

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

А. М. Гинцяк

**Исследование операций
в управлении инновационными процессами**

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
2023**

УДК 001.891.573, 519.8
ББК 22.18

Рецензент:

Доктор технических наук, старший научный сотрудник, директор Высшей школы проектной деятельности и инноваций в промышленности СПбПУ
С. Г. Редько

Гинцяк А. М. **Исследование операций в управлении инновационными процессами:** учеб. пособие / *А. М. Гинцяк.* – СПб., 2023. – 68 с.

Учебное пособие предназначено для методического обеспечения подготовки магистров в области управления инновациями в части освоения теоретических и инструментальных основ математического моделирования сложных организационно-технических систем.

Рассматривается применимость исследования операций для решения задач поддержки принятия управленческих решений в целом и в приложении к инновационным системам, выделяются наиболее значимые в данном отношении разделы исследования операций, приводятся методические рекомендации по моделированию инновационных процессов с помощью инструментария исследования операций.

Предназначено для студентов всех форм обучения направления 27.04.05 «Инноватика» и смежных направлений в рамках освоения дисциплины «Математические модели технических объектов управления».

Научная специальность: 2.3.4. Управление в организационных системах.

33 рис., 6 табл., 10 источников.

© Гинцяк А. М., 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1 Предмет исследования операций	5
1.1 Моделирование как метод познания	5
1.2 Применение моделей	8
1.3 Классификация моделей	10
1.4 Особенности моделирования сложных организационно- технических систем	11
1.5 Этапы математического моделирования	12
1.6 Исследование операций	13
2 Методы линейной оптимизации	18
2.1 Сущность методов линейной оптимизации	18
2.2 Методы решения задач линейной оптимизации	19
2.3 Графический метод	20
2.4 Симплекс-метод	30
2.5 Линейная оптимизация в электронных таблицах	36
3 Сетевые модели	42
3.1 Сущность сетевого моделирования	42
3.2 Сетевое планирование	47
3.3 Метод критического пути	49
3.4 Метод PERT	56
4 Вопросы для подготовки к экзамену	65
Заключение	66
Литература	67

ВВЕДЕНИЕ

Инновационные системы относятся к классу сложных организационно-технических систем, проявляя всю полноту их признаков: структурное разнообразие элементов, множественность неоднородных связей, разнообразие и изменчивость решаемых задач, адаптивность структуры и правил функционирования, открытость [1]. Эти факторы обуславливают нелинейный характер процессов, протекающих в данных процессах, что делает управление ими нетривиальной задачей, требующей применение специализированных методов и моделей, в том числе математических.

Исследование операций предоставляет такой инструментарий, позволяя описывать на формальном языке общие и частные случаи принятия решений в сложных организационно-технических системах, исследовать данные модели и предлагать оптимальные решения. При этом важно понимать, что исследование операций является собирательным названием для нескольких классов математических моделей, и состав этих классов постоянно эволюционирует. Новые математические модели наиболее адекватно описывают текущее состояние организационно-технических систем, а современные высокопроизводительные методы оптимизации позволяют находить их оптимальные конфигурации.

Освоение фундаментальных основ и современных методов исследования операций даёт магистрам в области управления инновациями необходимую методологическую и инструментальную базу для обоснованного принятия решений, связанных с управлением инновационными системами.

1 ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

1.1 Моделирование как метод познания

Математическое моделирование позволяет создавать абстрактные модели реальных систем и процессов, которые могут быть использованы для прогнозирования и анализа поведения этих систем в различных условиях. Это позволяет улучшить понимание реальных процессов и систем, а также принимать более обоснованные решения на основе полученных результатов моделирования. Математическое моделирование является одним из наиболее вариативных инструментов для профессиональной деятельности.

В первую очередь, оно требуется для всеобъемлющего изучения объектов управления. Деятельность большинства сотрудников современных компаний, связанных с интеллектуальной деятельностью, связана с управлением сложными организационно-техническими системами на разных уровнях иерархии. Понимание объекта управления является необходимым условием для эффективного управления им. Знание особенностей и характеристик объекта управления позволяет определить оптимальные стратегии управления и принимать обоснованные решения, направленные на достижение поставленных целей. Понимание объекта управления также позволяет оценить его потенциал и возможности для развития, определить риски и препятствия, которые могут возникнуть в процессе управления объектом.

Математическое моделирование также позволяет проводить эксперименты с моделями, изменяя параметры и условия их работы, что позволяет оценить эффективность различных стратегий и принимать решения на основе полученных результатов.

Кроме того, в профессиональной деятельности математические модели имеют и коммуникативную функцию. Представление промежуточных этапов собственных умозаключений в виде моделей делает их более прозрачными и прослеживаемыми, позволяет коллективно обсудить и принять выводы по итогам проведённой аналитической работы, согласовать принимаемые решения.

Для магистров направления 27.04.05 «Инноватика» математические модели имеют особое значение в учебно-научной деятельности в рамках подготовки выпускной квалификационной работы магистра. Направление подготовки относится к техническим наукам, следовательно выпускная

квалификационная работа должна свидетельствовать о приобретённых навыках исследования организационно-технических систем с применением математических и технических методов, к числу которых относятся, например, статистика, теория вероятностей, цифровое моделирование, ну и конечно исследование операций.

Как метод принятия решений метод с использованием математического моделирования противопоставляется традиционному методу, связанному с выполнением натуральных экспериментов (рис. 1.1).



Рисунок 1.1 – Традиционный метод принятия решений

Принятие управленческих решений всегда связано с переводом управляемой системы (объекта управления) из состояния «как есть» («AS IS») в состояние «как должно быть» («TO BE»). При этом возникают две ключевые сложности: техническая и технологическая.

Техническая сложность связана с неизвестностью в отношении целевой конфигурации системы. Иными словами, субъект управления не знает достоверно, какое конечное состояние системы будет оптимальным (или хотя бы будет удовлетворять требуемым ограничениям).

Технологическая сложность заключается в неизвестности набора операций, требуемых для перевода системы из одного состояния в другое. Иными словами, даже если бы целевое состояние системы было достоверно известно, субъекту управления требовалась бы точная инструкция, сопровождающая изменения.

В традиционном методе принятия решений одновременно как метод действия и как метод исследования используется натуральный эксперимент,

зачастую вынужденно сводящийся к методу проб и ошибок. В нём субъект управления на основе накопленного опыта и собственных представлений принимает решение об изменении системы. Успешность данных решений во многом зависит от квалификации субъекта управления, но не гарантируется ей.

В случае, если система позволяет проведение множественных натуральных экспериментов, субъект управления может восприниматься как обучающийся агент, с каждым разом принимающий решения, повышающие оптимальность конкретной конфигурации системы. В этом случае через некоторое количество итераций система может прийти в оптимальное или субоптимальное положение. Однако, такая возможность предоставляется далеко не всегда.

Так, множественные натурные эксперименты могут быть долгими, дорогими, а также принципиально недопустимыми или невозможными. Особенно часто такая вероятность проявляется в отношении сложных организационно-технических систем. В этом случае наиболее предпочтительным методом принятия решений становится метод с использованием моделирования (в первую очередь, математического). Принципиальная схема метода представлена на рис. 1.2.

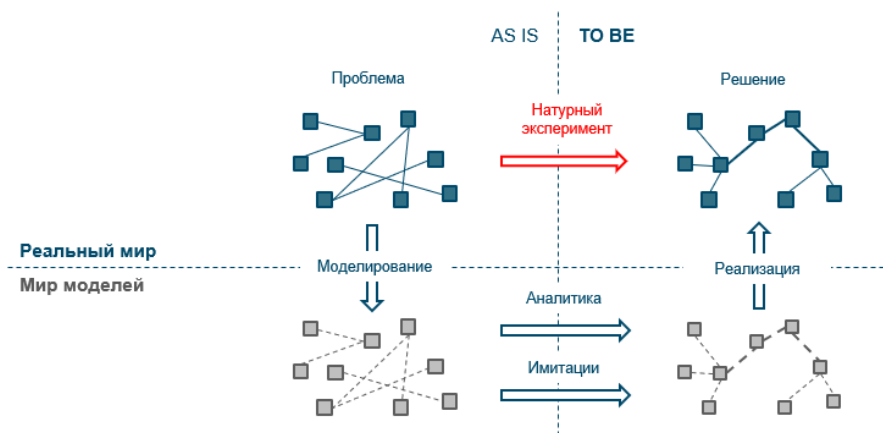


Рисунок 1.2 – Метод принятия решений с использованием моделирования

Суть метода принятия решений с использованием моделирования заключается в проведении не натуральных, но аналитических или имитационных экспериментов.

Первым шагом является непосредственно процесс моделирования, соответствующий формализации ключевых элементов реальной системы, структурных, функциональных и информационных взаимосвязей между ними с применением специализированной системы обозначений. В данном процессе субъекту управления необходимо соблюсти баланс – с одной стороны, обеспечить вхождение наиболее значимых для решаемого вопроса атрибутов, параметров и элементов системы в состав модели; с другой стороны – исключить всё лишнее, не оказывающее непосредственное влияние на ключевые характеристики системы. В проведении правильной границы между двумя группами сущностей состоит основная сложность процесса моделирования. Результатом выполнения данного шага является модель системы в состоянии «как есть».

Вторым шагом является исследование разработанной модели аналитическими или имитационными методами. Для этих целей используется обширный математический аппарат, составляющий отдельные разделы исследования операций. Помимо непосредственно аналитического и имитационного моделирования, на этом шаге могут использоваться разнообразные алгоритмы оптимизации моделей, подбирающие конфигурацию модели, соответствующую наибольшему или наименьшему значению целевой функции. В результате такого исследования получается модель системы, соответствующая состоянию «как должно быть».

Третьим шагом является интерпретация предлагаемых изменений в модели на реальную систему, а также реализация полученного решения в реальности.

1.2 Применение моделей

Математические модели относятся к классу абстрактных моделей [2], что определяет способы их возможного применения. В [3] выделяется семь таких способов: рассуждение, объяснение, коммуникация, исследование, прогнозирование, действие, разработка. В отличие от первоисточника, в данном перечислении способы применения моделей расставлены не для соответствия мнемоническому правилу, а в порядке увеличения принципиальной сложности использования, связанной с необходимостью как можно более точного соответствия модели реальной системе.

Рассуждение связывается с определением условий функционирования системы и выводом логических следствий о реальной

системе по результатам анализа модели. При построении модели выделяются такие важные составляющие, как агенты и объекты, наряду с соответствующими характеристиками, а затем описываются способы взаимодействия и объединения отдельных фрагментов, что позволяет определить причинно-следственные связи. Такой подход повышает эффективность рассуждений.

Объяснение заключается в предоставлении по результатам анализа модели объяснений для эмпирических явлений, происходящих с реальной системой.

Коммуникация определяется процессами передачи знаний и представлений о реальной системе за счёт иллюстрации этих знаний и представлений на модели, соответствующей данной системе.

Исследование связывают с изучением возможностей системы на модели, а также гипотез о взаимосвязях в системе и возможной реакции на те или иные внешние или внутренние воздействия.

Прогнозирование заключается в получении численных и категориальных прогнозов будущих и неизвестных явлений с помощью модели. Сюда относят как «чистое» прогнозирование (прогнозирование поведения системы при отсутствии дополнительного воздействия в рамках сценариев управления, т.н. «нулевого воздействия»), так и условное прогнозирование (прогнозирование поведения системы при определённом сценарии управленческого воздействия).

Действие обеспечивает выбор оптимальных альтернатив и стратегических действий из доступного или заведомо неопределённого набора. В этом случае решается задача, обратная прогнозированию. Если в случае с прогнозированием исследователь предсказывает поведение системы при некотором управленческом воздействии, то в случае с действием исследователь определяет управленческое воздействие, необходимое для обеспечения требуемого поведения системы.

Разработка связана с созданием системы на основании предварительно разработанной модели этой системы. Данная функция моделей предполагает перевёрнутый подход к проектированию систем, когда модель создаётся не подобно уже существующей системе, а предворяя её создание. В рамках процесса моделирования происходит выбор или создание конструктивных и функциональных решений, составляющих реальную систему.

1.3 Классификация моделей

Классификаций моделей существует множество, и некоторые из них конфликтуют между собой. Разница между ними обусловлена большим количеством подходов к моделированию. Полная классификация существенно затруднена, равно как и такая классификация, которая учитывала бы весь объем созданных ранее групп, классов моделей и подходов к моделированию. В основном различные классификации ориентируются на отдельную область моделирования, ту, в рамках которой проводятся те или иные исследования.

Поэтому попытка классифицировать все разработанные к настоящему времени модели представляется сложной задачей. В предлагаемой классификации (см. рис. 1.3) внимание сконцентрировано на классе математических моделей. Подобная классификация дает представление о том, в какой части семейства моделей находится объект изучения, и при этом не будет грубо противоречить другим известным классификациям.

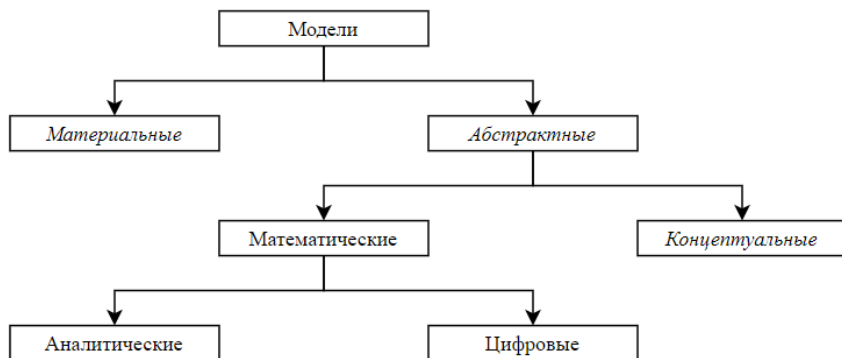


Рисунок 1.3 – Классификация моделей (фрагмент)

На верхнем уровне классификации модели разделяются на материальные и абстрактные. Стоит заметить, что такое же разделение предлагается в одной из ранних работ по теме компьютерного моделирования за авторством Дж. Форрестера [4].

Под материальными моделями понимаются материальные копии исследуемого объекта (который, исходя из определения, должен иметь физическое воплощение).

Большой интерес в рамках работы представляют абстрактные модели – нематериальные модели, являющиеся символьным или идеальным представлением моделируемого объекта. Абстрактными моделями могут быть набор математических формул, описывающих производственную задачу, имитационная модель процесса или, с некоторым расширением определения, ментальная модель, существующая только в сознании своего создателя.

Абстрактные модели подразделяются на математические и концептуальные. Это тоже неполная классификация. В некоторых источниках на том же уровне выделяют, к примеру, ситуационные модели [5]. В данной работе опускаются все подобные сторонние классификационные группы, поскольку входящие в них модели не будут далее рассматриваться подробно.

Под концептуальной моделью понимается абстрактная модель, которая описывает известный объект с помощью специальной системы символов.

Под математической моделью понимается абстрактная модель, принципиально решаемая математическая и/или логическая конструкция, по итогам решения имеющая численный результат.

1.4 Особенности моделирования сложных организационно-технических систем

Под системой понимается некоторая совокупность объектов и их отношений, подчиненных общей цели и обладающих некоторой совокупностью ресурсов. Таким образом, организационно-техническая система представляет собой совокупность людей и технических средств, функционирующих совместно в рамках деятельности организации. Характеристикой таких систем будет низкая детерминированность и высокая принципиальная сложность, связанная с особенностями человеческого поведения.

Принципиальная сложность организационно-технических систем с точки зрения моделирования заключается в следующих факторах:

1. Неоднородность – элементы организационно-технических систем различаются не только между классами, но и в рамках одного класса.

2. Подверженность организационному влиянию – люди в рамках организационно-технических систем действуют иным образом по отношению к собственному поведению в рамках социально-экономических систем, следуя организационным нормам и правилам.

3. Склонность к ошибкам – принципиальная возможность людей и технических средств совершать ошибки (в силу разных причин).

4. Обучаемость – способность к изменению собственного поведения в результате совершения предыдущих действий и накопления референтного опыта.

При моделировании общества необходимо учитывать эти особенности, чтобы получить более точные и реалистичные результаты. Неоднородность общества может быть учтена путем создания различных подгрупп или категорий, которые будут иметь свои уникальные характеристики. Организационное влияние может быть учтено путем включения в модель организационных норм и правил. Склонность к ошибкам может быть учтена путем введения случайных факторов в модель. Обучаемость может быть учтена путем анализа изменений в поведении людей после получения новой информации или опыта.

При этом выделяют несколько принципиальных подходов к моделированию поведения человека в рамках организационно-технической системы [6]:

1. Действие на основе постоянных правил.
2. Действие на основе адаптивных правил.
3. Обучающиеся агенты.
4. Рациональные (квазирациональные) агенты.
5. Вероятностное (стохастическое) поведение.

Важно заметить, что перечисленные выше подходы применяются именно к моделированию поведения человека, а не непосредственно к принятию решения человеком, так как в этом случае неизбежно происходит комбинация всех перечисленных подходов.

Выбор подхода к моделированию поведения человека в рамках организационно-технической системы зависит от цели моделирования, средств и парадигмы моделирования, а также особенностей организационно-технической системы в целом или моделируемого процесса в частности.

1.5 Этапы математического моделирования

Создание и исследование математических моделей в общем виде включает в себя пять этапов.

1. Постановка исходной проблемы:
 - определение процесса (операции),

- описание взаимозависимостей;
2. Построение математической модели:
 - формализация процесса: структура модели, целевая функция, функциональные зависимости, ограничения;
 3. Решение модели:
 - применение математического аппарата,
 - поиск решения;
 4. Проверка адекватности модели и решения:
 - верификация решения,
 - проверка решения на соответствие «здоровому смыслу»;
 5. Реализация решения.

Для исследования математических моделей машинными методами применяется модифицированная концепция, заключённая в триаде «модель – алгоритм – программа»:

1. Разработка математической модели.
2. Исследование математической модели:
 - существование решения;
 - единственность решения (если требуется);
 - устойчивость решения.
3. Дискретизация математической модели.
4. Анализ корректности дискретной задачи.
5. Алгоритмизация.
6. Разработка программы.

1.6 Исследование операций

Суть исследования операций заключается в применении математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности.

Исследование операций включает в себя математические методы, позволяющие установить закономерности, оценить ожидаемую эффективность процессов, протекающих в производственной и экономической сферах, и получить рекомендации, которые учитываются при обосновании решения на управление этими процессами [7].

Под операцией понимается совокупность действий, направленных на достижение конкретной цели.

Операция всегда является управляемым мероприятием, то есть зависит от субъекта управления, каким способом выбрать параметры, характеризующие её организацию (в широком смысле, включая набор технических средств, применяемых в операции).

Примеры операций в организационно-технических системах:

- планирование цепочек поставок;
- работа производственной линии;
- обслуживание посетителей (в сфере услуг);
- планирование производства;
- сбыт товаров;
- работа предприятия в целом;
- управление проектом;
- планирование бюджета региона;
- инвестирование;
- отбор стартапов;
- создание партнерств и так далее.

Исследование операций является междисциплинарным научным направлением, связанным со множеством других направлений.

1. **Наука управления** (management science). Исследование операций помогает науке управления решать сложные задачи и принимать обоснованные решения на основе анализа данных и математических моделей. В свою очередь, наука управления использует методологию исследования операций для оптимизации бизнес-процессов и повышения эффективности управления. Таким образом, исследование операций и наука управления взаимодополняют друг друга и являются важными инструментами для достижения успеха в управлении организациями.

2. **Системный анализ**. Обе дисциплины используют математические модели и методы анализа данных для решения сложных проблем в различных областях, таких как бизнес, инженерия, экономика. Обе дисциплины имеют общие цели - повышение эффективности и оптимизация процессов. Исследование операций и системный анализ могут использоваться вместе для решения сложных проблем и оптимизации бизнес-процессов. Например, системный анализ может использоваться для изучения взаимодействия различных компонентов бизнес-процесса, а исследование операций может использоваться для оптимизации этих процессов на основе полученных данных.

3. **Математическое программирование** – это метод оптимизации, который использует математические модели для нахождения оптимального решения задачи. Оно может быть использовано для решения различных задач, таких как линейное программирование, целочисленное программирование, динамическое программирование. Математическое программирование является одним из инструментов, которые могут быть использованы в исследовании операций для решения проблем оптимизации в различных областях.

4. **Компьютерные науки** в целом предоставляют инструменты и технологии для реализации математических моделей, используемых в исследовании операций. Например, компьютерные науки позволяют создавать программные пакеты для решения оптимизационных задач и анализа данных. В противоположном направлении исследование операций может использоваться, например, для оптимизации производительности компьютерных систем, управления базами данных.

5. **Статистика** предоставляет методы и инструменты для анализа данных, которые могут быть использованы в исследовании операций для принятия решений. Например, статистические методы могут быть использованы для анализа данных о производственных процессах, чтобы определить, какие факторы влияют на эффективность производства. Исследование операций может использовать эти данные для создания математических моделей, которые помогут оптимизировать производственные процессы.

6. **Теория вероятностей** предоставляет инструменты для анализа случайных событий и вероятностей их возникновения. Теория вероятностей может использоваться для определения вероятности успешного выполнения определенной операции в производственном процессе. Также теория вероятностей может использоваться для анализа рисков и оценки потенциальных потерь. Исследование операций может использовать эту информацию для создания моделей, которые позволяют принимать решения, учитывая риски и потенциальные потери.

7. **Теория игр** является математической дисциплиной, которая изучает стратегии принятия решений в конфликтных ситуациях, когда результат зависит не только от действий одного игрока, но и от действий других игроков. Теория игр может использоваться для анализа ситуаций,

связанных с распределением ресурсов, например, при разработке плана производства или при решении задач логистики.

8. **Теория принятия решений** (decision science) – это дисциплина, которая изучает процессы принятия решений в условиях неопределенности и риска. Исследование операций использует методы и инструменты теории принятия решений для создания математических моделей, которые помогают определить оптимальные стратегии принятия решений. Например, методы теории принятия решений могут использоваться для анализа данных и выявления закономерностей, которые могут быть использованы для определения оптимальных стратегий.

9. **Эвристические подходы** в совокупности с исследованием операций используются для решения сложных задач, которые не могут быть решены с помощью простых аналитических методов. Эвристические подходы используют эмпирические методы для решения задач. Они основываются на опыте и интуиции, а не на точных математических моделях. Эти методы могут быть полезны в случаях, когда точные математические модели не могут быть разработаны или, например, когда решение задачи требует быстрого принятия решений. В некоторых случаях исследование операций может использовать эвристические подходы в качестве дополнительного инструмента для улучшения точности результатов. Например, генетические алгоритмы могут использоваться для поиска оптимальных решений в условиях неопределенности и риска.

10. **Искусственный интеллект** использует компьютерные алгоритмы, чтобы создавать системы, которые могут выполнять задачи, которые обычно требуют человеческого интеллекта. Эти системы могут использоваться для распознавания образов, обработки естественного языка, рекомендации продуктов и других задач. Искусственный интеллект может также использоваться в исследовании операций для автоматизации процессов и оптимизации решений. Например, машинное обучение может использоваться для анализа больших объемов данных и выявления скрытых закономерностей, которые могут быть использованы для принятия более точных решений.

Приведённые выше отдельные дисциплины не исчерпывают весь перечень возможных пересечений областей применения в совокупности с исследованием операций. В применении к сложным организационно-техническим системам границы между этими дисциплинами зачастую носят

условный характер, и для решения действительно сложных задач управления практически невозможно обойтись инструментарием, предоставляемым только одной из дисциплин [8, 9]. Тем не менее, исследование операций играет роль «краеугольного камня», концентрирующего вокруг себя методы, предлагаемые иными научными направлениями.

Исследование операций представляет собой совокупность классов математических моделей, причём набор классов и их содержание не является строго закреплённым, что не позволяет достоверно установить состав классов моделей в исследовании операций. Тем не менее, в этом вопросе можно ориентироваться, например, на основоположника исследования операций Х.А. Таха, выделяющего девять классов моделей [10]:

1. Программирование (оптимизация) – линейное, нелинейное, целочисленное, динамическое, вероятностное динамическое.
2. Транспортные модели.
3. Сетевые модели.
4. Методы прогнозирования.
5. Теория игр.
6. Теория принятия решений.
7. Управление запасами.
8. Системы массового обслуживания.
9. Имитационное моделирование.

При рассмотрении данной классификации необходимо учитывать временной контекст, а также потенциальную применимость методов для задач управления инновационными процессами. Так, в последующих разделах речь пойдёт в первую очередь о **методах линейной оптимизации и сетевых моделях**. Остальные разделы или имеют узкую прикладную направленность (например, транспортные модели, модели управления запасами, системы массового обслуживания), или рассматриваются в рамках других дисциплин по направлению 27.04.05 «Инноватика» (например, теория игр и имитационное моделирование). Отдельные классы моделей, такие как нелинейная, целочисленная и динамическая оптимизация может быть изучена студентами в самостоятельном порядке.

2 МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

2.1 Сущность методов линейной оптимизации

Линейная оптимизация (линейное программирование) – метод оптимизации моделей, в которых целевые функции и ограничения строго линейны. Под линейностью целевой функции и ограничения понимается их линейная зависимость от переменных, определяемых при выполнении оптимизации.

Линейная оптимизация оперирует тремя ключевыми составляющими, которыми задаётся любая задача, решение которой предполагается с применением данного инструментария:

1. **Переменные**, которые следует определить. Переменные являются характеристиками сценария управления (принимаемого решения). При этом важно заметить, что переменные всегда являются управляемыми факторами, то есть субъект управления должен иметь непосредственную возможность на них влиять.

2. **Целевая функция**, подлежащая оптимизации. Целевая функция представляет собой показатель, являющийся решающим при выборе решения. Данный показатель может быть объективно существующим в рамках данной организационно-технической системы, или же может представлять собой линейную комбинацию из нескольких таких показателей (для соблюдения условия о линейности целевой функции). Для соблюдения условия о разрешимости задачи линейной оптимизации требуется, чтобы целевая функция была задана как функция от переменных (см. п. 1). В любом случае, именно по значению целевой функции должно приниматься решение о выборе между несколькими альтернативных сценариев управления.

3. **Ограничения**, которым должно удовлетворять решение. Под ограничениями понимаются неравенства, задающие область определения сценариев управления в пространстве переменных (см. п. 1). Это означает, что любой сценарий, не входящий в эту область определения (не удовлетворяющий хотя бы одному из ограничений-неравенств), является нереализуемым и, как следствие, недоступным для выбора в рамках линейной оптимизации. Важно заметить, что линейная оптимизация предназначена для поиска решения в непрерывном пространстве переменных, поэтому строгость неравенств (в математическом смысле этого термина) на результаты оптимизации влияния не оказывает.

При этом существует несколько типов ограничений.

Естественные ограничения связаны с принципиальной (физической) невозможностью достижения определённых значений переменных. К естественным ограничениям относятся, например, ограничения на неотрицательность значений отдельных переменных (объём производства, количество сотрудников).

Ресурсные ограничения связаны с задаваемыми в рамках задачи предельными объёмами использования ресурсов, связанными, в основном, с невозможностью получения большего объёма.

Технические ограничения связаны с техническими характеристиками оборудования или технологическими особенностями рассматриваемого производственного процесса.

Организационные ограничения связаны с нормами, а также внутренними и внешними регламентами осуществления операции.

Примеры задач, решаемых с применением линейной оптимизации:

1. Производственное предприятие может производить несколько различных продуктов (с ограничениями) – необходимо выбрать оптимальную структуру производства.

2. Компания может использовать труд собственных сотрудников и аутсорсинг – необходимо выбрать оптимальное соотношение наемных и аутсорсных работников.

3. Венчурный фонд может инвестировать капитал и собственные консалтинговые услуги в стартапы в различных отраслях – необходимо выбрать оптимальную структуру инвестиций.

Общие черты данных ситуаций принятия решений:

1. Наличие альтернатив (ситуация выбора).
2. Наличие ограничений.
3. Наличие целевой функции.
4. Принципиальная возможность нахождения оптимума.

2.2 Методы решения задач линейной оптимизации

Методы решения задач линейной оптимизации различаются, в основном, степенью участия человека в процессе решения, а также применимостью к решению задач отдельных классов в рамках полного класса задач линейной оптимизации.

Аналитический метод заключается в поиске решения математическими методами, основанными на решении комбинированных систем уравнений и неравенств. Данный метод является как наименее производительным, так и наиболее узким в отношении решаемых классов задач. Его использование, как правило, связано с обучением методологическим основам линейной оптимизации.

Графический метод заключается в изображении области допустимых значений сценариев управления на плоскости или в пространстве и последующем поиске оптимального сценария геометрическими методами. Ограничениями этого метода так же является низкая производительность, а также невозможность решения многомерных задач (с числом переменных больше трёх). Тем не менее, данный метод является крайне полезным для понимая сути линейной оптимизации.

Симплекс-методы предназначены для машинного поиска решения задачи линейной оптимизации. Они отличаются универсальностью, но их производительность сильно зависит от характера решаемой задачи. В данной группе методов различают классический симплекс-метод, М-метод, двухэтапный метод, а также их многочисленные вариации.

Специальные машинные методы – собирательное название для разнородной группы методов решения задачи линейной оптимизации компьютерным методом. Как следует из названия, эти методы создаются для решения отдельных классов задач, в рамках которых нахождение оптимума является быстрым и требующим минимального количества вычислительных ресурсов. Часть этих методов (но далеко не все) являются эвристическими, поэтому они не гарантируют нахождения абсолютного оптимума, что, впрочем, является допустимым для отдельных задач. К данному классу методов относят, например, метод последовательных приближений или даже метод полного перебора.

2.3 Графический метод

Решение задачи линейной оптимизации включает в себя несколько этапов:

1. Определение ключевых составляющих задачи линейной оптимизации.
2. Построение матрицы линейной оптимизации.
3. Построение пространства оптимизации.

4. Построение области допустимых значений для сценариев управления.
5. Поиск координат узлов области допустимых значений.
6. Поиск точки оптимума.
7. Интерпретация результатов.

Этапность решения задачи линейной оптимизации графическим методом предлагается освоить на примере.

Пример:

Горнодобывающая компания добывает каждую неделю 100 тонн красной руды и 80 тонн черной руды. Красная и черная руда могут быть использованы для производства 2 типов сплавов: мягкого и твердого.

- 1 т мягкого сплава = 5 т красной руды + 3 т черной руды = 250 \$
- 1 т твердого сплава = 5 т красной руды + 5 т черной руды = 400 \$

Вопросы субъекта управления:

- Сколько производить каждого вида сплава?
- Какой при этом достигается доход?

Этап 1. Определение ключевых составляющих задачи линейной оптимизации.

Переменные (параметры сценария управления):

- X – количество тонн производимого мягкого сплава;
- Y – количество тонн производимого твердого сплава.

Целевая функция:

- $250 X + 400 Y \rightarrow \max.$

Ограничения:

- $X \geq 0;$
- $Y \geq 0;$
- $5 X + 5 Y \leq 100;$
- $3 X + 5 Y \leq 80.$

Этап 2. Построение матрицы линейной оптимизации.

Матрица линейной оптимизации – табличный способ представления условия задачи линейной оптимизации в терминах её ключевых составляющих. Матрица для задачи из примера приведена в табл. 2.1.

Таблица 2.1 – Матрица линейной оптимизации

	Расход руды, т		Допустимое потребление, т
	Мягкий сплав	Твёрдый сплав	
Красная руда	5	5	100
Чёрная руда	3	5	80
Доход, \$	250	400	

Этап 3. Построение пространства оптимизации.

Размерность пространства оптимизации соответствует количеству переменных. Так, в задаче из примера пространство оптимизации будет двумерным (рис. 2.1).

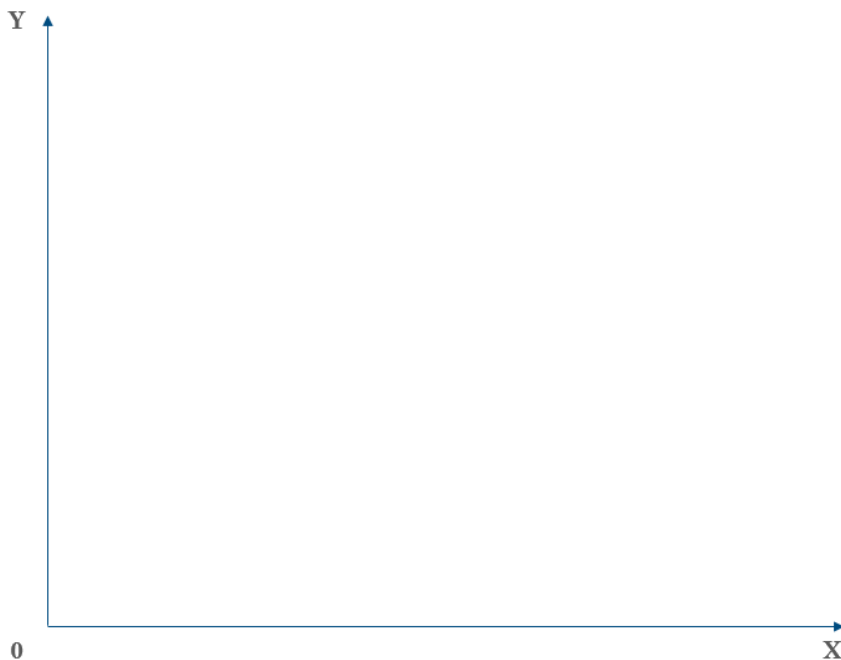


Рисунок 2.1 – Пространство оптимизации

Этап 4. Построение области допустимых значений для сценариев управления.

Построение области допустимых значений выполняется путём последовательного наложения ограничений на пространство оптимизации. Каждое последовательно добавляемое ограничение «отсекает» недопустимые значения от изначально полного пространства оптимизации. Так, для начала изобразим простейшие (естественные) ограничения (рис. 2.2):

- $X \geq 0$;
- $Y \geq 0$.



Рисунок 2.2 – Пространство оптимизации с простейшими ограничениями

Промежуточная область допустимых значений после наложения простейших (естественных) ограничений на рис. 2.2 выделена синим цветом.

Следом изобразим в этом же пространстве оптимизации первое из ресурсных ограничений (рис. 2.3):

- $5 X + 5 Y \leq 100$.

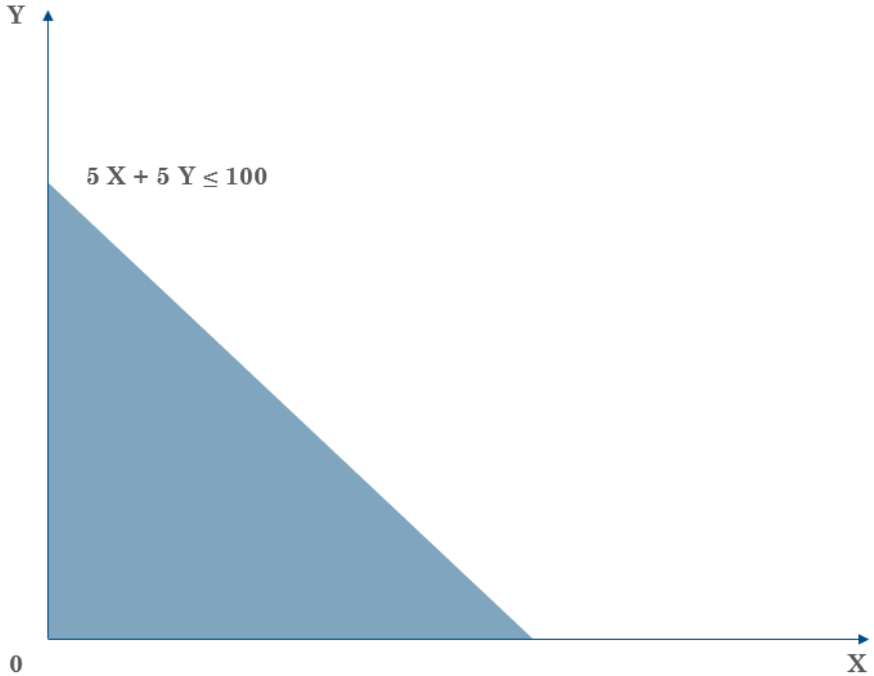


Рисунок 2.3 – Пространство оптимизации после наложения первого ресурсного ограничения

При добавлении всех ограничений важно обращать внимание на соблюдение знака неравенств. Необходимо, чтобы частью области допустимых значений оставалась именно та часть пространства оптимизации, которая удовлетворяет неравенству.

Итак, таким же образом наложим на пространство оптимизации и второе ресурсное ограничение (рис. 2.4):

- $3 X + 5 Y \leq 80$.

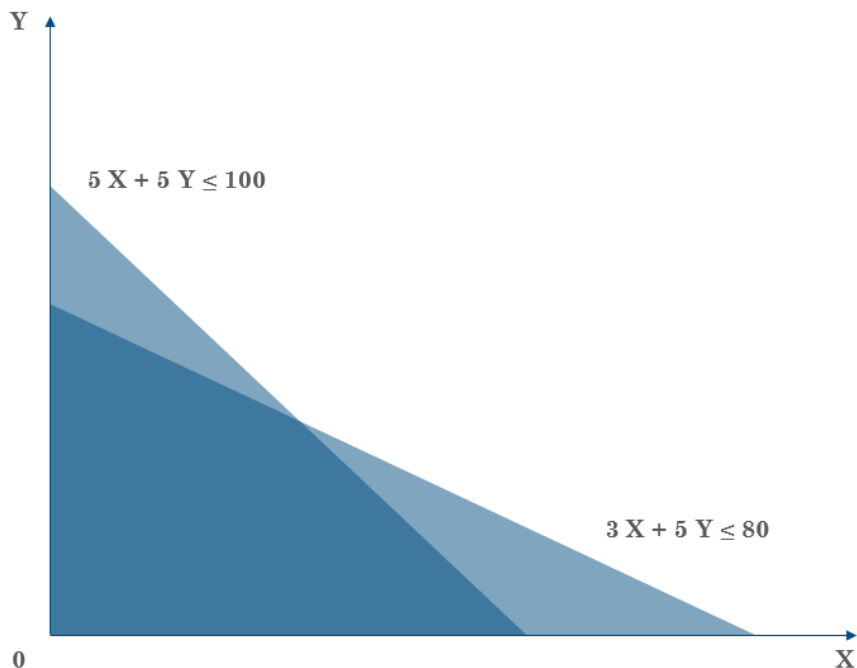


Рисунок 2.4 – Пространство оптимизации с наложенными ограничениями

На рис. 2.4 тёмно-синим цветом отмечена область пространства оптимизации, удовлетворяющая всем ограничениям, – область допустимых значений. Таким образом, именно в рамках данной области пространства оптимизации будет производиться дальнейший поиск оптимума. Любая точка пространства оптимизации за пределами этой области не соответствует по меньшей мере одному из ограничений.

Этап 5. Поиск координат узлов области допустимых значений.

Для дальнейшего поиска оптимума требуется найти координаты всех узловых точек – точек пересечения ограничений, прилегающих к области допустимых значений. Данная задача выполняется геометрическими методами, в частности, координатным методом (рис. 2.5).

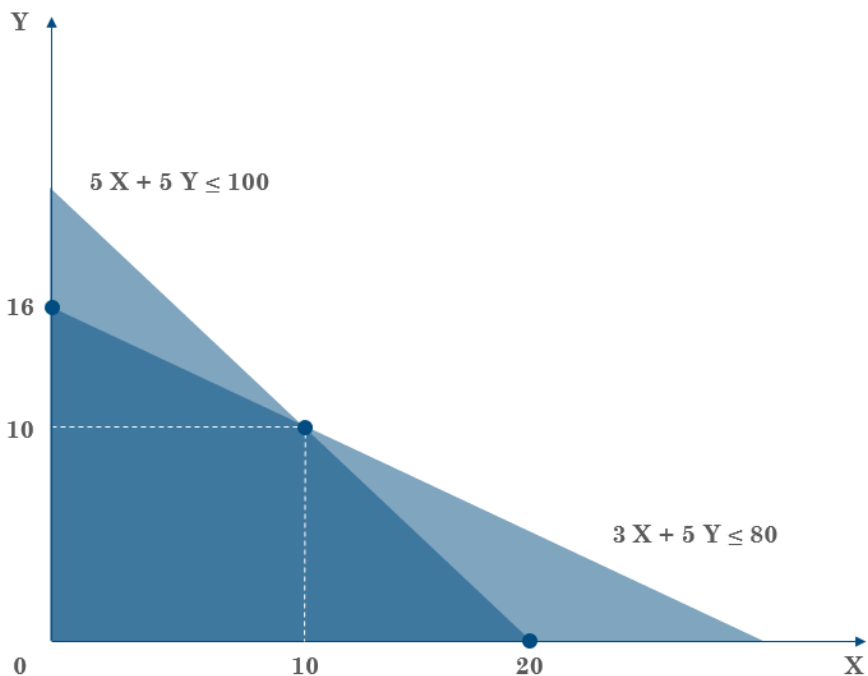


Рисунок 2.5 – Координаты узловых точек области допустимых значений

Так, для задачи из примера узловыми точками являются точки с координатами:

- (0; 0),
- (0; 16),
- (10; 10),
- (20; 0).

Этап 6. Поиск точки оптимума.

Условие линейности ограничений и целевой функции по отношению к переменным гарантирует в невырожденном случае нахождение точки оптимума в одной из узловых точек области допустимых значений.

В вырожденном случае, когда целевая функция для двух узловых точек является одинаковой, каждая граничная точка на отрезке между этими узловыми точками (включая концы отрезка) является точкой оптимума.

Рассчитаем значение целевой функции в каждой из узловых точек:

- в точке (0; 0) целевая функция равняется 0 \$;
- в точке (0; 16) целевая функция равняется 6400 \$;
- в точке (10; 10) целевая функция равняется 6500 \$;
- в точке (20; 0) целевая функция равняется 5000 \$.

Таким образом, точкой оптимума для задачи из примера является точка с координатами (10; 10).

Этап 7. Интерпретация результатов.

Интерпретируя решение задачи, имеем следующие ответы на вопросы субъекта управления:

Сколько производить каждого вида сплава?

- 10 тонн мягкого сплава и 10 тонн твёрдого сплава.

Какой при этом достигается доход?

- 6500 \$.

Для решения задачи линейной оптимизации графическим методом может накладываться бесконечное количество ограничений, последовательно отсекающих фрагменты пространства оптимизации.

Ниже приведены примеры заданий на решение задачи линейной оптимизации графическим методом.

Задание 2.1. Производство краски.

Фабрика занимается производством глянцевой и матовой краски из сырья двух видов: D-33 и AF-67. На производство одной тонны матовой краски тратится 6 тонн сырья D-33 и 1 тонна сырья AF-67. На производство одной тонны глянцевой краски тратится 4 тонны сырья D-33 и 2 тонны сырья AF-67. Каждые сутки максимально доступное количество сырья на фабрике составляет 24 тонны сырья D-33 и 6 тонн сырья AF-67. Цена продукции фабрики составляет 5 тыс. долл. за тонну для матовой краски, 4 тыс. долл. за тонну для глянцевой краски.

Задачи и вопросы:

1. Представьте условие задания в табличном виде.
2. Какова целевая функция, максимизирующая выручку фабрики?
3. Каковы ограничения, накладываемые условиями задачи?
4. Выполните линейную оптимизацию деятельности фабрики.

5. Какова максимальная ежедневная выручка фабрики?
6. Какое количество тонн матовой и глянцевой краски в день для этого необходимо производить?

Задание 2.2. Организация продуктовых перевозок.

Транспортная компания владеет грузовиками 2 типов – А и В. В грузовиках типа А есть морозильная зона емкостью 20 куб. метров и обычная зона (для транспортировки товаров при комнатной температуре) емкостью 40 куб. метров. Общая емкость грузовиков типа В – точно такая же, как и в грузовиках типа А, но пространство в них распределено поровну между морозильной и обычной зонами.

Продуктовому магазину требуется перевезти 3000 куб. метров товаров в морозильной зоне и 4000 куб. метров товаров в обычной зоне. Транспортная компания предлагает аренду грузовиков типа А по 30 долларов за штуку, типа В – по 40 долларов за штуку.

Задачи и вопросы:

1. Представьте условие в табличном виде.
2. Выполните линейную оптимизацию логистических перевозок.
3. Какое количество грузовиков каждого типа рекомендуется арендовать продуктовому магазину?
4. Сколько придется заплатить за перевозку?

Задание 2.3. Производственная линия.

Компания производит 3 компонента – А, В, С, используя для этого одни и те же производственные линии. Единица компонента А производится 60 минут, компонента В – 45 минут, компонента С – 30 минут. В дополнение, компонент С требует 15 минут ручной обработки. Компания обладает 2 производственными линиями, рабочий фонд каждой из которых составляет 150 часов в неделю, а фонд времени ручной обработки в компании составляет 45 часов в неделю.

Компоненты собираются в 2 типа готовых изделий. Изделие 1 состоит из 1 компонента типа А, 1 компонента типа С и стоит 30 долларов. Изделие 2 состоит из 2 компонентов типа В, 1 компонента типа С и стоит 45 долларов. Сборка не требует трудозатрат.

Спрос на изделие 1 составляет 130 единиц в неделю, на изделие 2 – 100 единиц в неделю. В настоящий момент фабрика производит и продает 130 и 50 единиц изделий в неделю.

Задачи и вопросы:

1. Какова трудоемкость производства изделия 1 и изделия 2 (в часах загрузки производственной линии и человеко-часах ручной обработки)?
2. Какова загрузка производственной линии и ручного труда в настоящий момент (в %)?
3. Какова выручка компании в настоящий момент?
4. Каково оптимальное количество производимых изделий первого и второго типа? Определите графическим способом.
5. Какова загрузка производственной линии и ручного труда после оптимизации (в %)?
6. Какова выручка компании в этом случае? На сколько процентов она изменилась по сравнению с изначальной ситуацией?

Задание 2.4. Рекламная стратегия.

Компания Show&Sell имеет возможность рекламировать свою продукцию по местному радио и телевидению. Бюджет на рекламу ограничен суммой в 120 тыс. долл. в год. Одна минута рекламного времени на радио стоит 15 долл., а на телевидении – 300 долл. Руководство компании предполагает, что реклама на радио по времени должна превышать рекламу на телевидении не менее чем в 2 раза. Вместе с тем, известно, что нерационально использовать более 400 минут рекламы на радио в месяц. Последние исследования по продвижению продукта показали, что реклама на телевидении в 25 раз результативней рекламы на радио.

Задачи и вопросы:

1. Разработайте оптимальный бюджет на рекламу на радио и телевидении.
2. Сколько минут рекламы на радио и телевидении ежемесячно включает в себя оптимальный бюджет в месяц?
3. Какой максимальный рекламный годовой бюджет может иметь компания (максимальный бюджет, превышение которого не увеличивает результативность рекламной кампании)?

В результате принятия антимонопольных постановлений компания потеряла возможность заказывать более 20 минут рекламы на телевидении в месяц.

4. Как данное изменение повлияло на выбор рекламной стратегии компании?

5. Как изменилась результативность рекламной кампании? На сколько процентов?

6. Радиоккомпания готова пойти на уступки и снизить цену рекламы. Какой минимальный размер скидки должна предложить радиоккомпания, чтобы Show&Sell было выгодней заказывать рекламу на радио, чем на телевидении?

Далее компания Show&Sell смогла добиться у радиоккомпании скидки 50 %.

7. Сколько минут радио- и телевещания будет заказывать компания ежемесячно?

8. Какая часть рекламного бюджета при этом используется?

9. Как и насколько изменилась результативность рекламной кампании по сравнению с изначальной ситуацией (до антимонопольных постановлений и скидки на радио)?

10. Как и насколько изменилась эффективность рекламной кампании по сравнению с изначальной ситуацией (до антимонопольных постановлений и скидки на радио)?

2.4 Симплекс-метод

Графический метод, представленный в разд. 2.3, обладает простотой интерпретации результатов, так как процесс поиска оптимума является наглядным. Тем не менее, у него есть ряд недостатков:

- возможность поиска решения только в двумерном или трёхмерном пространстве;
- избыточность алгоритмизации для машинного решения задачи линейной оптимизации;
- низкая производительность.

В качестве альтернативы предлагается рассмотреть применение классического симплекс-метода.

Симплекс-метод – это машинный алгоритм решения оптимизационной задачи линейного программирования (задачи линейной

оптимизации) путём перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве.

Для наглядности предлагается рассмотреть этапы применения симплекс-метода в двумерном пространстве. Все этапы до построения области допустимых значений и определения координат узловых точек включительно в данном примере соответствуют этапам графического метода (см. разд. 2.3, этапы 1–5). Область допустимых значений (область определения целевой функции) представлена на рис. 2.6.

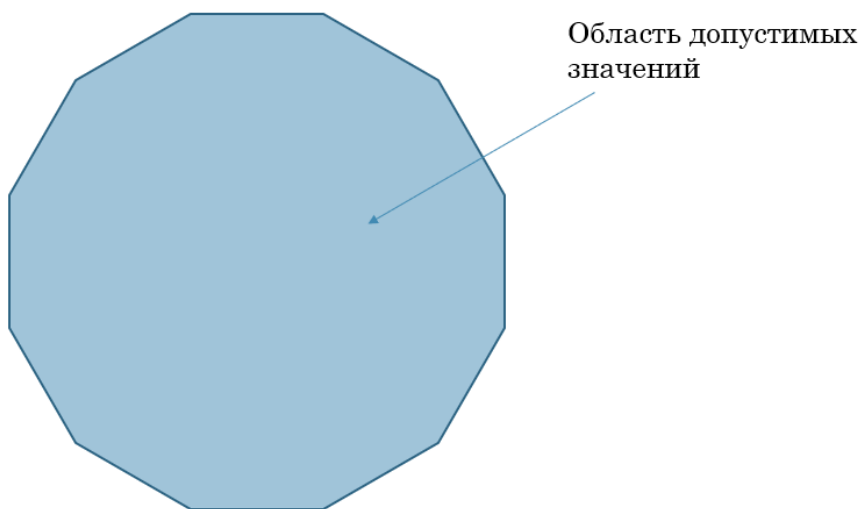


Рисунок 2.6 – Область допустимых значений для решения задачи линейной оптимизации симплекс-методом

Отличия симплекс-метода от графического метода начинаются на следующем этапе. При использовании графического метода пришлось бы высчитывать значение целевой функции для каждой узловой точки области допустимых значений, что в случае её сложной формы (в том числе, многомерной) означает большое число вычислений.

В симплекс-методе вычисление значения целевой функции начинается с одной узловой точки. Выбор начальной узловой точки для оптимизации симплекс-методом может реализовываться с применением

специальных алгоритмов (по большей части, эвристических), но зачастую выполняется случайно. Итак, вычислим значение целевой функции в произвольно выбранной узловой точке p_0 (рис. 2.7).

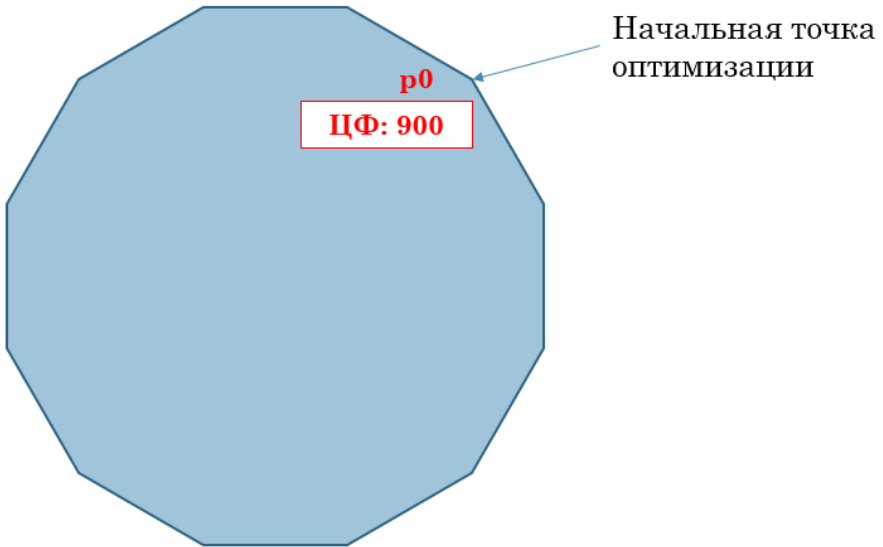


Рисунок 2.7 – Определение значения целевой функции для начальной узловой точки

Допустим, что значение целевой функции в начальной узловой точке линейной оптимизации симплекс-методом оказалось равно 900 (как увидим далее, важно не её абсолютное значение, а относительное в сравнении с соседними точками).

Следом необходимо от начальной точки p_0 переходить к её «соседям» по граням оптимизации. В двумерной задаче у каждой узловой точки по две соседние точки (рис. 2.8), в многомерных задачах количество узловых точек будет больше.

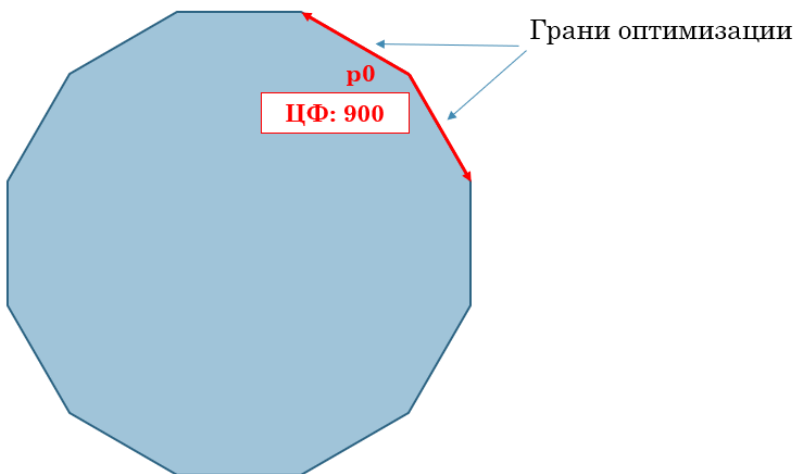


Рисунок 2.8 – Грани оптимизации симплекс-методом

Для каждой из соседних точек (назовём их p_{1a} и p_{1b}) необходимо таким же образом рассчитать значение целевой функции (рис. 2.9).

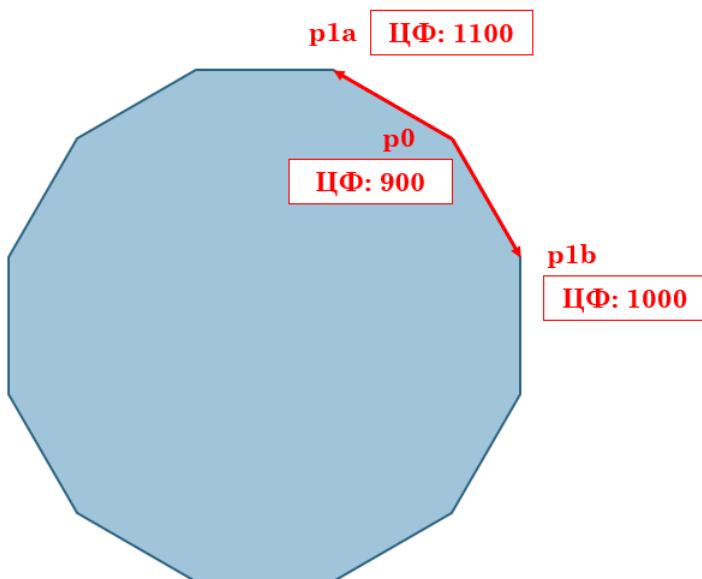


Рисунок 2.9 – Вычисление целевой функции для соседних точек

После вычисления значения целевой функции для соседних точек требуется проверить выполнение следующих условий:

- если $\text{ЦФ}(p_0) > \max(\text{ЦФ}(p_{1a}); \text{ЦФ}(p_{1b}))$ – оптимум в p_0 ; конец
- иначе
 - если $\text{ЦФ}(p_{1a}) > \text{ЦФ}(p_{1b})$ – движемся в сторону p_{1a}
 - если $\text{ЦФ}(p_{1b}) > \text{ЦФ}(p_{1a})$ – движемся в сторону p_{1b}
 - переходим к вычислениям в окрестности новой точки.

Таким образом, если значение целевой функции в некоторой узловой точке больше, чем значения целевой функции во всех соседних точках, данная узловая точка является точкой оптимума.

В противном случае необходимо перейти к соседней узловой точке с наибольшим значением целевой функции (если в рамках задачи целевая функция максимизируется) и повторить вычисления уже в отношении новой узловой точки.

Так, процесс нахождения оптимума симплекс-методом может иметь следующий вид (рис. 2.10).

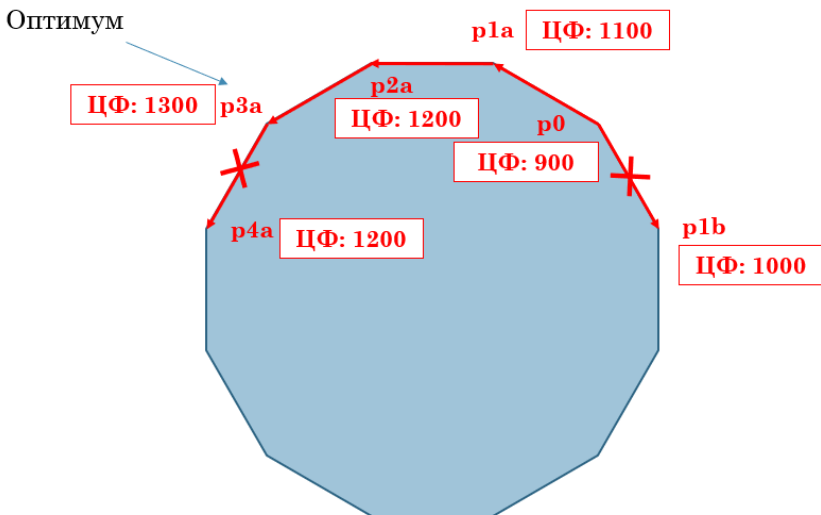


Рисунок 2.10 – Процесс нахождения оптимума симплекс-методом

В данном примере описанная выше итерация выполнена четыре раза в отношении узловых точек p_0 , p_{1a} , p_{2a} и p_{3a} . В последнем случае значение

целевой функции в узловой точке p_3a оказалось больше, чем значение целевой функции в соседних узловых точках (p_2a и p_4a), поэтому именно данная узловая точка является точкой оптимума в рамках данной задачи.

В случае многомерного пространства значение целевой функции в начальной узловой точке сравнивается с значениями целевой функции во всех соседних узловых точках (рис. 2.11).

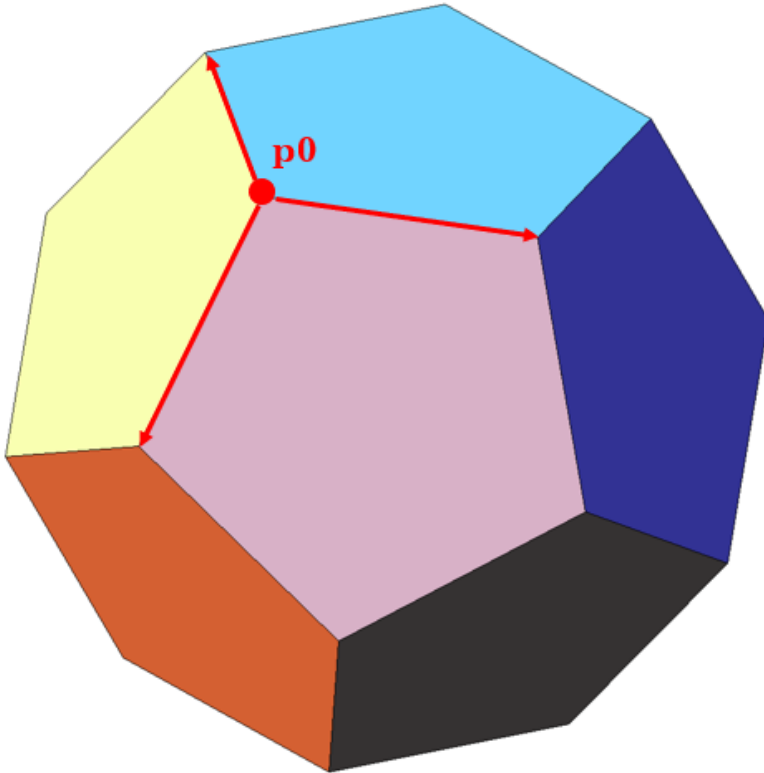


Рисунок 2.11 – Симплекс-метод в трёхмерном пространстве

Таким образом, упрощённо алгоритм поиска решения задачи линейной оптимизации симплекс-методом описывается итеративным выполнением следующей последовательности действий:

1. Нахождение исходной вершины множества допустимых решений.

2. Последовательный переход от одной вершины к другой, ведущий к оптимизации значения целевой функции.

2.5 Линейная оптимизация в электронных таблицах

Алгоритм поиска решения задачи линейной оптимизации симплекс-методом реализован во множестве программных инструментов, в том числе в большинстве электронных таблиц, включая MS Excel.

Для выполнения данной задачи необходимо подключить модуль «Поиск решения» в меню «Файл» – «Параметры» – вкладка «Надстройки». Если в таблице «Активные настройки приложений» есть строка «Поиск решения» – модуль уже подключен, дополнительных действий не требуется. Иначе необходимо выбрать в выпадающем меню «Управление» пункт «Надстройки Excel», нажать кнопку «Перейти», затем установить флажок напротив модуля «Поиск решения» и нажать «ОК». После этого модуль «Поиск решения» доступен во вкладке «Данные», раздел «Анализ».

Модуль «Поиск решения» выглядит следующим образом (рис. 2.12).

Оптимизировать целевую функцию:

До: Максимум Минимум Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Метод решения

Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Рисунок 2.12 – Модуль «Поиск решения» MS Excel

Продemonстрируем использование поиска решения задачи линейной оптимизации симплекс-методом в MS Excel на примере оптимизации производственной системы. Исходные данные для линейной оптимизации приведены на рис. 2.13.

	A	B	C	D	E	F
1		Деталь 1	Деталь 2	Деталь 3	Трудоёмкость	Цена
2	Продукт А	0	2	1	2	20
3	Продукт В	0	1	2	2	30
4	Продукт С	1	0	0	3	30
5	Доступно	15	30	20	60	

Рисунок 2.13 – Матрица линейной оптимизации

В матрице линейной оптимизации на рис. 2.13 приведены исходные данные:

- матрица входимости деталей (комплектующих) в продукты (готовые изделия);
- доступность деталей;
- трудоёмкость производства продуктов;
- фонд доступного рабочего времени;
- цена продуктов.

Задача линейной оптимизации заключается в оптимизации структуры производства.

На первом этапе (исключая подготовительные в виде подготовки исходных данных и составления матрица линейной оптимизации) необходимо сделать вспомогательную таблицу – шаблон для оптимизации (рис. 2.14).

H	I	J	K	L	M	N
	Производство	Деталь 1	Деталь 2	Деталь 3	Трудоёмкость	Цена
A		0	0	0	0	0
B		0	0	0	0	0
C		0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0

Рисунок 2.14 – Вспомогательный шаблон для оптимизации

В данном шаблоне размещено:

- в ячейках столбца I (выделено жёлтым) – пустые ячейки, соответствующие переменным, в которые модуль «Поиск решения» подставит значения, соответствующие оптимальной структуре производства;
- в ячейках столбцов J, K и L – количество деталей каждого типа, расходуемых на производство продукта каждого типа, определяемое как произведение соответствующих величин;
- в ячейках столбца M – трудоёмкость производства продуктов каждого типа, определяемое как произведение количества производимых продуктов на удельную трудоёмкость;
- в ячейках столбца N – доход от реализации продуктов каждого типа, определяемое как произведение количества производимых продуктов на цену.

Ячейки по столбцам J, K, L, M и N суммируются, чтобы автоматически высчитывались затраты деталей каждого типа, загруженность трудовых ресурсов, а также суммарный доход от реализации продуктов всех типов.

Далее необходимо задать условия для линейной оптимизации в модуле «Поиск решения» (рис. 2.15).

	A	B	C	D	E	F
1		Деталь 1	Деталь 2	Деталь 3	Трудоёмкость	Цена
2	Продукт А	0	2	1	2	20
3	Продукт В	0	1	2	2	30
4	Продукт С	1	0	0	3	30
5	Доступно	15	30	20	60	

	H	I	J	K	L	M	N
		Производство	Деталь 1	Деталь 2	Деталь 3	Трудоёмкость	Цена
A			0	0	0	0	0
B			0	0	0	0	0
C			0	0	0	0	0
			0	0	0	0	0

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию: \$B\$5

До: Максимум Минимум Значение: []

Изменить целевые параметры: \$B\$2:\$B\$4

В соответствии с ограничениями:

\$B\$2:\$B\$4 = целое
 \$B\$5:\$B\$5 <= \$B\$8:\$D\$5
 \$M\$5 <= \$E\$5

сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения: Поиск решения лин. задач симплекс-методом

Добавить, Изменить, Удалить, Сбросить, Загрузить/сохранить, Параметры

Рисунок 2.15 – Задание условий для линейной оптимизации

Инструкция по заполнению полей модуля «Поиск решения»:

1. В поле «Целевая функция» вносится ссылка на ячейку с суммарным доходом от реализации продуктов всех типов.

2. Выбирается параметр «Максимум» для определения направления оптимизации.

3. В поле «Изменяя ячейки переменных» вносятся ссылки на ячейки с переменными, соответствующими необходимому объёму производства продуктов каждого типа.

4. В поле «Ограничения» вносятся:

- естественные ограничения (на неотрицательность и на целочисленность значений переменных);
- ресурсные ограничения (по затратам деталей и по фонду доступного рабочего времени).

5. В поле «Метод решения» выбирается «Поиск решения лин. задач симплекс-методом».

После нажатия на кнопку «Найти решение» модуль «Поиск решения» вносит значения в ячейки с переменными по результатам выполнения оптимизации симплекс-методом. Шаблон для оптимизации принимает вид, приведённый на рис. 2.16.

Н	I	J	K	L	M	N
	Производство	Деталь 1	Деталь 2	Деталь 3	Трудоёмкость	Цена
A	0	0	0	0	0	0
B	9	0	9	18	18	270
C	14	14	0	0	42	420
		14	9	18	60	690

Рисунок 2.16 – Результаты выполнения оптимизации

Таким образом, оптимизатор нашёл решение задачи симплекс-методом и внёс решение в таблицу. Теперь в неё указана оптимальная структура производства и доход, получаемый при её реализации.

Кроме того, сравнивая затраты деталей и загрузку фонда рабочего времени в оптимизированной структуре производства (рис. 2.16) с ограничениями в матрице линейной оптимизации (рис. 2.13), можно вычислить, например, остаток неиспользованных ресурсов.

Таким образом, методы линейной оптимизации представляют собой обширный набор подходов к поиску решения в непрерывных средах, что

зачастую может быть использовано для оптимизации сложных организационно-технических систем.

Вместе с тем, у данных методов есть ограничения на математический вид целевой функции и ограничений (условие линейности), что является непозволительным допущением при решении некоторых оптимизационных задач. Такие задачи могут быть решены с применением иных методов оптимизации – например, нелинейной, целочисленной или динамической. Рассмотрение этих методов не входит в рамки данного курса. Данные классы методов оптимизаций могут быть изучены обучающимися самостоятельно.

3 СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ

3.1 Сущность сетевого моделирования

Сетевое моделирование – это способ представления и исследования систем с использованием графов. Ключевыми требованиями к моделируемой системе при этом является наличие обособленных (пространственно или логически распределённых) элементов и выраженных связей между ними.

В соответствии с обозначенными требованиями основными элементами графа (сети) являются:

1. Узел – обособленная структурная единица системы.
2. Ребро – связующий элемент между узлами.

Рёбра в сетевых моделях могут различаться по направленности и кратности.

По направленности рёбра делятся на ориентированные и неориентированные.

Ориентированные рёбра – рёбра с определённым узлом начала и узлом завершения. Такими рёбрами являются, например, родственные связи между поколениями в сетях социальных взаимодействий или связи последовательности операций в технологических процессах.

Неориентированные рёбра – рёбра без определённого узла начала и узлом завершения. Такими рёбрами являются, например, дружеские связи между поколениями в сетях социальных взаимодействий или дороги между городами в дорожных сетях.

По кратности рёбра делятся на единичные и кратные.

Единичные рёбра демонстрируют исключительно наличие связи между узлами без указания тесноты этой связи. К примеру, в дорожной сети дороги между городами могут обозначаться единичными рёбрами, если в целях исследования важно именно существование дороги между городами.

Напротив, кратные рёбра помимо самого факта существования связи между узлами демонстрируют ещё и тесноту связи или другие его характеристики.

Примеры узлов и рёбер в различных организационно-технических (и иных) системах приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1 – Примеры узлов и рёбер в сетевых моделях

Система	Узлы	Рёбра
Дорожная сеть	Города	Дороги
Логистическая сеть	Центры производства, центры потребления	Логистические маршруты
Сеть социальных взаимодействий	Люди	Родственные связи, дружеские связи
Предпринимательский кластер	Компании	Сделки, соглашения о сотрудничестве
Сеть работ проекта	Вехи проекта	Работы проекта
Технологический процесс	Технологические операции	Указания последовательности операций
Молекула	Атомы	Межатомные связи

Пример простейшего графа, соответствующего сетевой модели, представлен на рис. 3.1.

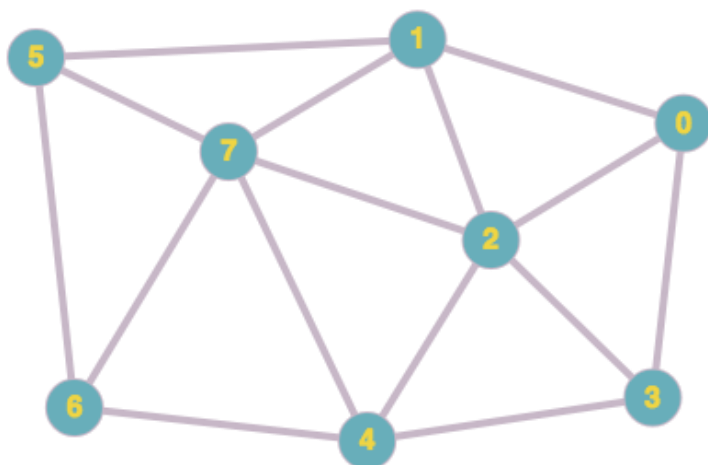


Рисунок 3.1 – Пример графового представления сетевой модели

Графовое представление сетевой модели используется для визуализации и ручного анализа сетевых моделей. Так, на рис. 3.1 узлы сетевой модели представлены точками, пронумерованными от 0 до 7; а отрезки между этими точками соответствуют рёбрам сетевой модели. Графовое представление сетевой модели помогает визуально устанавливать связи между элементами системы.

Альтернативой графовому представлению сетевой модели является табличное представление (табл. 3.2).

Таблица 3.2 – Пример табличного представления сетевой модели

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	–	1	1	1	0	0	0	0
1	1	–	1	0	0	1	0	1
2	1	1	–	1	1	0	0	1
3	1	0	1	–	1	0	0	0
4	0	0	1	1	–	0	1	1
5	0	1	0	0	0	–	1	1
6	0	0	0	0	1	1	–	1
7	0	1	1	0	1	1	1	–

Сетевая модель, представленная в табличном виде в табл. 3.2, полностью соответствует сетевой модели, представленной в графовом виде на рис. 3.1. В табличном представлении сетевой модели в заголовках строк и столбцов находятся номера или наименования узлов сети. На пересечении строк и столбцов находится обозначение существования ребра между соответствующими узлами. Так, между узлами № 2 и № 7 связь есть, что демонстрирует «1» на пересечении соответствующих строк и столбцов. Напротив, между узлами № 3 и №5 связи нет, и на пересечении соответствующих строк и столбцов находится «0». В случае более сложных графов с ориентированными или кратными рёбрами вместо бинарного указания наличия связи могут использоваться другие числа, демонстрирующие направление или тесноту связи между узлами сетевой модели.

Табличное представление используется для машинного анализа сетевых моделей, включая работу алгоритмов оптимизации состава и структуры сетевой моделей.

Для анализа сетевых моделей используются следующие характеристики узлов, рёбер и самой сети:

1. Степень узла – характеристика связности узла в рамках сетевой модели. Определяется как сумма кратностей всех рёбер, выходящих из узла. В случае, если в сети присутствуют только однократные рёбра, степень узла определяется как количество рёбер, выходящих из узла, и потому может интерпретироваться как количество соседних узлов. Так, для сетевой модели на рис. 3.1 степень узлов № 2 и № 7 – 5; узлов № 1 и № 4 – 4; № 0, №3, № 5 и № 6 – 3.

2. Путь – последовательность рёбер, соединяющих два узла. В случае неориентированных рёбер путь точно так же является неориентированным (определяется одинаково в обоих направлениях). В случае, если рёбра являются ориентированными, пути из одного узла в другой и обратно тождественно различны. Так, например, в сетевой модели на рис. 3.1 узлы № 3 и № 5 соединены множеством путей, среди которых проходящий через узлы № 0 и № 1, или проходящий через узлы № 2, № 4 и № 7.

3. Длина пути – количество рёбер в пути. Если рёбра являются кратными, и при этом маркированы величинами, по смыслу эквивалентными длине ребра (например, длине дороги между городами), под длиной пути может пониматься так же сумма кратностей рёбер, составляющих путь. Для указанных в п. 2 путей длина равна 3 и 4 соответственно.

4. Расстояние – минимальная длина пути между двумя узлами. На рис. 3.1 расстояние между узлами № 3 и № 5 равно 3 (такая длина пути, например, через узлы № 0 и № 1, а также через узлы № 4 и № 6).

5. Цикл – путь, начало и конец которого совпадают. Например, на рис. 3.1 представлено множество циклов, среди которых цикл, проходящий последовательно через узлы № 5, № 1, № 0, № 3, № 4 и № 6.

6. Связанная сеть – такая сеть, в которой любые два узла связаны по меньшей мере одним путём. По определению сеть на рис. 3.1 является связанной.

7. Полная сеть – такая сеть, в которой любые два узла связаны путём с единичной длиной (иными словами, любые два узла смежны). Сеть на рис. 3.1 не является полной.

Ниже приводится задание на анализ дорожной (логистической) сети с применением данных характеристик.

Задание 3.1. Оптимизация логистической сети.

Компания Assembly shop планирует построить распределенную производственную сеть на 7 территориально удаленных друг от друга площадках. Руководство компании рассматривает различные варианты обустройства логистической сети.

Задачи и вопросы:

1. Какое минимальное количество дорог необходимо построить, чтобы логистическая сеть была связанной?

2. Какая средняя степень узла в данной логистической сети (с округлением до 0,01)?

3. Какое количество дорог необходимо построить, чтобы логистическая сеть была полной?

4. Какая средняя степень узла в данной логистической сети (с округлением до 0,01)?

Руководство компании эмпирически решило, что останутся на промежуточном варианте – каждый из узлов логистической сети будет связан с 2 другими узлами (так, что сеть остается связанной).

5. Какое среднее расстояние между двумя узлами сети (с округлением до 0,01)?

Отдел логистики предполагает, что в течение года в сети будет возникать примерно 1200 запросов на транспортировку груза между двумя случайными узлами сети. Транспортировка груза между двумя соседними узлами сети оценивается в 2 долл.

6. Какой размер ежегодных затрат на логистику следует предусмотреть компании?

Также в компании рассчитывают, что единовременные затраты на каждую дорогу составляют 1200 долл.

7. Какая совокупная стоимость владения дорожной сетью за 5 лет?

8. Какая совокупная стоимость владения дорожной сетью за 5 лет в случае, если она построена по принципу полной сети?

9. Постройте графики стоимости владения дорожной сетью из п. 7 и п. 8 во времени.

10. В какой момент времени совокупная стоимость владения дорожной сетью будет одинакова для обоих вариантов (с округлением до 0,01 года)?

3.2 Сетевое планирование

Сетевое планирование – класс задач исследования операций на базе сетевых моделей для принятия решений в управлении проектами и управлении производством.

Среди возможных назначений сетевого планирования выделяют:

- календарное планирование проекта (производства);
- определение «узких мест»;
- оптимизацию длительности проекта;
- визуализацию календарного плана проекта;
- координацию деятельности исполнителей и рабочих групп;
- отслеживание прогресса выполнения проекта.

Существует несколько принципиальных подходов к сетевому планированию, на базе которых разработано множество модификаций для решения отдельных задач и учёта специфики конкретных проектов или производств.

Среди базовых подходов выделяют следующие:

1. Метод критического пути (Critical Path Method, CPM).
Основополагающий метод сетевого планирования, в котором работы являются детерминированными по длительности и последовательности, а сам процесс моделирования не учитывает исполнителей конкретных работ. Несмотря на такие ограничения, метод довольно часто применяется на практике. Суть метода заключается в построении сети работ проекта (производства) с последующим нахождением критического пути, являющегося узким местом для проекта (производства).

2. Метод критической цепи (Critical Chain Method, CCM).
Является расширением метода критического пути в части учёта исполнителей. В методе критического пути единственным ограничением может быть только последовательность работ, тогда как в методе критической цепи ограничением может являться также перегруженный исполнитель.

3. Метод PERT (Program Evaluation and Review Technique).
Принципиальным отличием этого метода является вероятностный подход к заданию длительности работ по проекту. Преимуществом такого подхода является возможность оценки рисков задержки реализации проекта, а также принципиальная возможность анализа влияния работ, не находящихся на критическом пути проекта при применении первых двух методов.

В данном учебном пособии разбирается применение метода критического пути и метода PERT.

Сетевое планирование выполняется в соответствии со следующими этапами:

1. Формализация работ проекта. В простейшем случае формализация работ проекта заключается в выявлении всех работ по проекту, определении их взаимозависимостей (в части последовательности выполнения), исполнителей (при необходимости), а также длительности (в детерминированном или вероятностном виде).

2. Построение сетевой модели. Данная задача заключается в визуализации сети работ по проекту с применением специализированной нотации.

3. Выполнение вычислений. Данный этап зависит от выбранного метода сетевого планирования.

4. Интерпретация результатов. Данная задача включает в себя объяснение найденных закономерностей, проверку их реалистичности, а также формирование предложений по принятию управленческих решений.

Базовая нотация сетевого планирования приведена на рис. 3.2.

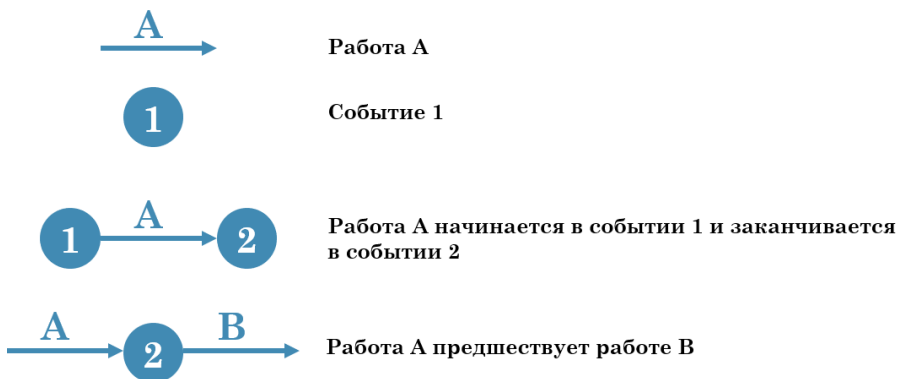


Рисунок 3.2 – Нотация сетевого планирования

Для выполнения отдельных задач сетевого планирования, связанных с применением конкретных методов, могут использоваться дополнительные обозначения.

3.3 Метод критического пути

Этапность сетевого планирования с использованием метода критического пути предлагается освоить на примере проекта издания книги.

В табл. 3.3 приведена формализация работ по данному проекту, включающая перечень работ, их взаимозависимости, а также длительность в неделях.

Таблица 3.3 – Формирования работ по проекту издания книги

Индекс	Работа	Предшествующие работы	Длительность, нед
A	Прочтение рукописи	–	3
B	Пробная вёрстка	–	2
C	Разработка обложки	–	4
D	Подготовка иллюстраций	–	3
E	Согласование вёрстки	A, B	2
F	Создание макета книги	E	2
G	Проверка макета книги	F	2
H	Проверка иллюстраций	D	1
I	Настройка печатных форм	G, H	2
J	Печать и брошюровка	C, I	4

Построение сетевой модели начинается с «нулевой» вехи, обозначающей старт проекта (узел «0» на рис. 3.3). От него откладываются все работы, не имеющие предшествующих работ (выполнение которых возможно с самого начала проекта). Каждая работа завершается собственной вехой, обозначенной узлом.

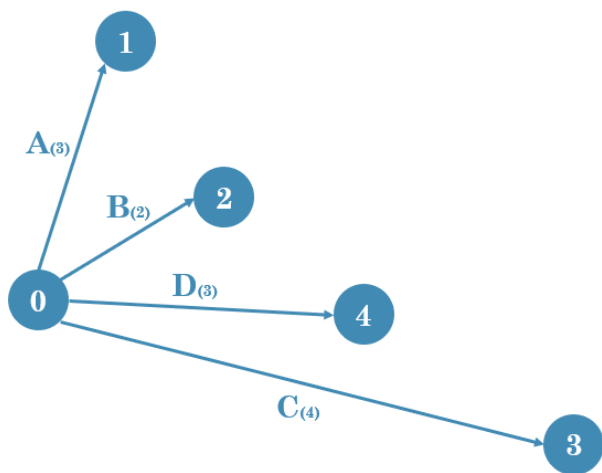


Рисунок 3.3 – Начало построения сетевой модели

Вехи (узлы) нумеруются по порядку, работы (рёбра) маркируются соответствующими индексами, а также при желании – указанием длительности выполнения.

Следом за этим начинаются располагаться на сетевой модели работы с предшественниками. Так, работа Е может начинаться сразу после завершения работ А и В. Так как работы А и В завершаются в разных вехах («1» и «2» соответственно), а ориентированное ребро с работой Е может выходить только из одного узла, необходимо создание фиктивной вехи – дополнительного узла, связанного с узлами «1» и «2» такими же фиктивными работами (работами с нулевой длительностью). Эти работы не влияют на длительность проекта, но указывают на взаимозависимости между остальным работами. Именно из фиктивной вехи стартует работа Е (рис. 3.4).

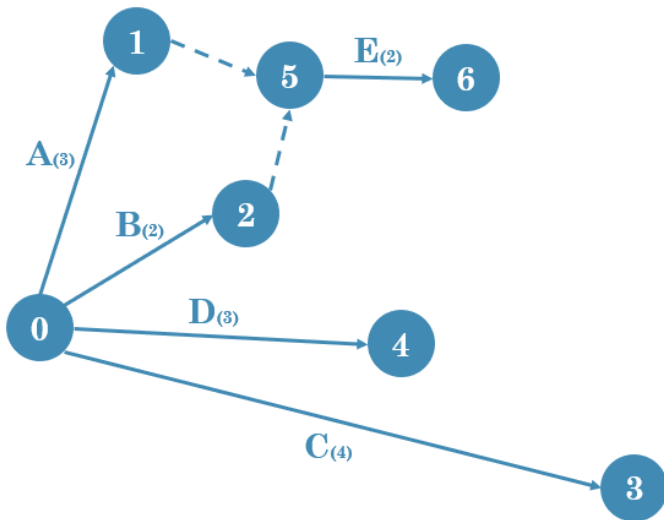


Рисунок 3.4 – Использование фиктивной вехи

Использование фиктивной вехи обязательно в случае, когда у добавляемой работы две или более предшествующих работы.

Продолжая добавлять работы последовательно по списку из табл. 3.3, получаем законченную сеть работ проекта издания книги (рис. 3.5).

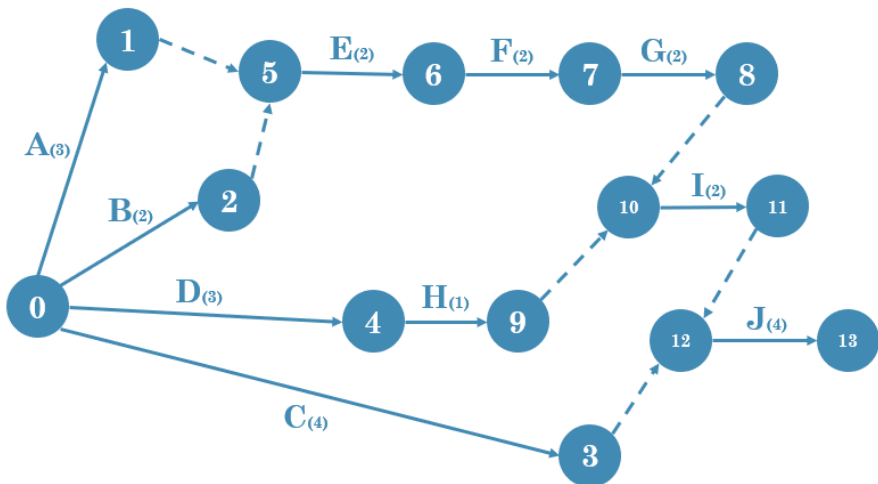


Рисунок 3.5 – Сеть работ проекта издания книги

После этого для каждой вехи требуется определить раннее время её наступления. Делается это с помощью «прямого прохода» – последовательного прохождения от «нулевой» вехи таким образом, чтобы для каждой высчитываемой вехи были predeterminedены все условия (то есть рассчитано раннее время наступления для всех предшествующих вех).

Раннее время наступления вех определяется следующим образом:

- для «нулевой» вехи – 0;
- для каждой последующей – максимальное значение из сумм раннего времени наступления предшествующих вех с длительностями соответствующих работ.

Так, для вехи «1» это значение равно 3 (0+3), для вехи «2» – 2 (0+2), для вехи «5» – 3 (максимум из 2+0 и 3+0), для вехи «6» – 5 (3+2) и так далее.

Раннее время начала для всех вех проекта издания книги приведено на рис. 3.6.

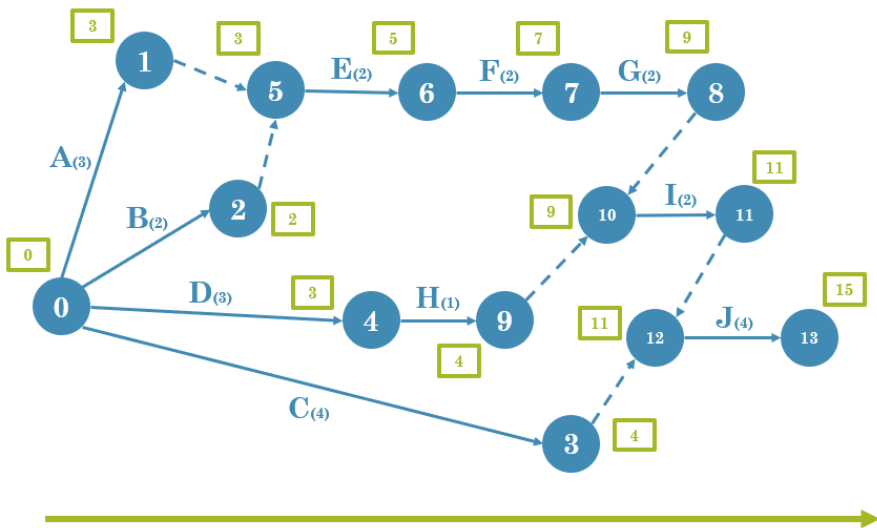


Рисунок 3.6 – Определение раннего времени начала наступления событий

Таким образом можно вычислить длительность реализации проекта, которое равно времени от «нулевой» вехи (0) до последней (15). Так, в примере длительность проекта издания книги равна 15 неделям.

Однако, этой информации ещё недостаточно для того, чтобы определить критический путь проекта. Для этого необходимо выполнить задачу, противоположную «прямому проходу» – «обратный проход». В рамках него для каждой вехи определяется позднее время наступления события.

В соответствии с названием задачи, позднее время наступления вех определяется следующим образом:

- для последней вехи – равное раннему времени наступления;
- для каждой предшествующей – минимальное значение из разности позднего времени наступления последующих вех с длительностями соответствующих работ.

Так, для вехи «13» это значение равно 15 (в соответствии с ранним временем), для вехи «12» – 11 (15–4), для вех «3» и «11» – 11 (11–0) и так далее.

Позднее время начала для всех вех проекта издания книги приведено на рис. 3.7.

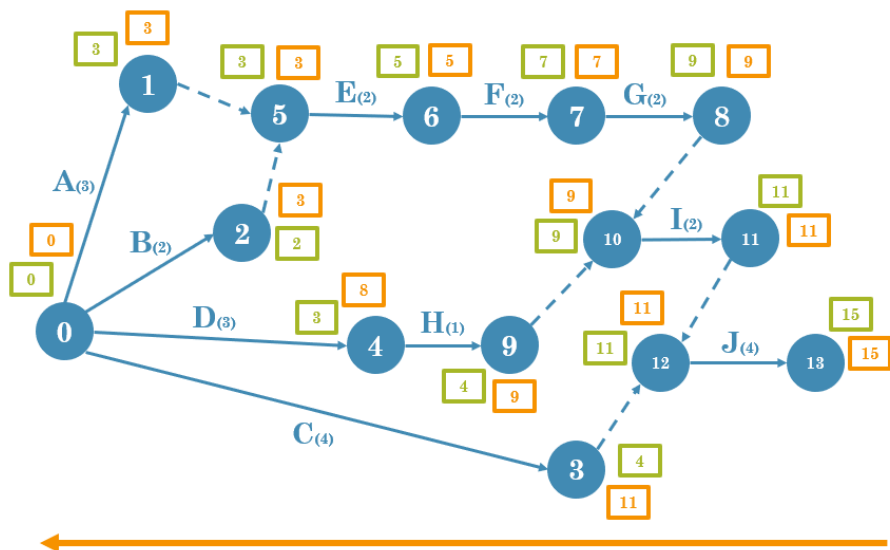


Рисунок 3.7 – Определение позднего времени начала наступления событий

Следом необходимо выделить вехи, в которых раннее время наступления равняется позднему – эти вехи лежат на критическом пути. Соответственно, работы, соединяющие эти вехи, и составляют критический путь (выделено красным на рис. 3.8).

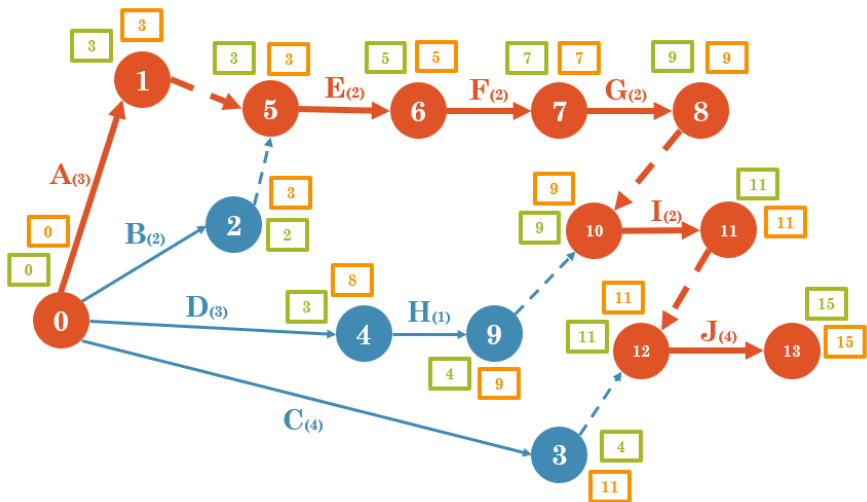


Рисунок 3.8 – Критический путь проекта издания книги

Смысл выделения критического пути заключается в том, что работы, принадлежащие ему, не имеют запаса по времени выполнения. Это означает, что задержка выполнения любой из работ, лежащих на критическом пути, повлечёт за собой увеличение длительности всего проекта.

Напротив, работы, не лежащие на критическом пути, имеют временной буфер. Задержки в выполнении работ, не превосходящие размер данного буфера, не влекут за собой увеличения длительности проекта.

Календарный план-график проекта издания книги в виде ленточной диаграммы приведён на рис. 3.9.

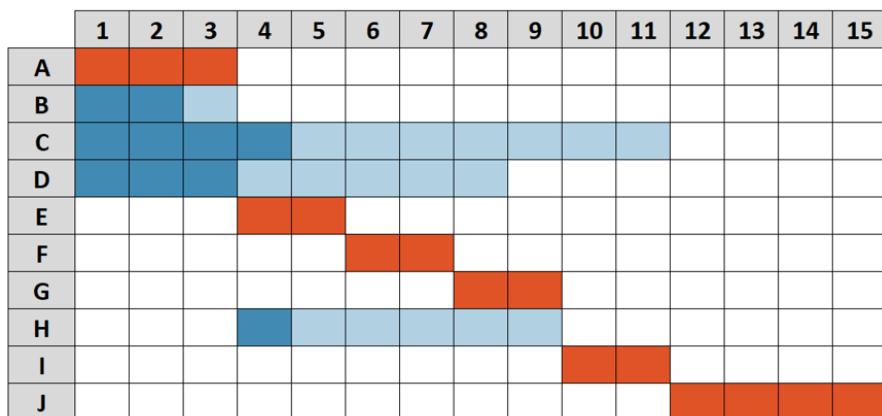


Рисунок 3.9 – Календарный план-график проекта издания книги

Красным цветом на нём выделены работы, принадлежащие критическому пути. Светло-синим – возможные диапазоны размещения работ, не находящихся на критическом пути, тёмно-синим – варианты такого размещения (в приведённом примере – по правилу «как можно раньше», но это не обязательно).

Ниже приводится задание на закрепление этапности выполнения сетевого планирования с применением метода критического пути.

Задание 3.2. Разработка мобильного приложения

Компания занимается разработкой мобильных приложений на заказ. Ниже представлено упрощенное описание их рабочих процессов.

Все начинается с этапа предварительных переговоров с заказчиком. Ориентировочно, данный этап длится 2 нед. После этого техническим специалистам компании требуется примерно 4 нед., чтобы разработать техническое предложение, а экономистам – 2 нед., чтобы составить коммерческое предложение. Когда оба документа готовы, начинается этап их согласования с заказчиком, который длится примерно 4 нед.

Когда согласование заказчика получено, системный архитектор приступает к разработке архитектуры системы (3 нед.), а руководитель проекта - к подбору сотрудников в команду внутри компании (2 нед.). Когда оба эти процесса завершены, команда приступает к разработке приложения.

Backend-разработчики занимаются созданием серверной части приложения (12 нед.), мобильные разработчики работают над структурой клиентского приложения (6 нед.), а UI-инженер работает над созданием дизайна (4 нед.). После того, как разработаны структура клиентского приложения и дизайн, мобильные разработчики приступают к верстке приложения, которая занимает примерно 4 нед. После того, как мобильное приложение сверстано и серверная часть приложения разработана, начинается интеграция частей приложения в единое целое (8 нед.).

Также к работам подключается тестировщик. Для готовой серверной части приложения он разрабатывает и проводит unit-тесты в течение 4 нед., а после этого – выполняет пользовательское тестирование уже интегрированного приложения в течение 4 нед.

Протестированное приложение демонстрируется заказчику, после чего проект сдается. Завершающая фаза проекта длится ориентировочно 2 нед.

Задачи и вопросы:

1. Составьте формализованное описание работ в проекте.
2. Разработайте сетевую модель проекта.
3. Сколько недель занимает проект?
4. Какие работы лежат на критическом пути проекта?

Компания наняла еще одного backend-разработчика, в результате чего время на разработку серверной части приложения сократилось на 3 нед.

5. Какое влияние на длительность проекта оказало данное изменение?

3.4 Метод PERT

Как уже было отмечено при кратком описании методов сетевого планирования, метод PERT отличается от метода критического пути неопределённостью длительности выполнения работ.

Преимуществами такого метода являются реалистичность, возможность определения вероятности выполнения проекта к указанному сроку, а также возможность определения и контроля «некритичных» путей, требующих внимания субъекта управления.

Существует несколько подходов к заданию случайной величины длительности работ. В традиционном (и наиболее распространённом) подходе длительность определяется треугольным распределением, соответственно, для каждой работы определяется три характеристики:

- a – минимальное время выполнения работы;
- m – наиболее вероятное время выполнения работы;
- b – максимальное время выполнения работы.

$$a \leq t \leq b$$

Выполнение вычислений со случайными величинами, заданными треугольным распределением, является затруднительным по причине кусочно-монотонного характера этого распределения. Поэтому на практике после оценки длительности работ на основании трёх приведённых выше характеристик выполняется переход к нормальному распределению, характеристики которого рассчитываются следующим образом:

- ожидаемая (средняя) длительность: $D_{\text{cp}} = \frac{a+4 \times m+b}{6}$;
- среднеквадратичное отклонение: $v = \frac{b-a}{6}$.

Нормальное распределение приоритетно для использования по причине удовлетворения условий центральной предельной теоремы, согласно которой сумма случайных величин стремится к нормальному распределению, если:

1. Количество слагаемых случайных величин достаточно велико.
2. Слагаемые случайные величины независимы (между ними отсутствует или пренебрежительно мала корреляция).
3. Слагаемые случайные величины имеют одинаковый порядок (ни одна из слагаемых случайных величин значимо не превосходит остальные).
4. Слагаемые случайные величины распределены нормально (усиливающий критерий, снижающий требования по п. 1–3).

Именно поэтому для дальнейшей работы со случайными величинами рекомендуется использовать нормальное распределение.

Важно различать вероятностный подход к оценке длительности проекта и детерминированное определение длительности проекта, состоящего из работ с длительностями, определёнными как D_{cp} .

Для этого приведём пример, работы которого приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4 – Работы по проекту с вероятностными длительностями

Индекс	Предшествующие работы	Длительность, нед				
		a	m	b	D	v
A	–	10	10	10	10	0
B	–	2	3	6	3,(3)	0,(6)
C	B	2	6	10	6	1,(3)

Сетевая модель такого проекта представлена на рис. 3.10.

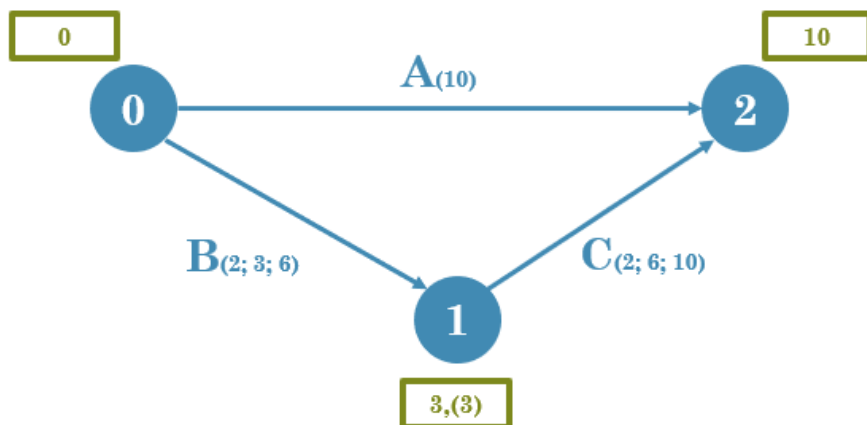


Рисунок 3.10 – Сетевая модель проекта с вероятностными длительностями

Если рассматривать длительности проекта детерминированным способом (учитывать длительность работ с постоянной длительностью D_{cp}), то критический путь будет состоять из одной работы А (так как её длительность превышает сумму длительностей работ В и С). Соответственно, длительность проекта в 100% случаев будет равна 10 неделям.

Однако, если взглянуть на распределение длительности проекта в случае вероятностного подхода (рис. 3.11), становится понятно, что длительность проекта в 10 недель достигается только в 67% случаев.

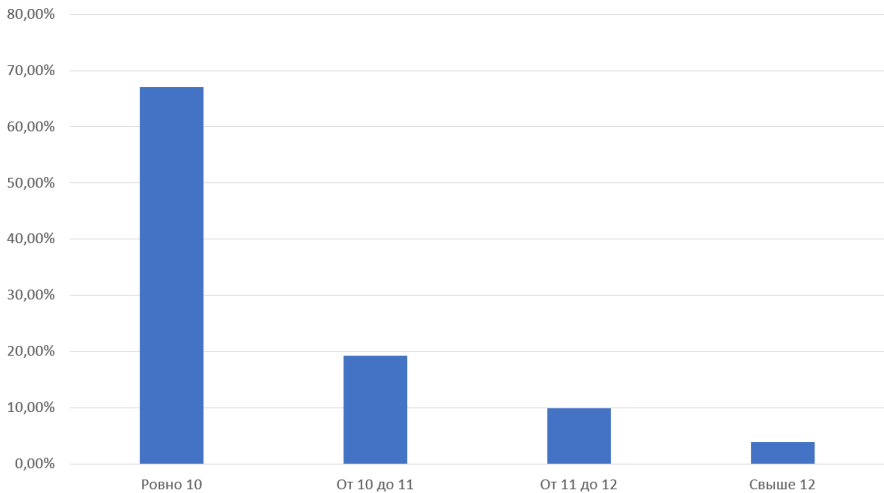


Рисунок 3.11 – Распределение длительности проекта

Соответственно, в 33% случаев идёт превышение срока выполнения проекта в 10 недель. При этом в 4% случаев превышение будет более 2 недель. Именно поэтому важно учитывать вариабельность величин длительностей работ проекта.

Учёт вариабельности работ возможен двумя принципиальными способами:

1. Аналитическим, предполагающим использование правил сложения случайных величин. В действительности может применяться только для проектов с линейной сетевой моделью, так как наличие разветвлений предполагает использование условий в процессе решения, что значительно усложняет вычисления.

2. Имитационным (с применением метода Монте-Карло), предполагающим многократную симуляцию проекта с различными значениями случайных величин и последующий анализ результатов.

Имитационный способ вероятностного сетевого планирования включает в себя следующие этапы:

1. Разработка сценария проекта в соответствии с сетевой моделью проекта, включая подбор распределений для задания длительностей всех работ.

2. Генерация случайных величин длительностей работ проекта для каждой симуляции.

3. Определение результирующих показателей проекта для каждой симуляции. Может включать в себя как общепринятые показатели (например, непосредственно длительность проекта), так и специализированные для конкретной задачи (например, бинарный показатель, соответствующий факту завершения проекта до определённого срока).

4. Статистическая обработка результатов по всем симуляциям. Может включать в себя нахождение средних показателей, величин разброса показателей, распределений вероятностей и прочих статистических показателей.

Простейшим способом реализации имитационного подхода к вероятностному сетевому планированию является реализация вычислений в любых электронных таблицах, поддерживающих функцию генерации случайных чисел, к числу которых относится и MS Excel.

Исходными данными для выполнения работы является перечень работ по проекту с указанием их взаимозависимостей, а также с указанием средней длительности и среднеквадратичного отклонения длительности (последнее – только для вероятностных работ). Пример такого перечня приведён в табл. 3.4.

Для начала необходимо создать первую симуляцию проекта на основе данных о его длительности (рис. 3.12).

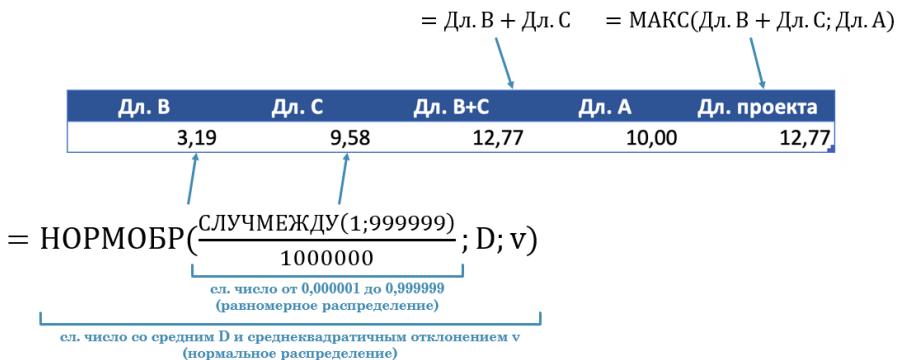


Рисунок 3.12 – Первая симуляция проекта для определения его длительности

Для работ с вероятностной длительностью с помощью генерации случайных чисел определяется длительность для конкретной итерации. Для этого в MS Excel используется функция СЛУЧМЕЖДУ(), генерирующая случайное число в заданном диапазоне по равномерному распределению, а

также функция НОРМОБР(), генерирующая случайное число по нормальному распределению с заданными средним и среднеквадратичным отклонением.

Далее на основании сгенерированных длительностей работ выполняются вычисления промежуточных веток выполнения проекта. Так, в примере на рис. 3.12 длительность ветки ВС вычисляется как сумма соответствующих работ, а длительность проекта – как максимальная величина из длительностей двух веток проекта.

После этого необходимо создать множественные симуляции проекта на основе базовой. Для этого ячейки первой симуляции растягиваются вниз, при этом важно зафиксировать ячейки с константами (например, детерминированные длительности работ, а также среднее значение и среднеквадратичное отклонение длительности вероятностных работ). Пример создания множественных симуляций приведён на рис. 3.13.

Дл. В	Дл. С	Дл. В+С	Дл. А	Дл. проекта
3,34	6,65	10,00	10,00	10,00
3,65	9,00	12,65	10,00	12,65
3,34	7,62	10,96	10,00	10,96
2,86	7,56	10,42	10,00	10,42
2,55	7,06	9,61	10,00	10,00
3,33	3,95	7,28	10,00	10,00
3,51	4,98	8,49	10,00	10,00
3,35	3,78	7,13	10,00	10,00
3,55	4,40	7,95	10,00	10,00
3,49	6,37	9,86	10,00	10,00
3,53	0,98	4,51	10,00	10,00
2,94	7,47	10,41	10,00	10,41
3,17	0,86	4,04	10,00	10,00
3,88	4,07	7,95	10,00	10,00
3,14	5,80	8,95	10,00	10,00
2,95	5,31	8,26	10,00	10,00
3,20	7,86	11,05	10,00	11,05
3,27	4,90	8,17	10,00	10,00
3,60	6,99	10,59	10,00	10,59
3,41	8,09	11,50	10,00	11,50
3,45	7,64	11,10	10,00	11,10

Рисунок 3.13 – Множественные симуляции проекта

На рис. 3.13 каждой строке соответствует отдельная симуляция проекта, для которой используется собственный набор случайных чисел. Количество создаваемых симуляций зависит от требований к точности итогового результата.

Следующим шагом является статистическая обработка результатов. Приведённые на рис. 3.13 симуляции в качестве результата имеют длительность проекта. Анализируя столбец с длительностями проектов в разных симуляциях, можно не только вычислить среднюю длительность проекта, но и построить распределение длительностей проекта (пример приведён на рис. 3.11).

Ниже приводится задание на закрепление этапности выполнения сетевого планирования с применением метода Монте-Карло.

Задание 3.3. Симуляция проекта методом Монте-Карло

Сетевая модель проекта представлена на рис. 3.14.

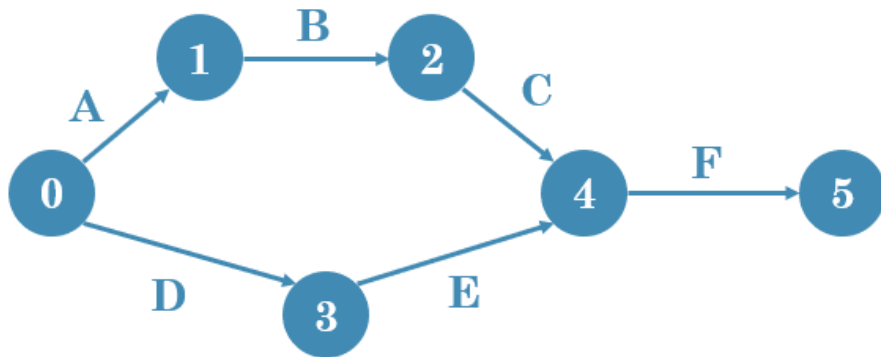


Рисунок 3.14 – Сетевая модель проекта для задания 3.3

Длительности работ приведены в табл. 3.5.

Таблица 3.5 – Длительности работ для задания 3.3

Длительности работ, нед														
A	B			C	D			E			F			D1
	a	m	b		a	m	b	a	m	b	a	m	b	
7	9	11	14	8	5	10	17	9	14	19	5	7	9	33

Задачи и вопросы:

1. Определите среднюю длительность проекта (в неделях, округление до 0,01).
2. Определите среднеквадратичное отклонение длительности проекта (в неделях, округление до 0,01).
3. Найдите вероятность того, что путь D-E-F будет критическим (в %, округление до 0,1%).
4. Найдите вероятность того, что проект уложится в срок D1 недель (в %, округление до 0,1%).
5. Найдите вероятность того, что проект опоздает более чем на 5 недель (в %, округление до 0,1%).

Задание 3.4. Разработка мобильного приложения

Компания занимается разработкой мобильных приложений на заказ. Ниже представлено упрощенное описание их рабочих процессов.

Все начинается с этапа предварительных переговоров с заказчиком. Ориентировочно, данный этап длится 2 нед. После этого техническим специалистам компании требуется примерно (1;2;4) нед., чтобы разработать техническое предложение, а экономистам – 2 нед., чтобы составить коммерческое предложение. Когда оба документа готовы, начинается этап их согласования с заказчиком, который длится примерно 4 нед.

Когда согласование заказчика получено, системный архитектор приступает к разработке архитектуры системы (3 нед.), а руководитель проекта - к подбору сотрудников в команду внутри компании (2;4;6 нед.). Когда оба эти процесса завершены, команда приступает к разработке приложения.

Backend-разработчики занимаются созданием серверной части приложения (6;12;18 нед.), мобильные разработчики работают над структурой

клиентского приложения (6 нед.), а UI-инженер работает над созданием дизайна (4 нед.). После того, как разработаны структура клиентского приложения и дизайн, мобильные разработчики приступают к верстке приложения, которая занимает примерно 4 нед. После того, как мобильное приложение сверстано и серверная часть приложения разработана, начинается интеграция частей приложения в единое целое (8 нед.).

Также к работам подключается тестировщик. Для готовой серверной части приложения он разрабатывает и проводит unit-тесты в течение 4 нед., а после этого – выполняет пользовательское тестирование уже интегрированного приложения в течение (3;4;6) нед.

Протестированное приложение демонстрируется заказчику, после чего проект сдается. Завершающая фаза проекта длится ориентировочно 2 нед.

Задачи и вопросы:

1. Определите среднюю длительность проекта.
2. Определите среднее отклонение длительности проекта.
3. Постройте распределение вероятности длительности проекта.
4. Найдите вероятность того, что проект завершится быстрее средней длительности.
5. Найдите вероятность того, что следующие работы лежат на критическом пути:
 - подготовка коммерческого предложения;
 - согласование коммерческого и технического предложений с заказчиком;
 - создание дизайна приложения;
 - unit-тестирование.

4 ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

Для подготовки к экзамену по дисциплине «Математические модели технических объектов управления» (модуль «Исследование операций») предлагается следующий набор тем.

1. Понятие исследования операций. Связь исследования операций с другими дисциплинами. Разделы исследования операций. Этапы исследования операций. Операция. Примеры операций.

2. Модели. Области применения моделей. Особенности изучения организационно-технических систем. Их сложность.

3. Линейная оптимизация. Особенности решаемых задач линейной оптимизации. Ключевые составляющие при постановке задачи линейной оптимизации. Способы решения задач линейной оптимизации.

4. Графический способ решения задач линейной оптимизации. Алгоритм решения.

5. Симплекс-метод для решения задач линейной оптимизации. Алгоритм решения.

6. Сетевые модели. Структурные элементы сетевой модели. Виды ребер. Основные определения.

7. Сетевое планирование. Цели. Основные виды. Этапы. Нотация. Основные определения.

8. Метод критического пути. Определение критического пути. Буферы. Алгоритм решения. Метод критической цепи.

9. Метод PERT. Отличия от метода критического пути. Преимущества и недостатки. Способы решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе изучения исследования операций в управлении инновационными процессами был проведён обзор основных методов и инструментов данной научной дисциплины, которые могут быть эффективно применены в управлении инновационными процессами. На страницах учебного пособия изложены возможности математического моделирования, оптимизации и анализа данных, которые помогают руководителям и управленцам принимать обоснованные решения и достигать конкурентного преимущества в сложных организационно-технических системах.

Исследование операций является неотъемлемой частью эффективного и результативного управления инновационными процессами. Оно позволяет систематизировать и анализировать данные, прогнозировать и моделировать различные сценарии принятия управленческих решений, а также находить оптимальные конфигурации систем для достижения поставленных целей в области инноваций.

Учебное пособие «Исследование операций в управлении инновационными процессами» представляет собой ценный ресурс для всех, кто заинтересован в улучшении эффективности и результативности своей работы в области управления инновациями. Знания и навыки, полученные в результате изучения данного пособия, помогут в достижении успеха в управлении инновационными процессами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинцяк А.М. Модели и методы управления научно-исследовательскими проектами с применением инструментов теории игр: диссертация кандидата технических наук: 2.3.4. – Санкт-Петербург, 2023. – 217 с.
2. Цифровое моделирование социотехнических и социально-экономических систем: монография / А.М. Гинцяк, Ж.В. Бурлуцкая, Д.Э. Федяевская [и др.] – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. – 164 с.
3. Модельное мышление. Как анализировать сложные явления с помощью математических моделей / Скотт Пейдж ; пер. с англ. Н. Яцюк ; [науч. ред. И. Красиков, А. Минько]. – М. : Манн, Иванов и Фербер, 2020. – 528 с.
4. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия. / М.: Прогресс, 1971. 340 с.
5. Редько С.Г. Моделирование в управлении инновациями: учебное пособие / С. Г. Редько; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. – Санкт-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2008.
6. Поспелов К.Н. Подходы к моделированию человеческого поведения в социотехнических и социально-экономических системах // В сборнике: Системный анализ в проектировании и управлении. Сборник научных трудов XXVI Международной научно-практической конференции. В 3-х частях. Санкт-Петербург, 2023. С. 207–216.
7. Гордеев Э.Н. Элементы исследования операций: учебное пособие / Э.Н. Гордеев. – Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. – 59 с.
8. Болсуновская М., Гинцяк А., Бурлуцкая Ж., Петряева А., Зубкова Д., Успенский М., Селедцова И. Возможности применения гибридного подхода в моделировании социально-экономических и социотехнических систем // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2022. № 3. С. 73–86. DOI: 10.17308/sait/1995-5499/2022/3/73-86.
9. Gintciak, A., Bolsunovskaya, M., Burlutskaya, Z., Petryaeva, A. Hybrid Simulation as a Key Tool for Socio-economic Systems Modeling // Lecture

Notes in Networks and Systems. 2022. № 442 LNNS. P. 262-272. DOI: 10.1007/978-3-030-98832-6_23.

10. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.: ил.