешнего фактора параметр порядка $\psi(x)$ в некоторой точке имеет значение, отличное от ψ_0 . Как ведет себя $\psi(x)$ в окрестности этой точки?

Перейдем к приведенной переменной $f = \psi/\psi_0$ и введем обозначение $\frac{\hbar^2}{2m'|\alpha|} = \xi^2(T)$, где параметр $\xi(T)$ имеет размерность длины. Тогда уравнение (2.81) принимает вид

$$-\xi^2(T) \frac{d^2 f}{dx^2} - f + f^3 = 0 \quad (2.82)$$

Отсюда следует, что параметр $\xi(T)$ является естественной единицей измерения расстояний, на которых может меняться функция f . Будем называть его длиной когерентности при данной температуре T . Можно показать, что для чистых металлов

$$\xi(T) = 0,74 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-0,5} \xi_0. \quad (2.83)$$

Из этого выражения видно, что для температур около T_c параметр порядка ψ мало меняется на расстояниях порядка размера пары ξ_0 .

б) Вторая характерная длина появляется, когда мы переходим к рассмотрению электромагнитных эффектов, например, при вычислении глубины проникновения слабого магнитного поля.

Если внешнее поле мало, то в первом порядке по полю h параметр $|\psi|^2$ можно заменить его равновесным значением $|\psi_0|^2$ в отсутствие поля. Взяв ротор от обеих сторон второго уравнения Гинзбурга-Ландау (2.79) и учтя, что $rot \vec{h} = \vec{j}_s$ и $rot \vec{A} = \mu_0 \vec{h}$, придем к уравнению лондоновского типа (так как ψ_0 не зависит от координат)

$$rot \vec{j} = -\frac{e'^2}{m'} \psi_0^2 \mu_0 \vec{h} \quad (2.84)$$

Сопоставляя (2.84) с уравнением Лондонов (2.56), получим выражение для характерной длины

$$\lambda(T) = \sqrt{\frac{m'}{\mu_0 n_s e'^2}} \quad (2.85)$$

Отметим, что глубина λ пропорциональна ψ_0^{-1} , т.е. $(1 - T/T_c)^{-0.5}$. Для чистого металла теория БКШ дает

$$\lambda(T) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-0.5} \lambda_L(0), \quad (2.86)$$

где $\lambda_L(0) = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}}$ (2.87) - лондоновская глубина проникновения при $T=0$.

Поскольку, как было сказано выше, применимость второго уравнения Гинзбурга-Ландау не ограничена условием близости температуры к критической, то получение соотношений (2.84) и (2.85) можно считать независимым выводом уравнения Лондонов, применимость которого определяется только условием независимости модуля параметра порядка от координат. Этот вывод является более общим, чем проведенный в §2.3.

в) Выше мы нашли две характерные длины $\xi(T)$ и $\lambda(T)$, определяющие поведение сверхпроводника вблизи критической температуры. Обе величины пропорциональны $(T_c - T)^{0.5}$, поэтому особый интерес представляет их отношение $\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)}$, которое называют параметром Гинзбурга-Ландау для данного вещества.

В зависимости от его величины сверхпроводники делятся на два типа: значения $\kappa < 1$ (т.е. $\lambda < \xi$) отвечают сверхпроводникам первого рода, $\kappa > 1$ (т.е. $\lambda > \xi$) - второго рода. Далее мы увидим, что точная граница соответствует значению $\kappa = 1/\sqrt{2}$.

2.5.3. Задачи с постоянным значением амплитуды параметра порядка

Воспользуемся теперь уравнениями Гинзбурга-Ландау для решения некоторых конкретных задач. Сначала рассмотрим особенно простой случай, когда амплитуда параметра порядка $|\psi|$ постоянна во всех точках образца. С такой ситуацией мы уже сталкивались при вычислении глубины проникновения слабого магнитного поля в массивный образец. Теперь рассмотрим случаи иного рода. Речь пойдет о тонких образцах (пленки, проволочки и т.п.), в которых всякое изменение функции ψ по толщине является невыгодным, поскольку оно привело бы к резкому возрастанию члена $|\nabla\psi|^2$ в выражении для потенциала Гиббса. При этом поле \vec{h} и плотность тока \vec{j} не предполагаются слабыми, поэтому амплитуда $|\psi|$, оставаясь постоянной, не обязательно равна своему невозмущенному значению $|\psi_0|$.

2.5.3.1. Критический ток в тонкой пленке

Пусть по пленке толщиной d течет ток с плотностью \vec{j} , направленной вдоль оси x , как показано на рис. 2.6а.

Пусть пленка тонкая, т.е. $d \ll \xi(T)$ и $d \ll \lambda(T)$. Первое неравенство обеспечивает постоянство по толщине пленки амплитуды $|\psi|$, а второе – постоянство плотности тока. Тогда уравнения значительно упрощаются.

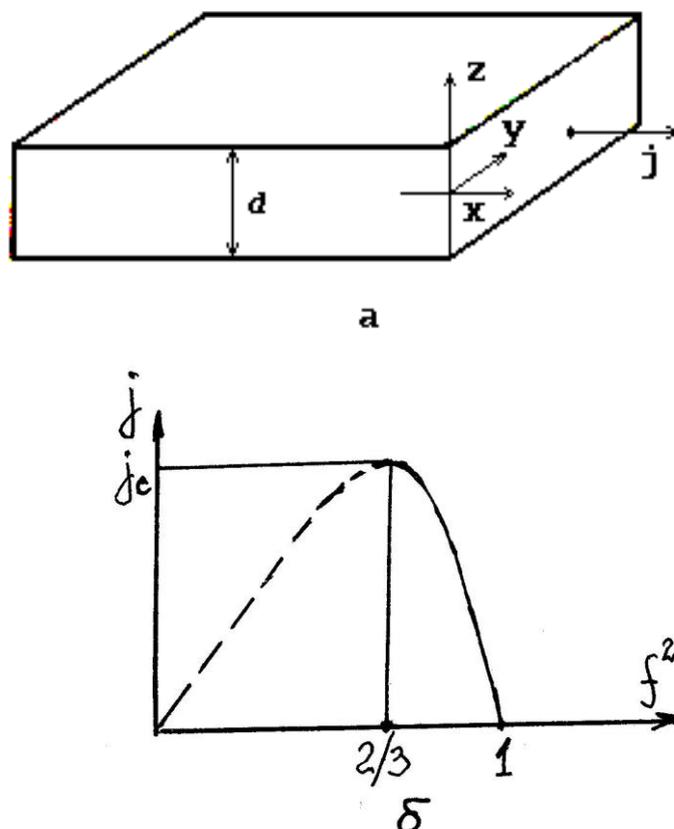


Рис.2.6. Определение критического тока тонкой пленки.

Действительно, положим

$$\psi = |\psi| \exp(i\varphi(\vec{r})), \quad (2.88)$$

где амплитуда $|\psi|$ не зависит от \vec{r} .

Выражение для плотности тока (2.79) можно записать в виде

$$j = \frac{e'}{m'} |\psi|^2 (\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial x} - e' A_x) = e' |\psi|^2 v, \quad (2.89)$$

где

$$v = \frac{1}{m'} (\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial x} - e' A_x) \quad (2.90)$$

Величина v - это скорость "частиц" в состоянии с волновой функцией ψ .

Потенциал Гиббса (2.77) также принимает простой вид

$$G_S = F_N + |\psi|^2 (\alpha + \frac{1}{2} \beta |\psi|^2 + \frac{1}{2} m' v^2) + \frac{(B - B_e)^2}{2\mu_0} \quad (2.91)$$

Из условия минимума (2.91) относительно $|\psi|^2$ получим

$$(\alpha + \beta |\psi|^2 + \frac{1}{2} m' v^2) = 0 \quad (2.92)$$

Полагая $|\psi| = \psi_0 \cdot f$, где $\psi_0^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$, и исключая из (2.89) и (2.92) скорость v ,

получим

$$j = e' \psi_0^2 \left(\frac{2|\alpha|}{m'} \right)^{1/2} f^2 (1 - f^2)^{1/2} = e' \psi_0^2 \frac{\hbar}{m' \xi(T)} f^2 (1 - f^2)^{1/2} \quad (2.93)$$

Связь между j и f^2 показана на рис.2.6б. При росте j от нуля функция f убывает от

начального значения 1 до 0,8 при $j = j_c = 2e' \psi_0^2 \frac{\hbar}{3\sqrt{3}m' \xi(T)}$. При $j > j_c$ решения

отсутствуют, т.е. пленка находится в нормальном состоянии. В самой точке перехода параметр f скачком меняется от 0,8 до 0. Величина j_c называется критической плотностью тока для пленки.

С физической точки зрения существование критической плотности тока легко объяснить. Ток создает магнитное поле, которое пронизывает образец. При некотором значении плотности тока это магнитное поле в некоторых точках достигает критического значения, и образец не может более оставаться сверхпроводящим во всем объеме. В дальнейшем критические токи в сверхпроводниках будут рассмотрены подробнее.

2.5.3.2. Эффект Литгла и Паркса

Рассмотрим сверхпроводящую пленку, нанесенную на изолирующую подложку в форме цилиндра радиусом R (рис.2.7). Толщина пленки $d \ll R$. Вдоль оси цилиндра приложено однородное магнитное поле \vec{H} .

Найдем температуру сверхпроводящего перехода как функцию приложенного магнитного поля. По-прежнему будем считать, что $d \ll \xi(T)$ и $d \ll \lambda(T)$, а амплитуда $|\psi|$ постоянна внутри пленки. Как и ранее, положим $\psi = |\psi| \exp(i\varphi(\vec{r}))$, где амплитуда

$|\psi|$ не зависит от \vec{r} . Плотность потенциала Гиббса дается выражением (2.91), а скорость – выражением $\vec{v} = \frac{1}{m'}(\hbar \vec{\nabla} \varphi - e' \vec{A})$.

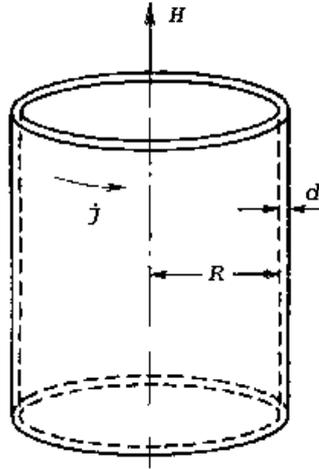


Рис.2.7. Схема опыта Литтла и Паркса.

Найдем зависимость скорости от поля B . Рассмотрим циркуляцию $\oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$, где интегрирование ведется по окружности цилиндра радиусом R . Интегрируя выражение (2.90), получим

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2\pi R v = \frac{\hbar}{m'} [\varphi] - \frac{e'}{m'} \oint \vec{A} d\vec{l}, \quad (2.94)$$

где $[\varphi]$ - изменение фазы при полном обходе вокруг цилиндра. Из однозначности функции ψ следует, что $[\varphi] = 2\pi n$, где n – любое целое число. Второй член в выражении (2.94) пропорционален интегралу

$$\oint \vec{A} d\vec{l} = \int \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{\sigma} = \int \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = \Phi = \pi R^2 B, \quad (2.95)$$

т.е. магнитному потоку внутри цилиндра. Следовательно,

$$v = \frac{\hbar}{m' R} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right), \quad (2.96)$$

где $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{e'} = 2 \cdot 10^{-15}$ Вб – квант магнитного потока.

При фиксированном магнитном поле B поток Φ также фиксирован, а скорость, согласно (2.96), может иметь бесконечный ряд дискретных значений. Однако из (2.91) следует, что потенциал Гиббса имеет минимум лишь при таком значении n , при котором модуль скорости минимален. Таким образом,

$$v = \min \left(\frac{\hbar}{m' R} \left| n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right| \right), \quad (2.97)$$

т.е. ν является периодической функцией поля с периодом $\frac{\Phi_0}{\pi R^2}$ (например, значению $R=0,8$ мкм соответствует период 10^{-3} Тл). Зная скорость, найдем значение $|\psi|$, минимизирующее потенциал Гиббса (см.(2.92)):

$$|\psi|^2 = \beta^{-1}(-\alpha - 0,5m'\nu^2) \quad (2.98)$$

Решение существует только при $-\alpha > 0,5m'\nu^2$. Температура перехода T_H определяется условием $-\alpha = 0,5m'\nu^2$, т.е. T_H – периодическая функция поля B с периодом $\frac{\Phi_0}{\pi R^2}$. Поскольку α пропорционален $(T - T_C)$, то можно сказать, что кривая зависимости T_H состоит из ряда параболических дуг. Наибольшее смещение температуры перехода имеет место при $\nu = \hbar/2m'R$ и равно

$$(T_C - T_H)_{\max} = 0,55T_C \left(\frac{\xi_0}{2R} \right)^2 \quad (2.99)$$

С физической точки зрения эффект Литтла и Паркса можно объяснить следующим образом. Если магнитный поток внешнего поля через отверстие сверхпроводника не равен целому числу квантов магнитного потока, то по закону квантования магнитного потока в пленке должен возникнуть сверхпроводящий ток, своим полем доводящий значение полного магнитного потока до целого числа квантов Φ_0 . Возникновение этого тока приводит к увеличению внутренней энергии в связи с кинетической энергией движущихся куперовских пар и энергией создаваемого током магнитного поля. Поэтому переход в нормальное состояние будет происходить при тем более низкой температуре, чем сильнее протекающие токи, т.е. чем сильнее отличие потока внешнего поля от целого числа квантов Φ_0 .

2.5.4. Изменение амплитуды параметра порядка в пространстве

2.5.4.1. Образование зародышей сверхпроводимости внутри образца

Поместим сверхпроводник в сильное магнитное поле, так что сверхпроводимость разрушена и поле внутри образца однородно. Будем плавно уменьшать величину поля. Тогда при достижении полем некоторого значения H_{c2} в образце начнут образовываться сверхпроводящие области. Покажем, что поле H_{c2} не равно критическому полю H_c , оно может быть как больше его, так и меньше.

В области образования зародышей амплитуда параметра порядка $|\psi|$ мала, что позволяет линеаризовать уравнение Гинзбурга-Ландау (2.78)

$$\frac{1}{2m'} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - e' \vec{A} \right)^2 \psi = -\alpha \psi \quad (2.100)$$

Кроме того, будем считать, что $\text{rot } \vec{A} = \mu_0 \vec{H}_e$, где \vec{H}_e - однородное внешнее поле. Это допустимо потому, что сверхпроводящие токи пропорциональны $|\psi|^2$ и в линейном приближении вызванные ими поправки к полю пренебрежимо малы. Этот же факт позволяет

исключить при минимизации потенциала Гиббса интеграл по области вне образца (см.п.2.5.1), что подтверждает приемлемость уравнений Гинзбурга-Ландау в данном случае.

Уравнение (2.100) формально совпадает с уравнением Шредингера для частицы с зарядом e' и массой m' в однородном магнитном поле. В неограниченной среде такая частица движется вдоль поля с постоянной скоростью v_z и вращается по окружности в плоскости $xу$ с частотой

$$\omega_c = \frac{e' B}{m'} \quad (2.101)$$

Уровни энергии, соответствующие собственным функциям уравнения (2.100), имеют вид

$$-\alpha = \frac{1}{2} m' v_z^2 + (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c \quad (2.102)$$

где n – неотрицательное целое число. Наибольшее значение H_e , т.е. ω_c , при заданном α соответствует случаю $v_z = 0, n = 0$, так что $-\alpha = 0,5 \hbar \omega_c$. Отсюда находим величину H_{c2} . Можно показать, что

$$H_{c2} = \kappa \sqrt{2} H_c. \quad (2.103)$$

Обсудим формулу (2.103).

При $\kappa > 1/\sqrt{2}$, т.е. $H_c < H_{c2}$, зародыши сверхпроводимости могут образовываться в толще образца при полях $H_c < H < H_{c2}$. В этой фазе поле не может полностью выталкиваться из образца, поскольку при $H > H_c$ полный эффект Мейсснера энергетически невыгоден. В этом диапазоне полей в образце устанавливается особое, так называемое *смешанное* состояние, характерное для сверхпроводников второго рода, которое мы будем обсуждать в дальнейшем.

При $\kappa < 1/\sqrt{2}$, т.е. $H_c > H_{c2}$, при уменьшении поля сначала достигается значение H_c , при котором возникает полный эффект Мейсснера, иначе говоря, мы имеем сверхпроводник первого рода.

Таким образом, деление сверхпроводников на два типа можно произвести в зависимости от величины параметра κ : для сверхпроводников первого рода $\kappa < 1/\sqrt{2}$, при $\kappa > 1/\sqrt{2}$ имеем сверхпроводник второго рода.

ГЛАВА 3. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ.

Как было сказано в главе 1, с точки зрения поведения в магнитном поле сверхпроводники можно разделить на три основных типа. Настоящая глава посвящена рассмотрению микропроцессов, происходящих в сверхпроводниках I-го и II-го рода и определяющих их различие.

§3.1. Сверхпроводники первого рода. Промежуточное состояние.

В сверхпроводниках I-го рода мейсснеровское состояние, когда магнитное поле выталкивается из объема сверхпроводника и отлично от нуля только в тонком приповерхностном слое, имеет место вплоть до некоторого критического поля H_C . Если внешнее поле превышает это значение, то образец переходит в нормальное состояние. Таким образом, зависимость магнитной индукции внутри образца от напряженности внешнего магнитного поля имеет вид, показанный на рис. 3.1.

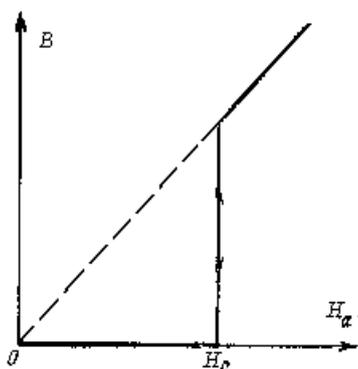


Рис.3.1. Магнитное поле внутри образца

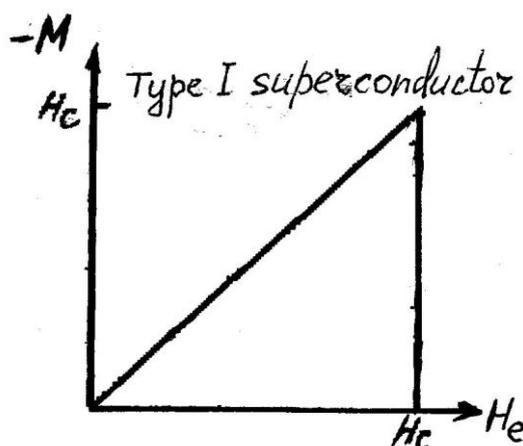


Рис.3.2. Кривая намагничивания образца, имеющего форму стержня, в продольном поле.

Эффект выталкивания магнитного поля из образца можно представить следующим образом. Экранирующие токи, полностью компенсирующие внешнее магнитное поле внутри образца, сообщают ему магнитный момент. Хотя, строго говоря, внутренние области образца не обладают намагниченностью, но формально можно говорить о намагниченности \vec{M} , равной магнитному моменту единицы объема образца. Это позволяет, как говорилось в §2.2, ввести понятие вектора напряженности поля в образце \vec{H} , используя соотношение $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$. Часто в качестве характеристики поведения образца в магнитном поле принимается кривая намагничивания, т.е. зависимость намагниченности M от внешнего магнитного поля. На рис.3.2 приведена такая зависимость для сверхпроводника первого рода, полученная из графика рис.3.1.

Как было показано в §2.2, если образец имеет форму длинного стержня и помещен во внешнее поле \vec{H}_e , параллельное его оси, то во всем образце поле \vec{H} однородно и равно

\vec{H}_e . Именно этим объясняется использование \vec{H}_e вместо \vec{H} в формуле $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ при построении графиков рис.3.1 и 3.2.

В мейсснеровской фазе магнитная индукция \vec{B} внутри сверхпроводника равна нулю, а макроскопическая напряженность магнитного поля \vec{H} равна внешнему полю, т.е. отлична от нуля. Тогда соотношение $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ может быть выполнено, только если $\mu = 0$. Таким образом, сверхпроводник в мейсснеровской фазе является идеальным диамагнетиком с $\mu = 0$.

Пороговое, или критическое, магнитное поле H_c , необходимое для разрушения сверхпроводимости, зависит от температуры. При критической температуре T_c критическое поле равно нулю. С убыванием температуры значение H_c возрастает, что приближенно описывается соотношением (см. 1.1)

$$H_c(T) = H_c(0) \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right) \quad (3.1)$$

Используя выражения $\frac{\hbar^2}{2m'|\alpha|} = \xi^2(T)$ (см. абзац перед 2.82), $\alpha = -\frac{1}{\mu_0} \frac{B_c^2}{n_s(\infty)}$

(см.2.75) и $\lambda^2(T) = \frac{m'}{\mu_0 n_s e'^2}$ (см.2.85), легко получить выражение для поля H_c :

$$H_c = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\mu_0 e \lambda(T) \xi(T)} \quad (3.2)$$

Разность свободных энергий единицы объема образца в сверхпроводящем и нормальном состояниях равна $F_N - F_S = \mu_0 H_c^2 / 2$ (см. формулу 1.2)

Все вышеизложенное относится к образцам, имеющим форму длинного стержня, помещенным в поле, параллельное его оси (рис.3.3). Если пренебречь влиянием концов, то такая геометрия обеспечивает равенство значений поля на всей поверхности образца.

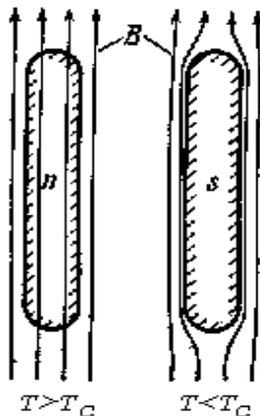


Рис.3.3. Выталкивание магнитного поля из образца, имеющего форму стержня, при охлаждении в магнитном поле.

Рассмотрим теперь менее тривиальный случай, например, сверхпроводящую сферу радиусом a , помещенную в однородное внешнее магнитное поле \vec{H}_e (рис.3.4). Если поле H_e меньше $2H_c/3$, то линии магнитной индукции вытесняются из образца. Распределение поля вне сферы определяется уравнениями

$$\operatorname{div} \vec{h} = \operatorname{rot} \vec{h} = 0 \quad (3.3)$$

и граничными условиями $\vec{h} \rightarrow H_e$ при $r \rightarrow \infty$, $h_n|_{r=a} = 0$,

где $h_n|_{r=a}$ - компонента поля, нормальная к поверхности сферы, r - расстояние от центра сферы. Второе из записанных граничных условий следует из эффекта Мейсснера, т.е. из того факта, что силовые линии не могут проникать внутрь сверхпроводящей сферы.

Решение для внешней по отношению к сфере области имеет вид

$$\vec{h} = \vec{H}_e + H_e \frac{a^3}{2} \nabla \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \quad (3.4)$$

Компонента поля, параллельная поверхности сферы, равна

$$h_\tau|_{r=a} = \frac{3}{2} H_e \sin \theta \quad (3.5)$$

В полюсах сферы Q и Q' поле равно нулю, на экваторе ($\theta = \pi/2$) тангенциальная составляющая максимальна и равна $3/2 H_e$. Когда внешнее поле H_e достигает значения $2/3 H_c$, поле на экваторе становится равным критическому. Следовательно, в диапазоне полей $H_c > H_e > 2/3 H_c$ некоторые области сферы переходят в нормальное состояние. При этом остальная часть сферы не теряет сверхпроводимости (если бы весь образец перешел в нормальное состояние, то поле в любой точке стало бы равняться $H_e < H_c$, т.е. сверхпроводимость появилась бы снова).

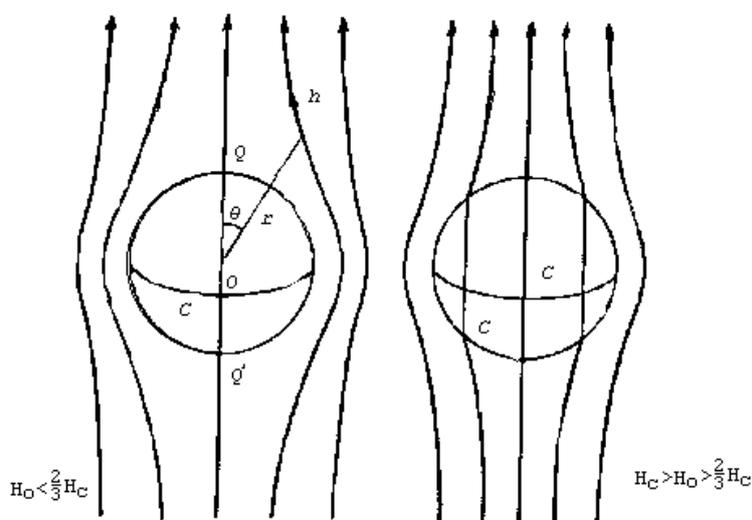


Рис.3.4. Распределение магнитного поля вблизи сверхпроводящей сферы.

Казалось бы, что область вблизи экватора должна перейти в нормальное состояние, в то время как центральная часть останется сверхпроводящей. Покажем, что такого быть не может. В этом случае поле на границе сверхпроводящей и нормальной фаз должно быть равно критическому. При удалении от оси сферы оно уменьшается и, следовательно, соответствующие области должны оставаться сверхпроводящими, что противоречит исходному предположению.

Можно показать, что при $H_c > H_e > 2/3H_c$ весь объем шара будет находиться в так называемом *промежуточном* состоянии, в котором чередуются нормальные и сверхпроводящие микроскопические области. В общем случае тела произвольной формы не обязательно весь его объем должен находиться в промежуточном состоянии. В нем могут оставаться также и области чисто сверхпроводящего и нормального состояний, соприкасающиеся с областью промежуточного состояния, но только не непосредственно друг с другом.

Отметим, что область полей, в которых существует промежуточное состояние, зависит от геометрической формы образца. Например, если образец представляет собой эллипсоид, вытянутый (сплюснутый) вдоль направления поля, то на экваторе поле будет меньше (больше) отличаться от внешнего и промежуточное состояние будет начинаться при других значениях внешнего поля. В частности, в случае тонкой пластины в поле, перпендикулярном ее плоскости, промежуточное состояние будет существовать во всей области полей $H_c > H_e > 0$. Если бы в любом отличном от нуля поле какая-то макроскопическая часть пластины оставалась полностью сверхпроводящей, то в результате выталкивания поле на краю этого участка было бы очень большим, что неизбежно привело бы к переходу в нормальное состояние.

Толщины нормальных и сверхпроводящих слоев в промежуточном состоянии малы, поэтому при решении многих задач можно игнорировать микроскопическую структуру слоев и оперировать только относительным объемом S-областей ρ , а также макроскопическими величинами B и H . Вычислим значения этих величин в промежуточном состоянии.

Плотность свободной энергии равна

$$F = F_N - \rho \frac{\mu_0 H_c^2}{2} + (1 - \rho) \frac{\mu_0 h_N^2}{2}, \quad (3.6)$$

где h_N - напряженность поля в нормальных областях.

Здесь второй член представляет собой энергию конденсации в сверхпроводящих областях (см. формулу 1.2), а третий - магнитную энергию в нормальных областях. Мы пренебрегли энергией поверхностей раздела нормальных и сверхпроводящих областей, а также членами, учитывающими искажение силовых линий вблизи поверхности пленки (для макроскопических тел эти члены пренебрежимо малы). Магнитная индукция по определению пропорциональна средней напряженности поля в точке и равна

$$B = \mu_0 \langle h \rangle = \mu_0 (1 - \rho) h_N + \mu_0 \rho \cdot 0 = \mu_0 (1 - \rho) h_N \quad (3.7)$$

В переменных ρ и \vec{B} плотность свободной энергии равна

$$F = F_N - \rho \frac{\mu_0 H_c^2}{2} + \frac{B^2}{2(1-\rho)\mu_0} \quad (3.8)$$

Свободная энергия имеет минимум при фиксированных значениях индукции $\vec{B}(\vec{r})$ в каждой точке и температуры T . Составим теперь выражение для плотности термодинамического потенциала Гиббса, имеющего минимум при фиксированных температуре и токах в катушках, задающих внешнее поле:

$$G = F - BH = F_N - \rho \frac{\mu_0 H_c^2}{2} + \frac{B^2}{2(1-\rho)\mu_0} - BH \quad (3.9)$$

Полный потенциал Гиббса получается интегрированием по объему всего пространства. Но поскольку, как сказано выше, искажение поля около поверхности образца пренебрежимо мало, то при минимизации потенциала Гиббса можно ограничиться интегрированием (3.9) только по объему образца.

1) Минимизация потенциала Гиббса по ρ дает

$$B = \mu_0(1-\rho)H_c \quad (3.10)$$

Сравнивая (3.10) с (3.7), получаем $h_N = H_c$.

2) В результате минимизации по B получаем

$$B = \mu_0(1-\rho)H \quad (3.11)$$

Отметим, что это соотношение можно также получить, подставив в (3.9) H , найденное из (2.43), а затем минимизировав по B (согласно (2.43)).

Из сравнения (3.11) с (3.10) получаем $H = H_c$, т.е. величина поля H постоянна и равна H_c во всем объеме образца.

Записав этот факт в виде $H_c^2 = H^2$ и взяв градиент от обеих частей, воспользуемся формулой $\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times \text{rot} \vec{b} + \vec{b} \times \text{rot} \vec{a} + (\vec{a} \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \vec{\nabla}) \vec{a}$ и получим $0 = \vec{\nabla} H^2 = 2(\vec{H} \vec{\nabla}) \vec{H} + 2\vec{H} \times \text{rot} \vec{H}$. Поскольку в образце $\text{rot} \vec{H} = 0$, то $(\vec{H} \vec{\nabla}) \vec{H} = 0$, т.е. вектор \vec{H} не меняется вдоль линии магнитной индукции, следовательно, все эти линии представляют собой прямые. Обобщая этот результат, можно сказать, что для любой структуры промежуточного состояния границы фаз должны быть параллельны магнитному полю (см. рис.3.4).

Рассмотрим подробнее случай плоской пластины в поле, перпендикулярном ее плоскости. Распределение нормальных (N) и сверхпроводящих (S) областей представлено на рис.3.5: области N и S образуют слои, перпендикулярные плоскости чертежа. Силовые линии проходят только через области N . Магнитная индукция на плоскостях раздела должна быть равна $\mu_0 H_c$, а внутри S -областей - нулю.

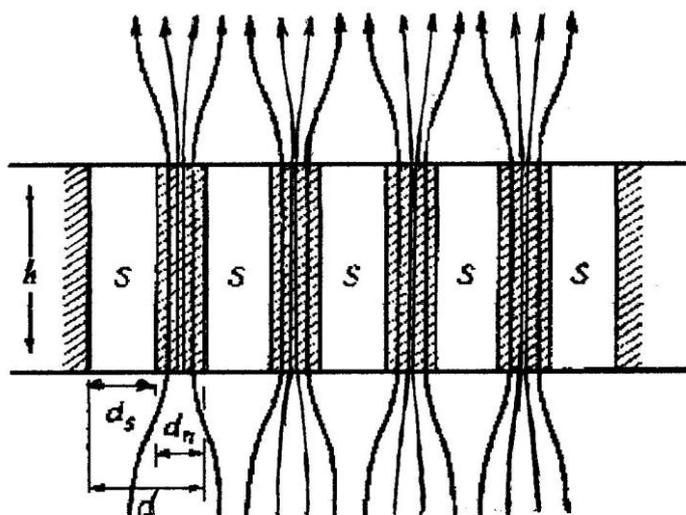


Рис.3.5. Распределение линий индукции в пластине в поле, перпендикулярном ее плоскости.

Доля объема, занятая S-областями, $\rho = d_s / (d_s + d_n)$ для такой простой конфигурации просто определяется из условия сохранения потока. Вдали от пленки поле однородно, $h = H_e$, и магнитный поток равен $\mu_0 S H_e$ (S -площадь поверхности пленки). В самой пленке поток проходит через площадь N-областей, равную $S(1-\rho)$, а поле в N-областях, как показано выше, однородно и равно H_c . Следовательно, $\mu_0 S H_e = \mu_0 S(1-\rho) H_c$, откуда следует

$$\rho = 1 - \frac{H_e}{H_c} \quad (3.12)$$

Чем больше внешнее поле, тем меньше доля объема, занятая S-областями. На рис.3.6 изображена картина промежуточного состояния тонкой пленки.

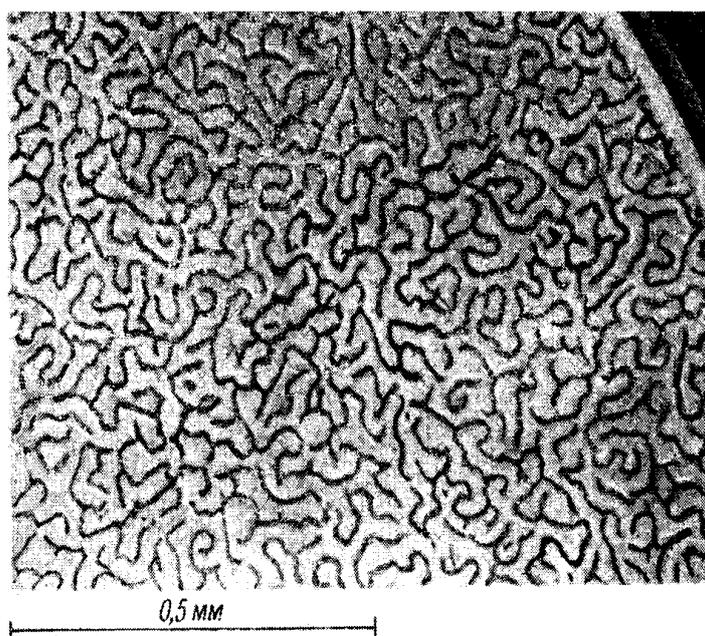


Рис.3.6. Фотография структуры промежуточного состояния тонкой пленки. Толщина пленки 7 мкм, $H_e / H_c = 0,77$. Темные участки - сверхпроводящие области.

§3.2. Энергия границы между фазами.

Во II-й главе было показано, что внешнее магнитное поле, необходимое для разрушения сверхпроводимости внутри сверхпроводящей пленки, толщина которой меньше глубины проникновения, больше соответствующего значения для массивного сверхпроводника. Поэтому, казалось бы, образцу энергетически выгодно разбиться на тонкие чередующиеся слои S и N, и при этом он мог бы оставаться в этом состоянии и при $H_e > H_c$. Однако такое не происходит, и при $H_e = H_c$ образец переходит в нормальное состояние. Значит, разбиение на тонкие слои энергетически невыгодно. Причина этого в том, что образование поверхности раздела связано с дополнительной энергией, которая в сверхпроводниках I-го рода положительна. Далее мы убедимся, что эта энергия может быть и отрицательной (в сверхпроводниках II-го рода).

Рассмотрим поверхностную энергию более подробно. На рис.3.7 схематически показана граница между нормальной и сверхпроводящей фазами.

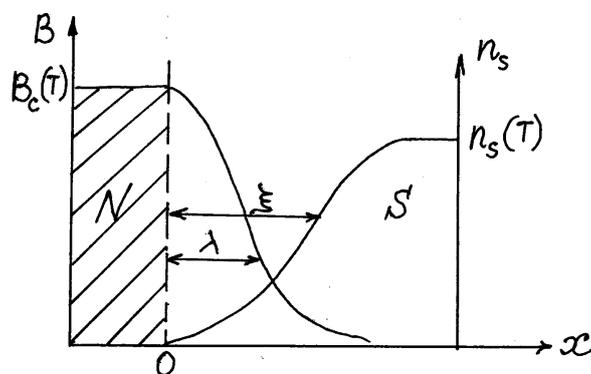


Рис.3.7. Распределение магнитного поля и плотности куперовских пар вблизи границы нормальной и сверхпроводящей фаз.

В нормальной области ($x < 0$) магнитное поле больше или равно критическому, а в сверхпроводнике спадает до нуля на лондоновской глубине λ . В глубине сверхпроводника ($x \rightarrow \infty$) плотность куперовских пар n_s равна своему равновесному значению. Теория Гинзбурга-Ландау (§2.5) показывает, что плотность куперовских пар не может меняться скачком, характерной длиной ее изменения является длина когерентности ξ . Поэтому внутри сверхпроводника плотность куперовских пар и магнитное поле меняются так, как показано на рис.3.7. Будем считать, что для данного сверхпроводника справедливо неравенство

$$\xi > \lambda. \quad (3.13)$$

Энергия границы раздела определяется отличием приграничной картины от ситуации, когда сразу справа от границы поле равно нулю, а плотность сверхпроводящих пар равна равновесной. Найдем энергию E_B , связанную с выталкиванием магнитного поля, и энергию E_C , высвобождающуюся при конденсации куперовских пар.

В нормальной области $E_B = E_C = 0$, в глубине сверхпроводника $E_B = E_C = \mu_0 H_c^2 V / 2$ (см. формулу (1.2)), где V - объем. В приграничной области обе энергии не достигают своего полного значения. Положительная энергия выталкивания меньше значения, которое она

имела бы при полном выталкивании, на величину $\Delta E_B = S\lambda\mu_0 H_C^2/2$, где S - площадь границы. Отрицательная энергия конденсации пар также уменьшена по модулю, поскольку в приграничном слое плотность пар меньше равновесного значения. Уменьшение энергии конденсации равно $\Delta E_C = S\xi\mu_0 H_C^2/2$.

Мы выиграли в энергии величину ΔE_B и проиграли ΔE_C . Поэтому дополнительная энергия, необходимая для образования границы, равна

$$\Delta E_C - \Delta E_B = (\xi - \lambda)S\mu_0 H_C^2/2 \quad (3.14)$$

и в рассматриваемом случае $\xi > \lambda$ положительна. Поэтому образование границ является энергетически невыгодным.

Из (3.14) следует, что знак энергии границы раздела определяется соотношением между лондоновской длиной λ и длиной когерентности ξ .

§3.3. Магнитные свойства сверхпроводников второго рода.

Из предыдущего рассмотрения следует, что в случае $\xi < \lambda$ создание границы раздела должно быть связано с выигрышем энергии. Поэтому следует ожидать, что в такой сверхпроводник магнитное поле может проникать уже при полях $H < H_C$, при этом возникают неоднородности в пространственном распределении магнитного поля и плотности куперовских пар.

Оказывается, условие $\xi < \lambda$ можно получить в любом случае, если уменьшать длину свободного пробега электронов. Дело в том, что при ее уменьшении глубина проникновения λ слабо возрастает, а длина когерентности ξ быстро падает. Длина свободного пробега может быть легко уменьшена путем легирования сверхпроводника посторонними металлами. Электроны рассеиваются на атомах примесей и длина их свободного пробега уменьшается.

Сверхпроводники с $\xi < \lambda$ называются сверхпроводниками второго рода. Они характеризуются следующими макроскопическими свойствами.

1. В цилиндре, помещенном в продольное магнитное поле, эффект Мейсснера имеет место до значения H_{C1} , причем H_{C1} заметно меньше, чем H_C .

2. При $H > H_{C1}$ силовые линии проникают в образец, но лишь частично. Такая ситуация имеет место для полей $H_{C1} < H < H_{C2}$. Поле H_{C2} больше, чем H_C и в некоторых случаях очень велико.

3. При $H > H_{C2}$ макроскопический образец вообще не вытесняет потока. Однако даже в этом случае сверхпроводимость разрушается не полностью: в области полей $H_{C2} < H < H_{C3}$ на поверхности цилиндра остается сверхпроводящая прослойка толщиной порядка долей микрона. Физическая причина наличия прослойки состоит в том, что небольшой сверхпроводящей области легче образоваться вблизи поверхности образца точно так же, как пузырьку воздуха легче образоваться на дне стакана с лимонадом, чем в любой точке внутри.

Изменение полей H_{C1}, H_{C2}, H_{C3} с температурой показано на рис.3.8.

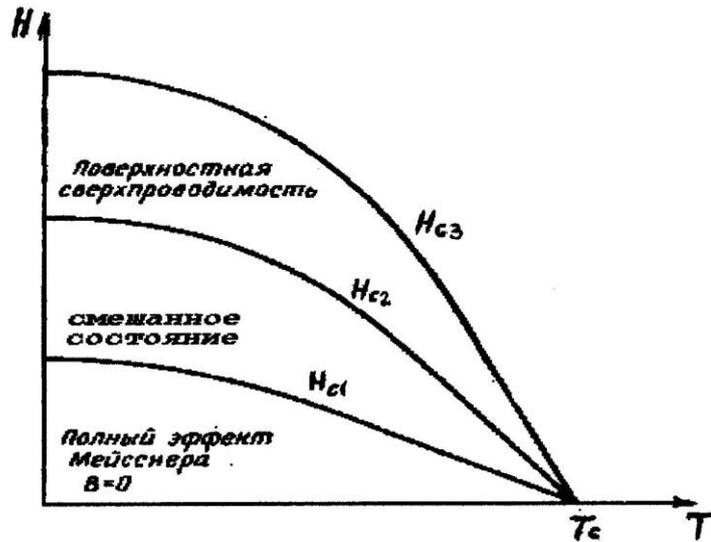


Рис.3.8. Фазовая диаграмма для сверхпроводника второго рода в форме длинного цилиндра.

Рассмотрим область полей $H_{c1} < H < H_{c2}$, в которой проникновение потока является частичным. Впервые существование такой области было продемонстрировано Шубниковым в 1937 г. Поэтому иногда ее называют фазой Шубникова. Мы будем называть эту область вихревым или смешанным состоянием.

Типичные зависимости $B(H)$ для сверхпроводников первого и второго рода показаны на рис.3.9. Как уже говорилось раньше, для описания поведения образца в магнитном поле часто принимается кривая намагничивания, т.е. зависимость намагниченности M от внешнего магнитного поля. На рис.3.10 приведены такие зависимости, полученные из графика рис.3.9. Отметим, что, если значения поля H_C одинаковы для обоих материалов, то площади заштрихованных криволинейных треугольников на рис.3.9 равны.

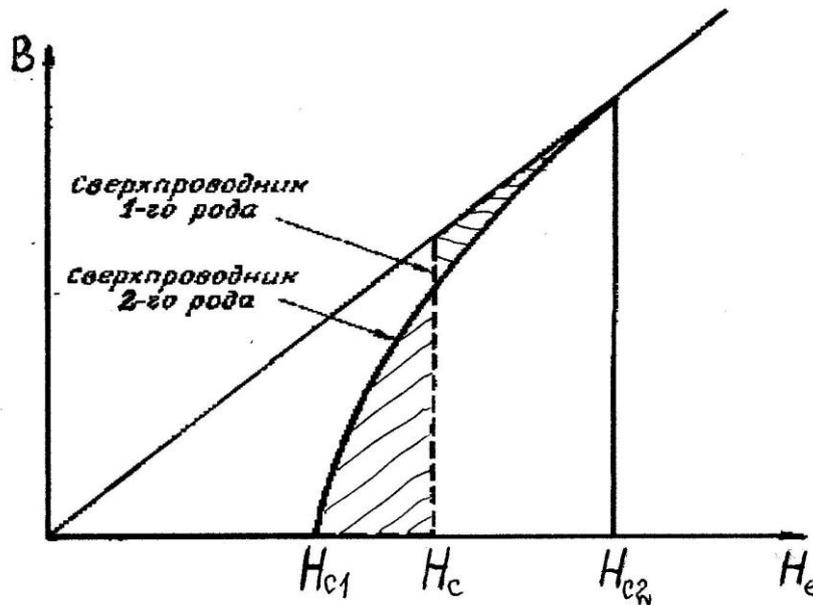


Рис.3.9. Зависимость индукции B от величины приложенного поля H_e для сверхпроводников первого и второго рода в форме длинного цилиндра.

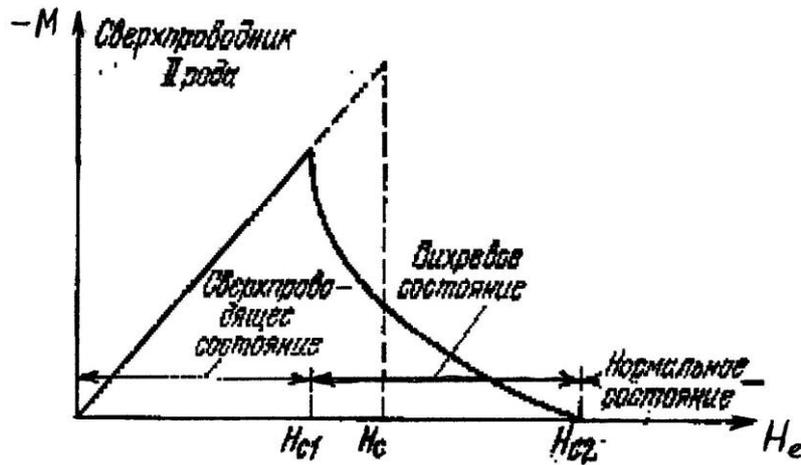


Рис.3.10. Обратимые кривые намагничивания сверхпроводников первого и второго рода в форме длинного цилиндра.

Как говорилось выше, при $\xi < \lambda$ образцу выгодно разбиться на большое количество микроскопических областей с характерным размером порядка ξ . Наиболее вероятными представляются два типа таких областей: слои малой толщины и нити малого диаметра. Теоретический расчет показывает, что меньшей энергией обладают нитевидные структуры. Впервые такие структуры обсуждались Онсагером и Фейнманом в связи с явлением сверхтекучести гелия. В 1956 г. Абрикосов обобщил этот подход на случай сверхпроводимости.

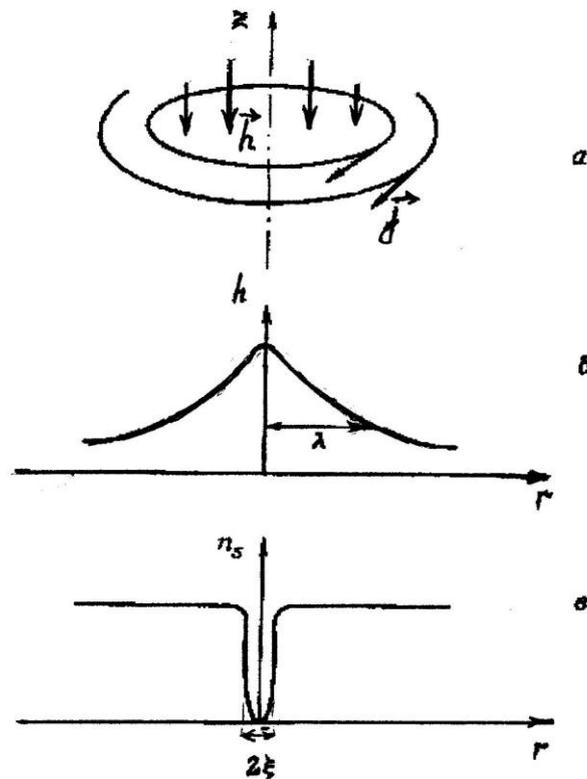


Рис.3.11. Структура изолированной вихревой нити: а - конфигурация полей и токов, б - зависимость магнитного поля от расстояния до центра нити, в - изменение плотности куперовских пар в области остова нити.

Структура изолированной вихревой нити показана на рис.3.11. Нить обладает жестким остовом радиуса ξ , в котором плотность сверхпроводящих электронов n_s при приближении к центру убывает до нуля. Силовые линии магнитного поля имеются не только в области остова. Поле максимально в центре нити и простирается от него на расстояние порядка λ .

Покажем, что величина связанного с одной нитью магнитного потока равна одному кванту потока (см. также раздел 1.9).

Запишем уравнение для плотности тока

$$\vec{j}_s = \frac{e'\hbar}{2m'}(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi) - \frac{e'^2}{m'}|\psi|^2\vec{A} \quad (3.15)$$

Отметим еще раз, что, хотя (3.15) и является одним из уравнений Гинзбурга-Ландау (см. (2.43)), его применимость не ограничена близостью температуры к T_c , поскольку, как уже говорилось раньше, это общее выражение для плотности тока в квантовой механике.

Подставляя в (3.15) $\psi(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})| \cdot \exp(i\varphi(\vec{r}))$, получим

$$\vec{j} = \frac{e'}{m'}|\psi|^2(\hbar\vec{\nabla}\varphi - e'\vec{A}) \quad (3.16)$$

Проинтегрируем (3.16) по окружности вокруг оси вихря радиуса $r \gg \lambda$. На этих расстояниях можно считать плотность тока j равной нулю. Учтем, что вследствие осевой симметрии модуль плотности тока во всех точках окружности одинаков. Поэтому получим

$$\hbar[\varphi] = e' \int \vec{A} \cdot d\vec{l} = e' \int \text{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S} = e' \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = e' \Phi, \quad (3.17)$$

где $[\varphi]$ - изменение фазы при обходе, Φ - магнитный поток через контур. Из однозначности функции ψ следует, что $[\varphi] = 2\pi n$, где n - целое число. Минимальное значение n равно 1, поэтому минимальный магнитный поток, связанный с нитью, равен одному кванту магнитного потока $\Phi_0 = h/2e = 2 \cdot 10^{-15}$ Вб. В принципе, вихрь может содержать любое целое число квантов Φ_0 , но из соображений минимальности энергии ему выгоднее распасться на несколько вихрей с одним квантом Φ_0 в каждом. Действительно, мы увидим далее, что энергия вихря прямо пропорциональна квадрату его магнитного потока. Это значит, что энергия одного вихря с n квантов Φ_0 в n раз больше энергии n вихрей с одним Φ_0 в каждом.

3.3.1. Свойства изолированной вихревой нити

Рассмотрим детально структуру отдельной вихревой нити в пределе $\xi \ll \lambda$.

Поскольку остов в этом случае мал, при вычислении энергии на некоторое время пренебрежем его вкладом, т.е. изменением энергии конденсации сверхпроводящей фазы. Тогда свободная энергия единицы длины отдельной нити равна

$$F = \frac{\mu_0}{2} \int (h^2 + \lambda^2 |\text{rot}\vec{h}|^2) dV, \quad (3.18)$$

где интеграл берется по области $r > \xi$.

Из условия минимума F приходим вне остова к уравнению Лондонов

$$\vec{h} + \lambda^2 \text{rot rot } \vec{h} = 0 \quad (3.19)$$

Внутри остова, строго говоря, надо было бы применить более сложное уравнение, но, поскольку радиус остова мал, можно заменить имеющуюся особенность двумерной δ -функцией:

$$\vec{h} + \lambda^2 \text{rot rot } \vec{h} = \frac{\vec{\Omega}}{\mu_0} \delta(\vec{r}), \quad (3.20)$$

где $\vec{\Omega}$ - некоторый вектор, направленный вдоль нити.

Покажем, что модуль вектора $\vec{\Omega}$ равен кванту потока Φ_0 . Проинтегрируем уравнение (3.20) по площади кругового контура радиуса r с центром на оси:

$$\int \vec{h} d\vec{\sigma} + \lambda^2 \int \text{rot } \vec{h} \cdot d\vec{l} = \Omega / \mu_0 \quad (3.21)$$

Если выбрать радиус круга в области $r \gg \lambda$, то токами вдоль контура $\vec{j} = \text{rot } \vec{h}$, а следовательно, и всеми контурными интегралами, можно пренебречь. Тогда получаем, что модуль вектора $\vec{\Omega}$ равен связанному с нитью магнитному потоку, т.е. $\Omega = \Phi_0$.

Решим уравнение (3.20) вместе с уравнением Максвелла $\text{div } \vec{h} = 0$.

Нетрудно найти величину плотности тока $\vec{j} = \text{rot } \vec{h}$ в области $\xi < r \ll \lambda$. Если контур интегрирования лежит в этой области, то в уравнении (3.21) можно пренебречь первым членом, так как через контур проходит малая часть полного потока Φ_0 . Тогда получаем $\lambda^2 2\pi r |\text{rot } \vec{h}| = \Phi_0 / \mu_0$ или

$$j = |\text{rot } \vec{h}| = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2 \mu_0 r}, \quad \xi < r \ll \lambda \quad (3.22)$$

Полагая $|\text{rot } \vec{h}| = -\frac{\partial h}{\partial r}$ и интегрируя, получаем

$$h = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2 \mu_0} \left(\ln \frac{\lambda}{r} + \text{const} \right), \quad \xi < r \ll \lambda \quad (3.23)$$

Для вычисления постоянной найдем точное решение уравнения (3.20). В цилиндрических координатах это уравнение имеет вид (при $r > 0$)

$$h'' + \frac{1}{r} h' + \frac{h}{\lambda^2} = 0 \quad (3.24)$$

Решение этого уравнения, убывающее при $r \rightarrow \infty$, есть

$$h = C \cdot K_0 \left(\frac{r}{\lambda} \right), \quad \xi < r, \quad (3.25)$$

где K_0 - функция Бесселя (Ганкеля) нулевого порядка от мнимого аргумента.

Коэффициент C в (3.25) и const в (3.23) находятся из сшивки решений (3.23) и (3.25), в результате чего (3.23) и (3.25) принимают вид

$$h = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2\mu_0} \ln \frac{\lambda}{r} \quad \xi < r \ll \lambda \quad (3.26)$$

$$h = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2\mu_0} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad \xi < r \quad (3.27)$$

Асимптотика решения (3.27) при $r \gg \lambda$ имеет вид

$$h = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2\mu_0} \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2r}} \cdot \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) \quad (3.28)$$

Зная выражение для поля, можно найти энергию единицы длины нити F . Используя формулу векторного анализа $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}$ и уравнение (3.19), приходем к выражению

$$\operatorname{div}(\vec{h} \times \operatorname{rot} \vec{h}) = (\operatorname{rot} \vec{h})^2 - \vec{h} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{h} = (\operatorname{rot} \vec{h})^2 + h^2/\lambda^2. \quad (3.29)$$

Подставляя (3.29) в (3.18) и применяя теорему Гаусса, получим

$$F = \frac{\mu_0\lambda^2}{2} \int \operatorname{div}(\vec{h} \times \operatorname{rot} \vec{h}) dV = \frac{\mu_0\lambda^2}{2} \int (\vec{h} \times \operatorname{rot} \vec{h}) d\vec{\sigma}, \quad (3.30)$$

где интегрирование в последнем интеграле ведется по поверхности остова, т.е. цилиндра радиусом ξ . Поскольку на поверхности остова векторы \vec{h} , $\operatorname{rot} \vec{h}$ и $d\vec{\sigma}$ взаимно перпендикулярны, а их модули, согласно (3.22) и (3.26) постоянны, то их можно вынести из-под интеграла в (3.30). Тогда получим

$$F = \frac{\mu_0\lambda^2}{2} h(\xi) j(\xi) \cdot 2\pi\xi = \frac{\Phi_0^2}{4\pi\lambda^2\mu_0} \ln \frac{\lambda}{\xi}. \quad (3.31)$$

Учет энергии остова дает окончательное выражение для энергии нити на единицу длины

$$F = \frac{\Phi_0^2}{4\pi\lambda^2\mu_0} \left(\ln \frac{\lambda}{\xi} + \varepsilon \right), \quad \text{где } \varepsilon \approx 0,1. \quad (3.32)$$

3.3.2. Взаимодействие вихревых нитей

Рассмотрим две нити, параллельные оси z и проходящие при $z=0$ через точки $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ и $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$. Распределение результирующего магнитного поля описывается уравнением

$$\vec{h} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{h} = \frac{\vec{\Phi}_0}{\mu_0} [\delta(\vec{r} - \vec{r}_1) + \delta(\vec{r} - \vec{r}_2)], \quad (3.33)$$

которое является обобщением уравнения (3.20).

Решение представляет собой суперпозицию двух полей $\vec{h}(\vec{r}) = \vec{h}_1(\vec{r}) + \vec{h}_2(\vec{r})$, создаваемых каждой из нитей в отдельности

$$\vec{h}_i(\vec{r}) = \frac{\vec{\Phi}_0}{2\pi\lambda^2\mu_0} K_0\left(\frac{|\vec{r} - \vec{r}_i|}{\lambda}\right) \quad (3.34)$$

Для нахождения свободной энергии системы надо вычислить интеграл (3.30) по поверхности остовов обеих нитей, что уже не так просто, как было для одной нити. Для вычисления энергии взаимодействия двух нитей на единицу длины надо из энергии системы вычесть собственные энергии нитей (3.31), что при $\xi \ll \lambda$ приводит к следующему выражению

$$U_{12} = \frac{\mu_0 \lambda^2}{2} \int (\vec{h} \times \text{rot } \vec{h}) d\vec{\sigma} - 2F = \frac{\Phi_0^2}{2\pi\lambda^2 \mu_0} K_0 \left(\frac{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}{\lambda} \right) > 0 \quad (3.35)$$

Положительной энергии взаимодействия U_{12} соответствует взаимное отталкивание нитей. При больших расстояниях r_{12} между нитями ($r_{12} \gg \lambda$) энергия взаимодействия U_{12} убывает как $\sqrt{\frac{1}{r_{12}}} \cdot \exp\left(-\frac{r_{12}}{\lambda}\right)$.

Записав (3.35) в виде $U_{12} = \Phi_0 h_1$, найдем величину силы, действующей в направлении x , например, на второй вихрь: $f_2 = -\partial U_{12} / \partial x_2 = \Phi_0 j_{1y}(\vec{r}_2)$, так как $\text{rot } \vec{h} = \vec{j}$. Записывая эту формулу в векторном виде, получим

$$\vec{f}_2 = \vec{j}_1(\vec{r}_2) \times \vec{\Phi}_0 \quad (3.36)$$

Обобщая (3.36) на случай произвольной решетки вихрей, получим выражение для действующей на вихрь силы

$$\vec{f} = \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{\Phi}_0, \quad (3.37)$$

где $\vec{j}(\vec{r})$ - суммарная плотность тока от всех других вихрей (включая даже плотность «транспортного» тока) в точке расположения оси данного вихря.

3.3.3. Кривая намагничивания сверхпроводников второго рода.

Пусть образец имеет форму длинного стержня и помещен во внешнее поле \vec{H}_e , параллельное его оси. Если поле достаточно мало, то нити, если и существуют, то расположены редко, и их взаимодействием можно пренебречь. Тогда потенциал Гиббса единицы объема ($1 \text{ м}^2 \times 1 \text{ м}$) равен

$$G = F_s + n_L F - BH \quad (3.38)$$

где n_L - число нитей на 1 м^2 , F - энергия единицы длины нити из (3.31).

Ранее неоднократно говорилось, что при рассматриваемой геометрии магнитное поле \vec{H} во всех точках, как снаружи, так и внутри образца, равно внешнему полю \vec{H}_e . Поэтому далее в формулах вместо \vec{H} будем писать \vec{H}_e .

Так как каждая нить несет магнитный поток Φ_0 , то магнитная индукция, равная магнитному потоку через единицу площади, дается выражением

$$B = n_L \Phi_0, \quad (3.39)$$

что позволяет записать потенциал Гиббса в виде

$$G = F_s + B\left(\frac{F}{\Phi_0} - H_e\right) \quad (3.40)$$

Если $H_e < \frac{F}{\Phi_0}$, то наиболее выгодна энергетически ситуация с $B=0$, т.е. магнитное поле выталкивается из образца (эффект Мейсснера).

Если же $H_e > \frac{F}{\Phi_0}$, то выгодно $B \neq 0$. Таким образом, критическое поле H_{c1} определяется выражением

$$H_{c1} = \frac{F}{\Phi_0} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2\mu_0} \ln \frac{\lambda}{\xi} \quad (3.41)$$

Сравним величину поля H_{c1} с полем $H_c = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\mu_0 e \lambda(T) \xi(T)}$ (см.3.2). Отношение этих полей равно

$$\frac{H_{c1}}{H_c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\xi}{\lambda} \ln \frac{\lambda}{\xi} \sim \frac{\xi}{\lambda} \quad (3.42)$$

и может быть весьма малым.

Что касается величины поля H_{c2} , то в §2.5.4 было показано, что поле, в котором начинают возникать области сверхпроводимости в объеме образца, определяется выражением ($\kappa = \lambda(T)/\xi(T)$ - параметр Гинзбурга-Ландау)

$$H_{c2} = \kappa\sqrt{2}H_c = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\xi^2(T)} \quad (3.43)$$

Из (3.43) видно, что поле H_{c2} соответствует случаю, когда начинают перекрываться остовы нитей.

Поле H_{c3} связано с поверхностной сверхпроводимостью и определяется образованием зародышей сверхпроводимости у поверхности образца. Расчет на базе уравнений Гинзбурга-Ландау приводит к следующему выражению

$$H_{c3} = 1,7H_{c2} = 2,4\kappa H_c \quad (3.44)$$

Равновесную плотность нитей в образце найдем из условия минимума потенциала Гиббса для системы большого числа нитей. Рассмотрим случай, когда внешнее поле ненамного превышает критическое значение. Тогда, как установлено Абрикосовым, минимуму потенциала Гиббса соответствует периодическая структура. Детальный расчет показывает, что это треугольная решетка (рис.3.12). При малом превышении H_e над H_{c1} плотность вихревых нитей мала, поэтому надо учитывать только взаимодействие ближайших соседей (см.3.35)

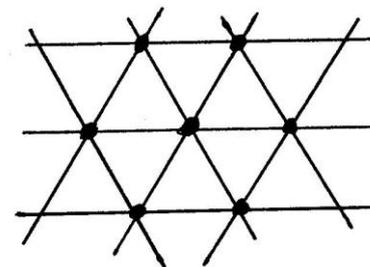


Рис.3.12.

$$G = F_s + n_L \left(F + \frac{Z}{2} U_{12} \right) - BH = F_s + B \left(H_{c1} - H_e + \frac{1}{2} Z \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2\mu_0} K_0 \left(\frac{d}{\lambda} \right) \right), \quad (3.45)$$

где Z - число ближайших соседей (в треугольной решетке $Z=6$), K_0 - функция Бесселя (Ганкеля) нулевого порядка от мнимого аргумента, d - расстояние между ближайшими вихрями. Учитывая, что на каждый треугольник площадью $S = d^2\sqrt{3}/4$ приходится $0,5\Phi_0$ (в треугольной плоской решетке каждый узел разделяется на 6 ячеек), из связи с индукцией $B = \Phi/S$ найдем $d = \sqrt{\frac{2\Phi_0}{B\sqrt{3}}}$

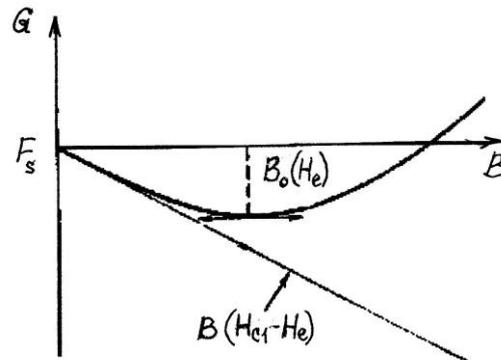


Рис.3.13. Зависимость термодинамического потенциала G от индукции B .

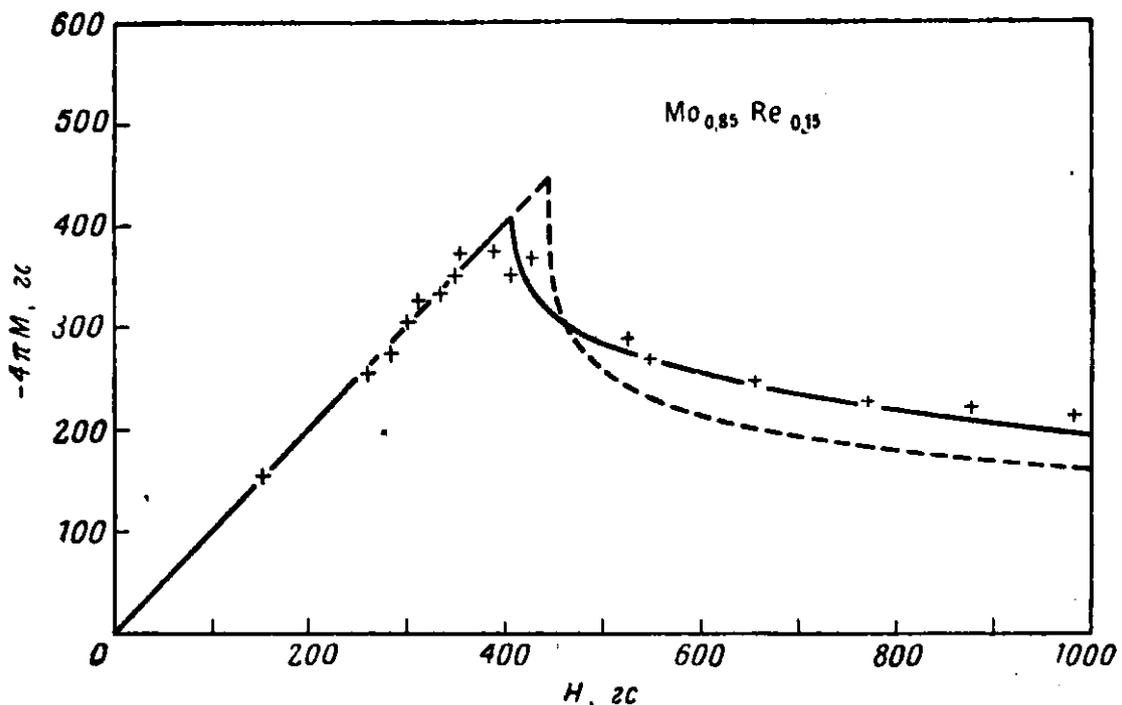


Рис.3.14. Кривые намагничивания сверхпроводника II-го рода, имеющего форму длинного цилиндра: сплошная линия - вихревая модель, пунктирная - ламинарная модель, крестики - экспериментальные значения.

Вид функции $G(B)$ показан на рис.3.13. При малом превышении H_e над H_{c1} последний член в (3.43), соответствующий взаимодействию, мал и наклон кривой отрицателен, при увеличении индукции B взаимодействие растет, но

довольно медленно. Это связано с тем, что величина $K_0\left(\frac{d}{\lambda}\right)$ при $d > \lambda$ имеет вид

$$K_0\left(\frac{d}{\lambda}\right) \approx \exp\left(-\frac{d}{\lambda}\right) = \exp\left(-1.07\sqrt{\frac{\Phi_0}{B\lambda^2}}\right). \text{ Поэтому при малых } B \text{ взаимодействие мало.}$$

Однако при больших B вклад этого члена является преобладающим, что приводит к росту функции $G(B)$. Следовательно, при некотором значении $B_0(H_e)$ функция G достигает минимума. Это значение и будет равновесным значением индукции в поле \vec{H}_e .

Теоретическая кривая зависимости $M(H_e)$ для вихревой модели приведена на рис.3.14 (сплошная кривая). При $H_e = H_{c1}$ она имеет бесконечный наклон. Пунктирная кривая относится к ламинарной модели. Крестиками показаны результаты эксперимента.

3.3.4. Ламинарная структура

Вычислим потенциал Гиббса и критическое поле для структуры, изображенной на рис.3.15 и представляющей собой систему тонких эквидистантно расположенных N-слоев. Обозначим через d период структуры и будем считать, что слои перпендикулярны оси x . Внутри N-слоев сверхпроводимость сильно подавлена, а в остальной части (области S) она характеризуется обычным значением плотности сверхпроводящих электронов.

Пусть, как и раньше, $\xi \ll \lambda$. Поместим начало координат посередине между N-слоями. Поле $h(x)$ параллельно оси z и везде, за исключением узких N-слоев, удовлетворяет уравнению

$$h = \lambda^2 \frac{d^2 h}{dx^2} \quad (3.46)$$

Решение уравнения (3.44) имеет вид

$$h(x) = H_m \frac{ch(x/\lambda)}{chP}, \quad (3.47)$$

где $P = d/2\lambda$, H_m - поле внутри N-слоев.

Найдем величину магнитной индукции

$$B = \mu_0 \langle h \rangle = \mu_0 \frac{2}{d} \int_0^{d/2} H_m \frac{ch(x/\lambda)}{chP} dx = \mu_0 H_m \frac{thP}{P} \quad (3.48)$$

Плотность свободной энергии в S-областях, согласно (3.18), равна

$$F_1 = \frac{2}{d} \frac{\mu_0}{2} \int_0^{d/2} \left[h^2 + \lambda^2 \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] dx = \frac{\mu_0 H_m^2 thP}{2 P} \quad (3.49)$$

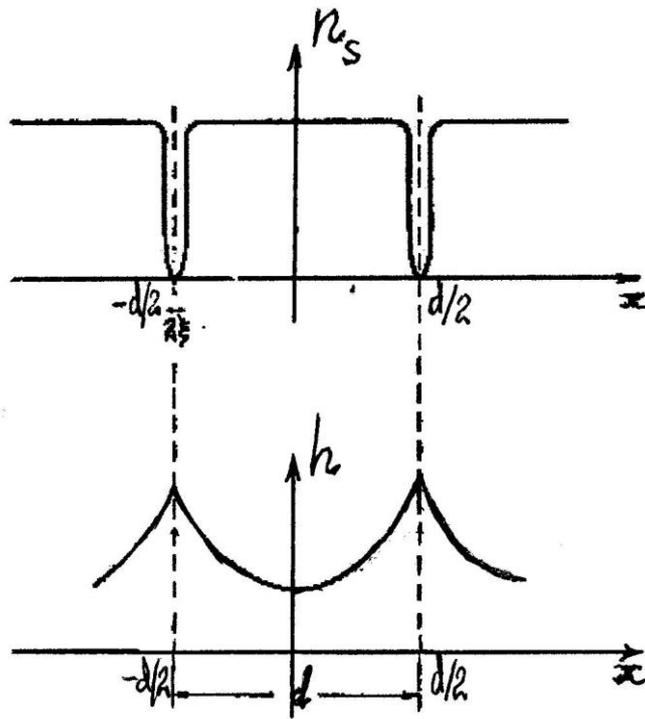


Рис.3.15. Структура фазы Шубникова в ламинарной модели.

К этому надо добавить энергию на (1 м^3) образования N-слоев

$$F_2 \approx \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \frac{2\xi}{d} = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \frac{1}{P\kappa}, \quad (3.50)$$

где $\kappa = \lambda/\xi$ - параметр Гинзбурга-Ландау.

Для перехода к потенциалу Гиббса вычтем $BH = \mu_0 H N_m \frac{thP}{P}$:

$$G_{\text{ламин}} = \frac{\mu_0}{2} \left(H_m^2 \frac{thP}{P} + \frac{H_c^2}{P\kappa} - 2HN_m \frac{thP}{P} \right) \quad (3.51)$$

Учтя комментарий к (3.38), далее в формулах вместо H будем писать H_e .

Минимизируя G по H_m , находим, что минимум достигается при $H_m = H_e$

$$G_{\text{min}} = \frac{\mu_0}{2P} \left(\frac{H_c^2}{\kappa} - H_e^2 thP \right) \quad (3.52)$$

При $H_e < H_c/\sqrt{\kappa}$ минимуму соответствует $P = \infty$, т.е. имеет место полный эффект Мейсснера.

При $H_e > H_c/\sqrt{\kappa}$ минимум достигается при конечном значении P .

Таким образом, критическое поле в ламинарной модели равно

$$H_{c1\text{ламин}} = \frac{H_c}{\sqrt{\kappa}} \quad (3.53)$$

Сравнивая это значение с критическим полем H_{c1} для нитей из (3.42)

$$H_{c1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\ln \kappa}{\kappa} H_c, \quad (3.54)$$

приходим к выводу, что в рассматриваемом случае (при $\xi \ll \lambda$, т.е. при $\kappa \gg 1$) критическое поле для нитей меньше, чем для ламинарных структур. Из проведенного анализа следует, что в области полей $H_{c1} < H_e < H_c / \sqrt{\kappa}$ ламинарное состояние является мейсснеровским, а энергия вихревого состояния в этом диапазоне меньше, чем мейсснеровского. Иначе говоря, вихревое состояние энергетически выгоднее ламинарного.

Можно показать, что это верно и при полях $H_e > H_c / \sqrt{\kappa}$, т.е. во всем диапазоне полей $H_e > H_{c1}$ вихревое состояние является наиболее энергетически выгодным.

ГЛАВА 4. КРИТИЧЕСКИЕ ТОКИ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ

В параграфе 1.4 было показано, что существует некая критическая скорость куперовских пар, а следовательно, и критическая плотность тока. При плотности протекающего тока ниже критической система куперовских пар не может взаимодействовать с решеткой. Превышение критической плотности тока приводит к разрушению куперовских пар и исчезновению сверхпроводимости.

Вопросы, связанные с критическими токами, имеют важнейшее значение для технических применений сверхпроводников. Хотя сверхпроводники II-го рода сохраняют сверхпроводимость в сильных магнитных полях, для их технического применения столь же важно, чтобы они могли без потерь переносить достаточно большие токи. Как мы увидим далее, эту проблему позволяют решить сверхпроводники III-го рода.

§4.1. Критические токи в сверхпроводниках I-го рода

Простейшим с точки зрения геометрии примером может служить проволока круглого сечения, по которой течет ток. При слабых токах проволока должна находиться в мейсснеровской фазе, т.е. поле внутри образца равно нулю. Отсюда следует, что ток внутри образца протекать не может, так как он создавал бы внутри сверхпроводника магнитное поле. Значит, ток протекает только в тонком приповерхностном слое, в который может проникать магнитное поле. Эти токи, в отличие от экранирующих, будем называть транспортными.

На рис.4.1 показано распределение плотности транспортного тока и магнитного поля по сечению круглой проволоки. При увеличении тока растет величина магнитного поля. Еще в 1916 г. Ф. Сильсби предположил, что критическая плотность тока достигается тогда, когда на поверхности образца магнитное поле достигает критического значения. Это предположение блестяще подтвердилось на опыте. При помощи гипотезы Сильсби можно находить также критические токи для сверхпроводников, помещенных во внешнее магнитное поле. Для этого необходимо векторно сложить внешнее поле с полем транспортного тока. Критическое значение тока соответствует моменту, когда в какой-либо точке поле станет равно критическому.

Критические плотности тока весьма велики ($\sim 10^7$ А/см²), но по причине малой толщины поверхностного слоя общий ток невелик.

Рассмотрим проволоку с радиусом a , по которой течет ток J . Поле на поверхности проволоки равно $h(a) = J/2\pi a$. Если $h(a) < H_c$, то проволока может полностью находиться в сверхпроводящем состоянии. Это условие определяет величину критического тока $J_c = 2\pi a H_c$. При $J > J_c$ имеем $h(a) > H_c$ и проволока у поверхности должна перейти в нормальное состояние. Однако полностью она не может находиться в нормальном состоянии, поскольку в этом случае ток равномерно распределился бы по сечению и поле вблизи оси было бы меньше критического. Чтобы убедиться в этом, найдем поле внутри провода на расстоянии r от оси при однородно протекающем токе плотностью j , воспользовавшись теоремой Стокса о циркуляции магнитного поля:

$$h(r) = \frac{J_r}{2\pi r} = \frac{j\pi r^2}{2\pi r} = \frac{j r}{2} \quad (4.1)$$

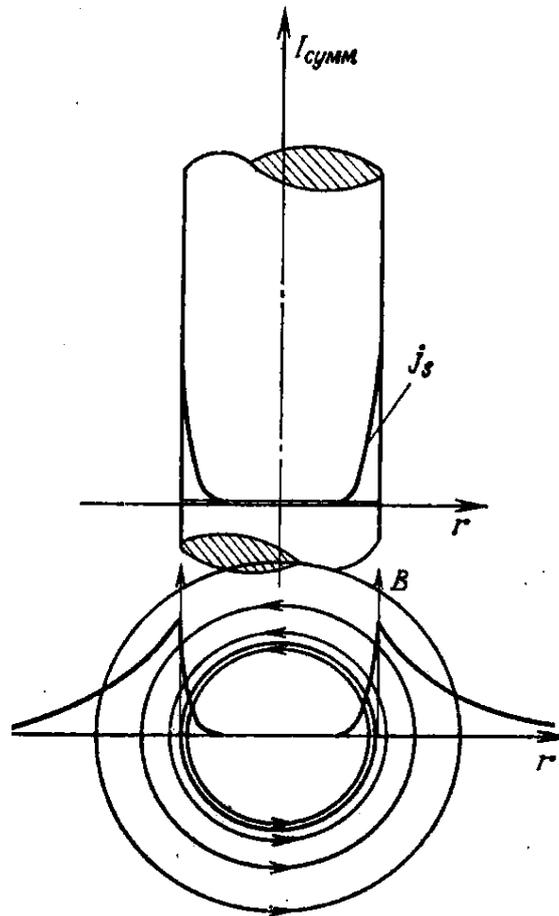


Рис.4.1. Распределение плотности тока и магнитного поля в сверхпроводящей проволоке с транспортным током.

Из (4.1) следует, что вблизи оси ($r \approx 0$) поле мало. Поэтому этим областям энергетически невыгодно переходить в нормальное состояние. Значит, внешняя область проволоки ($R < r < a$) является нормальной, а внутренняя ее часть ($0 < r < R$) должна находиться или в сверхпроводящем, или в промежуточном состоянии. Радиус поверхности

раздела R соответствует условию $h(R) = H_c$. Таким образом, ток, протекающий по внутренней части, равен

$$J_1 = 2\pi R H_c = \frac{R}{a} J_c < J_c \quad (4.2)$$

Оставшийся ток $J - J_1$ течет по внешней части сечения. Так как она находится в нормальном состоянии, то для протекания по ней тока необходима разность потенциалов вдоль нее. Следовательно, внутренняя часть не может быть полностью сверхпроводящей, так как она накоротко замкнула бы полюсы генератора. Таким образом, внутренняя часть проволоки находится в промежуточном состоянии. При этом вариант чередования плоских слоев, как на рис.3.5, не решает проблему, так как на границах раздела сверхпроводящих и нормальных областей магнитное поле должно равняться критическому, а в плоском варианте это не так.

Детальный расчет дает структуру, изображенную на рис.4.2. Как только ток достигает критической величины, проволока скачком переходит в состояние, при котором сверхпроводящие ячейки доходят до ее поверхности. При дальнейшем увеличении тока в проволоке возникает как бы оболочка из нормальной фазы, охватывающая сердцевину, находящуюся в промежуточном состоянии; с ростом тока толщина этой оболочки увеличивается, а сверхпроводящие области в сердцевине сжимаются. На границах раздела N-S во всех точках $h = H_c$, т.е. при приближении к оси плотность тока должна возрастать (см. (4.1)), что и происходит за счет увеличения доли сверхпроводящей фазы.

Из вышесказанного, в частности, следует, что без источника питания невозможно существование в сверхпроводящем кольце тока с $J > J_c$.

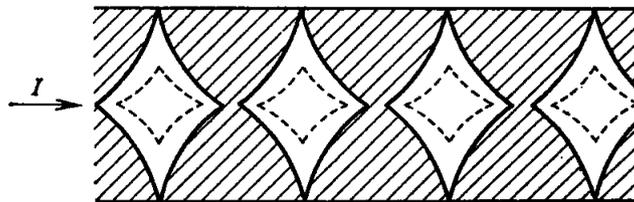


Рис.4.2. Структура промежуточного состояния проволоки круглого сечения с транспортным током. Нормальные области заштрихованы.

§4.2. Критические токи в сверхпроводниках II-го рода

В слабых магнитных полях и при малых транспортных токах они ведут себя так же, как и сверхпроводники I-го рода, т.е. выталкивают магнитное поле и ток в тонкий приповерхностный слой. Если же на поверхности магнитное поле выше H_{c1} , то образец переходит в смешанное состояние, т.е. в него должны проникать нити магнитного потока. Оказывается, что в этом состоянии при любых, даже очень малых, транспортных токах образец обладает конечным сопротивлением.

Чтобы понять причину этого явления, рассмотрим для начала прямоугольную пластину, через которую вдоль ее поверхности течет электрический ток, а сама пластина из-за перпендикулярного ей внешнего магнитного поля находится в смешанном состоянии (рис.4.3).

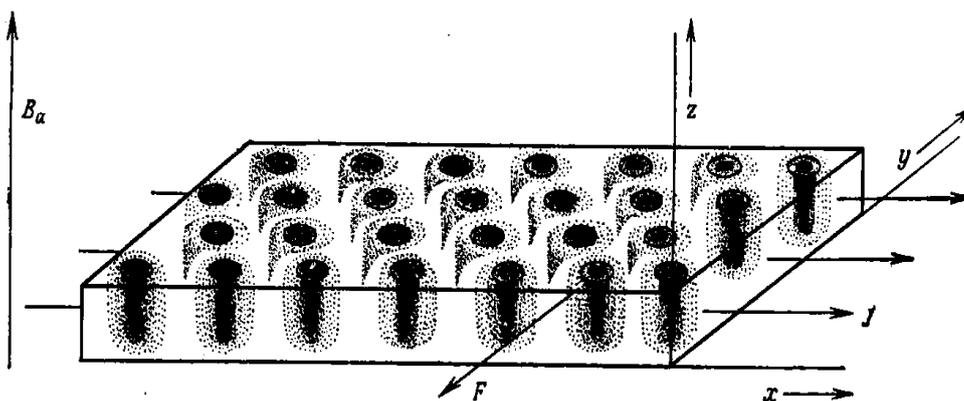


Рис.4.3. Смешанное состояние при наличии транспортного тока

Важный вывод из такого рассмотрения состоит в том, что в этих условиях ток распределяется равномерно по всему сечению пластины, а не ограничен тонким слоем вблизи поверхности. С проникновением магнитного потока внутрь образца транспортный ток также может проникнуть в глубь сверхпроводника.

При этом возникает чрезвычайно важное взаимодействие между транспортным током и нитями магнитного потока. На нити действует сила (3.37)

$$\vec{f} = \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{\Phi}_0, \quad (4.3)$$

направленная перпендикулярно полю и току.

Из выражения (4.3) следует, что вихрь может находиться в равновесии, только если сумма сверхпроводящих скоростей от всех других источников равна нулю в каждой его точке. Это условие может выполняться, если каждый из вихрей будет окружен симметричной вихревой решеткой, например, квадратной или треугольной. Однако квадратная решетка отвечает неустойчивому равновесию, так что малые смещения вихрей в ней будут нарастать. А треугольная решетка устойчива, поскольку обладает наименьшей энергией.

Кроме того, выражение (4.3) показывает, что и в треугольной решетке на вихри будет действовать сила со стороны любого транспортного тока, в результате чего вихри придут в движение и возникнут потери энергии. Эта энергия черпается из энергии транспортного тока, причем на образце при этом появляется напряжение, что соответствует появлению сопротивления. Потери энергии определяются двумя основными механизмами.

1. При движении вихрей магнитное поле в точке меняется, возникает переменное электрическое поле, ускоряющее неспаренные электроны, которые затем отдают энергию решетке.

2. При движении нитей происходит непрерывный процесс разрыва и образования куперовских пар. Если нить движется столь медленно, что распределение пар остается равновесным, то энергия, затрачиваемая на разрыв пар на переднем фронте вихря, снова высвобождается позади него при образовании пар, так что в итоге потерь энергии нет. Но при достаточно быстром движении вихря равновесная плотность пар не успевает установиться и происходит диссипация энергии.

Рассмотрим теперь вопрос о критическом токе при отсутствии внешнего магнитного поля. Рассмотрим опять проволоку с радиусом a , по которой течет ток J . Поле на поверхности проволоки равно $h(a) = J/2\pi a$. Если $h(a) < H_{c1}$, то проволока может полностью находиться в сверхпроводящем состоянии. Это условие определяет величину критического тока $J_c = 2\pi a H_{c1}$. При $J > J_c$ поле у границы превышает H_{c1} , и проволока у поверхности должна перейти в шубниковскую фазу. Так как силовые линии магнитного поля транспортного тока охватывают проволоку концентрическими окружностями, то и вихревые нити образуются также в виде замкнутых окружностей. Сначала они имеют радиус a , но затем из соображений минимизации энергии, т.е. длины, стягиваются к оси проволоки и наконец исчезают. Процесс образования вихрей, их сжатия и исчезновения происходит непрерывно, поэтому имеет место постоянный переход энергии в тепло. Поскольку $H_{c1} < H_c$, то критические токи в сверхпроводниках II-го рода ниже, чем в аналогичных образцах I-го рода.

Следует сказать, что в сверхпроводниках I-го рода в промежуточном состоянии под действием достаточно сильных транспортных токов также может возникать движение отдельных участков, что приводит к возникновению сопротивления.

§4.3. Сверхпроводники III-го рода

В параграфе 4.2 сформулирован важный результат: если сверхпроводник II-го рода находится в смешанном состоянии (шубниковской фазе), то сколь угодно малые транспортные токи приводят к движению вихрей. Иными словами, критический ток сверхпроводника в состоянии шубниковской фазы равен нулю. Конечные критические токи могут быть получены, только если осуществить закрепление (пиннинг) вихревых нитей на определенных участках вещества, препятствующее их движению. Сверхпроводники II-го рода, содержащие такие центры закрепления вихрей, называют жесткими сверхпроводниками II-го рода или сверхпроводниками III-го рода.

Энергетически предпочтительными для нахождения вихрей участками вещества могут являться различные примеси, нарушения структуры, всевозможные дефекты. Как часто бывает, идеальные с точки зрения теории образцы не являются лучшими в отношении их практического применения.

На рис.4.4 приведены кривые намагничивания сплава Nb и Ta, типичные для сверхпроводников III-го рода. Очень тщательный отжиг образца позволяет получать очень однородные твердые растворы, которые обладают практически обратимой кривой намагничивания, характерной для сверхпроводников II-го рода (кривая 1). Если этот сплав подвергнуть деформации (например, путем волочения при изготовлении проволоки), то в решетке образуется множество дефектов, которые могут быть центрами пиннинга вихрей. При этом кривая намагничивания приобретает совершенно другой вид (кривая 2).

Можно отметить следующие основные моменты:

- а) существенно увеличенные значения намагниченности,
- б) полное отсутствие обратимости,
- в) при снятии поля магнитный поток остается "замороженным" в образце,
- г) верхнее критическое поле H_{c2} остается неизменным.

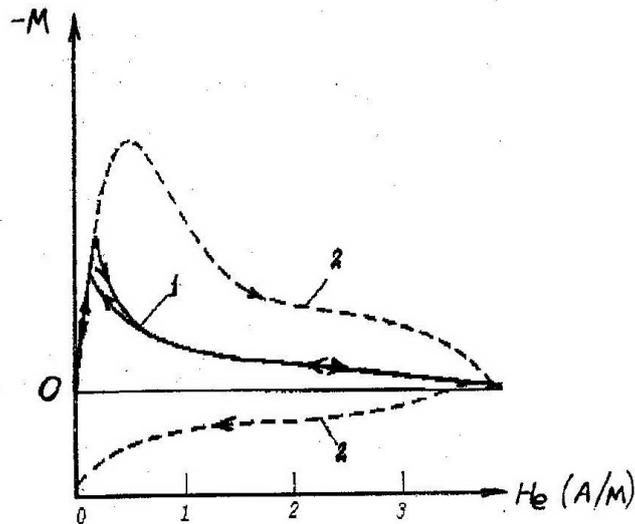


Рис.4.4. Кривая намагничивания сплава $Nb_{0,55}Ta_{0,45}$: 1- хорошо отожженный образец, 2-образец с большим количеством дефектов.

Эти факты можно легко объяснить качественно. До поля H_{C1} мы не наблюдаем ничего нового: образец находится в мейснеровской фазе, мало чувствительной к присутствию нарушений. Начиная с поля H_{C1} вихри проникают из поверхности образца в его объем. Однако пиннинг не дает им сразу равномерно заполнить весь образец, как это было бы в однородном материале. Поэтому вихри располагаются в приповерхностном слое. В области их размещения могут течь экранирующие токи. Расширение области, в которой находятся вихри, приводит к увеличению экранирующего тока по сравнению с мейснеровской фазой, что ведет к возрастанию величины намагниченности M .

Иначе говоря, проникновение вихревых нитей в приповерхностный слой увеличивает эффективную толщину экранирующего слоя и тем самым суммарный экранирующий ток.

При понижении внешнего поля при отсутствии пиннинга часть вихрей вышла бы из образца, и плотность распределения вихрей по сечению образца уменьшилась бы до равновесного значения. При наличии пиннинга вихри более или менее прочно закреплены на дефектах решетки. Поэтому при понижении поля они покидают образец с трудом, что и определяет отсутствие обратимости.

Даже при нулевом поле в образце остается некоторое количество вихрей, обеспечивающих "замороженный" магнитный поток, направленный вдоль внешнего поля.

На рис.4.5 изображена вся петля гистерезиса для того же сплава.

Понятно, что должно существовать некое критическое значение пиннинга, разделяющее два возможных режима. При малых значениях пиннинга, когда им можно пренебречь, имеем сверхпроводник 2-го рода, в котором вихри заполняют все сечение образца. При большом пиннинге вихри располагаются вблизи границы. Как и когда происходит переход из одного режима в другой при постепенном изменении параметра пиннинга?

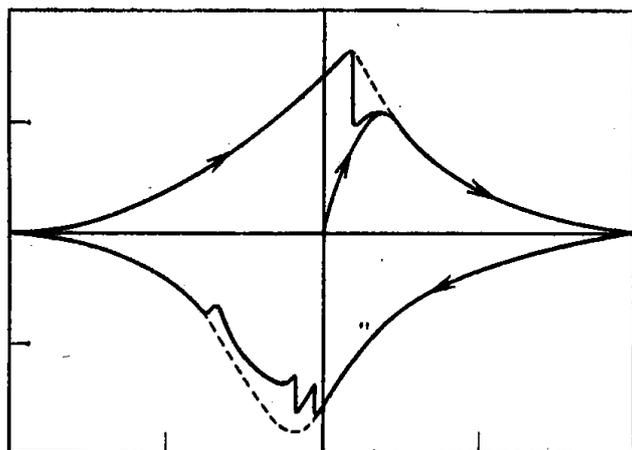


Рис.4.5. Полный цикл намагничивания.

Расчет показывает, что существует критическое значение пиннинга, разделяющее два возможных режима проникновения в среду внешнего магнитного поля. При превышении его при любом значении внешнего поля возникает приграничная токовая конфигурация конечной длины, полностью компенсирующая внешнее поле в глубине образца, т.е. ситуация аналогична сверхпроводнику 3-го рода. Если же пиннинг слабее критического, то такая ситуация реализуется лишь до некоторого значения внешнего поля. При больших значениях поля оно проникает внутрь среды на бесконечную глубину, что напоминает ситуацию в сверхпроводниках 2-го рода.

ГЛАВА 5. ФАЗОВАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ - ЭФФЕКТЫ ДЖОЗЕФСОНА

§5.1. Стационарный и нестационарный эффекты Джозефсона

В главе "Основные факты" мы говорили об эффектах Джозефсона, обусловленных туннелированием куперовских пар через изолирующую прослойку. Первым рассмотрел этот эффект Б.Джозефсон в 1962 г. За эти работы в 1973г. ему была присуждена Нобелевская премия. Он показал, что туннелирование куперовских пар становится существенным при толщине барьера 10-20 ангстрем. Кроме того, он предсказал несколько необычных и интересных явлений, имеющих место при туннелировании пар. Впоследствии все его предсказания блестяще подтвердились на эксперименте. Помимо своего принципиального значения для понимания сверхпроводимости, эффекты Джозефсона (так принято теперь называть этот комплекс явлений) предоставляют интереснейшие возможности для их использования при проведении точнейших измерений. Подчеркнем, что особенно важную роль они играют в процессах, происходящих в высокотемпературных керамических сверхпроводниках, поскольку в них такие контакты уже существуют естественным образом (контакты между гранулами). Эти вещества по этой причине даже называют иногда джозефсоновскими средами.

Стационарный эффект Джозефсона - это протекание через тонкую изолирующую прослойку незатухающего сверхпроводящего тока при нулевом напряжении на контакте.

Величина этого тока определяется значениями фазы по разные стороны контакта φ_1 и φ_2 и не может превышать некоторое критическое значение I_C :

$$I = I_C \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (5.1)$$

Нестационарный эффект Джозефсона состоит в том, что при ненулевом напряжении на контакте через него протекает высокочастотный переменный ток, частота которого ω пропорциональна напряжению U_S на контакте:

$$\omega = \frac{2eU_S}{h} \quad (5.2)$$

Для того чтобы понять практическую ситуацию, рассмотрим цепь, изображенную на рис.5.1. При протекании постоянного сверхпроводящего тока (стационарный эффект Джозефсона) напряжение на контакте равно нулю, т.е. все приложенное напряжение U_e падает на сопротивлении R , при этом сила тока, равная U_e / R , не должна превышать критическое значение I_C . Таким образом, стационарный эффект Джозефсона имеет место, пока $U_e < I_C R$. Если же $U_e > I_C R$, то начинается генерация высокочастотного тока. При этом математическое описание цепи становится весьма сложным.

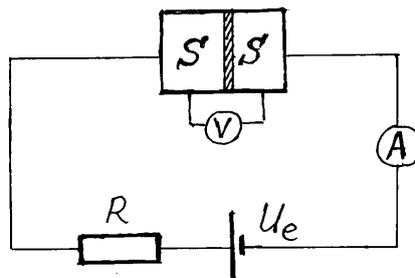


Рис.5.1. Схема для демонстрации эффектов Джозефсона

С точки зрения квантовой механики все куперовские пары находятся в одном состоянии. Это макроскопическое заполнение одного состояния и является причиной эффектов Джозефсона. Поскольку все пары находятся в одном состоянии, то они должны быть согласованы между собой по всем параметрам, в частности, и по фазам. Такая жесткая корреляция по фазе распространяется на очень большие (практически неограниченные) расстояния.

Джозефсоновские уравнения (5.1) и (5.2) следуют из основных уравнений для слабо связанных квантовых систем. Пусть системы описываются волновыми функциями ψ_1 и ψ_2 . Если системы полностью изолированы, то изменение волновых функций описывается уравнениями

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E_1 \psi_1 \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E_2 \psi_2 \quad (5.3)$$

Если же системы слабо связаны между собой, то временная зависимость ψ_1 влияет на ψ_2 и наоборот. Это влияние учитывается следующими уравнениями

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} (E_1 \psi_1 + K \psi_2) \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} (E_2 \psi_2 + K \psi_1) \quad (5.5)$$

Существование связи означает возможность обмена куперовскими парами между сверхпроводниками 1 и 2. Интенсивность обмена определяется величиной постоянной K .

Функции ψ_1 и ψ_2 описывают состояния с макроскопическим заполнением. Тогда квадрат амплитуды можно рассматривать как концентрацию куперовских пар. В этом случае можно написать

$$\psi_1 = \sqrt{n_{c1}} \cdot e^{i\varphi_1}; \quad \psi_2 = \sqrt{n_{c2}} \cdot e^{i\varphi_2} \quad (5.6)$$

Подставив эти волновые функции в (5.4) и (5.5), получим

$$\frac{\dot{n}_{c1}}{2\sqrt{n_{c1}}} e^{i\varphi_1} + i\sqrt{n_{c1}} e^{i\varphi_1} \dot{\varphi}_1 = -\frac{i}{\hbar} \left(E_1 \sqrt{n_{c1}} e^{i\varphi_1} + K \sqrt{n_{c2}} e^{i\varphi_2} \right) \quad (5.7)$$

$$\frac{\dot{n}_{c2}}{2\sqrt{n_{c2}}} e^{i\varphi_2} + i\sqrt{n_{c2}} e^{i\varphi_2} \dot{\varphi}_2 = -\frac{i}{\hbar} \left(E_2 \sqrt{n_{c2}} e^{i\varphi_2} + K \sqrt{n_{c1}} e^{i\varphi_1} \right) \quad (5.8)$$

Разделение на действительную и мнимую части дает

$$\frac{\dot{n}_{c1}}{2\sqrt{n_{c1}}} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{n_{c2}} \sin(\varphi_2 - \varphi_1); \quad (5.9)$$

$$\frac{\dot{n}_{c2}}{2\sqrt{n_{c2}}} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{n_{c1}} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (5.9')$$

$$\sqrt{n_{c1}} \dot{\varphi}_1 = -\frac{1}{\hbar} \left(E_1 \sqrt{n_{c1}} + K \sqrt{n_{c2}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right) \quad (5.10)$$

$$\sqrt{n_{c2}} \dot{\varphi}_2 = -\frac{1}{\hbar} \left(E_2 \sqrt{n_{c2}} + K \sqrt{n_{c1}} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \quad (5.10')$$

При обмене куперовскими парами между системами 1 и 2 выполняется условие $\dot{n}_{c1} = -\dot{n}_{c2}$. Если сверхпроводники одинаковые, то $n_{c1} = n_{c2}$. Тогда из (5.9) и (5.9') получим

$$\dot{n}_{c1} = \frac{2K}{\hbar} n_{c1} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = -\dot{n}_{c2}. \quad (5.11)$$

Изменение во времени плотности числа частиц в сверхпроводнике 1, умноженное на его объем V , дает изменение числа частиц, т.е. поток частиц через контакт. Электрический ток получается умножением потока частиц на заряд частицы, т.е. на $2e$. Тогда получим уравнение Джозефсона (5.1)

$$I = I_c \sin(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где $I_c = \frac{4Ke}{\hbar} V n_c$.

Из уравнений (5.10) и (5.10') получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{1}{\hbar} (E_1 - E_2) \quad (5.12)$$

При $E_1 = E_2$ разность фаз постоянна во времени. Если же между сверхпроводниками приложено электрическое напряжение, то $E_1 - E_2 = 2eU$ и с течением времени разность фаз линейно возрастает

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2eU}{\hbar}t + \varphi_0 \quad (5.13)$$

Это означает, что в контакте появился переменный ток

$$I = I_c \sin\left(\frac{2eU}{\hbar}t + \varphi_0\right), \quad (5.14)$$

частота которого равна $\nu = \frac{2eU}{h}$. При напряжении на контакте $U=1$ мВ имеем $\nu = 4,85 \cdot 10^{11}$ Гц.

Джозефсоновские контакты называют также слабыми связями, а явления, связанные с ними, носят название «слабой сверхпроводимости». Слабую связь можно получить и уменьшением площади контакта, например, прижав тонкое острие сверхпроводника к сверхпроводящей поверхности.

§5.2. Интерференция стационарных сверхпроводящих токов.

Проанализируем некоторые экспериментальные результаты, являющиеся следствием стационарного эффекта Джозефсона.

5.2.1. Сверхпроводящий интерферометр

Рассмотрим некоторый замкнутый контур Γ , проходящий внутри содержащего два туннельных контакта сверхпроводящего кольца и пересекающий эти туннельные контакты в точках 1 и 2 (рис.5.2)

Изменение фазы при обходе контура определяется соотношением

$$\Delta\varphi = \oint_{\Gamma} \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{l} + \varphi_1 - \varphi_2, \quad (5.15)$$

где φ_1 и φ_2 - **скачки** фазы на контактах T_1 и T_2 , т.е. разности значений фазы по разные стороны от контакта. Ток, протекающий через интерферометр, равен

$$I = I_{c1} \sin \varphi_1 + I_{c2} \sin \varphi_2 \quad (5.16)$$

Одно из уравнений Гинзбурга-Ландау (3.16) имеет вид

$$\vec{j} = \frac{e}{m} n_s (\hbar \vec{\nabla} \varphi - 2e\vec{A}), \quad (5.17)$$

где e и m - заряд и масса электрона, n_s - концентрация сверхпроводящих электронов. Находя отсюда $\vec{\nabla} \varphi$ и считая контур интегрирования проходящим в глубине сверхпроводника, где $j=0$, получим

$$\oint_{\Gamma} \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{l} = \frac{2e}{\hbar} \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{2e}{\hbar} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (5.18)$$

где Φ - поток магнитного поля, пронизывающий сечение кольца, $\Phi_0 = \frac{\pi\hbar}{e}$ - квант магнитного потока.

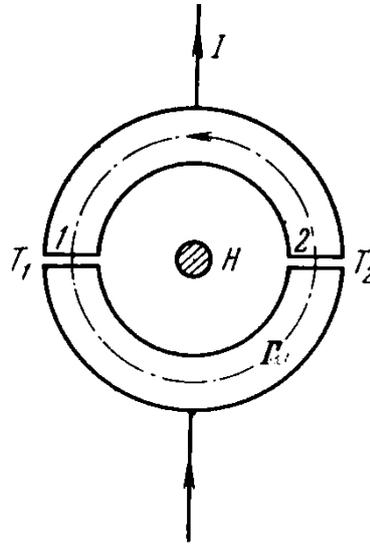


Рис.5.2. Схема сверхпроводящего интерферометра

При обходе кольца волновые функции должны быть однозначными, т.е. изменение фазы должно быть кратным 2π : $\Delta\varphi = 2\pi k$. Из (5.15) получаем условие квантования флюксоида

$$\underbrace{\varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}}_{\text{Флюксoid}} = 2\pi k \quad (5.19)$$

Введя новую переменную $\psi = \varphi_1 + \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}$, приведем выражение (5.16) к виду

$$I = I_{c1} \sin\left(\psi - \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) + I_{c2} \sin\left(\psi + \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) = I_m \sin(\psi - \alpha), \quad (5.20)$$

где
$$I_m = \sqrt{(I_{c1} - I_{c2})^2 + 4I_{c1}I_{c2} \cos^2\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)}, \quad (5.21)$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{I_{c1} - I_{c2}}{I_{c1} + I_{c2}} \operatorname{tg} \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \quad (5.22)$$

Из (5.20) видно, что максимально возможный ток через интерферометр равен I_m . Изменяя при фиксированном значении магнитного поля величину тока через интерферометр I , например, при помощи схемы рис.5.1 и определяя значение I , при котором происходит переход к нестационарному эффекту Джозефсона, можно найти величину I_m . Меняя магнитное поле, можно построить зависимость I_m от магнитного потока через отверстие интерферометра. Как ясно из (5.21), это должна быть периодическая функция с периодом,

равным кванту потока Φ_0 . Поскольку Φ_0 - величина очень малая, то такой прибор может использоваться для регистрации очень малых магнитных полей.

Если интерферометр состоит из одинаковых контактов ($I_{c1} = I_{c2} = I_c$), то выражение для I_m принимает вид

$$I_m = 2I_c \left| \cos \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \right|, \quad (5.23)$$

откуда ясно, что критический ток интерферометра I_m обращается в нуль всякий раз, когда поток Φ равен полуцелому числу квантов потока (рис.5.3а). Если $I_{c1} \neq I_{c2}$, то I_m не обращается в нуль ни при каких значениях потока Φ , осциллируя между минимальным и максимальным значениями, равными $|I_{c1} - I_{c2}|$ и $I_{c1} + I_{c2}$ (рис.5.3б).

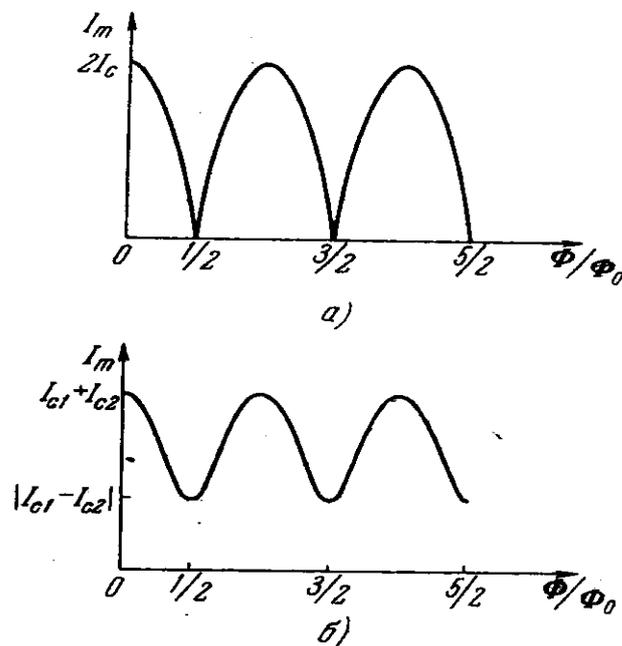


Рис.5.3. Зависимость критического тока интерферометра от магнитного поля

Отметим важное обстоятельство. Характер поведения тока не зависит от того, как распределено поле внутри кольца. Важна лишь величина магнитного потока Φ . В частности, магнитное поле может быть сосредоточено целиком в пределах некоторой области, меньшей отверстия кольца, и равняться нулю в месте расположения сверхпроводников. Такую ситуацию можно реализовать, например, расположив внутри интерферометра длинный соленоид, снаружи которого поле отсутствует. В этом случае воздействие на ток осуществляется целиком за счет векторного потенциала \vec{A} . Таким образом, в квантовой механике векторный потенциал играет особо существенную роль и наблюдаемые характеристики определяются не только магнитным полем \vec{B} или \vec{H} , но и векторным потенциалом \vec{A} . Этот эффект - чисто квантовый и ему трудно дать наглядное объяснение в рамках классических представлений.

5.2.2. Сверхпроводящее кольцо со слабой связью

Рассмотрим особенности поведения одиночного туннельного перехода, помещенного в замкнутую сверхпроводящую цепь (рис.5.4). Если критический ток контакта имеет достаточно большую величину, то магнитное поле в отверстии кольца уже нельзя считать равным внешнему.

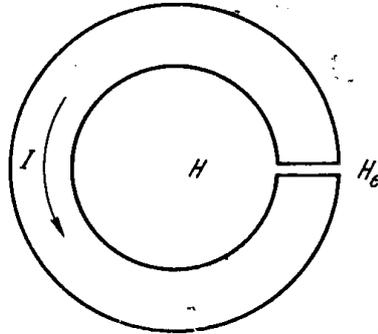


Рис.5.4. Сверхпроводящее кольцо со слабой связью.

Уравнение квантовой интерференции (5.19) принимает вид

$$2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} + \varphi = 2\pi k, \quad (5.24)$$

где φ - разность фаз на барьере, k - целое число.

Ток через контакт связан со скачком фазы на нем соотношением

$$I = I_c \sin \varphi \quad (5.25)$$

К этим двум уравнениям добавляется выражение для магнитного потока Φ через кольцо

$$\Phi = \Phi_e + LI, \quad (5.26)$$

где $\Phi_e = B_e S$ - поток внешнего поля B_e через кольцо, L - индуктивность кольца, S - его площадь. Условие (5.26) соответствует тому факту, что поле в отверстии кольца складывается из внешнего и созданного током I , текущим по кольцу.

Из уравнений (5.24) - (5.26) получаем

$$\Phi + LI_c \sin \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} = \Phi_e \quad (5.27)$$

Графики зависимостей Φ и I от Φ_e приведены на рис.5.5. Удобно строить график $\Phi_e(\Phi)$, а потом повернуть его на 90 градусов.

При малых значениях I_c зависимость $\Phi(\Phi_e)$ мало отличается от прямой линии, а зависимость $I(\Phi_e)$ - от синусоиды. При возрастании I_c характер этих зависимостей меняется. Например, если I_c превышает некое критическое значение I_c^{kp} , то эти зависимости становятся неоднозначными, так что одному значению Φ_e могут

соответствовать несколько значений Φ и I (рис.5.5б). Критическое значение I_c^{kp} можно найти из условия $\partial\Phi/\partial\Phi_e = \infty$:

$$I_c^{kp} = \frac{\Phi_0}{2\pi L} \quad (5.28)$$

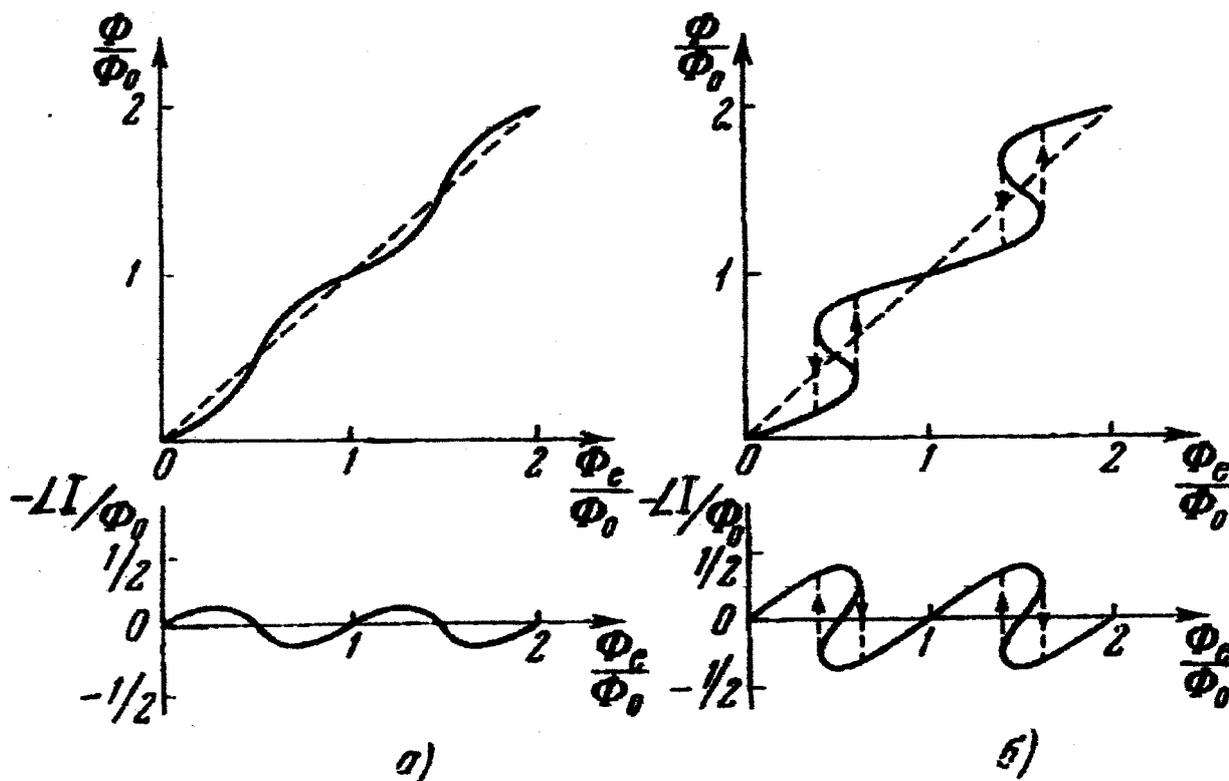


Рис.5.5. Зависимость потока Φ через кольцо и циркулирующего тока I от внешнего потока Φ_e : а) $I_c < I_c^{kp}$, б) $I_c > I_c^{kp}$.

При $I_c > I_c^{kp}$ зависимости $\Phi(\Phi_e)$ и $I(\Phi_e)$ имеют скачки при некоторых значениях Φ_e . При возрастании и убывании внешнего потока Φ_e эти зависимости будут иметь различный вид, т.е. появляется гистерезис. Направление перехода при гистерезисе показано стрелками на рис.5.5б.

Аналогичный эффект должен существовать и в сверхпроводящих интерферометрах с двумя туннельными переходами, если величина критического тока I_c сравнима с параметром Φ_0/L , где L - индуктивность петли интерферометра. Проведенное в предыдущем пункте рассмотрение работы таких интерферометров относилось к случаю $I_c \ll \Phi_0/L$.

§5.3. Взаимодействие переменного тока Джозефсона с внешним электромагнитным излучением - ступеньки Шапиро.

Открытие нестационарного эффекта Джозефсона дало возможность создания нового типа генераторов электромагнитного излучения с очень высокой частотой излучения, величина которой регулируется управляющим напряжением.

Исторически, однако, первоначально были получены косвенные экспериментальные подтверждения существования этого эффекта. В этих экспериментах изучались особенности на вольтамперных характеристиках, возникающие вследствие взаимодействия переменного сверхпроводящего тока с внешним электромагнитным СВЧ-излучением.

В опытах, проведенных Шапиро с сотрудниками (1963 г.), туннельный контакт Al-Sn помещался в СВЧ-резонатор, в котором возбуждались СВЧ-колебания частоты ν . При этом на контакт подавалось постоянное напряжение U_0 . Под влиянием СВЧ-поля на вольтамперной характеристике наблюдались горизонтальные участки - ступеньки - при напряжениях U_0 , удовлетворяющих соотношению $2eU_0 = nh\nu$, где n - целые числа (рис.5.6).

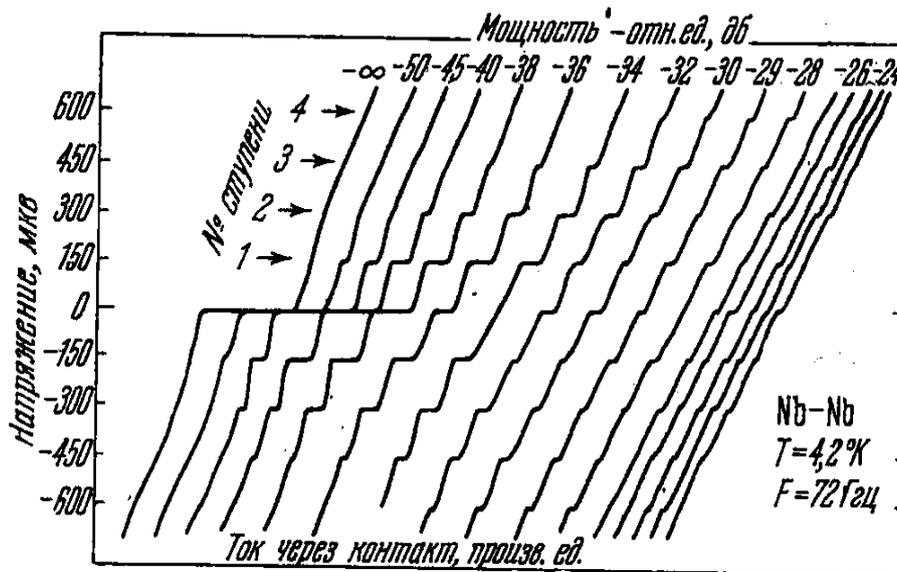


Рис.5.6. Вольтамперные характеристики джозефсоновского контакта Nb-Nb в присутствии СВЧ-излучения различной мощности с частотой 72 ГГц.

Для выяснения причины этого эффекта будем упрощенно считать, что СВЧ-поле проявляется в возникновении на контакте дополнительной разности потенциалов, осциллирующей с частотой ν , что приводит к модуляции частоты джозефсоновского тока ν_J в соответствии с (5.2)

$$\nu_J = \frac{2e}{h} [U_0 + u \cos(2\pi\nu t + \theta)], \quad (5.29)$$

где u - амплитуда осциллирующей добавки, пропорциональная напряженности СВЧ-поля.

Полный ток через контакт складывается из джозефсоновского тока и тока неспаренных электронов, равного U/R , где $U = U_0 + u \cos(2\pi\nu t + \theta)$ - полное напряжение на контакте, R - сопротивление контакта. Поскольку напряжение на контакте зависит от времени, то вместо (5.13) получим $\varphi_2 - \varphi_1 = \int \frac{2eU}{\hbar} dt + \varphi_0$.

Таким образом, ток равен

$$I = I_c \sin \left(\int_0^t 2\pi\nu dt + \varphi_0 \right) + \frac{U}{R} = I_c \sin \left[\frac{2e}{\hbar} U_0 t + \frac{2eu}{h\nu} \sin(2\pi\nu t + \theta) + \varphi_0 \right] + \frac{U}{R}, \quad (5.30)$$

где φ_0 - начальное значение скачка фазы на контакте.

После ряда преобразований с использованием разложений

$$\sin(z \sin x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z) \sin(2k+1)x,$$

$$\cos(z \sin x) = J_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z) \cos 2kx,$$

выражение (5.30) приводится к виду

$$I = I_c \left\{ J_0 \left(\frac{2eU}{h\nu} \right) \sin \left(\frac{2e}{\hbar} U_0 t + \varphi_0 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n \left(\frac{2eu}{h\nu} \right) \left(\sin \left[\frac{2e}{\hbar} U_0 t + \varphi_0 + n(2\pi\nu t + \theta) \right] + (-1)^n \sin \left[\frac{2e}{\hbar} U_0 t + \varphi_0 - n(2\pi\nu t + \theta) \right] \right) \right\} + \frac{U_0 + u \cos(2\pi\nu t + \theta)}{R} \quad (5.31)$$

где $J_n(x)$ - функция Бесселя n-го порядка.

Из (5.31) видно, что полный ток осциллирует во времени с очень высокой частотой ν или с джозефсоновской частотой $2eU_0/h$. Измеряемое значение тока является средним по времени от выражения (5.31). Легко видеть, что эта величина равна $\bar{I} = \frac{U_0}{R}$ при всех значениях U_0 , кроме тех, при которых $2eU_0/h = 2\pi n \nu$, т.е. когда джозефсоновская частота кратна частоте СВЧ-поля. При этих значениях U_0 один из членов суммы перестает быть осциллирующим и вносит постоянный вклад в значение тока. Ток при этом становится равен

$$\bar{I} = \frac{U_0}{R} + (-1)^n J_n \left(\frac{2eu}{h\nu} \right) \sin(\varphi_0 - n\theta). \quad (5.32)$$

Поскольку величина $\varphi_0 - n\theta$ может принимать произвольные значения, то при одном и том же значении U_0 ток может принимать значения из некоторого диапазона. Это означает, что при напряжениях U_0 , соответствующих условию $2eU_0 = nh\nu$, на вольтамперной характеристике должны возникать горизонтальные ступеньки, что и подтверждается экспериментальными кривыми рис.5.6. На этом рисунке отчетливо заметно

не только совпадение положения ступенек с теоретическими предсказаниями, но и удовлетворительное количественное согласие между периодическим изменением длины ступенек при увеличении СВЧ-мощности и зависимостью функции Бесселя от i .

ГЛАВА 6. ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ СВЕРХПРОВОДНИКИ **НА БАЗЕ МЕДЬСОДЕРЖАЩИХ ОКСИДНЫХ КЕРАМИК**

В главе 1 уже рассказывалось об истории открытия высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП). Напомним, что до 1986 года максимальная критическая температура, равная 23,2 К, наблюдалась у сплава Nb_3Ge (1973 г.). Несмотря на значительные усилия теоретиков и экспериментаторов, ученым не удавалось повысить T_C выше этого значения вплоть до того момента, когда Беднорц и Мюллер установили, что керамика $La-Ba-Cu-O$ проявляет признаки перехода в сверхпроводящее состояние при охлаждении ниже 35 К. Исследованные образцы представляли собой смесь разных фаз. Уже в январе 1987 г. было установлено, что за сверхпроводимость ответственна фаза $La_{2-x}Ba_xCuO_4$. Критическая температура зависит от состава и максимальна (35 К) при $x=0,2$.

Так было открыто новое направление исследований. Физики всего мира начали поиск близких по составу сверхпроводников. Путем замены лантана на другие близкие элементы из 1-й и 2-й групп таблицы Менделеева, а также варьированием состава было создано большое количество сверхпроводящих керамик. Через 2 месяца на керамике $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ была достигнута $T_C=92$ К. Таким образом был преодолен "азотный" барьер, т.е. появилась возможность получать сверхпроводники не при помощи дорогого и неудобного жидкого гелия с температурой кипения 4,2 К, а с использованием дешевого и простого в работе жидкого азота, кипящего при 77 К. К настоящему времени создано большое количество соединений с критической температурой выше точки кипения жидкого азота. Рекорд принадлежит керамическому соединению $HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+x}$, открытому в 2003 году, критическая температура для которого равна 135 К.

По своим свойствам ВТСП во многом похожи на обычные сверхпроводники, но в то же время есть и существенные количественные и качественные отличия.

1) Как и в случае обычных сверхпроводников, их сопротивление обращается в ноль при охлаждении ниже критической температуры. При этом значения T_C существенно более высокие и достигают 100 К и выше (к настоящему времени до 135 К).

2) При этом не происходит выделения или поглощения тепла, но наблюдается скачок теплоемкости, т.е. имеет место фазовый переход 2-го рода.

3) Эффект Мейсснера имеет место, но глубина проникновения λ , равная 10^2-10^3 ангстрем, намного больше, чем в обычных сверхпроводниках.

4) Эксперименты показывают наличие энергетической щели, по порядку величины согласующейся с теорией БКШ ($2\Delta \approx 3,5kT_C$). Однако некоторые эксперименты позволяют обнаружить два различных значения щели. Полагают, что большее значение связано с плоскостями в кристалле, а меньшее - с линейными цепочками.

5) Обнаружена зависимость T_c от массы атомов (изотопический эффект), что свидетельствует о роли колебаний решетки.

6) В магнитном поле ВТСП ведут себя как сверхпроводники II-го рода, что связано как с большой глубиной проникновения, так и с очень малой длиной когерентности ξ - от 0,5 до 30 ангстрем (в обычных - тысячи ангстрем). Таким образом, условие $\lambda > \xi$, характеризующее сверхпроводники II-го рода, выполняется с большим запасом.

7) Имеет место стационарный эффект Джозефсона, причем из экспериментов по зависимости осцилляций максимального джозефсоновского тока от магнитного поля (см. §5.2.1) следует, что квант магнитного потока Φ_0 равен $h/2e$, что указывает на перенос тока куперовскими парами с зарядом $2e$.

8) При приложении к джозефсоновскому контакту одновременно постоянного и переменного напряжения наблюдались ступеньки Шапиро (см. §5.3), свидетельствующие о нестационарном эффекте Джозефсона. При этом период между ступеньками равен $h\nu/2e$, что также говорит о куперовских парах с зарядом $2e$.

9) Имеет место квантование магнитного потока, т.е. магнитный поток через отверстие в сверхпроводнике в точности равен целому числу квантов магнитного потока $\Phi_0 = h/2e$.

10) Наблюдалась решетка вихревых нитей, причем было установлено, что каждая нить несет такой же квант магнитного потока $\Phi_0 = h/2e$.

Вышеприведенные факты (пункты 7-10) дают веские основания полагать, что ток переносится куперовскими парами. Однако оказалось, что в большинстве ВТСП куперовские пары образованы не электронами, а дырками.

Как видно из всего вышесказанного, большинство явлений, рассмотренных нами ранее в обычных сверхпроводниках, имеют место и в ВТСП. Но есть и существенные черты, общие для всех ВТСП, отличающие их от обычных.

1) В отличие от обычных сверхпроводников, являющихся в нормальном состоянии металлами или металлическими сплавами, ВТСП представляют собой оксиды металлов и в нормальном состоянии имеют значительно большие сопротивления. Хотя надо отметить, что линейный рост удельного сопротивления с температурой свидетельствует все же о металлическом характере их проводимости.

2) Эти металло-оксидные соединения трудно получить в виде монокристаллов. Существующая технология (спекание предварительно перемешанной смеси ингредиентов) позволяет получить керамику, представляющую собой совокупность кристаллов ("гранул") размерами от единиц до сотен микрон, пространство между которыми занято диэлектриком.

3) В местах контактов гранул друг с другом образуются джозефсоновские контакты, на которых могут происходить процессы, связанные с эффектами Джозефсона. Поскольку размеры гранул малы, то количество таких контактов очень велико. Поэтому сверхпроводящие керамики иногда называют джозефсоновскими средами. Эффекты Джозефсона описываются нелинейными уравнениями. Поэтому при помещении таких образцов во внешние постоянные и переменные электромагнитные поля в них могут происходить разнообразные сложные процессы, которые не наблюдались ранее в других веществах.

4) Переход к состоянию с нулевым сопротивлением в ВТСП происходит в более широком температурном диапазоне, чем в обычных сверхпроводниках. Так, например, в первой работе Беднорца и Мюллера сообщалось, что резкое падение сопротивления оксида $La_{2-x}Ba_xCuO_4$ с $x=0,2$ начиналось при 35 К и сопротивление достигало нуля при $T \approx 25$ К. Большая размытость перехода объясняется наличием в керамике различных фаз с разными значениями T_C .

5) Монокристаллы ВТСП выращиваются по специальным технологиям. Они имеют малые размеры (до нескольких миллиметров), обладают слоистой структурой и связанной с ней сильной анизотропией большинства свойств.

На рис.6.1 изображена элементарная ячейка кристалла $YBa_2Cu_3O_{7-x}$. Ее отличительной особенностью является наличие двух неэквивалентных позиций атомов меди: Cu(1) и Cu(2). Атомы Cu(2) заключены в пирамиду с квадратным основанием, образованную четырьмя атомами кислорода O(2) и O(3), и находятся почти в плоскости основания. Эти слои, расположенные перпендикулярно оси c , получили название плоскостей CuO_2 или купратных слоев. В отличие от атомов Cu(2) атомы Cu(1) в плоскости, перпендикулярной оси c , соседствуют только с двумя атомами кислорода O(1), образуя так называемые цепочки CuO. Таким образом, в структуре $YBa_2Cu_3O_7$ существуют два различных элемента - плоскости CuO_2 и цепочки CuO, слабо взаимодействующие друг с другом через мостиковый кислород O(4). При этом позиции O(5) остаются вакантными.

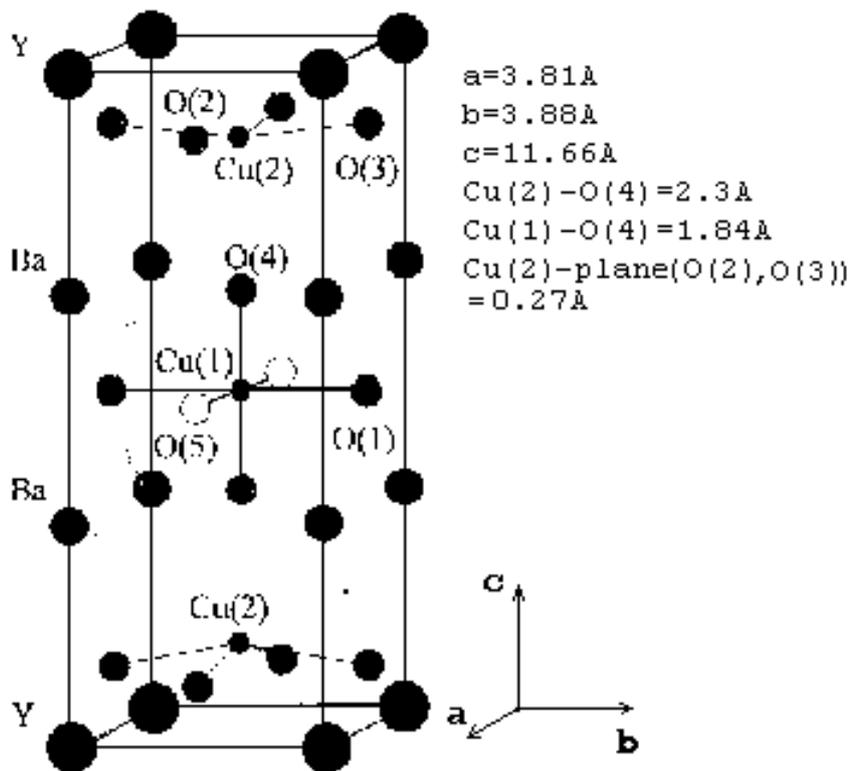


Рис.6.1. Элементарная ячейка кристалла $YBa_2Cu_3O_{7-x}$.

Купратные слои имеются во всех керамиках, в ряде соединений имеются цепочки CuO. Есть основания полагать, что и слои, и цепочки играют очень важную роль в возникновении высокотемпературной сверхпроводимости.

Теория ВТСП до сих пор не создана. Есть существенные основания полагать, что для ее построения достаточно модифицировать теорию БКШ, найдя новый, отличный от фононного механизм притяжения электронов (или дырок), приводящий к их объединению в куперовские пары. Дело в том, что фононный механизм не позволяет получить столь высокие значения критической температуры. Необходимо найти какой-то другой, более сильный тип взаимодействия. Причиной такого притяжения может быть обмен какими-то частицами. Поскольку элементарная ячейка кристалла ВТСП очень сложна (рис.6.1), то в образце может существовать большое количество разных типов частиц - фононы, экситоны, поляроны, биполароны, магноны и т.п. Возможно также, что в разных веществах за спаривание ответственны различные частицы.

Ответа на вопрос о природе этого взаимодействия пока нет, как нет и объяснения некоторым фактам, таким как существование двух щелей в одном образце, аномальности в зависимости теплоемкости от температуры и т.д.

ГЛАВА 7. ПОСЛЕДНИЕ ДОСТИЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

В 2001 году открыт сплав MgB_2 (диборид магния) с рекордной для интерметаллидов (химических соединений двух или более металлов) температурой перехода в сверхпроводящее состояние $T_c=40$ К. Этот факт опроверг выводы известного ученого в области сверхпроводников Макмиллана, который в 1968 году предположил, что электрон-фононный механизм никогда не сможет обеспечивать сверхпроводимость при температуре выше 28 К. По тем временам, в 1968 году, это полностью описывало экспериментальные наблюдения - действительно, самые высокотемпературные сверхпроводники на тот момент не имели сверхпроводимости выше 28 К. Впрочем, многие знаменитые ученые еще в то время дискутировали с Макмилланом и указывали на некорректность его вывода.

В 2008 году был открыт новый класс сверхпроводящих соединений с высокими значениями критической температуры T_c - слоистые соединения на основе железа и элементов 5-й группы (пниктидов) либо Se . Эти соединения называют ферропниктидами (или селенидами) железа. Сверхпроводящее состояние у соединений, содержащих магнитные атомы (Fe) было обнаружено впервые, ведь обычно магнитное поле подавляет сверхпроводимость. Кристаллическая структура всех железосодержащих сверхпроводников (уже известно 6 семейств) представляет собой чередующиеся слои, в которых атомы железа окружены тетраэдром из атомов As или Se , что подавляет магнитные свойства атомов Fe . На данный момент рекорсменом по значению T_c является соединение $GdOFeAs$ (Gd-1111), допированное фтором, который замещает кислород. Его T_c достигает 55 К.

Важными и перспективными стали исследования сверхпроводимости при сверхвысоких давлениях, при которых, как оказалось, критические температуры заметно повышаются. Например, критическая температура упомянутой выше керамики $HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+x}$ (с рекордно высокой T_c , равной 135 К) при давлении 40 ГПа повышается до 165 К.

Упомянувшийся селенид железа теряет сверхпроводящие свойства при 10 ГПа, но при 11,5 ГПа вновь приобретает их, причем нулевое сопротивление сохраняется до рекордной для селенида железа $T_c=48$ К.

При высоких давлениях сверхпроводящие свойства могут приобретать даже некоторые вещества, которые нельзя было заподозрить в таких способностях. Например, в 2014 году китайский физик Янмин Ма показал, что при давлении 160 ГПа сульфид водорода (H_2S) должен иметь критическую температуру 80 К. Уже через два месяца ученые из той же лаборатории Дефан Дуан и Тьян Цуи публикуют исследование, где они доказывают, что сероводород (H_2S) оказывается нестабильным под давлением и распадается с образованием другого вещества — H_3S и чистой серы. Соединение H_3S не вписывается в традиционные рамки химии, но под давлением оказывается стабильным. У соединения H_3S китайские ученые под руководством профессора Цуи предсказали температуру сверхпроводимости в 200 К. И эта сверхпроводимость обязана именно электрон-фононному взаимодействию. Таким образом, самыми высокотемпературными сверхпроводниками на данный момент оказываются именно электрон-фононные, а не экзотические купраты.

С работы профессора Цуи началась настоящая гонка. Свою статью он подал в журнал в июле 2014 года, опубликована она была в ноябре того же года. А в декабре 2014-го группа профессора Михаила Еремца из Института Макса Планка (Германия) (он - наш соотечественник, как и большая часть группы) опубликовала онлайн в архиве свою статью, в которой они экспериментально доказывали предсказание, сделанное профессором Цуи: возникает вещество состава H_3S под давлением, и оно является сверхпроводником с температурой сверхпроводимости около 203 К. Статья Еремца затем была подана в журнал *Nature* в июне 2015 года, а работа профессора Цуи была опубликована там же в августе 2015 года.

Эта работа произвела шок. На самом деле предсказание китайских ученых о сверхпроводимости в районе 200 К многими было проигнорировано, потому что люди сказали: это теория, мало ли что в ней может быть. Многие ссылались на предел Макмиллана, те самые 28 К: не может быть сверхпроводимость, связанная с взаимодействием электронов и колебаний решетки, такой высокотемпературной. Но когда вышли экспериментальные данные и они полностью подтвердили предсказания китайских ученых, а также была установлена температура сверхпроводимости 203 К при давлении примерно в 160 ГПа, то это стало шоком для научного сообщества.

Исследования ведутся и на других веществах. Расчеты теоретиков предсказывали возможность сверхпроводимости для гидридов лантана, кальция и иттрия, в которых атом металла помещен в середину кристаллической ячейки, образованной атомами водорода. Для таких веществ теоретически рассчитанная температура находится в диапазоне 240-320 К. Физики из той же группы Еремца при давлении 170 ГПа обнаружили сверхпроводимость в LaH_{10} при температуре 250 К. На настоящий момент это рекордное значение. В данном случае ученые сжимали крошечный образец материала (LaH_{10}) между двумя крошечными алмазами, чтобы создать необходимое давление, а затем использовали рентгеноскопию, чтобы исследовать свойства образца.

В ходе эксперимента образец показал три из четырех изменений, необходимых для доказательства сверхпроводимости: он потерял свое электрическое сопротивление, снизил критическую температуру под воздействием внешнего магнитного поля и показал изменение температуры, когда некоторые его элементы были заменены другими изотопами.

Четвертая характеристика - эффект Мейснера (вытеснение магнитного поля) - замечена не была. По мнению ученых, это произошло из-за маленьких размеров образца, делающих подобные наблюдения невозможными.

Конечно, практических применений при таких высоких давлениях не будет. Но обнаружение сверхпроводимости при столь высоких температурах поменяло ментальность ученых и заставило их по-новому взглянуть на давно известный механизм Бардина, Купера и Шриффера – механизм взаимодействия электронов с колебаниями решетки. И вполне возможно, что будут найдены новые высокотемпературные сверхпроводники, рекордно высокотемпературные, именно обладающие этим механизмом, который удобен для расчетов, удобен для теоретиков. И может быть, мы будем свидетелями больших прорывов в этой области.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М. “Мир”. 1968.
2. Буккель В. Сверхпроводимость. М. “Мир”. 1975.
3. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М. “Наука”. 1978.
4. Павлов П.В., Хохлов А.Ф. Физика твердого тела. М. “Высшая школа”. 2000.
5. Шриффер Д. Теория сверхпроводимости. М. “Наука”. 1970.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М. “Наука”. 1982.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М. “Наука”. 1987.
8. Кулик И.О., Янсон И.К. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М. “Наука”. 1970.
9. Физические свойства высокотемпературных сверхпроводников (под редакцией Д.М.Гинзберга). М. “Мир”. 1990.
10. Тинкхам М. Введение в сверхпроводимость. М. “Мир”. 2012.
11. Гинзбург В.Л., Андрюшин Е.А. Сверхпроводимость. “Альфа-М”. 2006.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ-----	3
ГЛАВА 1. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ-----	4
§1.1. Отсутствие электрического сопротивления -----	4
§1.2. Выталкивание магнитного поля из сверхпроводников -----	7
§1.3. Разрушение сверхпроводимости магнитным полем -----	8
§1.4. Тип фазового перехода -----	9
§1.5. Три вида сверхпроводников -----	9
§1.6. Энергетическая щель -----	11
§1.7. Одночастичное туннелирование -----	13
§1.8. Стационарный и нестационарный эффекты Джозефсона -----	17
§1.9. Квантование потока -----	18
§1.10. Изотопический эффект -----	18
§1.11. Применение сверхпроводников -----	19
ГЛАВА 2. ТЕОРИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ -----	21
§2.1. Теория Бардина-Купера-Шриффера (БКШ) -----	21
2.1.1. Основные идеи и результаты -----	21
2.1.2. Эффект Купера. Куперовские пары -----	23
2.1.3. Энергетический спектр -----	24
§2.1.4. Незатухающие токи. Конденсация Бозе-Эйнштейна.....	30
§2.2. Магнитное поле внутри сверхпроводников -----	32
§2.3. Уравнение Ф. и Г. Лондонов -----	34
2.3.1. Эффект Мейсснера -----	36
2.3.2. Тонкие пленки в продольном магнитном поле -----	37
§2.4. Соотношение Пиппарда -----	38
§2.5. Теория Гинзбурга–Ландау -----	40
2.5.1. Основные уравнения -----	40
2.5.2. Две характерные длины -----	43
2.5.3. Задачи с постоянным значением амплитуды параметра порядка- 44	
2.5.3.1. Критический ток в тонкой пленке -----	45
2.5.3.2. Эффект Литтла и Паркса -----	46
2.5.4. Изменение амплитуды параметра порядка в пространстве - 48	
2.5.4.1. Образование зародышей сверхпроводимости - 48	

ГЛАВА 3. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ- - - - -	50
§3.1. Сверхпроводники I-го рода. Промежуточное состояние. - - - - -	50
§3.2. Энергия границы между фазами.- - - - -	56
§3.3. Магнитные свойства сверхпроводников II-го рода. - - - - -	57
3.3.1. Свойства изолированной вихревой нити - - - - -	60
3.3.2. Взаимодействие вихревых нитей - - - - -	62
3.3.3. Кривая намагничивания сверхпроводников II-го рода.- - - - -	63
3.3.4. Ламинарная структура - - - - -	66
ГЛАВА 4. КРИТИЧЕСКИЕ ТОКИ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ - - - - -	68
§4.1. Критические токи в сверхпроводниках I-го рода - - - - -	68
§4.2. Критические токи в сверхпроводниках II-го рода - - - - -	70
§4.3. Сверхпроводники III-го рода - - - - -	72
ГЛАВА 5. ФАЗОВАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ - ЭФФЕКТЫ ДЖОЗЕФСОНА - - -	74
§5.1. Стационарный и нестационарный эффекты Джозефсона - - - - -	74
§5.2. Интерференция стационарных сверхпроводящих токов - - - - -	77
5.2.1. Сверхпроводящий интерферометр - - - - -	77
5.2.2. Сверхпроводящее кольцо со слабой связью - - - - -	80
§5.3. Взаимодействие переменного тока Джозефсона с внешним электромагнитным излучением - ступеньки Шапиро. - - - - -	82
ГЛАВА 6. ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ СВЕРХПРОВОДНИКИ НА БАЗЕ МЕДЬСОДЕРЖАЩИХ ОКСИДНЫХ КЕРАМИК- - - - -	84
ГЛАВА 7. ПОСЛЕДНИЕ ДОСТИЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ СВЕРХПРОВОДНИКОВ--	87
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА - - - - -	89
ОГЛАВЛЕНИЕ - - - - -	90