Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Е.С. Единова

РЯДЫ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2023

УДК

Рецензент:
Доктор технических наук, профессор СПбПУ *В.И. Антонов*

Автор:
доцент Е.С. Единова

Единова Е.С. **Ряды:** учебное пособие (практикум) / Е.С. Единова – СПб, 2023. – 190 с.

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов СПбПУ очной и заочной форм обучения.

Пособие закрепляет знания, полученные студентами по теме «Ряды», предусмотренные учебной программой по высшей математике в соответствии с содержанием Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

Данное пособие содержит 4 главы, которые разделены на аудиторную и домашнюю части. Все задачи, предназначенные для самостоятельного решения, снабжены ответами.

Каждая глава начинается с основных понятий и подробного решения типовых задач.

Объем заданий достаточен для выработки твердых навыков в элементарных приемах математического исследования и, вместе с тем, не выходит за пределы времени, отведенного студентам для самостоятельной работы над курсом высшей математики.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех специальностей.

Илл.**22**, библиогр.**10** назв.

.

ВВЕДЕНИЕ

Решение многих задач сводится к вычислению значений функций и интегралов или к решению дифференциальных уравнений, содержащих производные или дифференциалы неизвестных функций.

Однако точное выполнение указанных математических операций во многих случаях оказывается весьма затруднительным или невозможным. В этих случаях можно получить приближенное решение многих задач с любой желаемой точностью при помощи рядов.

Ряды представляют простой и весьма совершенный инструмент математического анализа для приближенного вычисления функций, интегралов и решений дифференциальных уравнений.

Настоящее учебное пособие посвящено теме «Ряды» общего курса высшей математики и адресовано преподавателям и студентам для проведения практических занятий и самостоятельных работ в аудитории и дома.

По структуре пособие состоит из четырех глав. Каждая глава содержит необходимый теоретический материал (основные определения, понятия, теоремы, формулы), используемый при решении задач. Особенностью данного пособия является большое количество задач с решением, что позволяет использовать его при самостоятельной работе студентов. Задачи систематизированы по методам решения и расположены по мере возрастания сложности. Завершают каждую главу примеры с ответами для самостоятельной работы.

Данное пособие написано в соответствии с действующими программами курса высшей математики для инженерно-технических специальностей вузов. Оно также может быть использовано в вузах других профилей, в которых количество часов, отведенных на изучение данного курса высшей математики, значительно меньше (для этого из предлагаемого материала преподаватель может сделать необходимую выборку). Кроме того, пособие вполне доступно для студентов вечерних и заочных отделений вузов.

Глава 1
Числовые ряды

1.1 Числовой ряд, его сходимость и сумма.

Справочный материал

Рассмотрим бесконечную числовую последовательность

$$a_1, a_2, \dots a_n, \dots,$$

где $a_n = f(n)$, $n = 1,2,3, \dots$

Выражение $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ называется ***числовым рядом;*** числа $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ - ***членами ряда***; a_n - ***общим членом***.

Ряд кратко записывают в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Обычно n полагают равным 1,2, …, но иногда ряд начинают с $n = 0$ или же с какого-нибудь натурального числа, большего единицы.

Сумму n первых членов ряда обозначают S_n и называют ***n-ой частичной суммой ряда:***

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Если при $n \to \infty$ существует конечный предел частичной суммы

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S,$$

то ряд называется ***сходящимся,*** а число S называют ***суммой ряда.***

Если же при $n \to \infty$ не существует конечного предела частичной суммы, то ряд называется ***расходящимся.*** Такой ряд суммы не имеет.

Простейшим примером числового ряда является геометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot g^{n-1} = a + a \cdot g + a \cdot g^{2} + \ldots + a \cdot g^{n-1} + \ldots,$$

который сходится при условии $|g| < 1$.

Сумма этого геометрического ряда определяется формулой

$$S = \frac{a}{1-g}.$$

Произведением всех чисел натурального ряда, начиная с 1 до n, принято обозначать $n!$, то есть $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n = n!$

Произведение только нечетных чисел натурального ряда, начиная с 1 до числа $2k-1$ $\quad (k = 1,2,3,\ldots)$ принято обозначать $(2k-1)!!$, то есть

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2k-1) = (2k-1)!!$$

Произведение только четных чисел натурального ряда, начиная с 2 до $2k$ $\quad (k = 1,2,\ldots)$, принято обозначать $(2k)!!$, то есть

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (2k) = (2k)!!$$

Примеры решения задач

Пример 1. Записать первые пять членов ряда, общий член которого задан формулой

$$a_n = \frac{n}{3^n(2n+1)}.$$

Решение.

Если $n = 1$, то $a_1 = \dfrac{1}{3(2 \cdot 1 + 1)} = \dfrac{1}{3 \cdot 3} = \dfrac{1}{9}$.

Если $n = 2$, то $a_2 = \dfrac{2}{3^2(2 \cdot 2 + 1)} = \dfrac{2}{3^2 \cdot 5} = \dfrac{2}{45}$.

Если $n = 3$, то $a_3 = \dfrac{3}{3^3(2 \cdot 3 + 1)} = \dfrac{1}{3^2 \cdot 7} = \dfrac{1}{63}$.

Если $n = 4$, то $a_4 = \dfrac{4}{3^4(2 \cdot 4 + 1)} = \dfrac{4}{81 \cdot 9} = \dfrac{4}{729}$.

Если $n = 5$, то $a_1 = \dfrac{5}{3^5(2 \cdot 5 + 1)} = \dfrac{5}{243 \cdot 11} = \dfrac{5}{2673}$.

Ряд можно записать в виде

$$\frac{1}{9}+\frac{2}{45}+\frac{1}{189}+\frac{4}{729}+\frac{5}{2673}+\ldots, \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n(2n+1)}.$$

Пример 2. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{n^3}$ записать 8-й и 11-й члены.

Решение.

Общий член ряда $a_n=\frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{n^3}$.

Полагая $n=8,$ получим 8-й член ряда $a_8=\frac{\sin\frac{17\pi}{2}}{8^3}=\frac{1}{8^3}$.

Полагая $n=11,$ получим 11-й член ряда $a_{11}=\frac{\sin\frac{23\pi}{2}}{11^3}=-\frac{1}{11^3}$.

Пример 3. Написать простейшую формулу общего члена ряда, если каждый его последующий член получается по тому же закону, по которому образованы записанные члены:

$$а)\quad \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots,$$

$$б)\quad \frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}+\ldots.,$$

$$в)\quad \frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}-\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{10\cdot 11}\ldots.$$

Решение.

а) Обозначим данные члены ряда:

$$a_1=\frac{1}{2};\quad a_2=\frac{2}{2^2};\quad a_3=\frac{3}{2^3};\quad a_4=\frac{4}{2^4}.$$

Замечаем, что числитель в каждом из членов совпадает с номером члена, а знаменатель представляет "2" в степени, совпадающей с номером члена. Поэтому

$$a_n=\frac{n}{2^n}.$$

б) Обозначим данные члены ряда:

$$a_1=\frac{1}{3};\quad a_2=\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6};\quad a_3=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9};\quad a_4=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}.$$

В числителе каждого члена стоит произведение нечетных чисел, начиная с 1, число сомножителей которого равно номеру члена. Поэтому в числителе общего члена стоит произведение

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)=(2n-1)!!\quad (n=1,2,3,\ldots).$$

В знаменателе каждого члена стоит произведение чисел, кратным трем, расположенных в порядке их возрастания. Число сомножителей равно номеру члена. Следовательно, в знаменателе общего члена будет произведение

$$3\cdot 6\cdot 9\cdot 12\cdot\ldots\cdot 3n=3^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots n=3^n\cdot n!.$$

Общий член ряда можно записать в виде

$$a_n=\frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}.$$

в) Прежде всего каждый член данного ряда представляет собой дробь, числитель которой равен единице, а знаменатель есть произведение двух последовательных чисел натурального ряда: одно из них четное $(2n)$, другое нечетное $(2n+1)$. Поскольку знаки членов чередуются и первый член положителен, то, для того, чтобы получить искомую формулу, нужно еще ввести множитель $(-1)^{n+1}$:

$$a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{2n(2n+1)}.$$

Замечание. Если заданы лишь несколько первых членов ряда, то нельзя считать, что ряд известен, так как всегда можно построить бесчисленное множество рядов, первыми членами которых будут эти числа. Например, если заданы первые два члена ряда $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$, то, с одинаковым успехом можно предположить, что общим членом ряда является либо $\frac{1}{2n}$, либо $\frac{1}{2^n}$, так как у соответствующих рядов

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

первые два члена совпадают.

Пример 4. Найти суммы рядов или доказать, что ряды суммы не имеют:

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n^2+2n},$$

$$б)\quad \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+....+\frac{1}{n(n+2)}+...,$$

$$в)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)},$$

$$г)\quad \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+....+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}+...,$$

$$д)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...,$$

$$е)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$ж)\quad 2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+....+\frac{2}{3^{n-1}}+....$$

Решение.

$а)$ Общий член ряда $u_n=\dfrac{1}{n^3+3n^2+2n}=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

Запишем n-ю частичную сумму ряда

$$S_n=u_1+u_2+...+u_n$$

или
$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+....+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Чтобы найти сумму ряда или доказать, что ряд суммы не имеет, надо найти предел n-ой частичной суммы при $n\longrightarrow\infty$. Придадим S_n более удобный вид для вычисления предела. Сначала преобразуем выражение для общего члена, разлагая его на простейшие дроби

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}.$$

Теперь методом частных значений находим коэффициенты из тождества

$$1\equiv A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1).$$

$$\begin{array}{l|l} n=0 & 1=2A \quad\Rightarrow\quad A=\dfrac{1}{2}, \\ n=-1 & 1=-B \quad\Rightarrow\quad B=-1, \\ n=-2 & 1=2C \quad\Rightarrow\quad C=\dfrac{1}{2}. \end{array}$$

Получаем $\qquad u_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2},$

то есть $\qquad u_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$

Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right) + \dots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+2)}\right).$$

Легко видеть, что средние члены во всех скобках, кроме первой и последней, взаимно уничтожаются с членами соседних скобок. После такого преобразования получим:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Вычисляем предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Итак, ряд сходится, его сумма S равна $\frac{1}{4}$.

б) Общий член ряда $\quad a_n = \frac{1}{n(n+2)}.$

Запишем *n-ую* частичную сумму ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

или $\quad S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}.$

Чтобы найти сумму ряда или доказать, что ряд суммы не имеет, надо найти предел *n*-й частичной суммы при $n \to \infty$. Придадим S_n более удобный вид для вычисления предела. Сначала преобразуем выражение для общего члена, разлагая его на простейшие дроби

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}.$$

Теперь находим коэффициенты из тождества:

$$1 \equiv (A+B)\cdot n + 2A.$$

$$\begin{array}{c|l} n & A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{2}, \\ n^0 & 2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}. \end{array}$$

Получаем $$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Таким образом, n-ю частичную сумму удалось представить в виде

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Вычисляем предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Ряд сходится, его сумма S равна $\frac{3}{4}$.

в) Общий член ряда $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

Как в предыдущем примере, сначала, преобразуя выражение для общего члена ряда, получим

$$a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Затем выражение для n-ой частичной суммы запишем в виде

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \ldots + (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}.$$

Вычисляем предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[1 + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}\right] = 1.$$

Ряд сходится, его сумма равна 1.

г) Общий член ряда $a_n = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n^2}$.

Используя формулу $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}$ и полагая $x = \dfrac{1}{2n-1}$, $y = \dfrac{1}{2n+1}$, преобразуем общий член к виду

$$a_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{2n-1} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}.$$

Запишем *n-ую* частичную сумму

$$S_n = \left(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) + \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2n-1} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}\right) = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}.$$

Сумма ряда

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

д) Данный ряд называется *гармоническим*, так как каждый его член (кроме первого) является средним гармоническим двух членов, соседних с ним

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

Запишем *n*-ю частичную сумму ряда

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

В этом примере не представляется возможным найти удобное для перехода к пределу выражения для S_n, поэтому вопрос о сходимости ряда следует решать иначе, чем в предыдущих примерах.

Запишем частичную сумму $2n$ первых членов ряда

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}, \quad (n = 1,2,3,\ldots).$$

Рассмотрим разность

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Так как в правой части этого равенства каждый член, кроме последнего, больше, чем $\frac{1}{2n}$, то можно записать неравенство

$$S_{2n} - S_n > \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Допустим, что гармонический ряд сходится и имеет сумму S, тогда по определению сходимости ряда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_{2n} - S_n\right) = 0.$

Переходя к пределу в неравенстве $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$, получим $0 > \frac{1}{2}$, что неверно. Следовательно, гармонический ряд расходится.

е) Запишем n-ю частичную сумму

$$S_n = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Каждое слагаемое этой суммы преобразуем

$$\ln 2 = \ln 2 - \ln 1,$$
$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \ln\frac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2,$$
$$\ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \ln\frac{4}{3} = \ln 4 - \ln 3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \ln\frac{n}{n-1} = \ln n - \ln(n-1),$$
$$\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n.$$

Частичная сумма принимает вид

$$S_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \ldots$$
$$\ldots + (\ln n - \ln(n-1)) + (\ln(n+1) - \ln n).$$

$$S_n = \ln(n+1) \text{ и } \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty.$$

Частичная сумма не имеет конечного предела. Следовательно, ряд расходится и суммы не имеет.

ж) Ряд геометрический, знаменатель $g = \frac{1}{3}$.

Следовательно, ряд сходится и его сумма $S = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = 3.$

Замечание.

Как видно из рассмотренных примеров, отыскание предела частичной суммы требует искусственных, порой сложных приемов, и возможно лишь для некоторых числовых рядов. Поэтому используются более простые способы исследования сходимости рядов. Существуют признаки, на основании которых можно решить вопрос о сходимости ряда. Некоторые из них будут рассмотрены ниже.

Примеры для самостоятельного решения.

Пример 5. Написать первые шесть членов ряда по заданному общему члену a_n.

5.1. $a_n = \dfrac{3n-2}{n^2+1}$. Ответ. $a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_2 = \dfrac{4}{5}, \dots, a_6 = \dfrac{16}{37}$.

5.2. $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{2^n}$. Ответ. $a_1 = -\dfrac{1}{2},\ a_2 = \dfrac{1}{2}, \dots, a_6 = \dfrac{3}{32}$.

5.3. $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n^2}$. Ответ. $a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{3}{4}, \dots, a_6 = \dfrac{1}{12}$.

5.4. $a_n = \dfrac{\cos n\pi}{n^2+3}$. Ответ. $a_1 = -\dfrac{1}{4},\ a_2 = \dfrac{1}{7}, \dots, a_6 = \dfrac{1}{39}$.

5.5. $a_n = \dfrac{\left(2+\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi}{n!}$.

Ответ. $a_1 = -3,\ a_2 = 1, \dots, a_6 = \dfrac{1}{360}$.

Пример 6. Написать простейшую формулу *n*-го члена ряда по указанным членам:

6.1. $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\dots$ Ответ. $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$.

6.2. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\dots$ Ответ. $a_n = \dfrac{1}{2n}$.

6.3. $1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{8}+\dots$ Ответ. $a_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

6.4. $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+\dots$ Ответ. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$.

6.5. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{5}{16}+\dfrac{6}{25}+\dots$ Ответ. $a_n = \dfrac{n+2}{(n+1)^2}$.

6.6. $\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{8}+\dfrac{6}{11}+\dfrac{8}{14}+\dots$ Ответ. $a_n = \dfrac{2n}{3n+2}$.

6.7. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{42}+\dots$ Ответ. $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

6.8. $1+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\ldots.$

Ответ. $a_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}.$

6.9. $1-1+1-1+1-1+\ldots.$ Ответ. $a_n=(-1)^{n+1}.$

6.10. $1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}-\frac{1}{49}-\frac{1}{64}+\ldots.$

Ответ. $a_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{1}{(n+1)^2},\quad (n=0,1,2,\ldots).$

Пример 7. Найти сумму ряда:

7.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}.$ Ответ. $S=6.$

7.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$ Ответ. $S=\frac{1}{2}.$

7.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$ Ответ. $S=\frac{1}{4}.$

7.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}.$ Ответ. $S=\frac{3}{4}.$

7.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$ Ответ. $S=1.$

Указание. Используем тождество $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}.$

7.6 $1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{64}+\ldots+(-1)^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+\ldots$

Ответ. $S=\frac{4}{7}.$

1.2 Свойства сходящихся рядов.

Справочный материал

1.2.1 Умножение ряда на число.

Если сходится ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

и суммой его является число S, то сходится и ряд

$$ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots,$$

причем, сумма этого ряда равна cS.

1.2.2 ***Почленное сложение рядов***. Если сходятся два ряда

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = A,$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = B,$$

тогда ряды

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots$$

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_n - b_n) + \ldots$$

сходятся, и их суммы соответственно равны $A + B$ и $A - B$.

1.2.3 ***Остаток ряда.*** Если в ряде

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

отбросить n первых членов, то получится ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots,$$

который называется **остаток ряда после *n*-го члена.**

Ряд и его остаток одновременно сходятся или расходятся.

Сумма остатка ряда обозначается r_n :

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots \quad (n = 1,2,3,\ldots).$$

Сумма ряда S и сумма r_n его остатка после n-го члена связаны соотношением $S = S_n + r_n$.

1.2.4 Необходимый признак сходимости ряда. *Если ряд*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

сходится, то его общий член стремится к нулю, то есть

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Если общий член ряда к нулю не стремится, то ряд расходится.

Замечание. Необходимый признак не является достаточным, то есть, если $a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то о сходимости ряда без дополнительных исследований ничего еще сказать нельзя. Ряд может как сходится, так и расходится.*

Примеры решения задач

Исследовать сходимости рядов:

Пример 8. $$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{4+n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4+n}.$$

Решение: Данный ряд можно считать полученным из гармонического ряда отбрасыванием первых четырех членов.

Гармонический ряд расходится, следовательно, на основании свойства 3, данный ряд тоже расходится.

Пример 9. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{5+n}.$$

Решение: Данный ряд можно получить из геометрического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

отбрасыванием первых пяти членов.

Геометрический ряд сходится, так как $g=\frac{3}{4}<1.$

По свойству 3 заключаем, что данный ряд сходится.

Пример 10. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{7^n}.$$

Решение: Общий член ряда $a_n=\frac{2^n+5^n}{7^n}$ можно рассматривать как сумму общих членов $b_n=\left(\frac{2}{7}\right)^n$ и $c_n=\left(\frac{5}{7}\right)^n$ двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n$.

Каждый из этих рядов является сходящимся геометрическим рядом, так как $g_1=\frac{2}{7}<1$ и $g_2=\frac{5}{7}<1.$

По свойству 2 данный ряд тоже сходится. Найдем его сумму S. Сумма слагаемых рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n = \frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{2}{7}} = \frac{2}{5} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n = \frac{5}{2}.$$

По свойству 2: $S = \frac{2}{5} + \frac{5}{2} = \frac{29}{10}$.

<u>Исследовать сходимость рядов, применяя необходимый признак:</u>

Пример 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100n+3}$.

Решение: Общий член ряда $a_n = \frac{n}{100n+3}$.

Найдем его предел при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{100n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{100+\frac{3}{n}} = \frac{1}{100} \neq 0,$$

то есть, общий член к нулю не стремится, значит, ряд расходится.

Пример 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n$.

Решение: Общий член ряда $a_n = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n$.

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-2n}\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} \neq 0,$$

следовательно, ряд расходится.

Пример 13 . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$.

Решение: Общий член ряда $a_n = \frac{n}{1+n^2}$.

Здесь $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0.$$

Необходимый признак выполняется, но пока решить вопрос о сходимости ряда **нельзя**. В дальнейшем мы докажем, что этот ряд расходится.

Пример 14 . $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}.$

Решение: Общий член ряда $a_n = \cos\frac{1}{n}.$

Здесь $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n} = \cos 0 = 1.$$

Таким образом, необходимое условие сходимости ряда не выполняется, следовательно, ряд расходится.

Примеры для самостоятельного решения

Выполняется ли необходимый признак сходимости у рядов:

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6n}{n+6}.$ Ответ. Нет. (Расходится).

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3n^2+1}.$ Ответ. Нет. (Расходится).

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{5n}.$ Ответ. Нет. (Расходится).

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n+1}.$ Ответ. Нет. (Расходится).

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, arctg\,\frac{1}{n}.$ Ответ. Нет. (Расходится).

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}.$ Ответ. Да.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3\cdot\frac{2^n+6^n}{9^n}.$ Ответ. Да. (Сходится, $S=\frac{48}{7}$).

1.3 Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Справочный материал

Ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

все члены которого неотрицательны, то есть $a_n \geq 0 \quad (n = 1,2,3,\ldots)$, называется *положительным.*

1.3.1 Признаки сравнения

<u>Первый признак сравнения.</u>

Если ряд с положительными членами

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

сравнить с другим рядом с положительными членами

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots \tag{2}$$

сходимость или расходимость которого известна, и если, начиная с некоторого номера *n:*

1) $a_n \leq b_n$ **и ряд (2) сходится, то и ряд (1) также сходится;**

2) $a_n \geq b_n$ **и ряд (2) расходится, то и ряд (1) также расходится.**

<u>Второй признак сравнения</u> (Предельная форма признака сравнения).

Если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \quad (0 < \ell < \infty),$$

то ряды (1) и (2) одновременно сходятся или расходятся.

Для исследования сходимости данного ряда по этим признакам надо взять некоторый другой ряд (ряд сравнения), про который известно, что он сходится или расходится.

Для сравнения часто используются ряды:

1) ***Геометрический***

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot g^{n-1} \qquad \begin{cases} \text{сходящийся} & \text{при} \quad |g| < 1, \\ \text{расходящ.} & \text{при} \quad |g| \geq 1. \end{cases}$$

2) ***Обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле)***

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}} \qquad \begin{cases} \textit{сходящийся} & \textit{при} \quad p>1; \\ \textit{расходящ.} & \textit{при} \quad p\le 1. \end{cases}$$

Вопрос о сходимости рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_k(n)}{P_\ell(n)},$$

где $k\ne \ell;\quad k=1,2,3...;\quad \ell=1,2,3,...,$ **а** $P_k(n),\ P_\ell(n)-$ **многочлены от *n* степени** k **и** ℓ **соответственно, решают с помощью сравнения с рядом**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}},$$

в котором принимают $p=\ell-k.$ **При этом удобнее пользоваться вторым признаком сравнения.**

Примеры решения задач

Исследовать сходимость рядов, применяя признаки сравнения:

Пример 22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$

Решение. Из очевидного неравенства

$$n(n+1)<(n+1)^2$$

следует неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)n}}>\frac{1}{n+1} \quad \text{при} \quad n=1,2,3,...$$

Выражение в правой части этого неравенства возьмем в качестве общего члена ряда сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}.$$

Этот ряд расходится как остаток гармонического ряда после первого члена. Члены данного ряда больше соответствующих членов расходящегося ряда. На основании первого признака сравнения данный ряд расходится.

Пример 23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+4}$.

Решение. Для сравнения возьмем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, который сходится (геометрический ряд со знаменателем $g=\frac{1}{3}<1$).

Общий член данного ряда $\frac{1}{3^n+4}<\frac{1}{3^n}$ при любых n.
На основании первого признака сравнения следует сходимость данного ряда.

Пример 24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{3n}$.

Решение. Если $n>2$, то $\ln n>1$, поэтому для всех n, больших 2, имеет место неравенство

$$\frac{\ln n}{3n}>\frac{1}{3n}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ расходится. По первому признаку сравнения данный ряд тоже расходится.

Пример 25 . $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)4^n}$.

Решение. Сравним ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)4^n}$ со сходящимся рядом $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}$, составленным из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой $g=\frac{1}{4}<1$. При любых n выполняется неравенство

$$\frac{1}{(n+1)4^n}\le\frac{1}{4^n}.$$

На основании первого признака сравнения данный ряд сходится.

Пример 26. $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots$

Решение. Для сравнения возьмем сходящийся геометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$$

и воспользуемся вторым признаком сравнения. Найдем предел отношения общих членов данного ряда и ряда сравнения при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}=1.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ сходится, то и исследуемый ряд сходится.

Пример 27 . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^n}{n^{n+1}}.$

Решение. Преобразуем общий член ряда

$$a_n=\frac{(n-1)^n}{n^{n+1}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Найдем предел отношения общего члена данного ряда к общему члену гармонического ряда при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}.$$

На основании второго признака сравнения исследуемый ряд расходится, так как расходится гармонический ряд.

Пример 28 . $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right).$

Решение. Беря для сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)}{\frac{1}{n^2}}.$$

Как известно, при $x\to 0$ бесконечно малая функция $\ln(1+x)$ эквивалентна x. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1\neq 0.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то и данный ряд сходится.

Пример 29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}tg\,\frac{1}{\sqrt{n}}.$

Решение. При $n\to\infty$ бесконечно малая величина $tg\,\frac{1}{\sqrt{n}}$ эквивалентна $\frac{1}{\sqrt{n}}$, поэтому, беря для сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}tg\,\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot tg\,\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=1\neq 0.$$

Взятый для сравнения ряд сходится (он имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, где $p=\frac{3}{2}>1$), следовательно, и данный ряд сходится.

Пример 30 . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}.$

Решение. Общий член данного ряда

$$a_n=\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$$

представляет отношение двух многочленов. Степень многочлена, стоящего в числителе, $k=1$, степень многочлена, стоящего в знаменателе, $\ell=4$.

Поэтому, примем $p=\ell-k=3$ и данный ряд сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, который сходится, так как $p=3>1$.

Применяем третий признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{(n+1)^2(n+2)^2}\cdot\frac{n^3}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^2\left(n+\frac{2}{n}\right)^2}=2.$$

Данный ряд сходится.

Пример 31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$.

Решение. Здесь в числителе многочлен степени $k=1$, степень знаменателя $\ell=2$.

Сравниваем данный ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n-1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2}=2\neq 0,$$

поэтому данный ряд расходится.

Пример 32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$.

Решение. Сравниваем этот ряд со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}=1.$$

Так как предел отличен от нуля, то данный ряд также сходится.

Примеры для самостоятельного решения

Исследовать на сходимость следующие ряды, применяя признаки сравнения:

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$. Ответ. Расходится.

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\cdot 4^n+10}$. Ответ. Сходится.

35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\left(1+n^2\right)}}$. Ответ. Сходится.

36. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$. Ответ. Расходится.

37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{\pi}{n+2}$. Ответ. Расходится.

38. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$. Ответ. Сходится.

39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$. Ответ. Расходится.

40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(n^2+3\right)^{5/3}}$. Ответ. Сходится.

41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\sin^2 nx}$. Ответ. Сходится.

42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1-\cos^2 nx}$. Ответ. Расходится.

43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$. Ответ. Сходится.

44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$. Ответ. Расходится.

45. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Ответ. Расходится.

46. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$. Ответ. Сходится.

Указание. Сравнить с геометрическим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

47. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Ответ. Расходится.

48. $\sum_{n=1}^{\infty}n^3 tg^5\frac{\pi}{\sqrt{n^3}}$. Ответ. Сходится.

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. Ответ. Сходится.

50. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$. Ответ. Расходится.

Указание. Учитывая, что при $n\to\infty$ $e^{\frac{1}{n}}-1$ эквивалентно $\frac{1}{n}$.

51. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+7}{n^3+3}$. Ответ. Сходится.

52. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{6n^2+1}$. Ответ. Расходится.

53. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{\left(n^3-1\right)^2}$. Ответ. Сходится.

54. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(6n-5)}$. Ответ. Сходится.

55. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^3}{3n^4+3n^2+2}$. Ответ. Расходится.

1.3.2 Достаточный признак сходимости – признак Даламбера.

Если для ряда

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

с положительными членами существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D,$$

то этот ряд сходится при $D < 1$ ***и расходится при*** $D > 1$.
При $D = 1$ ***вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.***

Примеры решения задач

Исследовать сходимость рядов с помощью признака Даламбера:

Пример 56. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$.

Решение. Общий член ряда $a_n = \dfrac{1}{(2n+1)!}$. Запишем $(n+1)-й$ член. Он получается из a_n заменой n на $(n+1)$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{(2(n+1)+1)!} = \frac{1}{(2n+3)!}.$$

Согласно признаку Даламбера найден предел отношения последующего члена к предыдущему

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0.$$

Так как предел существует и меньше единицы, то данный ряд сходится.

Пример 57 . $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$.

Решение. Общий член ряда $a_n = \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$, $(n+1)-й$ член

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}},$$

поэтому

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!} = \frac{2\cdot n^n}{(n+1)^n}.$$

Вычисляем предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^n}{(n+1)^n} = 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Пример 58. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}.$

Решение. Здесь

$$a_n = \frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}; \qquad a_{n+1} = \frac{2n+1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}} \quad \text{и}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Ряд сходится.

Пример 59. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}.$

Решение. Здесь

$$a_n = \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}; \qquad a_{n+1} = \frac{3^{2n+3}}{2^{3n+2}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n+3}}{2^{3n+2}}\cdot\frac{2^{3n-1}}{3^{2n+1}} = \frac{9}{8} > 1.$$

Ряд расходится.

Пример 60 . $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(2n)!}{(2n)!!}.$

Решение. Здесь $a_n = \dfrac{2^n(2n)!}{(2n)!!}$;

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}\cdot(2n+2)!}{(2n+2)!!} = \frac{2^{n+1}\cdot(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(2n)!!\cdot(2n+2)};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(2n)!!(2n+2)}\cdot\frac{(2n)!!}{2^n\cdot(2n)!}=$$
$$=2\lim_{n\to\infty}(2n+1)=\infty.$$

Ряд расходится.

Примеры для самостоятельного решения.

Исследовать сходимость рядов, используя признак Даламбера:

61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$. Ответ. Расходится.

62. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n}}{(2n)!}$. Ответ. Сходится.

63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. Ответ. Сходится.

64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^n}$. Ответ. Сходится.

65. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$. Ответ. Расходится.

66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$. Ответ. Расходится.

67. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Ответ. Сходится.

68. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$. Ответ. Сходится.

69. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$. Ответ. Расходится.

70. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$. Ответ. Сходится.

71. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$. Ответ. Расходится.

72. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$. Ответ. Сходится.

73. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n3^n}}$. Ответ. Сходится.

1.3.3 Радикальный признак Коши.

Если для ряда $$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$
с положительными членами существует предел
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ell,$$
то этот ряд сходится при $\ell<1$ ***и расходится при*** $\ell>1$.

Замечание. Если $\ell=1$, ***то вопрос о поведении ряда остается открытым.***

Примеры решения задач

Пользуясь признаком Коши, исследовать на сходимость рядов:

Пример 74. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}.$$

Решение. Для данного ряда
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0<1,$$
следовательно, ряд сходится.

Пример 75 . $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Решение. Для данного ряда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{e}<1,$$

следовательно, ряд сходится.

Пример 76. $\sum_{n=1}^{\infty}5^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение. Применяя радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}5\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=5\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=5e>1,$$

следовательно, ряд расходится.

Примеры для самостоятельного решения.

Исследовать сходимость рядов, используя радикальный признак Коши:

77. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. Ответ. Сходится.

78. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$. Ответ. Сходится.

79. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. Ответ. Расходится.

80. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{2n}$. Ответ. Сходится.

81. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^{n}$. Ответ. Сходится.

82. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{n}.$ Ответ. Сходится.

83. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}.$ Ответ. Сходится.

84. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+n-1}{n^2+2n+3}\right)^{n}.$ Ответ. Расходится.

85. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{2n-1}\right)^{n^2}.$ Ответ. Расходится.

86. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^{n^2}.$ Ответ. Сходится.

87. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n-1}{3n+1}\right)^{n}.$ Ответ. Расходится.

1.3.4 Интегральный признак Коши.

Ряд с положительными убывающими членами $a_n = f(n)$ ***сходится или расходится, смотря по тому, сходится или расходится несобственный интеграл***

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx,$$

где $f(x)-$ ***непрерывная убывающая функция.***

Нижним пределом интеграла может быть любое положительное число из области определения $f(x)$.

Этим признаком можно пользоваться, когда выражение общего члена $a_n = f(n)$ *имеет смысл не только для целых положительных значений* n, *но и для всех* n, *больших некоторого положительного числа* m.

Примеры решения задач

Исследовать сходимость рядов, применяя интегральный признак Коши:

Пример 88 . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$

Решение. Общий член ряда

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$$

Запишем функцию $f(x)$. Для этого в выражении для общего члена заменим n буквой x, получим

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

После этого надо проверить, удовлетворяет ли таким образом полученная функция условиям интегрального признака Коши. В данном случае числитель постоянен, а знаменатель – положительная непрерывная монотонно возрастающая функция. Поэтому функция $f(x)$ непрерывна, положительна и монотонно убывает при $x\geq 1$.

Следовательно, интегральный признак Коши применим. Берем нижний предел $a=1$ и вычисляем

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)}=-\frac{1}{\ln(x+1)}\bigg|_1^{\infty}=\frac{1}{\ln 2}.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то сходится и данный ряд.

Пример 89. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}.$

Решение. Общий член ряда $a_n=\frac{n}{n^2+1}.$

Из общего члена заменой n на x получаем функцию

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}.$$

Эта функция непрерывна при всех значениях x, положительна при $x > 0$ и монотонно убывает, так как

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{\left(x^2 + 1\right)^2} < 0$$

при всех $x > 1$.
Вычислим

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + 1\right) \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Несобственный интеграл расходится, значит, расходится и данный ряд.

Пример 90 . $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + n}{1 + n^2} \right)^2.$

Решение. Общий член ряда $a_n = \left(\frac{1 + n}{1 + n^2} \right)^2.$

Следовательно, $f(x) = \left(\frac{1 + x}{1 + x^2} \right)^2.$

Эта функция при $x \geq 1$ положительна, непрерывна и монотонно убывает, так как знаменатель возрастает быстрее числителя. Поэтому можно применить интегральный признак Коши.

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1 + x}{1 + x^2} \right)^2 dx = \int_1^{\infty} \frac{(1 + x)^2}{\left(1 + x^2\right)^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1 + 2x + x^2}{\left(1 + x^2\right)^2} dx =$$

$$= \int_1^{\infty} \left(\frac{1 + x^2}{\left(1 + x^2\right)^2} + \frac{2x}{\left(1 + x^2\right)^2} \right) dx = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{1 + x^2} + \frac{2x}{\left(1 + x^2\right)^2} \right) dx =$$

$$= \operatorname{arctg} x \Big|_1^{\infty} - \frac{1}{1 + x^2} \Bigg|_1^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится, следовательно, сходится и данный ряд.

Пример 91. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n + 6}}.$

Решение. Здесь $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n + 6}}.$ Запишем $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x + 6}}.$

Эта функция при $x \geq 1$ положительна, непрерывна и монотонно убывает, поэтому можно воспользоваться интегральным признаком Коши

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+6}} = \left.\frac{3(x+6)^{2/3}}{2}\right|_1^{\infty} = \infty.$$

Несобственный интеграл расходится, значит расходится и ряд.

Пример 92 . $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$

Решение. Легко проверить, что к данному ряду применим интегральный признак Коши.

Здесь $a_n = \dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}; \quad f(x) = \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}};$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = -2\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}} d\left(-\sqrt{x}\right) = -2e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^{\infty} = \frac{2}{e}.$$

Несобственный интеграл, а вместе с ним и заданный ряд, сходятся.

Примеры для самостоятельного решения.

Исследовать сходимость рядов, применяя интегральный признак Коши:

93. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^3+1}.$ Ответ. Расходится.

94. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg\, n}{1+n^2}.$ Ответ. Сходится.

95. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(1+n)}.$ Ответ. Расходится.

96. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln(\ln n)}.$ Ответ. Расходится.

97. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+3}$. Ответ. Сходится.

98. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$. Ответ. Расходится.

99. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$. Ответ. Сходится.

100. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$. Ответ. Расходится.

101. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{n^4-9}$. Ответ. Сходится.

1.4 Ряды с членами произвольного знака.

Справочный материал

Перейдем теперь к исследованию сходимости рядов, члены которых имеют разные знаки. При этом мы будем рассматривать лишь те ряды, среди членов которых бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов.

Знакочередующиеся ряды.

Ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, называется знакочередующимся.

Такой ряд можно записать в виде

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$$

или

$$-a_1+a_2-a_3+a_4-\ldots+(-1)^n a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot a_n,\ \textit{где}$$

$a_n>0 \quad (n=1,2,3,\ldots)$.

Для исследования сходимости знакочередующегося ряда применяется признак Лейбница: ***если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда монотонно убывают, то есть***

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$$

и общий член a_n при неограниченном возрастании n стремится к нулю

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0,$$

то ряд сходится.

При практическом использовании рядов (сходящихся) обычно ограничиваются несколькими их первыми членами. Допускаемая при этом *ошибка* (остаток ряда) наиболее просто оценивается для знакочередующихся рядов:

Ошибка при замене суммы сходящегося знакочередующегося ряда суммой нескольких его первых членов меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов.

Причем, знак суммы совпадает со знаком первого отброшенного члена; сумма остатка ряда после n-го члена r_n имеет знак $(n+1)-$го члена и меньше его по абсолютной величине.

Знакопеременные ряды.

Для рядов с произвольным распределением знаков их членов приведем только один важный достаточный признак сходимости.

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

с членами произвольных знаков. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

составленный из абсолютных величин членов данного ряда, то сходится и данный ряд.

Ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда – положительный, и для исследования его сходимости могут быть применены достаточные признаки, рассмотренные ранее.

Ряд, абсолютные величины членов которого образуют сходящийся ряд, называется абсолютно сходящимся. Если ряд сходится, а ряд, образованный из абсолютных величин его членов, расходится, то данный ряд называется неабсолютно или условно сходящимся.

Примеры решения задач

Исследовать сходимость знакопеременных рядов, и для сходящихся установить характер сходимости (абсолютная, условная):

Пример 102. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Решение. Ряд знакочередующийся. Проверяем условия признака Лейбница:

1) $$1>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{n}}>\ldots.$$

Члены ряда монотонно убывают.

2) $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

Предел общего члена равен нулю.

Условия признака выполнены, и ряд сходится.

Исследуем характер сходимости.

Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Этот ряд расходится, как ряд Дирихле при $p=\frac{1}{2}$. Следовательно, данный ряд условно сходящийся.

Пример 103. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^5}.$$

Решение. Этот ряд является знакочередующимся, удовлетворяющим условиям признака Лейбница:

1) $$1>\frac{1}{2^5}>\frac{1}{3^5}>\ldots.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}=0.$$

Данный ряд сходится, причем абсолютно, так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^5}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$$

сходится (ряд Дирихле, $p>1$).

Пример 104. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}.$$

Решение. Ряд знакопеременный. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|.$$

Исследуем сходимость этого ряда с помощью первого признака сравнения, взяв для сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится (ряд Дирихле при $p>1$). Так как $\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}<\frac{1}{n^2}$ при всех n, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$$

сходится.

Согласно достаточному признаку данный ряд сходится.

По определению абсолютной сходимости данный ряд сходится абсолютно.

Пример 105. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}.$$

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}.$$

Для решения вопроса о его сходимости используем признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot 2^n}{n^3\cdot 2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=\frac{1}{2}<1.$$

Ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

Пример 106. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{2^n}.$$

Решение. Ряд из абсолютных величин членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{2^n}.$$

Исследуем его сходимость, используя признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2^{n+1}}}{\operatorname{tg}\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{2}<1.$$

Ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

Замечание. При вычислении предела использована теорема о том, что предел отношения двух бесконечно малых величин не изменится, если одну из них или обе, заменить эквивалентными бесконечно малыми величинами. Как известно, $\operatorname{tg}\alpha\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$, поэтому при $n\to\infty$ имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2^{n+1}}\sim\frac{1}{2^{n+1}},\ \operatorname{tg}\frac{1}{2^n}\sim\frac{1}{2^n}.$$

Пример 107. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}.$$

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n^2}}{n!}.$$

Используем признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{n+1}=\infty.$$

Ряд из абсолютных величин расходится. Покажем, что ряд не сходится и условно. Сравним a_n и a_{n+1}:

$$\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}=\frac{2^{n^2}\cdot 2^{2n+1}}{n!(n+1)}=\frac{2^{n^2}}{n!}\cdot\frac{2n+1}{n+1}>\frac{2^{n^2}}{n!},$$

то есть

$$a_{n+1}>a_n$$

- члены ряда с возрастанием n возрастают и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0.$$

Для данного ряда не выполняется необходимый признак сходимости. Ряд расходится.

Пример 108. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{3}.$

Решение. Для данного знакопеременного ряда не выполняется необходимое условие сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{3}$ не существует. Вследствие этого он расходится.

Пример 109. Вычислить приблизительно сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^n}.$$

Решение. Данный ряд лейбницевского типа. Он сходится. Можно записать:

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\ldots=S.$$

Взяв пять членов, то есть заменив S на

$$S_5=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{27}-\frac{1}{256}+\frac{1}{3125}\approx 0{,}7834,$$

сделаем ошибку, меньшую, чем

$$\frac{1}{6^6}=\frac{1}{46656}<0{,}00002.$$

Итак, $S\approx 0{,}7834.$

Пример 110. Сколько нужно взять членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001 ?

Решение. Все условия признака Лейбница для данного ряда выполнены:

1) ряд знакочередующийся;
2) $1>\frac{1}{4}>\frac{1}{9}>$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0.$

Ряд сходится, и его остаток по абсолютной величине не превосходит первого отброшенного члена, то есть

$$|r_n|<a_{n+1}.$$

В данном случае

$$|r_n| < \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Для вычисления суммы ряда с точностью до 0,001 необходимо, чтобы выполнялось условие

$$|r_n| < 0{,}001 \text{ или}$$

$$|r_n| < \frac{1}{(n+1)^2} < 0{,}001 = \frac{1}{1000},$$

отсюда

$$(n+1)^2 > 1000.$$

Путем проб получаем, что наименьшее значение n, удовлетворяющее этому неравенству, $n = 31.$ Чтобы вычислить сумму ряда с точностью до 0,001, надо взять сумму 31 члена ряда.

Пример 111. Найти приближенно (с точностью до 0,01) сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3 + 2n + 3}.$$

Решение. Легко проверить, что данный ряд удовлетворяет всем условиям признака Лейбница.

Следовательно, ряд сходится и его остаток

$$|r_n| < a_{n+1}.$$

В данном случае

$$|r_n| < a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3 + 2(n+1) + 3} < 0{,}01,$$

откуда

$$n^3 + 3n^2 + 5n + 6 > 100.$$

Это неравенство выполняется при $n = 4$ (138>100).
Поэтому, для вычисления суммы ряда с указанной точностью, надо взять 4 члена. Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3 + 2n + 3} \approx \frac{1}{6} - \frac{1}{15} + \frac{1}{36} - \frac{1}{75} = 0{,}11.$$

Пример 112. Проверить, что знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1}$ сходится и вычислить приближенное значение его суммы с точностью до 0,01.

Решение. Проверяем сходимость ряда по признаку Лейбница:

1) $\frac{1}{2} > \frac{1}{9} > \frac{1}{28} >$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+1} = 0.$

Далее вычисляем несколько последовательных первых членов данного ряда, пока не получим такой член, абсолютное значение которого меньше 0,01:

$$a_1 = -\frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{9}; \quad a_3 = -\frac{1}{28}; \quad a_4 = \frac{1}{65}; \quad a_5 = -\frac{1}{126}.$$

Для вычисления суммы данного ряда с точностью до 0,01 достаточно взять сумму четырех его первых членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1} \approx -\frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{28} + \frac{1}{65} \approx -0{,}41.$$

Примеры для самостоятельного решения.

Исследовать сходимость знакопеременных рядов и для сходящихся установить характер сходимости (абсолютная, неабсолютная):

113. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$ Ответ. Сходится условно.

114. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{2^n}.$ Ответ. Сходится абсолютно.

115. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$ Ответ. Сходится абсолютно.

116. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}.$ Ответ. Сходится условно.

117. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$ Ответ. Сходится условно.

118. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{6n-5}.$ Ответ. Расходится.

119. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{1}{n^4}$. Ответ. Сходится абсолютно.

120. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{2^n}{(n+1)^n}$. Ответ. Сходится абсолютно.

121. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^3}$. Ответ. Сходится абсолютно.

122. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$. Ответ. Сходится условно.

123. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. Ответ. Сходится абсолютно.

124. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$. Ответ. Сходится условно.

Сколько нужно взять первых членов, чтобы с точностью до 0,001 вычислить суммы рядов:

125. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{n^4}$. Ответ. n = 5.

126. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Ответ. n = 9.

127. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3}$. Ответ. n = 5.

128. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$. Ответ. n = 6.

Найти приближенно (с точностью до 0,01) сумму следующих рядов Лейбница:

129. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}$. Ответ. S = 0,20.

130. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}$. Ответ. S = 0,46.

131. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$. Ответ. $S = 0{,}79$.

<u>*С точностью до 0,001 вычислить сумму ряда:*</u>

132. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$. Ответ. $S = 0{,}901$.

133. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$. Ответ. $S = 0{,}249$.

134. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^5}$. Ответ. $S = 0{,}973$.

1.5 Числовые ряды с комплексными членами.

Справочный материал

Пусть дана бесконечная последовательность комплексных чисел

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots,$$

где $z_n = a_n + ib_n \ (n = 1,2,3,\ldots)$, $a_n, b_n -$ действительные числа.

Числовым рядом с комплексными членами или *комплексным числовым рядом называется* выражение

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots.$$

В краткой записи

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n). \tag{3}$$

Сумма

$$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$$

называется *n –й частичной суммой* ряда.

Ряд с комплексными членами называется сходящимся, если n-ая частичная его сумма имеет конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Этот предел называется суммой ряда.

Если предел бесконечен или не существует, то ряд называется расходящимся.

Необходимое условие сходимости ряда: если ряд (3) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

Необходимым и достаточным условием сходимости ряда (3) является сходимость рядов из действительных и мнимых частей его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S'. \qquad (4)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S''. \qquad (5)$$

Сумма ряда (3) будет комплексным числом $S = S' + iS''$.

Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|, \qquad (6)$$

составленный из абсолютных величин членов комплексного ряда (3), то ряд (3) тоже сходится.

В этом случае комплексный ряд называется **абсолютно сходящимся.**

Если же ряд (3) сходится, в то время как ряд (6) расходится, то ряд (3) называется неабсолютно (условно) сходящимся.

Для исследования комплексного ряда на абсолютную сходимость можно пользоваться любым из достаточных признаков, установленных для положительных рядов с действительными членами: признаками сравнения, признаком Даламбера, интегральным признаком Коши.

Примеры решения задач

Исследовать сходимость рядов с комплексными членами:

Пример 135. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{i}{3^n}\right).$

Решение. Рассмотрим два ряда с действительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}.$$

Оба ряда сходятся, так как это геометрические ряды со знаменателями меньшими единицы

$$\left(g_1=\frac{1}{2}, \quad g_2=\frac{1}{3}\right).$$

Следовательно, комплексный ряд также сходится.

Найдем сумму ряда. Сначала вычислим суммы геометрических рядов.

$$S'=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1, \quad \text{то есть} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1,$$

$$S''=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}, \quad \text{то есть} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}.$$

Сумма данного ряда $S=1+\frac{1}{2}i,$ то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{i}{3^n}\right)=1+\frac{1}{2}i.$$

Пример 136. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{i}{n}\right).$

Решение. Рассмотрим два ряда с действительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический, он расходится. Следовательно, расходится и данный ряд.

Пример 137. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot i\right).$

Решение. Для данного ряда не выполняется необходимый признак сходимости. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+3}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}i\right]=1\neq 0.$$

Ряд расходится.

Пример 138. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}.$

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}\right| =\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|n+i|\sqrt{n}} =\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}\sqrt{n}}.$$

Этот ряд сходится. Сходимость можно доказать, используя любой из признаков сравнения.

Из очевидного неравенства

$$\sqrt{n^3+n} > \sqrt{n^3}$$

следует неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+n}} < \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{при } n = 1,2,3,\ldots$$

Выражение в правой части этого неравенства возьмем в качестве общего члена ряда сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Следовательно, комплексный ряд абсолютно сходится.

Пример 139. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{(-1)^n}{n}i\right).$

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^3}+\frac{(-1)^n}{n}i\right| =\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^2}} =\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1+n^4}{n^6}} =\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1+n^4}}{n^3}.$$

Этот ряд расходится. Расходимость можно доказать, используя второй признак сравнения, и для сравнения взять ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Рассмотрим теперь два ряда с действительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

(ряд сходится, как ряд Дирихле при $p = 3 > 1$) и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

(ряд сходится по признаку Лейбница).

Следовательно, данный ряд неабсолютно сходящийся.

Пример 140. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2i-1)^n}{3^n}.$

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|2i-1|^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{5^n}}{3^n}.$$

Применяем к ряду признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sqrt{5^{n+1}}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n\sqrt{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sqrt{5}}{3n}=\frac{\sqrt{5}}{3}<1.$$

Получаем, что ряд сходится. Данный ряд сходится абсолютно.

Примеры для самостоятельного решения.

Исследовать сходимость рядов с комплексными членами:

141. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}+\frac{i}{n^2}\right).$ Ответ. Сходится абсолютно.

142. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{i}{n\sqrt{n}}\right).$ Ответ. Расходится.

143. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}.$ Ответ. Сходится условно.

144. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+i}{1+\sqrt{n}}$. Ответ. Расходится.

145. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{6n+5}+\dfrac{i}{n^2}\right)$. Ответ. Расходится.

146. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(2+i)^n}{2^n}$. Ответ. Расходится.

147. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+i}$. Ответ. Расходится.

148. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(3+i)^n}$. Ответ. Сходится абсолютно.

149. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+(2n-1)\cdot i)^2}$. Ответ. Сходится абсолютно.

150. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n\sqrt{n}+2}\cdot i\right)$.

Ответ. Сходится абсолютно.

151. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n^2-1}}i\right)$. Ответ. Сходится условно.

152. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)^n i\right)$. Ответ. Расходится.

153. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3-i)^n}{n\cdot 10^n}$. Ответ. Сходится абсолютно.

154. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-3}{6n+1}+\dfrac{5n^2}{3n^2+6}i\right)$. Ответ. Расходится.

Глава 2
Функциональные ряды. Степенные ряды.

2.1 Функциональные ряды, их сходимость и свойства.

Справочный материал

Функциональным рядом или рядом функций называется ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),$$

члены которого – функции от x, определенные на некотором интервале.

При каждом фиксированном значении $x=x_0$ *из области определения функций* $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *функциональный ряд становится числовым рядом*

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$$

и может оказаться сходящимся или расходящимся.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то значение аргумента $x=x_0$ называется *точкой сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, то значение аргумента $x=x_0$ называется *точкой расходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

Совокупность всех значений x, *при которых функциональный ряд сходится, называется его областью сходимости. Областью сходимости функционального ряда чаще всего бывает интервал – замкнутый или нет, конечный или бесконечный.*

Иногда область сходимости вырождается в точку, то есть ряд в этом случае сходится только при одном значении x. В простейших случаях для определения области сходимости функционального ряда можно применять к нему известные признаки сходимости числовых рядов, считая x фиксированным.

В области сходимости функционального ряда его частичная сумма, сумма ряда и остаток представляют собой функции от x. Эти функции связаны соотношением

$$S(x)=S_n(x)+r_n(x),$$

где

$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$ n-ая частичная сумма функционального ряда,

$r_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)$ - остаток функционального ряда после n-го члена,

$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$ - сумма функционального ряда.

Сходящийся для всех x *из интервала* (a,b) *функциональный ряд называется равномерно сходящимся в этом интервале, если для всякого числа* $\varepsilon>0$ *существует такой номер* $N=N(\varepsilon)$, *что при* $n>N$ *выполняется неравенство* $|r_n(x)|<\varepsilon$ *или* $|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$ *одновременно для всех* x *из интервала* (a,b) .

Если сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов функционального ряда, то функциональный ряд сходится и называется абсолютно сходящимся.

Достаточным признаком равномерной и абсолютной сходимости функционального ряда является ***признак Вейерштрасса:***

Функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

сходится абсолютно и равномерно в некотором интервале, если существует сходящийся числовой ряд с положительными членами

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

такой, что

$$|u_n(x)|\le a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

для всех x ***из данного интервала.***

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ в этом случае называется ***мажорантным*** для функционального ряда.

Свойства функциональных рядов:

1) сумма равномерно сходящегося ряда функций, непрерывных в замкнутом промежутке $[a,b]$, есть функция, непрерывная в данном промежутке;

2) если члены сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ имеют непрерывные производные в замкнутом промежутке $[a,b]$, в котором ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в этом промежутке можно дифференцировать почленно, то есть

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \text{ или}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x);$$

3) если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывны в замкнутом промежутке $[a,b]$, в котором этот ряд сходится равномерно, то его можно интегрировать почленно в данном промежутке, то есть

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx;$$

4) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно в некоторой области и каждый член ряда имеет конечный предел $\lim_{x\to\alpha} u_n(x) = c_n$, где α - точка сгущения данной области, то к пределу можно перейти почленно, то есть

$$\lim_{x\to\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Примеры решения задач

Пример 155. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)x^n}$$

в точках $x=1$ и $x=3$.

Решение.

При $x=1$ получаем положительный числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}.$$

Этот рад расходится, в чем можно убедиться, если сравнить его с гармоническим рядом.

При $x=3$ получаем положительный числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 3^n}.$$

Здесь

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)\cdot 3^n}; \qquad a_{n+1}=\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{n+1}}.$$

Применяя признак Даламбера:

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot 3^n}{(2n+1)\cdot 3^{n+1}}=\frac{1}{3}<1.$$

Ряд сходится.

<u>Найти области сходимости и суммы рядов:</u>

Пример 156. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}$.

Решение. При каждом фиксированном x данный ряд представляет геометрический ряд со знаменателем $g=\frac{x}{5}$; такой ряд сходится при $|g|=\left|\frac{x}{5}\right|<1$. Отсюда следует, что область сходимости состоит из всех значений x, для которых $|x|<5$ или $-5<x<5$.

Сумма ряда

$$S(x)=\frac{\frac{x}{5}}{1-\frac{x}{5}}=\frac{x}{5-x}.$$

Пример 157. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n(1-x).$.

Решение. Запишем n-ю частичную сумму

$$S_n(x) = (1-x) + x(1-x) + \ldots + x^{n-1}(1-x) = 1 - x^n.$$

Если $|x| < 1$, то $x^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - x^n\right) = 1.$

Следовательно, в интервале $(-1{,}1)$ ряд сходится и имеет сумму $S(x) = 1.$

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При $x = -1$ получим числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2.$$

Этот ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости ряда.

При $x = 1$ все члены ряда равны нулю, ряд сходится и его сумма $S(x) = 0.$

Если $|x|>1$, то $x^n \to \infty$ при $n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - x^n\right) = \infty.$$

Следовательно, ряд расходится.

Итак, область сходимости данного ряда $(-1{,}1]$, сумма ряда

$$S(x) = \begin{cases} 1, & при\ |x| < 1 \\ 0, & при\ x = 1 \end{cases}.$$

Найти области сходимости рядов:

Пример 158. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x.$

Решение. Считая x фиксированным, составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\ln^n x\right|,$$

и к этому числовому положительному ряду применим признак Даламбера.

Здесь $$|u_n(x)| = |\ln^n x|,$$

$$|u_{n+1}(x)| = |\ln^{n+1} x|,$$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\ln^{n+1} x|}{|\ln^n x|} = |\ln x|.$$

Ряд сходится, когда $|\ln x| < 1$, то есть $-1 < \ln x < 1$, откуда

$$\frac{1}{e} < x < e.$$

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При $x = \dfrac{1}{e}$ получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{e}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n;$$

при $x = e$ получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1.$

Оба ряда расходятся, так как не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Область сходимости $\left(\dfrac{1}{e}, e\right).$

Пример 159. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$$

Решение. Считая x фиксированным, применяем признак Даламбера к ряду, составленному из абсолютных величин членов данного ряда, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left|\frac{x}{x+1}\right|^n.$$

Поскольку

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{n+1} \left|\frac{x}{x+1}\right|^{n+1} : \frac{1}{n} \left|\frac{x}{x+1}\right|^n = \frac{n}{n+1} \left|\frac{x}{x+1}\right|,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \left|\frac{x}{x+1}\right| = \left|\frac{x}{x+1}\right|,$$

то ряд сходится, когда $\left|\dfrac{x}{x+1}\right|<1.$ Это неравенство равносильно неравенствам $-1<\dfrac{x}{x+1}<1,$ откуда при $(x+1)>0$ получаем:

$$x<x+1,$$
$$-(x+1)<x.$$

Первое неравенство выполняется при всех x, второе – при $x>-\dfrac{1}{2}.$

Значит, ряд сходится при $x>-\dfrac{1}{2}.$ При $x=-\dfrac{1}{2}$ получаем ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n},$$

который сходится (как знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям признака Лейбница).

Если $x+1<0$, то есть $x<-1$, то $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)>1;$ в этом случае получаем ряд, общий член которого $u_n=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{n}>\dfrac{1}{n}.$

Этот ряд расходится (каждый его член больше соответствующего члена расходящегося гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$). Следовательно, данный ряд сходится при $x\geq-\dfrac{1}{2},$ то есть его областью сходимости является промежуток $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right).$

Пример 160. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{x-1}{2x+1}\right)^{n}.$

Решение. Применяя признак Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов данного ряда. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|^{n}}=$$
$$=\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2n}}}=\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|,$$

то ряд сходится, когда $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|<1$, то есть $-1<\frac{x-1}{2x+1}<1$.

<u>*Если* $2x+1>0$</u>, то $-(2x+1)<x-1<(2x+1)$, откуда

$$\begin{cases}-2x-1<x-1,\\ x-1<2x+1,\end{cases}. \qquad \begin{cases}3x>0\\ x>-2\end{cases} \qquad \begin{cases}x>0\\ x>-2\end{cases}.$$

Последние неравенства выполняются для $x>0$, поэтому ряд сходится при $x>0$. При $x=0$ получаем сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям признака Лейбница).

<u>*Если* $2x+1<0$</u>, то $-(2x+1)>x-1>(2x+1)$, откуда

$$\begin{cases}-2x-1>x-1,\\ x-1>2x+1,\end{cases}. \qquad \begin{cases}3x<0\\ x<-2\end{cases} \qquad \begin{cases}x<0\\ x<-2\end{cases}.$$

Последние неравенства выполняются для $x<-2$, поэтому ряд сходится при $x<-2$. При $x=-2$ получаем расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (ряд Дирихле, $p<1$).

Следовательно, областью сходимости данного ряда является совокупность двух промежутков: $(-\infty,-2)\cup[0,+\infty)$.

Пример 161. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^{4n}}$.

Решение. Общий член ряда $u_n(x)=\frac{1}{1+x^{4n}}$.

<u>*Если* $|x|<1$</u>, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{4n}}=1\neq 0$.

Следовательно, ряд расходится.

<u>*Если* $|x|=1$</u>, то получим числовой ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}+\ldots,$$

который тоже расходится $\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}\neq 0\right)$.

<u>*Если* $|x|>1$</u>, то члены данного ряда меньше членов сходящегося геометрического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{4n}} \qquad \left(g=\frac{1}{x^4}<1,\quad \textit{отсюда}\ |x|>1\right).$$

На основании признака сравнения данный ряд сходится.

Следовательно, ряд сходится при значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| > 1$. Областью сходимости являются интервалы $-\infty < x < -1$ и $1 < x < \infty$.

Пример 162. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{x^2+n}$ сходится равномерно на всей числовой оси.

Решение.

При любом фиксированном значении x получаем знакочередующийся ряд, который сходится по признаку Лейбница и поэтому остаток ряда после n – го члена оценивается с помощью неравенства

$$|r_n(x)| < |u_{n+1}(x)|, \text{ то есть}$$

$$|r_n(x)| < \frac{1}{x^2+(n+1)} < \frac{1}{n+1}.$$

Используем определение равномерной сходимости. Так как здесь $|r_n(x)| < \frac{1}{n+1}$, то ясно, что для выполнения неравенства

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

достаточно, какого бы не было x, взять $n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$, так как это неравенство равносильно неравенству

$$\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon.$$

Таким образом, если, например, число N есть целая часть числа $\frac{1}{\varepsilon} - 1$, то для любых $n > N$ неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$ будет выполняться одновременно для всех x, а это означает, что ряд равномерно сходится на всей числовой оси.

Замечание. Ответим на вопрос, при каком n будет выполняться неравенство

$$|r_n(x)| < 0{,}01.$$

Если $\varepsilon = 0{,}01$, то $\frac{1}{\varepsilon} - 1 = 100 - 1 = 99$. Полагая $N = 99$, получим, для всех $n > 99$ будет справедливо неравенство

$$|r_n(x)| < 0{,}01.$$

Пример 163. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ не сходится равномерно в интервале $(-1,1)$.

Решение. Данный ряд – геометрический со знаменателем $g = x$, он сходится при $|x| < 1$. Остаток ряда после n – го члена

$$r_n = x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + \ldots = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to -1+0} |r_n(x)| = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x \to 1-0} |r_n(x)| = \infty$, то при $\varepsilon < \frac{1}{2}$ неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$ не будет выполняться при любом значении x.

Согласно определению равномерной сходимости, данный ряд не сходится равномерно в интервале $(-1,1)$.

Пример 164. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{x^2+n^2}$ сходится равномерно на всей числовой оси.

Решение. Очевидно, $\left| (-1)^{n-1} \frac{1}{x^2+n^2} \right| < \frac{1}{n^2}$ при всех $x \in (-\infty, \infty)$. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (ряд Дирихле $p = 2 > 1$).

На основании признака Вейерштрасса, данный ряд сходится равномерно на всей числовой оси.

Пример 165. Доказать, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{10^n}$ является непрерывной функцией при всех x.

Решение. Для всех членов ряда при всех x справедливо неравенство

$$\left| \frac{\cos nx}{10^n} \right| < \frac{1}{10^n}.$$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$ сходится (геометрический ряд со знаменателем $g=\frac{1}{10}<1$). Этот ряд мажорантный для данного ряда. Значит, исходный ряд сходится равномерно. Его сумма непрерывна при всех x как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.

Пример 166. Определить область сходимости и установить непрерывность суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x^2+1}$.

Решение.

При значении $x=0$ ряд расходится, так как получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1,$ общий член которого не стремится к нулю.

При всех остальных значениях x ряд сходится. Действительно, ряд знакоположительный и $\frac{1}{n^2x^2+1}\le\frac{1}{n^2x^2}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x^2}$ сходится

(ряд Дирихле, $p=2>1,$ $\frac{1}{x^2}$ – постоянный множитель при фиксированном x). По признаку сравнения данный ряд тоже сходится.

Каждый член рассматриваемого ряда – четная функция, его сумма тоже четная функция и поэтому непрерывность суммы ряда можно установить только в интервале $(0,+\infty)$.

Покажем, что в любом интервале $(a,+\infty),$ где $a>0,$ ряд сходится равномерно. Если $x\in(a,+\infty),$ то справедливо неравенство

$$\frac{1}{n^2x^2+1}\le\frac{1}{n^2a^2+1},$$

а числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2a^2+1}$$

сходится (сравнить с рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$).

По признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно.

Все члены ряда – непрерывные функции, следовательно, в любом интервале $(a,+\infty)$ сумма данного ряда есть непрерывная функция. Так как для любого $x>0$ можно всегда указать такое $a>0,$ что $a<x<+\infty,$ то сумма ряда будет непрерывна в интервале $(0,+\infty)$.

Исследовать возможность почленного дифференцирования рядов:

Пример 167. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n2^n}$.

Решение.

Члены ряда непрерывные и дифференцируемые функции при всех x.

Ряд сходится на всей числовой оси, так как

$$\left|\frac{\sin nx}{n2^n}\right|<\frac{1}{2^n}$$

для любого значения x.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{2^n}$ составлен из производных членов данного ряда. Он равномерно сходится на всей числовой оси, так как

$$\left|\frac{\cos nx}{2^n}\right|<\frac{1}{2^n}.$$

Следовательно, в силу свойства 2 данный ряд можно почленно дифференцировать в любой точке числовой оси.

После почленного дифференцирования получаем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n2^n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}.$$

Пример 168. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 3^n\pi x}{3^n}$.

Решение. Данный ряд имеет мажорантный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n},$ поэтому он равномерно сходится при любом значении x.

Составим ряд из производных членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\pi\cos 3^n\pi x.$$

Этот ряд расходится, так как предела общего члена при $n \to \infty$ не существует, следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости ряда ни при каком x.

В силу свойства 2 ряд нельзя почленно дифференцировать.

Пример 169. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{n^2}$.

Решение. Данный ряд расходится на всей числовой оси, так как $\lim_{n \to \infty} \cos \frac{x}{n^2} = 1,$ при любых x (не выполняется необходимое условие сходимости). Значит, на основании свойства 2 ряд нельзя почленно дифференцировать, несмотря на то, что ряд, составленный из производных его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin \frac{x}{n^2}}{n^2},$$

сходится равномерно на всей числовой оси.

Пример 170. Исследовать возможность почленного интегрирования ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2\sqrt{n}}.$$

Решение. Члены ряда $u_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2\sqrt{n}}$ (n = 1, 2, 3, ...) непрерывные функции при всех x. Данный ряд равномерно сходится при любом значении x, так как для него существует мажорантный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}}.$$

Следовательно, на основании свойства 3 ряд можно почленно интегрировать по любому интервалу. Интегрируя почленно, получаем

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2\sqrt{n}} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^2 + n^2\sqrt{n}},$$

где a и b - любые действительные числа.

Примеры для самостоятельного решения.

Найти области сходимости рядов:

171. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$ Ответ. $[-1,1).$

172. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nx^n}.$ Ответ. $(-\infty,-1]\cup(1,\infty).$

173. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\,x^n.$ Ответ. $x=0.$

174. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$ Ответ. $(-\infty,\infty).$

175. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(3-x^2\right)^n.$ Ответ. $\left(-2,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},2\right).$

176. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nxe^{-nx}.$ Ответ. $(0,+\infty).$

177. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^n.$ Ответ. $(-2{,}5,+\infty).$

Указание. $$\left|\frac{x+2}{x+3}\right|=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x+3}, & при\quad x<-3,\ \ x>-2\\ -\dfrac{x+2}{x+3}, & при\quad -3<x<-2.\end{cases}$$

178. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\cos^2 x}.$ Ответ. При любых значениях x ряд расходится.

179. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{2x-3}{4x+5}\right)^n.$ Ответ. $\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right)\cup\left(-\frac{5}{4},+\infty\right).$

180. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}.$ Ответ. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty).$

181. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n 2^{nx}.$ Ответ. $(-\infty,0).$

182. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3+x^{2n}}$. Ответ. $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

183. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$. Ответ. $(1,+\infty)$.

184. $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{nx}$. Ответ. $(-\infty,0)$.

185. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{n\sqrt{n}}$. Ответ. $(-\infty,+\infty)$.

186. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n^3+x^{2n}}$. Ответ. $(-\infty,+\infty)$.

Исследовать ряды на равномерную сходимость:

187. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+2^n}$.

Ответ: Равномерно сходится на всей числовой оси.

188. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{(n+1)3^n}$.

Ответ: Равномерно сходится на всей числовой оси.

189. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+3^n}$.

Ответ: Равномерно сходится при всех x.

190. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt[3]{n}}$.

Ответ: Равномерно сходится при всех x.

191. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}$.

Ответ: Сходится при всех x, но неравномерно.

Установить непрерывность сумм рядов:

192. $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-\left(n+x^2\right)}$. Ответ: Непрерывна в $(-\infty,+\infty)$.

193. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$. Ответ: Непрерывна в $(1,+\infty)$.

194. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{n}x}{x^2+n^3}$. Ответ: Непрерывна в $(-\infty,+\infty)$.

195. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}$. Ответ: Непрерывна в $(-\infty,+\infty)$.

196. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+(n+1)x)(1+nx)}$. Ответ: Равномерна при $x = 0$.

<u>Исследовать возможность почленного интегрирования рядов:</u>

197. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n!}$.

Ответ: Можно почленно интегрировать по любому конечному интервалу.

198. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2x^2}$.

Ответ: Можно почленно интегрировать по любому конечному интервалу.

199. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$.

Ответ: Можно почленно интегрировать по любому конечному интервалу.

<u>Исследовать возможность почленного дифференцирования рядов:</u>

200. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$.

Ответ: Можно почленно дифференцировать в любой точке..

201. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$.

Ответ: Можно почленно дифференцировать в любой точке.

202. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^6}$.

Ответ: Можно почленно дифференцировать в любой точке.

2.2 Степенные ряды, их сходимость и свойства.

Справочный материал

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \tag{7}$$

где $a_0, a_1 \ldots a_n, \ldots$ – действительные числа, называемые коэффициентами ряда,

x_0 - действительное число.

В частном случае, если $x_0 = 0,$ то степенной ряд (7) примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots. \tag{8}$$

Ряд (7) можно привести к ряду (8) подстановкой $x - x_0 = t.$ Поэтому все свойства степенных рядов формулируются для ряда вида (8).

Если некоторые из коэффициентов ряда обращаются в нуль, то степенной ряд можем, например, записать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n^2} \quad \text{и т.д.,}$$

где $b_n, c_n \quad (n = 0,1,2,\ldots)$ - действительные числа.

Областью сходимости степенного ряда всегда является интервал, который, в частности, может вырождаться в точку.

Радиусом сходимости ряда (8) *называется неотрицательное число R, такое, что при всех* $|x| < R$ *ряд абсолютно сходится, а при всех* $|x| > R$ *ряд расходится.*

Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда (8).

Если степенной ряд (8) сходится на всей числовой оси, то полагают $R = +\infty,$ если он сходится только при $x = 0,$ то полагают $R = 0.$

Область сходимости совпадает с интервалом сходимости в случаях $R = 0$ и $R = +\infty.$ При $0 < R < \infty$ надо исследовать сходимость ряда в точках $x = \pm R$ и в этом случае областью сходимости может быть один из интервалов $[-R, R),\quad (-R, R],\quad (-R, R)$ или $[-R, R].$

Для определения радиуса сходимости степенного ряда можно непосредственно пользоваться признаком Даламбера. Радиус сходимости ряда (8), в котором показатели степени x образуют натуральный ряд, можно вычислить по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (9)$$

Если же показатели степени x образуют арифметическую прогрессию с разностью k, то

$$R=\sqrt[k]{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}. \qquad (10)$$

Свойства степенных рядов:

1) *степенной ряд (8) сходится абсолютно и равномерно на всяком интервале, лежащем внутри его интервала сходимости, а его сумма непрерывна в каждой точке этого интервала;*
2) *степенной ряд (8) можно почленно дифференцировать и интегрировать внутри его интервала сходимости*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=S(x).$$

Для любого x из интервала сходимости имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^{n-1}=S'(x). \qquad (11)$$

Для любого интервала $[x_0,x]$ из интервала сходимости имеем:

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(x^{n+1}-x_0^{n+1}\right)=\int_{x_0}^{x}S(x)dx. \qquad (12)$$

При этом ряды (11) и (12) имеют тот же интервал сходимости, что и ряд (8). Операцию почленного дифференцирования и интегрирования можно производить над степенным рядом сколько угодно раз. Следовательно, сумма степенного ряда внутри его интервала сходимости является бесконечно дифференцируемой функцией.

Примеры решения задач

Найти радиусы и области сходимости степенных рядов:

Пример 203. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}.$

Решение: Коэффициент n – го члена ряда

$$a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2},$$

коэффициент $(n+1)$ – го члена ряда

$$a_{n+1} = (-1)^{n+2}\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Степени x образуют натуральный ряд чисел $1,2,3,\ldots,n,\ldots,$ поэтому для вычисления радиуса сходимости можно воспользоваться формулой (9).

Здесь

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} : (-1)^{n+2}\frac{1}{(n+1)^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

Интервал сходимости $(-1,1)$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При $x = -1$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}.$$

При $x = 1$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}.$$

Оба ряда абсолютно сходятся, так как ряд из абсолютных величин членов данных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (ряд Дирихле, $p = 2 > 1$).

Следовательно, областью сходимости данного ряда является интервал $[-1,1]$.

Пример 204. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}x^n.$

Решение: Здесь коэффициенты n – го и $(n+1)-$го членов ряда:

$$a_n = \frac{n^n}{(n+1)^n} \quad \text{и} \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}}.$$

Вычисляем

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=$$

$$=\frac{1}{e}\cdot e=1.$$

Интервал сходимости $(-1,1)$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При $x=-1$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n)^n}{(n+1)^n}.$$

При $x=1$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}.$$

Оба эти ряда расходятся, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}\neq 0,$$

то есть не выполняется необходимый признак.

Значит, область сходимости данного ряда (-1,1).

Пример 205. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-5)^n}{n!}.$

Решение: Полагая $(x-5)=t,$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n t^n}{n!}.$$

Для вычисления радиуса сходимости полученного ряда используем признак Даламбера:

$$u_n(t)=\frac{2^n t^n}{n!},\qquad u_{n+1}(t)=\frac{2^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}|t|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n|t|^n} =$$

$$= 2|t|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 2|t|\cdot 0 = 0 < 1.$$

Неравенство $2|t|\cdot 0 < 1$ выполняется при любых t.

Следовательно, ряд сходится для значений t, удовлетворяющих неравенству $-\infty < t < +\infty.$

Подставляя вместо t выражение $t = x - 5,$ получим, что данный ряд тоже сходится в интервале $(-\infty, \infty).$ Радиус сходимости $R = +\infty.$

Пример 206. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^{2n-1}}{2^n(2n-1)}.$$

Решение: Полагая $(x-3) = t,$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{2^n(2n-1)}.$$

Степени t образуют арифметическую прогрессию

$|2n-1|_{n=1}^{\infty} = \{1,3,5,7,\ldots,2n-1,\ldots\}$ с разностью *k = 2.*

Для вычисления радиуса сходимости используем формулу (10):

$$R = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2^n(2n-1)} : \frac{1}{2^{n+1}(2n+1)}} = \sqrt{2}.$$

Интервал сходимости $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right).$

Исследуем сходимость на концах интервала.

При $t = -\sqrt{2}$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(-\sqrt{2}\right)^{2n-1}}{2^n(2n-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

При $t = \sqrt{2}$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2n-1}}{2^n(2n-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Эти оба ряда сходятся по признаку Лейбница. Область сходимости $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$. Для данного ряда $-\sqrt{2} \le x-3 \le \sqrt{2}$ или $3-\sqrt{2} \le x \le 3+\sqrt{2}$.

Тот же результат можно получить, непосредственно применяя признак Даламбера к данному ряду:

$$u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{(x-3)^{2n-1}}{2^n(2n-1)}; \quad u_{n+1}(x) = (-1)^n \frac{(x-3)^{2n+1}}{2^{n+1}(2n+1)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-3|^{2n+1}}{2^{n+1}(2n+1)} \cdot \frac{2^n(2n-1)}{|x-3|^{2n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(x-3)^2 \cdot (2n-1)}{2(2n+1)} = \frac{(x-3)^2}{2} < 1.$$

Имеем $(x-3)^2 < 2$, откуда $|x-3| < \sqrt{2}$ или $-\sqrt{2} < x-3 < \sqrt{2}$ или $3-\sqrt{2} < x < 3+\sqrt{2}$.

При значении $x = 3-\sqrt{2}$ получим ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1};$$

При значении $x = 3+\sqrt{2}$ получим ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Эти ряды получены ранее.

Следовательно, область сходимости $\left[3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}\right]$.

Радиус сходимости $R = \sqrt{2}$.

Пример 207. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{4^n}.$$

Решение: В данном случае $u_n(x) = \dfrac{x^{n^2}}{4^n}$; $u_{n+1}(x) = \dfrac{x^{(n+1)^2}}{4^{n+1}}$;

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{(n+1)^2}}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{x^{n^2}}\right| = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}|x|^{2n+1} =$$

$$= \begin{cases} \infty, & при \ \ |x| > 1 \\ 0, & при \ \ |x| < 1. \end{cases}$$

Следовательно, ряд сходится при $|x|<1,$ то есть радиус сходимости $R = 1$, а интервал сходимости $(-1,1)$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -1$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n}.$$

Этот ряд сходится по признаку Лейбница.

При $x = 1$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}.$$

Этот ряд сходится (геометрический ряд со знаменателем $g=\frac{1}{4}<1$).

Таким образом, областью сходимости данного ряда является интервал $[-1,1]$.

Пример 208. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}.$$

Решение:

Для вычисления интервала сходимости используем признак Даламбера:

$$u_n(x)=(-1)^n\frac{x^n}{3^{n-1}\sqrt{n}},\qquad u_{n+1}(x)=(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{3^n\sqrt{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{3^n\sqrt{n+1}}\cdot\frac{3^{n-1}\sqrt{n}}{x^n}\right|=\frac{|x|}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{|x|}{3}.$$

Определим, при каких значениях x этот предел будет меньше единицы, то есть:

$$\frac{|x|}{3}<1;\qquad |x|<3;\qquad -3<x<3.$$

Согласно признаку Даламбера при любом значении x из найденного интервала данный ряд сходится (абсолютно), а при $x>3$ расходится.

Границы найденного интервала исследуем особо.

При $x = -3$ получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{n}},$$

который расходится, что следует из сравнения его с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

<u>При $x = 3$</u> получим числовой знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3}{\sqrt{n}}$, который сходится согласно признаку Лейбница.

Следовательно, интервалом сходимости данного степенного ряда является полуоткрытый интервал $-3 < x \le 3$.

Пример 209. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{(2n)!}\cdot x^{2n}$.

Решение: Здесь

$$u_n(x)=\frac{2^n n!}{(2n)!}x^{2n}; \qquad u_{n+1}(x)=\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)!}x^{2n+2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+1)!\,x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{2^n n!\,x^{2n}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)x^2}{(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{2n+1} =$$

$$= x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = x^2\cdot 0 = 0 < 1.$$

Следовательно, согласно признаку Даламбера этот ряд сходится при любом значении x; его интервал сходимости есть вся числовая ось $-\infty < x < +\infty$.

Пример 210. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$.

Решение: Здесь $u_n = \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$; $\qquad u_{n+1} = \frac{(x+8)^{3n+3}}{(n+1)^2}$;

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+8|^{3n+3}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{|x+8|^{3n}} =$$

$$= |x+8|^3 \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = |x+8|^3;$$

$$|x+8|^3<1;$$
$$|x+8|<1;$$
$$-1<x+8<1;$$
$$-9<x<-7.$$

Исследуем границы.

При $x = -9$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{n^2}$, который сходится согласно признаку Лейбница.

При $x = -7$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится (ряд Дирихле, $p=2>1$).

Следовательно, интервалом сходимости ряда является отрезок $-9\le x\le -7$, а радиус сходимости $R = 1$.

Пример 211. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x+2)^n}$.

Решение: Используем признак Даламбера:

$$u_n=\frac{1}{n(x+2)^n}; \qquad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(x+2)^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot|x+2|^n}{(n+1)\cdot|x+2|^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)\cdot|x+2|}=\frac{1}{|x+2|}.$$

$$\frac{1}{|x+2|}<1; \qquad |x+2|>1;$$

$$\begin{cases}x+2<-1,\\ x+2>1,\end{cases} \quad \begin{cases}x<-3,\\ x>-1,\end{cases} \quad (-\infty,-3)\cup(-1,+\infty).$$

Границы двух найденных интервалов исследуем особо.

При $x = -3$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(-1)^n}$. Знакочередующийся ряд сходится согласно признаку Лейбница.

При $x = -1$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, гармонический ряд.

Следовательно, область сходимости данного ряда состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty,-3]\cup(-1,+\infty)$.

Пример 212. $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(x-3)^n}.$$

Решение: Полагая $\frac{1}{x-3}=t$, получим степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}.$$

Радиус сходимости этого ряда определим по формуле (9):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

Интервал сходимости $(-1,1)$. При $t=-1$ получаем знакочередующийся сходящийся (по признаку Лейбница) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

а при $t=1$ получим гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Поэтому областью сходимости степенного ряда является интервал $-1\le t\le 1$.

Найдем область сходимости данного ряда. Подставляя в неравенство вместо t выражение $\frac{1}{x-3}$, получим

$$-1\le\frac{1}{x-3}<1.$$

Это неравенство равносильно двум неравенствам $x>4$ и $x\le 2$. Областью сходимости данного ряда будут интервалы $(-\infty, 2]$, и $(4, \infty)$.

Тот же результат получим, непосредственно применяя признак Даламбера к ряду из абсолютных величин членов данного ряда.

<u>Найти суммы рядов, применяя почленное дифференцирование и интегрирование:</u>

Пример 213. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Решение: Прежде всего найдем радиус сходимости данного ряда. Так как показатель x образует арифметическую прогрессию с разностью $k=2$, то

$$R=\sqrt[k]{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}}=1.$$

Пусть

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad x\in(-1,1).$$

В интервале сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать. Найдем

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2},\quad x\in(-1,1).$$

Это геометрический ряд со знаменателем $g=x^2<1,$ и, следовательно

$$S'(x)=\frac{1}{1-x^2}.$$

Степенной ряд можно почленно интегрировать внутри интервала сходимости.
Найдем

$$S(x)=\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,\quad x\in(-1,1).$$

Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

Пример 214. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)\cdot x^{2n-2}$.

Решение: Показатели степени x образуют арифметическую прогрессию с разностью $k=2$, то

$$R=\sqrt[k]{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}}=1.$$

Его сумма

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)\cdot x^{2n-2}, \quad x\in(-1{,}1).$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до x, получим

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-1}, \quad x\in(-1{,}1).$$

Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}=\frac{x}{1+x^2}$$

(геометрический ряд со знаменателем $g=-x^2$).

На основании формулы производной определенного интеграла по верхнему пределу получим

$$S(x)=\left(\int_0^x S(t)dt\right)'=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)\cdot x^{2n-2}=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Примеры для самостоятельного решения

Найти радиусы и области сходимости рядов:

215. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{3^{n^2}}(x-1)^n$. Ответ. $(-\infty,\infty)$.

216. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$. Ответ. $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

217. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{\frac{n}{3}}}{n!}x^n$. Ответ. $(-\infty,\infty)$.

218. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{(2n-1)3^n}}$. Ответ. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

219. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(2n-1)\cdot 3^n}$. Ответ. $[0,6]$.

220. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{5^n(5n-1)}$. Ответ. $[0,10]$.

221. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2x)^n$. Ответ. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

222. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x-1)^n}$. Ответ. $(-\infty,0]\cup(2,\infty)$.

223. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{x^n}$. Ответ. $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$.

224. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(2n+3)}{2^n x^n}$. Ответ. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},\infty\right)$.

225. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3^n(x+3)^n}$. Ответ. $\left(-\infty,-\frac{10}{3}\right)\cup\left(-\frac{8}{3},\infty\right)$.

226. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{(2n+9)^5(x+2)^{2n}}$. Ответ. $(-\infty,-3]\cup[-1,\infty)$.

227. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n(x+4)^n}$. Ответ. $\left(-\infty,-\frac{21}{5}\right)\cup\left(-\frac{19}{5},\infty\right)$.

Найти суммы рядов, применяя почленное дифференцирование и интегрирование:

228. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Ответ. $S(x)=arctgx,\ \ x\in[-1,1]$.

229. $-2x+4x^3-6x^5+8x^7-\ldots$

Ответ. $S(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2},\ \ x\in(-1,1)$.

230. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$. Ответ. $S(x)=\frac{1}{(1-x)^2},\ \ x\in(-1,1)$.

231. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. Ответ. $S(x)=-\ln(1-x),\ \ x\in[-1,1)$.

232. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$. Ответ. $S(x)=\ln(1+x),\ \ x\in(-1,1]$.

233. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. Ответ. $S(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,\ \ |x|<1$.

234. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n$. Ответ. $S(x)=\frac{1}{(x-1)^2},\ \ |x|<1$.

235. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)\cdot x^{n-1}$. Ответ. $S(x)=\frac{2}{(1-x)^3},\ \ |x|<1$.

2.3 Числовые и степенные ряды с комплексными членами.

Справочный материал

Числовым рядом с комплексными членами называется ряд

$$c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}c_n,$$

где $c_1=a_1+b_1 i,\ c_2=a_2+b_2 i,\ldots,c_n=a_n+b_n i,\ldots -$ комплексные числа $\left(i=\sqrt{-1};a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_n,b_n,\ldots\right)-$ действительные числа.

Сходимость и сумма числового ряда с комплексными членами определяется так же, как и для числового ряда с действительными членами. Выполнение условия

$$\lim_{n\to\infty}c_n=0$$

есть необходимый (но не достаточный) признак сходимости, а невыполнение этого условия есть достаточный признак расходимости всякого числового ряда с комплексными членами.

Исследование сходимости ряда с комплексными членами можно свести к исследованию сходимости двух рядов с действительными членами:

Ряд с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n i) \tag{13}$$

будет сходящимся, если сходятся два ряда с действительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad и \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{14}$$

При этом, если ряд (14) сходится соответственно к суммам *A* и *B,* то ряд (13) сходится к сумме $C = A + Bi.$

Если же хотя бы один из двух рядов (14) <u>*расходится*</u>, то и комплексный ряд (13) тоже расходится.

Ряд с комплексными членами (13) называется <u>*абсолютно сходящимся*</u>, если сходится ряд с действительными положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n i| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\ , \tag{15}$$

составленный из модулей его членов.

<u>*Если же ряд* (13) *сходится, а ряд* (15) *расходится, то ряд* (13) *называется неабсолютно сходящимся.*</u>

Абсолютная сходимость ряда есть достаточный (но не необходимый) признак сходимости ряда, то есть, <u>*если ряд сходится абсолютно, то он сходящийся.*</u>

Для исследования сходимости комплексных рядов можно пользоваться признаком Даламбера:

Если $$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = D,$$

то при $D<1$ *ряд сходится (абсолютно), а при* $D>1$ *– расходится.*

Комплексным степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{16}$$

где коэффициенты $a_n (n = 0,1,2,\ldots)$ **– комплексные числа,**

z_0 **– заданное комплексное число,**

$z = x + iy$ **– комплексная переменная,**

x **и** ***y*** **- вещественные переменные.**

Если $z_0 = 0,$ то получим степенной ряд вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{17}$$

Сформулируем основные положения.
Для каждого комплексного степенного ряда (17) существует такое число $R > 0$, что

для всех $|z| < R$ степенной ряд *сходится,*

а для всех $|z| > R$ - *расходится.*

Точки $z = x + iy,$ для которых $|z| < R$, лежат внутри круга радиуса R с центром в начале координат.

Этот круг называется кругом сходимости степенного ряда, а его радиус R - радиусом сходимости.

Для ряда (16) центр круга сходимости лежит в точке z_0 комплексной плоскости.

О сходимости степенного ряда на окружности $|z| = R$ в общем случае ничего сказать нельзя. Здесь в зависимости от ряда могут быть представлены различные случаи:

1) сходимость во всех точках окружности,
2) расходимость во всех точках,
3) сходимость в одних точках и расходимость в других.

Если ряд сходится только в точке $z = 0$, то получают $R = 0$; если ряд сходится во всех точках, то $R = \infty$.

Для определения радиуса сходимости можно применять признак Даламбера к ряду, составленному из абсолютных величин членов данного ряда, то есть к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n z^n \right|.$$

В случае, когда степени комплексной переменной z образуют натуральный ряд, радиус сходимости удобно вычислить по формуле

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \tag{18}$$

Примеры решения задач

<u>Исследовать сходимость ряда с комплексными членами:</u>

Пример 236. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 - 2i}{1 + \sqrt{n}}.$

Решение.
Заданный общий член ряда есть комплексное число, действительная часть которого $a_n = \frac{3}{1 + \sqrt{n}}$ и мнимая часть $b_n = -\frac{2}{1 + \sqrt{n}}$.

Здесь числовые ряды с действительными членами $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ оба расходятся, что следует из сравнения их с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Поэтому данный ряд с комплексными членами также расходится.

Пример 237. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (3i-1)^n}{5^n}$.

Решение. Используем признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(3i-1)^{n+1}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n(3i-1)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ell im\left|\frac{(n+1)(3i-1)}{5n}\right| = \frac{|3i-1|}{5} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{|3i-1|}{5} =$$

$$= \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{5} < 1.$$

Следовательно, данный ряд абсолютно сходящийся.

Пример 238. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{i}{2n+1}\right)$.

Решение. Здесь ряд с действительными членами

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} \quad \text{и} \quad b_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{знакочередующиеся.}$$

Согласно признаку Лейбница оба они сходятся. Поэтому заданный комплексный ряд также сходится.

Ряд, членами которого являются модули членов данного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n + b_n i| = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(2n+1)^2 + (2n-1)^2}{(2n-1)^2(2n+1)^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{8n^2+2}}{4n^2-1},$$

расходится (согласно признаку сравнения, ибо

$$\frac{\sqrt{8n^2+2}}{4n^2-1} > \frac{\sqrt{8n^2}}{4n^2} = \frac{1}{n\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{2}} = +\infty.$$

Это же следует из расходимости рядов $\sum |a_n|$ и $\sum |b_n|$).

Поэтому данный комплексный ряд сходится, но не абсолютно.

Найти радиусы сходимости данных комплексных рядов:

Пример 239. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\left(\sqrt{n-1}-i\right)\cdot z^n.$

Решение. Пользуемся признаком Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}\left(\sqrt{n}-i\right)\cdot z^{n+1}}{2^n\left(\sqrt{n-1}-i\right)\cdot z^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2\left(\sqrt{n}-i\right)\cdot z}{\sqrt{n-1}-i}\right| =$$

$$= 2|z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\sqrt{n}-i\right)\cdot\left(\sqrt{n-1}+i\right)}{\left(\sqrt{n-1}-i\right)\cdot\left(\sqrt{n-1}+i\right)}\right| =$$

$$= 2|z|\lim_{n\to\infty}\frac{\left|1+\sqrt{n(n-1)}+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)i\right|}{n} =$$

$$= 2|z|\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = 2|z|.$$

Согласно признаку Даламбера при всех значениях $z = x + iy$, удовлетворяющих неравенству $|z| < \frac{1}{2}$, данный ряд сходится, а при всех $|z| > \frac{1}{2}$ он расходится.

Геометрически данный ряд сходится внутри круга $|z| = \sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{2}$ и расходится вне этого круга, то есть искомый радиус сходимости $R = \frac{1}{2}.$

На границе круга сходимости – на окружности $|z| = \frac{1}{2}$ или $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ данный ряд расходится, ибо во всех точках этой границы общий член ряда $c_n = \sqrt{n-1} - i$ при $n \to \infty$ не стремится к нулю.

Пример 240. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{z^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1} = 0.$$

Согласно признаку Даламбера ряд абсолютно сходится при любом комплексном значении z, то есть его радиус сходимости $R=+\infty$.

Пример 241. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n z^{3n}}{n^2}.$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3+4i)^{n+1}\cdot z^{3n+3}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{(3+4i)^n\cdot z^{3n}}\right|=$$

$$=\lim\left|\frac{n^2(3+4i)\cdot z^3}{(n+1)^2}\right|=|z|^3\cdot|3+4i|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=$$

$$=|z|^3\sqrt{3^2+4^2}=5|z|^3.$$

Следовательно, ряд сходится при $5|z|^3<1$, то есть искомый радиус сходимости ряда $R=\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$. В точках на границе круга сходимости $|z|=\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ данный ряд также сходится, так как в этих точках сходимости числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, составленный из модулей его членов.

Пример 242. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n\cdot z^n}{n^3}.$$

Решение. Коэффициенты n – го и $(n+1)$ – го членов ряда

$$a_n=\frac{(2+i)^n}{n^3},\quad a_{n+1}=\frac{(2+i)^{n+1}}{(n+1)^3}.$$

Радиус сходимости определим по формуле (18):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2+i)^n}{n^3}:\frac{(2+i)^{n+1}}{(n+1)^3}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|2+i|}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Пример 243. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot z^n$.

Решение. Здесь $a_n = n^n$, $a_{n+1} = (n+1)^{(n+1)}$.

По формуле (18):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} = \frac{1}{e} \cdot 0 = 0.$$

Пример 244. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2-3i)}{(2n-1)!} \cdot z^{2n}$.

Решение. Используем признак Даламбера:

$$u_n(z) = \frac{n!(2-3i)}{(2n-1)!} z^{2n}; \quad u_{n+1}(z) = \frac{(n+1)!(2-3i)}{(2n+1)!} z^{2n+2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!(2-3i) \cdot z^{2n+2}}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{n!(2-3i) \cdot z^{2n}} \right| =$$

$$= z^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n(2n+1)} = z^2 \cdot 0 = 0 < 1, \quad \text{при всех } z.$$

Следовательно, ряд абсолютно сходится при любом комплексном значении z, то есть радиус сходимости $R = \infty$.

Пример 245. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4+3i)^n} \cdot (z+2i)^n$.

Решение. Используем признак Даламбера:

$$u_n = \frac{(z+2i)^n}{n(4+3i)^n}; \quad u_{n+1} = \frac{(z+2i)^{n+1}}{(n+1)(4+3i)^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(z+2i)^{n+1}}{(n+1) \cdot (4+3i)^{n+1}} \cdot \frac{n(4+3i)^n}{(z+2i)^n} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{|z+2i|}{|4+3i|} = \frac{|z+2i|}{|4+3i|} = \frac{|z+2i|}{5}.$$

Ряд будет сходиться, если $\frac{|z+2i|}{5} < 1$ или $|z+2i| < 5$.

Ряд сходится внутри круга радиуса 5 с центром в точке $z = -2i$.

<u>Исследовать поведение комплексных степенных рядов на границе их круга сходимости:</u>

Пример 246. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}.$

Решение. Радиус сходимости данного ряда $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1.$ Ряд сходится абсолютно в круге радиуса 1. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n^2}.$$

На границе круга сходимости, то есть на окружности $|z|=1$ или $x^2+y^2=1,$ получим сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (ряд Дирихле, $p = 2 > 1$). Следовательно, во всех точках окружности $|z|=1$ данный ряд сходится и притом абсолютно.

Пример 247. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}+i\right)\cdot z^n.$

Решение. Здесь $a_n=\sqrt{n}+i,\quad a_{n+1}=\sqrt{n+1}+i.$

Радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n}+i}{\sqrt{n+1}+i}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}=1.$$

На границе $|z|=1.$ Ряд из абсолютных величин членов данного ряда примет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\sqrt{n}+i\right|.$ Этот ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{n}+i\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}=\infty\right).$$

Но тогда и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}+i\right)\cdot z^n,$ где $|z|=1,$ будет тоже расходиться по той же причине.

Следовательно, данный ряд на границе своего круга сходимости расходится.

Примеры для самостоятельного решения

Исследовать на сходимость следующие ряды с комплексными членами:

248. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1+i)^{2n}}{n!}$. Ответ. Сходится абсолютно.

249. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}-i}{n+1}$. Ответ. Расходится.

250. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+(-1)^n\dfrac{i}{3n}\right)$. Ответ. Сходится не абсолютно.

251. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3-i)^n}{10^n n}$. Ответ. Сходится абсолютно.

Найти радиусы сходимости комплексных степенных рядов:

252. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$. Ответ. $R=1$.

253. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$. Ответ. $R=\infty$.

254. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot z^n}{3^n}$. Ответ. $R=3$.

255. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\left(\sqrt{n+3}-2i\right)\cdot z^n$. Ответ. $R=\dfrac{1}{2}$.

256. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(z-2+4i)^n$. Ответ. $R=0$. Ряд сходится только в точке $z=2-4i$.

257. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3+4i)^n}{n^2}z^{3n}$. Ответ. $R=\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

258. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n+1}(z+1-3i)^n$. Ответ. $R=0$.

259. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}(z-i)^n$. Ответ. $R=e$.

260. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(3+(-1)^n\right)\cdot z^n.$ Ответ. $R=\frac{1}{4}.$

261. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(n+3^n\right)\cdot z^n.$ Ответ. $R=\frac{1}{3}.$

262. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n!}.$ Ответ. $R=\infty.$

Найти области сходимости комплексных степенных рядов:

263. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot z^n}{2^n}.$ Ответ. Область сходимости $|z|<2.$

264. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2i)^n\cdot(z-i)^n}{n(n+1)}.$ Ответ. Область сходимости

$$|z-i|\le\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Глава 3
Разложение функций в степенные ряды.

3.1 Разложение элементарных функций в степенные ряды.

Справочный материал

Если функция $f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в интервале (a,b), то в этом интервале можно написать разложение этой функции по формуле Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x) \qquad (19)$$
$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (20)$$
где x_0 и $x\in(a,b)$;

$r_n(x)$ - остаточный член в форме Лагранжа;

c - некоторое среднее значение между x_0 и x,

$$c=x_0+\theta(x-x_0), \quad 0<\theta<1.$$

Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в интервале (a,b), то по аналогии с формулой Тейлора для функции можно записать степенной ряд

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \qquad (21)$$

Этот ряд независимо от того, сходится ли он и чему равна его сумма, называется рядом Тейлора функции $f(x)$.

Сравнивая ряд Тейлора (21) с формулой (19), мы видим, что его частичная сумма

$$S_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

связана с функцией $f(x)$ соотношением

$$f(x)=S_n(x)+r_n(x).$$

В частном случае при $x_0=0$ имеем

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (22)$$

Этот ряд называется рядом Маклорена функции $f(x)$.

Сформулируем условия, при выполнении которых можно утверждать, что ряд Тейлора сходится в некотором интервале и что в этом интервале его сумма равна соответствующим значениям функции.

Необходимое и достаточное условие.

Для того чтобы ряд Тейлора (21) *для функции* $f(x)$ *сходился в интервале* $(x_0 - h,\ \ x_0 + h)$, *h > 0, и имел функцию* $f(x)$ *своей суммой, необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ *для всякого* $x \in (x_0 - h,\ x_0 + h)$.

Достаточное условие.

Если функция $f(x)$ *бесконечно дифференцируема в интервале* $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ *и ее производные равномерно ограничены в этом интервале, то есть существует такое положительное (не зависящее от n) число L, что* $\left| f^{(n)}(x) \right| \le L \quad (n = 1,2,3,\dots)$

при всех $x \in (x_0 - h,\ x_0 + h)$, *то в этом интервале*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

При разложении функции в ряд Тейлора можно рекомендовать следующую схему:

1) найти производные $f'(x),\ f''(x), \dots,\ f^{(n)}(x), \dots$, стремясь при этом вывести общую формулу для производной n-го порядка;

2) вычислить значения $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0), \dots$ и найти коэффициенты ряда Тейлора

$$a_0 = f(x_0),\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (n = 1,2,3,\dots);$$

3) записать ряд Тейлора для функции $f(x)$

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots,$$

найти его интервал сходимости и область сходимости;

4) проверить, допускает ли функция разложения в свой ряд Тейлора, то есть, справедливо ли равенство

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Для этого можно использовать либо необходимое и достаточное условие разложения (найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где c находится между x и x_0), либо достаточное условие (оценить $\left|f^{(n)}(x)\right| \le L; \quad n = 1,2,3,\ldots, \quad 0 < L < +\infty$).

Для обхода процесса многократного дифференцирования при разложении некоторых функций в ряд Тейлора могут быть использованы готовые разложения основных элементарных функций в комбинации с правилами сложения, вычитания, умножения рядов и теоремами об интегрировании и дифференцировании степенных рядов.

Особенно часто при этом используются разложения в ряд по степеням x следующих функций (которые поэтому полезно помнить):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots, \quad -1 < x \le 1;$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad -1 \le x \le 1;$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n + \ldots.$$

Это разложение справедливо

при $\alpha \geq 0, \qquad \text{если} \quad -1 \leq x \leq 1;$

при $-1 < \alpha < 0, \quad \text{если} \quad -1 < x \leq 1;$

при $\alpha \leq -1, \qquad \text{если} \quad -1 < x < 1.$

Примеры решения задач

<u>Написать ряды Тейлора для функций в окрестности заданной точки и исследовать их сходимость:</u>

Пример 265. $\quad f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1.$

Решение.

1) Найдем производные функции и выведем выражение для *n*-ой производной

$$f(x) = \ln x,$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1},$$
$$f''(x) = (-1)x^{-2},$$
$$f'''(x) = (-1)(-2)x^{-3},$$
$$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4},$$
…………………………………………
$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)\ldots[-(n-1)]x^{-n} =$$
$$= (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n},$$
…………………………………………

2) Вычислим значения данной функции и ее производных в точке $x_0 = 1$:

$$f(1) = 0,$$
$$f'(1) = 1,$$
$$f''(1) = -1,$$
$$f'''(1) = 2!,$$
…………………………………………
$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$
…………………………………………

3) Запишем ряд Тейлора для данной функции:

$$\ln x = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 +$$

$$+\frac{2!}{3!}(x-1)^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n + \ldots =$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Интервал сходимости найдем, применяя признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(-1)^{n-1}(x-1)^n}\right| = |x-1|.$$

Ряд сходится, если

$$|x-1| < 1,$$
$$-1 < x-1 < 1,$$
$$0 < x < 2.$$

При $x = 0$ получаем расходящийся ряд $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

При $x = 2$ получаем сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

Область сходимости данного ряда (0, 2].

Пример 266 . $f(x) = x^3 \ln x, \quad x_0 = 1.$

Решение.

1) Найдем производные функции и выведем выражение для n-ой производной

$$f(x) = x^3 \ln x,$$
$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2,$$
$$f''(x) = 6x \ln x + 5x,$$
$$f'''(x) = 6 \ln x + 11,$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{6}{x}=6x^{-1},$$
$$f^{(5)}(x)=6\cdot(-1)x^{-2},$$
$$f^{(6)}(x)=6\cdot(-1)(-2)x^{-3},$$
$$f^{(7)}(x)=6\cdot(-1)(-2)(-3)x^{-4},$$
$$f^{(8)}(x)=6\cdot(-1)(-2)(-3)(-4)x^{-5},$$
……………………………………………………..
$$f^{(n+3)}(x)=(-1)^{n-1}6\cdot(n-1)!\cdot x^{-n},$$
$$\text{где}\quad n=1,2,3,\ldots.$$

2) Вычислим значения данной функции и ее производных в точке $x_0=1$:

$$f(1)=0,$$
$$f'(1)=1,$$
$$f''(1)=5,$$
$$f'''(1)=11,$$
$$f^{IV}(1)=6,$$
$$f^{V}(1)=-6,$$
$$f^{VI}(1)=6\cdot 2,$$
$$f^{VII}(1)=-6\cdot 2\cdot 3,$$
$$f^{VIII}(1)=6\cdot 2\cdot 3\cdot 4,$$
………………………………………….
$$f^{(n+3)}(1)=(-1)^{n-1}\cdot 6\cdot(n-1)!.$$

3) Запишем ряд Тейлора для данной функции:

$$x^3\ln x=0+\frac{x-1}{1!}+\frac{5}{2!}(x-1)^2+\frac{11}{3!}(x-1)^3+\ldots+$$
$$+6\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n+3)!}(x-1)^{n+3}.$$

Найдем интервал сходимости, применяя признак Даламбера к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n+3)!}(x-1)^{n+3},$$

так как на сходимость ряда не влияет отбрасывание в начале ряда конечного числа членов. Вычисляем предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!(x-1)^{n+4}}{(n+4)!}\cdot\frac{(n+3)!}{(n-1)!(x-1)^{n+3}}\right| =$$

$$=\lim_{n\to\infty}|x-1|\cdot\frac{n}{n+4}=|x-1|.$$

$$|x-1|<1,$$

$$-1<x-1<1,$$

$$0<x<2.$$

Таким образом, ряд сходится в интервале $0<x<2.$

Исследуем сходимость ряда на концах полученного интервала.

При $x=0$ получим положительный числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(n+3)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Этот ряд сходится (сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$). При $x=2$ получим числовой знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)},$$

который тоже сходится, так как сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Итак, область сходимости ряда Тейлора $[0,2]$.

Пример 267 . $f(x)=\ln(7+3x),\quad x_0=-2.$

Решение.

1) Найдем производные функции и выведем выражение для n-ой производной:

$$f(x)=\ln(7+3x),$$

$$f'(x)=\frac{3}{7+3x}=3\cdot(7+3x)^{-1},$$

$$f''(x)=(-1)\cdot 3^2\cdot(7+3x)^{-2},$$

$$f'''(x)=(-1)(-2)\cdot 3^3\cdot(7+3x)^{-3},$$

……………………………………..

$$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\ldots[-(n-1)]\cdot 3^n\cdot(7+3x)^{-n}=$$

$$=(-1)^{n-1}3^n(n-1)!\cdot(7+3x)^{-n},$$

……………………………………..

2) Вычислим значения данной функции и ее производных в точке $x_0 = -2$:

$$f(-2) = \ln(1) = 0,$$
$$f'(-2) = 3,$$
$$f''(-2) = 3^2 \cdot 1!,$$
$$f'''(-2) = 3^3 \cdot 2!,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(-2) = (-1)^{n-1} \cdot 3^n \cdot (n-1)!,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3) Запишем ряд Тейлора для данной функции:

$$\ln(7+3x) = 0 + \frac{3}{1!}(x+2) -$$
$$-\frac{3^2 \cdot 1!}{2!}(x+2)^2 + \frac{3^3 \cdot 2!}{3!}(x+2)^3 - \ldots +$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{3^n(n-1)!}{n!}(x+2)^n + \ldots,$$

$$\ln(7+3x) = 3(x+2) - \frac{3^2}{2}(x+2)^2 + \frac{3^2}{3}(x+2)^3 - \ldots +$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n}(x+2)^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^n}{n}(x+2)^n.$$

Применяя признак Даламбера найдем интервал сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1} \cdot (x+2)^{n+1}}{n+1} : \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3^n \cdot (x+2)^n}{n}\right| =$$
$$= 3|x+2|.$$

Ряд сходится, если

$$3|x+2| < 1,$$
$$|x+2| < \frac{1}{3},$$
$$-\frac{1}{3} < x+2 < \frac{1}{3} \text{ или } -\frac{7}{3} < x < -\frac{5}{3}.$$

При $x=-\frac{7}{3}$ получаем расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

При $x=-\frac{5}{3}$ получаем сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Область сходимости данного ряда $\left(-\frac{7}{3},-\frac{5}{3}\right]$.

<u>Написать ряды Тейлора для заданных функций в окрестности указанных точек и проверить выполнение условий разложения функций в свои ряды Тейлора:</u>

Пример 268. $f(x)=\cos x, \quad x_0=\frac{\pi}{4}.$

Решение.

1) Найдем производные функции и выведем выражение для n-ой производной:

$$f(x)=\cos x,$$

$$f'(x)=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x)=-\cos x=\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x)=\sin x=\cos\left(x+3\frac{\pi}{2}\right),$$

……………………………………..

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

2) Вычислим значения функции и ее производных при $x_0=\frac{\pi}{4}$:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

……………………….

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sign}\cos\frac{(2n+1)\pi}{4}.$$

3) Запишем ряд Тейлора:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1!}-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\ldots+\right.$$

$$\left.+\operatorname{sign}\cos\frac{(2n+1)\pi}{4}\cdot\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}+\ldots\right].$$

Найдем радиус сходимости ряда

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\infty.$$

Ряд сходится на всей числовой оси.

4) Докажем, что сумма ряда Тейлора равна заданной функции. Используем необходимое и достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора. Запишем остаточный член формулы Тейлора:

$$r_n(x)=\frac{\cos\left[c+(n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n+1},$$

где c находится между x и $\frac{\pi}{4}$.

Так как $\left|\cos\left[c+(n+1)\frac{\pi}{2}\right]\right|\le 1,$

то $$|r_n(x)|\le\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (*)$$

Рассмотрим ряд с общим членом

$$u_n(x)=\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{то есть} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Радиус сходимости этого ряда $R=+\infty,$ в чем легко убедиться с помощью признака Даламбера. В силу необходимого признака сходимости ряда, общий член сходящегося ряда при $n\to\infty$ стремится к нулю, то есть

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!}=0.$$

Следовательно, на основании неравенства (*)

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0,$$

и поэтому сумма ряда Тейлора совпадает с функцией $\cos x,$ то есть

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\operatorname{sign}\cos\frac{(2n+1)\pi}{4}\right]\cdot\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n}}{n!}$$

при $-\infty<x<\infty.$

Пример 269. $f(x)=\sin^2 x,\quad x_0=0.$

Решение. Продифференцируем функцию $n+1$ раз:

$$f(x)=\sin^2 x,$$
$$f'(x)=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x,$$
$$f''(x)=2\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$f'''(x)=-2^2\sin 2x=2^2\sin\left(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$f^{IV}(x)=-2^3\cos 2x=2^3\sin\left(2x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=2^{n-1}\sin\left[2x+\frac{\pi}{2}(n-1)\right],$$
$$f^{(n+1)}(x)=2^{n}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}n\right).$$

Находим $f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ldots f^{(n)}(x)$ в точке $x=0,$ а значение $f^{(n+1)}(x)$ определяем в точке $x=c.$

Получаем

$$f(0)=0,$$
$$f'(0)=0,$$
$$f''(0)=2,$$
$$f'''(0)=0,$$
$$f^{IV}(0)=(-2)^3,$$
$$f^{V}(0)=0,$$
$$f^{VI}(0)=2^5,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n+1)}(c)=2^n\sin\left(2c+\frac{\pi}{2}n\right).$$

Находим остаточный член

$$r_n=\frac{2^n\cdot\sin\left(2c+\frac{\pi}{2}n\right)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1},$$

или
$$r_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(2c+\frac{\pi}{2}n\right).$$

Так как при любом x $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}=0,$ а $\sin\left(2c+\frac{\pi}{2}n\right)$ - величина ограниченная, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0.$ Следовательно, функцию $f(x)=\sin^2 x$ можно представить в виде суммы ряда Тейлора:

$$\sin^2 x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\frac{2^7}{8!}x^8+\ldots.$$

Задачу можно решить и иначе.

В равенстве $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ заменяем $\cos 2x$ его разложением в степенной ряд:

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\ldots.$$

Выполнив несложные преобразования, получаем найденное выше разложение $\sin^2 x.$

Разложить данные функции в ряды Маклорена:

Пример 270. $f(x)=2^x.$

Решение.

1) Найдем производные данной функции:

$$f'(x)=2^x\ln 2,$$
$$f''(x)=2^x\ln^2 2,$$
$$f'''(x)=2^x\ln^3 2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x)=2^x\ln^n 2.$$

2) Вычислим значения функции и ее производных в точке $x_0=0$:

$$f(0)=1,$$
$$f'(0)=\ln 2,$$
$$f''(0)=\ln^2 2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(0)=\ln^n 2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3) Запишем ряд Маклорена для данной функции:

$$2^x=1+\frac{\ln 2}{1!}x+\frac{\ln^2 2}{2!}x^2+\ldots+\frac{\ln^n 2}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 2}{n!}x^n.$$

Найдем область сходимости ряда. Радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^n 2}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{\ln^{n+1}2}=+\infty.$$

Область сходимости $(-\infty,+\infty)$.

4) Покажем, что ряд своей суммой имеет функцию 2^x. Для этого используем достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора при $x_0=0$. Так как $0<\ln 2<1$, то при любом фиксированном x

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=2^x\cdot\ln^n 2<2^x.$$

При каждом фиксированном x из интервала $(-\infty, +\infty)$ полагаем $2^x = L > 0$,

то есть $2^x \cdot \ln^n 2 < L, \qquad n = 1,2,3,\ldots$

Согласно достаточному условию, имеет место разложение

$$2^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n 2}{n!} \cdot x^n, \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Разложение данной функции в ряд Маклорена можно получить иначе, используя известное разложение

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Заменяем в этом разложении x на $x \ln 2$ и учитываем, что $e^{x \ln 2} = 2^x$.

Получаем
$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 2}{n!} \cdot x^n, \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Пример 271. $\quad f(x) = \ln(5 + x).$

Решение.

Данную функцию запишем в виде

$$\ln(5 + x) = \ln 5\left(1 + \frac{x}{5}\right) = \ln 5 + \ln\left(1 + \frac{x}{5}\right).$$

Используем известное разложение

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (-1 < x \le 1).$$

В этом разложении заменим x на $\frac{x}{5}$. Получим

$$\ln\left(1 + \frac{x}{5}\right) = \frac{x}{5} - \frac{x^2}{5^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{5^3 \cdot 3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{5^n \cdot n} + \ldots,$$

$$-1 < \frac{x}{5} \le 1 \quad \text{или} \quad -5 < x \le 5.$$

Следовательно, ряд Маклорена для данной функции

$$\ln(5 + x) = \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{5^n \cdot n}, \qquad (-5 < x \le 5).$$

Пример 272. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$.

Решение.

Эту функцию можно рассматривать как сумму геометрического ряда со знаменателем $g=-x^3$ и первым членом *a = 1.* Так как геометрический ряд сходится при $|g|<1,$ то при $|x|<1$ будет справедливо разложение

$$\frac{1}{1+x^3}=1-x^3+x^6-x^9+\ldots+(-1)^n x^{3n}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}, \qquad (-1<x<1).$$

Пример 273. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

Решение.

Используем разложение

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots[\alpha-(n-1)]}{n!}\cdot x^n+\ldots$$

$$(-1<\alpha<0), \quad (-1<x\le 1).$$

В этом разложении вместо *x* подставим $x^3,$ а вместо α подставим $-\dfrac{1}{2}$.

Получим искомое разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}=1-\frac{1}{2}x^3+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^6-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^9+\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{3n}+\ldots \quad \left(-1<x^3\le 1\right)$$

или $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}x^{3n}, \qquad (-1<x\le 1).$

Разложить в ряд Тейлора функцию по степеням x, применяя таблицы простейших разложений.

Пример 274. $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ по степеням x.

Решение.

Так как

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad (-\infty<x<+\infty),$$

то
$$e^x-1=x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

и
$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

Пример 275. $f(x)=x\cdot\ln\left(1+x^2\right)$ по степеням x.

Решение.

Так как

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \qquad (-1<x\le 1),$$

то, заменяя в последнем равенстве x на x^2, получим

$$\ln\left(1+x^2\right)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}+\ldots \qquad (-1<x\le 1),$$ а потому

$$x\cdot\ln\left(1+x^2\right)=x^3-\frac{x^5}{2}+\frac{x^7}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{n}+\ldots$$
$$(-1<x\le 1).$$

Пример 276. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ по степеням $(x-1)$.

Решение. Преобразуем эту функцию так, чтобы можно было использовать разложение функции

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots, \qquad (-1<x<1).$$

Полагая $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{a}{1-b(x-1)}$, из тождества $1-b(x-1)=a(x+2)$ найдем $a=\frac{1}{3}, \quad b=-\frac{1}{3}.$

Следовательно,

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{-3}}. \qquad (*)$$

Заменив в разложении функции $\frac{1}{1-x}$ x через $\frac{x-1}{-3}$, получим

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{x-1}{3}+\frac{(x-1)^2}{3^2}-...+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{3^n}+...\right].$$

Это разложение справедливо, когда

$$\left|\frac{x-1}{-3}\right|<1,$$

т.е. $-1<\frac{x-1}{3}<1, \quad -3<x-1<3$ или в интервале $-2<x<4.$

Пример 277. $f(x)=\ln\left(1+3x+2x^2\right).$

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$\ln\left(1+3x+2x^2\right)=\ln(1+x)\cdot(1+2x)=\ln(1+x)+\ln(1+2x).$$

Ряды Маклорена для полученных слагаемых функций:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \qquad (-1<x\le 1),$$

$$\ln(1+2x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\cdot x^n}{n}, \qquad \left(-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}\right)$$

(второй ряд получен из первого путем замены x на $2x$), и складывая их почленно, имеем

$$\ln\left(1+3x+2x^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+2^n\right)\cdot\frac{x^n}{n}, \qquad \left(-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}\right).$$

Все полученные в решении этой задачи ряды для заданных функций являются рядами Маклорена для этих функций, ибо вообще, ***если какая-либо функция разлагается в степенной ряд, то он является ее рядом Тейлора.***

Примеры для самостоятельного решения.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки:

278. $f(x)=\dfrac{1}{x+5}, \quad x_0=2.$

Ответ. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-2)^n}{7^{n+1}}, \quad -5<x<9.$

279. $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4}, \quad x_0=2.$

Ответ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{2n-2}\dfrac{(x-2)^{2n-2}}{(2n-2)!}.$

Написать ряды Тейлора для заданных функций в окрестностях указанных точек и проверить выполнение условий разложения функций в свои ряды Тейлора:

280. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}, \quad x_0=1.$ Ответ. $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x-1)^n, \quad (0{,}2).$

281. $f(x)=e^x, \quad x_0=2.$

Ответ. $e^{-2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{n!}, \quad (-\infty,\infty).$

282. $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}, \quad x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

Ответ. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}\right)}{2^n\cdot n!}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^n, \quad (-\infty,\infty).$

283. $f(x)=\sqrt{x}, \quad x_0=4.$

Ответ. $2+\dfrac{1}{4}(x-4)+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-3)!!}{2^{3n-1}\cdot n!}(x-4)^n, \quad [0{,}8].$

284. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}, \quad x_0=-1.$

Ответ. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n, \quad (-2{,}0).$

Разложить в ряд следующие функции:

285. $f(x) = (x - \operatorname{tg} x)\cos x$ по степеням x.

Ответ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)\,!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (-\infty < x < +\infty).$

286. $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ по степеням x.

Ответ. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)\,!}, \quad (-\infty < x < +\infty).$

287. $f(x) = \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}$ по степеням x.

Ответ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n}}{(n+1)\,!}, \quad (-\infty < x < +\infty).$

288. $f(x) = e^{3x}$ по степеням $(x-1)$.

Ответ. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x-1)^n}{n!}, \quad (-\infty < x < +\infty).$

289. $f(x) = \frac{1}{x-4}$ по степеням $(x+2)$.

Ответ. $-\frac{1}{6}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{6^n}, \quad (-8 < x < 4).$

Разложить данные функции в ряд Маклорена:

290. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

Ответ. $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3^n \cdot n!} x^{3n}, \quad (1 < x \le 1).$

291. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

Ответ. $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} x^{2n}, \quad (1 < x \le 1).$

292. $f(x)=e^{x^2}$.

Ответ. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}, \quad (-\infty<x<+\infty).$

293. $f(x)=e^{-2x}$.

Ответ. $1-\frac{2x}{1!}+\frac{4x^2}{2!}-\frac{8x^3}{3!}+\ldots, \quad (-\infty<x<+\infty).$

294. $f(x)=\frac{1}{x+8}$. Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^{3(n+1)}}, \quad |x|<8.$

295 $f(x)=\frac{1}{3-2x}$. Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{3^{n+1}}, \quad |x|<\frac{3}{2}.$

<u>Используя ряды Маклорена, найти разложения в ряд по степеням x:</u>

296. $\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$.

Ответ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(n+1)!}, \quad (-\infty,+\infty).$

297. $(1+x)\cdot e^x$. Ответ. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n, \quad (-\infty,+\infty).$

298. $e^{-x}\cdot\sin x$.

Ответ. $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{40}x^5+\frac{7}{360}x^6+\ldots \quad (-\infty,+\infty).$

299. $\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$.

Ответ. $x-\frac{1}{2}x^2+x^3-\frac{5}{4}x^4+\ldots \quad \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$

300. $x\cdot\cos 2x$.

Ответ. $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n+1}}{(2n)!}, \quad (-\infty,+\infty).$

3.2 Приложения степенных рядов к приближенным вычислениям значений функций и интегралов.

Справочный материал

Для вычисления при заданном значении аргумента приближенных значений функции $f(x)$ и интеграла $\int_a^x f(x)dx$ как функции верхнего предела, где a – число, находят их разложения в степенные ряды. В полученных рядах оставляют n первых членов и вычисляют их сумму при заданном значении x. Эту сумму и принимают за приближенное значение функции или интеграла. Для оценки погрешности приближенного вычисления оценивают сумму остатка ряда после n-го члена при том же значении x. Если ряд знакопостоянный, то его остаток можно, например, сравнить с геометрическим рядом. Если ряд знакочередующийся, для которого выполняются условия признака Лейбница, то используется оценка

$$|r_n(x)| < |u_{n+1}(x)|$$

где $u_{n+1}(x)$ - первый из отброшенных членов ряда.

Примеры решения задач

3.2.1 Вычисление приближенного значения данных функций с указанной точностью

Вычислить приближенные значения данных функций с указанной точностью:

Пример 301. $\frac{\pi}{6}$ с точностью до 0,001.

Решение: Воспользуемся известным разложением

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$
$$-1 \le x \le 1.$$

Заметим, что при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

Получаем

$$\frac{\pi}{6} = arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^7 + \ldots +$$

$$+(-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1} + \ldots$$

или $$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{\frac{2n+1}{2}}}.$$

Это знакочередующийся ряд, для которого выполнены условия признака Лейбница, значит, остаток этого ряда после n-го члена

$$|r_n| < \frac{1}{(2n+3)} \cdot \frac{1}{3^{\frac{2n+3}{2}}} \qquad (*)$$

Приближенное значение $\frac{\pi}{6}$ получим, оставив в ряде n первых членов и вычислив их сумму. Выберем n так, чтобы погрешность приближенного равенства

$$\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2\sqrt{3}} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{\frac{2n+1}{2}}}$$

по абсолютной величине не превышала 0,001, то есть, должно быть

$$|r_n| < 0{,}001.$$

Учитывая неравенство (*), переходим к неравенству

$$|r_n| < \frac{1}{(2n+3)} \cdot \frac{1}{3^{\frac{2n+3}{2}}} < 0{,}001.$$

Путем подбора легко убедиться, что при $n = 3$ это неравенство уже справедливо

$$|r_3| < \frac{1}{\sqrt{3}\cdot 3^6} < 0{,}001.$$

Итак, для вычисления $\frac{\pi}{6}$ с точностью до 0,001 достаточно взять 4 члена $(n = 0{,}1{,}2{,}3{,}\ldots)$.

Вычисляем

$$\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\cdot(\sqrt{3})^3} + \frac{1}{5\cdot(\sqrt{3})^5} - \frac{1}{7\cdot(\sqrt{3})^7} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - 0{,}1111 + 0{,}0222 - 0{,}0053) = 0{,}5239 \approx 0{,}524.$$

Получим $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}524.$

Пример 302. e^2 с точностью до 0,001.
Решение:

Воспользуемся разложением $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (-\infty < x < \infty).$

Полагая $x = 2,$ получим $e^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$

Определим n так, чтобы погрешность приближенного равенства

$$e^2 \approx 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} \quad \text{не превышала 0,001.}$$

С этой целью преобразуем остаток ряда после n-го члена

$$r_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{2^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{2^{n+3}}{(n+3)!} + \ldots <$$

$$< \frac{2^n}{n!}\left(\frac{2}{n+1} + \frac{2^2}{(n+1)^2} + \frac{2^3}{(n+1)^3} + \ldots\right).$$

Ряд в скобках – геометрический ряд с первым членом $\frac{2}{n+1}$ и со знаменателем $g = \frac{2}{n+1}.$ Сумма этого ряда $\frac{a}{1-g} = \frac{2}{n-1}.$
Для остатка ряда получили выражение

$$r_n < \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{2}{n-1}.$$

Для вычисления суммы ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ с точностью до 0,001 должно выполняться неравенство $r_n < 0{,}001$ или $\frac{2^{n+1}}{n!(n-1)} < 0{,}001.$

Это неравенство справедливо при $n = 9.$

Действительно,

$$r_8 = \frac{512}{282240} \approx 0{,}00181, \quad r_9 = \frac{1024}{32659200} \approx 0{,}00003.$$

Следовательно, для вычисления e^2 с точностью до 0,001 надо взять десять первых членов ряда

$$e^2 \approx 1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}+\frac{2^6}{6!}+\frac{2^7}{7!}+\frac{2^8}{8!}+\frac{2^9}{9!}=$$
$$=1{,}0000+2{,}0000+2{,}0000+1{,}3333+0{,}6667+0{,}2667+$$
$$+0{,}0889+0{,}0254+0{,}0064+0{,}0014=7{,}3888.$$

Получим $e^2 \approx 7{,}389.$

Пример 303. $\sin 10^\circ$ с точностью до 0,00001.

Решение:

Вычислим радианную меру угла в 10°

$$x_0=\frac{\pi}{180^\circ}\cdot 10^\circ=0{,}174533.$$

Используем разложение

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}+\ldots,$$
$$-\infty<x<+\infty.$$

и подставим в него значение x_0.

Получим знакочередующийся числовой ряд

$$\sin 10^\circ=0{,}174533-\frac{(0{,}174533)^3}{3!}+\frac{(0{,}174533)^5}{5!}-\ldots$$

Для вычисления с требуемой точностью достаточно взять два члена ряда, так как $\dfrac{(0{,}174533)^5}{5!}<0{,}00001.$

Действительно,

$$\ell n(0{,}174533)^5=5\ell n\,0{,}174533=5(\ell n1{,}74533-\ell n10)=$$
$$=5(0{,}5596-2{,}3016)=-5\cdot 1{,}7420=-8{,}71,$$
$$0{,}174533^5=e^{-8{,}71}=0{,}0000167;$$
$$\frac{0{,}0000167}{5!}=\frac{0{,}0000167}{120}\approx 0{,}0000014<0{,}00001.$$

Следовательно,

$$\sin 10^\circ \approx 0{,}174533-\frac{1}{3!}(0{,}174533)^3.$$

Получаем $\sin 10^\circ \approx 0{,}17365.$

Пример 304. $\ln 1{,}1$ с точностью до 0,0001.

Решение:

Возьмем ряд для функции $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,$$

который сходится к $\ln(1+x)$ в интервале $(-1{,}1]$, и, полагая $x = 0{,}1$, получим ряд для вычисления $\ln 1{,}1$ с любой точностью:

$$\ln 1{,}1 = 0{,}1 - \frac{(0{,}1)^2}{2} + \frac{(0{,}1)^3}{3} - \frac{(0{,}1)^4}{4} + \ldots.$$

Абсолютное значение четвертого члена этого ряда меньше 0,0001. Поэтому, согласно свойству знакочередующегося сходящегося, для вычисления приближенного значения $\ln 1{,}1$ с точностью до 0,0001 достаточно взять сумму трех первых членов ряда

$$\ln 1{,}1 \approx 0{,}1 - \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}001}{3} \approx 0{,}0953.$$

3.2.2 Вычисление логарифмов.

Справочный материал

Известны формулы

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad (-1 < x \le 1)$$

и $$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots \quad (-1 \le x < 1).$$

Эти ряды сходятся медленно. Желая, например, по первой формуле вычислить $\ln 2$, *мы, полагая* $x = 1$, *получим*

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots.$$

Чтобы получить $\ln 2$ *с точностью до 0,001, нам надо будет взять 999 членов, так как по теореме Лейбница погрешность в этом случае будет по абсолютной величине меньше первого из отброшенных членов, т.е.* $\frac{1}{1000}$.

Совершенно ясно, что медленная сходимость этого ряда не дает возможности сколько-нибудь эффективно применить его для приближенного вычисления логарифмов, а потому надо постараться получить ряд с более быстрой сходимостью.

Составим разность $\ln(1+x)-\ln(1-x)$. *Вычитая ряды, получим*

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=2x+2\frac{x^3}{3}+2\frac{x^5}{5}+2\frac{x^7}{7}+\ldots$$

или

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right), \qquad (**)$$

который сходится для значений x, *удовлетворяющих неравенству* $|x|<1$. *Значение* $x=1$ *следует исключить, так как при* $x=1$ $\ln(1-x)$ *не существует.*

Теперь получим ряд для вычисления $\ln(N+h)$ *по известному* $\ln N$. *Положим, что*

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{N+h}{N}.$$

Отсюда следует, что $x=\dfrac{h}{2N+h}$ *и тогда из* (**) *получаем*

$$\ln\frac{N+h}{N}=2\left[\frac{h}{2N+h}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2N+h}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^5+\ldots\right],$$

а отсюда

$$\ln(N+h)=\ln N+2\left[\frac{h}{2N+h}+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^5+\ldots\right] \qquad (***)$$

Теперь оценим верхнюю границу погрешности, возникающей от отбрасывания членов.

Если положить приближенно, что

$$\ln(N+h)\approx\ln N+2\left[\frac{h}{2N+h}+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^5+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2n-1}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n-1}\right],$$

то погрешность этого равенства выражается остатком ряда

$$r_n=2\left[\frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n+3}+\ldots\right].$$

В правой части этого равенства заменим в каждом слагаемом знаменатель первого множителя на $2n+1$. *Таким образом, все знаменатели, кроме первого, уменьшатся, а соответствующие дроби увеличатся, и мы получим*

$$r_n < 2\left[\frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n+3} + \ldots\right];$$

$$r_n < 2\cdot\frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n+1}\cdot\left[1+\left(\frac{h}{2N+h}\right)^2+\left(\frac{h}{2N+h}\right)^4+\ldots\right].$$

В правой части неравенства в квадратной скобке стоит бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, так как

$$\frac{h}{2N+h}=x, \text{ а } |x|<1.$$

Сумма этого ряда равна

$$S=\frac{1}{1-\left(\frac{h}{2N+h}\right)^2}.$$

Тогда

$$r_n < 2\cdot\frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n+1}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{h}{2N+h}\right)^2}.$$

Зная, что $\dfrac{h}{2N+h}=x,$ *можно получить верхнюю границу погрешности, возникающей от отбрасывания членов в более удобном для записи виде, а именно*

$$r_n < 2\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\cdot\frac{1}{1-x^2}. \qquad (****)$$

Теперь приступим к вычислению логарифмов.

Примеры решения задач

Пример 305. Вычислить $\ln 2$ с точностью до 0,0001.

Решение: В формуле для определения $\ln(N+h)$ и неравенства для оценки r_n полагаем $h=1,\quad N=1:$

$$\ln 2\approx\ln 1+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\ldots\right);$$

$$r_n < 2\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2},$$

$$r_n < \frac{1}{4\cdot(2n+1)\cdot 3^{2n-1}}.$$

Путем подбора определим n так, чтобы выполнялось неравенство $r_n < 0{,}0001.$

Если $n=2,$ то $r_2 < \frac{1}{4\cdot5\cdot3^3};\quad r_2 < \frac{1}{540};$

если $n=3,$ то $r_3 < \frac{1}{4\cdot7\cdot3^5};\quad r_3 < \frac{1}{6804};$

если $n=4,$ то $r_4 < \frac{1}{4\cdot9\cdot3^7};\quad r_4 < \frac{1}{10000}.$

Итак, $n=4$, и для определения $\ln 2$ получаем приближенное равенство $\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot3^3}+\frac{1}{5\cdot3^5}+\frac{1}{7\cdot3^7}\right)$. Суммируя эти четыре слагаемых, получим

$$\ln 2 \approx 0{,}66667+0{,}02469+0{,}00165+0{,}00013=$$
$$=0{,}69314\approx 0{,}6931.$$

Пример 306. Вычислить $\ln 5$ с точностью до 0,0001.
Решение:

Полагаем $h=1,\quad N=4.$

Тогда

$$\ln 5 = \ln 4 + 2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot9^3}+\frac{1}{5\cdot9^5}+\ldots\right);$$

$$r_n < \frac{1}{40\cdot(2n+1)\cdot 9^{2n-1}}.$$

Если $n=1,$ то $r_1 < \frac{1}{40\cdot3\cdot9};\ r_1 < \frac{1}{1080};$

если $n=2,$ то $r_2 < \frac{1}{40\cdot5\cdot9^3};\ r_2 < \frac{1}{10000}.$

Значит, достаточно взять два члена ряда.

Следовательно,

$$\ln 5 \approx 2\ln 2 + 2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot9^3}\right)\approx 1{,}38628+0{,}22222+0{,}00090=$$
$$=1{,}60940.$$

3.2.3 Приближенное вычисление корней.

Справочный материал

Пусть нужно вычислить $\sqrt[m]{A}$, где *m – натуральное число, A - действительное число (положительное, если m – четное). Преобразуем число A, для этого подберем целое число a так, чтобы его m-я степень* a^m *была по возможности ближе к A, то есть*

$$\left|A-a^m\right|<a^m.$$

Положим $A=a^m+b$, *где* $|b|<a^m$, *получим*

$$\sqrt[m]{A}=\sqrt[m]{a^m+b}=a\sqrt[m]{1+\frac{b}{a^m}}=a\left(1+\frac{b}{a^m}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Обозначив $x=\dfrac{b}{a^m},\ \alpha=\dfrac{1}{m}$, *мы сможем для вычисления использовать биноминальный ряд.*

Примеры решения задач

Пример 307. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0,001.

Решение: Биноминальный ряд

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n+\ldots;\quad[-1,1]$$

позволяет вычислять значение корней с любой степенью точности.

Так как 5^3 является ближайшим к числу 130 кубом целого числа, то целесообразно число 130 представить в виде суммы двух слагаемых:

$$130=5^3+5.$$

Тогда

$$\sqrt[3]{130}=\sqrt[3]{5^3+5}=5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}}=5(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}}=$$
$$=5\left[1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}04+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot 0{,}0014+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}\cdot 0{,}000064+\ldots\right]=$$
$$=5+\frac{1}{3}\cdot 0{,}2-\frac{1}{9}\cdot 0{,}008+\frac{5}{8!}\cdot 0{,}00032-\ldots.$$

Четвертый член меньше 0,0001, поэтому его и следующие за ним члены можно отбросить.

Итак, $\sqrt[3]{130} \approx 5 + 0{,}0667 - 0{,}0009$, т.е. $\sqrt[3]{130} \approx 5{,}066.$

3.2.4 Приближенное вычисление определенных интегралов

Справочный материал

Многие практические нужные определенные интегралы не могут быть вычислены с помощью формулы Ньютона-Лейбница, ибо ее применение связано с нахождением первообразной, часто не выражаемой в элементарных функциях.

Если, однако, подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат интервалу сходимости этого ряда, то приближенное вычисление интеграла оказывается осуществимым с наперед заданной точностью.

Примеры решения задач

<u>*Вычислить с точностью до 0,0001 данные интегралы:*</u>

Пример 308. $\int\limits_0^1 \sqrt{x} \cdot \sin x dx$

Решение.

Первообразная функции $f(x) = \sqrt{x} \sin x$ не выражается в элементарных функциях, поэтому применить формулу Ньютона- Лейбница для вычисления интеграла нет возможности. Однако данный интеграл можно вычислить приближенно с помощью рядов.

Ведем функцию

$$\varphi(x) = \int\limits_0^x \sqrt{x} \cdot \sin x dx.$$

В данной задаче требуется вычислить значение этой функции при $x = 1.$ Подынтегральную функцию разложим в ряд Маклорена. Для этого используем разложение

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad -\infty < x < +\infty$$

и умножим его на $\sqrt{x},$ где $0 \le x < +\infty.$

Получим

$$\sqrt{x}\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-\frac{1}{2}}}{(2n-1)\,!}, \quad 0 \le x < +\infty.$$

Интегрируя почленно полученный ряд, находим

$$\varphi(x) = \int_0^x \sqrt{x}\cdot\sin x dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(2n-1)\,!}\cdot\frac{x^{2n+\frac{1}{2}}}{2n+\frac{1}{2}}.$$

Полагая в написанном разложении $x = 1,$ получим числовой ряд

$$\varphi(1) = \int_0^1 \sqrt{x}\cdot\sin x dx = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n-1)\,!(4n+1)}.$$

Так как ряд знакочередующийся и сходящийся, то из неравенства

$$\frac{2}{(2n+1)\,!(4n+5)} < 0{,}0001 \text{ или } (2n+1)!(4n+5) > 20000$$

найдем число членов ряда, которое надо взять для приближенного вычисления интеграла.

Получаем, что при $n = 2(2n+1)\,!(4n+5) = 9360,$ а при $n = 3(2n+1)\,!(4n+5) = 85680.$

Итак, для вычисления с заданной точностью достаточно взять первые три члена разложения. Вычисляем

$$\int_0^1 \sqrt{x}\cdot\sin x dx \approx 0{,}4000 - 0{,}0370 + 0{,}0013 = 0{,}3643.$$

Пример 309. $\displaystyle\int_0^{1/2} e^{-x^2}dx$

Решение: Для разложения подынтегральной функции в степенной ряд используем разложение

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad -\infty < x < +\infty,$$ заменяя в нем x на $\left(-x^2\right)$.

Получим

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Интегрируя этот ряд почленно, получим

$$\int_0^x e^{-x^2}dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

При $x = \frac{1}{2}$ запишем

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Полученный числовой ряд есть знакочередующийся сходящийся ряд. Поэтому

$$\frac{1}{(n+1)!(2n+3)\cdot 2^{2n+3}} < 0{,}0001$$

или $\quad (n+1)!(2n+3)\cdot 2^{2n+3} > 10000.$

Это неравенство выполняется при $n = 3.$

Итак, для вычисления с заданной точностью достаточно взять первые четыре члена (при $n = 0,1,2,\ldots$)

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{10\cdot 2^5} - \frac{1}{42\cdot 2^7}.$$

Пример 310. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$

Решение: Разложим подынтегральную функцию в биноминальный ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = \left(1+t^4\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^8 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^{12} + \ldots.$$

Этот ряд сходится к биному $\left(1+t^4\right)^{-\frac{1}{2}}$ при $|t| < 1.$

Интегрируя в пределах от 0 до $\frac{1}{2}$, найдем

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = t - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^5}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{t^9}{9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{t^{13}}{13} + \ldots \Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9\cdot 2^9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 13\cdot 2^{13}} + \ldots.$$

Вычислим несколько последовательных первых членов полученного знакочередующегося сходящегося ряда (с одним лишним знаком):

$$a_1 = 0{,}50000; \quad a_2 \approx -0{,}00313; \quad a_3 \approx 0{,}00008.$$

Согласно свойству знакочередующегося сходящегося ряда, для вычисления интеграла с точностью до 0,0001 достаточно взять сумму двух первых членов ряда

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \approx 0{,}50000 - 0{,}00313 \approx 0{,}4969.$$

Ошибка этого приближенного значения меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов ряда, то есть меньше $a_3 \approx 0{,}00008.$

Пример 311. $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx.$

Решение: Пользуясь рядом Маклорена для $\cos x,$ заменяя в нем x на $\sqrt{x},$ имеем

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} - \ldots \quad (x \geq 0).$$

Интегрируя в указанных пределах, получим

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx = x - \frac{x^2}{2!\cdot 2} + \frac{x^3}{4!\cdot 3} - \frac{x^4}{6!\cdot 4} + \frac{x^5}{8!\cdot 5} - \ldots \Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!\cdot 2} + \frac{1}{4!\cdot 3} - \frac{1}{6!\cdot 4} + \frac{1}{8!\cdot 5} - \ldots.$$

Пятый член этого знакочередующегося сходящегося ряда меньше 0,0001. Поэтому для вычисления искомого приближенного значения интеграла достаточно взять сумму четырех первых членов ряда:

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} - \frac{1}{2880} \approx 0{,}7635.$$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить приближенные значения данных выражений с точностью до 0,0001:

312. $\sin 9°.$ Ответ. $0{,}1564.$

313. $\cos 6°.$ Ответ. $0{,}9945.$

314. $\cos 10°.$ Ответ. $0{,}9948.$

315. $\ln 0{,}98$. Ответ. $-0{,}0202$.

316. $\ln 3$. Ответ. $1{,}0986$.

317. $\ln 10$. Ответ. $2{,}3026$.

318. $arctg\, 0{,}2$. Ответ. $0{,}1973$.

319. $\sin 0{,}6$. Ответ. $0{,}2955$.

320. $\cos 0{,}3$. Ответ. $0{,}9554$.

321. $\sqrt{e}$. Ответ. $1{,}6484$.

322. $\sqrt[3]{30}$. Ответ. $3{,}1072$.

323. $\sqrt{1{,}005}$. Ответ. $1{,}0025$.

324. $\sqrt[3]{70}$. Ответ. $4{,}1211$.

325. $\sqrt[3]{1{,}06}$. Ответ. $1{,}0196$.

326. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Ответ. $0{,}4931$.

327. $\int\limits_0^{1/6} \frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^2}}$. Ответ. $0{,}1664$.

328. $\int\limits_0^{0{,}1} \frac{e^x-1}{x}\,dx$. Ответ. $0{,}1025$.

329. $\int\limits_0^{1/2} \frac{arctg x}{x}\,dx$. Ответ. $0{,}4874$.

Вычислить с точностью до 10^{-3}:

330. $\ln 8$. Ответ. $2{,}079$.

331. $\ln 9$. Ответ. $2{,}197$.

332. $\ln 10$. Ответ. $2{,}302$.

333. $\ln 17$. Ответ. $2{,}833$.

334. $\sqrt[10]{1027}$. Ответ. $2{,}001$.

335. $\sqrt[3]{500}$. Ответ. $7{,}937$.

336. $\int\limits_0^{0{,}5} \cos\frac{x^2}{4}\,dx$. Ответ. $0{,}500$.

337. $\int\limits_0^{0,2} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$ Ответ. 0,201.

338. $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx.$ Ответ. 0,946.

339. $\int\limits_0^{0,25} \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx.$ Ответ. 0,072.

340. $\int\limits_0^{0,125} \sqrt[3]{x}\cos^2 x dx.$ Ответ. 0,047.

341. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{1+x^2}.$ Ответ. 0,785.

342. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x}\,dx.$ Ответ. 0,758.

343 $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx.$ Ответ. 0,098.

344. $\int\limits_0^{1} \sin x^2 dx.$ Ответ. 0,310.

345. $\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$ Ответ. 0,333.

346. $\int\limits_0^{1/9} \sqrt{x}\cdot e^x$ Ответ. 0,026.

3.3. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов.

Справочный материал

При некоторых условиях решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения представимо в виде суммы сходящегося степенного ряда по степеням $x - x_0$, где x_0 - начальное значение независимой переменной x. Решение обыкновенного дифференциального уравнения в виде степенного ряда можно получить двумя способами:

1) способом неопределенных коэффициентов;
2) способом последовательного дифференцирования.

Применим эти методы для решения линейных дифференциальных уравнений, то есть уравнений вида

$$y^{(n)} + P_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x) \cdot y = f(x).$$

Если коэффициенты и правая часть такого дифференциального уравнения разлагаются по степеням $(x - x_0)$ в степенные ряды, сходящиеся в некоторой окрестности точки $x = x_0$, то решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0, \\ &y'(x_0) = y_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{aligned}$$

где $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ - произвольно заданные числа, разлагается по степеням $(x - x_0)$ в степенной ряд, сходящийся, по крайней мере, в меньшем из интервалов сходимости рядов для коэффициентов и правой части дифференциального уравнения.

<u>*Способ неопределенных коэффициентов*</u> состоит в следующем:

а) записывают решение дифференциального уравнения в виде степенного ряда с неопределенными коэффициентами

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots;$$

б) из начальных условий определяют значения коэффициентов

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1};$$

в) подставляют в дифференциальное уравнение вместо y и производных $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ соответствующие степенные ряды, а вместо коэффициентов и правой части, зависящих от x, записывают их разложения в степенные ряды по степеням $\left(x-x_0\right)$ и получают тождество;

г) приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях разности $\left(x-x_0\right)$ в обеих частях полученного тождества.

Из полученных таким образом уравнений определяют коэффициенты ряда.

Способ последовательного дифференцирования основан на применении ряда Тейлора и состоит в следующем:

а) искомое решение записывают в виде ряда Тейлора

$$y=\sum_0^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n;$$

б) первые n коэффициентов этого ряда определяют, используя начальные условия при $x=x_0$

$$\begin{aligned}&y(x_0)=y_0,\\&y'(x_0)=y_1,\\&\dots\dots\dots\dots\dots\\&y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1};\end{aligned}$$

в) подставляют в исходное уравнение $x=x_0$ и находят $y^{(n)}(x_0)$;

г) остальные коэффициенты находят, последовательно дифференцируя исходное уравнение и подставляя $x=x_0$.

Примеры решения задач

Пример 347. Найти решение уравнения

$$y''+\sin x\cdot y'+y=x\cdot\cos x,$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям: при $x_0=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Решение: Данное уравнение – линейное неоднородное с переменными коэффициентами, причем коэффициент уравнения $\sin x$ и его правая часть $x\cdot\cos x$ разлагаются в ряды по степеням x:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}+\ldots,\quad -\infty<x<\infty;$$

$$x\cdot\cos x=x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)\,!}+\ldots\right)=$$

$$=x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}-\ldots+(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n)\,!}+\ldots,\quad -\infty<x<\infty.$$

Так как коэффициент и правая часть уравнения разлагаются в степенные ряды, сходящиеся на всей числовой оси, то решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, также разлагаются в степенной ряд, сходящийся на всей числовой оси.

Решим это уравнение двумя изложенными способами.

Способ неопределенных коэффициентов:

а) запишем искомое решение в виде

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

и дважды почленно продифференцируем (дважды, поскольку данное уравнение второго порядка)

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + n \cdot a_n x^{n-1} + \ldots,$$

$$y'' = 2a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + 3 \cdot 4 \cdot a_4 x^2 + \ldots + (n-1) \cdot n \cdot a_n x^{n-2} + \ldots;$$

б) начальные данные $x_0 = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$ подставим в разложение y и y'; получим систему уравнений

$$y(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 + \ldots = 1$$

$$y'(0) = a_1 + 2a_2 \cdot 0 + \ldots + na_n \cdot 0 + \ldots = 0,$$

из которой находим первые два коэффициента $a_0 = 1,\ a_1 = 0;$

в) запишем неизвестную функцию y, ее производные, коэффициент уравнения и его правую часть, с учетом уже вычисленных коэффициентов ряда, в виде

$$y = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n,$$

$$y' = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n \cdot a_n x^{n-2},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$x \cdot \cos x = x - \frac{x^3}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!};$$

подставим эти разложения в данное уравнение и получим тождество

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n\cdot a_n x^{n-2}+$$

$$+\left(x-\frac{x^3}{6}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot a_n x^{n-1}+$$

$$+1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n x^n\equiv x-\frac{x^3}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!};$$

перемножим ряды, стоящие в левой части тождества

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot a_n x^{n-1}=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{na_n}{5!}x^{n+4}-\frac{na_n}{7!}x^{n+6}+\frac{na_n}{9!}x^{n+8}-\frac{na_n}{11!}x^{n+10}+\ldots\right),$$

и тождество перепишем в виде

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{(n-1)n\cdot a_n x^{n-2}+a_n x^n+n\cdot a_n x^n-\frac{na_n}{6}x^{n+2}+\right.$$

$$\left.+\frac{na_n}{5!}x^{n+4}-\frac{na_n}{7!}x^{n+6}+\frac{na_n}{9!}x^{n+8}-\frac{na_n}{11!}x^{n+10}+\ldots\right\}\equiv$$

$$\equiv x-\frac{x^3}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!};$$

г) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества, причем процесс приравнивания коэффициентов следует вести до тех пор, пока не будет выяснено, как построить следующую строку по предыдущей

x^0 | $1\cdot 2\cdot a_2+1=0$

x^1 | $2\cdot 3\cdot a_3=1$

x^2 | $3\cdot 4\cdot a_4+3a_2=0$

x^3 | $4\cdot 5\cdot a_5+4a_3=-\frac{1}{2}$

x^4 | $5\cdot 6\cdot a_6+5a_4-\frac{1}{6}\cdot 2a_2=0$

x^5 | $6\cdot 7\cdot a_7+6a_5-\frac{1}{6}\cdot 3\cdot a_3=\frac{1}{4!}$

x^6 | $7\cdot 8\cdot a_8+7a_6-\frac{1}{6}\cdot 4\cdot a_4+\frac{1}{5!}\cdot 2\cdot a_2=0$

$$x^7 \quad \Big| \quad 8\cdot 9\cdot a_9 + 8a_7 - \frac{1}{6}\cdot 5\cdot a_5 + \frac{1}{5!}\cdot 3\cdot a_3 = -\frac{1}{6!}$$

$$x^8 \quad \Big| \quad 9\cdot 10 a_{10} + 9a_8 - \frac{1}{6}\cdot 6a_6 + \frac{1}{5!}\cdot 4a_4 - \frac{1}{7!}\cdot 2a_2 = 0$$

$$x^9 \quad \Big| \quad 10\cdot 11 a_{11} + 10a_9 - \frac{1}{6}\cdot 7a_7 + \frac{1}{5!}\cdot 5a_5 - \frac{1}{7!}\cdot 3a_3 = \frac{1}{8!}$$

$$x^{10} \quad \Big| \quad 11\cdot 12 a_{12} + 11a_{10} - \frac{1}{6}8a_8 + \frac{1}{5!}6a_6 - \frac{1}{7!}4a_4 + \frac{1}{9!}2a_2 = 0$$

$$x^{11} \quad \Big| \quad 12\cdot 13 a_{13} + 12a_{11} - \frac{1}{6}9a_9 + \frac{1}{5!}7a_7 - \frac{1}{7!}5a_5 + \frac{1}{9!}3a_3 = -\frac{1}{10!}$$

$$x^{12} \quad \Big| \quad 13\cdot 14 a_{14} + 13a_{12} - \frac{1}{6}10a_{10} + \frac{1}{5!}8a_8 - \frac{1}{7!}6a_6 + \frac{1}{9!}4a_4 - \frac{1}{11!}2a_2 = 0$$

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Полученную систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_2, a_3, \ldots, a_n$, разрешаем последовательно

$$a_2 = -0{,}5000,$$

$$a_3 = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667,$$

$$a_4 = \frac{1}{3\cdot 4}\left(-3a_2\right) \approx 0{,}1250,$$

$$a_5 = \frac{1}{4\cdot 5}\left(-4a_3 - \frac{1}{2!}\right) \approx -0{,}0583,$$

$$a_6 = \frac{1}{5\cdot 6}\left(-5a_4 - \frac{1}{6}2a_2\right) \approx -0{,}0264,$$

$$a_7 = \frac{1}{6\cdot 7}\left(-6a_5 + \frac{1}{6}3a_3 + \frac{1}{4!}\right) \approx -0{,}0113,$$

$$a_8 = \frac{1}{7\cdot 8}\left(-7a_6 + \frac{1}{6}4a_4 - \frac{1}{5!}2a_2\right) = 0{,}0049,$$

$$a_9 = \frac{1}{8\cdot 9}\left(-8a_7 + \frac{1}{6}5a_5 - \frac{1}{5!}3a_3 - \frac{1}{6!}\right) \approx -0{,}0025,$$

$$a_{10}=\frac{1}{9\cdot 10}\left(-9a_8+\frac{1}{6}6a_6-\frac{1}{5!}4a_4-\frac{1}{7!}2a_2\right)\approx -0{,}0008,$$

$$a_{11}=\frac{1}{10\cdot 11}\left(-10a_9+\frac{1}{6}7a_7-\frac{1}{5!}5a_5-\frac{1}{7!}3a_3-\frac{1}{8!}\right)\approx 0{,}0004.$$

Замечаем, что при вычислении коэффициентов $a_{10}, a_{11},\ldots$ слагаемые, в знаменателе которых стоит $5!, 7!, \ldots,$ много меньше по модулю рядом стоящих слагаемых

$$-(n+1)a_n+\frac{1}{6}(n-2)a_{n-2}, \quad n=10{,}11,\ldots,$$

поэтому коэффициенты $a_{12}, a_{13},\ldots$ можно приближенно вычислить по формуле

$$a_{n+2}\approx\frac{-1}{n+2}a_n+\frac{1}{6}\frac{(n-2)}{(n+1)(n+2)}a_{n-2}, \quad n=10{,}11{,}12,\ldots.$$

Найденные значения коэффициентов подставляем в искомое решение. Получаем решение в виде

$$y\approx 1-0{,}5000x^2+0{,}1667x^3+0{,}1250x^4-0{,}0583x^5-$$
$$-0{,}0264x^6+0{,}0113x^7+0{,}0049x^8-0{,}0025x^9-0{,}0008x^{10}+$$
$$+0{,}0004x^{11}-\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{n+2}\left(a_n-\frac{1}{6}\frac{n-2}{n+1}a_{n-2}\right)x^{n+2},$$

где $a_{10}=-0{,}0008, \quad a_8=0{,}0049.$

Способ последовательного дифференцирования:

а) запишем искомое решение в виде ряда Маклорена

$$y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots,$$ предполагая при этом, что этот степенной ряд сходится на всей числовой оси и его можно почленно дифференцировать в любой точке;

б) первые два коэффициента ряда известны из начальных условий данного уравнения $y(0)=1,\ y'(0)=0;$

в) значение $y''(0)$ находим подстановкой начальных данных в исходное уравнение

$$y''(0)+\sin 0\cdot y'(0)+y(0)=0\cdot\cos 0 \text{ или } y''(0)=-1;$$

г) находим производные последовательным дифференцированием данного уравнения

$$y''=-\cos x\cdot y'-\sin x\cdot y''-y'+\cos x-x\cdot\sin x,$$

$$y''' = -(1+\cos x)\cdot y' - \sin x \cdot y'' + \cos x - x\cdot \sin x,$$
$$y^{(4)} = \sin x \cdot y' - (1+2\cos x)\cdot y'' - \sin x\cdot y''' - 2\sin x - x\cos x,$$
$$y^{(5)} = \cos x\cdot y' + 3\sin x\cdot y'' - (1+3\cos x)\cdot y''' - \sin x\cdot y^{(4)} - 3\cos x + x\sin x,$$
$$y^{(6)} = -\sin x\cdot y' + 4\cos x\cdot y'' + 6\sin x\cdot y''' - (1+4\cos x)\cdot y^{(4)} - \sin x\cdot y^{(5)} +$$
$$+ 4\sin x + x\cos x,$$
откуда находим

при $x=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=-1,\quad y'''(0)=1,$

$y^{(4)}(0)=3,\ y^{(5)}(0)=-7,\ y^{(6)}(0)=-19.$

Решение уравнения получаем в виде
$$y = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{3}{4!}x^4 - \frac{7}{5!}x^5 - \frac{19}{6!}x^6 - \ldots$$
или $y \approx 1 - 0{,}5000x^2 + 0{,}1667x^3 + 0{,}1250x^4 - 0{,}0583x^5 - 0{,}0264x^6 + \ldots$

Пример 348. Найти решение уравнения $y'' + x\cdot y' + y = 0,$ удовлетворяющее начальным условиям: при $x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ y_0' = 0.$

Решение.

Будем искать решение этого уравнения способом неопределенных коэффициентов.

1) Запишем решение в виде ряда
$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$
и дважды продифференцируем
$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + n\cdot a_nx^{n-1} + \ldots,$$
$$y'' = 2a_2 + 2\cdot 3\cdot a_3x + \ldots + (n-1)\cdot n\cdot a_nx^{n-2} + \ldots$$

2) Начальные данные $x_0 = 0,\ \ y_0 = 1,\ \ y_0' = 0$ подставим в разложение y и y' и найдем $a_0 = 1,\ a_1 = 0.$

3) Подставим разложения y , y' , y'' в исходное уравнение
$$2a_2 + 2\cdot 3a_3x + 3\cdot 4a_4x^2 + 4\cdot 5a_5x^3 + \ldots + n(n-1)\cdot a_nx^{n-2} + \ldots +$$
$$+ 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + 4a_4x^4 + 5a_5x^5 + \ldots + n\cdot a_nx^n + \ldots +$$
$$+ 1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n + \ldots \equiv 0.$$

4) Сгруппируем члены с одинаковыми степенями x и приравняем коэффициенты при них нулю, так как правая часть тождественно равна нулю.

Находим

$$x^0 \quad | \quad 2a_2+1=0, \quad a_2=-\frac{1}{2};$$

$$x^1 \quad | \quad 2\cdot 3\cdot a_3=0, \quad a_3=0;$$

$$x^2 \quad | \quad 3\cdot 4\cdot a_4+3a_2=0, \quad a_4=-\frac{1}{4}a_2, \quad a_4=-\frac{1}{2^2\cdot 2};$$

$$x^3 \quad | \quad 4\cdot 5\cdot a_5+4a_3=0, \quad a_5=-\frac{1}{4\cdot 5}4a_3, \quad a_5=0;$$

$$x^4 \quad | \quad 5\cdot 6\cdot a_6+5a_4-\frac{1}{6}\cdot 2a_2=0, \quad a_6=-\frac{1}{6}a_4, \quad a_6=\frac{1}{2^3\cdot 2\cdot 3};$$

| ....

| ....

$$x^n \quad | \quad (n+1)(n+2)a_{n+2}+(n+1)a_n=0, \quad a_{n+2}=-\frac{1}{n+2}a_n,$$

$$a_{n+2}=\begin{cases} 0, & \text{при нечетном } n+2=2k+1 \\ \dfrac{(-1)^k}{2^k\cdot k!}, & \text{при четном } n+2=2k, \text{ где } k=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

5) Искомое решение

$$y=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^4-\frac{1}{2^3\cdot 3!}x^6+\ldots+(-1)^k\frac{1}{2^k\cdot k!}x^{2k}+\ldots$$

или

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2^k\cdot k!}x^{2k}.$$

Пример 349. Найти первые четыре (отличных от нуля) члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''-xy^2=0$ при начальных условиях $y(0)=1, \ y'(0)=1.$

Решение. Применим способ последовательного дифференцирования.

1) Ищем решение в виде ряда Маклорена

$$y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

2) Первые два коэффициента ряда определены начальными условиями $y(0)=1, \ y'(0)=1.$

3) В данное уравнение $y'' = xy^2$ подставляем начальные условия и находим $y''(0) = 0.$

4) Находим последовательным дифференцированием данного уравнения производные $y'''(x),\ y^{(4)}(x).$ Получим

$$y'''(x) = y^2 + 2yy'x,$$
$$y^{(4)}(x) = 4yy' + 2xy'^2 + 2xyy'',$$

откуда находим при $x = 0$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 1,$

$$y'''(0) = 1,$$
$$y^{(4)}(0) = 4.$$

5) Искомое решение

$$y = 1 + x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots.$$

Пример 350. Найти решение уравнения $y'' + xy' - y = 0$ при начальных условиях $x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ y_0' = 0.$

Решение. Искомое решение запишем в виде

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Первые два коэффициента ряда определены: $y_0 = 1,\quad y_0' = 0.$ Значение $y''(0)$ находим из данного уравнения

$$y'' = xy' + y,$$

подставляя начальные условия $y'' = 1.$

Чтобы найти $y'''(0),\quad y^{(4)}(0),\ \ldots,\ y^{(n)}(0),\ldots,$ последовательно дифференцируем исходное уравнение

$$y''' = 2y' + xy'',\quad y'''(0) = 0;$$
$$y^{(4)} = 3y'' + xy''',\quad y^{(4)}(0) = 3;$$
$$y^{(5)} = 4y''' + xy^{(4)},\quad y^{(5)}(0) = 0;$$
$$y^{(6)} = 5y^{(4)} + xy^{(5)},\quad y^{(6)}(0) = 3\cdot 5;$$

……………………………………………………………..

$$y^{(2k-1)} = (2k-2)y^{(2k-3)} + xy^{(2k-2)};\quad y^{(2k-1)}(0) = 0;$$
$$y^{(2k)} = (2k-1)y^{(2k-2)} + xy^{(2k-1)};$$
$$y^{(2k)}(0) = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1);\qquad \text{где } (k = 2,3,4,\ldots).$$

Подставляя эти значения производных в разложение $y(x)$, получим

$$y(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 4}+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6}+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}+\ldots.$$

или

$$y(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!!}.$$

Пример 351. Найти разложение в степенной ряд решения уравнения $y''=xy'-y+e^x$ при начальных условиях $y_0=1,\ y_0'=0.$

Решение.

Так как разложение искомого решения в ряд Тейлора должно иметь вид

$$y=y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4+\ldots,$$

$$y_0=1$$

$$y_0'=0$$

$$y''=xy'-y+e^x \qquad y''(0)=0$$

$$y'''=xy''+e^x \qquad y'''(0)=1$$

$$y^{(4)}=y'''+xy''+e^x \qquad y^{(4)}(0)=1$$

……………………………………………………

Поэтому

$$y=1+x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\ldots.$$

Примеры для самостоятельного решения

Найти с помощью степенных рядов решения данных дифференциальных уравнений при указанных начальных условиях:

352. $xy''+y=0,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1.$

Ответ. $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{[(n-1)!]^2 n}x^n.$

353. $y'=x^2+y^3,\ \ y(1)=1.$

Ответ. $y=1+2(x-1)+4(x-1)^2+\dfrac{25}{3}(x-1)^3+\dfrac{81}{4}(x-1)^4+\ldots$

354. $xy''+y'+xy=0,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=0.$

Ответ. $y=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(n!)^2\cdot 2^{2n}}.$

355. $3y'+2\sin xy^3=e^x,\ \ y(0)=1.$

Ответ. $y=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}x^3+\ldots$

356. $y'-2xy^2+y\cos x^2=0,\ \ y(0)=1.$

Ответ. $y=1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{6}x^3+\ldots$

357. $\left(1+x^2\right)y''+xy'-y=0,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=1\ \left(\text{до}\ \ x^8\right).$

Ответ. $y=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^6-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^8+\ldots$

358. $y'=x+x^2+y^2,\ \ y(0)=1\ \left(\text{до}\ \ x^3\right).$

Ответ. $y=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{10}{3!}x^3+\ldots$

359. $y''=yy'-x^2,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=1\ \left(\text{до}\ \ x^3\right).$

Ответ. $y=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\ldots$

360. $y''=x\sin y',\ \ y(1)=0,\ \ y'(1)=\frac{\pi}{2}.$

Ответ. $y=\frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}-\frac{(x-1)^4}{4!}-\frac{(x-1)^5}{5!}+\ldots$

361. $y''=xy'-y+1,\ \ y(0)=y'(0)=0.$

Ответ. $y=\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\cdot x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$

362. $y''=x^2-\cos x,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=1.$

Ответ. $y=x+\frac{x^4}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$

363. $y''+x^2y=0,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1.$

Ответ. $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{4n+1}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot\ldots\cdot4n(4n+1)}.$

Глава 4

Ряды Фурье

4.1 Разложение в тригонометрический ряд Фурье периодической функции с периодом 2π.

Справочный материал

Функция $f(x)$ называется периодической, а число *T*, не равное нулю, ее периодом, если выполняется равенство

$$f(x+T)=f(x),$$

справедливое для всех значений *x*.

Если число *T* является периодом функции, то ее периодом будет также и число *nT*, где *n* – любое целое число, как положительное, так и отрицательное, то есть справедливо равенство

$$f(x+nT)=f(x).$$

Если функция $f(x)$ периодическая и интегрируемая и ее период равен T, то определенный интеграл от этой функции по любому отрезку, длина которого равна периоду, сохраняет одно и то же значение, то есть

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_b^{b+T} f(x)dx.$$

Функция вида

$$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$$

называется <u>*гармоникой.*</u> Эта функция описывает так называемое гармоническое колебательное движение. Здесь *A* – амплитуда колебания, $(\omega x+\varphi)$ - фаза колебания, φ - начальная фаза колебания, ω - частота колебания.

Функция $\sin(\omega x+\varphi)$ имеет период $T=\dfrac{2\pi}{\omega}.$

Всякую гармонику можно представить в виде

$$A\sin(\omega x+\varphi)=A\sin\varphi\cdot\cos\omega x+A\cos\varphi\cdot\sin\omega x=$$
$$=a\cos\omega x+b\sin\omega x,$$

где $a=A\sin\varphi,\;\; b=A\cos\varphi.$

Сумма гармоник:

1) *Сумма* нескольких гармоник *одной и той же частоты* есть гармоника *той же частоты*, но с измененными амплитудой и фазой;
2) Сумма нескольких гармоник с различными частотами, находящимися в рациональном отношении, является периодической функцией.

Если складывать гармоники с частотами $\omega,2\omega,3\omega,...,n\omega,$ то период функции, являющийся их суммой, равен

$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

Частота ω называется *основной частотой*, а период *T – основным периодом.*

Поэтому функция $f(x)$, являющаяся суммой конечного числа гармоник,

$$f(x)=a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+$$
$$+...+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

функция периодическая, а ее период $T=2\pi.$

<u>*Замечание.*</u> График суммы нескольких гармоник резко отличается от графика слагаемых гармоник.

Ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+$$
$$+...+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+...$$

называется тригонометрическим рядом, или рядом Фурье.

Числа $a_0,a_1,a_2,...,a_n,b_0,b_1,b_2,...,b_n$ называются коэффициентами ряда Фурье.

Тригонометрический ряд можно сокращенно записать так

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Сформулируем теорему, представляющую достаточное условие разложимости функции $f(x)$ в ряд Фурье.

<u>Теорема Дирихле.</u> **Пусть** 2π ***- периодическая функция*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[-\pi,\pi]$ ***удовлетворяет двум условиям:***

1) $f(x)$ ***кусочно-непрерывна, непрерывна или имеет конечное число точек разрыва 1 рода;***

2) $f(x)$ ***кусочно-монотонна, то есть монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.***

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ***ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:***

1. ***В точках непрерывности функции сумма ряда*** $S(x)$ ***совпадает с самой функцией:***
$$S(x)=f(x);$$

2. ***В каждой точке*** x_0 ***разрыва функции сумма ряда равна***
$$S(x)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2},$$
то есть равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ ***слева и справа;***

3. ***В точках*** $x=-\pi$ ***и*** $x=\pi$ ***(на концах отрезка) сумма ряда равна***
$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Таким образом, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям ***1)*** и ***2)*** теоремы Дирихле, то на отрезке $[-\pi,\pi]$ имеет место разложение

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{23}$$

причем коэффициенты ряда a_i $(i=0,1,2,3,\ldots)$ и b_i $(i=0,1,2,3,\ldots)$ определяются через саму функцию $f(x)$ по формулам

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Это равенство может нарушиться только в точках разрыва функции $f(x)$ и на концах отрезка $[-\pi,\pi]$.

Если функция $f(x)$ - <u>четная</u>, то есть $f(-x)=f(x)$, то

$$\left.\begin{aligned} b_n &= 0 \quad (n=1,2,3,\ldots), \\ a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad (n=1,2,3,\ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Ряд Фурье для четной функции запишется так:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \qquad (26)$$

Если функция $f(x)$ - <u>нечетная</u>, то есть $f(-x)=-f(x)$, то

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0 \quad (n=0,1,2,3,\ldots), \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Ряд Фурье для нечетной функции примет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \qquad (28)$$

В случае разложения функции $f(x)$, удовлетворяющей тем же условиям, но заданной в произвольном интервале $(c, c+2\pi)$ длины 2π, В формулах (24) надо заменить пределы интегрирования соответственно на c и $c+2\pi$.

Например, если $c=0,$ то интервал будет $(0,\,2\pi)$ и коэффициенты ряда Фурье будут определяться по формулам

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Так как от интервала интегрирования $(-\pi,\,\pi)$ всегда можно перейти к интервалу $(0,\,2\pi)$ или наоборот, то в некоторых случаях вычисление коэффициентов Фурье может значительно упроститься, если от одного интервала перейти к другому.

Периодическое продолжение функции:

а) Если функция $f(x)$ задана в интервале $(-\pi,\,\pi)$, то ее можно продолжить периодически в соседние интервалы. Это значит, что в соседних интервалах $(-3\pi,-\pi)$, $(-5\pi,-3\pi)$,..., а также в интервалах $(+\pi,+3\pi)$, $(+3\pi,+5\pi)$, $(+5\pi,+7\pi)$, … поведение функции будет таким же, как и в основном интервале $(-\pi,\,\pi)$. Периодическое продолжение показано тонкими линиями на рисунках 1,2,3.

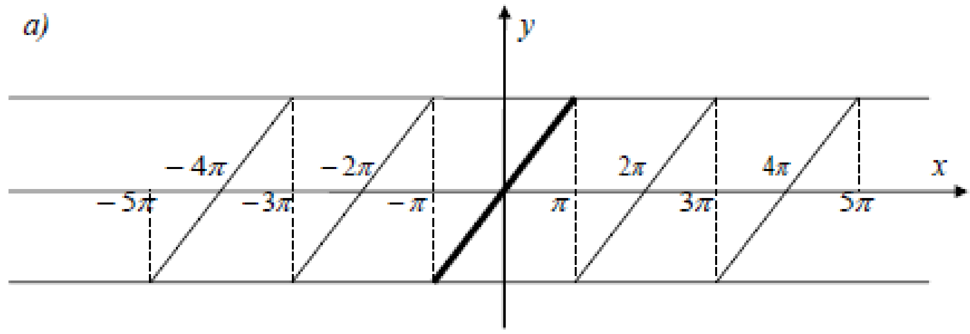

Рис.1

б)

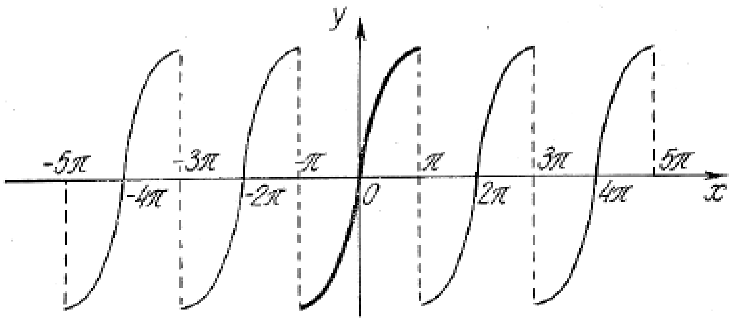

Рис.2

в)

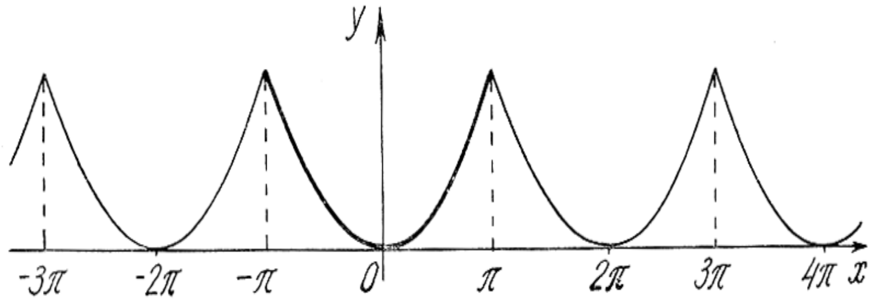

Рис.3

б) Если функция $f(x)$ задана в интервале $(0, +\pi)$, то в соседний интервал $(-\pi, 0)$ можно осуществить как ее четное (Рис.4), так и ее нечетное (Рис.5) продолжение:

Четное:

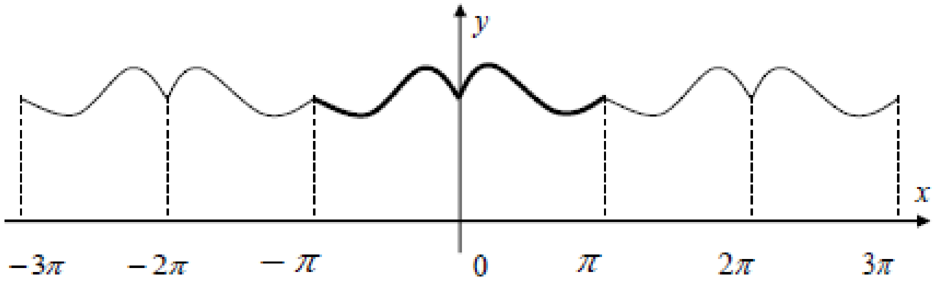

Рис.4

Нечетное:

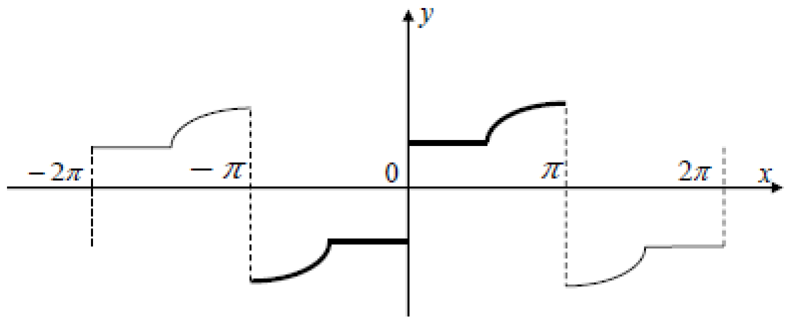

Рис.5

Полученную таким образом функцию можно затем периодически продолжить с периодом 2π вне интервала $(-\pi, \pi)$.

<u>*При четном продолжении функции кривая, представляющая функцию, не имеет разрывов*</u> (Рис.4).

<u>*При нечетном продолжении кривая, представляющая функцию, может иметь разрыв в тех местах, которые соответствуют центрам симметрии кривой*</u> (Рис.5).

Ряд Фурье для функции $f(x)$ можно записать в комплексной форме

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{30}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{31}$$

Примеры решения задач

Пример 364. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, $(-\pi < x < \pi)$.
Решение. Построим график функции в интервале $(-\pi, \pi)$ и периодически продолжим его на всю ось (Рис.6).

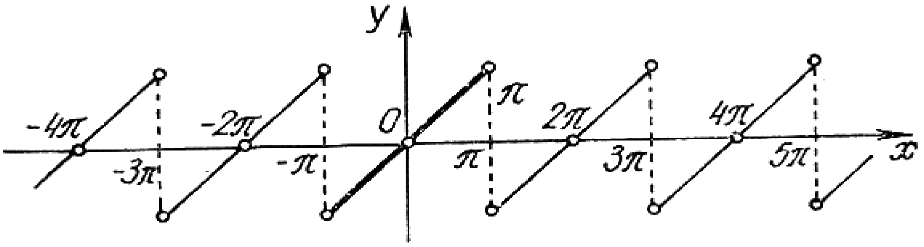

Рис.6

Заданная функция удовлетворяет условиям Дирихле и, поэтому, может быть разложена в ряд Фурье. На интервале $(-\pi, \pi)$ функция $f(x) = x$ - нечетная. Отсюда следует, что ряд Фурье этой функции будет содержать только синусы, а при косинусах все коэффициенты $a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

Коэффициенты b_n определяются по формуле (27), в которую вместо $f(x)$ надо подставить x.

Итак,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cdot \sin nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx \right] =$$

$$\begin{bmatrix} u = x & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cdot\pi\cdot\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin nx \Big|_0^{\pi} \right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cdot\pi\cdot(-1)^n = (-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n};$$

$$b_n = (-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n}.$$

Подставив эти значения коэффициентов в формулу (28), получаем

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin nx}{n}.$$

В развернутом виде, давая n значения 1,2,3,…., получим

$$x = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right]. \qquad (*)$$

Во всех внутренних точках интервала $(-\pi, \pi)$ это равенство имеет место. Вне интервала этот ряд изображает периодическое продолжение рассматриваемой функции.

В точках разрыва, которыми являются точки $\pm\pi, \pm 3\pi, \ldots,$ сумма ряда равна среднему арифметическому ее левостороннего и правостороннего пределов в этих точках.

Найдем эти пределы:

$$\lim_{x\to\pi-0} f(x) = \lim_{x\to\pi-0} x = \pi;$$

$$\lim_{x\to-\pi+0} f(x) = \lim_{x\to-\pi+0} x = -\pi.$$

Среднее арифметическое этих пределов

$$\frac{f(\pi-0) + f(-\pi+0)}{2} = \frac{\pi-\pi}{2} = 0.$$

Во всех точках разрыва этой функции получим то же самое. Следовательно, в точках разрыва сумма ряда равна нулю.

Найдем сумму в точках непрерывности заданной функции. Пусть $x = \frac{\pi}{2}$, тогда, подставляя в левую и правую части разложения (*), получим

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right).$$

Отсюда следует, что сумма ряда

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}.$$

На рис.7 представлены первый, второй и четвертый члены ряда, а также – сумма четырех, шести, десяти членов ряда, а также S_∞.

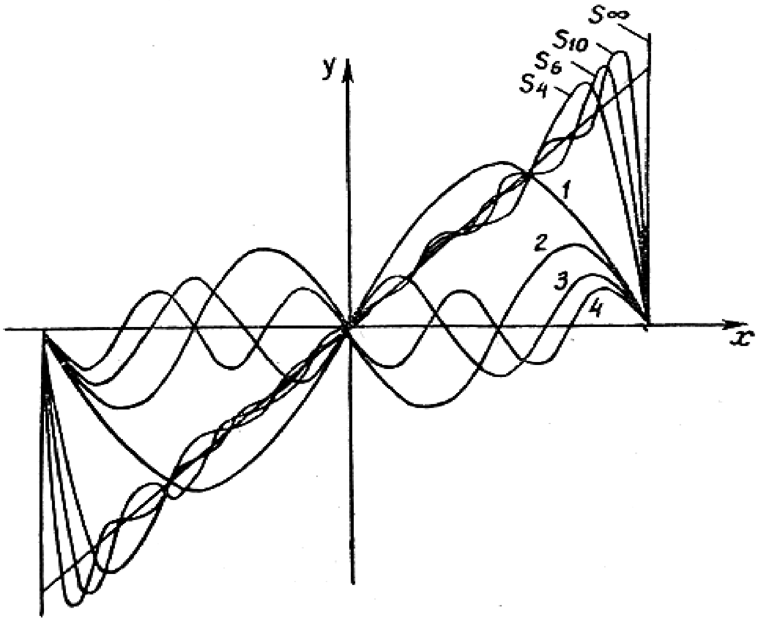

Рис.7

Пример 365. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{если} \quad -\pi<x<0, \\ +1 & \text{если} \quad 0<x<\pi.\end{cases}$$

Решение. Заданная функция на интервале $(-\pi,+\pi)$ - нечетная.

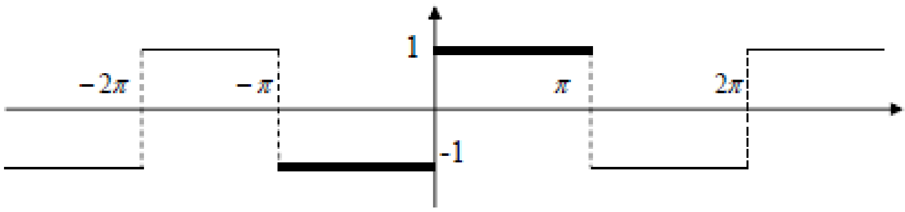

Рис.8

(Эту функцию можно назвать ступенчатой). Поэтому ее ряд Фурье будет содержать только синусы. Коэффициенты b_n найдем по формуле (27), в которую следует подставить $f(x)=1$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1\cdot\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^\pi=-\frac{2}{n\pi}[\cos n\pi-\cos 0]=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0, & n=2k; \\ \dfrac{4}{(2k-1)\pi}, & n=2k-1.\end{cases}$$

$$b_n = \frac{4}{(2k-1)\pi}, \quad (k = 1,2,3,\ldots),$$

а поэтому на основании формулы (28)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \cdot \sin(2k-1)x = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)}.$$

В развернутом виде этот ряд запишется так:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots \right)$$

или $$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots \right) = \begin{cases} +1 & \text{если} \quad 0 < x < \pi, \\ -1 & \text{если} \quad -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Полученный ряд содержит бесконечную последовательность непрерывных функций, а сумма этих функций является разрывной кусочно-постоянной функцией.

Частичные суммы этого ряда:

$$S_1 = \frac{4}{\pi}\sin x,$$

$$S_3 = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} \right),$$

$$S_5 = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \right).$$

Графики функций S_1, S_3, S_5 на рис.9 наглядно показывают, что полученный ряд аппроксимирует разрывную ступенчатую функцию:

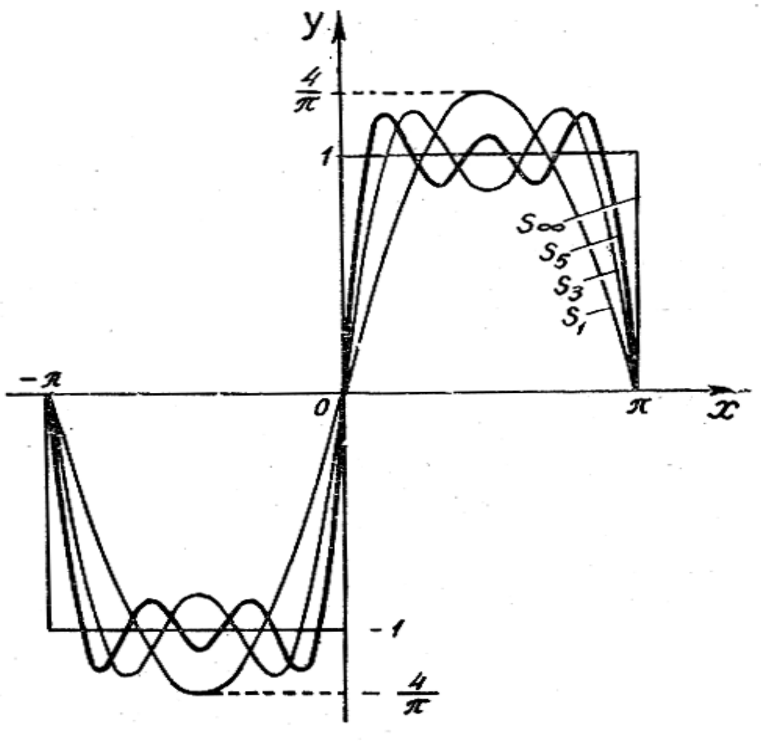

Рис.9

Функция S_1 имеет максимум при $x=\frac{\pi}{2}$ и этот максимум

$$S_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi}=1{,}27,$$

то есть максимум превышает аппроксимируемую функцию $f(x)=1$ на 27%.

Функция S_3 имеет минимум в этой же точке, т.е. при $x=\frac{\pi}{2}$, получаем

$$(S_3)_{\min}=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\frac{3\pi}{2}}{3}\right)=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}\right)=0{,}85.$$

Это означает, что минимум этой функции на 15% (1-0,85=0,15) меньше аппроксимируемой прямой $f(x)=1$. Функция S_3 имеет два максимума: при $x=\frac{\pi}{4}$ и $x=\frac{3\pi}{4}$.

В этих точках

$$S_3\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}\right)=1{,}20.$$

Эти максимумы возвышаются над аппроксимируемой кривой $f(x)=1$ на 20%.

Функция S_5 имеет максимум в точке $x=\frac{\pi}{2}$ и

$$S_5=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=1{,}10,$$

то есть максимум этой функции лежит на 10% выше аппроксимируемой прямой $f(x)=1$.

Все проведенные вычисления остаются верными и для прямой $f(x)=-1$ на интервале $(-\pi,0)$.

Точкой разрыва является точка $x=0$. В ней сумма ряда равна нулю:

$$\frac{f(-0)+f(+0)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0.$$

Замечание. (Явление Гиббса).

Рассмотрев чертежи к примерам 364 и 365, мы видим, что с увеличением числа членов в частичной сумме аппроксимируемая кривая приближается к графику исходной функции во всех точках, кроме точек разрыва. В этих точках появляются маленькие выступы, (например, к примеру 365)

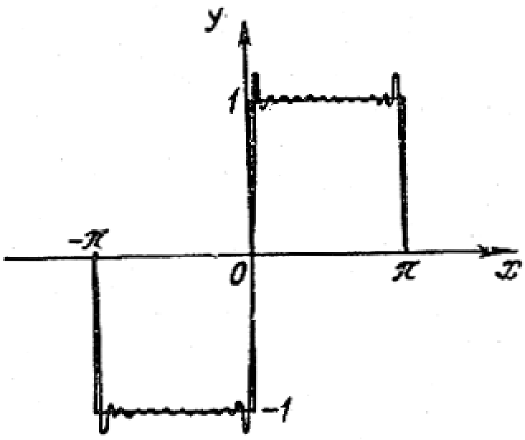

Рис.10

Бесконечный ряд в пределе приближается по виду к требуемой функции, за исключением выступов, которые появляются около точек разрыва. Такое поведение частичных сумм называется явлением Гиббса, причем с этим явлением мы встречаемся всякий раз, когда имеем дело с аппроксимацией разрывных функций в их точках разрыва.

Пример 366. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|,$ если $0 \le x \le \pi.$

Решение. Заданная функция четная. Ее ряд Фурье будет содержать только постоянную составляющую и косинусы. 4π

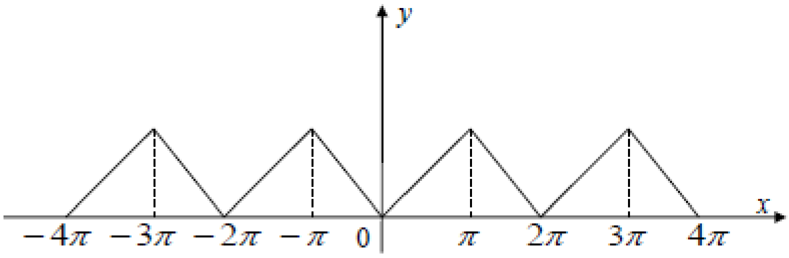

Рис.11

Все коэффициенты $b_n = 0.$ Коэффициенты a_n $(n = 0,1,2,3,...)$ определяются по формуле (25):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi^2 = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx =$$

$$\begin{bmatrix} u = x & dv = \cos nxdx \\ du = dx & v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right]=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\left[\cos n\pi-1\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\left[(-1)^n-1\right]=$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k;\\ -\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{(2k-1)^2}, & n=2k-1.\end{cases}$$

Подставляя a_o и a_n в ряд (26), имеем

$$|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi}\right)\cdot\frac{1}{(2k-1)^2}\cdot\cos(2k-1)x$$

или

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos x}{1^2}-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos 3x}{3^2}-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos 5x}{5^2}-\ldots$$

или

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cdot\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right]. \qquad (**)$$

Так как функция $|x|$ непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$, то полученный ряд сходится к $|x|$ при всех значениях x из этого отрезка, а вне этого отрезка – к периодическому продолжению этой функции.

Из полученного ряда можно получить интересную сумму: полагая в (**) $x=0,$ имеем

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right),$$

откуда

$$\frac{4}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right)=\frac{\pi}{2},$$

а, умножая обе части этого равенства на $\frac{\pi}{4}$, получим

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

При изучении числовых рядов, на основании, например, интегрального признака Коши, мы могли доказать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$. Теперь мы нашли его сумму, она равна $\frac{\pi^2}{8}$.

Замечание. Вовсе не обязательно, чтобы функция была четная или нечетная. В общем случае функция не является ни четной, ни нечетной. Однако, следует иметь ввиду, что всякая функция, разложимая в тригонометрический ряд, является суммой четной и нечетной частей, как это видно из следующего:

$$f(x)=\underbrace{\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx}_{\text{Четная часть}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx.}_{\text{Нечетная часть}}$$

Пример 367. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $(-\pi,\pi)$ равенствами

$$f(x)=\begin{cases}-3 & при \quad -\pi<x<0,\\ 2 & при \quad 0<x<\pi.\end{cases}$$

Решение.

Построим на рис.12 график функции в интервале $(-\pi,\pi)$ и периодически продолжим его на всю ось.

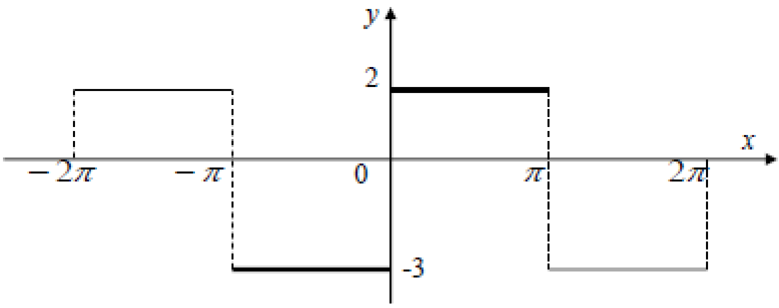

Рис.12

Данная функция не обладает свойством четности или нечетности, поэтому ее разложение в ряд Фурье будет иметь вид (23), коэффициенты которого определяются по формулам (24).

Вычисляем коэффициенты

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-3)dx+\int_{0}^{\pi}2dx\right)=-1;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0} (-3)\cos nx dx + \int\limits_{0}^{\pi} 2\cos nx dx\right) = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0} (-3)\sin nx dx + \int\limits_{0}^{\pi} 2\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{n\pi} 5(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & при \ \ четном \ \ n, \\ \dfrac{10}{n\pi} & при \ \ нечетном \ \ n. \end{cases}$$

Использованы равенства

$\cos n\pi = 1,$ если n – четное,

$\cos n\pi = -1,$ если n – нечетное.

Полагая $n = 1, 2, 3, \ldots,$ найдем

$b_1 = \dfrac{10}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \dfrac{10}{\pi}\cdot\dfrac{1}{3}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \dfrac{10}{\pi}\cdot\dfrac{1}{5}, \ldots$ и т.д.

Вычислив коэффициенты Фурье, можем записать, что данной функции соответствует ряд Фурье

$$-\frac{1}{2} + \frac{10}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)} + \ldots\right)$$

$n = 1, 2, 3, \ldots .$

Функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема, так как интервал $(-\pi, \pi)$ можно разбить на два интервала $(-\pi, 0)$ и $(0, \pi)$, внутри которых функция имеет производную, а на концах и сама функция и ее производная имеют конечные предельные значения:

$$\begin{aligned} &f(-\pi, +0) = -3, && f'(-\pi, +0) = 0, \\ &f(0, -0) = -3, && f'(0, -0) = 0, \\ &f(0, +0) = 2, && f'(0, +0) = 0, \\ &f(\pi, -0) = 2, && f'(\pi, -0) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо разложение

$$-\frac{1}{2} + \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)} = \begin{cases} -3 & при \quad -\pi < x < 0, \\ 2 & при \quad 0 < x < \pi, \\ -\dfrac{1}{2} & при \quad x = 0, \ x = \pm\pi. \end{cases}$$

Пример 368. Записать ряд Фурье для функции задачи 367 в комплексной форме.

Решение. Для того, чтобы сравнить применение комплексной и тригонометрической форм разложения функции в ряд Фурье, запишем ряд Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}-3 & при \quad -\pi<x<0,\\ 2 & при \quad 0<x<\pi,\end{cases}$$

в комплексной форме.

Коэффициенты разложения в этом случае вычисляются по одной общей формуле (31).

Вычисляем

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0}-3dx+\int\limits_{0}^{\pi}2dx\right]=-\frac{1}{2},$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0}(-3)e^{-inx}dx+\int\limits_{0}^{\pi}2e^{-inx}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\left.\frac{-3e^{-inx}}{-in}\right|_{-\pi}^{0}-\left.\frac{2e^{-inx}}{in}\right|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\cdot in}\left(5-3e^{in\pi}-2e^{-in\pi}\right)=\begin{cases}0 & при\ n=2m,\\ \dfrac{10}{2\pi in} & при\ n=2m+1.\end{cases}$$

Учтено, что

при $n=2m, \qquad m=0,\pm1,\pm2,\ldots \quad e^{in\pi}=e^{-in\pi}=1;$

при $n=2m+1, \quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots \quad e^{in\pi}=e^{-in\pi}=-1.$

Ряд Фурье в комплексной форме для данной функции будет иметь вид

$$-\frac{1}{2}+\frac{10}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2i(2m+1)}e^{i(2m+1)x} \quad (m=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

Вычисляя коэффициенты

$c_0=-\dfrac{1}{2}, \quad c_3=\dfrac{10}{2\pi i\cdot 3}, \quad c_5=\dfrac{10}{2\pi i\cdot 5}$, и т.д.,

$c_{-1}=-\dfrac{10}{2\pi i}, \quad c_{-3}=-\dfrac{10}{2\pi i\cdot 3}, \quad c_{-5}=-\dfrac{10}{2\pi i\cdot 5}$, и т.д., запишем

$$-\frac{1}{2}+\frac{10}{\pi}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}+\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{3\cdot 2i}+\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{5\cdot 2i}+\ldots\right).$$

Этот ряд совпадает с рядом, который мы получили в примере 367, так как

$$\frac{e^{(2m+1)\,ix}-e^{-(2m+1)\,ix}}{(2m+1)\cdot 2i}=\frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}.$$

Пример 369. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графиком, изображенным на Рис.13.

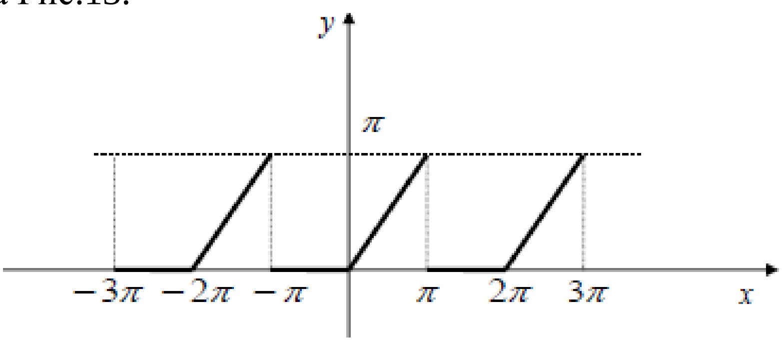

Рис.13

Решение.

Составим аналитическое выражение функции: – на интервале $[-\pi,0]$ – отрезок прямой, совпадающей с осью *Ox,* ему соответствует функция $f(x)=0$; – на интервале $[0,\pi]$ – отрезок прямой, проходящей через точки $(0,0)$ и (π,π), ему соответствует функция $y=x.$ Следовательно,

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad -\pi\le x<0,\\ x & при \quad 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Найдем коэффициенты ряда Фурье по формулам (24):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{\pi}xdx\right)=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}0\cdot\cos nxdx+\int\limits_{0}^{\pi}x\cos nxdx\right)=\frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]=$$

$$=\begin{cases}0 & при \quad n \ четном,\\ -\dfrac{2}{\pi\cdot n^2} & при \quad n \ нечетном,\end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} x \sin nxdx \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Полагая $n = 1, 2, 3, \ldots,$ получим

$$b_1 = 1,\ b_2 = -\frac{1}{2},\ b_3 = \frac{1}{3},\ b_4 = -\frac{1}{4},\ b_5 = \frac{1}{5}, \ldots$$

Легко проверить, что полученная функция кусочно-дифференцируема, следовательно, разложение имеет вид

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots \right] +$$

$$+ \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots = \begin{cases} 0 \quad \textit{при} \quad -\pi < x \le 0, \\ x \quad \textit{при} \quad 0 < x < \pi, \\ \dfrac{\pi}{2} \quad \textit{при} \quad x = \pm\pi. \end{cases}$$

Пример 370. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |\sin x|$.

Решение. Данная функция $2\pi -$ периодическая, четная

$$(|\sin(-x)| = |\sin x|),$$

а поэтому она может быть разложена в ряд косинусов.

Вычислим коэффициенты Фурье по формулам (25):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin xdx = \frac{4}{\pi} \text{ при } n \ne 1;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x]dx =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi \cdot (n^2 - 1)} \quad \textit{при} \quad n \ \textit{четном}, \\ 0 \quad \textit{при} \quad n \ \textit{нечетном}. \end{cases}$$

При $n = 1$ получим:

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos xdx = 0$$

Окончательно получаем

$$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\ldots\right]=|\sin x| \text{ при любом } x.$$

Пример 371. Разложить в ряд Фурье периодическую нечетную функцию периода 2π, заданную равенствами:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad 0\le x<\alpha, \\ a & при \quad \alpha<x<\pi-\alpha, \\ 0 & при \quad \pi-\alpha<x\le\pi. \end{cases}$$

Решение.

Так как функция нечетная, то она разлагается в ряд синусов. Вычислим коэффициенты ряда по формулам (27)

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\alpha}0\cdot\sin xdx+\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}a\sin xdx+\int_{\pi-\alpha}^{\pi}0\cdot\sin xdx\right)=$$

$$\frac{2a}{n\pi}\left[\cos n\alpha\left[1-(-1)^n\right]-\sin n\pi\cdot\sin n\alpha\right]=$$

$$=\begin{cases} -\dfrac{4a}{\pi\cdot n}\cos n\alpha & при \quad n \ нечетном \\ 0 \quad при \quad n \ четном. \end{cases}$$

Запишем ряд Фурье

$$\frac{4a}{\pi}\left(\cos\alpha\sin x+\frac{1}{3}\cos 3\alpha\sin 3x+\frac{1}{5}\cos 5\alpha\sin 5x+\ldots\right)=$$

$$=\begin{cases} 0 & при \quad 0<x<\alpha \quad и \quad \pi-\alpha<x<\pi, \\ a & при \quad \alpha<x<\pi-\alpha, \\ 0 & при \quad x=\pm\pi. \end{cases}$$

Пример 372. Разложить в ряд Фурье косинусоиду с амплитудой A и периодом 2π, срезанную осью абсцисс.

Решение. Построим график функции (Рис.14).

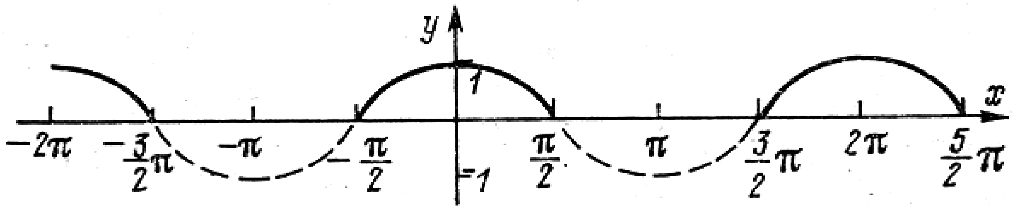

Рис.14

Такой вид получает, например, кривая напряжения однофазного переменного тока периода 2π при однополупериодном выпрямлении.

Запишем аналитическое выражение функции на интервале $[-\pi, \pi]$

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \quad и \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \pi, \\ A\cos x \quad при \quad -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Из аналитического выражения и из графика видно, что функция четная, поэтому она разлагается в ряд Фурье по косинусам.

Вычислим коэффициенты по формулам (25)

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} A\cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0 \cdot dx \right) = \frac{2A}{\pi}.$$

Вычисляя a_n, имеем

<u>При $n=1$</u>

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} A\cos x \cos x dx = \frac{A}{2},$$

<u>При $n \neq 1$</u>

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} A\cos x \cos nx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0 \cdot \cos nx dx \right) =$$

$$= \frac{A}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)\cdot \frac{\pi}{2}}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\cdot \frac{\pi}{2}}{n-1} \right].$$

Знаки четных гармоник в разложении данной функции будут чередоваться. Например, вычислим

$$a_2 = \frac{A}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1} \right) = \frac{2}{3\pi}A,$$

$$a_3 = \frac{A}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi}{4} + \frac{\sin \pi}{2} \right) = \frac{A}{\pi}\cdot 0 = 0,$$

$$a_4 = \frac{A}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{5} + \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3} \right) = -\frac{2}{15\pi}A,$$

$a_5 = 0,$

$$a_6 = \frac{A}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{7\pi}{2}}{7} + \frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{5}\right) = \frac{2}{35\pi}A.$$

Таким образом, ряд Фурье для данной функции запишется так:

$$= A\left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{2}{3\pi}\cos 2x - \frac{2}{15\pi}\cos 4x + \frac{2}{35\pi}\cos 6x - \ldots\right] =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad при \quad -\pi \le x < -\dfrac{\pi}{2} \quad и \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi, \\ A\cos x \quad при \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Пример 373. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2\pi \text{ периода } 2\pi.$$

Решение. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как она не задана в симметричном интервале (Рис.15).

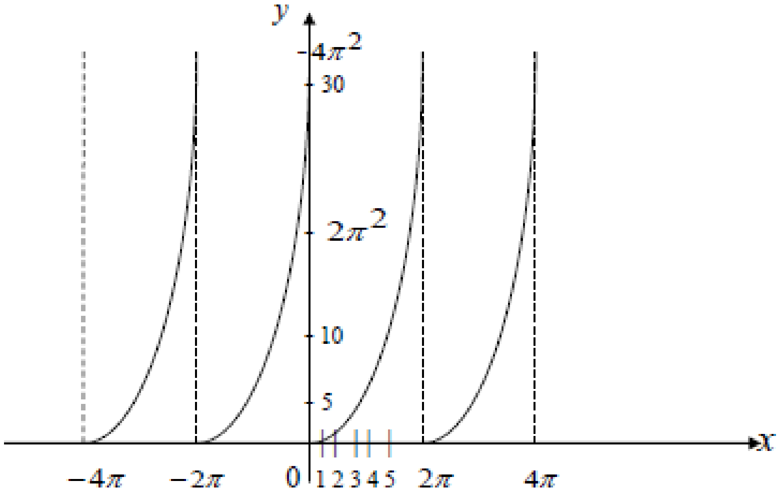

Рис.15

Коэффициенты Фурье определяем по формулам (29), взяв интервал $(0, 2\pi)$ за интервал интегрирования. Получим

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{4\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nxdx=-\frac{4\pi}{n}.$$

Получим ряд Фурье

$$\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}x^2 & при\ \ 0<x<2\pi,\\ 2\pi^2 & при\ \ x=0,\ \ x=2\pi.\end{cases}$$

При $x=0,\ \ x=2\pi$ сумма ряда определяется по формуле

$$\frac{f(0+0)+f(2\pi-0)}{2}=\frac{0+(2\pi)^2}{2}=2\pi^2.$$

Пример 374. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию

$$f(x)=\begin{cases}x+2\pi & при\quad -\pi\le x<0,\\ x\quad при & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

Решение. Построим график функции (Рис.16).

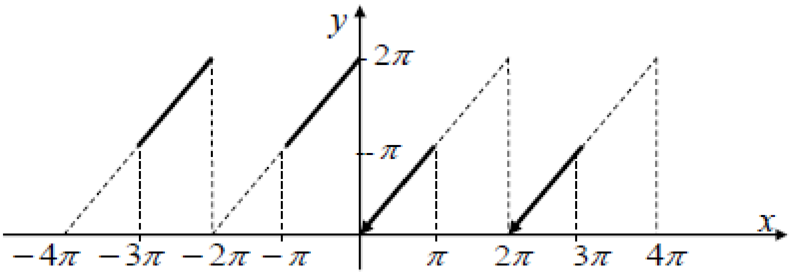

Рис.16

Производить вычисление интегралов (24), выражающих коэффициенты Фурье для этой функции неудобно, так как в каждом из них интервал интегрирования нужно разбить на два интервала: от $-\pi$ до 0 и от 0 до π. Из графика видно, что на интервале $(0,\,2\pi)$ наша функция имеет вид

$$f(x)=x.$$

Правда, для $x=0$ эта формула неверна, но 0 –точка разрыва функции $f(x)$, поэтому значение функции в ней на разложение не влияет.

Найдем коэффициенты Фурье по формулам (29)

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}xdx=2\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nxdx=0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx = -\frac{2}{n}.$$

Получим ряд Фурье

$$\pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} x+2\pi & при \quad -\pi \le x < 0, \\ x & при \quad 0 < x \le \pi, \\ \pi & при \quad x = 2n\pi. \quad (n = 0,1,2,\ldots). \end{cases}$$

Пример 375. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную в интервале $[0, 2\pi]$ графиком на рис.17.

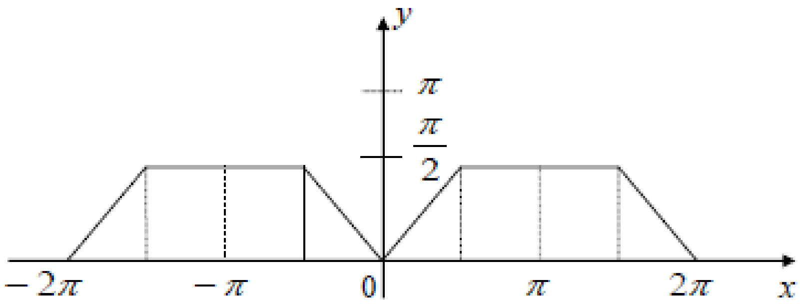

Рис.17

Решение. Составим аналитическое выражение функции:

$$f(x) = x \quad \text{на интервале} \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{на интервале} \quad \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$f(x) = 2\pi - x \quad \text{на интервале} \quad \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

Перейдем к интервалу $[-\pi, \pi]$. Это сделать выгодно, так как график функции симметричен относительно оси *Oy*. Следовательно, функция четная.

Аналитическое выражение функции в интервале $[0, \pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} x & при \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} & при \quad \frac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases}$$

Для вычисления коэффициентов используем формулы (25)

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}xdx+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{2}dx\right)=\frac{3}{8}\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}x\cos nxdx+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)=\begin{cases}0 \quad при \quad n=4k,\\ -\dfrac{4}{\pi n^2} \quad при \quad n=2(2k+1),\\ -\dfrac{2}{\pi n^2} \quad при \quad .n=2k+1.\end{cases},$$

так как

$$\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}1 \quad при \quad n=4k,\\ -1 \quad при \quad n=2(2k+1),\\ 0 \quad при \quad .n=2k+1.\end{cases}$$

Итак, разложение функции в ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x)=\frac{3}{8}\pi-\frac{2}{\pi}\left[\cos x+\frac{2\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\frac{2\cos 6x}{6^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos 7x}{7^2}+\ldots+\frac{\cos(4n-3)x}{(4n-3)^2}+\frac{2\cos(4n-2)x}{(4n-2)^2}+\frac{\cos(4n-1)x}{(4n-1)^2}+\ldots\right].$$

Разложение справедливо во всем интервале задания функции, включая и концы интервала.

Пример 376. Записать ряд Фурье для функции $f(x)=e^{\alpha x}$ при $-\pi<x<\pi$ в комплексной форме.

Решение. Вычислим коэффициенты ряда

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(\alpha-in)x}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{(\alpha-in)x}}{\alpha-in}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi(\alpha-in)}\left(e^{\alpha\pi}e^{-in\pi}-e^{-\alpha\pi}e^{in\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi(\alpha-in)}\left[e^{\alpha\pi}(\cos n\pi-i\sin n\pi)-e^{-\alpha\pi}(\cos n\pi+i\sin n\pi)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi(\alpha-in)}\left(e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}\right)(-1)^n.$$

Ряд Фурье запишется

$$\frac{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{inx}}{\alpha-in}=\begin{cases}e^{\alpha x} & при\ \ -\pi<x<\pi,\\ \dfrac{e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}}{2} & при\ \ x=\pm\pi.\end{cases}$$

Примеры для самостоятельного решения.

<u>*Разложить в ряды Фурье функции периода* 2π *:*</u>

377. $$f(x)=\begin{cases}-x & при\quad -\pi<x\le 0,\\ 0 & при\quad 0<x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ. $$\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}=$$

$$=\begin{cases}-x & при\ \ -\pi<x\le 0,\\ 0 & при\quad 0<x<\pi,\\ \dfrac{\pi}{2} & при\ \ x=\pm\pi.\end{cases}$$

378. $$f(x)=\begin{cases}1 & при\quad -\pi<x\le 0,\\ -2 & при\quad 0<x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ. $$-\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}=\begin{cases}1 & при\ \ -\pi<x<0,\\ -2 & при\quad 0<x<\pi,\\ -\dfrac{1}{2} & при\ \ x=0,\ \ x=\pm\pi.\end{cases}$$

379. $f(x) = 5x + 2 \quad при \quad -\pi < x < \pi.$

Ответ. $2 + 10\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n} = \begin{cases} 5x+2 & при \quad -\pi < x < \pi, \\ 2 & при \quad x = \pm\pi. \end{cases}$

380. $f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi.$

При помощи полученного разложения вычислить суммы числовых рядов:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{и} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2} = \begin{cases} x^2 & при \quad -\pi < x < \pi, \\ \pi^2 & при \quad x = \pm\pi. \end{cases}$

$$S_1 = \frac{\pi^2}{6}, \quad S_2 = \frac{\pi^2}{12}.$$

381.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad -\pi \le x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ x & при \quad -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & при \quad \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases}$$

Ответ. $\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin 2nx}{2n} =$

$$= \begin{cases} 0 & при \quad -\pi < x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ x & при \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & при \quad \dfrac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

382. $$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{x}{\pi}\right) & при \quad -\pi\le x\le 0, \\ \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x}{\pi}\right) & при \quad 0<x<\pi. \end{cases}$$

Ответ. $$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{x}{\pi}\right) & при \quad -\pi<x<0, \\ \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x}{\pi}\right) & при \quad 0<x<\pi, \\ 0 & при \quad x=0,\ x=\pm\pi. \end{cases}$$

383. $f(x)=x(\pi-x)\quad при \quad -\pi<x<\pi.$

Ответ. $$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\begin{cases} x(\pi-x) & при \quad -\pi<x<\pi, \\ \pi^2 & при \quad x=\pm\pi. \end{cases}$$

384. $f(x)=2x\quad при \quad 0<x<2\pi.$

Ответ. $$2\pi-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases} 2x & при \quad 0<x<2\pi, \\ 2\pi & при \quad x=0,\ x=2\pi. \end{cases}$$

385. $$f(x)=\begin{cases} 1 & при \quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ -1 & при \quad \dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{3\pi}{2}, \\ 1 & при \quad \dfrac{3\pi}{2}<x\le 2\pi. \end{cases}$$

Ответ.

$$\frac{4}{\pi}\left[\cos x-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-..\right]=\begin{cases} 1 & при \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ -1 & при \quad \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}, \\ 1 & при \quad \dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi, \\ 0 & при \quad x=\dfrac{\pi}{2},\ x=\dfrac{3\pi}{2}, \\ 1 & при \quad x=0,\ x=2\pi. \end{cases}$$

386. Записать ряд Фурье 2π -периодической функции

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} & при \quad 0<x\le\pi, \\ -\dfrac{\pi}{4} & при \quad -\pi<x<0. \end{cases}$$

в комплексной форме.

Ответ. $\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}+\dfrac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{3\cdot 2i}+\ldots+\dfrac{e^{(2k+1)ix}-e^{-(2k+1)ix}}{(2k+1)\cdot 2i}+\ldots$

4.2 Разложение в тригонометрический ряд Фурье периодической функции с периодом 2ℓ .

Справочный материал

Пусть кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$ *задана в интервале* $(-\ell,\ell)$*, где* ℓ *- произвольное число и* 2ℓ *- периодична. Тогда эта функция разлагается в ряд Фурье вида*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right) \qquad (32)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx,\\ a_n&=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,\\ b_n&=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx, \quad (n=1,2,3,\ldots) \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Если $f(x)$ *- четная функция, то ее ряд имеет вид*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}, \qquad (34)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Если $f(x)$ *- нечетная функция, то ее ряд имеет вид:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{36}$$

где

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx \tag{37}$$

Сумма ряда (32) равна:

а) функции $f(x)$ *в ее точках непрерывности,*

б) $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ *во всех точках разрыва функции* $f(x)$,

в) $\dfrac{f(-\ell+0)+f(\ell-0)}{2}$ *на концах интервала.*

Примеры решения задач

Пример 387. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad -2 \le x \le 0, \\ x & при \quad 0 < x \le 2. \end{cases}$$

Решение.

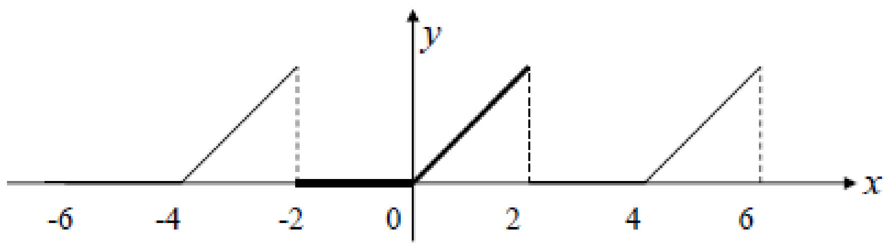

Рис.18

Коэффициенты a_n и b_n определим по формуле (33), в которых надо вместо ℓ поставить 2. Поэтому

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 0\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \left|\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos\frac{n\pi x}{2}dx & v = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{2} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\pi n}x\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{2}{\pi n}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi^2 n^2}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right].$$

Итак,

$$a_n = \frac{2}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right] \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{2} x dx\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 1.$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 0\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{0}^{2} x\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right] =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx & v = -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{\pi n}x\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{2}{\pi n}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{\pi n}\cdot 2\cos n\pi + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right];$$

$$b_n = -\frac{2}{\pi n}(-1)^n \quad \left(\text{учтено, что } \cos n\pi = (-1)^n, \sin n\pi = 0\right).$$

Подставляя a_0, a_n, b_n в (32), имеем:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{n},$$

или в развернутом виде

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1^2}+\frac{\cos\frac{3\pi x}{2}}{3^2}+\frac{\cos\frac{5\pi x}{2}}{5^2}+\ldots\right]+$$

$$+\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{1}-\frac{\sin\frac{2\pi x}{2}}{2}+\frac{\sin\frac{3\pi x}{2}}{3}-\frac{\sin\frac{4\pi x}{2}}{4}+\ldots\right].$$

Пример 388. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x-2$ с периодом $2\ell=2,$ заданную на интервале $(-1,1)$.

Решение: Данная функция не обладает свойством четности или нечетности, а поэтому разлагается в ряд Фурье вида (32).

Вычисляем коэффициенты разложения по формулам (33). Так как $\ell=1,$ то

$$a_0=\int_{-1}^{1}(x-2)dx=-4,$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}(x-2)\cos n\pi x dx=0,$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}(x-2)\sin n\pi x dx=(-1)^{n+1}\frac{2}{\pi n}.$$

Следовательно, ряд Фурье и его сумма будут:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{\pi n}\sin n\pi x=\begin{cases}x-2 & при \quad -1<x<1,\\ -2 & при \quad x=\pm 1.\end{cases}$$

Пример 389. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}x & при \quad 0\le x\le 1,\\ 1 & при \quad 1<x\le 3,\\ 4-x & при \quad 3<x\le 4.\end{cases}$$

Решение. Функция задана на интервале $(0, 4)$

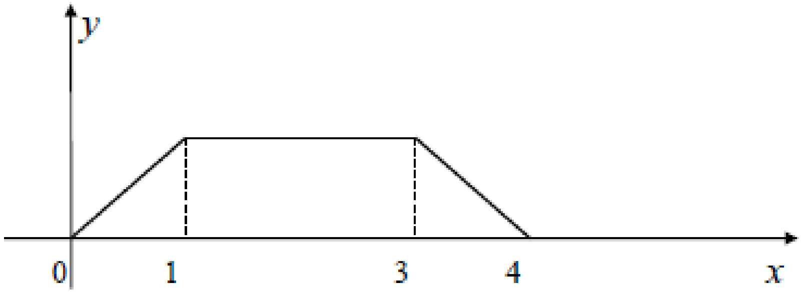

Рис.19

Продолжим ее периодически в соседние интервалы. Коэффициенты a_n и b_n вычислим по формулам (33), учитывая, что интервал $(0, 4)$ следует разбить на три интервала: $(0, 1)$; $(1, 3)$; $(3, 4)$, в каждом из которых функция сохраняет одно и то же аналитическое выражение. Длина интервала интегрирования $2\ell = 4$, а потому в указанных формулах надо взять $\ell = 2$. Поэтому

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 xdx + \int_1^3 1dx + \int_3^4 (4-x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 + x\Bigg|_1^3 + \left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_3^4\right] = \frac{3}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^3 1\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_3^4 (4-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right] =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[\cos\pi n\cdot\cos\frac{\pi n}{2} - 1\right].$$

Аналогичные вычисления покажут, что $b_n = 0.$

Подставляя a_0, a_n, b_n в (32), получим, что

$$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\pi n\cdot\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

В развернутом виде это будет выглядеть так:

$$f(x)=\frac{3}{4}-\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1^2}+\frac{\cos\frac{3\pi x}{2}}{3^2}+\frac{\cos\frac{5\pi x}{2}}{5^2}+\dots\right)-$$

$$-\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{\cos \pi x}{2^2}+\frac{\cos 3\pi x}{6^2}+\frac{\cos 5\pi x}{10^2}+\dots\right).$$

Пример 390. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $2\ell=4$:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad -2<x\le -1,\\ x+1 & при \quad -1<x\le 0,\\ 1-x & при \quad 0<x\le 1,\\ 0 & при \quad 1<x<2.\end{cases}$$

Решение. Построим график функции (рис. 20).

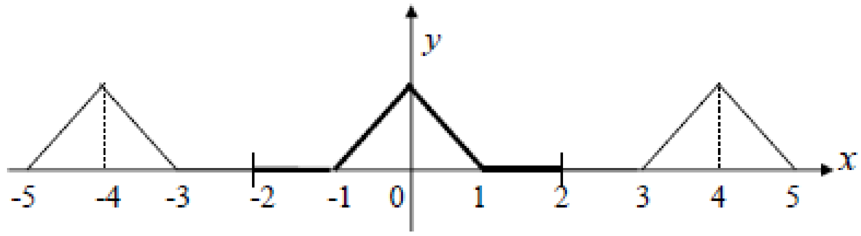

Рис.20

График функции симметричен относительно оси *Oy*. Функция четная, поэтому она разлагается в ряд Фурье по косинусам. По формулам (35) находим коэффициенты ряда Фурье

$$a_0=\int_0^1(1-x)dx=\frac{1}{2},$$

$$a_n=\int_0^1(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{4}{n^2\pi^2}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{n^2\pi^2} & при \quad n=2m-1,\\ \dfrac{8}{n^2\pi^2} & при \quad n=2(2m-1),\\ 0 & при \quad n=4m, \quad (m=1,2,3,\dots)\end{cases}$$

Ряд Фурье для данной функции

$$f(x)=\frac{1}{4}+\frac{4}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2}+\frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{2}+\ldots\right]$$

и это разложение справедливо при всех *x,* так как функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси.

Пример 391. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=x,\ -3<x<3,\quad f(x)=f(x+6).$$

Решение. Данная функция нечетная, поэтому она разлагается в ряд Фурье по синусам. Вычислим коэффициенты ряда по формулам (37):

$$b_n=\frac{2}{3}\int_0^3 x\sin\frac{n\pi x}{3}dx=(-1)^{n+1}\cdot\frac{6}{\pi}\cdot\frac{1}{n}.$$

Записываем разложение

$$\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{3}=\begin{cases}x & при \quad -3<x<3,\\ 0 & при \quad x=\pm 3.\end{cases}$$

Примеры для самостоятельного решения

Разложить в ряды Фурье периодические функции с периодом 2ℓ*:*

392. $f(x)=1-x^2,\ -1<x<1,\ \ell=1.$

Ответ. $f(x)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{1}{k^2}\cos k\pi x.$

393. $f(x)=\begin{cases}-1 & при \quad -1\le x<0,\\ 1 & при \quad 0\le x<1,\end{cases}\quad f(x)=f(x+2).$

Ответ. $1+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\begin{cases}-1 & при \quad -1<x\le 0,\\ 1 & при \quad 0<x<1,\\ 0 & при \quad x=0,\ x=\pm 1.\end{cases}$

394. $f(x)=3|x|-2x,\ -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2},\ \ f(x)=f(x+1).$

Ответ.

$$\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{\pi^2(2n-1)^2}\cos 2(2n-1)\cdot\pi x+\frac{2}{\pi n}(-1)^n\sin 2n\pi x\right).$$

395. $f(x)=x^3,\ -1<x<1,\ \ f(x)=f(x+2).$

Ответ. $\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{6}{k^3\pi^3}\right)\sin k\pi x.$

4.3 Разложение в тригонометрический ряд Фурье непериодической функции.

Справочный материал

Пусть функция $\varphi(x)$ *определена и кусочно-дифференцируема в интервале* $(-\ell,\ell)$. *Требуется разложить ее в ряд Фурье, но не на всей оси, а только в этом интервале. В этом случае введем в рассмотрение новую функцию* $f(x)$, *которая тождественно равна данной функции в интервале* $(-\ell,\ell)$,*но которая является* 2ℓ *-периодической.*

На рис.21 для примера показана функция $\varphi(x)$ *и соответствующая ей* 2ℓ *-периодическая функция* $f(x)$.

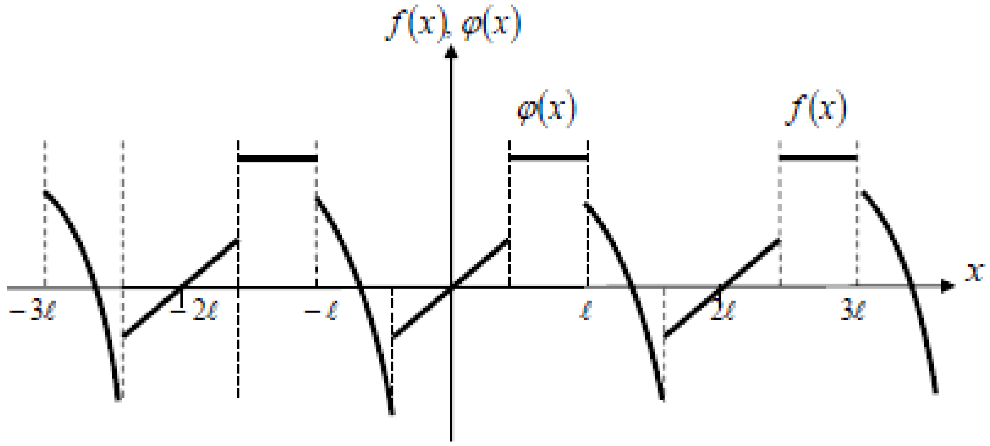

Рис.21

В точках непрерывности функция $f(x)$ *разлагается в ряд (32). Значения аргумента ограничивают интервалом* $(-\ell, \ell)$, *и в точках непрерывности функции* $\varphi(x)$ *получают разложение*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\varphi(x)dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\varphi(x)\cos\frac{k\pi}{\ell}xdx\right)\cos\frac{k\pi}{\ell}x +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{k\pi}{\ell}xdx\right)\sin\frac{k\pi}{\ell}x\right],$$

$$x\in(-\ell, \ell). \qquad (38)$$

В точках разрыва внутри интервала $(-\ell, \ell)$ *сумма ряда в правой части (38) равна полусумме односторонних пределов функции* $\varphi(x)$. *На концах интервала* $(-\ell, \ell)$ *сумма ряда вычисляется по формуле*

$$\frac{\varphi(-\ell+0)+\varphi(\ell-0)}{2}.$$

Если функция ψ *определена и кусочно-дифференцируема в интервале* $(0, \ell)$ *и требуется разложить ее в этом интервале в ряд Фурье, то эту задачу сводят к разложению непериодической функции, определенной в интервале* $(-\ell, \ell)$. *Для этого на интервале* $(-\ell, 0)$ *задают какую-нибудь кусочно-дифференцируемую функцию, которая вместе с данной функцией образует функцию, определенную и кусочно-дифференцируемую в интервале* $(-\ell, \ell)$. *Ее разлагают в ряд Фурье и это разложение используют лишь для x, принадлежащих к интервалу* $(0, \ell)$. *Чаще всего поступают одним из следующих способов.*

1. *В интервале* $(-\ell, \ell)$ *задают функцию*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\ell < x < 0, \\ \psi(x) & \text{при} \quad 0 < x < \ell, \end{cases}$$

используют формулу (38) и для точек непрерывности функции $\psi(x)$ *записывают разложение*

$$\psi(x)=\frac{1}{2\ell}\int_0^{\ell}\psi(x)dx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx\right)\cos\frac{n\pi}{\ell}x+\left(\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right],$$

$$x\in(0,\ \ell).$$

(39)

2. В интервале $(-\ell,\ \ell)$ *задают функцию*

$$\varphi(x)=\begin{cases}\psi(-x) & при \quad -\ell<x<0,\\ \psi(x) & при \quad 0<x<\ell,\end{cases}$$

то есть осуществляют четное продолжение данной функции на интервале $(-\ell,\ 0)$. *Затем используют формулу (34) и для точек непрерывности функции* $\psi(x)$ *записывают разложение по косинусам*

$$\psi(x)=\frac{1}{2\ell}\int_0^{\ell}\psi(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx\right)\cos\frac{n\pi}{\ell}x,$$

$$x\in(0,\ \ell). \qquad (40)$$

3. В интервале $(-\ell,\ \ell)$ *задают функцию*

$$\psi(x)=\begin{cases}-\psi(-x) & при \quad -\ell<x<0,\\ \psi(x) & при \quad 0<x<\ell,\end{cases}$$

то есть осуществляют нечетное продолжение заданной функции $\psi(x)$ *на интервале* $(-\ell,\ 0)$. *Затем используют формулу (36) и для точек непрерывности функции записывают разложение по синусам*

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x,\quad x\in(0,\ \ell). \qquad (41)$$

В точках разрыва функции $\psi(x)$ *сумма рядов в правых частях равенств (39), (40), (41) равна полусумме односторонних пределов функции. Если кусочно-дифференцируемая функция задана в интервале* $(-\pi,\ \pi)$ *или* $(0,\ \pi)$, *то ее аналогичным образом можно разложить в ряд Фурье.*

Примеры решения задач

Пример 396. Разложить в ряд Фурье на интервале $(-2,\,2)$ функцию $\varphi(x)=|x|$.

Решение. Данная функция кусочно-дифференцируема на всей числовой оси, но не периодическая. Введем в рассмотрение новую функцию

$$f(x)=|x|,\ \ -2<x\le 2,\ \ f(x)=f(x+4).$$

Графики данной функции и введенной показаны на рис.22.

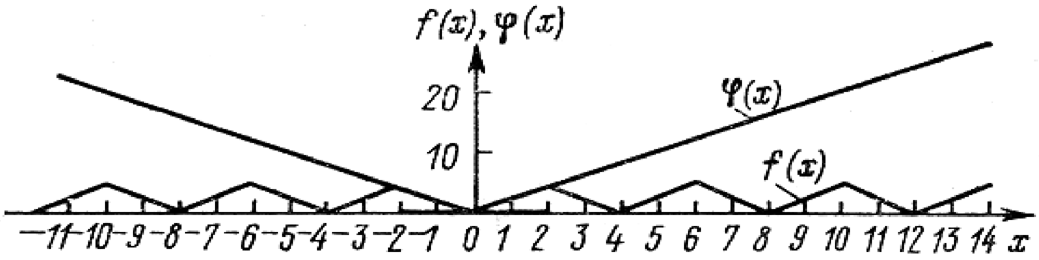

Рис.22

Функция $f(x)$ введена таким образом, что $f(x)\equiv\varphi(x)$ при $x\in(-2,\,2)$, кроме того, она периодическая.

Для функции $f(x)$ справедливо разложение (34) при $\ell=2$. Вычисляем коэффициенты по формулам (35):

$$a_0=\int_0^2 x dx=2,$$

$$a_n=\int_0^2 x\cos\frac{n\pi}{2}xdx=\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=$$

$$=\begin{cases} 0 & при \quad n=2k, \\ -\dfrac{8}{n^2\pi^2} & при \quad n=2k-1, \quad (k=1,2,3,\ldots) \end{cases}$$

Получаем искомое разложение

$$|x|=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\cdot\pi}{2}x, \quad x\in(-2,\,2).$$

Пример 397. Разложить в ряд Фурье в интервале $(0,\,3)$ функцию

$$\psi(x)=\begin{cases} x & при \quad 0<x<1, \\ 1 & при \quad 1\le x<3. \end{cases}$$

Решение. Функция определена и кусочно-дифференцируема в интервале $(0,3)$, то есть $\ell=3$. В интервале $(-3,3)$ зададим функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & при \quad -3<x<0, \\ \psi(x) & при \quad 0<x<3 \end{cases}$$

и воспользуемся формулой (38).

Вычисляем

$$\frac{1}{2\ell}\int_0^\ell \psi(x)dx=\frac{1}{6}\int_0^3 \psi(x)dx=\frac{1}{6}\left(\int_0^1 xdx+\int_0^3 1dx\right)=\frac{5}{12},$$

$$\frac{1}{\ell}\int_0^\ell \psi(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx=\frac{1}{3}\left(\int_0^1 x\cos\frac{n\pi}{3}xdx+\int_1^3\cos\frac{n\pi}{3}xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{3}+\frac{3}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-1\right)\right],$$

$$\frac{1}{\ell}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx=\frac{1}{3}\left(\int_0^1 x\sin\frac{n\pi}{3}xdx+\int_1^3\sin\frac{n\pi}{3}xdx\right)=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left[\left(\cos\frac{n\pi}{3}-1\right)+\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\right].$$

Записываем искомое разложение

$$\psi(x)=\frac{5}{12}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{n\pi}{3}+\frac{3}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-1\right)\right]\cos\frac{n\pi}{3}x-$$

$$-\frac{1}{n}\left[\left(\cos\frac{n\pi}{3}-1\right)+\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\right]\sin\frac{n\pi}{3}x, \quad x\in(0,3).$$

Это разложение справедливо во всех точках интервала $(0,3)$, так как данная функция непрерывна в нем.

Пример 398. Разложить по синусам функцию, определенную равенствами

$$\psi(x)=\begin{cases} \sin\pi x & при \quad 0<x<\frac{1}{2}, \\ 0 & при \quad \frac{1}{2}<x<1. \end{cases}$$

Решение. Функция $\psi(x)$ задана в интервале (0, 1). Продолжим эту функцию нечетным образом в интервале (-1, 0), а затем периодически с периодом $2\ell = 2$ на всю ось и воспользуемся разложением (41).

При $n = 1$

$$\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{\pi}{\ell}x\,dx = 2\int_0^{1/2}\sin^2\pi x\,dx = \frac{1}{2},$$

При $n \neq 1$

$$\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx = 2\left(\int_0^{1/2}\sin\pi x\sin n\pi x\,dx + \int_{1/2}^{1}0\cdot\sin\pi x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi(n-1)}\sin\frac{\pi(n-1)}{2} - \frac{1}{\pi(n+1)}\sin\frac{\pi(n+1)}{2} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n = 2m+1, \\ (-1)^{m+1}\dfrac{4m}{\pi\left[(2m)^2-1\right]} & \text{при} \quad n = 2m, \ m = 1,2,3,.... \end{cases}$$

Учтено, что

$$\sin\frac{\pi(2m-1)}{2} = (-1)^{m-1}, \quad \sin\frac{\pi(2m+1)}{2} = (-1)^m.$$

Запишем ряд Фурье

$$\frac{1}{2}\sin\pi x - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m m}{4m^2-1}\sin 2m\pi x =$$

$$= \begin{cases} \sin\pi x & \text{при} \quad 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{1}{2} < x < 1, \\ \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad x = \dfrac{1}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \ x = 1. \end{cases}$$

Пример 399. Функцию $\psi(x)=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\pi x}{2}$, заданную в интервале $[0,\pi]$, разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг.

Решение.

Доопределим данную функцию в интервале $(-\pi,0)$ четным образом, то есть введем функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{\pi x}{2} & npu \quad -\pi<x<0,\\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\pi x}{2} & npu \quad 0<x<\pi.\end{cases}$$

и воспользуемся разложением (26).

Коэффициенты разложения вычислим по формулам (25)

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)dx=-\frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)\cos nx dx,$$

интегрируем по частям два раза, получаем $a_n=\dfrac{1}{n^2}, \quad n=1,2,3,\ldots$

Записываем ряд Фурье

$$-\frac{\pi^2}{6}+\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\pi x}{2} & npu \quad 0<x<\pi,\\ 0 & npu \quad x=0,\\ -\dfrac{\pi}{4} & npu \quad x=\pi.\end{cases}$$

При $x=0$ получим

$$0=-\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

или

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Это ряд Эйлера.

При изучении числовых рядов мы смогли доказать, что этот ряд сходится, теперь мы нашли его сумму.

Пример 400. Функцию $\psi(x)=x$, определенную в интервале $(0,\pi)$, разложить в ряд Фурье по синусам и косинусам.

Решение.

Чтобы разложить функцию по синусам и косинусам в интервале $(-\pi,\pi)$, зададим функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases}-(-x) & при \quad -\pi<x<0,\\ x & при \quad 0<x<\pi,\end{cases}$$

то есть продолжим нечетным образом функцию $\psi(x)=x$ в интервал $(-\pi,0)$ и положим

$$\varphi(x)=\varphi(x+2\pi).$$

Разложение такой функции в ряд Фурье мы уже имели в примере 365. Только сейчас нас интересует сумма этого ряда в интервале $(0,\pi)$. В данном случае запишем

$$2\left[\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right]=$$

$$=\begin{cases}x & при \quad 0\le x<\pi,\\ 0 & при \quad x=\pi.\end{cases}$$

Для того чтобы разложить функцию по косинусам в интервале $(-\pi,\pi)$, зададим функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases}-x & при \quad -\pi<x<0,\\ x & при \quad 0<x<\pi,\end{cases}$$

то есть продолжим четным образом функцию $\psi(x)$ в интервал $(-\pi,0)$ и положим $\varphi(x)=\varphi(x+2\pi)$.

В данном случае можно записать

$$\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi}\left[\cos x-\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2}+\ldots\right]=x$$

при $0\le x\le\pi,$ так как функция везде непрерывна.

Примеры для самостоятельного решения

Разложить в ряды Фурье функции, заданные в интервалах $(0, \ell)$ *или* $(0, \pi)$*:*

401. $\psi(x)=1$ при $0<x<1$ по синусам кратных дуг.

Ответ. $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$.

402. $\psi(x)=\begin{cases}1-x & при \quad 0<x<1,\\ x-1 & при \quad 1<x<2\end{cases}$ по косинусам.

Ответ. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi x.$

403. $\psi(x)=x(\pi-x)$ при $0<x<\pi$ по синусам.

Ответ. $\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^3}\sin(2n+1)x=\psi(x), \quad x\in(0, \pi).$

404. $\psi(x)=x(\pi-x)$ при $0<x<\pi$ по косинусам.

Ответ. $x(\pi-x)=\dfrac{1}{6}\pi^2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\cos 2nx, \quad x\in(0, \pi).$

4.4 Интеграл Фурье

Справочный материал

Пусть функция $f(x)$*:*

1) *задана на всей оси x;*
2) *на любом конечном интервале является кусочно-дифференцируемой;*
3) *абсолютно интегрируема на всей оси x, то есть сходится несобственный интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx.$

Тогда при всех значениях x функция представима интегралом Фурье

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)dt\right\}d\alpha, \qquad (42)$$

причем, во всех точках непрерывности функции значения интеграла Фурье равны соответствующим значениям функции, то есть

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)dt. \qquad (43)$$

В точках x_0 *разрыва функции значение интеграла равно полусумме односторонних пределов функции, то есть*

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x_0)dt. \qquad (44)$$

Интеграл Фурье может быть записан в форме, аналогичной ряду Фурье

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\int\limits_0^{+\infty}[a(\alpha)\cos\alpha x+b(\alpha)\sin\alpha x]d\alpha, \qquad (45)$$

где

$$a(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx,$$

$$(46)$$

$$b(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\alpha x dx.$$

В точках, где $f(x)$ *непрерывна, левая часть заменяется на* $f(x)$.

Для четной функции интеграл Фурье может быть представлен в виде

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\cos\alpha x\, d\alpha\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\, dt, \qquad (47)$$

а для нечетной функции в виде

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\sin\alpha x\, d\alpha\int\limits_0^{\infty} f(t)\sin\alpha t\, dt. \qquad (48)$$

Интеграл Фурье может быть записан в комплексной форме в виде

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-i\alpha(x-t)}dt. \qquad (49)$$

В технических приложениях интеграла Фурье используют понятие спектральной характеристики или спектральной плотности функции. Последнее равенство записывают так

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(i\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha, \qquad (50)$$

где функцию

$$F(i\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt \qquad (51)$$

называют спектральной плотностью, или спектральной характеристикой функции $f(x)$.

Переход от функции $f(x)$ *к функции* $F(i\alpha)$ *называют преобразованием Фурье или прямым преобразованием Фурье функции* $f(x)$, *переход же от* $F(i\alpha)$ *к функции* $f(x)$ *называют обратным преобразованием Фурье функции* $F(i\alpha)$.

Пусть функция $f(x)$ *задана в интервале* $[0,+\infty)$ *и удовлетворяет на этом интервале условиям представимости интегралом Фурье. Доопределим эту функцию в интервале* $(-\infty, 0)$ *так, чтобы она тоже удовлетворяла тем же условиям, но уже на всей оси. Тогда функция* $f(x)$ *может быть представлена интегралом Фурье. В частности, функцию* $f(x)$ *можно продолжить так, чтобы она стала четной или нечетной на всей числовой оси. В первом случае будем иметь представление функции интегралом (47), во втором случае – интегралом (46).*

Таким образом, одну и ту же функцию $f(x)$ *на интервале* $[0,+\infty)$ *можно представить различными интегралами.*

Примеры решения задач

<u>Представить интегралом Фурье данные функции:</u>

Пример 405.
$$f(x)=\begin{cases}2 & при \quad 0<x<2,\\ 1 & при \quad x=0,\ x=2,\\ 0 & при \quad x<0,\ x>2.\end{cases}$$

Решение. Функция определена и кусочно-дифференцируема на всей числовой оси, абсолютно интегрируема, так как сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\int_{-\infty}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{2}2dx+\int_{2}^{\infty}0\cdot dx=4.$$

Следовательно, функцию представим интегралом Фурье (42). Вычислим сначала внутренний интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(x-t)dt=\int_{-\infty}^{0}0\cdot\cos\alpha(x-t)dt+\int_{0}^{2}2\cos\alpha(x-t)dt+$$

$$+\int_{2}^{\infty}0\cdot\cos\alpha(x-t)dt=\int_{0}^{2}2\cos\alpha(x-t)dt=-2\frac{\sin\alpha(x-t)}{\alpha}\Bigg|_{0}^{2}=$$

$$=-2\frac{\sin\alpha(x-2)-\sin\alpha x}{\alpha}=4\frac{\cos\alpha\sin\alpha(1-x)}{\alpha}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (42), получим

$$\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\alpha\sin\alpha(1-x)}{\alpha}d\alpha=\begin{cases}2 & при \quad 0<x<2,\\ 0 & при \quad x<0,\ x>2,\\ 1 & при \quad x=0,\ x=2.\end{cases}$$

Пример 406.
$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ \pi x & при \quad 0\le x\le 1,\\ 0 & при \quad x>1.\end{cases}$$

Решение.

Данная функция удовлетворяет всем условиям представимости интегралом Фурье. Используем разложение (45). Вычислим коэффициенты $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ по формулам (46):

$$a(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}0\cos\alpha t dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\pi t\cos\alpha t dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{\infty}0\cos\alpha t dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}t\cos\alpha t dt=\left.\frac{t\cos\alpha t}{\alpha}\right|_{0}^{1}+\left.\frac{1}{\alpha^2}\cos\alpha t\right|_{0}^{1}=\frac{\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-1}{\alpha^2},$$

$$b(\alpha)=\int\limits_{0}^{1}t\sin\alpha t dt=\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha^2}.$$

Подставляя в формулу (45), получим

$$\int\limits_{0}^{\infty}\left\{\frac{\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-1}{\alpha^2}\cos\alpha x+\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha^2}\sin\alpha x\right\}d\alpha=$$

$$=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ \pi x & при \quad 0\le x\le 1,\\ 0 & при \quad x>1,\\ \dfrac{\pi}{2} & при \quad x=1.\end{cases}$$

Пример 407. $$f(x)=\begin{cases}-x+2 & при \quad 0\le x<2,\\ x+2 & при \quad -2<x<0,\\ 0 & при \quad |x|\ge 2.\end{cases}$$

Решение.

Данная функция определена и кусочно-дифференцируема на всей числовой оси, она абсолютно интегрируема, так как сходится интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\int\limits_{-2}^{0}(x+2)dx+\int\limits_{0}^{2}(2-x)dx=4.$$

Значит, функция представима интегралом Фурье.

Для данной функции выполняется условие

$$f(x)=\begin{cases}f(x) & при \quad 0<x<2,\\ f(-x) & при \quad -2<x<0.\end{cases}$$

Следовательно, функция четная и интеграл Фурье будет определяться формулой (47).

Вычислим сначала внутренний интеграл

$$\int_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t dt = \int_0^{2}(-t+2)\cos\alpha t dt + \int_2^{\infty} 0\cdot\cos\alpha t dt =$$

$$= \int_0^{2}(2-t)\cos\alpha t dt = (2-t)\frac{\sin\alpha t}{\alpha}\Bigg|_0^2 + \int_0^{2}\frac{\sin\alpha t}{\alpha}dt =$$

$$= -\frac{\cos\alpha t}{\alpha^2}\Bigg|_0^2 = -\frac{1}{\alpha^2}(\cos 2\alpha - 1) = \frac{2\sin^2\alpha}{\alpha^2}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (47), получим

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\cos\alpha x d\alpha = \begin{cases} -x+2 & при \quad 0 \le x < 2, \\ x+2 & при \quad -2 < x < 0, \\ 0 & при \quad |x| = 2. \end{cases}$$

Используя этот интеграл, найдем значение несобственного интеграла

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

Полагая в полученном разложении равенства $x = 0$, найдем

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} x d\alpha = 2 \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha.$$

Тем самым вычислен несобственный интеграл, для которого не существует первообразная, выраженная в элементарных функциях. Следует отметить, что аналогичным путем удается вычислить значения многих несобственных интегралов.

Пример 408 . $\quad f(x) = e^{-\beta x} \quad (\beta > 0,\ x > 0).$

Решение. Для представления данной функции интегралом Фурье продолжим функцию для значений $x < 0$ нечетным образом, то есть

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\beta x} & при \quad x \ge 0, \\ -e^{-\beta x} & при \quad x \le 0. \end{cases}$$

Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям представимости ее интегралом Фурье, а именно:

1) определена на всей числовой оси ;
2) кусочно-дифференцируема на любом конечном интервале;
3) абсолютно интегрируема, так как $\int_0^\infty e^{-\beta x}dx = 0.$

Следовательно, функция $\varphi(x)$ представима интегралом Фурье по формуле (48).

Для данной функции можем записать интеграл Фурье

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\alpha x d\alpha \int_0^\infty e^{-\beta t}\sin\alpha t dt = e^{-\beta x} \quad \text{при} \quad x > 0. \qquad (*)$$

Вычислим сначала интеграл (интегрируя два раза по частям)

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}\sin\alpha t dt = e^{-\beta t}\frac{\alpha\cos\alpha t + \beta\sin\alpha t}{\alpha^2+\beta^2}\Bigg|_0^\infty = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Подставив его в (*), получим

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}d\alpha = e^{-\beta x} \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Покажем, что с помощью найденного интеграла мы можем вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{\alpha}d\alpha.$$

Для этого интеграл Фурье для функции $e^{-\beta x}$ запишем в виде

$$\frac{\pi}{2}e^{-\beta x} = \int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}d\alpha.$$

В этом интеграле перейдем к пределу при $\beta \to 0.$

Получим

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{\alpha}d\alpha,$$

что и требовалось показать.

Пример 409. $f(x) = e^{-\beta|x|} \quad (\beta > 0)$.

Решение.

Воспользуемся в данном случае комплексной формой интеграла Фурье (50). Вычислим функцию $F(i\alpha)$ по формуле (51)

$$F(i\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{\beta t} e^{-i\alpha t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\beta t} e^{-i\alpha t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(\beta - i\alpha)\cdot t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(\beta + i\alpha)\cdot t} dt =$$

$$= \frac{e^{(\beta - i\alpha)t}}{\beta - i\alpha}\Bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-(\beta + i\alpha)t}}{\beta + i\alpha}\Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{2\beta}{\pi\left(\beta^2 + \alpha^2\right)}.$$

Подставляя в формулу (50), получим

$$\frac{\beta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} e^{i\alpha x} = e^{-\beta|x|}.$$

Представление данной функции интегралом Фурье в комплексной форме и представление интегралом Фурье в вещественной форме отличаются только по внешнему виду и могут быть преобразованы одно в другое с помощью формул Эйлера. Так, в данном случае имеем

$$\frac{\beta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} e^{i\alpha x} = \frac{\beta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\cos \alpha x + i \sin \alpha x) d\alpha =$$

$$= \frac{\beta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2} d\alpha + \frac{i\beta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2} d\alpha.$$

Второй интеграл равен нулю, так как подынтегральная функция нечетная, а в первом подынтегральная функция четная, поэтому

$$\frac{2\beta}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2} d\alpha = e^{-\beta|x|}.$$

Пример 410. Найти спектральную плотность функции

$$f(x)=\begin{cases} x\ при & 0\le x<1, \\ 2-x\ \ при & 1\le x\le 2. \end{cases}$$

Решение.

Спектральную плотность $F(i\alpha)$ найдем по формуле (51):

$$F(i\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt=\int\limits_{0}^{1} te^{-i\alpha t}dt+\int\limits_{1}^{2}(2-t)e^{-i\alpha t}dt.$$

Нужно вычислить три интеграла

$$1)\ \int\limits_{0}^{1} te^{-i\alpha t}dt,\quad 2)\ \int\limits_{1}^{2} e^{-i\alpha t}dt,\quad 3)\ \int\limits_{1}^{2} te^{-i\alpha t}dt.$$

Первый и третий интегралы вычисляем по частям

$$\int\limits_{0}^{1} te^{-i\alpha t}dt=-\frac{te^{-i\alpha t}}{i\alpha}\Bigg|_{0}^{1}+\frac{1}{\alpha^2}e^{-i\alpha t}\Bigg|_{0}^{1}=-\frac{e^{-i\alpha}}{i\alpha}+\frac{e^{-i\alpha}}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2};$$

$$\int\limits_{1}^{2} te^{-i\alpha t}dt=-\frac{te^{-i\alpha t}}{i\alpha}\Bigg|_{1}^{2}+\frac{1}{\alpha^2}e^{-i\alpha t}\Bigg|_{1}^{2}=$$

$$=-\frac{2e^{-2i\alpha}}{i\alpha}+\frac{e^{-i\alpha}}{i\alpha}+\frac{e^{-2i\alpha}}{\alpha^2}-\frac{e^{-i\alpha}}{\alpha^2}.$$

Второй интеграл табличный

$$\int\limits_{1}^{2} e^{-i\alpha t}dt=-\frac{1}{i\alpha}\int\limits_{1}^{2} e^{-i\alpha t}d(-i\alpha t)=-\frac{e^{-i\alpha t}}{i\alpha}\Bigg|_{1}^{2}=\frac{e^{-2i\alpha}}{i\alpha}+\frac{e^{-i\alpha}}{i\alpha}.$$

Подставляя найденные значения интегралов в выражения для спектральной плотности, получим

$$F(i\alpha)=-\frac{e^{-i\alpha}}{i\alpha}+\frac{e^{-i\alpha}}{i\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2e^{-2i\alpha}}{i\alpha}+\frac{2e^{-i\alpha}}{i\alpha}+\frac{2e^{-2i\alpha}}{i\alpha}-$$

$$-\frac{e^{-i\alpha}}{i\alpha}-\frac{e^{-2i\alpha}}{\alpha^2}+\frac{e^{-i\alpha}}{\alpha^2}=\frac{2e^{-i\alpha}\ -1-e^{-2i\alpha}}{\alpha^2}-=$$

$$=\frac{e^{-i\alpha}}{\alpha^2}\left(e^{i\alpha}-2+e^{-i\alpha}\right)=\frac{4e^{-i\alpha}}{\alpha^2}\cdot\frac{\left(e^{\frac{i\alpha}{2}}-e^{\frac{-i\alpha}{2}}\right)^2}{4i^2}=$$

$$=\frac{4e^{-i\alpha}}{\alpha^2}\cdot\left(\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{\frac{-i\alpha}{2}}}{2i}\right)^2=\frac{4}{\alpha^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot e^{-i\alpha}.$$

Окончательно спектральная плотность данной функции

$$F(i\alpha)=\frac{4}{\alpha^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot e^{-i\alpha}.$$

Примеры для самостоятельного решения.

Представить интегралом Фурье функции:

411. $$f(x)=\begin{cases}\cos x \quad \textit{при} \quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0 \quad \textit{вне} \quad 0\le x<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Ответ. $$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{1-\alpha^2}\cos\alpha x+\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{1-\alpha^2}\sin\alpha x\right)d\alpha \qquad x\ne 0.$$

412. $$f(x)=\begin{cases}|x| \quad \textit{при} \quad |x|<1,\\ 0 \quad \textit{при} \quad |x|>1.\end{cases}$$

Ответ.

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-1}{\alpha^2}\cos\alpha x d\alpha.$$

413. $$f(x)=\begin{cases}2 \quad \textit{при} \quad 0\le x<3,\\ 1 \quad \textit{при} \quad x=3,\\ 0 \quad \textit{при} \quad x>3.\end{cases}$$

Продолжить функцию в интервал $(-\infty, 0)$ четным и нечетным образом.

Ответ. $\dfrac{4}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\sin 3\alpha}{\alpha}\cos\alpha x d\alpha=\begin{cases}2 & при \quad 0\le x<3,\\ 1 & при \quad x=3,\\ 0 & при \quad x>3,\ x=0.\end{cases}$

$$\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{1-\cos 3\alpha}{\alpha}\sin\alpha x d\alpha=\begin{cases}2 & при \quad 0<x<3,\\ 1 & при \quad x=3,\\ 0 & при \quad x>0,\ x=0.\end{cases}$$

414. Функцию $f(x)=\begin{cases}A & при \quad 0\le x\le a \ \ (a>0),\\ 0 & вне \quad [0,a] \ \ (a>0).\end{cases}$ представить комплексной формой интеграла Фурье.

Ответ $f(x)=\dfrac{A}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{a\alpha}{2}}{\alpha}e^{i\alpha\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}d\alpha.$

415. Вычислить спектральную плотность функции

$$f(x)=\begin{cases}h & при \quad -\dfrac{a}{2}<x<\dfrac{a}{2},\\ 0 & при \quad |x|>\dfrac{a}{2} \quad (a>0).\end{cases}$$

Ответ. $F(i\alpha)=-\dfrac{h}{i\alpha}\left(e^{-i\alpha\frac{a}{2}}-e^{i\alpha\frac{a}{2}}\right).$

Список литературы:

1. *Бугров С.Я., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисления. - М.: Наука, 1984. - 431 с.
2. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов/ Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. - М.: ЮНИТИ, 2000. – 471 с.
3. *Гусак А.А.* Высшая математика: В 2 т. – Мн.: Изд-во Университет-ское, Т.2. – 1984. – 383 с.
4. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1: Учеб.пособие для студентов втузов. – 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. школа, 1980. - 320 с.
5. *Ильин В.*А., *Позняк Э.Г.* Основы математического анализа: В 2 т. – М.: Высш.шк., 1981. - Т.1. – 588 с.; Т.2. – 424 с.
6. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.* Краткий курс высшей математи-ки: Учебное пособие для вузов. – 7-е изд., испр.- М.: Наука, 1989. – 656 с.
7. *Кудрявцев Л.*Д., *Кутасов А.Д., Чехлов В.Н., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. – М.: Наука, 1984. – 592 с.
8. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: В 2 т. – Учебное издание. М.: Айрис пресс, 2004. Т.1. – 281 с.; Т.2. – 253 с.
9. Сборник задач по курсу высшей математики. Под редакцией Г.И. Кручковича. – 3-е изд., перераб. Учебное пособие для втузов. - М.: Высшая школа, 1973. – 576 с.
10. *Щипачев В.С.* Высшая математика. - М.: Высш. шк., 1985. – 445 с.

Содержание