Министерство образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

МАТЕМАТИКА

Методические указания и задания по высшей математике к выполнению лабораторных работ во II семестре

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2023

Рецензент:
Доктор технических наук, профессор СПбПУ В.И. Антонов

Автор:
доцент Е.С. Единова

Математика. Методические указания и задания по высшей математике к выполнению лабораторных работ во II семестре: учебное пособие / Е.С. Единова – СПб.: Издательство Политехн. ун-та, 2023. – 20с. – (Математика в политехническом университете).

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов высших учебных заведений технических и экономических направлений, изучающих дисциплину «Высшая математика».

Пособие состоит из двух частей.

В первой части излагаются наиболее употребительные формулы приближенного вычисления определенного интеграла – формула прямоугольников, формула трапеций, формула парабол (формула Симпсона), основанные на геометрическом смысле определенного интеграла, рассмотрены механические приложения определенного интеграла, показано правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области и применение дифференциала к приближенным вычислениям, а также разобраны типовые примеры с подробными решениями.

Во второй части приведены задания для самостоятельного закрепления материала.

1. Приближенное вычисление определенных интегралов

В соответствии с геометрическим смыслом определенного интеграла

$$I_0 = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

вычисление его значения I_0 можно свести к нахождению площади криволинейной трапеции aM_0M_nb (рис.1).

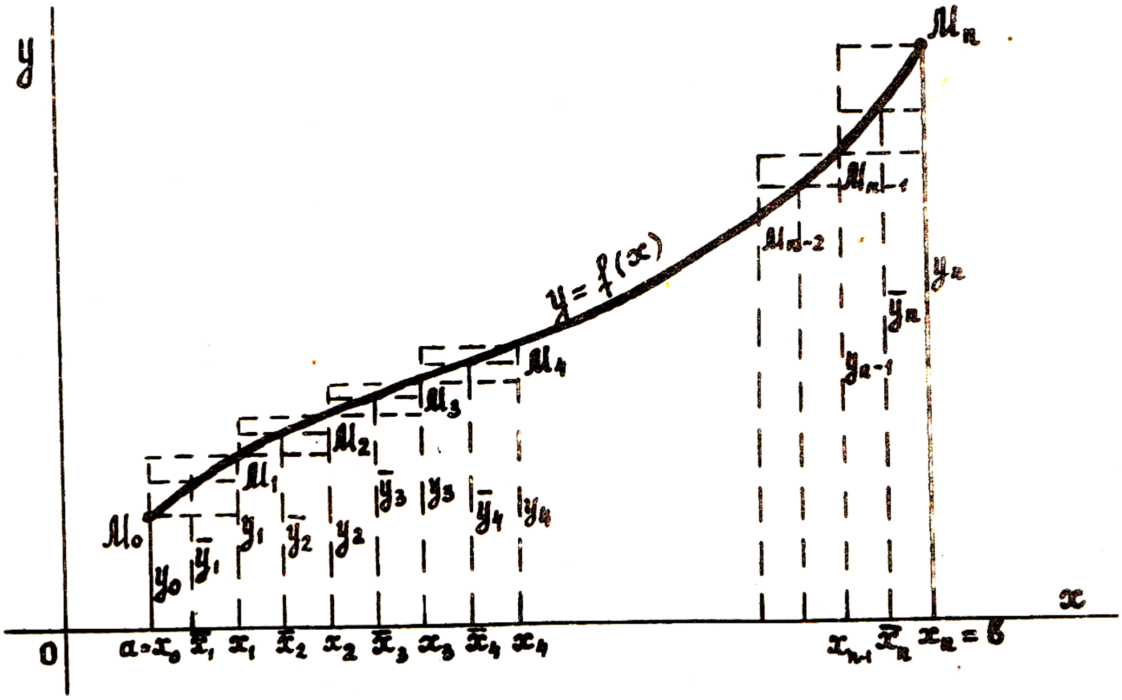


Рис.1

Если отрезок $[a, b]$ точками деления $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ разбит на n равных частей, то, как видно из рис.1, приближенное значение интеграла (1) может быть вычислено по так называемым формулам прямоугольников

$$I_0 \approx I_- = \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right), \qquad (2)$$

$$I_0 \approx I_+ = \frac{b-a}{n}\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right), \qquad (3)$$

$$I_0 \approx \bar{I} = \frac{b-a}{n}\left(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \ldots + \bar{y}_n\right), \qquad (4)$$

где $\bar{y}_n = f\left(\bar{x}_k\right)$, $\bar{x}_k = \frac{1}{2}\left(x_k + x_{k-1}\right)$, $k = 1,2,\ldots,n$.

Легко видеть, что $\bar{x}_k$ – абсциссы середин частичных интервалов.

Если на отрезке $[a, b]$ функция возрастает (этот случай как раз изображен на рис.1), то число I_- – является приближенным значением I_0 с недостатком, число I_+ – с избытком, а число $\bar{I}$ заключено между I_- и I_+.

Пример 1. Вычислить по формулам прямоугольников приближенное значение интеграла

$$\int_0^{10} x\sqrt{33+\frac{x^2}{33}}dx = I_0, \qquad (5)$$

разделив отрезок $[0,10]$ на десять равных частей.

Решение.

Составляем таблицу значений подынтегральной функции в точках x_k и $\bar{x}_k$.

Для удобства дальнейшего использования в таблице 1 расположены в отдельных столбцах:

1) значения y_0 и y_{10} (четвертый столбец),
2) остальные ординаты с четными индексами (пятый столбец),
3) ординаты с нечетными индексами (шестой столбец).

В последнем столбце указаны значения ординат $\bar{y}_k$ в серединах $\bar{x}_k$ частичных интервалов, а в последней строке – соответствующие суммы.

Таблица 1.

K	x_k	$\bar{x}_k$	y_0, y_{10}	y_{2k}	y_{2k-1}	$\bar{y}_k$
0	0	–	0	–	–	–
1	1	0,5	–	–	5,7472	2,8726
2	2	1,5	–	11,5102	–	8,6257
3	3	2,5	–	–	17,3047	14,4026
4	4	3,5	–	23,1464	–	20,2187
5	5	4,5	–	–	29,0506	26,0878
6	6	5,5	–	35,0324	–	32,0309
7	7	6,5	–	–	41,1067	38,0571
8	8	7,5	–	47,2876	–	44,1829
9	9	8,5	–	–	53,5893	50,4225
10	10	9,5	60,0252	–	–	56,7897
$\sum y_i$	–	–	–	$S_{2k}=116{,}9766$	$S_{2k+1}=146{,}7985$	293,6906

В соответствии с формулами (2), (3) и (4) имеем:

$$I_- = y_0 + S_{2k} + S_{2k-1} = 0 + 116{,}9766 + 146{,}7985 = 263{,}7751$$
$$I_+ = S_{2k-1} + S_{2k} + y_{10} = 146{,}7985 + 116{,}9766 + 60{,}0252 = 323{,}8003$$
$$I = 293{,}6906.$$

Приближенное значение интеграла (1) может быть получено также с помощью так называемой формулы трапеций

$$I_0 \approx I_T = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right) = \frac{1}{2}(I_- + I_+) \qquad (6)$$

Она соответствует замене кривой $y = f(x)$ ломаной $M_0M_1M_2..M_{n-1}M_n$ (Рис.1).

Пример 2. Оценить приближенное значение интеграла (5) по формуле (6).

Решение. Воспользовавшись таблицей 1, имеем:

$$I_T = \frac{1}{2}(y_0 + y_{10}) + S_{2k-1} + S_{2k} = \frac{1}{2}(0 + 60{,}0252) + 146{,}7985 + 116{,}9766 = 293{,}7877 .$$

Таблица 1 особенно удобна при оценке интеграла I_0 с помощью формулы Симпсона $(n = 2k)$

$$I_0 \approx I_c = \frac{b-a}{6k}\left[y_0 + y_{2k} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2k-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2k-1})\right] = \\ = \frac{b-a}{6k}(y_0 + y_{2k} + 2S_{2k} + 4S_{2k-1}) \qquad (7)$$

Эта формула соответствует замене заданной кривой $y = f(x)$ (см.рис.1) дугами квадратных парабол с осями симметрии, параллельными оси координат, и проходящими последовательно через точки

$$M_0M_1M_2;\ M_2M_3M_4;\ \ldots;\ M_{n-2}M_{n-1}M_n .$$

Пример 3.
Оценить приближенное значение интеграла (5) по формуле Симпсона (7).

Решение.

Имеем: $I_c = \frac{10-0}{6 \cdot 5}(0 + 60{,}0252 + 2 \cdot 116{,}9766 + 4 \cdot 146{,}7985) = 293{,}7241$.

Легко убедиться, что точное значение интеграла (5) будет

$$I_0 = 11\left(33 + \frac{x^2}{33}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{10} = 293{,}7253.$$

Для сравнения результаты вычислений сведем в таблицу:

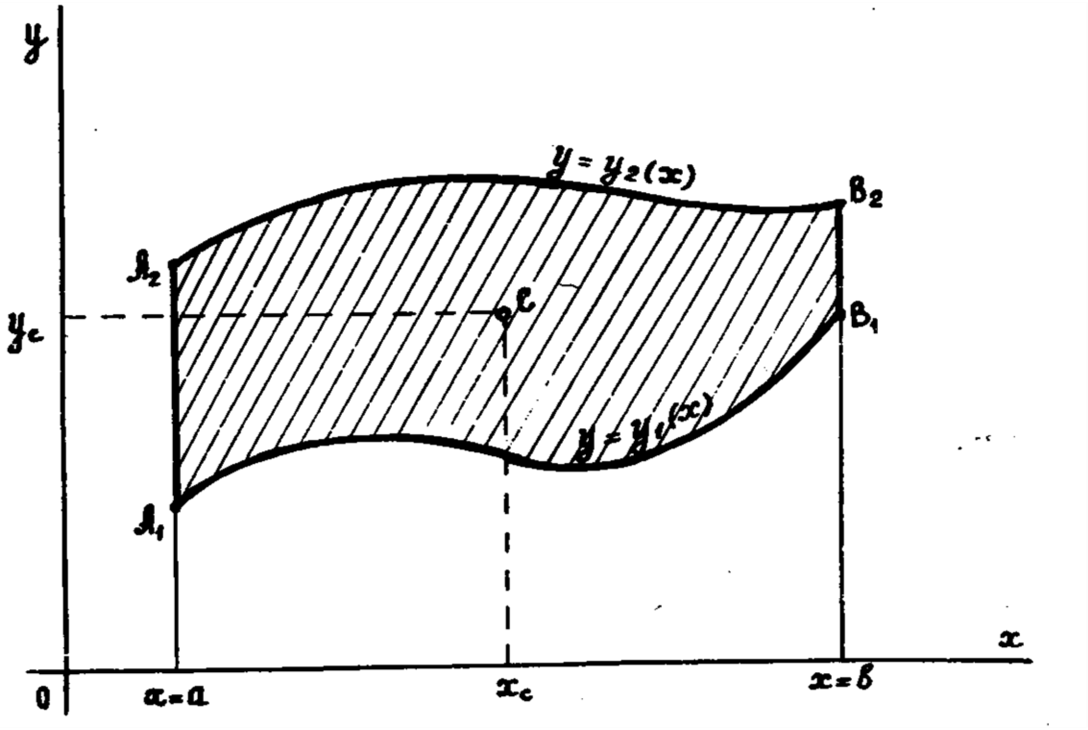
Таблица 2

I_-	I_+	I_T	$\bar{I}$	I_c	I_0
263,7751	323,8003	293,7877	293,6906	293,7241	293,7253

Как следует из табл. 2, формула Симпсона (7) оказалась наиболее точной. Несколько хуже определяют значение интеграла I_0 формула трапеций (6) и формула прямоугольников (4). Еще менее точными оказались формулы (2) и (3). Такая закономерность обычно и наблюдается в практических задачах, тем не менее она имеет место не во всех случаях. Более того, при соответствующем подборе функции $f(x)$ наиболее точной может оказаться любая из приближенных формул (2), (3), (4), (6), (7).

2. Нахождение центра тяжести плоской фигуры

Координаты $x_c,\ y_c$ центра тяжести C (Рис.2):



С одной плоской фигуры $A_1A_2B_2B_1$ (Рис.2), заданной уравнением

$$\begin{cases} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), \end{cases}$$

координаты центра тяжести можно вычислить по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{S}, \quad y_c = \frac{S_x}{S}, \tag{8}$$

где

$$S = \int_a^b \left[y_2(x) - y_1(x)\right]dx \quad - \text{ площадь этой фигуры,} \tag{9}$$

$$S_y = \int_a^b \left[y_2(x) - y_1(x)\right]x dx, \quad S_x = \frac{1}{2}\int_a^b \left[y_2^2(x) - y_1^2(x)\right]dx \tag{10}$$

статические моменты той же фигуры относительно осей *oy* и *ox* соответственно.

Формулы остаются справедливыми и в том случае, если отрезки A_1A_2 и B_1B_2 вырождаются в точку (совместно или порознь).

Пример 4. Определить центр тяжести однородной плоской фигуры (Рис.3):

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le 1 - \dfrac{x^2}{4} \end{cases}$$

Решение.

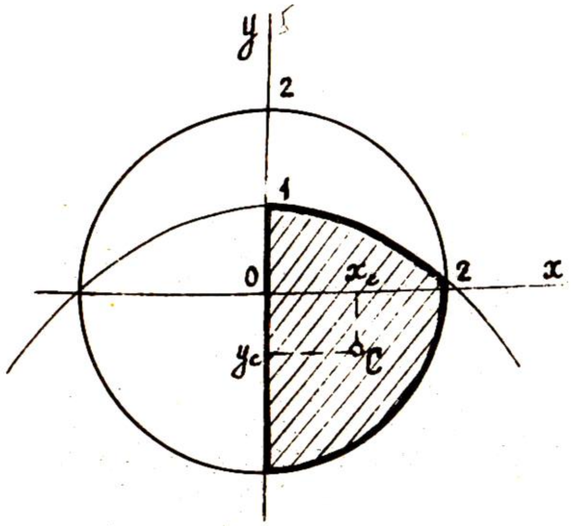


Рис. 3

Имеем:

$$S = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4} + \sqrt{4-x^2}\right) dx = \frac{4+3\pi}{3}$$

$$S_y = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4} + \sqrt{4-x^2}\right) x dx = \frac{11}{3};$$

$$S_x = \int_0^2 \left[\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 - \left(4 - x^2\right)\right] dx = -\frac{32}{15}.$$

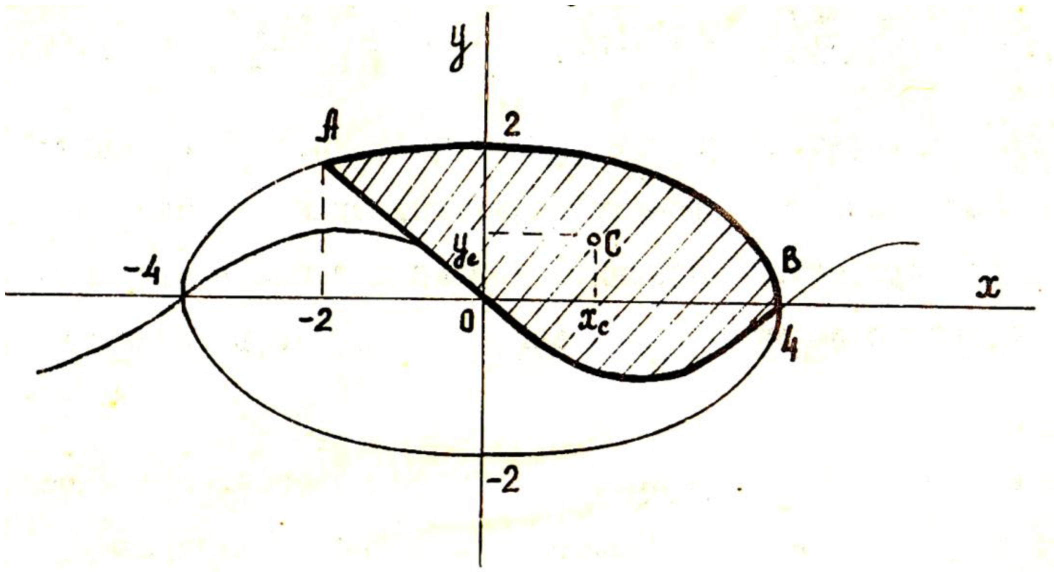
$$x_c = \frac{11}{4+3\pi} = 0{,}8194; \quad y_c = -\frac{32}{5(4+3\pi)} = -0{,}4767.$$

Если хотя бы одна из кривых $y_1(x), y_2(x)$ задается на отрезке $[a, b]$ не одним, а несколькими аналитическими выражениями, то промежуток интегрирования (a, b) следует разбить на части, а интегралы (9) и (10) представить в виде суммы соответствующих интегралов.

Пример 5. Найдем центр тяжести фигуры (Рис.4):

$$\begin{cases} -2 \le x \le 4, \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{16-x^2} = y_2(x) \ge y \ge y_1(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x, & -2 \le x \le 0 \\ -\sin\dfrac{\pi}{4}x, & 0 \le x \le 4 \end{cases} \end{cases}$$

Рис. 4



Здесь как раз тот случай, когда отрезки A_1A_2 и B_1B_2 (см.рис.2) вырождаются в точки A и B соответственно.

Каждый из интегралов (9), (10) разбиваем на два, первый из них вычисляем по отрезку $[-2, 0]$, а другой по отрезку $[0, 4]$:

$$S = \int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)dx + \int_{0}^{4}\left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}+\sin\frac{\pi x}{4}\right)dx = \frac{8}{3\pi}\left(3+\pi^2\right);$$

$$S_y = \int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)xdx + \int_{0}^{4}\left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}+\sin\frac{\pi}{4}x\right)xdx = \frac{16}{3\pi}\left(3+\pi\sqrt{3}\right);$$

$$S_x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{4}\left(16-x^2\right)-\frac{3}{4}x^2\right)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{4}\left(\frac{1}{4}\left(16-x^2\right)-\sin^2\frac{\pi}{4}x\right)dx = 7.$$

По формулам (8) получим:

$$x_c = \frac{2\left(3+\pi\sqrt{3}\right)}{3+\pi^2} = 1{,}3118; \quad y_c = -\frac{21\pi}{8\left(3+\pi^2\right)} = 0{,}6408.$$

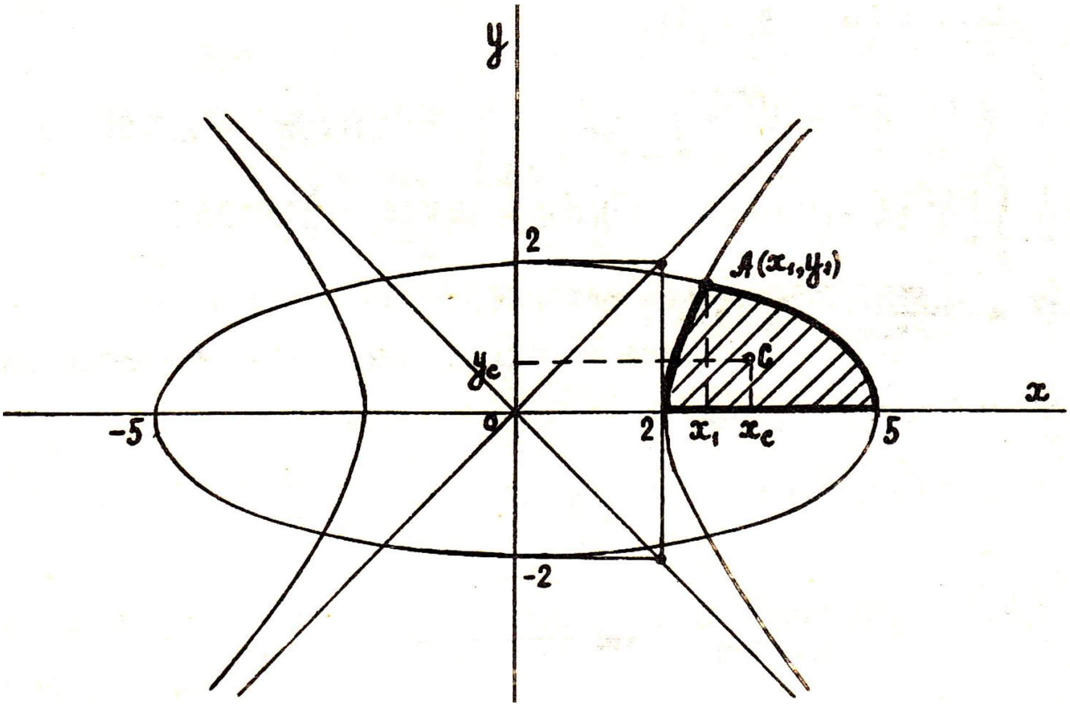
Чтобы не терять точности вычислений, не следует пользоваться калькулятором в промежуточных выкладках. Вычисления на калькуляторе нужно выполнять только для получения «инженерного числа» по формуле (8), как это сделано в примерах 4 и 5.

В зависимости от расположения фигуры по отношению к осям координат может оказаться целесообразно уравнения кривых разрешить относительно x.

В таких случаях в формулах (9) и (10) для S, S_y, S_x следует поменять ролями x и y.

Пример 6. При нахождении центра тяжести фигуры (Рис.5):

$$\begin{cases} 2 \le x \le 5, \\ 0 \le y \le y_2(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4}, & 2 \le x \le x_1 = 10\sqrt{\dfrac{2}{29}} \\ \dfrac{2}{5}\sqrt{25 - x^2}, & x_1 \le x \le 5 \end{cases} \end{cases}$$



целесообразно систему неравенств преобразовать к виду:

$$\begin{cases} 0 \le y \le y_1 = 2\sqrt{\dfrac{21}{29}} \\ \sqrt{4 + y^2} = x_1(y) \le x \le x_2(y) = \dfrac{5}{2}\sqrt{4 - y^2} \end{cases}$$

После этого величины S, S_y, S_x вычисляются по обращенным формулам:

$$S = \int_0^{y_1} [x_2(y) - x_1(y)]dy,$$

$$S_y = \frac{1}{2}\int_0^{y_1} \left[x_2^2(y) - x_1^2(y)\right]dy, \quad S_x = \frac{1}{2}\int_0^{y_1} \left[x_2(y) - x_1(y)\right]ydy.$$

Окончательно получим:

$$S = \int_0^{y_1} \left(\frac{5}{2}\sqrt{4 - y^2} - \sqrt{4 + y^2}\right)dy = 5\arcsin\sqrt{\frac{21}{29}} - \ln\left(\frac{71 + 10\sqrt{42}}{29}\right) = 3.5466;$$

$$S_x = \int_0^{y_1} \left(\frac{5}{2}\sqrt{4 - y^2} - \sqrt{4 + y^2}\right)ydy = \frac{4}{3}\left(7 - 20\sqrt{\frac{2}{29}}\right) = 2{,}3303;$$

$$S_y = \frac{1}{2}\int\limits_0^{y_1}\left[\frac{25}{4}\left(4-y^2\right)-\left(4+y^2\right)\right]dy = 14\sqrt{\frac{21}{29}} = 11{,}9135.$$

$$x_c = \frac{S_y}{S} = \frac{11{,}9135}{3{,}5466} = 3{,}3590; \qquad y_c = \frac{S_x}{S} = \frac{2{,}3303}{3{,}5466} = 0{,}6570.$$

3. Глобальный экстремум

В ряде задач требуется найти глобальный экстремум, т.е. наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в некоторой замкнутой области D.

Для этого надо найти все локальные минимумы и максимумы этой функции внутри области D, а также наибольшее и наименьшее ее значения на границе области, и затем выбрать среди всех этих значений наибольшее и наименьшее.

Локальные максимумы и минимумы дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ находятся следующим образом. Находим стационарные точки внутри области D. При этом нет надобности вычислять вторые производные и использовать достаточные условия экстремума. Поскольку все экстремумы функции $z = f(x, y)$ находятся среди ее значений в стационарных точках, достаточно узнать значения функции z во всех стационарных точках и среди них выбрать наибольшее и наименьшее значения. Как правило, граница области D разбивается на ряд участков, каждый из которых определяется одним из уравнений

$$y = \psi(x) \quad (a \le x \le b)$$
$$x = \varphi(y) \quad (c \le y \le d).$$

Поэтому вдоль такого участка границы функция превращается в функцию только от одного x (или y)

$$z = f(x, \psi(x)) \text{ или } z = f(\varphi(y), y).$$

Пример 7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$$

в замкнутом треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $2x + 3y - 6 = 0$.

Решение. Для нахождения стационарных точек на плоскости приравниваем нулю частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y - 6 = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x - 2y - 2 = 0,$$

откуда $x = y = 1$.

Значение функции в найденной стационарной точке

$$z = z(1{,}1) = 1 + 4 - 1 - 6 - 2 = -4, \text{ то есть } z(1,\ 1) - 4.$$

Рассмотрим значения функции на границе области (Рис.6).

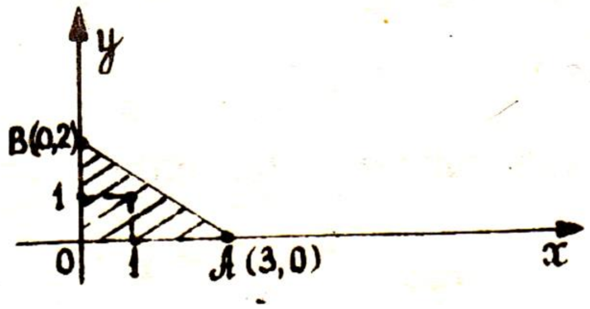


Рис.6

Границу нашей области составляют:

1) отрезок OA оси Ox, определяемый неравенствами $0 \le x \le 3$;
2) отрезок OB оси Oy, определяемый неравенствами $0 \le y \le 2$;
3) отрезок AB прямой $x = 3 - \dfrac{3}{2}y$, определяемый неравенствами $0 \le y \le 2$.

1) На первом из этих отрезков $y = 0$, а следовательно

$$z = z(x, 0) = x^2 - 6x.$$

Для нахождения экстремальных значений функции на этом промежутке мы рассмотрим уравнение

$$\frac{dz(x, 0)}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad 2x - 6 = 0, \quad \text{что дает } x = 3.$$

Функция $z(x, 0)$ непрерывна на замкнутом интервале $0 \le x \le 3$. Поэтому она должна принимать на нем свои наибольшее и наименьшее значения. Эти значения она может принимать внутри интервала (в точках стационарности) или на границах.

Внутри интервала, т.е. при $0 < x < 3$, функция $z(x, 0)$ не имеет экстремумов.

Поэтому нам остается рассмотреть значения

$$z(0, 0) = 0, \quad z(3, 0) = -9.$$

Первое оказывается наибольшим, второе наименьшим.

2) На отрезке OB $x = 0$ и $z = z(0, y) = y^2 - 2y$.

Корень уравнения

$$\frac{dz(0, y)}{dy} = 0 \quad \text{или} \quad 2y - 2 = 0.$$

Значение $y = -1$ лежит вне нашего интервала; внутри интервала нет точек стационарности функции $z(0, y)$.

Поэтому на отрезке $0 \le y \le 2$ наибольшее значение $z(0, 0) = 0$, наименьшее $z(0, 2) = -8$.

3) На отрезке AB $x = 3 - \dfrac{3}{2}y$ и функция $z(x(y), y) = -9 + 10y - \dfrac{19}{4}y^2$; $0 \le y \le 2$.

Корнем уравнения

$$\left(-9+10y-\frac{19}{4}y^2\right)'=10-\frac{19}{2}y=0 \quad \text{является значение } y=\frac{20}{19}.$$

При $y=\frac{20}{19}$ рассматриваемая функция имеет значение равное $-\frac{71}{19}$, т.е. $z=-\frac{71}{19}$. Далее $z(3,0)=-9$, $z(0,2)=-8$.

Таким образом, значение $z=-\frac{71}{19}$ является наибольшим на отрезке *AB*, значение $z=-9$ наименьшим.

Сравнивая значения $z(x,y)$ на отрезке *OA*, *OB*, *AB* и в точке (1, 1), мы приходим к выводу, что наибольшее значение в данном замкнутом треугольнике функция принимает в точке (0, 0), а наименьшее – в точке (3, 0).

При этом $z(0,0)=0$, $z(3,0)=-9$.

4. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Приращение функции $\Delta z(x,y)=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$ ее полный дифференциал $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ связаны равенством $\Delta z=dz+\varepsilon$, где ε – бесконечно малая более высокого порядка малости по сравнению с $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

При достаточно малых приращениях аргументов можно величиной ε пренебречь и считать $\Delta z\approx dz$. Это приводит к приближенному равенству

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx f(x,y)+d\,f(x,y)=f(x,y)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y.$$

Этой формулой можно пользоваться для приближенного подсчета значения $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ по известным значениям функции $f(x,y)$ и ее частных производных в данной точке $P(x,y)$.

Пример 8. Вычислить приближенное значение числа $(1{,}04)^{2{,}03}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x,y)=x^y$.

Данное число есть приращенное значение этой функции в точке $P_0(1;2)$ при $\Delta x=0{,}04$, $\Delta y=0{,}03$.

Дифференциал данной функции

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y=yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\Delta y.$$

Его значение в точке $P_0(1;\,2)$ при данных приращениях

$$(df) = 2\cdot 1\cdot 0{,}04 + 1\cdot \ln 1\cdot 0{,}03 = 0{,}08,$$

поэтому по формуле

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) \approx [f(x,y)]\big|_{P_0} + [df(x,y)]\big|_{P_0}$$

имеем

$$f(1{,}04;\ 2{,}03) \approx 1 + 0{,}8 = 1{,}08.$$

Пример 9. Вычислить приближенно число $u = \ln\left[2\cdot(0{,}97)^{2{,}02} - \operatorname{tg} 44^\circ\right]$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$u(x,\ y,\ z) = \ln\left[2\cdot x^y - \operatorname{tg} z\right].$$

Искомое число u можно считать нарощенным значением этой функции при

$$x = 0{,}97, \qquad y = 2{,}02, \qquad z = 44^\circ.$$

$$x_0 = 1, \qquad y_0 = 2, \qquad z_0 = 45^\circ.$$

$$\Delta x = -0{,}03; \qquad \Delta y = 0{,}02; \qquad \Delta z = -1^\circ = -\frac{\pi}{180}.$$

Дифференциал данной функции

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z = \frac{2\cdot yx^{y-1}}{2x^y - \operatorname{tg} z}\Delta x + \frac{2x^y \ln x}{2x^y - \operatorname{tg} z}\Delta y + \frac{1}{\left(2x^y - \operatorname{tg} z\right)}\left(\frac{-1}{\cos^2 z}\right)\Delta z.$$

Его значение в точке $M_0\left(1;\,2;\,\frac{\pi}{4}\right)$, при данных приращениях

$$(du)_{M_0} = \frac{2\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1^2 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}(-0{,}03) + \frac{2\cdot 1^2\cdot \ln 1}{2\cdot 1^2 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}\cdot 0{,}02 + \frac{1}{\left(2\cdot 1^2 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)}\left(\frac{-1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right) =$$

$$= 4\cdot(-0{,}03) + 0\cdot 0{,}02 + (-2)\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right) = -0{,}12 + \frac{\pi}{90} \approx -0{,}12 + 0{,}035 = -0{,}085.$$

Поэтому по формуле

$$u = u(0{,}97;\ 2{,}02;\ 44^\circ) \approx u\left(1,\ 2,\ \frac{\pi}{4}\right) + (du)_{|M_0}$$

имеем

$$\ln\left[2\cdot(0{,}97)^{2{,}02} - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180}\right)\right] \approx \ln\left[2\cdot 1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right] + (du)_{|M_0} \approx 0 + (-0{,}085) = -0{,}085.$$

Варианты заданий.

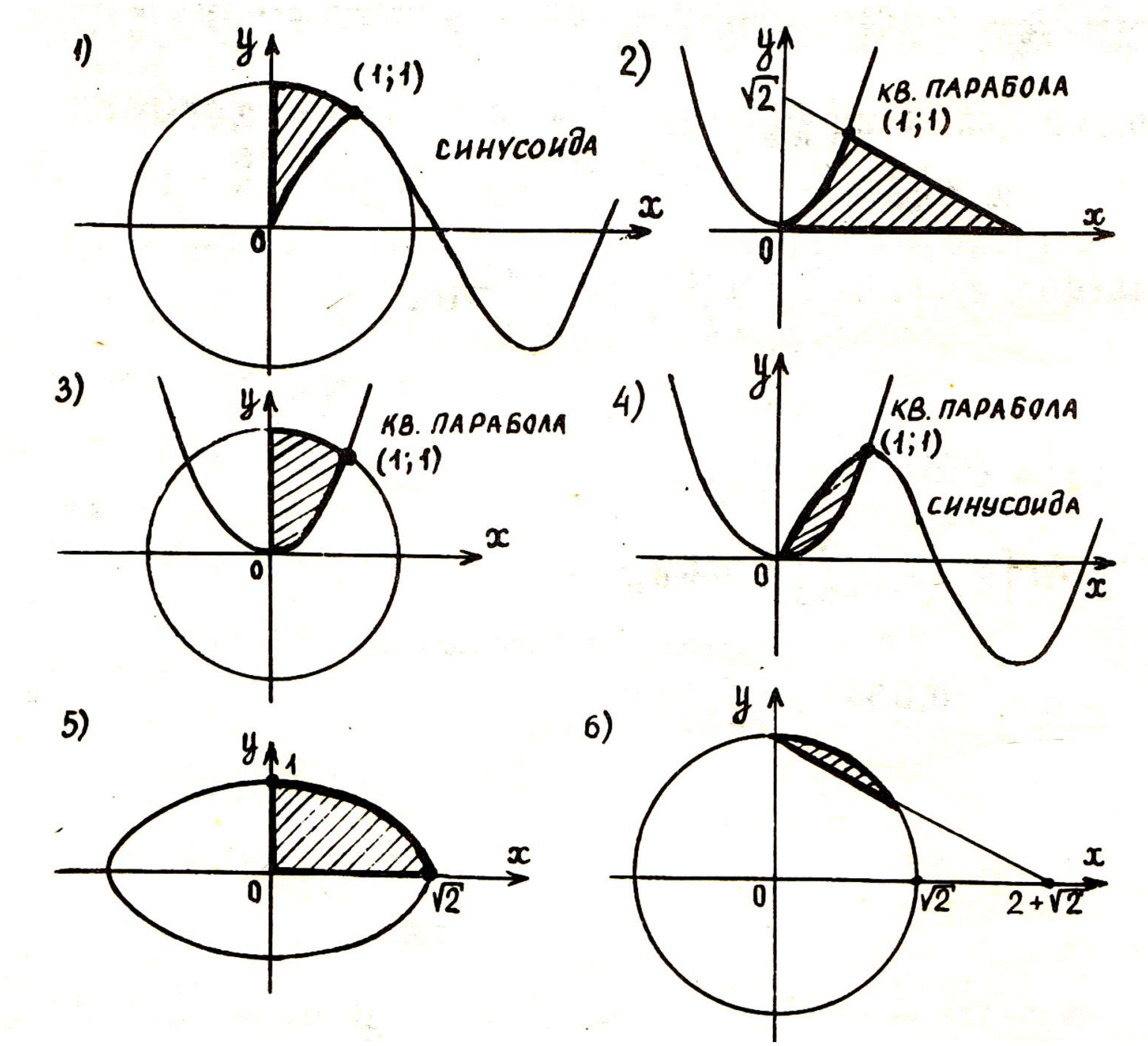
1. Используя формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона, вычислить приближенное значение интеграла

$$\int_0^{10} x\sqrt{K+\frac{x^2}{K}}\,dx = I_0(K),$$

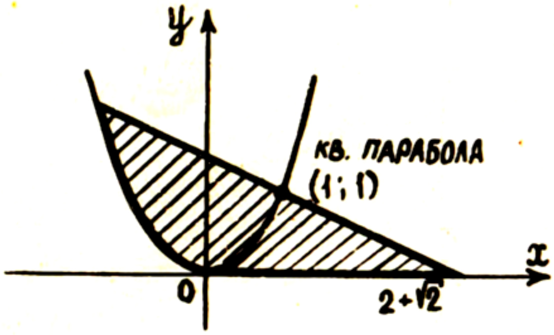
где K – есть номер варианта.

Сравнить полученные результаты с точным значением.

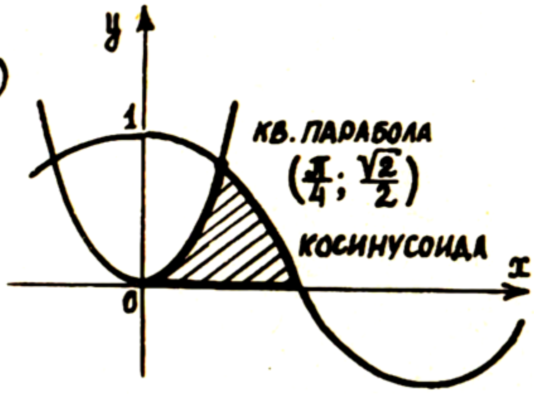
2. С помощью определенного интеграла найти центр тяжести однородной заштрихованной плоской фигуры:



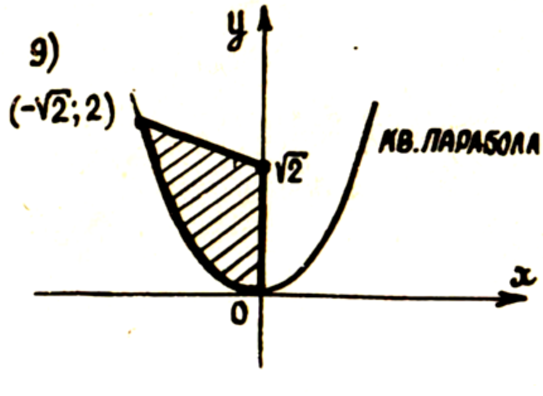
7)



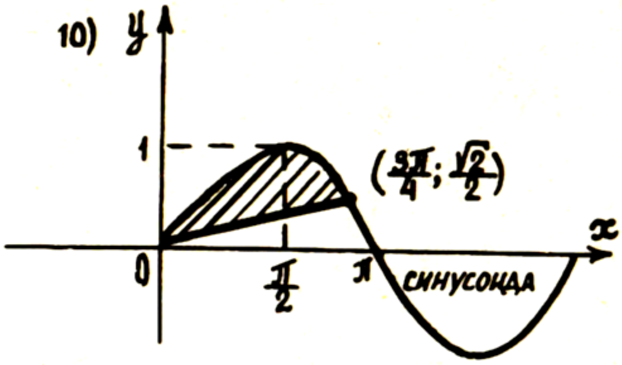
8)



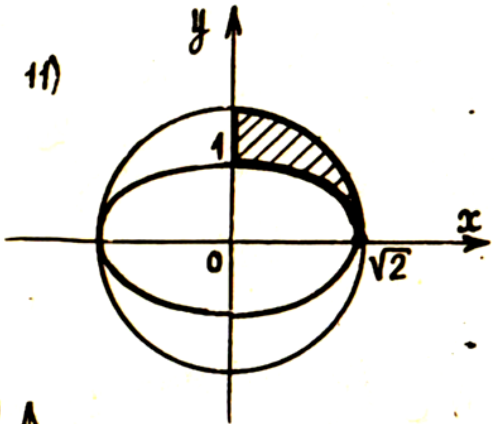
9)



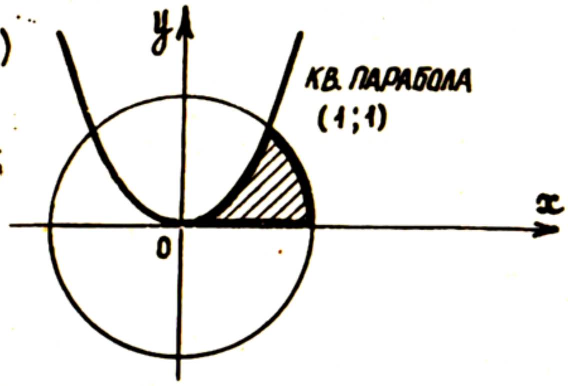
10)



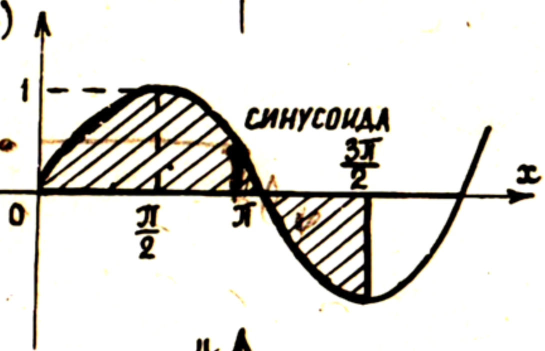
11)



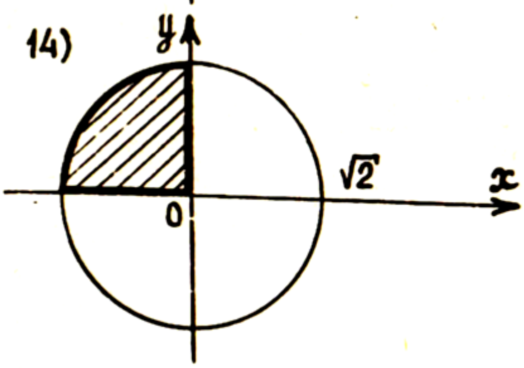
12)



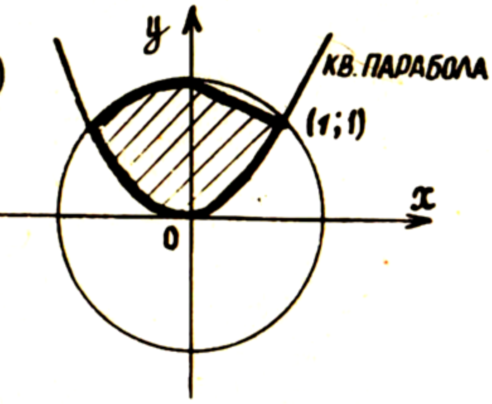
13)



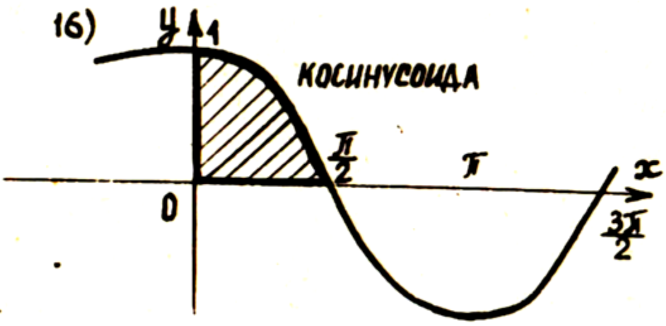
14)



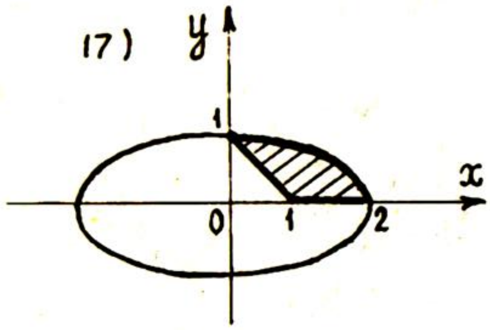
15)



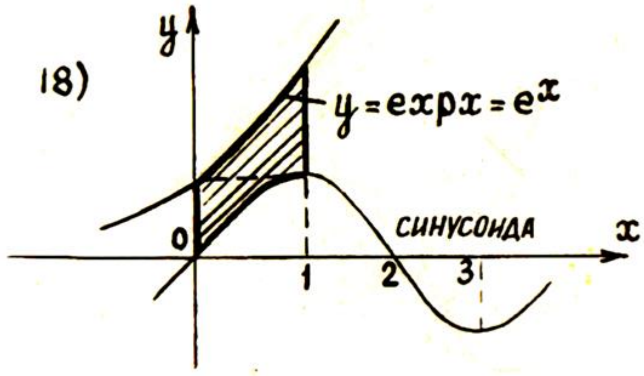
16)



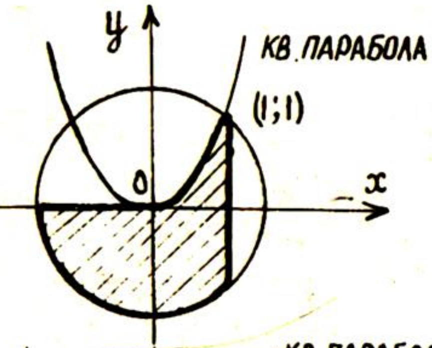
17)



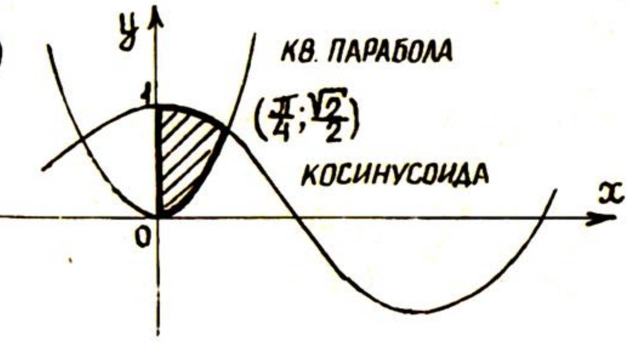
18)



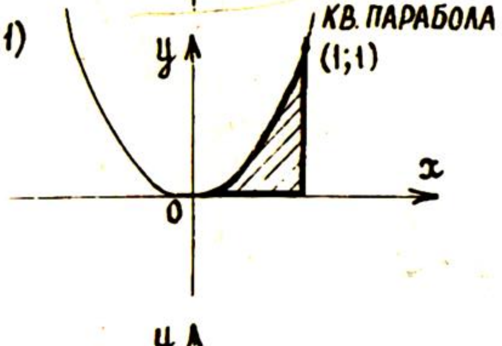
19)



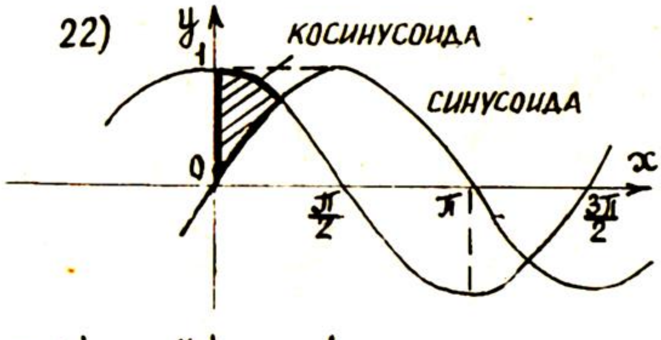
20)



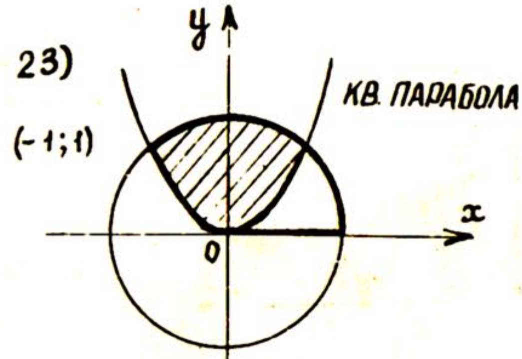
21)



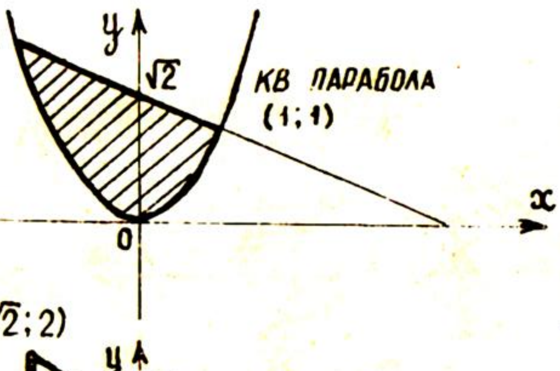
22)



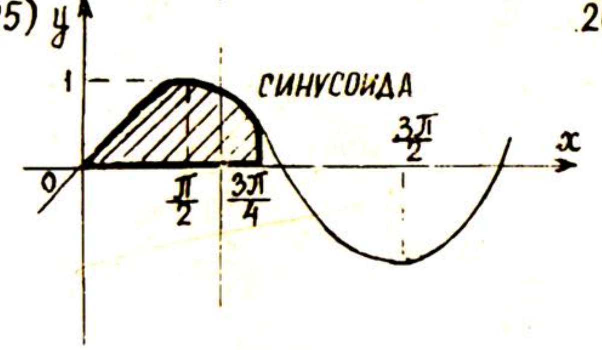
23)



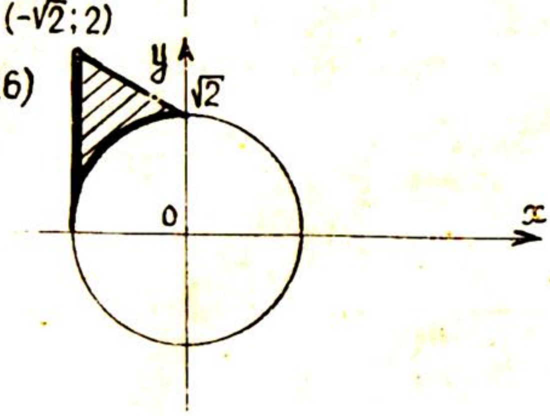
24)

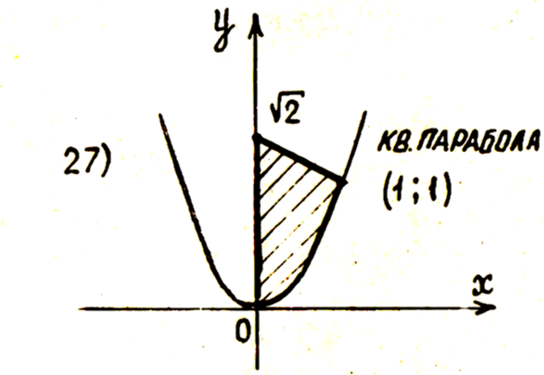


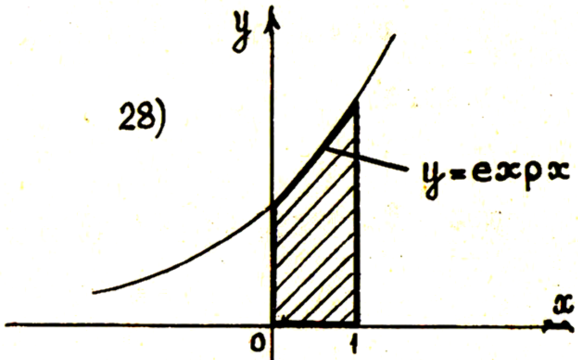
25)

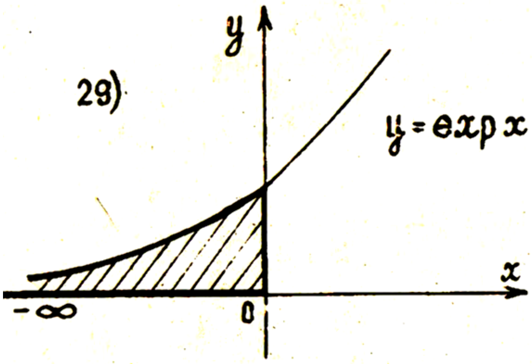


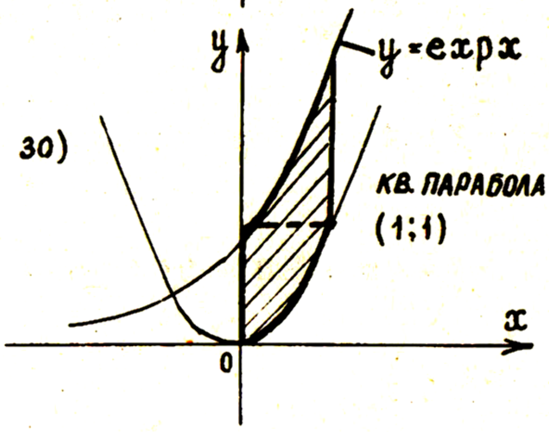
26)

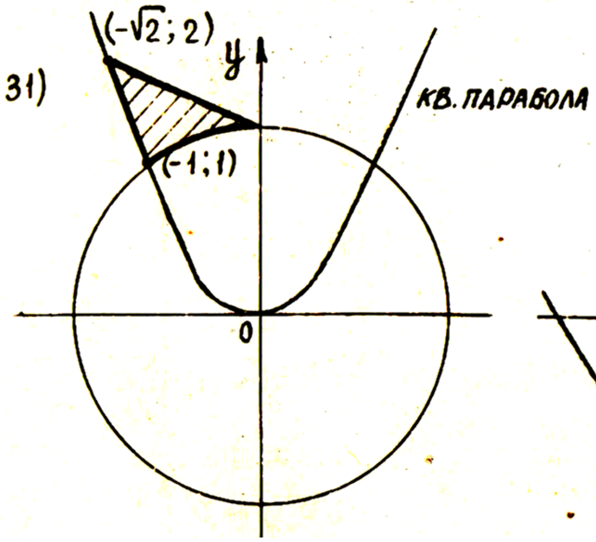


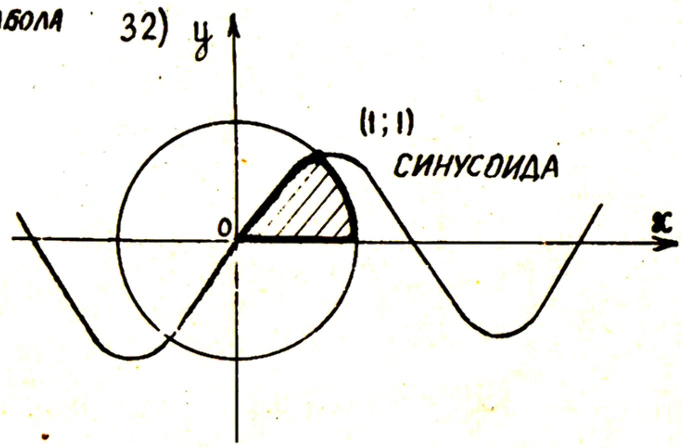












3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области

1) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ $\qquad D: \begin{Bmatrix} y = x + 1 \\ y = 0; \quad x = 3 \end{Bmatrix}$

2) $z = x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 2y$ $\qquad D: \begin{Bmatrix} y = x + 2 \\ y = 0; \quad x = 2 \end{Bmatrix}$

3) $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ $\qquad D: \begin{Bmatrix} x + y + 1 = 0 \\ y = 0; \quad x = -3 \end{Bmatrix}$

4) $z = 4x + 2y + 4x^2 + y^2 + 6$ $\qquad D: \begin{Bmatrix} x + y + 2 = 0 \\ x = 0; \quad y = 0 \end{Bmatrix}$

5) $z=5x^2-3xy+y^2+4$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} x=-1;\ y=-1 \\ x+y=1 \end{Bmatrix}$

6) $z=4x^2+9y^2-4x-6y+3$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} x=0;\ y=0 \\ x+y=1 \end{Bmatrix}$

7) $z=x^2-2xy+\frac{5}{2}y^2-2x$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 2 \end{Bmatrix}$

8) $z=2x^2-4xy+5y^2-8x+6$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} 0\le x\le 4 \\ 0\le y\le 4 \end{Bmatrix}$

9) $z=5x^2+8xy+5y^2-18x-18y$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 3 \end{Bmatrix}$

10) $z=2xy-3x^2-3y^2+4x+4y+4$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} 0\le x\le 3 \\ 0\le y\le 2 \end{Bmatrix}$

11) $z=x^2+y^2-4xy-4$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} 0\le x\le 4 \\ 0\le y\le 4 \end{Bmatrix}$

12) $z=x^2+4xy-y^2-6x-2y$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} y=4-x \\ x=0;\ \ y=0 \end{Bmatrix}$

13) $z=x^2+2y^2+4xy+1$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} -1\le x\le 1 \\ 0\le y\le 2 \end{Bmatrix}$

14) $z=x^3+y^3-3xy$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} 0\le x\le 4 \\ 0\le y\le 4 \end{Bmatrix}$

15) $z=x^2-2y^2+4xy-6x+5$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} x=0;\ y=0 \\ x+y=3 \end{Bmatrix}$

16) $z=2x^3+4x^2+y^2-2xy$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} y=x^2;\ y=4 \\ x=0 \end{Bmatrix}$

17) $z=x^2+xy-3x-y$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 3 \end{Bmatrix}$

18) $z=x^2-2xy+3$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} y=4-x^2; \\ y=0 \end{Bmatrix}$

19) $z=x^2+2xy-y^2-2x+2y+3$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} y=0;\ x=2 \\ y=x+2 \end{Bmatrix}$

20) $z=x^2+y^2-6x+4y+2$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} 0\le x\le 4 \\ -3\le y\le 2 \end{Bmatrix}$

21) $z=y^2-2xy-x^2+4y+1$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} x+y+1=0 \\ x=0;\ \ y=-3 \end{Bmatrix}$

22) $z=2x^2+2xy-\frac{y^2}{2}-4x$ $\qquad D:\ \begin{Bmatrix} y=2x;\ y=2 \\ x=0 \end{Bmatrix}$

23) $z = xy - 2x - y$ $\qquad D: \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$

24) $z = xy$ $\qquad D: \begin{cases} \Delta - \textit{к с вершинами} \\ O(0,0);\ B(2,0);\ C(0,3) \end{cases}$

25) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ $\qquad D: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$

26) $z = \dfrac{x^2}{2} - xy$ $\qquad D: \left\{ y = \dfrac{x^2}{3};\ y = 3 \right\}$

27) $z = 1 + xy$ $\qquad D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 2 \end{cases}$

28) $z = 2x + y - xy$ $\qquad D: \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$

29) $z = x^2 + xy$ $\qquad D: \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$

30) $z = x^2 - 2y^2 + 4$ $\qquad D: \left\{ x^2 + y^2 \le 1 \right\}$

31) $z = 1 - e^{x^2 + y^2}$ $\qquad D: \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ -2 \le y \le 2 \end{cases}$

32) $z = \dfrac{y}{x + 10} + x$ $\qquad D: \begin{cases} y = x;\ y = -x \\ y = 2 \end{cases}$

33) $z = 10 + 2xy - x^2$ $\qquad D: \left\{ y = 4 - x^2;\ y = 0 \right\}$

34) $z = \left(x^3 - 3x\right)\left(2 - y^2\right)$ $\qquad D: \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$

35) $z = 2xy$ $\qquad D: \left\{ x^2 + y^2 \le 9 \right\}$

36) $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$ $\qquad D: \begin{cases} x = 1;\ y = 0 \\ y = x \end{cases}$

37) $z = x^2 - xy$ $\qquad D: \left\{ x^2 + y^2 \le 4 \right\}$

38) $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ $\qquad D: \begin{cases} x = 1;\ y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

39) $z = -xy$ $\qquad D: \begin{cases} x = 0;\ y = 1 \\ y = x \end{cases}$

40) $z = xy(4 - x - y)$ $\qquad D: \begin{cases} x = 1;\ y = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$

41) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ $\qquad D: \begin{cases} y = x + 1 \\ x = 3;\ \ y = 0 \end{cases}$

4. Вычислить приближенно следующие выражения:

1) $\sqrt{3{,}98}\cdot(1{,}03)^{3{,}98}$

2) $\sqrt[5]{(2{,}97)^3+(2{,}02)^2+1}$

3) $\ln\left(\sqrt[5]{0{,}98}+\sqrt[4]{1{,}03}-1\right)$

4) $\dfrac{2{,}03}{(2{,}03)^4+(2{,}97)^2}$

5) $\operatorname{arctg}\dfrac{(1{,}04)^2}{0{,}98}$

6) $\sqrt[7]{(3{,}03)^4+(1{,}98)^5+15}$

7) $\ln\left[(2{,}02)^3+\sqrt[3]{0{,}98}-8\right]$

8) $\dfrac{10}{(4{,}98)^3-(5{,}03)^2}$

9) $\ln\left(\sqrt{4{,}02}-\sqrt[3]{0{,}97}\right)$

10) $\left(2-\sqrt{0{,}97}\right)^{3{,}02}$

11) $(0{,}99)^{5{,}05}$

12) $\sin(1.56)\cdot\cos(1{,}58)$

13) $\sqrt{(3{,}02)^2+(3{,}98)^2}$

14) $\ln\left[(1{,}015)^2+(0{,}03)^2\right]$

15) $\operatorname{arctg}\dfrac{5{,}01}{4{,}98}$

16) $\sqrt[5]{(2{,}95)^3+(2{,}03)^2+1}$

17) $\dfrac{10}{(4{,}02)^3+(1{,}97)^5+4}$

18) $\sqrt[3]{(3{,}95)^2+(3{,}03)^2+2}$

19) $\sqrt[4]{(2{,}03)^3+(1{,}94)^3}$

20) $\sqrt{(4{,}03)^3+(1{,}96)^5+4}$

21) $\operatorname{tg}44^\circ\cdot\cos 59^\circ$

22) $\dfrac{(2{,}03)^2}{\sqrt{(2{,}03)^3+(1{,}05)^3+7}}$

23) $(0{,}97)^{1{,}05}$

24) $\sqrt{(3{,}02)^2-(2{,}04)^2+11}$

25) $\sin 29^\circ\cdot\operatorname{tg}46^\circ$

26) $\operatorname{arctg}\dfrac{0{,}96}{1{,}05}$

27) $\sqrt{(1{,}05)^3+(1{,}98)^3}$

28) $\dfrac{4}{(1{,}03)^2+(2{,}97)^2}$

29) $\dfrac{(2{,}05)^2}{(2{,}05)^2+(3{,}01)^2}$

30) $3{,}09\cdot e^{0{,}09}$

31) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1{,}97}{1{,}02}-1\right)$

32) $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$

33) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2{,}04}{0{,}98}-1\right)$

34) $\sqrt{8{,}96}\cdot(1{,}02)^{8{,}96}$

35) $\sin 59^\circ\cdot\operatorname{tg}31^\circ$