

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

---

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

---

Физико-механический институт  
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

*А.Н. Баженов, А.А. Карпова*

# ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В ПРИМЕРАХ

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
2024

УДК 519.6 Р32

А в т о р ы :

А.Н. Баженов, А.А. Карпова.

Интервальный анализ в примерах 2024. – с.226.

### Аннотация

Учебное пособие посвящено демонстрации решения различных задач методами интервального анализа. Теория интервального анализа изложена очень кратко, без деталей и доказательств. Во многих случаях необходимые сведения из теории даются непосредственно при изложении темы.

Основная цель пособия — предоставить исследователю-нематематику необходимый вычислительный инструментарий. В связи с этой задачей в пособии много примеров расчётов. Подавляющее большинство из них создано специально для книги. Приводятся детали расчётов, позволяющие читателю полностью проверить весь ход вычислений и использовать этот опыт в его работе. Где уместно, приводятся графические иллюстрации для контроля вычислений и интерпретации результатов.

Материал апробирован в учебном курсе «Численные методы в физике» для аспирантов ФТИ им. А.Ф.Иоффе РАН и в учебных курсах «Интервальный анализ» и «Анализ данных с интервальной неопределённостью» в Санкт-Петербургском политехническом университете Петра Великого в 2018-2024 гг.

Пособие предназначается для студентов и аспирантов естественнонаучных специальностей, а также для учёных и инженеров, интересующихся вопросами математической обработки экспериментов.

# Оглавление

Список примеров	6
Обозначения	8
Введение	13
<b>1 Классическая интервальная арифметика</b>	<b>17</b>
1.1 Интервал и арифметические операции над ним . . . . .	17
1.1.1 Независимые и связанные интервальные величины	21
1.1.2 Основная теорема интервальной арифметики . . .	23
1.1.3 Алгебраические свойства интервальных операций	24
1.1.4 Абсолютные характеристики интервала . . . . .	25
1.1.5 Относительные характеристики интервала . . . . .	27
1.1.6 Расстояние на множестве интервалов . . . . .	27
1.1.7 Отличия интервальной арифметики от обычной .	28
1.2 Интервальные векторы и матрицы . . . . .	31
1.2.1 Арифметические операции над интервальными векторами и матрицами . . . . .	34
1.2.2 Алгебраические и порядковые свойства многомерных интервальных операций . . . . .	41
1.2.3 Нормы интервальных матриц и векторов . . . . .	42
1.2.4 Метрика и топология в интервальных пространствах . . . . .	45
1.2.5 Неособенные интервальные матрицы . . . . .	50
1.2.6 Сильно неособенные интервальные матрицы . . .	54
1.2.7 Обратные интервальные матрицы . . . . .	56
1.2.8 $M$ - и $H$ -матрицы . . . . .	59
1.3 Интервальное оценивание областей значений функций .	63

1.3.1	Интервальные оценивающие функции и их простейшие формы . . . . .	64
1.3.2	Липшицевская оценка точности естественного интервального расширения . . . . .	68
1.3.3	Центрированные формы интервальных оценивающих функций . . . . .	72
1.3.4	Бицентрированная среднезначная форма . . . . .	77
1.4	Постановки и множества решений интервальных задач . . . . .	80
1.4.1	Кванторный формализм и АЕ-множества решений интервальных систем уравнений . . . . .	81
1.4.2	Множества АЕ-решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений . . . . .	83
1.4.3	Частные случаи множеств АЕ-решений и частичный порядок на множестве логических кванторов . . . . .	84
1.4.4	Управляемое множество решений интервальных уравнений . . . . .	90
1.4.5	Допусковое множество решений интервальных уравнений . . . . .	97
1.4.6	Техника распознающих функционалов . . . . .	104
1.5	Внешнее оценивание объединённого множества решений . . . . .	110
1.5.1	Предобуславливание . . . . .	111
1.5.2	Предварительное внешнее оценивание . . . . .	112
1.5.3	Интервальный итерационный метод Гаусса-Зейделя . . . . .	116
1.5.4	Процедура Хансена-Блика-Рона . . . . .	120
1.5.5	Формально-алгебраический подход . . . . .	126
1.5.6	Интервальный метод Кравчика . . . . .	129
1.6	Решение интервальной линейной задачи о допусках . . . . .	132
1.6.1	Исследование разрешимости линейной задачи о допусках . . . . .	134
1.6.2	Коррекция линейной задачи о допусках . . . . .	137
1.6.3	Коррекция ИСЛАУ: изменение правой части . . . . .	138
1.6.4	Коррекция ИСЛАУ: изменение матрицы . . . . .	143
1.6.5	Построение бруса решения задачи . . . . .	149
1.7	Решение интервальных систем нелинейных алгебраических уравнений . . . . .	153
1.7.1	Одномерный интервальный метод Ньютона . . . . .	153
1.7.2	Многомерный метод Ньютона . . . . .	159
1.7.3	Метод Кравчика . . . . .	165

1.7.4	Внешнее оценивание для интервальных уравнений и систем уравнений . . . . .	180
<b>2</b>	<b>Интервальная арифметика Каухера</b>	<b>193</b>
2.1	Зачем и как расширять классическую интервальную арифметику? . . . . .	193
2.2	Описание полной интервальной арифметики . . . . .	197
2.2.1	Дуализация в арифметике Каухера . . . . .	198
2.2.2	Сложение в полной интервальной арифметике . .	199
2.2.3	Умножение в полной интервальной арифметике .	200
2.2.4	Свойства полной интервальной арифметики . . .	202
2.2.5	Минимаксный характер полной интервальной арифметики . . . . .	205
2.3	Внешнее оценивание множеств АЕ-решений ИСЛАУ . .	210
2.3.1	Субдифференциальный метод Ньютона . . . . .	213
2.4	Место полной интервальной арифметики в интервальном анализе. . . . .	216
	<b>Литература</b>	<b>218</b>
	<b>Предметный указатель</b>	<b>223</b>

# Список примеров

1	Оценка значения тангенса . . . . .	17
2	Основные арифметические операции в $\mathbb{IR}$ . . . . .	20
3	Абсолютные характеристики интервалов . . . . .	26
4	Относительные характеристики интервалов . . . . .	27
5	Расстояние между интервалами . . . . .	28
6	Необратимость операции сложения в $\mathbb{IR}$ . . . . .	29
7	Зависимость результата вычисления от представления функционального выражения . . . . .	30
8	Умножения матрицы на вектор . . . . .	32
9	Вершины бруса . . . . .	33
10	Арифметические операции с матрицами . . . . .	35
11	Характеристики интервальных матриц . . . . .	36
12	«Эффект обёртывания» — 1 . . . . .	37
13	«Эффект обёртывания» — 2 . . . . .	39
14	Отсутствие дистрибутивности для интервального матричного умножения . . . . .	41
15	Нормы интервальных матриц и векторов . . . . .	44
16	Нормы интервальных матриц, отличающихся одним элементом . . . . .	45
17	Векторные метрики . . . . .	47
18	Матричные метрики . . . . .	48
19	Интервальный признак Адамара . . . . .	51
20	Особенность интервальных матриц по критериям Бекка, Румпа и Рона-Рекса . . . . .	53
21	Сильная неособенность интервальных матриц . . . . .	55
22	Обратная интервальная матрица . . . . .	56
23	Интервальный итерационный метод Шульца . . . . .	58
24	$M$ - и $H$ -матрицы . . . . .	60
25	Сильная неособенность $M$ -матриц . . . . .	61

26	Оценивание квадратного трехчлена . . . . .	67
27	Оценивание функции двух переменных . . . . .	70
28	Оценивание значений функции двух переменных с дифференциальной центрированной (среднезначной) и наклонной формами . . . . .	74
29	Оценивание функции двух переменных с использованием бицентрированной среднезначной формы . . . . .	79
30	Решение ИСЛАУ с изменением кванторной матрицы $\mathcal{A}$ . . . . .	86
31	Решение ИСЛАУ с изменением кванторного вектора $\beta$ . . . . .	88
32	Решение ИСЛАУ с определенным сочетанием кванторных матрицы и вектора . . . . .	89
33	Исследование непустоты управляемого множества ИСЛАУ . . . . .	92
34	Теорема о принадлежности решения «средней системы» управляемому множеству решений ИСЛАУ . . . . .	93
35	Использование $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ как «показателя совместности» . . . . .	95
36	Теоремы И.А. Шарой и Рона о принадлежности точки допусковому множеству решений . . . . .	99
37	Антагонистичность управляемого и допускового множеств решений . . . . .	102
38	Проверка принадлежности точки основным множествам АЕ-решений . . . . .	106
39	Внешняя оценка объединенного множества решений ИСЛАУ, метод Бекка . . . . .	113
40	Внешняя оценка объединенного множества решений ИСЛАУ, интервальный метод Гаусса-Зейделя . . . . .	118
41	Внешняя оценка объединенного множества решений ИСЛАУ, процедура Хансена-Блика-Рона . . . . .	121
42	Внешняя оценка объединенного множества решений ИСЛАУ, процедура Хансена-Блика-Рона и метод Гаусса-Зейделя . . . . .	123
43	Теоремы Апостолатоса-Кулиша и Майера-Варнке . . . . .	128
44	Внешняя оценку объединенного множества решений ИСЛАУ, интервальный метод Кравчика . . . . .	130
45	Распознающий функционал допускового множества решений . . . . .	136
46	Техника распознающих функционалов . . . . .	139
47	Коррекция ИСЛАУ изменением матрицы . . . . .	145
48	Метод В.В. Шайдурова бруса внутренней оценки допускового множества . . . . .	150

49	Интервальный метод Ньютона для численного решения уравнения . . . . .	156
50	Решение системы точечных нелинейных уравнений . . . . .	161
51	Решение системы нелинейных уравнений интервальным методом Кравчика . . . . .	167
52	Решение системы нелинейных уравнений, бицентрированная форма оператора Кравчика . . . . .	171
53	Решение интервального нелинейного уравнения, интервальный метод Ньютона . . . . .	182
54	Решение системы нелинейных интервальных уравнений интервальным методом Ньютона . . . . .	186
55	Уточнение интервального корня системы нелинейных интервальных уравнений бицентрированной формой оператора Кравчика . . . . .	189
56	Упорядочение по включению на $\mathbb{KR}$ . . . . .	197
57	Минимум и максимум по включению на $\mathbb{KR}$ . . . . .	197
58	Частичный линейный порядок в $\mathbb{KR}$ . . . . .	198
59	Дуализация и правильная проекция интервала . . . . .	198
60	Дуализация и взятия нижней « $\wedge$ » и верхней « $\vee$ » граней . . . . .	199
61	Дуализация и сложение в полной интервальной арифметике . . . . .	199
62	Различие арифметических операций вычитания в $\mathbb{IR}$ и внутреннего вычитания в $\mathbb{KR}$ . . . . .	200
63	Умножение и деление в $\mathbb{KR}$ . . . . .	202
64	Магнитуды интервалов . . . . .	204
65	Магнитуды произведения интервалов . . . . .	204
66	Произведение интервалов, относящихся к множеству $Z$ . . . . .	205
67	Произведение интервалов, относящихся к множеству $\text{dual } Z$ . . . . .	207
68	Произведение интервалов, относящихся к множествам $Z, \text{dual } Z$ . . . . .	208
69	Решение системы интервальных линейных уравнений вида $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}$ , матрица $\mathbf{C}$ содержит интервалы из $\mathbb{IR}$ . . . . .	214
70	Решение системы интервальных линейных уравнений вида $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ , матрица $\mathbf{C}$ содержит интервалы из $\mathbb{IR}$ и $\mathbb{KR}$ . . . . .	214

# Обозначения

При изложении материала авторами используется система обозначений, взятая из публикации [1]. Эта система обозначений основана на неформальном международном стандарте на обозначения в интервальном анализе, который был выработан в 2002 году.

Интервалы и другие интервальные величины (векторы, матрицы и др.) обозначены в тексте полужирным и курсивным начертанием, например, ***A, B, C, . . . , x, y, z***. Выделение неинтервальных (точечных) величин каким-либо специальным образом не производится. Арифметические операции с интервальными величинами являются операциями соответствующих интервальных арифметик: классической интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$  или полной интервальной арифметики Каухера  $\mathbb{KR}$ .

$:=$	левая часть равенства есть обозначение для правой
$\&$	логическая конъюнкция, связка «и»
$\implies$	логическая импликация
$\iff$	логическая равносильность
$\rightarrow$	отображение множеств
$\mapsto$	правило сопоставления элементов при отображении
$\leftarrow$	оператор присваивания в алгоритмах
$\circ$	знак композиции отображений
$\emptyset$	пустое множество
$x \in X$	элемент $x$ принадлежит множеству $X$
$x \notin X$	элемент $x$ не принадлежит множеству $X$
$X \ni x$	множество $X$ содержит элемент $x$
$X \not\ni x$	множество $X$ не содержит элемент $x$
$X \cup Y$	объединение множеств $X$ и $Y$
$X \cap Y$	пересечение множеств $X$ и $Y$
$X \setminus Y$	разность множеств $X$ и $Y$
$X \subseteq Y$	множество $X$ есть подмножество множества $Y$
$X \subset Y$	множество $X$ есть собственное подмножество множества $Y$
$X \times Y$	прямое декартово произведение множеств $X$ и $Y$
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел
$\mathbb{R}$	множество действительных (вещественных) чисел
$\mathbb{R}_+$	множество неотрицательных вещественных чисел
$\mathbb{IR}$	классическая интервальная арифметика
$ID$	множество интервалов, содержащихся в $D \subseteq \mathbb{R}^n$
$\mathbb{KR}$	полная интервальная арифметика Каухера
$\mathbb{R}^n$	множество вещественных $n$ -мерных векторов
$\mathbb{IR}^n$	множество $n$ -мерных векторов с элементами из $\mathbb{IR}$
$\mathbb{KR}^n$	множество $n$ -мерных векторов с элементами из $\mathbb{KR}$
$\mathbb{R}^{m \times n}$	множество вещественных $m \times n$ -матриц
$\mathbb{IR}^{m \times n}$	множество $m \times n$ -матриц с элементами из $\mathbb{IR}$
$\mathbb{KR}^{m \times n}$	множество $m \times n$ -матриц с элементами из $\mathbb{KR}$

$\mathcal{EF}$	семейство элементарных функций
$\text{sgn } x$	знак вещественного числа $x$
$x^+, x^-$	положительная и отрицательная части интервала $x$
$\text{sgn } \mathbf{a}$	знак интервала $\mathbf{a}$
$\underline{\mathbf{a}}, \text{inf } \mathbf{a}$	левый конец интервала $\mathbf{a}$
$\overline{\mathbf{a}}, \text{sup } \mathbf{a}$	правый конец интервала $\mathbf{a}$
$ \mathbf{a} $	абсолютная величина (магнитуда) интервала $\mathbf{a}$
$\text{abs } \mathbf{a}$	интервальное расширение функции модуля
$\langle \mathbf{a} \rangle$	магнитуда интервала $\mathbf{a}$
$\langle \mathbf{A} \rangle$	компарант интервальной матрицы $\mathbf{A}$
$\text{mid } \mathbf{a}$	середина (медиана) интервала $\mathbf{a}$
$\text{wid } \mathbf{a}$	ширина интервала $\mathbf{a}$
$\text{rad } \mathbf{a}$	радиус интервала $\mathbf{a}$
$\text{dual } \mathbf{a}$	дуальный (двойственный) к $\mathbf{a}$ интервал
$\text{opp } \mathbf{a}$	алгебраически противоположный к $\mathbf{a}$ интервал
$\text{inv } \mathbf{a}$	алгебраически обратный к $\mathbf{a}$ интервал
$\text{pro } \mathbf{a}$	правильная проекция интервала $\mathbf{a}$
$\text{vert } \mathbf{a}$	множество крайних точек интервала $\mathbf{a}$
$\ominus$	«внутреннее» интервальное вычитание
$\oslash$	«внутреннее» интервальное деление
$\chi(\mathbf{a})$	функционал Рачека от интервала $\mathbf{a}$
$\Xi_{uni}$	объединённое множество решений
$\Xi_{tol}$	допусковое множество решений
$\Xi_{ctl}$	управляемое множество решений
$\Xi_{\alpha\beta}$	множество АЕ-решений типа $\alpha\beta$
$\Xi_{\mathcal{A}\beta}$	множество АЕ-решений типа $\mathcal{A}\beta$
$\mathbf{A}^{-1}$	обратная интервальная матрица
$\mathbf{A}^c$	характеристическая матрица ИСЛАУ
$\mathbf{b}^c$	характеристический вектор правой части ИСЛАУ
$\text{dist}$	метрика в интервальных пространствах
$\text{Dist}$	мультиметрика в интервальных пространствах
$\text{sti}$	стандартное погружение $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{2n}$
$\text{ran}(f, X)$	область значений функции $f$ на множестве $X$
$f^{\angle}(\tilde{x}, x)$	наклон функции $f$ между точками $\tilde{x}$ и $x$
$\square X$	интервальная оболочка множества $X$
$\wedge$	операция минимума по включению
$\vee$	операция максимума по включению
$\text{И}$	условный экстремум по включению

$I$	единичная матрица соответствующих размеров
$Q^{\sim}$	знаково-блочная матрица для матрицы $Q$
$\ \cdot\ $	векторная или матричная норма
$\ \cdot\ _1$	1-норма векторов или подчинённая 1-норма матриц
$\ \cdot\ _2$	2-норма векторов или подчинённая 2-норма матриц
$\ \cdot\ _{\infty}$	$\infty$ -норма векторов или подчинённая $\infty$ -норма матриц
$\lambda(A)$	собственное значение матрицы $A$
$\rho(A)$	спектральный радиус матрицы $A$
$\sigma(A)$	сингулярное число матрицы $A$
$\text{diag}(A)$	диагональная матрица $n \times n$ -матрица с элементами $A_1, \dots, A_n$ по главной диагонали
$\mathcal{N}(x, \mathbf{X})$	интервальный оператор Ньютона
$\mathcal{K}(x, \mathbf{X})$	интервальный оператор Кравчика
$\mathcal{H}(x, \mathbf{X})$	интервальный оператор Хансена-Сенгупты

# Введение

Учебное пособие посвящено практическим примерам вычислений в интервальном анализе.

Интервальный анализ — современный раздел математики, опирающийся на использование интервалов. Наиболее фундаментальное изложение интервального анализа содержится в монографии С.П. Шарого «Конечномерный интервальный анализ» [2], которую автор поддерживает как электронное издание уже 20 лет, и которая в настоящее время готовится к печати. На эту книгу мы будем часто ссылаться в связи с введением понятий, изложения теоретических результатов, алгоритмов вычислений и др.

Настоящее пособие не является учебником, в нём нет систематического изложения теории и доказательств. Напротив, авторы сосредоточились на изложении примеров вычислений. Нашей задачей является такое изложение приёмов вычислений, которые можно взять как образец для решения базовых задач методами интервального анализа.

Настоящее пособие весьма существенно расширяет учебное пособие одного из авторов «Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры» [3], изданное в 2020 г. Среди других публикаций учебного характера на русском языке следует отметить книгу Добронец Б.С. «Интервальная математика» [4]. Она содержит набор упражнений для разных вычислительных методов интервального анализа.

В последние годы важнейшим направлением применения интервального анализа является использование его идей и методов в интервальной статистике. Этому направлению посвящено большое количество современных журнальных публикаций и докладов на конференциях. Обобщающий характер имеет коллективный труд А.Н.Баженова, С.И.Жилина, С.И.Кумкова и С.П.Шарого «Обработка и анализ данных с интервальной неопределённостью» [5]. Мы планируем включить

примеры, относящиеся к интервальной статистике, в следующее учебное пособие.

В главе 4 упомянутой книги [5] «Задача восстановления функциональных зависимостей» содержится §4.14 «Обзор методов восстановления зависимостей по интервальным данным», в котором сделан обзор вычислительных методов для интервальных данных. Эти методы различными способами решают системы интервальных уравнений, и приведён весьма подробный анализ каждого метода.

Глава 2 «Базовые понятия и математический аппарат» книги [5] в разделах 2.1-2.14 содержит краткое изложение основ интервального анализа, а также структур более сложной природы, чем интервалы, таких как твины и мультиинтервалы.

Кратко о содержании книги.

Учебное пособие содержит две существенно неравных по объёму главы. Первая, весьма объёмная глава посвящена методам классической интервальной арифметики. В ней 7 разделов и она занимает почти 200 страниц.

Первые два раздела §1.1 «Интервал и арифметические операции над ним» и §1.2 «Интервальные векторы и матрицы» носят вводный характер и приведённые в них примеры служат для освоения основ классической интервальной арифметики.

Начиная с третьего раздела примеры носят уже более практический характер. При этом третий §1.3.1 «Интервальное оценивание областей значений функций» раздел носит ещё подготовительный характер и посвящен интервальному оцениванию функций. Рассмотренные в этом разделе приёмы используются при проведении вычислений далее в всём пособии.

Четвёртый раздел §1.4 «Постановки и множества решений интервальных задач» имеет важное методологическое значение. Интервальные задачи имеют различные множества решений в зависимости от постановки и математиками разработана необходимая методология описания различных постановок.

Пятый и шестой разделы посвящены важнейшему классу постановок — линейным задачам. Здесь математиками развито наибольшее количество алгоритмов и получено наибольшее количество результатов. Из общего набора линейных задач предлагаются §1.5 «Внешнее оценивание объединённого множества решений» и §1.6 «Решение интервальной линейной задачи о допусках».

Наконец, седьмой раздел §1.7 «Решение интервальных систем нелинейных алгебраических уравнений» посвящён интервальному решению интервальных уравнений и систем общего вида (нелинейных). В случае нелинейных задач получение общих результатов маловероятно. Более того, решение систем уравнений даже относительно небольшой размерности выливается порой в исследование на уровне журнальной статьи. Мы рассмотрели ряд примеров с высокой степенью подробности, что, как правило, невозможно сделать в журнальной публикации. Читатель может повторить необходимые выкладки и получить опыт для решения собственных задач.

Вторая глава посвящена интервальной арифметике Каухера (полной), и она очень невелика. Фактически в ней, кроме небольшого количества теории, представлены примеры использования субдифференциального метода Ньютона. Другим примером использования полной интервальной арифметики §1.5.5 «Формально-алгебраический подход» оценивания объединённого множества решений. Наиболее значимо применение полной интервальной арифметики в интервальной статистике, что выходит за рамки настоящего пособия.

Как уже сказано выше, в книге много примеров, что и является её основным содержанием и отражено в названии пособия. Практически все они были предложены и запрограммированы А.А.Карповой на языке *Mathematica*.

Для проверки вычислений и возможности использования с использованием свободного распространяемого программного обеспечения, А.Н.Баженов переписал коды на свободно распространяемый язык *Octave* — бесплатный аналог популярного языка *Matlab*. Большинство примеров можно найти по адресу <https://github.com/AlexanderBazhenov/PhD-textbook-interval-analysis>.

Примеры весьма неравнозначны. Большинство из них носит чисто учебный иллюстративный характер, и зачастую элементарны. С другой стороны, например, примеры 12 и 13 относятся к широко распространённой практически задаче.

Пример 52 из §1.7.3 с максимальной подробностью представляет решение системы нелинейных уравнений с использованием бицентрированной формы оператора Кравчика и занимает 8 страниц.

Иллюстрации в пособии выполнены А.А.Карповой.

Несмотря на достаточно большой объём пособия, в нём не затронуты многие важные применения интервального анализа. К ним от-

носятся, в частности, интервальная оптимизация и внутренние оценки множеств решений. Заинтересованный читатель может ознакомиться с ними в монографии С.П. Шарого «Конечномерный интервальный анализ» [2].

### **Благодарности.**

Пособие написано под сильным влиянием книги С.П. Шарого «Конечномерный интервальный анализ» [2], которая является в настоящее время наиболее полным изложением идей интервального анализа. В силу этого, авторы выражают благодарность С.П. Шарому за его фундаментальный труд. Вместе с тем, мы старались максимально часто ссылаться на оригинальные публикации в рецензируемой печати.

Значительное влияние на содержание пособия оказали многолетние регулярные вебинары по интервальному анализу (Interval Analysis Seminar, [meet.jit.si/Interval-Analysis-Seminar](http://meet.jit.si/Interval-Analysis-Seminar)).

Мы выражаем благодарность постоянным участникам вебинара С.И. Жилину, С.И. Кумкову, А.В. Пролубникову, Е.В. Чаусовой и С.П. Шарому за идеи, дискуссии и доброжелательную критику. Данный семинар является наиболее активной профессиональной площадкой для обсуждения вопросов интервального анализа. В частности, используемая в книге система обозначений следует рекомендациям вебинара.

# Глава 1

## Классическая интервальная арифметика

Классическая интервальная арифметика является исторически первой интервальной арифметикой. В ней получено наибольшее количество результатов и развито большое количество вычислительных методов. Соответственно этому, настоящая глава имеет наибольший объём.

### 1.1 Интервал и арифметические операции над ним

Начнём с определения базового объекта интервальной арифметики.

*Интервалом* вещественной оси называется множество всех чисел, расположенных между заданными числами  $a$  и  $b$  включая их самих:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad (1.1)$$

при этом  $a$  и  $b$  называются *концами интервала*.

**Пример 1 (Оценка значения тангенса)** Из геометрии известно, что  $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ .

Число  $\sqrt{3}$  является иррациональным, поэтому

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \in [1.7320, 1.7321].$$

В ходе оценки величины  $\sqrt{3}$  мы получили интервал  $[1.7320, 1.7321]$ . Определение двусторонних ограничений интервальной величины является наиболее простым способом ее задания. ■

Важно заметить, что все элементы между двумя границами интервала являются равнозначными, а сам интервал рассматривается как целостный объект. Если  $a = b$ , то интервал называется *вырожденным*.

Следующим нашим шагом станет определение *арифметических операций* с базовым объектом — интервалом. Коль скоро интервалы являются множествами, не имеющими структуры, и все их элементы равноправны, то операции естественно определять «по представителям». Итогом любой бинарной операции должен быть интервал, покрывающий *все* возможные результаты выполнения арифметической операции над представителями обоих интервалов:

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \{ a \star b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b} \}, \quad \text{где } \star \in \{ +, -, \cdot, / \}. \quad (1.2)$$

**Определение 1.1.1** *Алгебраическая система  $\langle \mathbb{IR}, +, -, \cdot, / \rangle$ , образованная множеством всех вещественных интервалов*

$$\mathbf{a} := [\underline{a}, \bar{a}] = \{ x \in \mathbb{R} \mid \underline{a} \leq x \leq \bar{a} \}$$

*с бинарными операциями сложения, вычитания, умножения и деления называется классической интервальной арифметикой.*

**Предложение.** Для интервальных арифметических операций развернутое определение, равносильное (1.2), задается формулами

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}], \quad (1.3a)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}], \quad (1.3b)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [\min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}], \quad (1.3c)$$

$$\mathbf{a}/\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot [1/\bar{b}, 1/\underline{b}] \quad \text{для } \mathbf{b} \not\ni 0. \quad (1.3d)$$

Выражение (1.2) как результат выполнения арифметических операций представимо в следующем виде:

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \left[ \min_{a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}} a \star b, \max_{a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}} a \star b \right], \quad \star \in \{ +, -, \cdot, / \}. \quad (1.4)$$

Действительно ли арифметические операции (1.3) равносильны выражению (1.4)? Для различных операций очевидность результатов различна. Результат сложения двух интервалов очевиден: сумма минимальных элементов каждого из интервалов дает левую границу интервала, сумма максимальных элементов — правую границу. В случае разности для получения левой границы результирующего интервала надо из минимума первого операнда вычесть максимум второго, правая же граница искомого интервала примет значение разности максимального элемента первого операнда и минимального значения второго операнда.

Частное двух интервалов вводится как умножение первого интервала на обратный второй. Таким образом, надо определить умножение в классической интервальной арифметике.

Определение границ интервала, являющегося результатом умножения двух интервалов, является более сложным ввиду того, что знаки левых и правых границ исходных множителей могут принимать любые значения, и нужно перебрать все варианты знаков сомножителей.

Выделим в  $\mathbb{IR}$  следующие подмножества:

$$\begin{aligned} P &:= \{ \mathbf{a} \in \mathbb{IR} \mid \underline{\mathbf{a}} \geq 0 \ \& \ \bar{\mathbf{a}} \geq 0 \} && \text{— неотрицательные интервалы,} \\ Z &:= \{ \mathbf{a} \in \mathbb{IR} \mid \underline{\mathbf{a}} \leq 0 \leq \bar{\mathbf{a}} \} && \text{— нульсодержащие интервалы,} \\ -P &:= \{ \mathbf{a} \in \mathbb{IR} \mid -\mathbf{a} \in P \} && \text{— неположительные интервалы.} \end{aligned}$$

**Определение 1.1.2** *Интервал  $\mathbf{a}$  называется неотрицательным, т. е.  $\mathbf{a} \geq 0$ , если неотрицательны оба его конца. Интервал  $\mathbf{a}$  называется неположительным, т. е.  $\mathbf{a} \leq 0$ , если неположительны оба его конца.*

Таким образом, интервал в  $\mathbb{IR}$  характеризуется *знаком*:

$$\operatorname{sgn} \mathbf{a} = \begin{cases} + , & \text{если } \mathbf{a} \geq 0, \\ - , & \text{если } \mathbf{a} \leq 0, \\ \text{не определен,} & \text{если } \underline{\mathbf{a}} \leq 0 \leq \bar{\mathbf{a}}. \end{cases} \quad (1.5)$$

С учётом введённых подмножеств множество  $\mathbb{IR}$  можно представить в виде символической формулы:

$$\mathbb{IR} = P \cup Z \cup (-P).$$

Графическое представление  $\mathbb{IR}$  приведено на Рис. 1.1:

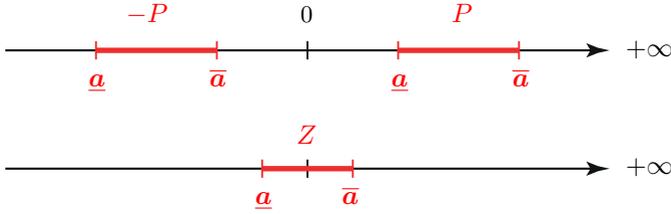


Рис. 1.1. Подмножества в  $\mathbb{IR}$

$\cdot$	$b \in P$	$b \in Z$	$b \in -P$
$a \in P$	$[\underline{ab}, \overline{ab}]$	$[\overline{ab}, \overline{ab}]$	$[\overline{ab}, \underline{ab}]$
$a \in Z$	$[\underline{ab}, \overline{ab}]$	$[\min\{\underline{ab}, \overline{ab}\}, \max\{\underline{ab}, \overline{ab}\}]$	$[\overline{ab}, \underline{ab}]$
$a \in -P$	$[\underline{ab}, \overline{ab}]$	$[\underline{ab}, \underline{ab}]$	$[\overline{ab}, \underline{ab}]$

Таблица 1.1. Интервальное умножение в классической интервальной арифметике  $\mathbb{IR}$

После разбиения всего множества  $\mathbb{IR}$  на подмножества интервальное умножение можно определить в виде так называемой таблицы Кэли (таблица 1.1).

Умножение интервала на некоторое число  $\mu$  представимо в виде

$$\mu \cdot a := \begin{cases} [\mu \underline{a}, \mu \overline{a}], & \text{если } \mu \geq 0, \\ [\mu \overline{a}, \mu \underline{a}], & \text{если } \mu \leq 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

**Пример 2 (Основные арифметические операции в  $\mathbb{IR}$ )** Выполним четыре основные арифметические операции над интервалами  $[-2, -1]$  и  $[3, 4]$ :

$$\begin{aligned} [-2, -1] + [3, 4] &= [1, 3], \\ [-2, -1] - [3, 4] &= [-6, -4], \\ [-2, -1] \cdot [3, 4] &= [-8, -3], \\ [-2, -1] / [3, 4] &= \left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\right]. \end{aligned}$$

Умножим интервал  $[3, 4]$  на  $-1$  и сложим его с интервалом  $[-2, -1]$ :

$$[-2, -1] + (-1) \cdot [3, 4] = [-2, -1] + [-4, -3] = [-6, -4].$$

Таким образом, операция унарного минуса находится в согласии с определением арифметической операции вычитания интервалов, так как  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ . ■

Поскольку интервалы являются множествами, между ними можно задать различные отношения.

Определим *включение* интервалов друг в друга

$$\underline{\mathbf{a}} \geq \underline{\mathbf{b}} \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{b}} \quad \iff \quad \mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \quad (1.7)$$

и рассмотрим важное свойство классической интервальной арифметики — *монотонность по включению*. Это свойство непосредственно следует из основного выражения (1.2).

**Предложение.** Для любых интервалов  $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathbb{IR}$  и любой арифметической операции  $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$  из включений  $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{a}'$  и  $\mathbf{b} \subseteq \mathbf{b}'$  следует

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} \subseteq \mathbf{a}' \star \mathbf{b}'. \quad (1.8)$$

Это свойство отражает неизбежное увеличение множества результатов всех возможных арифметических операций при замене интервалов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  на «более широкие» интервалы  $\mathbf{a}'$  и  $\mathbf{b}'$ .

Итак, интервальная арифметика  $\mathbb{IR}$  — это алгебраическая система и частично упорядоченное множество с отношением порядка по включению « $\subseteq$ ». Другим частичным порядком, существующим на множестве интервалов  $\mathbb{IR}$ , является обобщение линейного порядка « $\leq$ » между вещественными числами. Стоит отметить, что распространение порядка « $\leq$ » в  $\mathbb{R}$  на  $\mathbb{IR}$  может быть выполнено не единственным образом.

**Определение 1.1.3** Для интервалов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{IR}$  условимся считать, что  $\mathbf{a}$  не превосходит  $\mathbf{b}$  и писать « $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ » тогда и только тогда, когда  $\underline{\mathbf{a}} \leq \underline{\mathbf{b}}$  и  $\bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{b}}$ . Таким образом,

$$\underline{\mathbf{a}} \leq \underline{\mathbf{b}} \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{b}} \quad \iff \quad \mathbf{a} \leq \mathbf{b}. \quad (1.9)$$

### 1.1.1 Независимые и связанные интервальные величины

Начнем этот параграф с практического примера. Предположим, что движение некоторого объекта ограничено областью, площадь кото-

рой составляет четверть окружности единичного радиуса. Переведем это условие «на язык» интервалов, используя специальное обозначение  $[a, \mathbf{a}] \Rightarrow a \in \mathbf{a}$ , где  $a$  — переменная,  $\mathbf{a}$  — интервал ее значений:

$$[x, \mathbf{x}], \mathbf{x} = [0, 1], \quad [y, \mathbf{y}], \mathbf{y} = [0, 1], \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1. \quad (1.10)$$

**Определение 1.1.4** Для интервальных величин  $[a_1, \mathbf{a}_1], [a_2, \mathbf{a}_2], \dots, [a_n, \mathbf{a}_n]$  назовем совместной областью значений  $\mathcal{S}$  множество всевозможных значений упорядоченного набора соответствующих переменных  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  в  $\mathbb{R}^n$ .

Фактически выражение (1.10) определяет условия, которым должны удовлетворять все точки, составляющие множество совместных значений  $\mathcal{S}$  интервальных величин  $[x, \mathbf{x}]$  и  $[y, \mathbf{y}]$ .

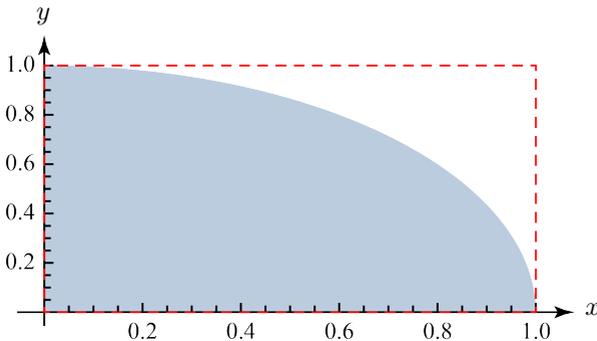


Рис. 1.2. Диаграммы связанности для интервальных величин  $[x, \mathbf{x}]$  и  $[y, \mathbf{y}]$ , связанных соотношениями (1.10). Совместная область значений  $\mathcal{S}$  показана заливкой голубым цветом. Границы декартова произведения  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  выделены красной пунктирной линией.

**Определение 1.1.5** Интервальные величины  $[a_1, \mathbf{a}_1], [a_2, \mathbf{a}_2], \dots, [a_n, \mathbf{a}_n]$  назовем независимыми (несвязанными), если совместная область значений этих величин совпадает с прямым декартовым произведением  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \dots \times \mathbf{a}_n$  интервалов их изменения. Если совместная область значений интервальных величин не совпадает с прямым декартовым произведением интервалов их изменения, то интервальные величины называются зависимыми или связанными.

На Рис. 1.2 изображена *диаграмма связанности* для координат рассматриваемого движущегося объекта  $x \in \mathbf{x}$  и  $y \in \mathbf{y}$ , которая отражает существующую *связь* между интервальными величинами  $[x, \mathbf{x}]$  и  $[y, \mathbf{y}]$ . Как можно убедиться при анализе Рис. 1.2,

$$\mathcal{S} \subseteq \mathbf{x} \times \mathbf{y},$$

а значит, интервальные величины  $[x, \mathbf{x}]$  и  $[y, \mathbf{y}]$  действительно являются связанными; эта связь выражается соотношением  $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ .

Как влияет связанность интервальных величин на результаты интервальных арифметических операций над ними? Знак равенства входит в (1.3) только в том случае, если оперируемые интервалы являются независимыми. Подтвердим это утверждение. Несмотря на то, что

$$\{x - y \mid x \in [0, 1], y \in [0, 1], (x, y) \in \mathcal{S}\} = [-1, 1] = [0, 1] - [0, 1] = \mathbf{x} - \mathbf{y},$$

в настоящем случае имеет место

$$\begin{aligned} \{x + y \mid x \in [0, 1], y \in [0, 1], (x, y) \in \mathcal{S}\} &= [0, 1.4142], & \mathbf{x} + \mathbf{y} &= [0, 2], \\ \{x \cdot y \mid x \in [0, 1], y \in [0, 1], (x, y) \in \mathcal{S}\} &= [0, 0.5000], & \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= [0, 1]. \end{aligned}$$

Можно заметить, что связанность интервальных величин в данном случае значительно сужает множества результатов выполнения арифметических операций над ними. Отметим, что мы не можем выполнить аналогичное сравнение множества результатов деления связанных представителей  $x$  и  $y$  интервалов  $[0, 1]$  и  $[0, 1]$  и результирующего интервала  $\mathbf{x}/\mathbf{y}$  потому, что  $0 \in \mathbf{y}$ .

В дальнейшем изложении мы будем без дополнительных оговорок считать, что все входные интервальные данные в рассматриваемых интервальных задачах являются независимыми.

### 1.1.2 Основная теорема интервальной арифметики

При практических вычислениях в выражения входят различные комбинации арифметических действий и различных функций. Приведём формулировку так называемой *основной теоремы интервальной арифметики*, используемой при оценивании области значений сложного алгебраического выражения с интервальными переменными.

**Теорема 1.1.1.** ([2]) Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — рациональная функция вещественных аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и для нее определен результат

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  подстановки вместо аргументов интервалов их изменения  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  и выполнения всех действий над ними по правилам интервальной арифметики. Тогда

$$\{f(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in \mathbf{x}_1, x_2 \in \mathbf{x}_2, \dots, x_n \in \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n), \quad (1.11)$$

т. е.  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  содержит множество значений функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ .

Если выражение для  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  содержит не более чем по одному вхождению каждой переменной в первой степени, то вместо включения в (1.11) выполняется точное равенство.

### 1.1.3 Алгебраические свойства интервальных операций

При проведении вычислений и теоретических построений важную роль имеют *нейтральные элементы* относительно применяемых операций. В  $\mathbb{R}$  нейтральными элементами относительно сложения и вычитания является нуль, а относительно умножения и деления — единица:

$$\begin{aligned} a + 0 &= a, & a - 0 &= a, \\ a \cdot 1 &= a, & a/1 &= a. \end{aligned}$$

Перечислим свойства интервальных арифметических операций:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) && \text{— ассоциативность сложения,} \\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) && \text{— ассоциативность умножения,} \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a} && \text{— коммутативность сложения,} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} && \text{— коммутативность умножения.} \end{aligned}$$

Дистрибутивность умножения относительно сложения в общем случае отсутствует, т. е.  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ . Однако имеет место более слабое свойство, которое называется *субдистрибутивностью* умножения относительно сложения:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \subseteq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \quad (1.12)$$

Дистрибутивность может выполняться в частных случаях:

$$a \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = a \cdot \mathbf{b} + a \cdot \mathbf{c}, \quad \text{если } a \in \mathbb{R}, \quad (1.13)$$

$$a \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = a \cdot \mathbf{b} + a \cdot \mathbf{c}, \quad \text{если } \mathbf{b}, \mathbf{c} \geq 0 \text{ или } \mathbf{b}, \mathbf{c} \leq 0. \quad (1.14)$$

### 1.1.4 Абсолютные характеристики интервала

Ввиду того, что интервалы являются множествами, формулы (1.3) можно дополнить характеристиками интервалов, что во многих случаях позволит выразительно представить результаты вычислений. Введем несколько величин, которые естественным образом характеризуют интервалы из  $\mathbb{IR}$ . Наиболее важными из них являются

◇ *середина* (центр) интервала

$$\text{mid } \mathbf{a} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{a}}), \quad (1.15)$$

◇ *радиус* интервала

$$\text{rad } \mathbf{a} = \frac{1}{2} \cdot (\bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}}), \quad (1.16)$$

◇ *ширина* интервала

$$\text{wid } \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}}. \quad (1.17)$$

Характеристики (1.15)-(1.17) являются вещественными величинами.

С помощью абсолютных характеристик (1.15)-(1.17) можно записать два представления интервала, равносильных (1.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \text{mid } \mathbf{a} + [-1, 1] \cdot \text{rad } \mathbf{a}, \\ \mathbf{a} &= \{x \in \mathbb{R} : |x - \text{mid } \mathbf{a}| \leq \text{rad } \mathbf{a}\}. \end{aligned}$$

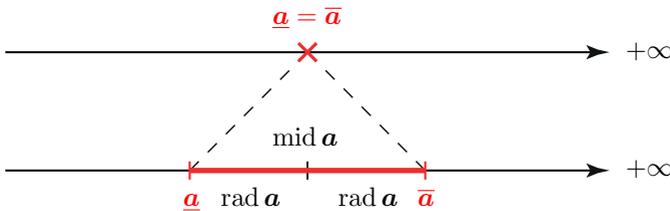


Рис. 1.3. Интервал и его характеристики

В том случае, если  $\underline{\mathbf{a}} = -\bar{\mathbf{a}} \Leftrightarrow \text{mid } \mathbf{a} = 0$ , интервал  $\mathbf{a}$  называется *уравновешенным*.

Приведем некоторые свойства середины интервала:

$$\text{mid } (\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \text{mid } \mathbf{a} \pm \text{mid } \mathbf{b}, \quad (1.18a)$$

$$\text{mid } (a\mathbf{b}) = a \cdot \text{mid } \mathbf{b}, \quad \text{если } a \in \mathbb{R}. \quad (1.18b)$$

Радиус и ширина интервала характеризуют разброс точек интервала, т. е. абсолютную меру неопределенности некоторой величины, которую данный интервал выражает. Перечислим свойства радиуса интервала (аналогичные свойства справедливы и для *ширины* интервала):

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \Rightarrow \text{rad } \mathbf{a} \leq \text{rad } \mathbf{b}, \quad (1.19a)$$

$$\text{rad } (\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \text{rad } \mathbf{a} + \text{rad } \mathbf{b}, \quad (1.19b)$$

$$\text{rad } (a\mathbf{b}) = |a| \cdot \text{rad } \mathbf{b}, \text{ если } a \in \mathbb{R}, \quad (1.19c)$$

$$\max\{|a| \cdot \text{rad } \mathbf{b}, \text{rad } \mathbf{a} \cdot |\mathbf{b}|\} \leq \text{rad } (\mathbf{a}\mathbf{b}) \leq |a| \cdot \text{rad } \mathbf{b} + \text{rad } \mathbf{a} \cdot |\mathbf{b}|, \quad (1.19d)$$

$$\text{rad } \left( \frac{1}{\mathbf{a}} \right) = \frac{\text{rad } \mathbf{a}}{\langle \mathbf{a} \rangle |\mathbf{a}|}, \text{ если } 0 \notin \mathbf{a}. \quad (1.19e)$$

В выражения (1.19d) и (1.19e) были введены такие характеристики интервалов из  $\mathbb{IR}$ , как магнитуда и мигнитуда.

◇ *Магнитудой* (абсолютной величиной, модулем) интервала называется наибольшее из абсолютных значений точек интервала  $\mathbf{a}$ :

$$|\mathbf{a}| := \max \{|a| \mid a \in \mathbf{a}\} = \max \{|\underline{\mathbf{a}}|, |\bar{\mathbf{a}}|\}. \quad (1.20)$$

◇ *Мигнитуда* интервала представляет собой наименьшее из абсолютных значений точек интервала  $\mathbf{a}$ :

$$\langle \mathbf{a} \rangle := \min \{|a| \mid a \in \mathbf{a}\} = \begin{cases} \min \{|\underline{\mathbf{a}}|, |\bar{\mathbf{a}}|\}, & \text{если } 0 \notin \mathbf{a}, \\ 0, & \text{если } 0 \in \mathbf{a}. \end{cases} \quad (1.21)$$

Свойства магнитуды и мигнитуды интервала заинтересованный читатель может найти в монографии [2].

Возведение интервала в целочисленную степень определяют как

$$\mathbf{a}^n = \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \cdot \dots \cdot \mathbf{a}}_{n \text{ раз}}. \quad (1.22)$$

**Пример 3 (Абсолютные характеристики интервалов)** Пусть  $\mathbf{a} = [-5, 1]$ . Согласно (1.15)–(1.17), (1.20) и (1.21),

$$\begin{aligned} \text{mid } \mathbf{a} &= -2, & \text{rad } \mathbf{a} &= 3, & \text{wid } \mathbf{a} &= 6, \\ |\mathbf{a}| &= \max \{|-5|, |1|\} = 5, \\ \langle \mathbf{a} \rangle &= 0, \text{ так как } 0 \in \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Наконец, возведём  $\mathbf{a}$  в третью степень:  $\mathbf{a}^3 = [-125, 25]$ . ■

### 1.1.5 Относительные характеристики интервала

Помимо абсолютных характеристик интервала, введённых в §1.1.4, хочется ввести относительную характеристику ширины интервала. Это можно сделать различными способами, и способа, удобного для всех случаев, пока не найдено.

Для описания относительной «узости» интервала  $X$ . Рачеком был предложен функционал следующего вида [6]:

$$\chi(\mathbf{a}) := \begin{cases} \underline{\mathbf{a}}/\bar{\mathbf{a}}, & \text{если } |\underline{\mathbf{a}}| \leq |\bar{\mathbf{a}}|, \\ \bar{\mathbf{a}}/\underline{\mathbf{a}}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.23)$$

Для нулевого интервала  $[0, 0]$  функционал  $\chi$  не определён.

Величину  $1 - \chi(\mathbf{a})$  можно понимать как *относительную ширину* интервала. В частности, связь функционала  $\chi$  с шириной (1.17) и магнитудой (1.20) ненулевого интервала  $\mathbf{a}$  отражает соотношение

$$\text{wid } \mathbf{a} = |\mathbf{a}|(1 - \chi(\mathbf{a})), \quad -1 \leq \chi(\mathbf{a}) \leq 1. \quad (1.24)$$

Важным случаем является достижение функционалом  $\chi$  своего наибольшего или наименьшего значений. Можно убедиться, что  $\chi(\mathbf{a}) = 1$  тогда и только тогда, когда  $0 \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}$ . Если  $\text{mid } \mathbf{a} = 0$ , то  $\chi(\mathbf{a}) = -1$ , и поэтому функционал Рачека также можно использовать для оценки «степени уравновешенности» интервала относительно нуля.

**Пример 4 (Относительные характеристики интервалов)** Предположим, что нам дан интервал  $\mathbf{a} = [-12, -8]$ .

$$\left. \begin{aligned} \chi(\mathbf{a}) = \bar{\mathbf{a}}/\underline{\mathbf{a}} = \frac{2}{3} &\rightarrow 1 - \chi(\mathbf{a}) = \frac{1}{3} \\ |\mathbf{a}| = \max\{|-12|, |-8|\} = 12 \end{aligned} \right| \rightarrow |\mathbf{a}|(1 - \chi(\mathbf{a})) = 4.$$

С другой стороны,  $\text{wid } \mathbf{a} = 4$ , что подтверждает равенство (1.24). ■

### 1.1.6 Расстояние на множестве интервалов

Расстояние на множестве интервалов [1] обобщает расстояние на вещественной оси.

**Предложение.** ([2]) Отображение  $\text{dist} : \mathbb{IR} \times \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , определяемое как

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \max\{|\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}|, |\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}|\}, \quad (1.25)$$

обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &\geq 0, \text{ и равенство достигается только при } \mathbf{a} = \mathbf{b}, \\ \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{a}), \\ \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &\leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \text{ для любых } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ из } \mathbb{I}\mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Определение 1.1.6** ([2]) Величину  $\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , определяемую посредством выражения (1.25), называют расстоянием (метрикой) на множестве интервалов  $\mathbb{I}\mathbb{R}$ .

Расстояние  $\text{dist}$  на  $\mathbb{I}\mathbb{R}$  (1.25) является хаусдорфовым расстоянием между множествами, которые в данном случае являются интервалами и в качестве основы которого в данном случае выступает расстояние между точками множеств вещественной оси  $\mathbb{R}$ . Основными свойствами введенной величины  $\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  являются следующие формулы

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \\ \text{dist}(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d}) &\leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \text{dist}(\mathbf{c}, \mathbf{d}), \\ \text{dist}(\mathbf{a}\mathbf{b}, \mathbf{a}\mathbf{c}) &\leq |\mathbf{a}| \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c}), \\ \mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \subseteq \mathbf{c} &\Rightarrow \max \{ \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \} \leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{c}). \end{aligned}$$

**Пример 5 (Расстояние между интервалами)** Рассмотрим специально выбранные интервалы  $\mathbf{a} = [2, 3]$ ,  $\mathbf{b} = [1, 5]$  и  $\mathbf{c} = [-1, 8]$ .

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \max \{ |2 - 1|, |3 - 5| \} = 2, \\ \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) &= \max \{ |1 + 1|, |5 - 8| \} = 3, \\ \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &= \max \{ |2 + 1|, |3 - 8| \} = 5. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\max \{ \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \} = 3 < 5 = \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{c}),$$

поскольку, как можно проверить, выполняется  $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \subseteq \mathbf{c}$ . ■

### 1.1.7 Отличия интервальной арифметики от обычной

После введения базового понятия интервала, определения арифметических операций над ним, а также рассмотрели основные абсолютные и относительные характеристики интервальных величин, обсудим

более подробно отличия классической интервальной арифметики от обычной и проиллюстрируем эти отличия на примерах.

Как известно, на *поле вещественных чисел*  $\mathbb{R}$  определены четыре арифметические операции; при этом операции вычитания и деления обратны операциям сложения и умножения.

Однако *в классической интервальной арифметике операции сложения-вычитания и умножения-деления не являются обратимыми:*

$$\begin{aligned}(a + b) - b = a &\rightarrow (a + b) - b \neq a, \\ (a \cdot b)/b = a &\rightarrow (a \cdot b)/b \neq a.\end{aligned}$$

и поэтому все арифметические операции (1.3) определяются *самостоятельно*.

**Пример 6 (Необратимость операции сложения в  $\mathbb{IR}$ )** Предположим, что мы находимся в начале координат, и рассматриваемая задача является одномерной. Сдвинемся из точки  $x_0 = 0$  на интервальную величину  $\mathbf{a}$ , а затем вернемся обратно.

Сначала в качестве  $\mathbf{a}$  возьмем интервал нулевой ширины:  $\mathbf{a} = [1, 1]$ .

$$\begin{aligned}0 + \mathbf{a} - \mathbf{a} &= 0, \\ 0 + [1, 1] - [1, 1] &= 0.\end{aligned}$$

Мы вернулись в исходную точку  $x_0 = 0$ .

Теперь положим  $\mathbf{a} = [-1, 1]$ . Ситуация кардинально изменится, так как результатом выполнения интервальных арифметических операций сложения и вычитания будет величина, содержащая  $x_0$  и характеризующаяся радиусом, равным удвоенному радиусу  $\mathbf{a}$ :

$$\begin{aligned}0 + \mathbf{a} - \mathbf{a} &= 2 \cdot [-\text{rad } \mathbf{a}, \text{rad } \mathbf{a}], \\ 0 + [-1, 1] - [-1, 1] &= [-2, 2].\end{aligned}$$

При многократном повторении операций ширина результирующего интервала будет неизменно возрастать. ■

Из этого примера можно сделать важный вывод: противоположного, т. е. обратного по сложению, элемента для невырожденного интервала в  $\mathbb{IR}$  не существует! Радиусы (ширины) интервалов при сложении и вычитании могут только складываться (см. выражение (1.19b)).

Значит, мы никогда не получим интервал нулевой ширины как результат сложения или вычитания двух интервалов из  $\mathbb{IR}$ . Аналогично при умножении невырожденного интервала на ненулевой интервал радиус произведения, как следует из (1.19d), всегда будет ненулевым.

Итак, *невырожденные интервалы не могут иметь обратных в  $\mathbb{IR}$* . Вместо полноценной обратимости интервальных арифметических операций имеют место более слабые «свойства сокращения»:

$$\begin{aligned} a + c = b + c &\Rightarrow a = b, \\ a \cdot c = b \cdot c, 0 \notin a, 0 \notin b, 0 \notin c &\Rightarrow a = b. \end{aligned}$$

Другое отличие интервальной арифметики от обычной заключается в том, что *при интервальном оценивании имеет смысл рассуждать не в терминах функций, а в терминах выражений, задающих функции*. С этой особенностью классической интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$  мы еще неоднократно встретимся в §1.3 и §1.7.

**Пример 7 (Зависимость результата вычисления от представления функционального выражения)** Рассмотрим геометрическую задачу. Дан прямоугольный треугольник, длины двух катетов которого  $a$  и  $b$  нам известны:  $a = 3$  см и  $b = 4$  см. Наша задача — найти синус угла  $\alpha$ , противолежащего большему катету.

Выразим синус угла  $\alpha$  через длины катетов разными способами:

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (1.26)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}}. \quad (1.27)$$

Подстановка в полученное выражение известных нам длин катетов приведет к ответу  $\sin \alpha = 0.8$ .

Теперь заменим длину катета  $b$  на интервал  $\mathbf{b} = [3.5, 4.5]$ . Результат замены окажется неожиданным: ответы, полученные при использовании одного и того же выражения, но до и после его преобразования, заключающегося во внесении переменной  $b$  под квадратный корень, различаются! Используя выражение (1.26), мы получим

$$\sin \alpha = [0.6472, 0.9762] \ni 0.8,$$

а в случае (1.27), имеем

$$\sin \alpha = [0.7593, 0.8321] \ni 0.8.$$

Поскольку в выражение (1.27) переменная  $b$  входит один раз, то, согласно основной теореме интервальной арифметики §1.1.2, последний результат интервального оценивания совпадает с точной областью значений выражения, определяющего искомый синус угла. ■

## 1.2 Интервальные векторы и матрицы

Базовым объектом интервального анализа является интервал — одномерное множество. Введём определения составных интервальных объектов, векторов и матриц, с тем, чтобы работать в многомерных пространствах, следуя [1].

*Интервальный вектор* — это упорядоченный кортеж из интервалов, расположенный вертикально (вектор-столбец) или горизонтально (вектор-строка). Если  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  — некоторые интервалы, то

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \quad \text{— интервальный вектор-столбец,}$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \quad \text{— интервальная вектор-строка.}$$

Сами интервалы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  называются *компонентами* векторов. Множество интервальных  $n$ -векторов, компоненты которых принадлежат  $\mathbb{IR}$ , принято обозначать через  $\mathbb{IR}^n$ .

Введём понятия *левого* и *правого концов* интервального вектора  $\mathbf{a}$ . Если  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ , то левый и правый концы интервального вектора  $\mathbf{a}$  являются точечными  $n$ -векторами нижних и верхних концов его компонент соответственно и обозначаются

$$\underline{\mathbf{a}} = (\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \dots, \underline{\mathbf{a}}_n) \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{a}} = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n).$$

Как и в классической теории матриц, интервальные вектор-столбцы отождествляются с интервальными  $n \times 1$ -матрицами, а интервальные

вектор-строки — с интервальными матрицами размера  $1 \times n$ . Прямоугольную таблицу, составленную из интервалов из  $\mathbb{IR}$ , называют *интервальной матрицей*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \dots & \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}).$$

Аналогично случаю с интервальными векторами обозначим точечные матрицы

$$\underline{\mathbf{A}} = (\underline{\mathbf{a}}_{ij}), \quad \overline{\mathbf{A}} = (\overline{\mathbf{a}}_{ij}).$$

**Пример 8 (Умножения матрицы на вектор)** Рассмотрим интервальные вектор-столбец  $\mathbf{a}$  и матрицу  $\mathbf{A}$ . Выпишем введённые точечные векторы и матрицы:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} [-2, 1] \\ [5, 7] \end{pmatrix} &\rightarrow \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, & \overline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0, 3] & [9, 11] \\ [-8, -6] & [3, 4] \end{pmatrix} &\rightarrow \underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}, & \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

Интервальные векторы из  $\mathbb{IR}^n$  являются прямыми произведениями интервалов вещественной оси и могут быть изображены в виде прямоугольных параллелепипедов в пространстве  $\mathbb{R}^n$  с ребрами, параллельными осям координат. Такие объекты называют *брусками* (boxes, interval boxes).

**Определение 1.2.1** Вершинами интервального вектора  $\mathbf{a}$  из  $\mathbb{IR}^n$  будем называть точечные  $n$ -векторы,  $i$ -ая компонента которых равна  $\underline{\mathbf{a}}_i$  или  $\overline{\mathbf{a}}_i$ . Множество вершин интервального вектора обозначаем как

$$\text{vert } \mathbf{a} := \{ a \in \mathbb{R}^n \mid a_i \in \{\underline{\mathbf{a}}_i, \overline{\mathbf{a}}_i\}, i = 1, 2, \dots, n \}.$$

Вершинами интервальной матрицы  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  из  $\mathbb{IR}^{m \times n}$  назовем точечные  $m \times n$ -матрицы,  $ij$ -ым элементом которых является  $\underline{\mathbf{a}}_{ij}$  или  $\overline{\mathbf{a}}_{ij}$ . Множество вершин интервальной матрицы обозначаем как

$$\text{vert } \mathbf{A} := \{ A \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid A = (a_{ij}), a_{ij} \in \{\underline{\mathbf{a}}_{ij}, \overline{\mathbf{a}}_{ij}\} \}. \quad (1.28)$$

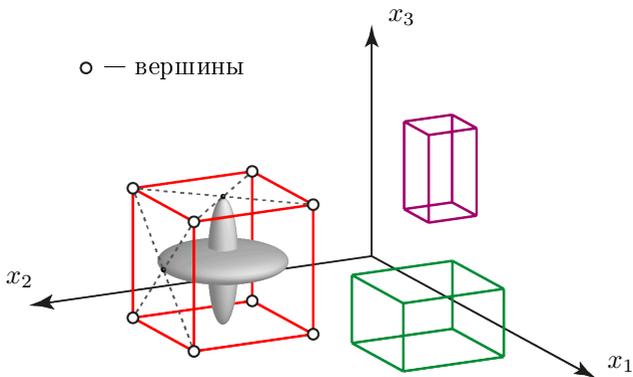


Рис. 1.4. Интервальные векторы-брусы в  $\mathbb{R}^3$ .

**Пример 9 (Вершины бруса)** Интервальный вектор-брус  $\mathbf{a} = ([-2, 1], [5, 7])^\top$  имеет четыре вершины — это векторы  $(-2, 5)^\top$ ,  $(-2, 7)^\top$ ,  $(1, 5)^\top$  и  $(1, 7)^\top$ . ■

Для рассмотрения интервальной задачи оценивания §1.3 требуется ввести определение *интервальной оболочки* множества.

**Определение 1.2.2** Если  $S$  — непустое ограниченное множество в  $\mathbb{R}^n$  или  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , то его интервальной оболочкой (interval hull)  $\square S$  называется наименьший по включению интервальный вектор (или матрица), содержащий  $S$ .

Компоненты  $\square S$  являются проекциями множества  $S$  на координатные оси пространства, а сама интервальная оболочка является интервальной объектом, который наилучшим образом «охватывает» множество.

Например, на Рис. 1.4 брус с ребрами, выделенными красным цветом, является интервальной оболочкой множества  $S$ , геометрическим образом которого служит объединение сплюснутого и вытянутого эллипсоидов вращения — объемная фигура, обладающая осевой симметрией.

### 1.2.1 Арифметические операции над интервальными векторами и матрицами

В многомерном случае арифметические операции имеют более сложную форму, чем в одномерном. Например, при умножении вектора на матрицу в выражение для первой компоненты входят результаты умножений и сложений первой строки матрицы и *всех* компонент исходного вектора. В частности, в двумерном случае образом прямоугольника — двумерного бруса является параллелепипед, а в многомерном пространстве — косо́й (наклонный) параллелепипед.

Поэтому при определении операций сложения, вычитания и умножения над интервальными векторами и матрицами с элементами из  $\mathbb{IR}$  приходится ограничиваться более слабым требованием, чем их выполнение «по представителям», которое характерно для интервальных арифметических операций (1.2) или, в развернутой форме, (1.3):

$$\mathbf{A} \star \mathbf{B} \supseteq \{ \mathbf{A} \star \mathbf{B} \mid \mathbf{A} \in \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{B} \}, \quad \star \in \{ +, -, \cdot \}.$$

Желательно, разумеется, чтобы рассматриваемое включение было по мере возможности более узким, т. е. выполнялось условие

$$\mathbf{A} \star \mathbf{B} = \square \{ \mathbf{A} \star \mathbf{B} \mid \mathbf{A} \in \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{B} \}, \quad \star \in \{ +, -, \cdot \}. \quad (1.29)$$

**Определение 1.2.3** *Сумма (разность) двух интервальных матриц одинакового размера есть интервальная матрица того же размера, образованная поэлементными суммами (разностями) операндов.*

Иными словами, если имеются две любые интервальные матрицы  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}), \mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ , то множество  $\{ \mathbf{A} \pm \mathbf{B} \mid \mathbf{A} \in \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{B} \}$  совпадает с интервальной матрицей  $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ , такой что

$$\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{a}_{ij} \pm \mathbf{b}_{ij}. \quad (1.30)$$

**Определение 1.2.4** *Если  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times l}$  и  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{l \times n}$ , то произведение матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  есть матрица  $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ , такая что*

$$\mathbf{c}_{ij} := \sum_{k=1}^l \mathbf{a}_{ik} \mathbf{b}_{kj}. \quad (1.31)$$

Опираясь на основную теорему интервальной арифметики, можно показать, что для любых интервальных матриц  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times l}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{IR}^{l \times n}$

множество  $\square\{AB \mid A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\}$  совпадает с матрицей  $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ . Для операции умножения матриц выражение (1.29) справедливо потому, что точечный аналог (1.31) содержит лишь по одному вхождению переменных  $a_{ik} \in \mathbf{a}_{ik}$  и  $b_{kj} \in \mathbf{b}_{kj}$  в первой степени.

Важным частным случаем интервальной матричного умножения является умножение интервальной матрицы на точечный вектор:

$$\mathbf{A}b = \{Ab \mid A \in \mathbf{A}\}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n.$$

Поскольку элементы рассматриваемых матричных операндов являются независимыми друг от друга, т. е., например, переменные  $A_{11}$  и  $A_{12}$  пробегают интервалы своих областей значений  $\mathbf{A}_{11}$  и  $\mathbf{A}_{12}$ , «ничего не зная» друг о друге, то результат выполнения интервальной матричной операции умножения совпадает с множеством всевозможных точечных произведений «по представителям».

**Пример 10 (Арифметические операции с матрицами)** Проиллюстрируем введённые арифметические операции. Пусть имеем матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-1, 1] & [2, 5] \\ [3, 8] & [-6, -4] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [7, 9] & [1, 3] \\ [-3, -2] & [-5, -1] \end{pmatrix}.$$

Результатом сложения интервальных матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  является интервальная матрица размера  $2 \times 2$ :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [-1 + 7, 1 + 9] & [2 + 1, 5 + 3] \\ [3 - 3, 8 - 2] & [-6 - 5, -4 - 1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [6, 10] & [3, 8] \\ [0, 6] & [-11, -5] \end{pmatrix}.$$

Теперь выполним умножение интервальных матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ . Выпишем элементы результирующей матрицы  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{C}_{11} = [-1, 1] \cdot [7, 9] + [2, 5] \cdot [-3, -2] = [-9, 9] + [-15, -4] = [-24, 5],$$

$$\mathbf{C}_{12} = [-1, 1] \cdot [1, 3] + [2, 5] \cdot [-5, -1] = [-3, 3] + [-25, -2] = [-28, 1],$$

$$\mathbf{C}_{21} = [3, 8] \cdot [7, 9] + [-6, -4] \cdot [-3, -2] = [21, 72] + [8, 18] = [29, 90],$$

$$\mathbf{C}_{22} = [3, 8] \cdot [1, 3] + [-6, -4] \cdot [-5, -1] = [3, 24] + [4, 30] = [7, 54].$$

Введем точечный вектор  $b$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A}b = \begin{pmatrix} [-1, 1] \cdot 2 + [2, 5] \cdot 1 \\ [3, 8] \cdot 2 + [-6, -4] \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 7] \\ [0, 12] \end{pmatrix}.$$

Получен интервальный вектор той же размерности, что и  $b$ . ■

**Характеристики составных интервальных объектов.** Перейдём к описанию характеристик многомерных объектов, аналогично §1.1.4. За исключением операции взятия мигнитуды « $\langle \cdot \rangle$ » (1.21), операции «mid», «rad», «wid» (1.15)–(1.17) и « $|\cdot|$ » (1.20) к интервальным векторам и матрицам применяются покомпонентно и поэлементно [1]. Их результатами являются точечные матрицы (векторы) тех же размеров, что и интервальная матрица (вектор).

Перечислим свойства середины и радиуса интервальных матриц, которые следуют из (1.18a), (1.18b), (1.19b)–(1.19d):

$$\begin{aligned} \text{mid}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) &= \text{mid } \mathbf{A} \pm \text{mid } \mathbf{B}, \\ \text{mid}(\mathbf{A}\mathbf{B}) &= \mathbf{A} \cdot \text{mid } \mathbf{B}, \quad \text{mid}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{mid } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \\ \text{rad}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) &= \text{rad } \mathbf{A} + \text{rad } \mathbf{B}, \\ \max\{|\mathbf{A}| \cdot \text{rad } \mathbf{B}, \text{rad } \mathbf{A} \cdot |\mathbf{B}|\} &\leq \text{rad}(\mathbf{A}\mathbf{B}) \leq |\mathbf{A}| \cdot \text{rad } \mathbf{B} + \text{rad } \mathbf{A} \cdot |\mathbf{B}|, \\ \text{rad}(\mathbf{A}\mathbf{B}) &= |\mathbf{A}| \cdot \text{rad } \mathbf{B}, \quad \text{rad}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{rad } \mathbf{A} \cdot |\mathbf{B}|. \end{aligned}$$

**Пример 11 (Характеристики интервальных матриц)** Рассмотрим интервальную матрицу  $\mathbf{A}$  и вычислим её характеристики.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1, 8] & [0, 3] \\ [5, 6] & [-4, -2] \end{pmatrix} &\rightarrow \text{mid } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4.5 & 1.5 \\ 5.5 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{rad } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3.5 & 1.5 \\ 0.5 & 1.0 \end{pmatrix}, \\ \text{wid } \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 7.0 & 3.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{A}| = \begin{pmatrix} 8.0 & 3.0 \\ 6.0 & 4.0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь введем точечную матрицу и проверим, что  $\text{mid}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{mid } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} [1, 11] & [2, 28] \\ [1, 4] & [-6, 4] \end{pmatrix}, \quad \text{mid}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 2.5 & -1 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$\text{mid } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 2.5 & -1 \end{pmatrix} = \text{mid}(\mathbf{A}\mathbf{B}).$$

■

**«Эффект обёртывания».** Эффект обёртывания заключается в неконтролируемом расширении оценивающего интервального множе-

ства по сравнению с множеством идеальных математических результатов операции, выполненных «по представителям». Этот эффект возникает вследствие несовпадения формы множества точных результатов с формой оценивающих интервалов при многократном выполнении одной и той же операции. Он типичен в многомерном случае, для которого характерно большое разнообразие конфигураций множеств, и особенно сильно проявляется в итерационных процессах либо рекуррентных вычислениях, где последовательные замены множества решений на более простые интервальные оценки происходят многократно.

*Эффект обёртывания* имеет широкую популярность и достаточно часто приводится в учебной и профессиональной литературе, см. например, [2].

**Пример 12 («Эффект обёртывания» — 1)** Приведём практический пример эффекта обёртывания — накопления ошибки при последовательных поворотах шагового двигателя.

Шаговый двигатель — это двигатель постоянного тока, ротор которого совершает дискретные перемещения при последовательном приложении напряжения к обмоткам статора. Достоинствами таких двигателей являются надежность работы, возможность управления скоростью вращения в широком диапазоне, а главное, высокая точность позиционирования, что обеспечивает их востребованность при производстве 3D-принтеров и научного оборудования.

Рассмотрим часто встречающееся на практике задание — поворот на заданный угол с последующим возвращением в исходное положение. Пусть, например, эти действия выполняет гибридный шаговый двигатель типоразмера Nema 17 (серия FL42STH) [7], который имеет угловой шаг  $(1.8 \pm 0.09)^\circ$  и диаметр вала 5 мм, а также характеризуется диаметром центрирующего кольца, равным 22 мм. Величина углового шага означает, что один полный оборот, т. е. поворот на  $360^\circ$ , шаговый двигатель должен совершить за 200 шагов, что является промышленным стандартом.

Представим рассматриваемую задачу в математических терминах. Вращение объекта  $x \in \mathbb{R}^2$  на плоскости на угол  $\varphi$  можно описать, используя матрицу поворота

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

В таком случае выполнение задания описывает последовательность

$$T = R(\varphi) \cdot R(-\varphi) = I, \quad (1.33)$$

где  $R(\varphi)$  определяется выражением (1.32),  $I$  — единичная матрица.

Однако на практике идеальный случай точного возврата в исходное положение (1.33) не реализуется. Проиллюстрируем этот факт, используя классическую интервальную арифметику  $\mathbb{IR}$ .

Будем считать, что центр координат находится в центре вала шагового двигателя. При повороте вала мы будем отслеживать изменение положения самой верхней точки вала, начальное положение которой описывается вектором  $x_0 = (0, 11)^\top$ . Угол поворота будем считать равным  $\varphi = \pi/4$ , а для учёта погрешности углового шага представим этот угол в виде интервала  $\varphi$  с радиусом  $\text{rad } \varphi = 1.6 \cdot 10^{-3}$  рад.

В случае интервальных матриц  $\mathbf{R}(\pm\varphi)$  матрица  $\mathbf{T}$  (1.33) равна

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} [0.9969, 1.0031] & [-0.0031, 0.0031] \\ [-0.0031, 0.0031] & [0.9969, 1.0031] \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

Определим положение верхней точки вала после одного вращения на угол  $\varphi$  и одного вращения на угол  $-\varphi$ :

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{T} \cdot x_0 = \begin{pmatrix} [-0.0346, 0.0346] \\ [10.9654, 11.0346] \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Кажется, что разница между начальным  $x_0$  и конечным положениями  $\mathbf{x}_1$  верхней точки вала после вращений крайне мала. Однако после выполнения ста вращений в прямом направлении на интервальнозначный угол  $\varphi$  и ста обратных вращений на угол  $-\varphi$  конечное положение точки будет описывать уже интервальный вектор

$$\mathbf{x}_{100} = \begin{pmatrix} [-4.7893, 4.7893] \\ [7.4239, 15.7893] \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

и внешняя оценка позиционирования (1.36) составит более 8 мм! Если мы продолжим вращать вал шагового двигателя в противоположные стороны, то ширина интервального вектора  $\mathbf{x}$  будет неуклонно расти, что иллюстрирует эффект обертывания и подтверждает невозможность точного возвращения вала в исходное положение. ■

Проанализируем Пример 12 с другой стороны.

### Пример 13 («Эффект обёртывания» — 2)

Представим, что нам необходимо выполнить другое задание — поворот вала шагового двигателя на  $315^\circ$ . Выполним это задание двумя способами:

- В первом случае шаговый двигатель будет останавливаться каждые  $45^\circ$ . В качестве начального положения для выполнения следующего поворота будет выбираться его новое положение, в котором он оказывается после совершения последнего поворота.
- Во втором случае шаговый двигатель сразу совершит поворот на  $315^\circ$  без промежуточных остановок.

Как и прежде, будем считать углы поворота  $\varphi_1 = [44.91^\circ, 45.09^\circ]$  и  $\varphi_2 = [314.91^\circ, 315.09^\circ]$  интервальными величинами и предположим (исключительно в целях наглядности), что положение верхней точки вала шагового двигателя описывает интервальный вектор

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} [-0.5000, 0.5000] \\ [10.5000, 11.5000] \end{pmatrix}.$$

На Рис. 1.5 показаны результаты выполнения задания обоими способами. Черная пунктирная линия соответствует окружности вала шагового двигателя. Брус  $\mathbf{x}_0$  выделен заливкой красным цветом, и можно заметить, как он поворачивается при каждом шаге на  $45^\circ$ . Заливка серым цветом выбрана для выделения интервальной оболочки множества  $\square\{R(\varphi) \cdot \mathbf{x}_0\}$ . Границы брусов  $\mathbf{R}(\varphi_1) \cdot \mathbf{x}_0$ , получаемых в результате последовательных поворотов вала на угол  $\varphi_1$ , показаны сплошной оранжевой линией. Ребра бруса  $\mathbf{R}(\varphi_2) \cdot \mathbf{x}_0$  обозначены фиолетовым цветом.

По окончании выполнения задания внешней оценкой позиционирования верхней точки вала будет служить интервальный вектор

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\varphi_1} &= \mathbf{R}(\varphi_1) \cdot \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x}_{\varphi_1} &= \begin{pmatrix} [1.7654, 13.8247] \\ [1.7654, 13.8247] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

либо, если вал совершит поворот сразу на угол  $(315 \pm 0.09)^\circ$ , вектор

$$\mathbf{x}_{\varphi_2} = \mathbf{R}(\varphi_2) \cdot \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} [7.0588, 8.4986] \\ [7.0588, 8.4986] \end{pmatrix}.$$

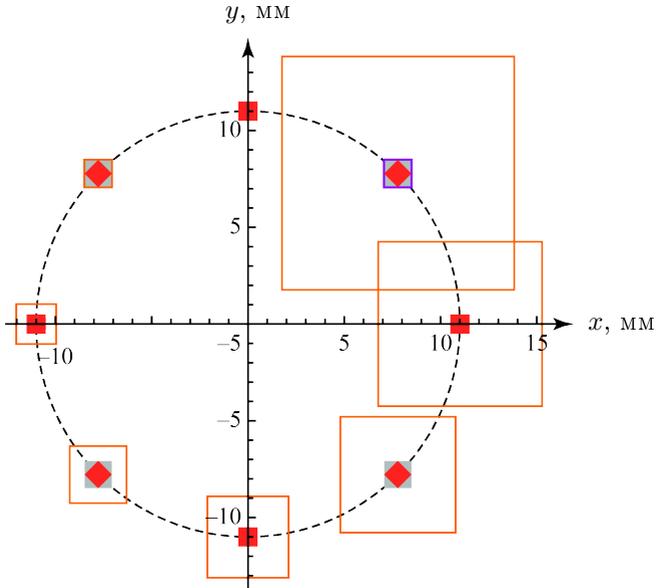


Рис. 1.5. Внешняя оценка позиционирования при совершении полного оборота валом шагового двигателя Nema 17 шагами по  $45^\circ$

Множественная разница между размерами результирующих брусков  $\mathbf{x}_{\varphi_1}$  и  $\mathbf{x}_{\varphi_2}$ , описывающих положение верхней точки вала шагового двигателя после поворота на  $315^\circ$ , т. е.

$$\text{rad } \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.5000 \\ 0.5000 \end{pmatrix}, \quad \text{rad } \mathbf{x}_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} 6.0297 \\ 6.0297 \end{pmatrix}, \quad \text{rad } \mathbf{x}_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 0.7199 \\ 0.7199 \end{pmatrix},$$

свидетельствует о проявлении эффекта обертывания.

На практике для преодоления эффекта обёртывания поступают следующим образом. Перед установкой двигателя в необходимое положение его переводят в положение с хорошо известной угловой координатой и далее совершают поворот за один раз. ■

## 1.2.2 Алгебраические и порядковые свойства многомерных интервальных операций

Упорядочение по включению на множестве интервальных векторов и матриц с элементами из  $\mathbb{IR}$  определяется как прямое произведение порядков по включению на отдельных компонентах этих объектов (1.7):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = (a_i) \subseteq \mathbf{b} = (b_i) &\iff a_i \subseteq b_i \quad \text{для всех } i, \\ \mathbf{A} = (a_{ij}) \subseteq \mathbf{B} = (b_{ij}) &\iff a_{ij} \subseteq b_{ij} \quad \text{для всех } i, j. \end{aligned}$$

Отношения « $\subseteq$ », « $\langle$ », « $\geq$ » и « $\rangle$ » применительно к интервальным векторам и матрицам понимаются также покомпонентно и поэлементно.

Для интервальных векторных и матричных операций имеет место *монотонность по включению*, непосредственно следующая из определений интервального вектора и матрицы и монотонности по включению интервальных арифметических операций в  $\mathbb{IR}$  (1.8). Соответственно, для любых интервальных матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}'$  соответствующих размеров и любой операции  $\star \subseteq \{+, -, \cdot\}$  справедливо

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}', \mathbf{B} \subseteq \mathbf{B}' \implies \mathbf{A} \star \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}' \star \mathbf{B}'. \quad (1.37)$$

Свойствами операции *интервального матричного сложения* над интервальными матрицами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  одинакового размера являются

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) && \text{— ассоциативность сложения,} \\ \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A} && \text{— коммутативность сложения.} \end{aligned}$$

Существенно более сложным является случай *интервального матричного умножения*, алгебраические свойства которого крайне ограничены. Помимо коммутативности отсутствуют дистрибутивность умножения интервальных матриц по сложению и ассоциативность.

**Пример 14 (Отсутствие дистрибутивности для интервального матричного умножения)** Возьмем три матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-2, 1] & [1, 2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [2, 3] \\ [5, 6] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} [-1, 1] & [4, 5] \end{pmatrix}.$$

Вычислим два произведения и сравним результаты:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} [-15, 15] & [-5, 75] \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) &= \begin{pmatrix} [-18, 18] & [-10, 75] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Как мы видим, ассоциативность умножения интервальных матриц не имеет места, и в данном примере  $(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} \subseteq \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})$ . Следовательно, выражение  $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}$  может иметь различный смысл в зависимости от расстановки скобок, с помощью которых необходимо специально определять порядок выполнения операций в подобных выражениях.

Подтвердим отсутствие дистрибутивности умножения интервальных векторов по сложению. Пусть интервальный объект  $\mathbf{C}$  является не вектор-строкой, а вектор-столбцом

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [4, 5] \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = [1, 26], \\ \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C} = [1, 27]. \end{array}$$

Последний результат показывает, что, несмотря на отсутствие дистрибутивности, интервальное матричное умножение обладает субдистрибутивностью относительно сложения:  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \subseteq \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}$ . ■

В целом, можно заключить, что *интервальные векторы и матрицы не образуют линейных векторных пространств*, и неассоциативность и субдистрибутивность интервального матричного умножения накладывает существенные ограничения на интервальную матрично-векторную алгебру в том смысле, что в ней неприменимы результаты традиционной линейной алгебры.

### 1.2.3 Нормы интервальных матриц и векторов

Хотя пространство интервальных векторов  $\mathbb{IR}^n$  не обладает полноценной линейностью — см. §1.2.2, в нём полезно ввести понятие нормы, которая обобщает понятие длины (размера).

Для определения нормы в  $\mathbb{IR}^n$  общепринятым является введение некоторого выражения для  $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}^n$ , которое удовлетворяет следующим аксиомам *аксиомы нормы*:

$$\begin{array}{ll} \|\mathbf{a}\| \geq 0, \text{ причем } \|\mathbf{a}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = 0 & \text{— неотрицательность,} \\ \|\alpha\mathbf{a}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{a}\|, \alpha \in \mathbb{R} & \text{— абсолютная однородность,} \\ \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| & \text{— «неравенство треугольника»}. \end{array}$$

*Нормой* интервального вектора  $\mathbf{a}$  принято называть вещественную величину, обозначаемую как  $\|\mathbf{a}\|$  и обладающую тремя вышеперечисленными свойствами. Становится ясно, что нормы интервальных векторов можно конструировать из абсолютных векторных норм в  $\mathbb{R}^n$ .

Определим аналоги наиболее часто используемых из них:

$$\|\mathbf{a}\|_1 := |\mathbf{a}_1| + |\mathbf{a}_2| + \dots + |\mathbf{a}_n|, \quad (1.38a)$$

$$\|\mathbf{a}\|_2 := \sqrt{|\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2 + \dots + |\mathbf{a}_n|^2}, \quad (1.38b)$$

$$\|\mathbf{a}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{a}_i|, \quad (1.38c)$$

$$\|\mathbf{a}\|_u := \max_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{a}_i|/u_i, \quad (1.38d)$$

где  $u = (u_i)$  — положительный  $n$ -вектор. Норму (1.38c) называют *чебышёвской нормой*, а норму (1.38d) — *взвешенной чебышёвской нормой*.

Нормой интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  является вещественная величина  $\|\mathbf{A}\|$ , которая удовлетворяет следующим условиям:

- $\|\mathbf{A}\| \geq 0$ , причем  $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = 0$  — неотрицательность,
- $\|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{A}\|$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  — абсолютная однородность,
- $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$  — «неравенство треугольника»,
- $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$  — субмультипликативность.

Последнее условие не имеет места для векторов, поскольку умножение вектора на вектор не определено.

Вместе с тем, в вычислительных применениях её применяют для взаимного *согласования векторных и матричных норм*. В частности, нормы интервальных векторов и матриц называются *согласованными* друг с другом, если для любых матриц  $\mathbf{A}$  и векторов  $\mathbf{b}$ , для которых определено произведение  $\mathbf{Ab}$ , выполняется неравенство  $\|\mathbf{Ab}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$ .

Для интервальной матрицы  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  размера  $m \times n$

- Подчинённая 1-норма определяется выражением

$$\|\mathbf{A}\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^m |\mathbf{a}_{ij}| \right). \quad (1.39)$$

- Подчинённая 2-норма является величиной

$$\|\mathbf{A}\|_2 := \sigma_{\max}(|\mathbf{A}|), \quad (1.40)$$

где  $\sigma_{\max}$  — наибольшее сингулярное число матрицы  $|\mathbf{A}|$ .

*Сингулярными числами* матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  называются неотрицательные квадратные корни из собственных чисел матрицы  $A^T A$ . Принято обозначать через  $\sigma_{\min}$  и  $\sigma_{\max}$  наименьшее и наибольшее сингулярные числа матрицы соответственно.

- $\infty$ -норма, подчинённая чебышёвской норме интервального вектора (1.38с), определяется выражением

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} := \max_{1 \leq i \leq m} \left( \sum_{j=1}^n |\mathbf{a}_{ij}| \right). \quad (1.41)$$

**Пример 15 (Нормы интервальных матриц и векторов)** Рассмотрим интервальную матрицу и вектор

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [6, 9] & [1, 2] \\ [-3, 3] & [5, 7] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} [4, 9] \\ [-2, -1] \end{pmatrix}.$$

Для интервального вектора  $\mathbf{a}$  можно записать

$$\|\mathbf{a}\|_1 = 9 + 2 = 11, \quad \|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{9^2 + 2^2} = \sqrt{85} \approx 9.22, \quad \|\mathbf{a}\|_{\infty} = 9.$$

Согласно выражениям (1.39) и (1.41) запишем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_1 &= \max\{9 + 3, 2 + 7\} = \max\{12, 9\} = 12 \\ \|\mathbf{A}\|_{\infty} &= \max\{9 + 2, 3 + 7\} = \max\{11, 10\} = 11. \end{aligned}$$

Определим величину  $\|\mathbf{A}\|_2$ . Для этого нам необходимо построить точечную матрицу модулей и выполнить ее транспонирование:

$$|\mathbf{A}| = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{A}|^T = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |\mathbf{A}|^T \cdot |\mathbf{A}| = \begin{pmatrix} 85 & 41 \\ 41 & 58 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,  $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_{\max}(|\mathbf{A}|) = \max(114.65, 28.335) = 114.65$ .

Проверим, является ли норма интервальной матрицы  $\|\mathbf{A}\|_1$  согласованной с векторной нормой  $\|\mathbf{a}\|_1$ :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} [20, 80] \\ [-41, 22] \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}\|_1 = 121 \\ \|\mathbf{A}\|_1 \cdot \|\mathbf{a}\|_1 = 132 \end{array} \right| \rightarrow 121 < 132.$$

Наконец, если  $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$ , то норма интервального вектора называется *абсолютной*. Являются ли таковыми нормы  $\|\mathbf{a}\|_1$ ,  $\|\mathbf{a}\|_2$  и  $\|\mathbf{a}\|_\infty$ ?

$$|\mathbf{a}| = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \|\mathbf{a}\|_1 = 11, \|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{85}, \|\mathbf{a}\|_\infty = 9.$$

Значит, ответ на поставленный вопрос положителен. ■

**Пример 16 (Нормы интервальных матриц, отличающихся одним элементом)** Рассмотрим три интервальные матрицы, которые различаются только одним элементом  $(\mathbf{A}_i)_{11}$ ,  $i = 1, 2, 3$ :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} [-3, 4] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [-1, 1] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} [-4, 4] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [-1, 1] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} [-2, 5] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [-1, 1] \end{pmatrix}.$$

Охарактеризуем данные интервальные матрицы радиусами и значениями подчиненных чебышевских матричных норм (1.41). Получаем

$$\begin{aligned} \text{rad } \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} 3.5 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}, & \text{rad } \mathbf{A}_2 &= \begin{pmatrix} 4.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}, & \text{rad } \mathbf{A}_3 &= \begin{pmatrix} 3.5 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}, \\ \|\text{rad } \mathbf{A}_1\|_\infty &= 4.5, & \|\text{rad } \mathbf{A}_2\|_\infty &= 5, & \|\text{rad } \mathbf{A}_3\|_\infty &= 4.5, \\ \|\mathbf{A}_1\|_\infty &= 5, & \|\mathbf{A}_2\|_\infty &= 5, & \|\mathbf{A}_3\|_\infty &= 6. \end{aligned}$$

Настоящий пример иллюстрирует различие между двумя величинами, используемыми для количественного описания «размера» составного интервального объекта. Уширение на единицу одного из элементов интервальной матрицы  $\mathbf{A}_1$  отразили такие характеристики, как ее радиус и подчиненная  $\infty$ -норма этой точечной матрицы. В то же время изменение значения подчиненной чебышевской нормы послужило сигналом появления в интервальной матрице  $\mathbf{A}_3$  элемента, модуль (но не радиус!) которого больше, чем максимальные значения той же величины для элементов интервальных матриц  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$ . ■

## 1.2.4 Метрика и топология в интервальных пространствах

Введённое в §1.1.6 расстояние на множестве интервалов обобщает расстояние на вещественной оси.

**Первый способ** определения метрики в многомерных интервальных пространствах [1] заключается в том, чтобы определить расстояние между двумя интервальными векторами  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  из  $\mathbb{IR}^n$  (или интервальными матрицами  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  из  $\mathbb{IR}^{m \times n}$ ) как норму того интервального вектора (матрицы), на который они отличаются друг от друга. В рамках этого подхода для нахождения искомого интервального объекта необходимо использовать операцию внутреннего вычитания « $\ominus$ » (2.8) в полной интервальной арифметике Каухера (см. главу 2):

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \|\mathbf{a} \ominus \mathbf{b}\|, \quad (1.42a)$$

$$\text{dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) := \|\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}\|, \quad (1.42b)$$

где  $\|\cdot\|$  — некоторая векторная норма на  $\mathbb{KR}^n$  или матричная норма на  $\mathbb{KR}^{m \times n}$ . Для пространства  $\mathbb{IR}^n$  метрика (1.42a) совпадает с хаусдорфовым расстоянием между интервальными векторами как брусами в  $\mathbb{R}^n$ , порожденным метрикой  $\text{dist}(a, b) = \|a - b\|$  на  $\mathbb{R}^n$ .

Поскольку многомерные пространства являются прямыми произведениями метрических пространств, то **другим способом** задания расстояния на множествах интервальных векторов и матриц с элементами из  $\mathbb{IR}$  является использование уже определенного расстояния  $\text{dist}$  (1.25) между одномерными интервалами.

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \max\{|\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}|, |\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}|\}, \quad (1.25)$$

В этом случае расстояние между интервальными векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (матрицами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ ) можно ввести как

$$\begin{aligned} \text{dist}_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &:= \sum_{i=1}^n \text{dist}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i), & \text{dist}_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &:= \left( \sum_{i=1}^n (\text{dist}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i))^2 \right)^{1/2}, \\ \text{dist}_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &:= \sum_{i,j} \text{dist}(\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{b}_{ij}), & \text{dist}_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &:= \left( \sum_{i,j} (\text{dist}(\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{b}_{ij}))^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Для измерения расстояния между интервальными векторами или матрицами также можно использовать *мультиметрику*, работа с которой в многомерных пространствах может оказаться более удобна. Например, для интервальных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  из  $\mathbb{IR}^n$  мультиметрика вводится как *вектор расстояний* между их отдельными компонента-

ми:

$$\text{Dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \begin{pmatrix} \text{dist}(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \\ \vdots \\ \text{dist}(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^n, \quad (1.44)$$

Полагая, что  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}), \mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ , мы можем ввести мультиметрику на множестве интервальных матриц как

$$\text{Dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) := \begin{pmatrix} \text{dist}(\mathbf{a}_{11}, \mathbf{b}_{11}) & \cdots & \text{dist}(\mathbf{a}_{1n}, \mathbf{b}_{1n}) \\ \text{dist}(\mathbf{a}_{21}, \mathbf{b}_{21}) & \cdots & \text{dist}(\mathbf{a}_{2n}, \mathbf{b}_{2n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{dist}(\mathbf{a}_{m1}, \mathbf{b}_{m1}) & \cdots & \text{dist}(\mathbf{a}_{mn}, \mathbf{b}_{mn}) \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

Рассмотрим примеры с векторными метриками.

**Пример 17 (Векторные метрики)** Рассмотрим использование введённых понятий. Определим расстояние между двумя векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-3, 2] \\ [5, 6] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [7, 10] \\ [-2, -1] \end{pmatrix}.$$

Для этого воспользуемся векторными метриками  $\text{dist}_1$  и  $\text{dist}_2$  (1.43), а также мультиметрикой  $\text{Dist}$  (1.44). Поскольку

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) &= \max\{|-3 - 7|, |2 - 10|\} = 10, \\ \text{dist}(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) &= \max\{|5 + 2|, |6 + 1|\} = 7. \end{aligned}$$

то, следовательно, можно записать

$$\begin{aligned} \text{dist}_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= 10 + 7 = 17, \\ \text{dist}_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \sqrt{10^2 + 7^2} = \sqrt{149}, \\ \text{Dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

Рассмотрим примеры с матричными метриками.

**Пример 18 (Матричные метрики)** Выберем четыре интервальные матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-8, -5] & [-8, -1] \\ [-6, 8] & [-3, 4] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [-10, 6] & [-6, 6] \\ [-2, 2] & [-9, -7] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [-7, -2] & [-4, 2] \\ [5, 10] & [-9, 1] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} [-5, 10] & [3, 10] \\ [1, 4] & [-5, -4] \end{pmatrix}$$

и проверим, обладают ли матричные метрики  $\text{dist}_1$ ,  $\text{dist}_2$  (1.43) и матричная мультиметрика  $\text{Dist}$  (1.45) следующим свойством метрики (1.25), определенной на  $\mathbb{IR}$ :

$$\text{dist}(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d}) \leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \text{dist}(\mathbf{c}, \mathbf{d}).$$

Все соответствующие неравенства и включения будем понимать далее в покомпонентном и поэлементном смысле. Тогда, с одной стороны,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} [-15, -7] & [-12, 1] \\ [-1, 18] & [-12, 5] \end{pmatrix} \\ \mathbf{B} + \mathbf{D} = \begin{pmatrix} [-15, 16] & [-3, 16] \\ [-1, 6] & [-14, -11] \end{pmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{dist}_1(\mathbf{A} + \mathbf{C}, \mathbf{B} + \mathbf{D}) = 66, \\ \text{dist}_2(\mathbf{A} + \mathbf{C}, \mathbf{B} + \mathbf{D}) = \sqrt{1154}, \\ \text{Dist}(\mathbf{A} + \mathbf{C}, \mathbf{B} + \mathbf{D}) = \begin{pmatrix} 23 & 15 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}. \end{array}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \text{dist}_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + \text{dist}_1(\mathbf{C}, \mathbf{D}) &= 35 + 31 = 66, \\ \text{dist}_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + \text{dist}_2(\mathbf{C}, \mathbf{D}) &= \sqrt{327} + \sqrt{269}, \\ \text{Dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + \text{Dist}(\mathbf{C}, \mathbf{D}) &= \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 15 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \text{dist}_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + \text{dist}_1(\mathbf{C}, \mathbf{D}) &= \text{dist}_1(\mathbf{A} + \mathbf{C}, \mathbf{B} + \mathbf{D}) = 66, \\ \text{dist}_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + \text{dist}_2(\mathbf{C}, \mathbf{D}) &= 34.4844 > 33.9706 = \text{dist}_2(\mathbf{A} + \mathbf{C}, \mathbf{B} + \mathbf{D}), \\ \text{Dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + \text{Dist}(\mathbf{C}, \mathbf{D}) &= \text{Dist}(\mathbf{A} + \mathbf{C}, \mathbf{B} + \mathbf{D}) = \begin{pmatrix} 23 & 15 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, рассматриваемое свойство метрики  $\text{dist}$  (1.25) на  $\mathbb{IR}$  справедливо для матричных метрик  $\text{dist}_1$ ,  $\text{dist}_2$  и мультиметрики  $\text{Dist}$ . Из этого результата следует вывод о том, что другие свойства метрики  $\text{dist}$  (1.25) также могут быть обобщены на многомерный случай. ■

**Теоремы о сходимости вычислений.** Завершая обсуждение метрики в интервальных пространствах, приведём формулировки несколько важных определений и теорем, лежащих в основе построения итерационных методов и обоснования их сходимости к единственному решению [8].

- ◇ Пусть  $X$  — метрическое пространство с расстоянием  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Отображение  $f : X \rightarrow X$  называется *сжимающим* (или *сжатием*), если существует такая положительная постоянная  $\alpha < 1$ , что для любых элементов  $x, y \in X$  имеет место неравенство

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

- ◇ Отображение  $f : X \rightarrow X$  мультиметрического пространства  $X$  с мультиметрикой  $D : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+^n$  называется  *$P$ -сжимающим* или  *$P$ -сжатием*, если существует неотрицательная  $n \times n$ -матрица  $P$  со спектральным радиусом  $\rho(P) < 1$ , такая что для всех  $x, y \in X$  имеет место

$$D(f(x), f(y)) \leq P \cdot D(x, y).$$

(Уточним, что *спектральным радиусом*  $\rho(A)$  точечной матрицы  $A$  размера  $n \times n$  является наибольшее из абсолютных значений собственных чисел  $A$ .)

**Теорема 1.2.1.** (теорема Банаха о неподвижной точке) *Сжимающее отображение  $f : X \rightarrow X$  полного метрического пространства  $X$  в себя имеет единственную неподвижную точку. Она может быть найдена как предел последовательных приближений*

$$x^{(k+1)} \leftarrow f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

при любом начальном приближении  $x^{(0)} \in X$ .

**Теорема 1.2.2.** (конечномерная теорема Шрёдера о неподвижной точке) *Пусть отображение  $\Phi : X \rightarrow X$  является  $P$ -сжимающим отображением полного мультиметрического пространства  $X$  с мультиметрикой  $D : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ . Тогда для любого  $x^{(0)}$  последовательность итераций*

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

*сходится к единственной неподвижной точке  $x^*$  отображения  $\Phi$  в  $X$ , и имеет место оценка*

$$D(x^{(k)}, x^*) \leq (I - P)^{-1} P \cdot D(x^{(k)}, x^{(k-1)}).$$

По сути, теорема Шрёдера о неподвижной точке является аналогом теоремы Банаха о неподвижной точке сжимающих отображений для мультиметрических пространств.

В формулировке теоремы Шрёдера введено понятие  $P$ -сжимающего отображения. Многократное применение оператора  $P$  эффективно приводит к суммированию матричного ряда и возникновению множителя  $(I - P)^{-1}$  аналогично случаю геометрической прогрессии со знаменателем, по модулю меньшим 1.

### 1.2.5 Неособенные интервальные матрицы

В численных методах большую роль играет вопрос (не)особенности матриц линейного преобразования. Выяснение особенности матрицы или близость к ней очень важны с точки зрения разрешимости систем линейных алгебраических уравнений, которые возникают в линейных задачах (§1.6), а также в случае линеаризации операторов преобразований в задачах общего вида (§1.7). Без излишнего преувеличения можно сказать, что выяснение особенности матрицы является одним из наиболее востребованных критериев в численных методах.

В случае интервальнозначных матриц такой анализ осложнён тем, что часть из точечных матриц, входящих в интервальную матрицу, может быть особенной, а часть — нет.

**Определение 1.2.5** *Интервальная матрица  $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  называется неособенной (или регулярной), если неособенны все точечные  $n \times n$ -матрицы  $A \in A$ . Интервальная матрица  $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  называется особенной, если она содержит особенную точечную матрицу, т. е. не является неособенной.*

Если выяснено, что матрица неособенна, то важно знать, насколько допустимо её изменение без того, чтобы она стала особенной? Ввиду того, что матрица часто описывает теоретическую или расчётную модель, то вопрос может конкретизироваться: насколько большим может быть изменение параметров модели, с тем, чтобы её предсказания были однозначны?

В общем случае распознавание особенности/неособенности интервальной матрицы является NP-трудной задачей. В этой связи на практике оказываются весьма полезными несложные *достаточные* условия, определяющие особенность или неособенность матрицы из  $\mathbb{IR}^{n \times n}$ .

Начнём с самых простых приёмов. Наиболее простым признаком неособенности интервальной матрицы служит диагональное преобладание, обобщающий известный признак в вещественном случае.

**Определение 1.2.6** *Интервальная матрица имеет диагональное преобладание, если диагонально преобладающими являются все содержащиеся в ней точечные матрицы.*

Эквивалентная формулировка этого определения на языке интервалов записывается так: интервальная матрица  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  обладает диагональным преобладанием, если удовлетворяет неравенствам

$$\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle > \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.46)$$

Если же имеют место нестрогие неравенства

$$\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle \geq \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.47)$$

то говорят о *слабом диагональном преобладании*.

Здесь  $\langle \mathbf{a} \rangle$  означает вычисление мигнитуды  $\mathbf{a}$  — §1.1.4.

**Теорема 1.2.3.** *(интервальный признак Адамара). Интервальная матрица с диагональным преобладанием, т. е. удовлетворяющая (1.46), является неособенной.*

**Пример 19 (Интервальный признак Адамара)** Рассмотрим пример применения интервального признака Адамара. Рассмотрим две матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1, 3] & [10, 13] \\ [7, 9] & [15, 17] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [1, 3] & [10, 13] \\ [7, 9] & [25, 27] \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

Найдем интервальнозначные определители этих матриц:

$$\det(\mathbf{A}) = [1, 3] \cdot [15, 17] - [7, 9] \cdot [10, 13] = [-102, -19] \not\supseteq 0,$$

$$\det(\mathbf{B}) = [1, 3] \cdot [25, 27] - [7, 9] \cdot [10, 13] = [-92, 11] \ni 0.$$

Итак, первая матрица  $\mathbf{A}$  неособенна, а вторая матрица  $\mathbf{B}$  — особенная.

Однако поскольку

$$\langle \mathbf{A}_{11} \rangle = 1 < 13 = |\mathbf{A}_{12}|, \quad \langle \mathbf{B}_{11} \rangle = 1 < 13 = |\mathbf{B}_{12}|,$$

$$\langle \mathbf{A}_{22} \rangle = 15 > 9 = |\mathbf{A}_{21}|, \quad \langle \mathbf{B}_{22} \rangle = 25 > 9 = |\mathbf{B}_{21}|,$$

то, согласно (1.46), интервальные матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  не обладают диагональным преобладанием, и признак Адамара к ним оказывается неприменим. Значит, без прямого вычисления определителей данных матриц мы не сможем сделать вывод об их особенности/неособенности. ■

Перейдем к рассмотрению более сложных признаков неособенности интервальных матриц. Критерий неособенности Баумана использует вычисления вершин матрицы (см. определение на стр. 32).

**Теорема 1.2.4.** (критерий Баумана) *Интервальная матрица  $\mathbf{A}$  неособенна тогда и только тогда, когда определители всех её крайних матриц имеют одинаковый знак, т. е.  $(\det A') \cdot (\det A'') > 0$  для любых  $A', A'' \in \text{vert } \mathbf{A}$ .*

Следующее условие особенности интервальной матрицы является необходимым и достаточным. В общем случае поиск нетривиального решения приведенной ниже системы неравенств является достаточно сложной задачей, однако по нему можно указать, какую именно особенную точечную матрицу содержит исследуемый интервальный объект.

**Теорема 1.2.5.** *Интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  особенна тогда и только тогда, когда система неравенств*

$$|(\text{mid } \mathbf{A})x| \leq (\text{rad } \mathbf{A})|x|, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.49)$$

*имеет ненулевое решение.*

Выражаясь неформально, интервальная матрица  $\mathbf{A}$  особенна тогда и только тогда, когда «радиус матрицы больше её среднего». Данная теорема крайне важна, так как на ее основе построены несколько более «практичных» достаточных признаков особенности/неособенности интервальных матриц, с которыми мы сейчас познакомимся.

### ► признак Бекка

**Теорема 1.2.6.** (признак Бекка) *Пусть интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  такова, что ее середина  $\text{mid } \mathbf{A}$  неособенна и*

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) < 1. \quad (1.50)$$

*Тогда  $\mathbf{A}$  неособенная.*

Признак Бекка обладает некоторыми особенностями. Во-первых, он не отличается большой чувствительностью. Во-вторых, если вычисление матрицы  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$  выполняется приближенно, то проверить выполнение неравенства (1.50) не получится.

► **признак Румпа**

Критерий, предложенный З. Румпом, основан на информации о сингулярных числах матриц радиусов и средин интервальной матрицы, неособенность которой необходимо установить.

**Теорема 1.2.7.** (признак Румпа) Если для интервальной матрицы  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  имеет место

$$\sigma_{\max}(\text{rad } \mathbf{A}) < \sigma_{\min}(\text{mid } \mathbf{A}), \quad (1.51)$$

то она неособенная.

► **признак Рона-Рекса**

Определение неособенности интервальной матрицы по признаку Рона-Рекса также требует нахождения сингулярных чисел матриц радиусов и средин исследуемой интервальной матрицы.

**Теорема 1.2.8.** (признак Рона-Рекса) Если для интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  имеет место

$$\sigma_{\min}(\text{rad } \mathbf{A}) \geq \sigma_{\max}(\text{mid } \mathbf{A}), \quad (1.52)$$

то она особенная.

Привлекательность критериев Румпа (1.51) и Рона-Рекса (1.52) обусловлена тем, что функция поиска сингулярных чисел матрицы включена в различные пакеты программ для математических расчетов: MATLAB, Scilab, Octave, Maple, Wolfram Mathematica и т. д.

**Пример 20 (Особенность интервальных матриц по критериям Бекка, Румпа и Рона-Рекса)** Вернемся к интервальным матрицам (1.48)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1, 3] & [10, 13] \\ [7, 9] & [15, 17] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [1, 3] & [10, 13] \\ [7, 9] & [25, 27] \end{pmatrix}$$

и распознаем их особенность/неособенность, воспользовавшись критериями Бекка, Румпа и Рона-Рекса (1.50)–(1.52).

Начнем с проверки неособенности по признаку Бекка.

$$\begin{aligned} \text{mid } \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 2.0 & 11.5 \\ 8.0 & 16.0 \end{pmatrix}, & |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| &= \begin{pmatrix} 0.2667 & 0.1917 \\ 0.1333 & 0.0333 \end{pmatrix}, \\ \text{mid } \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 2.0 & 11.5 \\ 8.0 & 26.0 \end{pmatrix}, & |(\text{mid } \mathbf{B})^{-1}| &= \begin{pmatrix} 0.6500 & 0.2875 \\ 0.2000 & 0.0500 \end{pmatrix}, \\ \text{rad } \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1.0 & 1.5 \\ 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}, & \text{rad } \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 1.0 & 1.5 \\ 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку спектральные радиусы

$$\begin{aligned} \rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) &= 0.6794 < 1, \\ \rho(|(\text{mid } \mathbf{B})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{B}) &= 1.2777 > 1, \end{aligned}$$

то можно утверждать, что матрица  $\mathbf{A}$  неособенна, а к матрице  $\mathbf{B}$  признак Бекка оказывается неприменим.

Для сингулярных чисел интервальных матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  выполняется

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}(\text{rad } \mathbf{A}) &= 2.2808 < \sigma_{\min}(\text{mid } \mathbf{A}) = 2.8340, \\ \sigma_{\max}(\text{rad } \mathbf{B}) &= 2.2808 > \sigma_{\min}(\text{mid } \mathbf{B}) = 1.3527, \end{aligned}$$

и признак Румпа выявляет истинные неособенность интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  и особенность интервальной матрицы  $\mathbf{B}$ .

Последним является критерий Рона-Рекса:

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}(\text{rad } \mathbf{A}) &= 0.2192 < \sigma_{\max}(\text{mid } \mathbf{A}) = 21.1712, \\ \sigma_{\min}(\text{rad } \mathbf{B}) &= 0.2192 < \sigma_{\max}(\text{mid } \mathbf{B}) = 29.5706, \end{aligned}$$

что указывает на неособенность обеих интервальных матриц.

Прокомментируем полученные результаты. Важно помнить, что все перечисленные признаки определяют лишь достаточные условия неособенности или особенности интервальных матриц, и потому даже их совместное использование может не давать однозначной информации об исследуемом составном интервальном объекте. ■

## 1.2.6 Сильно неособенные интервальные матрицы

В классической линейной алгебре невозможен случай, когда произведением двух неособенных матриц является особенная матрица. Между тем в интервальной арифметике такая возможность существует. Из-за этого математического факта возникает понятие сильно неособенной интервальной матрицы.

**Определение 1.2.7** *Интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  сильно неособенная (сильно невырожденная, сильно регулярная), если интервальная матрица  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$  существует и неособенна.*

Данное определение требует пояснений. Для того, чтобы ответить на вопрос о сущности сильной неособенности, проясним, почему для выявления этого свойства необходимо выполнять домножение интервальной матрицы на обратную среднюю к ней. Дело в том, что при выборе матрицы  $\mathbf{C} = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$  в произведении  $\mathbf{C}\mathbf{A}$  значение диагонали будет сделано наибольшим возможным относительно внедиагональной части полученной матрицы.

Значит, условно говоря, сильная неособенность — это неособенность интервальной матрицы с минимизированной внедиагональной частью. Если матрица после домножения на обратную среднюю к себе такова, что  $\det((\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}) \neq 0$ , то она сильно неособенна.

Следует заметить, что неособенность интервальной матрицы не подразумевает ее сильную неособенность; однако любая сильно неособенная матрица является неособенной. В общей постановке вопрос о том, как для интервальной матрицы соотносятся неособенность и сильная неособенность, является нетривиальным и рассмотрен в работе [9].

**Предложение.** Если матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  сильно неособенна, то и любая матрица  $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$  также сильно неособенна.

**Предложение.** Интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  сильно неособенна тогда и только тогда, когда

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) < 1.$$

### Пример 21 (Сильная неособенность интервальных матриц)

Проиллюстрируем введённые понятия. Рассмотрим интервальные матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  (1.48) и  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1, 3] & [10, 13] \\ [7, 9] & [15, 17] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [1, 3] & [10, 13] \\ [7, 9] & [25, 27] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} [1, 3] & [10, 13] \\ [7, 9] & [21, 23] \end{pmatrix}.$$

Мы уже установили (см. стр. 51), что матрица  $\mathbf{A}$  является неособенной, а матрица  $\mathbf{B}$  — особенной. Третья матрица  $\mathbf{C}$  также неособенна:

$$\det(\mathbf{C}) = [-96, -1].$$

Какую из матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$  можно считать сильно неособенной?

$$\det((\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}) = [0.3167, 1.8972],$$

$$\det((\text{mid } \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}) = [0.0208, 2.3863].$$

Обе матрицы  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$  и  $(\text{mid } \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}$  существуют, однако однозначный вывод о неособенности матрицы  $(\text{mid } \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}$  сделать нельзя, поскольку левая граница ее интервальнозначного определителя близка к нулю. В этом случае сильно неособенной будет матрица  $\mathbf{A}$ .

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) = 0.6794 < 1,$$

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{C})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{C}) = 0.9789 \approx 1,$$

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{B})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{B}) = 1.2777 > 1.$$

Полученное соотношение между спектральными радиусами трех матриц свидетельствует о том, что фактически признак Бекка (1.50) проверяет *сильную* неособенность интервальных матриц. ■

### 1.2.7 Обратные интервальные матрицы

Неособенность матрицы тесно связана с возможностью её обращения.

**Определение 1.2.8** Для неособенной матрицы  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  обратной интервальной матрицей называют

$$\mathbf{A}^{-1} := \square\{A^{-1} \mid A \in \mathbf{A}\},$$

т. е. интервальную оболочку множества всех обратных для точечных матриц, содержащихся в  $\mathbf{A}$ .

**Пример 22 (Обратная интервальная матрица)** Вычислим обратную матрицу для матрицы  $\mathbf{A}$  (1.48):

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{cc} [1, 3] & [10, 13] \\ [7, 9] & [15, 17] \end{array} \right).$$

Как мы знаем, эта интервальная матрица неособенна (см. стр. 51).

Для удобства вычислений обозначим буквами  $a, b, c, d$  элементы матрицы  $A$  размерностью  $2 \times 2$ :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Рассмотрим выражение, которое определяет обратную матрицу  $A^{-1}$  к  $A$ :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{b}{bc - ad} \\ \frac{c}{bc - ad} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}.$$

Можно было бы все элементы матрицы  $A^{-1}$  можно интервализовать и таким образом получить интервальную матрицу  $\mathbf{A}^{-1}$ . Однако если мы вспомним содержание основной теоремы интервальной арифметики, подкрепленное примером на стр. 30 о синусе угла, противолежащего большему катету в египетском треугольнике, то станет ясно, что перед заменой переменных на интервалы их изменения в выражении для  $A^{-1}$  необходимо выполнить незначительные преобразования:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathbf{a} - \mathbf{bc}/\mathbf{d}} & \frac{1}{\mathbf{c} - \mathbf{ad}/\mathbf{b}} \\ \frac{1}{\mathbf{b} - \mathbf{ad}/\mathbf{c}} & \frac{1}{\mathbf{d} - \mathbf{bc}/\mathbf{a}} \end{pmatrix}, \quad (1.53)$$

причем в данном случае  $0 \notin \mathbf{a}$ ,  $0 \notin \mathbf{b}$ ,  $0 \notin \mathbf{c}$  и  $0 \notin \mathbf{d}$ .

Тогда имеем численно

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} [-0.8947, -0.1471] & [0.1275, 0.5263] \\ [0.0882, 0.3684] & [-0.1579, -0.0098] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [-\frac{17}{19}, -\frac{5}{34}] & [\frac{13}{102}, \frac{10}{19}] \\ [\frac{3}{34}, \frac{7}{19}] & [-\frac{3}{19}, -\frac{1}{102}] \end{pmatrix} \\ \det \mathbf{A}^{-1} &= [-0.1925, 0.1300] \ni 0. \end{aligned}$$

Итак, матрица, обратная к неособенной матрице  $\mathbf{A}$  (1.48), является особенной. Например, она содержит особенную точечную матрицу

$$\begin{pmatrix} -0.15 & 0.15 \\ 0.15 & -0.15 \end{pmatrix}.$$

Как объяснить полученный результат? Ответ таков: при взятии внешней интервальной оценки множества всех обратных матриц в неё вовлекаются лишние элементы — см. обсуждение «эффекта обёртывания»; это может приводить к особенностям даже оптимально оцененной обратной интервальной матрицы. ■

**Интервальный итерационный метод Шульца.** В общем случае нахождение обратной интервальной матрицы является NP-трудной задачей. В связи с этим практически важными являются подходы и численные методы для нахождения обратных интервальных матриц, в рамках которых обратная интервальная матрица рассматривается как внешняя оценка множества всех обратных точечных матриц (по возможности, конечно, наиболее узкие), а не интервальная оболочка этого множества, как было определено в начале §1.2.7.

Рассмотрим интервальный аналог итерационного *метода Шульца* для обращения матриц. Традиционный точечный метод Шульца представляет собой метод Ньютона для решения системы линейных алгебраических уравнений, приложенный к  $X^{-1} - A = 0$ :

$$X^{(k+1)} \leftarrow X^{(k)}(2I - AX^{(k)}) = X^{(k)} + X^{(k)}(I - AX^{(k)}). \quad (1.54)$$

Простая интервализация метода Шульца сходится плохо, поэтому необходимо выполнение коррекции вычислительной схемы. Итерации

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \text{mid } \mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{X}^{(k)}(I - \mathbf{A} \cdot \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}). \quad (1.55)$$

будем называть *интервальным методом Шульца*.

Важным фактором успеха вычислений, проводимых для нахождения обратной интервальной матрицы, является выбор начального приближения. Проиллюстрируем это утверждение.

### Пример 23 (Интервальный итерационный метод Шульца)

Пусть у нас имеется интервальная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ [-5.00, -4.95] & 3 \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

Найдем обратную интервальную матрицу к  $\mathbf{A}$ , используя интервальный метод Шульца. Выберем начальное приближение итераций:

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} [2.5, 3.5] & [0.5, 1.5] \\ [3.5, 5.5] & [1.0, 2.5] \end{pmatrix}. \quad (1.57)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(1)} &= \begin{pmatrix} [1.925, 4.000] & [0.475, 1.500] \\ [3.100, 6.500] & [1.075, 2.750] \end{pmatrix}, \text{dist}_1(\mathbf{X}^{(0)}, \mathbf{X}^{(1)}) = 1.850, \\ \mathbf{X}^{(2)} &= \begin{pmatrix} [2.588, 3.341] & [0.809, 1.167] \\ [4.272, 5.547] & [1.668, 2.269] \end{pmatrix}, \text{dist}_1(\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}) = 2.762, \\ &\vdots \\ \mathbf{X}^{(6)} &= \begin{pmatrix} [2.854, 3.000] & [0.951, 1.000] \\ [4.707, 5.000] & [1.902, 2.000] \end{pmatrix}, \text{dist}_1(\mathbf{X}^{(6)}, \mathbf{X}^{(7)}) = 2.024 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Сравним результат вычислений  $\mathbf{X}^{(6)}$  с обратной матрицей  $\mathbf{A}^{-1}$  (1.53):

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} [2.857, 3.000] & [0.952, 1.000] \\ [4.714, 5.000] & [1.905, 2.000] \end{pmatrix} \rightarrow \text{dist}_1(\mathbf{X}^{(6)}, \mathbf{A}^{-1}) = 0.014.$$

Расхождение между двумя интервальными матрицами невелико, однако все же присутствует. Если такая точность вычислений достаточна, то интервальная матрица  $\mathbf{X}^{(6)}$ , найденная с помощью интервального метода Шульца, и есть искомая обратная матрица для  $\mathbf{A}$  (1.56).

Однако, если бы мы взяли в качестве начального приближения для построения итерационного процесса интервальную матрицу

$$\begin{pmatrix} [1.5, 3.5] & [0.5, 1.5] \\ [3.5, 5.5] & [1.0, 2.5] \end{pmatrix},$$

отличающуюся лишь одним элементом от  $\mathbf{X}^{(0)}$  (1.57), то получили бы расхождение итераций:  $\text{dist}_1(\mathbf{X}^{(6)}, \mathbf{X}^{(7)}) = 5.966 \cdot 10^8$ . Этот факт иллюстрирует сложность задачи построения обратной матрицы. ■

### 1.2.8 $M$ - и $H$ -матрицы

В настоящем подразделе мы кратко рассмотрим два класса интервальных матриц с диагональным преобладанием —  $M$ - и  $H$ -матрицы, наш интерес к которым вызван тем, что они фигурируют в обсуждении работы таких интервальных итерационных методов, как интервальный метод Гаусса-Зейделя (см. стр. 116) и процедура Хансена-Блика-Рона (см. стр. 120). Мы ограничимся указанием лишь тех сведений о матрицах из данных классов, которые будут нам полезны в дальнейшем.

→ ***M*-МАТРИЦЫ**

**Предложение.** (критерий Фань Цзы) Матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  является *M*-матрицей тогда и только тогда, когда ее внедиагональные элементы неположительны и существует положительный вектор  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v > 0$ , такой что  $Av > 0$ .

**Определение 1.2.9** Матрица  $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  называется интервальной *M*-матрицей, если каждая вещественная матрица  $A \in \mathbf{A}$  является *M*-матрицей.

**Предложение.** Матрица  $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  является *M*-матрицей тогда и только тогда, когда ее внедиагональные элементы неположительны и существует положительный вектор  $v > 0$ , такой что  $Av > 0$ .

→ ***H*-МАТРИЦЫ**

**Определение 1.2.10** Матрица  $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  называется интервальной *H*-матрицей, если каждая вещественная матрица  $A \in \mathbf{A}$  является *H*-матрицей.

**Определение 1.2.11** Будем говорить, что точечная матрица  $\langle A \rangle$  размера  $n \times n$  есть компарант интервальной матрицы  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ , если

$$ij\text{-й элемент } \langle A \rangle := \begin{cases} \langle a_{ij} \rangle, & \text{если } i = j, \\ -|a_{ij}|, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

**Предложение.** Матрица  $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  является *H*-матрицей тогда и только тогда, когда ее компарант  $\langle A \rangle$  является *M*-матрицей.

**Пример 24 (*M*- и *H*-матрицы)** Выберем произвольную интервальную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} [10, 11] & [-5, -3] \\ [0, 1] & [2, 4] \end{pmatrix}$$

и установим, принадлежит ли она классу *M*- или *H*-матриц.

Данная интервальная матрица  $\mathbf{A}$  имеет диагональное преобладание в смысле определения (1.46) и, как можно сразу заметить, не является  $M$ -матрицей, так как ее внедиагональный элемент  $\mathbf{A}_{21}$  неотрицателен.

Определим компарант матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Внедиагональные элементы точечной матрицы  $\langle \mathbf{A} \rangle$  неположительны. Следовательно, для того, чтобы установить принадлежность матрицы  $\langle \mathbf{A} \rangle$  классу  $M$ -матриц, а интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  — классу  $H$ -матриц, необходимо найти положительный вектор  $v$ , такой что  $\langle \mathbf{A} \rangle v > 0$ :

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \mathbf{A} \rangle v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, точечная матрица  $\langle \mathbf{A} \rangle$  является  $M$ -матрицей в соответствии с критерием Фань Цзы. Из этого следует, что матрица  $\mathbf{A}$  принадлежит классу интервальных  $H$ -матриц. ■

**Теорема 1.2.9.** [10] Пусть интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  и точечная матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  таковы, что их произведение  $LA$  является  $H$ -матрицей. Тогда  $\mathbf{A}$  сильно неособенна.

**Теорема 1.2.10.** [10] Интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  сильно неособенна тогда и только тогда, когда произведение  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$  является  $H$ -матрицей.

**Пример 25 (Сильная неособенность  $M$ -матриц)** Рассмотрим две интервальные матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2.5, 5.5] & [-3, -1] \\ [-2, -1] & [-3.5, -1.5] \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = [-25.25, -4.75] \not\cong 0,$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} [3.5, 5.5] & [-3, -1] \\ [-2, -1] & [-3.5, -2.5] \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{B} = [-25.25, -9.75] \not\cong 0.$$

Как мы видим, обе матрицы неособенны. Несложно проверить, что  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  не являются интервальными  $M$ -матрицами. Внедиагональные элементы обеих матриц неположительны, однако

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A} \cdot v = \begin{pmatrix} [-0.5, 4.5] \\ [-5.5, -2.5] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} \cdot v = \begin{pmatrix} [0.5, 4.5] \\ [-5.5, -3.5] \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы установить принадлежность матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  к классу  $H$ -матриц, проверим, являются ли  $M$ -матрицами их компаранты:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A} \rangle \cdot v &= \begin{pmatrix} 2.5 & -3 \\ -2 & 1.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} < 0, \\ \langle \mathbf{B} \rangle \cdot v &= \begin{pmatrix} 3.5 & -3 \\ -2 & 2.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} > 0.\end{aligned}$$

Итак,  $\mathbf{B}$  — интервальная  $H$ -матрица, а матрица  $\mathbf{A}$  таковой не является.

Теперь выявим сильную неособенность матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ . Для этого исследуем неособенность матриц  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$  и  $(\text{mid } \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}$  (см. определение 1.2.7 в §1.2.6), а также воспользуемся признаком Бекка неособенности интервальных матриц (1.50):

$$\begin{aligned}(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} [0.6346, 1.3654] & [-0.3462, 0.3462] \\ [-0.3269, 0.3269] & [0.5769, 1.4231] \end{pmatrix}, \\ \det((\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}) &= [0.2530, 2.0562] \not\cong 0, \\ \rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) &= 0.7319 < 1, \\ (\text{mid } \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} [0.7576, 1.2424] & [-0.2424, 0.2424] \\ [-0.2273, 0.2273] & [0.7727, 1.2273] \end{pmatrix}, \\ \det((\text{mid } \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}) &= [0.5303, 1.5799] \not\cong 0, \\ \rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) &= 0.4697 < 1.\end{aligned}$$

Обе заданные интервальные матрицы сильно неособенны.

Из выполненных проверок интервальных матриц на сильную неособенность и принадлежность к классу  $H$ -матриц следует важный вывод. *Всякая интервальная  $H$ -матрица сильно неособенна, однако обратное неверно.* В частности, мы получили, что интервальная матрица  $\mathbf{A}$  является сильно неособенной, но не принадлежит к классу  $H$ -матриц.

Простой способ распознавания интервальной  $H$ -матрицы содержит

**Теорема 1.2.11.** *Матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  является  $H$ -матрицей тогда и только тогда, когда  $\text{mid } \mathbf{A}$  — это  $H$ -матрица и*

$$\rho\left(\langle \text{mid } \mathbf{A} \rangle^{-1} \text{rad } \mathbf{A}\right) < 1.$$

В нашем случае

$$\langle \text{mid } \mathbf{A} \rangle = \begin{pmatrix} 4.0 & -2.0 \\ -1.5 & 2.5 \end{pmatrix}, \quad \langle \text{mid } \mathbf{A} \rangle \cdot v = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 1.0 \end{pmatrix},$$
$$\langle \text{mid } \mathbf{B} \rangle = \begin{pmatrix} 4.5 & -2.0 \\ -1.5 & 3.0 \end{pmatrix}, \quad \langle \text{mid } \mathbf{B} \rangle \cdot v = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1.5 \end{pmatrix},$$

и, соответственно,  $\text{mid } \mathbf{A}$  и  $\text{mid } \mathbf{B}$  являются точечными  $H$ -матрицами.

Для интервальных матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  имеем

$$\rho \left( \langle \text{mid } \mathbf{A} \rangle^{-1} \text{rad } \mathbf{A} \right) = 1.3592 > 1,$$
$$\rho \left( \langle \text{mid } \mathbf{B} \rangle^{-1} \text{rad } \mathbf{B} \right) = 0.7381 < 1.$$

Таким образом, содержание вышесформулированной теоремы позволило нам успешно установить истинную принадлежность матрицы  $\mathbf{B}$  классу интервальных  $H$ -матриц и исключить возможность попадания в него интервальной матрицы  $\mathbf{A}$ . ■

### 1.3 Интервальное оценивание областей значений функций

Зависимость одной переменной величины от другой или нескольких других определяется *функцией*. В качестве примера функциональной зависимости можно привести хорошо известный из курса общей физики закон Ома, согласно которому сила тока, текущего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна падению напряжения  $U$  на проводнике:

$$I = U/R,$$

где  $R$  — электрическое сопротивление проводника.

Если мы рассчитываем значения искомой величины, зная зависимость между ней и другой величиной, значения которой мы определяем непосредственно с помощью измерительного прибора, то осуществляемое измерение называется *косвенным*.

В целом проведение косвенных измерений приводит к задаче оценивания области значений некоторой функции  $f$ , т. е. множества

$$\text{ran}(f, \mathbf{X}) := \{f(x) \mid x \in \mathbf{X}\},$$

где  $\mathbf{X}$  — интервал в  $\mathbb{R}$  или интервальный вектор-брус в  $\mathbb{R}^n$ .

Для непрерывной функции  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  имеет место равенство

$$\text{ran}(f, \mathbf{X}) = \left[ \min_{x \in \mathbf{X}} f(x), \max_{x \in \mathbf{X}} f(x) \right].$$

### 1.3.1 Интервальные оценивающие функции и их простейшие формы

Под *интервальным оцениванием* мы будем понимать замену точной области значений функции её интервальной оценкой. Особенность интервального оценивания заключается в том, что нас не интересует нахождение отдельных экстремумов функции — основной задачей является «глобальная» оценка ее области значений «как целого». Эта интервальная оценка может быть или *внешней*, если мы оцениваем область значений как объемлющее множество, или *внутренней*, если имеется в виду подмножество. Далее будут рассмотрены *внешние* оценки.

В основе методов интервального оценивания областей значений функций лежат следующие **идеи**:

1. В аналитическом выражении (или алгоритме для вычисления) функции точечные входные аргументы заменяются на соответствующие интервалы их изменения, а арифметические операции и элементарные функции — на свои интервальные аналоги. Результат вычисления полученного интервального выражения (или выполнения интервального алгоритма) будет содержать искомую область значений функции.
2. Исходное аналитическое выражение (или алгоритм вычисления функции) заменяется на другое, равносильное исходному в том или ином смысле, однако «превосходящее» его в достигаемой точности результата, удобстве использования при интервальном оценивании и т. д. Над полученным после замены выражением производятся действия, описанные в п. 1.

Вопрос о том, как соотносятся результаты вычислений, проведённые с подстановкой значений аргументов в формулы, с внешними и внутренними оценками, весьма непросто. Наиболее развёрнутое обсуждение круга вопросов, связанных с этим оцениванием, содержится в

работе испанских математиков [33]. Выяснение влияния монотонности на результаты вычислений содержится в диссертации В.М.Нестерова [11].

Введём основные понятия интервального оценивания:

- **Определение 1.3.1** *Интервальная функция  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$  является интервальным продолжением точечной функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  на множестве  $D \subset \mathbb{R}^n$ , если  $\mathbf{f}(x) = f(x)$  для всех точечных аргументов  $x \in D$ .*
- **Определение 1.3.2** *Интервальная функция  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$  называется интервальным расширением точечной функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  на  $D \subset \mathbb{R}^n$ , если она*
  - (i) *является интервальным продолжением  $f$  на  $D$ ,*
  - (ii) *монотонна по включению на  $\mathbb{I}D$ , т. е. для любых  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}D$  имеет место импликация  $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{y})$ .*

Остановимся на данном пункте немного подробнее и дополним его несколькими полезными определениями. Прежде всего стоит обратить внимание на то, что если  $\mathbf{f}$  — интервальное расширение для точечной функции  $f$ , то для всякого бруса  $\mathbf{X}$  и любого  $x \in \mathbf{X}$  справедливо

$$f(x) = \mathbf{f}(x) \in \mathbf{f}(\mathbf{X}),$$

и значение  $\mathbf{f}(\mathbf{X})$  является внешней интервальной оценкой области значений  $\text{ran}(f, \mathbf{X})$ . В свою очередь если интервальнозначная функция  $\mathbf{F} : \mathbb{I}D \rightarrow \mathbb{IR}^m$  удовлетворяет

$$\text{ran}(f, \mathbf{X}) \subseteq \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad \text{для всех } \mathbf{X} \in \mathbb{I}D,$$

то  $\mathbf{F}$  есть *внешняя оценивающая функция* для  $f$  на  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Наконец, интервальную функцию  $\mathbf{f}(x)$ , являющуюся монотонной по включению, назовем *слабым интервальным расширением* для точечной функции  $f$ , если имеет место

$$x \in D \quad \rightarrow \quad f(x) \in \mathbf{f}(x) \subseteq \mathbf{f}(x) \quad \text{для любого } x \in \mathbf{x}.$$

- **Определение 1.3.3** *Интервальная функция  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$  называется оптимальным интервальным расширением точечной функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  на  $D \subset \mathbb{R}^n$ , если  $\mathbf{f}(x) = \square(\text{ran}(f, \mathbf{x}))$*

для любого  $x \in \mathbb{D}$ , т. е. значения  $f$  являются интервальными оболочками областей значений  $f$  на брусках  $x \in \mathbb{D}$ .

Интересным примером, демонстрирующим разнообразие возможных интервальных расширений, является оптимальное интервальное расширение функции знака числа  $\operatorname{sgn} x$ :

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{если } \bar{x} < 0, \\ [-1, 0], & \text{если } \underline{x} < 0 = \bar{x}, \\ [-1, 1], & \text{если } \underline{x} < 0 < \bar{x}, \\ 0, & \text{если } \underline{x} = 0 = \bar{x}, \\ [0, 1], & \text{если } \underline{x} = 0 < \bar{x}, \\ 1, & \text{если } 0 < \underline{x}. \end{cases}$$

- *Элементарными функциями* являются:
  - ◇ абсолютная величина (модуль)  $|x|$ ,
  - ◇ степенная функция  $x^\alpha$ ,
  - ◇ показательная функция  $a^x$ , записываемая также как  $\exp_a x$ ,
  - ◇ логарифмическая функция  $\log_a x$ ,
  - ◇ круговые тригонометрические функции  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,
  - ◇ обратные тригонометрические функции  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ .

Семейство элементарных функций будем обозначать через  $\mathcal{EF}$ .

- **Определение 1.3.4** *Аналитические выражения, которые составлены из символов переменных, констант, четырех арифметических операций — сложения, вычитания, умножения и деления — и элементарных функций, будем называть элементарными функциональными выражениями.*

Заметим, что элементарное функциональное выражение жестко ассоциировано с задающим его выражением и, как следствие, способом своего вычисления (см. пример на стр. 30).

- **Определение 1.3.5** *Интервальное расширение элементарного функционального выражения, которое получается в результате замены его аргументов на интервалы их изменения, а арифметических операций и элементарных функций — на их интервальные аналоги и расширения, называется естественным интервальным расширением.*

Естественное интервальное расширение элементарного функционального выражения  $f$  принято обозначать через  $\mathbf{f}_{\natural}$ , а для обозначения естественного интервального расширения точечной функции  $f$  будем использовать  $\mathbf{f}_{\natural}$ .

**Теорема 1.3.1.** Пусть  $f$  — элементарное функциональное выражение от  $n$  переменных, и оно является липшицевым по форме на некотором брусе  $\mathbf{X} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$ . Тогда естественное интервальное расширение  $\mathbf{f}_{\natural}$  непрерывно по Липшицу на  $\mathbb{I}\mathbf{X}$ . Соответствующая вектор-строка констант Липшица может быть вычислена рекуррентно по дереву Канторовича для  $f$  с помощью следующей таблицы:

$0$ ,	если $f$ есть константа
$i$ -ая строка единичной матрицы,	если $f = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$
$L_g + L_h$ ,	если $f = g \pm h$ ,
$ g_{\natural}(\mathbf{X}) L_h + L_g h_{\natural}(\mathbf{X}) $ ,	если $f = g \cdot h$
$\frac{(L_g +  \mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{X}) L_h)}{\langle h_{\natural}(\mathbf{X}) \rangle}$	если $f = g/h$
$\alpha  g_{\natural}(\mathbf{X}) ^{\alpha-1} L_g$	если $f = g^{\alpha}, 1 \leq \alpha \in \mathbb{R}$
$L_{\phi}(g_{\natural}(\mathbf{X})) \cdot L_g$	если $f = \phi(g), \quad \phi \in \mathcal{EF}$

Дерево Канторовича — графический способ представления вычисляемого выражения [2].

**Пример 26 (Оценивание квадратного трехчлена)** Рассмотрим точечную функцию

$$f(x) = \arccos(x^2 - 2x + 1),$$

областью определения которой является интервал  $[0, 2]$ .

Поставим задачу найти ее естественное и оптимальное интервальные расширения при  $\mathbf{x} = [1, 2]$ .

Нетрудно убедиться в том, что естественное интервальное расширение  $\mathbf{f}_\natural(\mathbf{x})$  исходной точечной функции  $f(x)$  не существует. Это связано с тем, что функция  $\arccos(x)$  определена только на интервале  $[-1, 1]$ :

$$[1, 2] \cdot [1, 2] - 2 \cdot [1, 2] + [1, 1] = [-2, 3].$$

Проделаем некоторые алгебраические преобразования:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 2)x + 1 = (x - 1)^2.$$

Тогда для представления  $f(x) = \arccos((x - 2)x + 1)$  получаем следующее естественное интервальное расширение

$$([1, 2] - [2, 2]) \cdot [1, 2] + [1, 1] = [-1, 1] \rightarrow \arccos([-1, 1]) = [0, \pi].$$

В том случае, если заданную точечную функцию представить в виде  $f(x) = \arccos((x - 1)^2)$ , то

$$([1, 2] - [1, 1])^2 = [0, 1] \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \square(\text{ran}(f, \mathbf{x})) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

и полученное интервальное расширение является оптимальным. ■

### 1.3.2 Липшицевская оценка точности естественного интервального расширения

Зададимся вопросом о том, насколько точна внешняя оценка области значений функции, найденная с помощью ее естественного интервального расширения. Для ответа на поставленный вопрос нам требуется распространить на интервальные функции *условие Липшица*.

Из курса математического анализа известно, что непрерывность по Липшицу отражает соразмерность изменений функции и ее аргумента. Другими словами, приращение функции (даже негладкой) не должно превосходить приращение аргумента более чем в определенное фиксированное число раз по абсолютной величине или в некоторой заданной метрике. В строгой формулировке функция  $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет условию Липшица, если для некоторой константы  $L$  имеет место  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$  при любых  $x, y \in D$ . Для функции многих переменных справедливо следующее

**Определение 1.3.6** *Вещественная функция  $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  является непрерывной по Липшицу (или просто липшицевой), если существует вектор-строка констант  $L_f \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  такая, что*

$$|f(x) - f(y)| \leq L_f |x - y|$$

для любых  $x, y \in D$ . Величину  $L_f$  называют при этом (векторной) константой Липшица функции  $f$  на  $D$ .

Стоит отметить, что не все элементарные функциональные выражения и даже элементарные функции удовлетворяют условию Липшица. Например, у границ своих областей определения не являются непрерывными по Липшицу функции  $x^\alpha$  при  $0 < \alpha < 1$  (в окрестности нуля), а также функции  $\arccos x$  и  $\arcsin x$  (в окрестностях точек  $x = \pm 1$ ).

О липшицевости интервальных функций говорит

**Определение 1.3.7** *Интервальная функция  $\mathbf{f} : \mathbb{I}\mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}$  называется непрерывной по Липшицу на  $D$ , если существует вектор-строка констант  $L_{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  такая, что*

$$\text{dist}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{y})) \leq L_{\mathbf{f}} \cdot \text{Dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (1.58)$$

для любых  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ .

Перейдем к обсуждению точности внешнего оценивания области значений функции  $f$  с помощью  $\mathbf{f}_{\natural}$ . Тот факт, что естественное интервальное расширение имеет *первый порядок точности*, обосновывает

**Теорема 1.3.2.** ([2], §3.1, Теорема 3.1.2.) *Если  $\mathbf{f}_{\natural}$  — естественное интервальное расширение элементарного функционального выражения  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , которое является липшицевым по форме на  $\mathbf{X} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$ , то*

$$\text{dist}(\mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}), \text{ran}(f, \mathbf{x})) \leq C \|\text{wid } \mathbf{x}\| \quad (1.59)$$

для любого бруса  $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{X}$  и некоторой константы  $C$ , не зависящей от  $\mathbf{x}$ .

Можно заметить, что требуемая оценка точности естественного интервального расширения является следствием непрерывности по Липшицу интервальной функции  $\mathbf{f}_{\natural}$ . Подтверждение липшицевости естественного интервального расширения можно получить, вычисляя выражение, которое его задает — согласно приведенной ниже теореме, это действие предусматривает проверка выполнения условия Липшица для элементарного функционального выражения  $f$ .

**Пример 27 (Оценивание функции двух переменных)** Оценим точность внешнего оценивания области значений функции двух переменных

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + x + y, \\ x &\in [-3, -1], \quad y \in [2, 4] \end{aligned} \quad (1.60)$$

с помощью естественного интервального расширения  $\mathbf{f}_{\natural}$ .

Первым шагом станет проверка липшицевости  $f$  на брус

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} [-3, -1] \\ [2, 4] \end{pmatrix},$$

для чего вычислим вектор-строку констант Липшица, считая, что

$$\begin{aligned} f &= g + h \quad \rightarrow \quad g = x^2, \quad h = x + y, \\ L_f(\mathbf{X}) &= L_g + L_h. \end{aligned}$$

Продолжим рекуррентное вычисление  $L(\mathbf{X})$ :

$$\begin{aligned} L_g &= 2 |g_{\natural}(\mathbf{X})|^{2-1} \cdot (1 \quad 0), \\ g_{\natural}(\mathbf{X}) &= \mathbf{x}^2 = ([-3, -1])^2 = [1, 9] \quad \rightarrow \quad |g_{\natural}(\mathbf{X})| = 9, \\ L_g &= 2 \cdot 9 \cdot (1 \quad 0) = (18 \quad 0), \\ L_h &= (1 \quad 0) + (0 \quad 1) = (1 \quad 1). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$L_f(\mathbf{X}) = (18 \quad 0) + (1 \quad 1) = (19 \quad 1).$$

Теперь выберем два точечных вектора

$$x_1 = \begin{pmatrix} -2.8 \\ 2.5 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -1.8 \\ 3.5 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbf{X}$$

и проверим непрерывность по Липшицу функции  $f(x, y)$ , заданную выражением (1.60), в смысле определения 1.3.6.

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= 1.6, \\ L_f(\mathbf{X}) \cdot |x_1 - x_2| &= (19 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 20.0 \end{aligned} \quad \left| \rightarrow 1.6 < 20.0. \right.$$

Значит, функция  $f$  (1.60) липшицева по форме на бруске  $\mathbf{X}$ , а ее естественное интервальное расширение  $\mathbf{f}_{\natural} = \mathbf{x}^2 + \mathbf{x} + \mathbf{y}$  является непрерывной по Липшицу интервальной функцией на  $\mathbb{I}\mathbf{X}$ .

Мы также можем взять два интервальных вектора

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} [-2.5, -1.5] \\ [2.5, 3.5] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} [-2.7, -1.3] \\ [2.2, 3.8] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \subseteq \mathbf{X}$$

и найти такую вектор-строку констант  $L_{\mathbf{f}_{\natural}}$ , чтобы для них выполнялось неравенство (1.58):

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}_1), \mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}_2)) &= 1.54, \\ \text{Dist}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Например, можно выбрать  $L_{\mathbf{f}_{\natural}} = (0.5 \quad 4.8)$ :

$$L_{\mathbf{f}_{\natural}} \cdot \text{Dist}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1.54 = \text{dist}(\mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}_1), \mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}_2)).$$

Итогом первого шага стало подтверждение непрерывности по Липшицу интервальной функции  $\mathbf{f}_{\natural}$  двумя способами — проверкой выполнения условия Липшица для функции  $f$  и подбором соответствующей вектор-строки констант  $L_{\mathbf{f}_{\natural}}$ . Перейдем ко второму и заключительному шагу в оценивании точности естественного интервального расширения функции  $f$  как внешней оценки ее области значений. Перепишем выражение (1.59) с учетом неравенства Коши-Буняковского [2]:

$$\text{dist}(\mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}), \text{ran}(f, \mathbf{x})) \leq C \|\text{wid } \mathbf{x}\|_2, \quad C = \|L_{\mathbf{f}_{\natural}}\|_2,$$

где  $\|\cdot\|$  — 2-норма (евклидова норма) точечного вектора.

Для выбранных вектор-строки констант  $L_{\mathbf{f}_{\natural}}$  и бруса  $\mathbf{X}$  имеем

$$C = \|L_{\mathbf{f}_{\natural}}\|_2 = 4.8260, \quad \|\text{wid } \mathbf{X}\|_2 = \sqrt{8} = 2.8284,$$

следовательно,

$$\text{dist}(\mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{X}), \text{ran}(f, \mathbf{X})) \leq 13.6499.$$

Областью значений функции  $f$  (1.60) на бруске  $\mathbf{X}$  является интервал

$$\text{ran}(f, \mathbf{X}) = [2, 10],$$

и, как можно проверить,  $f_{\natural}(\mathbf{X}) = [0, 12]$ , так что

$$\text{dist}(f_{\natural}(\mathbf{X}), \text{ran}(f, \mathbf{X})) = 2 < 13.6499 = C \|\text{wid } \mathbf{X}\|_2.$$

Итак, требуемая оценка точности естественного интервального расширения для функции  $f$  (1.60) найдена. В заключение сделаем два замечания. Во-первых, выбранная нами вектор-строка констант  $L_{f_{\natural}}$  обеспечила равенство в (1.58), однако следует помнить, что ее выбор неединственен. Во-вторых, в конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны — переписывая (1.59) с учетом неравенства Коши-Буняковского, мы могли выбрать любую норму вместо евклидовой, что отразилось бы лишь на значении константы  $C$ . ■

### 1.3.3 Центрированные формы интервальных оценивающих функций

Использование естественного интервального расширения  $f_{\natural}$  для нахождения внешней оценки области значений точечной функции  $f$  является отражением первой из идей интервального оценивания, рассмотренных на стр. 64. Что представляет собой реализация второй идеи?

Как было указано в начале §1.3.1, заменим исходное выражение для функции на некоторую *линейную форму*, для которой интервальная оценка области значений несложно вычисляется и является точной.

**Определение 1.3.8** *Будем говорить, что для функции  $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  интервальная оценивающая функция  $f_c(\mathbf{X})$  на  $\mathbf{X} \subseteq D$  имеет центрированную форму с центром  $c$ , если для некоторой вектор-строки  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , зависящей от  $\mathbf{X}$  и  $c$ , она представима в виде*

$$f_c(\mathbf{X}) := f(c) + \mathbf{g}(\mathbf{X} - c)$$

или, развёрнуто,

$$f_c(\mathbf{X}) := f(c) + \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{X}, c)(X_i - c_i) \quad (1.61)$$

где  $g_i(\mathbf{X}, c)$  — некоторые интервалы, зависящие от  $\mathbf{X}$  и  $c$ .

Если коэффициенты  $g_i(\mathbf{X}, c)$  в (1.61) выбраны такими, что

$$g_i(\mathbf{X}, c) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{X}),$$

то дифференциальной центрированной (среднезначной) формы интервального расширения функции называют выражение

$$\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}) := f(c) + \mathbf{f}'(\mathbf{X})(\mathbf{X} - c), \quad (1.62)$$

где  $c \in \mathbf{X}$ , а  $\mathbf{f}'(\mathbf{X})$  — внешняя интервальная оценка для производной  $f'$  на интервале  $\mathbf{X}$ . Происхождение нижнего индекса « $mv$ » объясняется английским названием теоремы Лагранжа о среднем значении, Lagrange mean value theorem.

О монотонности по включению рассматриваемой интервальной функции  $\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x})$  говорит теорема Капрани-Мадсена.

**Теорема 1.3.3.** (теорема Капрани-Мадсена) Если  $c = \text{mid } \mathbf{X}$ , т. е. центр  $c$  берется серединой интервала  $\mathbf{X}$ , а интервальная оценка производной  $\mathbf{f}'(\mathbf{X})$  монотонна по включению, то выражение  $\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X})$ , задаваемое посредством (1.62), также монотонно по включению:

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{y}).$$

Вообще говоря, монотонность по включению — свойство, обладание которым не является обязательным для произвольной центрированной формы. Однако если центр  $c$  фиксирован, то данное свойство становится следствием самого сформулированного определения (1.61).

*Наклонная форма* также является центрированной. Ее построение основывается на том, что для вещественнозначной функции  $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  и произвольных значений  $x, y \in D$  можно найти разложение вида

$$f(x) = f(y) + f^\angle(x, y) \cdot (x - y) \quad (1.63)$$

с некоторой функцией  $f^\angle(\cdot, \cdot) : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n}$ .

**Определение 1.3.9** Вектор-строка  $f^\angle(x, y)$ , фигурирующая в представлении (1.63), называется наклоном функции  $f$  между точками  $x$  и  $y$ .

Предположим, что для всех  $x$  из некоторой области  $\mathbf{X}$  справедливо разложение (1.63), причем наклон  $f^\angle(x, y)$  может быть представлен в виде некоторого конечного выражения от своих аргументов, а  $\mathbf{f}^\angle(\mathbf{X}, y)$  является для него интервальной оценивающей функцией на  $\mathbf{X}$ . Тогда для нахождения внешней оценки множества значений функции  $f$  на  $\mathbf{X}$  можно воспользоваться результатом, который содержит

**Определение 1.3.10** *Интервальная функция*

$$f_{sl}(\mathbf{X}, c) := f(c) + f^{\angle}(\mathbf{X}, c)(\mathbf{X} - c) \quad (1.64)$$

называется наклонной формой интервальной оценивающей функции  $f$  на  $\mathbf{X}$  с центром в точке  $c$  (нижний индекс «sl» означает «slope»).

Использование наклонной формы (1.64) является целесообразным лишь в том случае, если нам известен эффективный способ вычисления наклонов функций. В одномерном случае при  $x \neq y$  наклон функции совпадает с её разделённой разностью первого порядка:

$$f^{\angle}(x, y) = (f(x) - f(y)) / (x - y).$$

Если  $x = y$ , то  $f^{\angle}(y, y) = f'(y)$  для дифференцируемой функции  $f$ .

В многомерном случае можно записать следующее

**Определение 1.3.11** Интервальным наклоном функции  $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  на брус  $\mathbf{X} \in \mathbb{I}D$  относительно точки  $y$  называется интервальный вектор  $f^{\angle}(\mathbf{X}, y) \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$ , такой что для любого  $x \in \mathbf{X}$  существует  $s \in f^{\angle}(\mathbf{X}, y)$ , являющийся наклоном функции  $f$  между точками  $x$  и  $y$ .

Из данного определения можно сделать два интересных вывода. Во-первых, «многомерный» наклон есть внешняя интервальная оценка некоторого набора всех представителей наклонов функции между точками  $x$  и  $y$ , когда  $x$  пробегает заданный брус  $\mathbf{X}$ . Он не является результатом прямой интервализации наклона, выполнить которую, по сути, в многомерном случае невозможно. Во-вторых, наклон функции многих переменных принципиально отличается от градиента той же функции, так как его компоненты не характеризуют свойства рассматриваемой функции. Содержательный смысл имеет лишь вектор наклона, рассматриваемый «как целое».

**Пример 28 (Оценивание значений функции двух переменных с дифференциальной центрированной (среднезначной) и наклонной формами)** Произведем интервальное оценивание области значений функции двух переменных

$$f(x, y) = x^2 + \sqrt{y}, \quad x \in [0, 2], \quad y \in [1, 4]. \quad (1.65)$$

Для этого воспользуемся дифференциальной центрированной (среднезначной) и наклонной формами интервального расширения функции  $f$  на брусе  $\mathbf{X} = ([0, 2] \quad [1, 4])^\top$ .

Дифференциальная центрированная форма

Начнем с определения вектор-строки частных производных

$$f' = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left( 2x \quad \frac{1}{2\sqrt{y}} \right) \rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{f}'(\mathbf{X}) = \text{ran}(f', \mathbf{X}) \\ = ([0, 4] \quad [0.25, 0.50]).$$

Вычислим дифференциальную центрированную форму (1.62) интервального расширения функции  $f(x, y)$  (1.65), варьируя точку  $c$ .

$$c_1 = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{X}}_1 \\ \underline{\mathbf{X}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c_1) = f(c_1) + \mathbf{f}'(\mathbf{X})(\mathbf{X} - c_1), \\ \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c_1) = 1 + ([0, 4] \quad [0.25, 0.50]) \cdot \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 3] \end{pmatrix}, \\ \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c_1) = [1.0, 10.5], \\ c_2 = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{X}}_1 \\ \underline{\mathbf{X}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} : \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c_2) = 2 + ([0, 4] \quad [0.25, 0.50]) \cdot \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [-3, 0] \end{pmatrix}, \\ \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c_2) = [0.5, 10.0], \\ c_3 = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{X}}_1 \\ \overline{\mathbf{X}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} : \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c_3) = 6 + ([0, 4] \quad [0.25, 0.50]) \cdot \begin{pmatrix} [-2, 0] \\ [-3, 0] \end{pmatrix}, \\ \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c_3) = [-3.5, 6.0].$$

Наклонная форма

Определим наклон функции нескольких переменных. Для этого запишем наклонное разложение для  $f$  как функции аргумента  $y$  [12]:

$$f(x, y) = f(x, c_y) + f_y^\angle(x, y, c_y)(y - c_y), \\ f_y^\angle(x, y, c_y) = \frac{f(x, y) - f(x, c_y)}{y - c_y}.$$

Теперь разложим  $f(x, c_y)$  как функцию переменной  $x$ :

$$f(x, c_y) = f(c_x, c_y) + f_x^\angle(x, c_x, c_y)(x - c_x), \\ f_x^\angle(x, c_x, c_y) = \frac{f(x, c_y) - f(c_x, c_y)}{x - c_x}.$$

Таким образом,

$$f(x, y) = f(c_x, c_y) + f_x^{\angle}(x, c_x, c_y)(x - c_x) + f_y^{\angle}(x, y, c_y)(y - c_y).$$

В том случае, если  $f_x^{\angle}(\mathbf{x}, c_x, c_y)$  и  $f_y^{\angle}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, c_y)$  являются внешними интервальными оценками множеств значений вещественных функций  $f_x^{\angle}(x, c_x, c_y)$  и  $f_y^{\angle}(x, y, c_y)$  при  $x \in \mathbf{x}$  и  $y \in \mathbf{y}$ , то

$$f(x, y) \in f(c_x, c_y) + f_x^{\angle}(\mathbf{x}, c_x, c_y)(\mathbf{x} - c_x) + f_y^{\angle}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, c_y)(\mathbf{y} - c_y).$$

Для функции  $f(x, y)$  (1.65) наклоны  $f_x^{\angle}$  и  $f_y^{\angle}$  равны соответственно

$$f_x^{\angle}(x, c_x, c_y) = \frac{(x^2 + \sqrt{c_y}) - (c_x^2 + \sqrt{c_y})}{x - c_x} = \frac{x^2 - c_x^2}{x - c_x} = x + c_x,$$

$$f_y^{\angle}(x, y, c_y) = \frac{(x^2 + \sqrt{y}) - (x^2 + \sqrt{c_y})}{y - c_y} = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{c_y}}{y - c_y} = \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{c_y}}.$$

Для вычисления наклонных форм примем

$$f_x^{\angle}(\mathbf{x}, c_x, c_y) = \text{ran}(f_x^{\angle}, \mathbf{X}), \quad f_y^{\angle}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, c_y) = \text{ran}(f_y^{\angle}, \mathbf{X})$$

и выберем те же центры  $c$ , что и ранее:

$$c_1 = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{X}}_1 \\ \underline{\mathbf{X}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \quad \mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c_1) = f(\underline{\mathbf{X}}_1, \underline{\mathbf{X}}_2) +$$

$$\quad \quad \quad + f_x^{\angle}(\underline{\mathbf{X}}_1, \underline{\mathbf{X}}_1, \underline{\mathbf{X}}_2)(\underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_1)$$

$$\quad \quad \quad + f_y^{\angle}(\underline{\mathbf{X}}_1, \underline{\mathbf{X}}_2, \underline{\mathbf{X}}_2)(\underline{\mathbf{X}}_2 - \underline{\mathbf{X}}_2),$$

$$\mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c_1) = 1 + [0, 2] \cdot [0, 2] + [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \cdot [0, 3],$$

$$\mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c_1) = [1.0, 6.5],$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{X}}_1 \\ \underline{\mathbf{X}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} : \quad \mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c_2) = 2 + [0, 2] \cdot [0, 2] + [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}] \cdot [-3, 0],$$

$$\mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c_2) = [1, 6],$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{X}}_1 \\ \overline{\mathbf{X}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} : \quad \mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c_3) = 6 + [2, 4] \cdot [-2, 0] + [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}] \cdot [-3, 0],$$

$$\mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c_3) = [-3, 6].$$

Сформируем сводную таблицу результатов:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c_1) &= [1.0, 10.5], & \mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c_1) &= [1.0, 6.5], \\
 \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c_2) &= [0.5, 10.0], & \mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c_2) &= [1.0, 6.0], \\
 \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c_3) &= [-3.5, 6.0], & \mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c_3) &= [-3.0, 6.0]. \\
 \text{wid } \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c_1) &= 9.5, & \text{wid } \mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c_1) &= 5.5, \\
 \text{wid } \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c_2) &= 9.5, & \text{wid } \mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c_2) &= 5.0, \\
 \text{wid } \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c_3) &= 9.5, & \text{wid } \mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c_3) &= 9.0.
 \end{aligned}$$

Точная область значений функции  $f(x, y)$  на брусе  $\mathbf{X}$  равна

$$\text{ran}(f, \mathbf{X}) = [1, 6].$$

■

Из рассмотренного примера можно сделать три вывода. Во-первых, значение внешней оценки существенно зависит от центра разложения. Во-вторых, при одном и том же выбранном центре наклонная центрированная форма  $\mathbf{f}_{sl}(\mathbf{x}, c)$  приводит к получению более узкого интервала, который является областью значений интервальной функции, чем дифференциальная центрированная форма  $\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x})$ . Можно показать что, всегда имеет место включение

$$\mathbf{f}^{\angle}(\mathbf{x}, c) \subseteq \mathbf{f}'(\mathbf{x}). \quad (1.66)$$

В-третьих, можно заметить, что точная область значений функции получается в результате пересечения внешних оценок  $\mathbf{f}_{sl}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}})$  и  $\mathbf{f}_{sl}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ . Пересечение различных интервальных результатов, полученных при разложении относительно разных центров  $c$  — это прием, которым можно пользоваться почти всегда для получения наилучшей внешней оценки области значений функции. Однако гарантировать получение таким образом точной области значений функции невозможно.

### 1.3.4 Бицентрированная среднезначная форма

В основе построения *бицентрированной среднезначной формы* интервального расширения функции  $f$  лежат следующие идеи:

- 1) оптимизация выбора точки  $c$ , входящей в центрированную форму интервальной оценивающей функции для  $f$ ,

- 2) пересечение интервалов, получаемых в результате внешнего оценивания области значения  $f$  с помощью центрированных форм.

**Определение 1.3.12** Будем называть выражение

$$\mathbf{f}_{bic}(\mathbf{x}) := \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}, c_\star) \cap \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}, c^\star) \quad (1.67)$$

бицентрированной среднезначной формой функции  $f(x)$  на брус  $\mathbf{x}$ .

Ответ на вопрос о происхождении точек  $c_\star$  и  $c^\star$  дает

**Теорема 1.3.4.** (теорема Бауманна) Пусть

$$p_i := \text{cut} \left( \frac{\text{mid } \mathbf{f}'_i(\mathbf{x})}{\text{rad } \mathbf{f}'_i(\mathbf{x})}, [-1, 1] \right),$$

$$(c_\star)_i := \text{mid } \mathbf{x}_i - p_i \cdot \text{rad } \mathbf{x}_i, \quad (c^\star)_i := \text{mid } \mathbf{x}_i + p_i \cdot \text{rad } \mathbf{x}_i,$$

$i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда

$\underline{\mathbf{f}}_{mv}(\mathbf{x}, c)$  достигает своего максимума по  $c$  при  $c = c_\star$ ,  
 $\text{rad } \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}, c)$  достигает своего минимума по  $c$  при  $c = \text{mid } \mathbf{x}$ ,  
 $\overline{\mathbf{f}}_{mv}(\mathbf{x}, c)$  достигает своего минимума по  $c$  при  $c = c^\star$ .

В теореме Бауманна фигурирует функция срезки  $\text{cut} : \mathbb{R} \times \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{R}$ , действующая как

$$\text{cut}(x, \mathbf{x}) := \begin{cases} \underline{\mathbf{x}}, & \text{если } x < \underline{\mathbf{x}}, \\ x, & \text{если } x \in \mathbf{x}, \\ \overline{\mathbf{x}}, & \text{если } x > \overline{\mathbf{x}}. \end{cases}$$

Если  $0 \notin f_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , и функция  $f(x)$  является монотонной по всем переменным, то  $p_i \in \{-1, 1\}$ ,  $c_\star, c^\star$  — угловые точки бруса  $\mathbf{x}$  и

$$\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}, c_\star) \cap \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}, c^\star) = \square\{f(c_\star), f(c^\star)\} = \text{ran } \{f, \mathbf{x}\}.$$

В силу выполняющегося включения (1.66) еще более узкую внешнюю оценку области значений точечной функции  $f(x)$  можно получить путем пересечения наклонных форм. Разумеется, уточнение внешней оценки будет достигаться за счет увеличения вычислительных затрат.

**Пример 29 (Оценивание функции двух переменных с использованием бицентрированной среднезначной формы)** Вернемся к рассмотрению функции двух переменных  $f(x, y) = x^2 + \sqrt{y}$  (1.65) и произведем интервальное оценивание области ее значений на брусе  $\mathbf{X} = ([0, 2] \quad [1, 4])^\top$ , используя бицентрированную среднезначную форму (1.67).

Как было найдено ранее (см. пример на стр. 74),

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(\mathbf{X}) = ([0, 4] \quad [0.25, 0.50]) &\rightarrow \text{mid } \mathbf{f}'(\mathbf{X}) = (2.000 \quad 0.375), \\ &\text{rad } \mathbf{f}'(\mathbf{X}) = (2.000 \quad 0.125). \end{aligned}$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} p_1 &:= \text{cut} \left( \frac{\text{mid } \mathbf{f}'_1(\mathbf{x})}{\text{rad } \mathbf{f}'_1(\mathbf{x})}, [-1, 1] \right) = \text{cut} \left( \frac{2}{2}, [-1, 1] \right) = 1 \\ p_2 &:= \text{cut} \left( \frac{0.375}{0.125}, [-1, 1] \right) = \text{cut} (3, [-1, 1]) = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\text{mid } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.5 \end{pmatrix}, \quad \text{rad } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.5 \end{pmatrix},$$

то центры разложения

$$\begin{aligned} (c_\star)_1 &= 1 - 1 \cdot 1 = 0, & (c_\star)_2 &= 2.5 - 1 \cdot 1.5 = 1, & c_\star &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{X}}_1 \\ \underline{\mathbf{X}}_2 \end{pmatrix}, \\ (c^\star)_1 &= 1 + 1 \cdot 1 = 2, & (c^\star)_2 &= 2.5 + 1 \cdot 1.5 = 4, & c^\star &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{X}}_1 \\ \overline{\mathbf{X}}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Результат дальнейших действий нам уже известен:

$$\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c_\star) = [1.0, 10.5], \quad \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c^\star) = [-3.5, 6.0].$$

Наконец, получаем

$$\mathbf{f}_{bic}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c_\star) \cap \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c^\star) = [1, 6] = \text{ran}(f, \mathbf{X}).$$

Итак, бицентрированная среднезначная форма позволила получить точную область значений функции  $f(x, y) = x^2 + \sqrt{y}$ . Высокое качество полученной внешней оценки объясняется тем, что функция  $f$  (1.65) монотонна по обоим переменным и, кроме того,  $0 \notin f(\mathbf{X})$ . ■

## 1.4 Постановки и множества решений интервальных задач

Принципиальным аспектом применения интервального анализа является получение в результате проведения вычислений двусторонних ограничений. Как мы уже видели в §1.3.1, результат вычисления зависит от вида используемого выражения. В более общем контексте, результат вычислений является неким множеством, непустота и размер которого зависит от постановки задачи.

Для обсуждения постановок интервальных задач и их решений мы воспользуемся моделью, различные аспекты которой подробно обсуждаются в большом количестве статей С.П.Шарого (например, [27]) и его книге [2]. Эта модель описывает систему на языке входов, «чёрного ящика» и выходов. При этом как входы, так и выходы имеют интервальные неопределённости и, кроме этого, разные свойства, что важно для постановок задач. Выбор различных типов входов и выходов позволяет ввести понятия «интервальная задача» и «множество решений интервальной задачи».

Следуя [27], рассмотрим некоторую систему с входным сигналом  $a$  и выходным сигналом  $b$ . На внутреннее состояние этой системы  $x$  действуют возмущения, кроме этого, возможно управление системой.

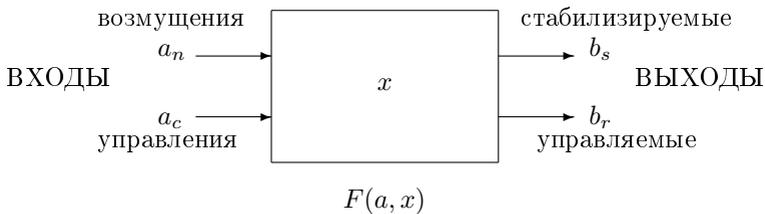


Рис. 1.6. Структурная схема статической системы управления  
Упрощенная версия рис. 4.1 [2]

Обозначения на рис. 1.6:

- Возмущения (неконтролируемые неопределённости)  $a_n \in \mathbf{a}_n$ .
- Параметры управления  $a_c \in \mathbf{a}_c$ .
- За счёт входов управления можно попасть в интервалы достижимости  $b_s \in \mathbf{b}_s$ .

- Независимо от значений внешних *возмущений* удерживаются *интервалами стабилизации*  $b_r \in \mathbf{b}_r$ .

Наличие и количество входов и выходов разной природы может быть различным, что порождает различные типы постановки задач и множества решений. В дальнейшем мы будем обращаться к схеме Рис. 1.6 при обсуждении частных случаев множеств решений интервальных задач, например в §1.4.4 и §1.4.5.

Наша задача — оценка внутреннего состояния  $x$  рассматриваемой системы для заданных входов  $a$  и выходов  $b$ .

Пусть внутреннее состояние  $x$  системы, входной сигнал  $a$  и выходной сигнал  $b$  описываются вещественными векторами  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}^l$  и  $b \in \mathbb{R}^m$ . Предположим, что зависимость вход-состояние-выход в рассматриваемой системе имеет вид

$$F(a, x) = b \quad (1.68)$$

с некоторым отображением  $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Тем самым задана *интервальная система уравнений*:

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}, \quad (1.69)$$

где  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_l)^\top \in \mathbb{IR}^l$  и  $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m)^\top \in \mathbb{IR}^m$ .

Выражение (1.69) формально описывает совокупность точечных систем уравнений  $F(a, x) = b$  с коэффициентами  $a \in \mathbf{a}$  и  $b \in \mathbf{b}$ .

### 1.4.1 Кванторный формализм и АЕ-множества решений интервальных систем уравнений

Даже в упрощённом виде схема на рис. 1.6 имеет весьма большое количество решений в зависимости от постановок задач и ограничений на входы и выходы.

Для описания множеств решений (1.69) С.П.Шарым был разработан способ формального описания. Он использует логические кванторы  $\forall$  (квантор всеобщности, «для всех») и  $\exists$  (квантор существования, «существует»). Для системы Рис. 1.6

$$(\forall a_n \in \mathbf{a}_n)(\forall b_s \in \mathbf{b}_s)(\exists a_c \in \mathbf{a}_c)(\exists b_r \in \mathbf{b}_r) \mid F(a, x) = b.$$

Будем использовать символ  $\Xi$  для обозначения множества всех состояний  $x$ , которые удовлетворяют выписанной формуле.

$$\begin{aligned} \Xi := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \\ (\forall a_n \in \mathbf{a}_n)(\forall b_s \in \mathbf{b}_s)(\exists a_c \in \mathbf{a}_c)(\exists b_r \in \mathbf{b}_r) \\ (F(a, x) = b)\}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Множество  $\Xi$  можно назвать *множеством решений* интервальной системы уравнений (1.69). Таким образом, задача оценки внутреннего состояния системы  $x$  для заданных входов  $a$  и выходов  $b$  сводится к его *обнаружению и оцениванию*.

Из определения выделяющего предиката следует, что множество  $\Xi$  решений интервальной системы уравнений (1.69) не единственно. Если задана функциональная зависимость  $F$  и интервальные вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  фиксированы, выбор логических кванторов « $\forall$ » и « $\exists$ » при различных параметрах  $a$  и  $b$  в (1.69) определяет конкретное *множество кванторных решений* интервальной системы уравнений. Набор условий в (1.70) называется *выделяющим предикатом* множества решений интервальной системы уравнений (1.69).

Для описания решений разработана специальная терминология. В первую очередь, принято различать так называемые *сильные и слабые* свойства решений. Пусть имеется интервал и какое-то его свойство  $P(v)$ . Если свойство  $P(v)$  интервала  $v$  выполнено — для *всех* точек заданного интервала, то  $P(v)$  — *сильное свойство*, этот вид неопределённости называют (А-тип) или  $\forall$ -тип.  
— для *некоторых* точек из интервала, не обязательно всех, то  $P(v)$  является *слабым свойством*, этот вид неопределённости называют (Е-тип) или  $\exists$ -тип.

В большом количестве практических задач для описания решения достаточно определить тип неопределённости для модели (параметры  $a$ ) и данных (параметры  $b$ ). Важное подмножество вариантов описания связано с тем, что в выделяющем предикате сначала появляется квантор всеобщности « $\forall$ », а потом — квантор существования « $\exists$ ». В таком случае говорят, что выделяющий предикат имеет *АЕ-форму*, а множества решений называют *множествами АЕ-решений*.



Важным инструментом исследования решений является *аналитическая характеристика множеств АЕ-решений ИСЛАУ*. Фундаментальным результатом теории в этом вопросе является следующая теорема [36].

**Теорема 1.4.1.** *Точка  $x$  принадлежит множеству решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{A}^{\forall} \cdot x - \mathbf{b}^{\forall} \subseteq \mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists} \cdot x, \quad (1.73)$$

где « $\cdot$ » — интервальное матричное умножение.

Эта теорема обобщает все частные характеристики для различных множеств решений ИСЛАУ: для объединённого, допускового и управляющего (см. [2], [28]).

Если  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ , то под решением интервальной линейной системы уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  (1.72), характеризуемой кванторной матрицей  $\mathcal{A}$  и вектором  $\beta$  тех же размеров, что  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно, мы будем понимать *поиск внешней и внутренней интервальных оценок* множества решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Установление пустоты или непустоты различных множеств АЕ-решений является весьма важным вопросом, требующего отдельного обсуждения.

Заметим также, что конструкция (1.73) указывает на возможность характеристики ИСЛАУ более общего типа. Для этого необходимо использование более общей алгебраической системы, полной интервальной арифметики (Каухера), см. §2.3. Тогда конструкция (1.73) переформулируется в виде (2.20) и даёт возможность применения дополнительных методов получения оценок множеств решений.

### 1.4.3 Частные случаи множеств АЕ-решений и частичный порядок на множестве логических кванторов

В общем виде конструкции с логическими выделяющими предикатами весьма громоздки и сложны для анализа. Как уже было упомянуто, семейство множеств кванторных решений интервальных систем уравнений весьма обширно. В частности, в семейство множеств АЕ-решений интервальных линейных систем (1.72) входят  $2^{m(n+1)}$  множеств, из которых заведомо непустыми являются  $2^{m(n+1)} - (2^m - 1)$

множеств Пусты  $2^m$  множеств с кванторами  $\forall$  в векторе  $\beta$  ввиду невозможности выполнения условия в интервальной постановке в классической интервальной арифметике. Тогда, оказывается, для ИСЛАУ с матрицей  $\mathbf{A}$  размером  $3 \times 3$  необходимо рассматривать 4089 непустых множеств АЕ-решений!

Возникает естественное желание разделить решения на какие-то классы.

По этой причине для интервальных линейных систем вида (1.72) принято выделять три частных случая, представляющие собой крайние точки всего семейства множеств АЕ-решений:

○ *объединённое множество решений*

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \mathbf{A} \in \mathbf{A})(\exists \mathbf{b} \in \mathbf{b})(Ax = b)\}, \quad (1.74)$$

○ *допусковое множество решений*

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \mathbf{A} \in \mathbf{A})(\exists \mathbf{b} \in \mathbf{b})(Ax = b)\}, \quad (1.75)$$

○ *управляемое множество решений*

$$\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \mathbf{b} \in \mathbf{b})(\exists \mathbf{A} \in \mathbf{A})(Ax = b)\}. \quad (1.76)$$

Четвертая крайняя точка

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \mathbf{A} \in \mathbf{A})(\forall \mathbf{b} \in \mathbf{b})(Ax = b)\},$$

представляет больший интерес при рассмотрении интервальных неравенств, мы не будем её рассматривать.

Для дальнейшего построения многомерного интервального оператора Ньютона нам потребуется так называемая характеристика Бекка.

**Теорема 1.4.2.** (*характеристика Бекка*) Пусть заданы  $\mathbf{A} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{m \times n}$  и  $\mathbf{b} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^m$ . Вектор  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  принадлежит множеству решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной системы линейных алгебраических уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  тогда и только тогда, когда выполнено любое из условий

$$\mathbf{A} \cdot \tilde{x} \cap \mathbf{b} \neq \emptyset, \quad 0 \in \mathbf{A} \cdot \tilde{x} - \mathbf{b}, \quad (1.77)$$

где « $\cdot$ » обозначает интервальное матричное умножение.

**Размеры различных АЕ-множеств решений ИСЛАУ.** Для практики очень важен вопрос как соотносятся между собой размеры различных АЕ-множеств решений ИСЛАУ (1.72). Введём *частичный порядок* « $\preceq$ » на множестве логических кванторов  $\{\forall, \exists\}$ :

$$\forall \preceq \exists. \quad (1.78)$$

Выражение (1.78) следует понимать в том смысле, что условие справа менее строгое и множество решений получается более объёмным.

Отношения  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}'$ ,  $\beta \preceq \beta'$  понимаются покомпонентно и поэлементно. Тогда для любых  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{b}$  справедливо

$$\mathcal{A}\beta \preceq \mathcal{A}'\beta' \Rightarrow \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi_{\mathcal{A}'\beta'}(\mathbf{A}, \mathbf{b}). \quad (1.79)$$

Рассмотрим, как меняются АЕ-множества решений ИСЛАУ при изменении кванторной матрицы  $\mathcal{A}$  и вектора  $\beta$ .

**Пример 30 (Решение ИСЛАУ с изменением кванторной матрицы  $\mathcal{A}$ )** Дана интервальная система линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} [3, 6] & [-5, 2] \\ [-5, 7] & [-3, -1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}. \quad (1.80)$$

Будем изменять кванторную матрицу  $\mathcal{A}$  и проследим, как эти изменения отражаются на множествах АЕ-решений.

Выберем несколько сочетаний кванторных матрицы  $\mathcal{A}$  и вектора  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \begin{pmatrix} \exists & \exists \\ \exists & \exists \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \forall & \forall \\ \forall & \forall \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}_3 &= \begin{pmatrix} \exists & \exists \\ \exists & \exists \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} \forall \\ \forall \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} \forall & \exists \\ \exists & \forall \end{pmatrix}, \quad \beta_4 = \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Комбинации кванторных матрицы и вектора  $\mathcal{A}_1\beta_1$ ,  $\mathcal{A}_2\beta_2$  и  $\mathcal{A}_3\beta_3$  входят в определения объединенного (1.74), допускового (1.75) и управляемого (1.76) множеств решений ИСЛАУ, соответственно. Четвертая комбинация кванторных матрицы и вектора выбрана произвольной.

Множества решений  $(x_1, x_2)^\top$ , соответствующие каждому из сочетаний кванторных матрицы  $\mathcal{A}$  и вектора  $\beta$ , представлены на Рис. 1.7(а). Уточним, что этот рисунок следует понимать как многослойный, т. е. различные множества АЕ-решений визуально накладываются друг на

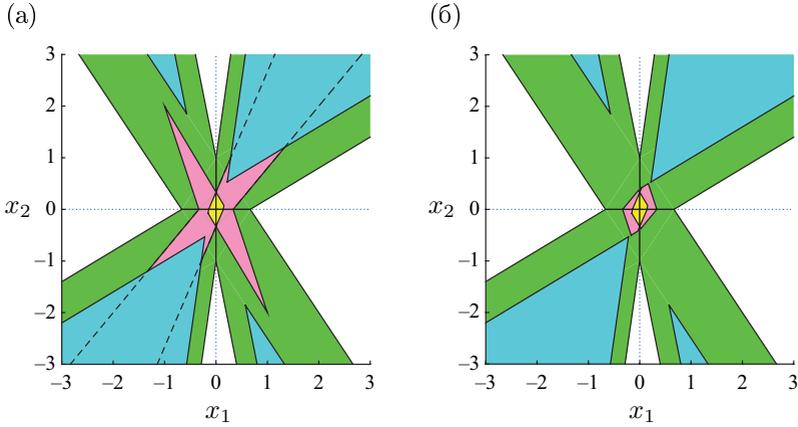


Рис. 1.7. Множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (зеленый цвет),  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (голубой цвет) и  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (желтый цвет) ИСЛАУ (1.80), построенные с использованием функции `MixQtr2D` пакета `IntLinInc2D` для MATLAB [17]. Розовым цветом выделено множество  $\Xi_{\mathcal{A}_4\beta_4}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Кванторные матрицы  $\mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} \forall & \exists \\ \exists & \forall \end{pmatrix}$  (а) и  $\mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} \forall & \forall \\ \exists & \forall \end{pmatrix}$  (б)

друга. Пунктирной линией на Рис. 1.7(а) показаны границы той части множества  $\Xi_{\mathcal{A}_4\beta_4}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , которую «накрывает» управляемое множество АЕ-решений ИСЛАУ.

Как мы видим на Рис. 1.7(а), среди четырех множеств АЕ-решений объединенное множество  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  является самым широким, а допускное  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  — самым узким. Объяснить полученный результат можно следующим образом: множество АЕ-решений расширяется при «ослаблении» (в смысле порядка) кванторов в выделяющем предикате.

В качестве подтверждения данного утверждения заменим в кванторной матрице  $\mathcal{A}_4$  один из кванторов « $\exists$ » на квантор « $\forall$ »

$$\mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} \forall & \forall \\ \exists & \forall \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}$$

и увидим, что множество  $\Xi_{\mathcal{A}_4\beta_4}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , показанное на Рис. 1.7(б), действительно уменьшилось в размере по сравнению с тем множеством на Рис. 1.7(а), которое соответствует прежней кванторной матрице  $\mathcal{A}_4$ . ■

**Пример 31 (Решение ИСЛАУ с изменением кванторного вектора  $\beta$ )** Попробуем для ИСЛАУ (1.80) изменять кванторный вектор  $\beta$  при неизменной кванторной матрице  $\mathcal{A}$ .

Выберем следующую кванторную матрицу

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \exists & \exists \\ \exists & \exists \end{pmatrix}$$

и будем дополнять ее одним кванторным вектором  $\beta$  из набора

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} \forall \\ \exists \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} \exists \\ \forall \end{pmatrix}, \quad \beta_4 = \begin{pmatrix} \forall \\ \forall \end{pmatrix}.$$

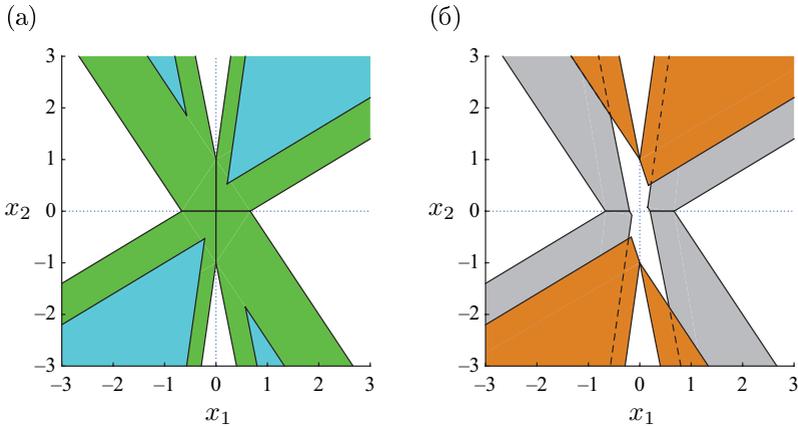


Рис. 1.8. Множества АЕ-решений ИСЛАУ (1.80), соответствующие

кванторной матрице  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \exists & \exists \\ \exists & \exists \end{pmatrix}$  и различным кванторным векторам  $\beta_1$  (зеленый цвет) и  $\beta_4$  (голубой цвет) (а),  $\beta_2$  (оранжевый цвет) и  $\beta_3$  (серый цвет) (б). Для построения множеств АЕ-решений была использована функция `MixQtr2D` пакета `IntLinInc2D` для `MATLAB` [17]

На Рис. 1.8(а) показаны множества АЕ-решений ИСЛАУ (1.80)  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , соответствующие комбинациям кванторных матрицы и вектора  $\mathcal{A}\beta_1$  и  $\mathcal{A}\beta_4$ . Множества  $\Xi_{\mathcal{A}\beta_2}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и  $\Xi_{\mathcal{A}\beta_3}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  представлены на Рис. 1.8(б). Пунктирной линией на Рис. 1.8(б) показаны граница той части множества  $\Xi_{\mathcal{A}\beta_3}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , которая оказалась «накрытой» множеством  $\Xi_{\mathcal{A}\beta_2}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Как и ожидалось, объединенное множество решений является самым широким множеством АЕ-решений ИСЛАУ, а управляемое множество решений — самым узким. Причиной этому является расширение множества АЕ-решений при «ослаблении» кванторов в выделяющем предикате, однако в отличие от предыдущего примера замена кванторов « $\forall$ » на кванторы « $\exists$ » производилась не в кванторной матрице  $\mathcal{A}$ , а в кванторном векторе  $\beta$ . Тем не менее, результат оказался аналогичным, и мы проследили последовательное превращение объединенного множества решений в управляемое множество решений ИСЛАУ. ■

**Пример 32 (Решение ИСЛАУ с определенным сочетанием кванторных матрицы и вектора)** Вернемся к ИСЛАУ (1.80), для которой выберем определенное сочетание кванторных матрицы и вектора:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \forall & \exists \\ \forall & \exists \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \forall \\ \exists \end{pmatrix}.$$

В этом случае множество АЕ-решений ИСЛАУ (1.80) будет состоять только из двух точек  $(0, 1)$  и  $(0, -1)$ .

Обсудим полученное множество АЕ-решений ИСЛАУ:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid & (\forall A_{11} \in \mathbf{A}_{11})(\forall A_{21} \in \mathbf{A}_{21})(\forall b_{11} \in \mathbf{b}_{11}) \\ & (\exists A_{12} \in \mathbf{A}_{12})(\exists A_{22} \in \mathbf{A}_{22})(\exists b_{21} \in \mathbf{b}_{21})(Ax = b)\}. \end{aligned}$$

Проанализируем, как формируется данное АЕ-множество решений ИСЛАУ. Тот факт, что  $x_1 = 0$ , позволяет исключить из рассмотрения элементы  $\mathbf{A}_{11}$  и  $\mathbf{A}_{21}$  интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  и элементы  $\mathcal{A}_{11}$  и  $\mathcal{A}_{21}$  кванторной матрицы  $\mathcal{A}$ .

Тогда

- (1) равенство произведения некоторого элемента (точечного или интервального), принадлежащего  $\mathbf{A}_{12}$ , и  $x_2$  должно выполняться для каждого элемента из  $\mathbf{b}_{11}$ ,
- (2) равенство произведения некоторого элемента, принадлежащего  $\mathbf{A}_{22}$ , и  $x_2$  должно выполняться для некоторого элемента из  $\mathbf{b}_{21}$ .

Подставим точки  $(0, 1)$  и  $(0, -1)$  в ИСЛАУ (1.80):

$$\begin{pmatrix} [3, 6] & [-5, 2] \\ [-5, 7] & [-3, -1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-5, 2] \\ [-3, -1] \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} [3, 6] & [-5, 2] \\ [-5, 7] & [-3, -1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 5] \\ [1, 3] \end{pmatrix}.$$

Подчеркнем существенное различие между уравнениями ИСЛАУ, вносимое выбором кванторного вектора  $\beta$ :

$$\begin{array}{llll} \beta_1 = \forall & [-5, 2] \supseteq \mathbf{b}_1 & [-2, 5] \supseteq \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_1 = [-2, 2], \\ \beta_2 = \exists & [-3, -1] \cap \mathbf{b}_2 = -1 & [1, 3] \cap \mathbf{b}_2 = 1, & \mathbf{b}_2 = [-1, 1]. \end{array}$$

Для уравнения  $\mathbf{A}_{12} \cdot x_2 = \mathbf{b}_1$  имеет место включение интервала  $\mathbf{b}_1$  в интервальнозначные результаты подстановки точек  $(0, 1)$  и  $(0, -1)$  в ИСЛАУ (1.80). В то же время для уравнения  $\mathbf{A}_{22} \cdot x_2 = \mathbf{b}_2$  происходит лишь пересечение интервала  $\mathbf{b}_2$  с интервалами-результатами подстановки, результатом которого является одна из границ  $\mathbf{b}_2$ . Поэтому, если мы заменим в выбранном кванторном векторе  $\beta$  квантор « $\exists$ » на « $\forall$ », оставив неизменной при этом кванторную матрицу  $\mathcal{A}$ , то решение ИСЛАУ (1.80) окажется пустым множеством. ■

Итак, мы рассмотрели получение решений ИСЛАУ с различными наборами выделяющих логических предикатов и проиллюстрировали характер изменения решений при модификации постановки задачи. Перейдём к большим важным классам решений ИСЛАУ.

#### 1.4.4 Управляемое множество решений интервальных уравнений

Рассмотрим управляемое множество решений интервальных линейных систем  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (1.76), которое образовано всеми такими векторами  $x \in \mathbb{R}^n$ , что для любого  $b \in \mathbf{b}$  мы можем подобрать матрицу  $A \in \mathbf{A}$ , удовлетворяющую  $Ax = b$ . Это множество решений носит название управляемого потому, что является множеством решений задачи оценивания внутреннего состояния статической системы управления, обсуждавшейся в начале раздела 1.4, для случая, когда все входы системы оказываются управляющими, а все выходы — управляемыми.

В силу теоремы об аналитической характеристизации АЕ-множеств решений интервальных систем линейных уравнений §1.4.2 (1.73)

$$\mathbf{A}^\forall \cdot x - \mathbf{b}^\forall \subseteq \mathbf{b}^\exists - \mathbf{A}^\exists \cdot x,$$

можно дать эквивалентное определение управляемого множества решений в виде

$$\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{A}x \supseteq \mathbf{b})\}, \quad (1.81)$$

если учтём, что для управляемого множества решений  $\mathbf{A}^\forall = 0$  и  $\mathbf{b}^\exists = 0$ . Запись определения управляемого множества в форме (1.81) ясно показывает, что  $\mathbf{A}x$  «поглощает»  $\mathbf{b}$ .

Перечислим некоторые особенности управляемого множества решений ИСЛАУ:

1. Как нам уже известно,

$$\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

и если  $\mathbf{A}$  — неособенная интервальная матрица, то  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ограничено одновременно с  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

2. Нулевой вектор может принадлежать управляемому множеству решений только в том случае, если  $\mathbf{b} = 0$ , т. е.  $\mathbf{b} \subseteq \mathbf{A} \cdot 0 = 0$ .

Рассмотрим, какие существуют способы исследования управляемого множества решений ИСЛАУ. Сначала надо установить его пустоту или непустоту.

**Теорема 1.4.3.** (теорема Лакеева-Носкова [18]) Точка  $x \in \mathbb{R}^n$  принадлежит управляемому множеству решений интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  тогда и только тогда, когда  $x = x' - x''$ , где векторы  $x', x'' \in \mathbb{R}^n$  удовлетворяют системе линейных неравенств

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{A}}x' - \overline{\mathbf{A}}x'' \leq \underline{\mathbf{b}}, \\ -\overline{\mathbf{A}}x' + \underline{\mathbf{A}}x'' \leq -\overline{\mathbf{b}}, \\ x', x'' \geq 0, \end{cases} \quad (1.82)$$

а также условию дополнителности  $(x')^\top x'' = 0$ .

Для оценки непустоты управляющего множества решений  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и определения количественной меры того, насколько устойчивым является совместность получаемого решения ИСЛАУ, можно использовать критерий, основанный на функционале Рачека  $\chi$  (1.23) (§1.1.5).

**Теорема 1.4.4.** Пусть интервальная  $m \times n$ -матрица  $\mathbf{A}$  и интервальный  $m$ -вектор  $\mathbf{b}$  таковы, что для всех  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  выполнены условия

$$(i) \quad \mathbf{b}_i \neq 0,$$

$$(ii) \quad -1 < \max \{ \chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij} \neq 0 \} \leq \chi(\mathbf{b}_i).$$

Если «средняя система» линейных уравнений  $(\text{mid } \mathbf{A})x = \text{mid } \mathbf{b}$  совместна, то её решение принадлежит управляемому множеству решений  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  (которое, соответственно, непусто).

Характеристикой совместности решения ИСЛАУ, представляемого множеством  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , т. е. степени ее разрешимости, может служить близость к нулю величины

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \chi(\mathbf{b}_i) - \max_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ \mathbf{a}_{ij} \neq 0}} \chi(\mathbf{a}_{ij}) \right\} \geq 0. \quad (1.83)$$

Существенным недостатком теоремы о принадлежности решения «средней системы» линейных уравнений управляемому множеству решений  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ является ее недостаточная чувствительность как признака непустоты управляемого множества. Проиллюстрируем это утверждение двумя примерами.

**Пример 33 (Исследование непустоты управляемого множества ИСЛАУ)** Рассмотрим ИСЛАУ вида (1.72), в которой

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & [-1, 1] \\ [1, 3] & [6, 7] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [3, 4] \end{pmatrix}. \quad (1.84)$$

Очевидно, что заданная ИСЛАУ удовлетворяет требованиям  $\mathbf{b}_i \neq 0$  и  $\mathbf{a}_{ij} \neq 0$ , которые сформулированы в условии теоремы 1.4.4.

Вычислим функционалы Рачека (1.23) для всех элементов интервальных матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора  $\mathbf{b}$  ИСЛАУ:

$$\begin{aligned} -1 < \max \left\{ -1, \frac{1}{2} \right\} &\leq \frac{1}{2}, \\ -1 < \max \left\{ \frac{1}{3}, \frac{6}{7} \right\} &\leq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Как мы видим, условие (ii) теоремы о решении «средней системы» для второго неравенства не выполняется. Тем не менее, точка  $(1, \frac{3}{13})$ , являющаяся решением «средней системы»

$$\begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 2 & 6.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.5 \end{pmatrix},$$

принадлежит непустому управляемому множеству решений  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.84), которое показано на Рис. 1.9 заливкой зеленым цветом. Положение точки  $(1, \frac{3}{13})$  на Рис. 1.9 отмечено красным крестиком.

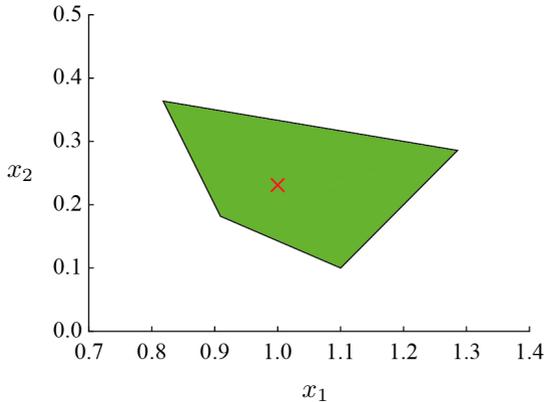


Рис. 1.9. Управляемое множество решений ИСЛАУ (1.84) с выделенным решением «средней системы»  $(\text{mid } \mathbf{A})x = \mathbf{b}$ . Для построения множества  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  была использована функция `EqnCt12D` пакета `IntLinInc2D` для MATLAB [17]

■

**Пример 34 (Теорема о принадлежности решения «средней системы» управляемому множеству решений ИСЛАУ)** Дана ИСЛАУ вида (1.72), в которой

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-1, 0] & [0, 1] \\ [0, 1] & [1, 2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (1.85)$$

И условие (i), и условие (ii) теоремы о принадлежности решения «средней системы»  $(\text{mid } \mathbf{A})x = \mathbf{b}$  управляемому множеству решений для данной ИСЛАУ выполняются:

$$-1 < \max \{0, 0\} \leq 1,$$

$$-1 < \max \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\} \leq 1.$$

Управляемое множество решений  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.85) состоит всего лишь из двух точек  $(0, 1)$  и  $(0, 2)$ .

Найдем решение ее «средней системы»

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Им является точка  $(-0.5, 1.5)$ , которая не принадлежит управляемому множеству решений ИСЛАУ (1.85).

Проверим принадлежность точки  $(-0.5, 1.5)$  управляемому множеству решений  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.85), используя условия, сформулированные в теореме Лакеева-Носкова. Для этого представим вектор  $x = (-0.5, 1.5)^\top$  как разность двух векторов  $x'$  и  $x''$ :

$$x = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.0 \end{pmatrix} = x' - x''.$$

Можно убедиться в том, что

$$x' \geq 0, \quad x'' \geq 0, \quad (x')^\top x'' = (0.0 \quad 1.5) \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.0 \end{pmatrix} = 0.$$

Подставим найденные вектора  $x'$  и  $x''$  в неравенства системы (1.82):

$$\underline{\mathbf{A}}x' - \overline{\mathbf{A}}x'' = \begin{pmatrix} -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix},$$

$$-\overline{\mathbf{A}}x' + \underline{\mathbf{A}}x'' = \begin{pmatrix} 0.0 & -1.0 \\ -1.0 & -2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.0 \\ -3.0 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{A}}x' - \overline{\mathbf{A}}x'' = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{b}},$$

$$-\overline{\mathbf{A}}x' + \underline{\mathbf{A}}x'' = \begin{pmatrix} -2.0 \\ -3.0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} -1.0 \\ -2.0 \end{pmatrix} = -\overline{\mathbf{b}}.$$

Получается, что согласно теореме Лакеева-Носкова точка  $(-0.5, 1.5)$  принадлежит управляемому множеству решений ИСЛАУ (1.85). ■

**Пример 35 (Использование  $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  как «показателя совместности»)** Рассмотрим три ИСЛАУ с одинаковым интервальным вектором правой части  $\mathbf{b}$ :

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [4, 7] \end{pmatrix}, \quad (1.86a)$$

$$\begin{pmatrix} [-2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [4, 7] \end{pmatrix}, \quad (1.86b)$$

$$\begin{pmatrix} [-2, 5] & [1, 2] \\ [-7, 5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [4, 7] \end{pmatrix}. \quad (1.86c)$$

Интервальная матрица  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ (1.86a) отличается от интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ (1.86b) тем, что элемент последней  $\mathbf{A}_{11}$  является нульсодержащим. В матрице  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ (1.86c) нульсодержащими по сравнению с матрицей  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ (1.86a) являются уже два интервальных элемента  $\mathbf{A}_{11}$  и  $\mathbf{A}_{21}$ .

Проверим выполнение условий (i) и (ii) теоремы 1.4.4

$$\text{для ИСЛАУ (1.86a):} \quad -1 < \max \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{2} \right\} \leq \frac{3}{4},$$

$$-1 < \max \left\{ \frac{5}{7}, \frac{6}{7} \right\} \leq \frac{4}{7},$$

$$\text{для ИСЛАУ (1.86b):} \quad -1 < \max \left\{ -\frac{2}{5}, \frac{1}{2} \right\} \leq \frac{3}{4},$$

$$-1 < \max \left\{ \frac{5}{7}, \frac{6}{7} \right\} \leq \frac{4}{7},$$

$$\text{для ИСЛАУ (1.86c):} \quad -1 < \max \left\{ -\frac{2}{5}, \frac{1}{2} \right\} \leq \frac{3}{4},$$

$$-1 < \max \left\{ -\frac{5}{7}, \frac{6}{7} \right\} \leq \frac{4}{7}.$$

Заметим, что условие (ii) не выполняется ни для одной из ИСЛАУ.

Рассчитаем для четырех ИСЛАУ значения величины  $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (1.83),

играющей роль «показателя совместности»:

$$\text{для ИСЛАУ (1.86a): } \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2}, \frac{4}{7} - \frac{6}{7} \right\} = -\frac{2}{7},$$

$$\text{для ИСЛАУ (1.86b): } \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2}, \frac{4}{7} - \frac{6}{7} \right\} = -\frac{2}{7},$$

$$\text{для ИСЛАУ (1.86c): } \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2}, \frac{4}{7} - \frac{6}{7} \right\} = -\frac{2}{7}.$$

Несмотря на то, что значения величины  $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  одинаковы и отрицательны, множества  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.86a)–(1.86c), представленные на Рис. 1.10, непусты и различаются по размеру. Уточним, что данное изображение управляемых множеств решений нужно понимать как многослойное: множества  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.86b) и ИСЛАУ (1.86c) визуальнo «накладываются» друг на друга.

Однако, как мы убедились, для каждой из интервальных систем уравнений (1.86a)–(1.86c) происходит нарушение условия (ii) теоремы о принадлежности решения «средней системы» управляемому множеству решений ИСЛАУ. Значит, если условия (i) и (ii) теоремы 1.4.4 не выполняются, использование величины  $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  для характеристики устойчивости совместности решения ИСЛАУ не приводит к получению достоверной информации о степени ее разрешимости. Например, в случае ИСЛАУ (1.80) нарушены оба условия теоремы 1.4.4, однако ее управляемое множество решений непусто и показано на Рис. 1.7.

Вернемся к ИСЛАУ (1.86a) и заменим в ней элемент  $\mathbf{b}_2$  интервального вектора правой части  $\mathbf{b}$  на интервал  $[7, 8]$ :

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [7, 8] \end{pmatrix}.$$

Для данной ИСЛАУ выполняются оба условия теоремы 1.4.4:

$$-1 < \max \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{2} \right\} \leq \frac{3}{4},$$

$$-1 < \max \left\{ \frac{5}{7}, \frac{6}{7} \right\} \leq \frac{7}{8},$$

и положительно значение «показателя совместности»

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2}, \frac{7}{8} - \frac{6}{7} \right\} = \frac{1}{56}.$$

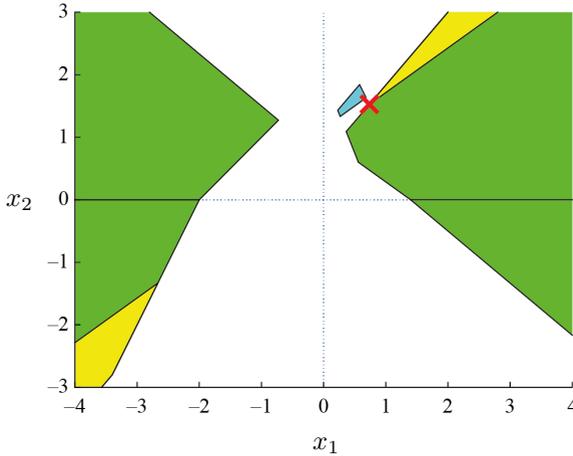


Рис. 1.10. Множества  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  решений ИСЛАУ: (1.86b) (желтый цвет), ИСЛАУ (1.86с) (зеленый цвет), а также ИСЛАУ (1.86а) с интервальным элементом  $\mathbf{b}_2 = [7, 8]$  (голубой цвет). Множество  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.86а) представлено единственной точкой  $(0.737, 1.526)$ , положение которой отмечено красным крестиком. Для построения множеств  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  была использована функция EqnCst12D пакета IntLinInc2D для MATLAB [17]

Непустое управляемое множество решений ИСЛАУ (1.86а) с измененным элементом  $\mathbf{b}_2$  также показано на Рис. 1.10. ■

### 1.4.5 Допусковое множество решений интервальных уравнений

Продолжим рассмотрение множеств решений интервальных уравнений, начатое в §1.4.4.

Возвращаясь к теореме об аналитической характеристизации множеств АЕ-решений ИСЛАУ (1.73), можно утверждать, что эквивалентным определением допускового множества решений (1.75) является

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}x \subseteq \mathbf{b}\}, \quad (1.87)$$

т. е. множество решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  образовано всеми такими векторами  $x \in \mathbb{R}^n$ , что произведение  $\mathbf{A}x$  попадает в  $\mathbf{b}$  для любой  $A \in \mathbf{A}$ . Это

следует из того, что  $\mathbf{A}^{\exists} = 0$  и  $\mathbf{b}^{\forall} = 0$ .

Данное множество АЕ-решений называется допусковым по той причине, что оно является множеством решений задачи оценивания внутреннего состояния статической системы управления, структурная схема которой показана на Рис. 1.6, для случая, когда все входные воздействия являются возмущающими, все выходы — стабилизируемыми; при этом входные и выходные отклики связаны между собой линейной зависимостью.

Допусковое множество решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ высоко востребовано для разнообразных практических приложений и обладает таким важным достоинством, как наибольшая устойчивость к возмущениям среди всех АЕ-множеств решений.

Введение частичного порядка « $\preceq$ » на множестве логических кванторов  $\{\forall, \exists\}$  (1.78) позволило нам убедиться в том, что допусковое множество решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  уже управляемого множества  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и тем более объединенного множества АЕ-решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ. Достаточно часто допусковое множество решений оказывается пустым: произведение  $\mathbf{A}x$  может быть слишком «широким» и потому не «умещаться» в вектор правой части  $\mathbf{b}$ .

Зададимся вопросом о том, каким образом можно описать допусковое множество решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ — установить принадлежность ему некоторой точки  $x$  или же пустоту/непустоту этого множества. В частности, последний вопрос крайне важен для решения интервальной линейной задачи о допусках, обсуждающейся в разделе 1.6, для исследования ее разрешимости.

**Теорема 1.4.5.** (теорема И. А. Шарой о строении допускового множества решений [19]) Точка  $x \in \mathbb{R}^n$  принадлежит допусковому множеству решений интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  тогда и только тогда, когда она является решением системы двусторонних линейных неравенств

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{b}}_i \leq ax \leq \bar{\mathbf{b}}_i, \\ a \in \text{vert } \mathbf{A}_i, \\ i = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (1.88)$$

где вектор-строки  $a$  пробегают всевозможные вершины интервальных строк матрицы  $\mathbf{A}$ . Количество неравенств в этой системе не превосходит суммы числа вершин во всех интервальных векторах  $\text{vert } \mathbf{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и, тем более, не превосходит  $m \cdot 2^n$ .

**Теорема 1.4.6.** (теорема Рона о допусковом множестве решений [20])  
Точка  $x \in \mathbb{R}^n$  принадлежит допусковому множеству решений интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  тогда и только тогда, когда  $x = x' - x''$ , где  $n$ -векторы  $x'$  и  $x''$  удовлетворяют системе линейных неравенств

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{A}}x' - \underline{\mathbf{A}}x'' \leq \overline{\mathbf{b}}, \\ -\underline{\mathbf{A}}x' + \overline{\mathbf{A}}x'' \leq -\underline{\mathbf{b}}, \\ x', x'' \geq 0. \end{cases} \quad (1.89)$$

**Пример 36 (Теоремы И.А. Шарой и Рона о принадлежности точки допусковому множеству решений)** Установим принадлежность точки  $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)^\top$  допусковому множеству решений следующей ИСЛАУ, используя условия теорем И. А. Шарой и Рона:

$$\begin{pmatrix} [-7, -3] & [-3, -1] \\ [2, 4] & [1, 3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 3] \\ [-5, 1] \end{pmatrix}. \quad (1.90)$$

Выпишем точечные матрицы, необходимые для записи системы двусторонних линейных неравенств:

$$\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда система из восьми ( $2 \cdot 2^2 = 8$ ) линейных неравенств (1.88), фигурирующая в теореме И. А. Шарой, примет вид:

$$\begin{cases} -1 \leq -7x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ -1 \leq -3x_1 - x_2 \leq 3, \\ -1 \leq -7x_1 - x_2 \leq 3, \\ -1 \leq -3x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ -5 \leq 2x_1 + x_2 \leq 1, \\ -5 \leq 4x_1 + 3x_2 \leq 1. \\ -5 \leq 2x_1 + 3x_2 \leq 1, \\ -5 \leq 4x_1 + x_2 \leq 1. \end{cases}$$

Подстановка значений  $x_1 = \frac{1}{3}$  и  $x_2 = -\frac{4}{3}$  позволяет установить, что точка  $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$  действительно принадлежит допусковому множеству

решений ИСЛАУ (1.90). Более того, как показывает выполнение третьего и четвертого неравенств системы, эта точка является вершиной допускового множества решений. Множество  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.90) с отмеченной точкой  $(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$  представлено на Рис. 1.11.

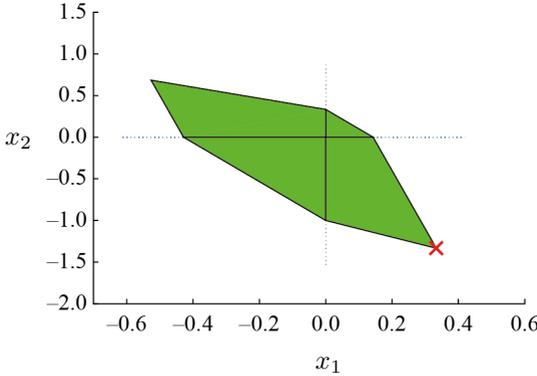


Рис. 1.11. Допусковое множество решений ИСЛАУ (1.90) с выделенной вершиной  $(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$ . Для построения множества  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  была использована функция EqnTol2D пакета IntLinInc2D для MATLAB [17]

Перейдем к выполнению проверки принадлежности выбранной точки допусковому множеству решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ с использованием условий, сформулированных в теореме Рона. Представим вектор  $x = (\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})^\top$  как разность двух векторов  $x', x'' \geq 0$ :

$$x' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad x'' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Подставим найденные вектора  $x'$  и  $x''$  в неравенства системы (1.89):

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{A}}x' - \underline{\mathbf{A}}x'' &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \\ -\underline{\mathbf{A}}x' + \overline{\mathbf{A}}x'' &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -\overline{\mathbf{b}}. \end{aligned}$$

Как показывают результаты вычислений, точка  $(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$  удовлетворяет условиям теоремы Рона (1.89) и, следовательно, принадлежит допусковому множеству решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.90). ■

**«Антагонизм» управляемого и допускового множеств решений ИСЛАУ** Рассмотрим интересную связь между двумя множествами  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , которая выражается в их поочередном существовании для одной и той же ИСЛАУ при выполнении определенных условий, накладываемых на интервальные элементы матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора правой части  $\mathbf{b}$ . Вывод об «антагонистическом сосуществовании» управляемого и допускового множеств решений ИСЛАУ можно сделать, например, на основе результатов сравнения систем линейных неравенств (1.82) и (1.89), которые фигурируют в теоремах Лакеева-Носкова и Рона (см. стр. 91 и стр. 99, соответственно):

$$\begin{aligned} x \in \Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) & \quad x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \\ \underline{\mathbf{A}}x' - \overline{\mathbf{A}}x'' \leq \underline{\mathbf{b}} & \quad \underline{\mathbf{A}}x' - \overline{\mathbf{A}}x'' \geq \underline{\mathbf{b}} \\ \overline{\mathbf{A}}x' - \underline{\mathbf{A}}x'' \geq \overline{\mathbf{b}} & \quad \overline{\mathbf{A}}x' - \underline{\mathbf{A}}x'' \leq \overline{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

В фокусе нашего внимания будут находиться критерии пустоты (или непустоты) множеств  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , основанные на функционале Рачека. Формулировка условий, выполнение которых необходимо для непустоты управляемого множества решений ИСЛАУ и принадлежности ему решения «средней системы»  $(\text{mid } \mathbf{A})x = \text{mid } \mathbf{b}$ , приведена на стр. 92. Для допускового множества решений ИСЛАУ также существуют условия его пустоты, основанные на сравнении «относительной узости» элементов интервальных матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора  $\mathbf{b}$ .

**Теорема 1.4.7.** Пусть в системе уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  интервальная  $m \times n$ -матрица  $\mathbf{A}$  и интервальный  $m$ -вектор  $\mathbf{b}$  таковы, что для всех  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  выполнены следующие условия

$$(i) \quad 0 \notin \mathbf{b}_i,$$

$$(ii) \quad \max \{ \chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij} \neq 0 \} < \chi(\mathbf{b}_i).$$

Тогда допусковое множество  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  пусто.

Сравним между собой условия (i) и (ii) теорем 1.4.4 и 1.4.7. Верхние строки в нижеприведенной записи относятся к критерию непустоты управляемого множества решений, а нижние — соответствуют критерию пустоты допускового множества решений ИСЛАУ.

$$\begin{aligned} \text{условие (i)} \quad \mathbf{b}_i & \neq 0, \\ & 0 \notin \mathbf{b}_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{условие (ii)} \quad -1 & < \max \{ \chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij} \neq 0 \} \leq \chi(\mathbf{b}_i), \\ & \max \{ \chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij} \neq 0 \} < \chi(\mathbf{b}_i), \end{aligned}$$

Оказывается, что условие непустоты множества  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  «отражает» условие пустоты множества  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Обсуждению устойчивости обнаруженной антагонистической связи между двумя АЕ-множествами решений ИСЛАУ и вкладе выполнения каждого из условий (i) и (ii) теорем 1.4.4 и 1.4.7 в ее поддержание посвящен следующий

**Пример 37 (Антагонистичность управляемого и допускового множеств решений)** Вернемся к рассмотрению ИСЛАУ (1.86а) с измененным элементом  $\mathbf{b}_2$ :

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [7, 8] \end{pmatrix}. \quad (1.91)$$

Как нам уже известно (см. стр. 96), элементы интервальных матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора  $\mathbf{b}$  ИСЛАУ (1.91) удовлетворяют обоим условиям теоремы 1.4.4, причем имеет место  $0 \notin \mathbf{b}_1$ ,  $0 \notin \mathbf{b}_2$ . Управляемое множество решений  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  данной ИСЛАУ показано на Рис. 1.10, а допусковое множество  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  является пустым.

Теперь рассмотрим ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [-3, 7] & [-1, 3] \\ [-1, 4] & [-2, 1] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 3] \\ [-5, 1] \end{pmatrix}. \quad (1.92)$$

Можно убедиться в том, что для интервалов, являющихся элементами матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора правой части  $\mathbf{b}$  ИСЛАУ (1.92), выполняются условия (ii) теорем 1.4.4 и 1.4.7

$$\begin{aligned} -1 < \max \left\{ -\frac{3}{7}, -\frac{1}{3} \right\} &\leq -\frac{1}{3}, \\ -1 < \max \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right\} &\leq -\frac{1}{5}, \end{aligned}$$

однако не выполняется условие  $0 \notin \mathbf{b}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Как результат, управляемое и допусковое множества решений ИСЛАУ (1.92), представленные на Рис. 1.12(а), одновременно непусты.

Почему это происходит? Для ответа на данный вопрос выберем некоторую произвольную точку (0.3, 1.4) из управляемого множества решений ИСЛАУ (1.91), «антагонизм» множеств  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

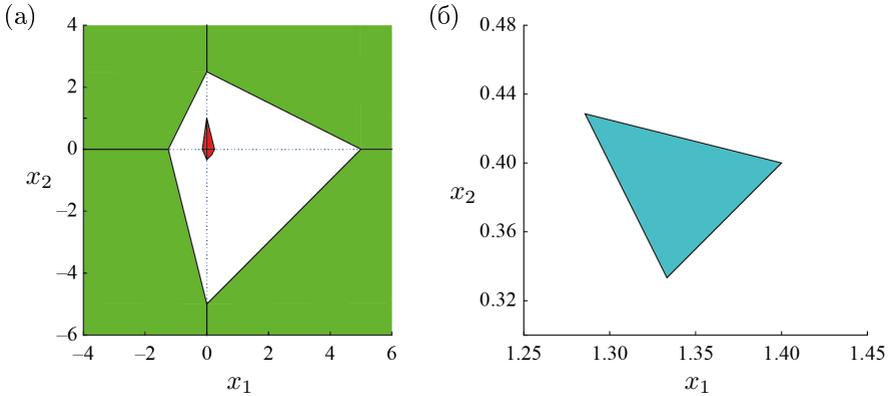


Рис. 1.12. Управляемое (зеленый цвет) и допустовое (красный цвет) множества решений ИСЛАУ (1.92) (а) и управляемое множество решений ИСЛАУ (1.93) (б). Данные множества АЕ-решений были построены с использованием функции `EqnTo12D` пакета `IntLinInc2D` для `MATLAB` [17]

которой мы наблюдаем, и подставим ее в ИСЛАУ:

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} [2.0, 4.3] \\ [6.3, 8.3] \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [7, 8] \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

$$\chi([2.0, 4.3]) = 0.465 < 0.750 = \chi([3, 4]),$$

$$\chi([6.3, 8.3]) = 0.759 < 0.875 = \chi([7, 8]).$$

Можно заметить, что если  $\mathbf{Ax} \supseteq \mathbf{b}$ , то  $\chi((\mathbf{Ax})_i) < \chi(\mathbf{b}_i)$ , причем  $\chi(\mathbf{b}_i) > 0$ . Напротив, если  $\mathbf{Ax} \subseteq \mathbf{b}$ , то для существования непустого допустового множества решений должно иметь место  $\chi((\mathbf{Ax})_i) > \chi(\mathbf{b}_i)$ .

Теперь выберем некоторую точку из допустового множества решений ИСЛАУ (1.92) — например, точку (0.1, 0.2). В таком случае

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} [-0.5, 1.3] \\ [-0.5, 0.6] \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} [-1, 3] \\ [-5, 1] \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

$$\chi([-0.5, 1.3]) = -0.385 < -0.333 = \chi([-1, 3]),$$

$$\chi([-0.5, 0.6]) = -0.833 < -0.200 = \chi([-5, 1]).$$

Мы получили, что  $\mathbf{Ax} \subseteq \mathbf{b}$ , однако  $\chi((\mathbf{Ax})_i) < \chi(\mathbf{b}_i)$ . Нарушение установленной нами закономерности между включением произведения  $\mathbf{Ax}$

в вектор правой части  $\mathbf{b}$  ИСЛАУ и ожидаемым соотношением между значениями «относительных ширин»  $\chi$  составляющих эти вектор-столбцы интервалов происходит именно потому, что  $0 \in \mathbf{b}_1$ ,  $0 \in \mathbf{b}_2$ .

Перейдем к рассмотрению следующей ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & [-1, 1] \\ [1, 3] & [4, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [1, 3] \\ [3, 4] \end{pmatrix}. \quad (1.93)$$

Компоненты вектора  $\mathbf{b}$  данной ИСЛАУ уже не содержат нуль, однако для нее оказывается нарушенным условие (ii) теорем 1.4.4 и 1.4.7:

$$\begin{aligned} -1 < \max \left\{ -1, \frac{1}{2} \right\} &\leq \frac{1}{3}, \\ -1 < \max \left\{ \frac{1}{3}, \frac{4}{7} \right\} &\leq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Тем не менее, допусковое множество решений ИСЛАУ (1.93) пусто, а её непустое множество  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  представлено на Рис. 1.12(б). ■

## 1.4.6 Техника распознающих функционалов

Нахождение решений систем интервальных уравнений является нетривиальным процессом с точки зрения вычислительной сложности. Например, существуют подходы на основе решения систем неравенств. Можно показать, что использование таких подходов будет эффективным только в случае малых размерностей интервальных систем линейных уравнений.

В работах С.П.Шарого [14], [16] и [41] был предложен иной подход к определению пустоты/непустоты множества  $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Он основан на использовании *распознающих функционалов*, которые позволяют «распознать» принадлежность некоторой точки  $x$  определенному АЕ-множеству решений ИСЛАУ по знаку своих значений. В рамках этого подхода исследование разрешимости ИСЛАУ сводится к решению задачи безусловной максимизации (на всем пространстве  $\mathbb{R}^n$ ) распознающего функционала. Такие известные распознающие функционалы, как Uni, Str или Tol, рассмотренные нами далее, связаны с соответствующими множествами решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (1.74),  $\Xi_{str}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (1.75) и  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (1.76). Если найденное значение максимума распознающего функционала больше либо равно нулю, то ИСЛАУ разрешима, а аргументы распознающего функционала, на которых распознающий

функционал принимает неотрицательные значения, лежат в соответствующем множестве АЕ-решений ИСЛАУ. Если же максимум распознающего функционала отрицателен, то ИСЛАУ неразрешима.

Приведем ряд теорем и явные выражения для различных распознающих функционалов.

**Теорема 1.4.8.** Пусть  $\mathbf{A}$  — интервальная  $m \times n$ -матрица,  $\mathbf{b}$  — интервальный вектор, и выражением

$$\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left\langle \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right\rangle \right\} \quad (1.94)$$

задается функционал  $\text{Uni} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , такой что принадлежность точки  $x$  **объединенному множеству решений**  $\Xi_{\text{uni}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  равносильна неотрицательности в  $x$  функционала  $\text{Uni}$ ,

$$x \in \Xi_{\text{uni}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0,$$

т. е. множество решений  $\Xi_{\text{uni}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  является лебеговым множеством  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$  функционала  $\text{Uni}$ .

Другой функционал, также позволяющий установить принадлежность некоторой точки  $x$  объединенному множеству решений ИСЛАУ, был предложен авторами работы [42]:

$$\text{Uss}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^n (\text{rad } \mathbf{a}_{ij}) |x_j| - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n (\text{mid } \mathbf{a}_{ij}) x_j \right| \right\}.$$

При любых  $x \in \mathbb{R}^n$  выполняется

$$\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq \text{Uss}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}).$$

Функционалы  $\text{Uss}$  и  $\text{Uni}$  различаются тем, что последний лучше учитывает правую часть ИСЛАУ и всегда ограничен сверху. В то же время достоинством распознающего функционала  $\text{Uss}$  является то, что его выражение является более «простым», поскольку в нем не используется довольно сложная операция взятия мигнитуды интервала (1.21).

Принадлежность некоторой точки  $x$  **управляемому множеству решений** ИСЛАУ распознает функционал  $\text{Ctr}$ :

$$\text{Ctr}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \text{rad } \mathbf{a}_{ij} - \left| \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n x_j \text{mid } \mathbf{a}_{ij} \right| \right\}. \quad (1.95)$$

Для функционала  $\text{Ctr}$  справедливо

$$x \in \Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff \text{Ctr}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0,$$

и управляемое множество решений  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ является лебеговым множеством  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Ctr}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$  функционала  $\text{Ctr}$ .

Распознающий функционал  $\text{Tol}$  позволяет устанавливать принадлежность точек **допусковому множеству решений**  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Он играет важную роль в исследовании разрешимости линейной задачи о допусках, решение которой подробно обсуждается в разделе 1.6.

**Теорема 1.4.9.** Пусть даны интервальная  $m \times n$ -матрица  $\mathbf{A}$  и интервальный вектор правой части  $\mathbf{b}$ , а выражением

$$\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \quad (1.96)$$

определяется функционал  $\text{Tol} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{IR}^{m \times n} \times \mathbb{IR}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда принадлежность  $x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  равносильна  $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$ , т. е. допусковое множество решений интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  есть множество уровня

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$$

функционала  $\text{Tol}$ .

Как и функционал  $\text{Uni}$ , распознающий функционал  $\text{Tol}$  достигает конечного максимума на всем пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

**Пример 38 (Проверка принадлежности точки основным множествам АЕ-решений)** Установим, принадлежит ли произвольно выбранная точка  $(x_1, x_2) = (0.5, 1)$  объединенному, управляемому и допусковому множествам АЕ-решений ранее рассмотренной ИСЛАУ (1.80):

$$\begin{pmatrix} [3, 6] & [-5, 2] \\ [-5, 7] & [-3, -1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}.$$

Множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ,  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  данной ИСЛАУ изображены на Рис. 1.7(a), который приведен на стр. 87. Принадлежность точки  $(0.5, 1)$  каждому из множеств АЕ-решений можно определить путем визуальной оценки ее положения относительно выделенных множеств, однако мы воспользуемся в этих целях распознающими функционалами  $Uni$  (1.94),  $Str$  (1.95) и  $Tol$  (1.96).

Распознающий функционал объединенного множества имеет вид

$$Uni(x) = \min \{ 2 - \langle 0 - ([3, 6] \cdot x_1 + [-5, 2] \cdot x_2) \rangle, \\ 1 - \langle 0 - ([-5, 7] \cdot x_1 + [-3, -1] \cdot x_2) \rangle \},$$

и его трехмерный и контурный графики представлены на Рис. 1.13.

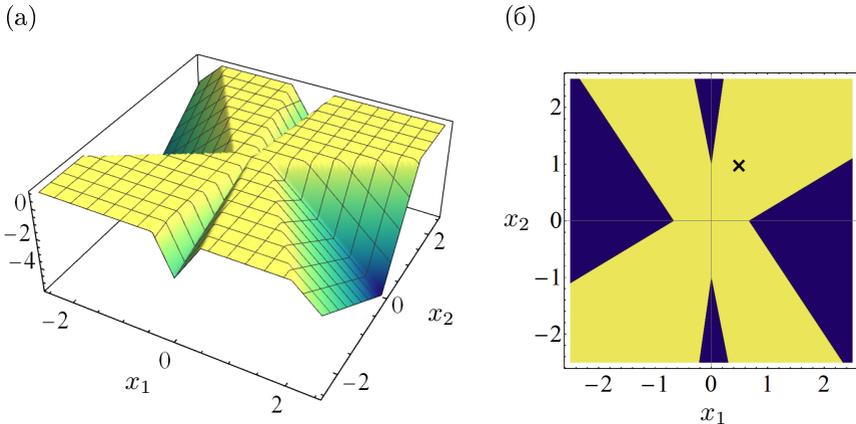


Рис. 1.13. Трехмерный (а) и контурный (б) графики распознающего функционала  $Uni(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ , построенного для ИСЛАУ (1.80). На контурном графике положение точки  $(0.5, 1)$  показано черным крестиком, области  $Uni < 0$  и  $Uni \geq 0$  выделены синим и желтым цветами, соответственно

Вместо единичного глобального максимума распознающего функционала  $Uni$  на Рис. 1.13 мы видим плато — целую область таких значений  $x_1$  и  $x_2$ , при которых  $Uni \geq 0$ . Форма этой области совпадает с формой объединенного множества решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ, выделенного на Рис. 1.7 заливкой зеленым цветом. Поскольку

$$Uni(0.5, 1) = 1 > 0,$$

то точка  $(0.5, 1)$  принадлежит множеству  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.80).

Распознающий функционал управляемого множества есть

$$\text{Ctr}(x) = \min \{ (|x_1| \cdot 1.5 + |x_2| \cdot 3.5) - |[-2, 2] - (x_1 \cdot 4.5 - x_2 \cdot 1.5)|, \\ (|x_1| \cdot 6.0 + |x_2| \cdot 1.0) - |[-1, 1] - (x_1 \cdot 1.0 - x_2 \cdot 2.0)| \}.$$

Путем подстановки значений  $x_1 = 0.5$  и  $x_2 = 1$  легко убедиться, что

$$\text{Ctr}(0.5, 1) = 1.5 > 0,$$

а значит, точка  $(0.5, 1)$  принадлежит управляемому множеству решений  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.80). Трехмерный и контурный графики распознающего функционала  $\text{Ctr}$  представлены на Рис. 1.14.

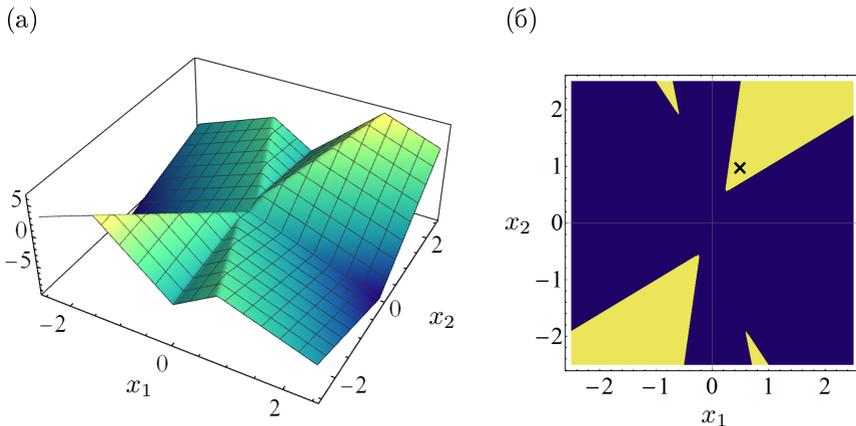


Рис. 1.14. Трехмерный (а) и контурный (б) графики распознающего функционала  $\text{Ctr}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ , построенного для ИСЛАУ (1.80). На контурном графике положение точки  $(0.5, 1)$  показано черным крестиком, области  $\text{Ctr} < 0$  и  $\text{Ctr} \geq 0$  выделены синим и желтым цветами, соответственно

Нашей последней задачей является определение принадлежности точки  $(0.5, 1)$  самому узкому из множеств АЕ-решений ИСЛАУ (1.80), каким является допусковое множество  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Визуальная оценка Рис. 1.7 позволяет утверждать, что точка  $(0.5, 1)$  допусковому множеству решений ИСЛАУ (1.80) не принадлежит. Подтвердим этот факт.

Распознающий функционал допускового множества имеет вид

$$\text{Tol} = \min \{2 - |0 - ([3, 6] \cdot x_1 + [-5, 2] \cdot x_2)|, \\ 1 - |0 - ([-5, 7] \cdot x_1 + [-3, -1] \cdot x_2)|\},$$

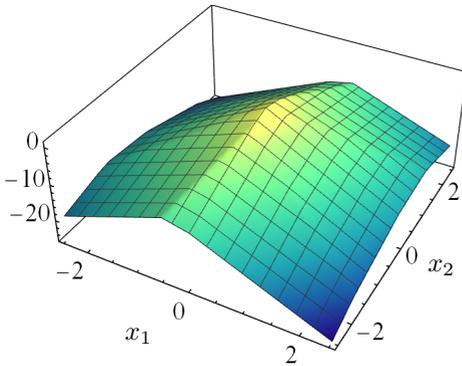
и его трехмерный и контурный графики показаны на Рис. 1.15.

Так как

$$\text{Tol}(0.5, 1) = -4.5,$$

то точка  $(0.5, 1)$  действительно не принадлежит допусковому множеству решений ИСЛАУ (1.80).

(а)



(б)

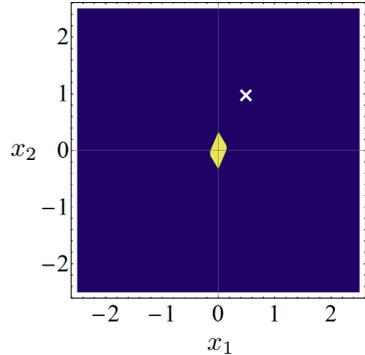


Рис. 1.15. Трехмерный (а) и контурный (б) графики распознающего функционала  $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ , построенного для ИСЛАУ (1.80). На контурном графике положение точки  $(0.5, 1)$  показано белым крестиком, области  $\text{Tol} < 0$  и  $\text{Tol} \geq 0$  выделены синим и желтым цветами, соответственно.

Таким образом, использование функционалов  $\text{Uni}$  (1.94),  $\text{Ctr}$  (1.95) и  $\text{Tol}$  (1.96) позволило успешно распознать истинную принадлежность точки  $(0.5, 1)$  множествам  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.80) и непринадлежность этой точки множеству  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Следует заметить, что задача, которая имеет большее значение в интервальном анализе и в связи с этим решается значительно чаще — это не распознавание принадлежности некоторой определенной точки тому или иному множеству АЕ-решений, а проверка пустоты или непустоты конкретных множеств решений ИСЛАУ. В этих случаях, как уже

обсуждалось ранее, требуется нахождение глобального максимума распознающего функционала, и может оказаться полезным представление его поверхности в трехмерном пространстве. Например, несмотря на непустоту объединенного, управляемого и допускового множеств решений ИСЛАУ (1.80), мы убедились в том, что распознающий функционал  $U_{in}$  не имеет единственного глобального максимума, функционал  $C_{sl}$  достигает его при бесконечно больших  $x$ , и только  $Tol$  имеет конечный глобальный максимум:  $Tol(0, 0) = 1$ . ■

## 1.5 Внешнее оценивание объединённого множества решений

В конце подраздела 1.4.2 обсуждалось, что решением интервальной системы линейных уравнений  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  (1.72), которая характеризуется кванторной матрицей  $\mathcal{A}$  и вектором  $\beta$  тех же размеров, что  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно, может служить набор внешней и внутренних интервальных оценок множества решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Что такое *внутренняя* и *внешняя* интервальные оценки множества АЕ-решений ИСЛАУ? Это значит, что в первом случае мы ищем некое *подмножество*, а во втором — *объемлющее множество* для оценивания множества  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Поскольку самыми простыми оценивающими множествами являются интервальные векторы, то задачи внешнего и внутреннего интервального оценивания представляют собой, по сути, *нахождение брусов*, которые либо содержатся в множестве  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (внутренняя оценка), либо содержат его (внешняя оценка).

Внешнее оценивание множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (1.74) является одной из старейших задач интервального анализа и имеет высокую практическую важность. Она является NP-трудной так же, как и распознавание пустоты этого множества. Для нахождения внешней оценки объединенного множества решений ИСЛАУ существует широкое разнообразие численных методов, различающихся своей трудоемкостью:

1. — *Точные (оптимальные) методы* нацелены на точное решение задачи внешнего оценивания или её решение с гарантированной погрешностью. При этом рост трудоемкости (вычислительная сложность) в зависимости от размерности решаемой задачи этих методов может расти экспоненциально.
2. — *Методы общего назначения* не претендуют на оптимальность. В силу этого, их можно строить так, что они будут иметь полиномиаль-

ную трудоемкость.

В данном разделе мы рассмотрим несколько итерационных численных методов для внешнего оценивания множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ из категории *методов общего назначения*.

### 1.5.1 Предобуславливание

К процедуре предобуславливания прибегают для того, чтобы изменить свойства интервальной матрицы ИСЛАУ (1.72) и при этом каким-то образом «улучшить» результат работы численного метода по внешнему оцениванию ее объединенного множества решений.

Под *предобуславливанием* обычно понимают одновременное домножение слева обеих частей интервальной  $n \times n$ -системы линейных уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  на точечную матрицу  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :

$$(\Lambda \mathbf{A})x = \Lambda \mathbf{b}, \quad (1.97)$$

Входящая в предобусловленную ИСЛАУ (1.97) матрица  $\Lambda$  называется *предобуславливающей матрицей* или *предобуславливателем*.

Поскольку в общем случае имеет место

$$\Lambda \mathbf{A} \supseteq \{\Lambda A \mid A \in \mathbf{A}\}, \quad \Lambda \mathbf{b} \supseteq \{\Lambda b \mid b \in \mathbf{b}\},$$

то объединенное множество решений предобусловленной интервальной линейной системы (1.97) включает в себя соответствующее множество решений исходной ИСЛАУ (1.72):

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi_{uni}(\Lambda \mathbf{A}, \Lambda \mathbf{b}).$$

Как выбрать предобуславливающую матрицу? В рамках некоторых интервальных методов, к которым относится, например, формально-алгебраический подход (см. стр. 126), на предобуславливатель косвенным образом накладываются определенные ограничения, не позволяющие выбирать его произвольным.

В тех случаях, когда ограничений на предобуславливатель нет, достаточно часто в качестве матрицы  $\Lambda$  выбирают обратную к средней матрице ИСЛАУ, т. е. выполняется «предобуславливание обратной средней»:

$$\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}.$$

При таком выборе предобуславливателя средней матрицей  $\text{mid}(LA)$  системы уравнений (1.97) является единичная матрица  $I$ , а в матрице  $I - LA$  все элементы являются уравновешенными интервалами.

Предобуславливание обратной средней имеет несколько неочевидных преимуществ:

- Если средняя матрица предобусловленной ИСЛАУ (1.97) является диагональной, то с помощью процедуры Хансена-Рона-Блика (см. стр. 120) можно очень быстро получить оптимальную внешнюю оценку объединенного множества решений.
- Размеры объединенных множеств решений исходной и предобусловленной ИСЛАУ отличаются на величину второго порядка малости относительно ширины матрицы  $A$  и правой части  $b$ :

$$\text{dist}(\square \Xi(A, b), \square \Xi(LA, Lb)) \leq C (\max \{\|\text{wid } A\|, \|\text{wid } b\|\})^2,$$

где  $L = (\text{mid } A)^{-1}$ ,  $C$  — некоторая константа, зависящая от выбора расстояния  $\text{dist}$ , а также векторной и матричной норм в правой части неравенства.

Данный результат носит название *леммы Миллера*.

- Предобуславливание обратной средней позволяет увеличить точность интервального численного метода. Например, после выполнения данной процедуры метод Гаусса (см. стр. 116) и метод Кравчика (см. стр. 129), являющиеся методами первого порядка точности, приобретают уже второй порядок точности.

Если нам известна некоторая информация об интервальной матрице ИСЛАУ или алгоритме используемого численного метода, которая влияет на выбор нами предобуславливателя, то мы можем отказаться от  $L = (\text{mid } A)^{-1}$  в пользу другого, более подходящего варианта. В дальнейшем при нахождении внешних оценок множества  $\Xi_{uni}(A, b)$  ИСЛАУ с помощью различных интервальных методов мы будем пользоваться именно предобуславливанием обратной средней.

## 1.5.2 Предварительное внешнее оценивание

Быстрое нахождение приближительной внешней оценки объединенного множества решений ИСЛАУ оказывается полезным в том случае,

когда нам необходимо задать некоторое начальное приближение, которое будет использовано для его дальнейшего уточнения. Кроме того, иногда простого предварительного внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ оказывается вполне достаточно для получения представления о решении поставленной интервальной задачи.

В настоящем подразделе мы познакомимся с двумя способами предварительного внешнего оценивания множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ:

**Предложение.** Пусть матрицы  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  таковы, что величина  $\eta := \|I - L\mathbf{A}\|_\infty$  удовлетворяет  $\eta < 1$  для подчинённой чебышёвской матричной нормы  $\|\cdot\|_\infty$ . Тогда объединённое множество решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  содержится в бресе  $\mathbf{x} = ([-\theta, \theta], \dots, [-\theta, \theta])^\top \in \mathbb{IR}^n$ , таком что

$$\theta = \frac{\|L\mathbf{b}\|_\infty}{1 - \eta}. \quad (1.98)$$

**Предложение.** (внешняя оценка Х. Бекка)

Пусть в интервальной линейной системе уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  матрица  $\mathbf{A}$  сильно неособенна и  $\hat{x}$  — решение её «средней системы»

$$(\text{mid } \mathbf{A})x = \text{mid } \mathbf{b}.$$

Тогда объединённое множество решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  заключено в интервальном векторе  $[\hat{x} - \Delta, \hat{x} + \Delta]$ , где

$$\Delta = (I - |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A})^{-1} |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| (\text{rad } \mathbf{A}|\hat{x}| + \text{rad } \mathbf{b}). \quad (1.99)$$

**Пример 39 (Внешняя оценка объединенного множества решений ИСЛАУ, метод Бекка)** Рассмотрим ИСЛАУ (1.80)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [3, 6] & [-5, 2] \\ [-5, 7] & [-3, -1] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}$$

и найдем внешнюю оценку для ее объединенного множества решений.

В качества преобуславливающей матрицы  $L$  возьмем обратную к средней матрице интервальной системы уравнений:

$$L = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 4.5 & -1.5 \\ 1.0 & -2.0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$L\mathbf{A} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} [-9, 39] & [-17, 17] \\ [-57, 57] & [-1, 31] \end{pmatrix}, \quad L\mathbf{b} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} [-11, 11] \\ [-13, 13] \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\eta := \|I - L\mathbf{A}\|_\infty = \frac{73}{15}, \quad \|L\mathbf{b}\|_\infty = \frac{13}{15}.$$

Поскольку  $\eta > 1$ , то мы не можем найти предварительную внешнюю оценку объединенного множества решений ИСЛАУ (1.80). Этот результат согласуется с изображением объединенного множества решений данной интервальной системы, которое представлено на Рис. 1.7. Форма множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.80) является незамкнутой, и потому выполнить внешнее оценивание оказывается невозможным.

Выберем ИСЛАУ с другими матрицей  $\mathbf{A}$  и вектором  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-6, -5] & [2, 3] \\ [5, 7] & [3, 10] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-3, 1] \\ [-1, 5] \end{pmatrix}. \quad (1.100)$$

Повторим все вычисления:

$$L = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} -5.5 & 2.5 \\ 6.0 & 6.5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{2}{203} \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}.$$

В таком случае

$$L\mathbf{A} = \frac{2}{203} \begin{pmatrix} [90, 113] & [-24, 24] \\ [-17, 17] & [57, 146] \end{pmatrix}, \quad L\mathbf{b} = \frac{2}{203} \begin{pmatrix} [-18, 64] \\ [-47, 67] \end{pmatrix}.$$

Окончательно имеем

$$\eta := \|I - L\mathbf{A}\|_\infty = \frac{123}{203}, \quad \|L\mathbf{b}\|_\infty = \frac{134}{203}$$

Поскольку  $\eta < 1$ , то при использовании выражения (1.98) можно получить внешнюю оценку множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.100):

$$\theta = \frac{\|L\mathbf{b}\|_\infty}{1 - \eta} = \frac{67}{40},$$

и, значит, интервальным вектором-брусом, содержащим объединенное множество решений ИСЛАУ (1.100), является

$$x = \begin{pmatrix} [-1.675, 1.675] \\ [-1.675, 1.675] \end{pmatrix}.$$

Теперь для предварительного внешнего оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ (1.100) воспользуемся способом Х. Бекка. В первую очередь нам необходимо убедиться в том, что интервальная матрица  $\mathbf{A}$  является сильно неособенной:

$$\det ((\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}) = [0.458, 1.641] \not\approx 0,$$

следовательно, матрица  $\mathbf{A}$  действительно сильно неособенна.

Далее найдем решение «средней системы»  $(\text{mid } \mathbf{A})x = \text{mid } \mathbf{b}$ :

$$\hat{x} = \frac{2}{203} \begin{pmatrix} 23 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Определим величину  $\Delta$  по выражению (1.99):

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{108}{203} & -\frac{48}{203} \\ -\frac{34}{203} & \frac{114}{203} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} -\frac{26}{203} & \frac{10}{203} \\ \frac{24}{203} & \frac{22}{203} \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{439}{203} \\ \frac{25}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.887 \\ 1.409 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\hat{x} - \Delta = \begin{pmatrix} -0.660 \\ -1.310 \end{pmatrix}, \quad \hat{x} + \Delta = \begin{pmatrix} 1.113 \\ 1.507 \end{pmatrix},$$

то получается, что предварительную внешнюю оценку объединенного множества решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.100) содержит брус

$$x = \begin{pmatrix} [-0.660, 1.113] \\ [-1.310, 1.507] \end{pmatrix}.$$

О том, насколько грубыми являются полученные внешние оценки множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.100), можно судить по Рис. 1.16. Как видно на данном рисунке, способ Х. Бекка позволил получить более узкую внешнюю интервальную оценку объединенного множества решений ИСЛАУ (1.100), чем способ, основанный на использовании подчиненной чебышевской матричной нормы. Однако стоит повторно заметить, что способ Х. Бекка может использоваться для внешнего оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  только в том случае, если матрица  $\mathbf{A}$  является сильно неособенной. ■

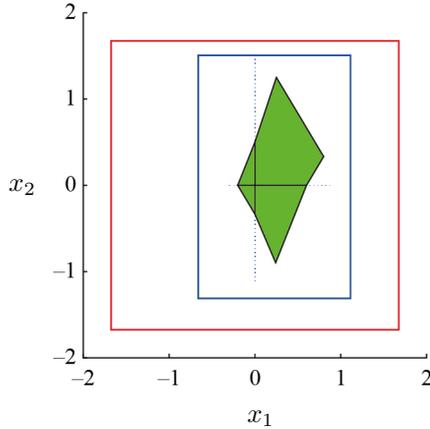


Рис. 1.16. Множество  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.100), а также его внешние оценки, полученные способом, основанным на использовании подчиненной чебышевской матричной нормы (1.98) (красная линия), и способом Х. Бекка (1.99) (синяя линия). Для построения объединенного множества решений ИСЛАУ была использована функция `EqnWeak2D` пакета `IntLinInc2D` для MATLAB [17]

### 1.5.3 Интервальный итерационный метод Гаусса-Зейделя

Метод Гаусса и его модификации являются мощными инструментами линейной алгебры. Для системы линейных уравнений вида  $Ax = b$  с  $n \times n$ -матрицей  $A = (a_{ij})$  и  $n$ -вектором  $b = (b_i)$  выполнение метода Гаусса состоит из двух этапов — прямого хода и обратного хода.

Если мы заменим в алгоритме метода Гаусса все точечные величины и арифметические операции их интервальными аналогами, то придем к *интервальному методу Гаусса*. В силу основной теоремы интервальной арифметики (см. стр. 24) брус  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ , полученный в результате применения интервального метода Гаусса к ИСЛАУ  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  с неособенной матрицей  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ , содержит все возможные решения точечных систем  $Ax = b$  с  $A \in \mathbf{A}$ ,  $b \in \mathbf{b}$  и является внешней оценкой множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Стоит заметить, что для успешной работы данного численного метода диагональные элементы  $a_{jj}$ , возникающие на прямом и обратном ходах, не должны содержать нуль, т. е.  $0 \notin a_{jj}$ .

Интервальный аналог метода Гаусса достаточно редко используется для внешнего оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ. Одной из причин этому является тот факт, что в соответствии с (1.59) интервальный метод Гаусса имеет первый порядок точности:

$$\text{dist}(\square\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}), IGA(\mathbf{A}, \mathbf{b})) \leq C \max\{\|\text{wid } \mathbf{A}\|, \|\text{wid } \mathbf{b}\|\},$$

где  $IGA(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  — результат применения интервального метода Гаусса к системе  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , а  $C$  — некоторая положительная константа, зависящая от выбора матричных и векторных норм, а также расстояния  $\text{dist}$ . Поэтому при достаточно широких интервальных компонентах матрицы и вектора ИСЛАУ качество внешнего оценивания ее объединенного множества решений с помощью интервального метода Гаусса будет невысоким. Вторая причина отказа от использования интервального метода Гаусса заключается в том, что он позволяет получить далеко не оптимальный результат внешнего оценивания множеств  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  таких ИСЛАУ, вся интервальность которых сосредоточена в векторе правой части  $\mathbf{b}$ , или ИСЛАУ с сильно неособенными матрицами  $\mathbf{A}$ .

Ввиду указанных недостатков интервального метода Гаусса, который является прямым методом решения ИСЛАУ, в интервальном анализе предпочтение отдается итерационным методам, одним из которых является *интервальный метод Гаусса-Зейделя*, псевдокод которого представлен в Табл. 1.2, стр. 119. Обычно его применяют после выполнения предварительного обуславливания.

Обсудим некоторые вопросы, касающиеся практической реализации интервального метода Гаусса-Зейделя:

- ◇ Почему в процессе итерирования оказывается, что внешней оценкой объединенного множества решений ИСЛАУ вида  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  является пустое множество? Такой результат свидетельствует о том, что выбранное начальное приближение вообще не пересекает оцениваемое множество решений. Чтобы избежать появления этой ошибки, в качестве начального приближения можно выбирать предварительную внешнюю оценку объединенного множества решений ИСЛАУ (см. стр. 112). Такая внешняя оценка определяется или способом, основанном на использовании подчиненной чебышевской нормы (1.98), или способом Х. Бекка (1.99).
- ◇ Позволяет ли интервальный метод Гаусса-Зейделя «сузить» брус  $\mathbf{X}$ , выбранный в качестве начального приближения? От-

вет на этот вопрос зависит от того, имеет ли матрица  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ диагональное преобладание. Если матрица  $\mathbf{A}$  является

- $H$ -матрицей (§1.2.8), то результатом работы интервального метода Гаусса-Зейделя с любым начальным вектором  $\mathbf{X}$ , который обладает достаточно большой чебышёвской нормой  $\|\mathbf{X}\|_\infty$ , окажется брус более узкий, чем  $\mathbf{X}$ . В ином случае улучшение вектора  $\mathbf{X}$  может и не произойти.
- $M$ -матрицей (§1.2.8), то с помощью интервального метода Гаусса-Зейделя будет получена оптимальная внешняя оценка множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ при любом выборе такого начального приближения, которое содержит данное множество.

**Пример 40 (Внешняя оценка объединенного множества решений ИСЛАУ, интервальный метод Гаусса-Зейделя)** Рассмотрим ИСЛАУ (1.72), в которой

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [4, 5] & [-2, -1] \\ [2, 3] & [6, 7] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [4, 5] \\ [7, 8] \end{pmatrix}. \quad (1.101)$$

Найдем внешнюю оценку для множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.101), используя интервальный метод Гаусса-Зейделя.

В качестве начального приближения  $\mathbf{X}_0$  для построения итерационного процесса мы возьмем предварительную внешнюю оценку объединенного множества решений, определяемую выражением (1.98):

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} [-1.78, 1.78] \\ [-1.78, 1.78] \end{pmatrix}.$$

Добьемся ли мы в результате итерирования уменьшения бруса начального приближения  $\mathbf{X}_0$  в размере? Проверим, является ли матрица  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ (1.101) диагонально преобладающей, и если это так, то принадлежит ли она классу  $H$ - или  $M$ -матриц (см. стр. 59, §1.2.8).

В соответствии с условием (1.46) интервальная матрица  $\mathbf{A}$  действительно имеет диагональное преобладание

$$\begin{aligned} i = 1: & \quad \langle [4, 5] \rangle = 4 > 2 = |[-2, -1]|, \\ i = 2: & \quad \langle [6, 7] \rangle = 6 > 3 = |[2, 3]|, \end{aligned}$$

Таблица 1.2. Интервальный метод Гаусса-Зейделя для внешнего оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ

Вход

Интервальная линейная система уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ .

Брус  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)^\top \in \mathbb{IR}^n$ , ограничивающий желаемую часть объединённого множества решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Некоторая константа  $\varepsilon > 0$ .

Выход

Уточнённая внешняя оценка  $\mathbf{X}'$  для пересечения множества решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  с бруском  $\mathbf{X}$ , либо информация «исходный брус  $\mathbf{X}$  не пересекает множество решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ».

Алгоритм

$q \leftarrow +\infty$ ;

DO WHILE (  $q \geq \varepsilon$  )

DO FOR  $i = 1$  TO  $n$

$$\mathbf{X}'_i \leftarrow \mathbf{X}_i \cap \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{X}'_j - \sum_{j=i+1}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{X}_j \right) / \mathbf{a}_{ii};$$

IF (  $\mathbf{X}'_i = \emptyset$  ) THEN

STOP, сигнализируя «множество решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  не пересекает брус  $\mathbf{X}$ »

END IF

END DO

$q \leftarrow$  расстояние между векторами  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{X}' = (\mathbf{X}'_1, \dots, \mathbf{X}'_n)^\top$ ;

$\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X}'$ ;

END DO

однако не является  $M$ -матрицей, потому что ее элемент  $\mathbf{A}_{21}$  положителен. Значит, следует выполнить проверку принадлежности интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  классу  $H$ -матриц.

Согласно критерию Фань Цзы, приведенному на стр. 60, компарант матрицы  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ (1.101) является  $M$ -матрицей

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle \mathbf{A} \rangle v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} > 0,$$

а значит, интервальная матрица  $\mathbf{A}$  является  $H$ -матрицей. Это говорит о том, что в результате итераций мы можем ожидать сужения выбранного бруса начального приближения  $\mathbf{X}_0$ .

Множество  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.101), его предварительная внешняя оценка  $\mathbf{X}_0$ , а также результат шестой итерации  $\mathbf{X}_6$  интервального метода Гаусса-Зейделя показаны на Рис. 1.17. Результаты, получаемые на каждом этапе итерационного процесса, приведены в таблице 1.3.

Заметим, что в процессе итерирования пересечение старого и нового значений одной и той же интервальной компоненты бруса  $\mathbf{X}_i$  выполнялось сразу же после вычисления нового значения этой компоненты; полученный результат пересечения использовался для расчета нового значения другой компоненты того же бруса  $\mathbf{X}_i$  и т. д.

Подводя итоги, можно заключить, что применение интервального метода Гаусса-Зейделя позволило значительно улучшить начальный брус  $\mathbf{X}_0$ , который был получен в результате предварительного внешнего оценивания множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.101). ■

### 1.5.4 Процедура Хансена-Блика-Рона

Если матрица  $\mathbf{A}$  которых принадлежит специальному классу  $H$ -матриц (см. стр. 59, §1.2.8), применима процедура Хансена-Блика-Рона, у которой есть ряд привлекательных качеств. Она имеет невысокую вычислительную сложность и в том случае, если средняя матрица ИСЛАУ является диагональной, позволяет получить оптимальную внешнюю оценку множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

**Теорема 1.5.1.** Пусть в интервальной линейной системе  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  матрица  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  является интервальной  $H$ -матрицей и пусть

$$u_i = (\langle \mathbf{A} \rangle^{-1} |\mathbf{b}|)_i, \quad d_i = (\langle \mathbf{A} \rangle^{-1})_{ii} \quad (1.102a)$$

$$\alpha_i = \langle \mathbf{a}_{ii} \rangle - 1/d_i, \quad \beta_i = u_i/d_i - |\mathbf{b}_i| \quad (1.102b)$$

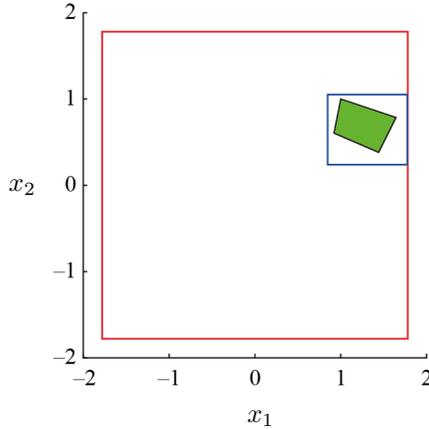


Рис. 1.17. Множество  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.101), вектор начального приближения  $\mathbf{X}_0$  (красная линия), а также результат шестой итерации  $\mathbf{X}_6$  интервального метода Гаусса-Зейделя (синяя линия). Объединенное множество решений ИСЛАУ была построено с использованием функции `EqnWeak2D` пакета `IntLinInc2D` для `MATLAB` [17]

для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда множество решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  содержится в интервальном векторе  $\mathbf{x} = (x_i)$  с компонентами

$$x_i = \frac{\mathbf{b}_i + \beta_i[-1, 1]}{\mathbf{a}_{ii} + \alpha_i[-1, 1]}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.103)$$

Если же средняя матрица для  $\mathbf{A}$  диагональна, то  $\mathbf{x}$  — оптимальная внешняя оценка множества решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

**Пример 41 (Внешняя оценка объединенного множества решений ИСЛАУ, процедура Хансена-Блика-Рона)** Рассмотрим ИСЛАУ, в которой

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2, 4] & [3, 5] \\ [-6, -4] & [5, 10] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [2, 6] \end{pmatrix}. \quad (1.104)$$

Наша задача — найти внешнюю оценку множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  этой ИСЛАУ, воспользовавшись процедурой Хансена-Блика-Рона.

Чтобы произвести внешнее оценивание  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , нам придется выполнить предобуславливание, потому что матрица  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ (1.104)

$i$	$\mathbf{X}_i$	$\mathbf{X}'_i$	$\text{Dist}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}'_i)$
1	$\begin{pmatrix} [-1.78000, 1.78000] \\ [-1.78000, 1.78000] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [0.84743, 1.78000] \\ [0.23714, 1.78000] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (2.62743) \\ (2.01714) \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} [0.84743, 1.78000] \\ [0.23714, 1.78000] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [0.84743, 1.77543] \\ [0.23714, 1.05086] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (0.00457) \\ (0.72914) \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} [0.84743, 1.77543] \\ [0.23714, 1.05086] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [0.84782, 1.77543] \\ [0.23910, 1.05086] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (0.00039) \\ (0.00196) \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} [0.84782, 1.77543] \\ [0.23910, 1.05086] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [0.84782, 1.77536] \\ [0.23910, 1.05073] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (0.00007) \\ (0.00013) \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} [0.84782, 1.77536] \\ [0.23910, 1.05073] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [0.84783, 1.77536] \\ [0.23913, 1.05073] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (0.00000) \\ (0.00003) \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} [0.84783, 1.77536] \\ [0.23913, 1.05073] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [0.84783, 1.77536] \\ [0.23913, 1.05072] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (0.00000) \\ (0.00000) \end{pmatrix}$

Таблица 1.3. Уточнение внешней оценки объединенного множества решений ИСЛАУ (1.101) с помощью интервального итерационного метода Гаусса-Зейделя

не принадлежит классу  $H$ -матриц. Ее компарант

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

не является  $M$ -матрицей, несмотря на то, что матрица  $\langle \mathbf{A} \rangle$  имеет положительные внедиагональные элементы и тем самым удовлетворяет критерию Фань Цзы (см. стр. 60, §1.2.8). Поскольку интервальная матрица  $\mathbf{A}$  не является диагонально преобладающей, то мы не сможем подобрать точечный вектор  $v > 0$  такой, чтобы имело место  $\langle \mathbf{A} \rangle v > 0$ .

Однако «ценой» внешнего оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ (1.104) путем выполнения процедуры Хансена-Блика-Рона с дополнительным этапом преобуславливания будет неоптимальность интервальной оценки множества  $\mathcal{E}_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ : как указано в подразделе 1.5.1,  $\mathcal{E}_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \mathcal{E}_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , а найденный нами в дальнейшем брус  $\mathbf{X}$  будет внешней оценкой именно множества  $\mathcal{E}_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

В качестве преобуславливателя  $\mathbf{A}$  выберем обратную к средней

матрице ИСЛАУ (1.104), т. е.  $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ :

$$\Lambda = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \Lambda \mathbf{A} = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} [62, 108] & [-35, 35] \\ [-16, 16] & [60, 110] \end{pmatrix},$$

$$\Lambda \mathbf{b} = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} [-33, 14] \\ [22, 56] \end{pmatrix}.$$

Теперь, когда матрица  $\Lambda \mathbf{A}$  является  $H$ -матрицей

$$\langle \Lambda \mathbf{A} \rangle = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} 62 & -35 \\ -16 & 60 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle \Lambda \mathbf{A} \rangle v = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} 27 \\ 44 \end{pmatrix},$$

мы можем воспользоваться процедурой Хансена-Блика-Рона для нахождения внешней оценки множества  $\Xi_{uni}(\Lambda \mathbf{A}, \Lambda \mathbf{b})$ . Более того, полученная интервальная оценка будет оптимальной, так как средняя матрица  $\text{mid}(\Lambda \mathbf{A})$  предобусловленной ИСЛАУ является единичной:

$$\text{mid}(\Lambda \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Выполним необходимые промежуточные вычисления для нахождения компонент бруса внешней оценки  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]^T$ :

$$\langle \Lambda \mathbf{A} \rangle^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{255}{158} & \frac{595}{632} \\ \frac{34}{79} & \frac{527}{316} \end{pmatrix}, \quad |\Lambda \mathbf{b}| = \begin{pmatrix} \frac{33}{85} \\ \frac{56}{85} \end{pmatrix}, \quad \langle \Lambda \mathbf{A} \rangle^{-1} |\Lambda \mathbf{b}| = \begin{pmatrix} \frac{197}{158} \\ \frac{100}{79} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{33}{85}, \frac{14}{85} \end{bmatrix} + \left( \frac{197}{158} / \frac{255}{158} - \frac{33}{85} \right) \cdot [-1, 1]}{\begin{bmatrix} \frac{62}{85}, \frac{108}{85} \end{bmatrix} + \left( \frac{62}{85} - 1 / \frac{255}{158} \right) \cdot [-1, 1]} = \begin{bmatrix} -\frac{197}{158}, \frac{70}{79} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_2 = \frac{\begin{bmatrix} \frac{22}{85}, \frac{56}{85} \end{bmatrix} + \left( \frac{100}{79} / \frac{527}{316} - \frac{56}{85} \right) \cdot [-1, 1]}{\begin{bmatrix} \frac{60}{85}, \frac{110}{85} \end{bmatrix} + \left( \frac{60}{85} - 1 / \frac{527}{316} \right) \cdot [-1, 1]} = \begin{bmatrix} \frac{209}{1845}, \frac{100}{79} \end{bmatrix}.$$

На Рис. 1.18(а) показаны множество  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.104) и оптимальная внешняя оценка  $\mathbf{X}$  множества  $\Xi_{uni}(\Lambda \mathbf{A}, \Lambda \mathbf{b})$ ,  $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ , полученная в результате применения процедуры Хансена-Блика-Рона к ИСЛАУ (1.104) после ее предобуславливания. ■

**Пример 42 (Внешняя оценка объединенного множества решений ИСЛАУ, процедура Хансена-Блика-Рона и метод Гаусса-Зейделя)** Попробуем найти внешнюю оценку объединенного множества решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.101) с помощью *мультиметода*,

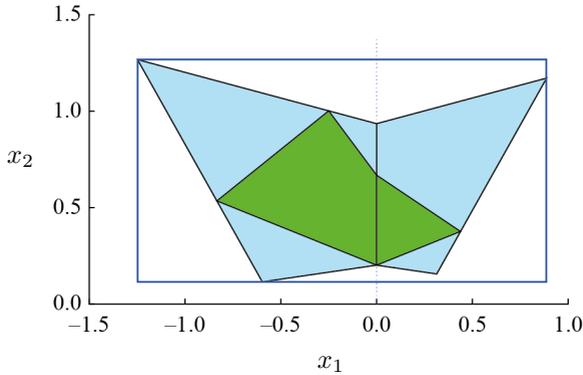


Рис. 1.18. Множество  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.104) (зеленый цвет), а также множество  $\Xi_{uni}(\Lambda \mathbf{A}, \Lambda \mathbf{b})$ ,  $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$  (голубой цвет) и его оптимальная внешняя оценка  $\mathbf{X}$ , полученная в результате выполнения процедуры Хансена-Блика-Рона (синяя линия).

Множества АЕ-решений ИСЛАУ были построены с использованием функции `EqnWeak2D` пакета `IntLinInc2D` для MATLAB [17]

который представляет собой последовательное применение процедуры Хансена-Блика-Рона и интервального итерационного метода Гаусса-Зейделя к ИСЛАУ (1.101).

Как мы выяснили в подразделе §1.5.3, интервальный метод Гаусса-Зейделя позволяет добиться сужения бруса начального приближения в том случае, если матрица  $\mathbf{A}$  интервальной линейной системы принадлежит классу  $H$ -матриц. Если с помощью процедуры Хансена-Блика-Рона мы найдем внешнюю оценку объединенного множества решений ИСЛАУ, интервальная матрица  $\mathbf{A}$  которой является  $H$ -матрицей, а матрица  $\text{mid } \mathbf{A}$  не диагональна, то сможем далее улучшить найденный интервальный вектор  $\mathbf{X}$  в ходе итерационного процесса интервального метода Гаусса-Зейделя. Уточненный таким образом брус внешней оценки множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.101) представляется интересным сравнить с интервальным вектором, который мы можем получить, выполняя предобуславливание ИСЛАУ (1.101) обратной к средней матрице системы и применяя затем к предобусловленной ИСЛАУ (1.101) процедуру Хансена-Блика-Рона.

Выберем предобуславливатель  $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$  и повторим все вы-

числения, выполненные в предыдущем примере для ИСЛАУ (1.104). Полученная оптимальная внешняя оценка объединенного множества решений ИСЛАУ (1.101)

$$\mathbf{X}_{\text{оптим}} = \begin{pmatrix} [0.87992, 1.68360] \\ [0.36853, 1.08111] \end{pmatrix}$$

почти не отличается от результата работы интервального метода Гаусса-Зейделя с исходной, непредобусловленной ИСЛАУ (1.101), которым является интервальный вектор  $\mathbf{X}_6$ , приведенный в таблице 1.3:

$$\mathbf{X}_{\text{ГЗ}} = \begin{pmatrix} [0.84783, 1.77536] \\ [0.23913, 1.05073] \end{pmatrix}.$$

Теперь перейдем к использованию мультиметода для внешнего оценивания множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.101). Откажемся от предобуславливания ИСЛАУ обратной средней и повторим все ранее выполненные вычисления с использованием величин (1.102a) и (1.102b). Поскольку матрица

$$\text{mid } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4.5 & -1.5 \\ 2.5 & 6.5 \end{pmatrix}$$

непредобусловленной ИСЛАУ (1.101) не является диагональной, то интервальный вектор  $\mathbf{X}_0$ , который получается в результате применения процедуры Хансена-Блика-Рона к ИСЛАУ (1.101) и станет начальным приближением для построения итераций интервального метода Гаусса-Зейделя, намного шире, чем брусы  $\mathbf{X}_{\text{оптим}}$  и  $\mathbf{X}_{\text{ГЗ}}$ :

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} [0.22222, 2.55556] \\ [0.38235, 2.61111] \end{pmatrix}.$$

На третьем этапе итерационных вычислений интервального метода Гаусса-Зейделя ( $\text{dist}_1(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}'_3) < 10^{-5}$ ) мы получаем следующую внешнюю оценку множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.101):

$$\mathbf{X}_{\text{мультим}} = \begin{pmatrix} [0.87647, 1.77059] \\ [0.38235, 1.04118] \end{pmatrix}.$$

Сравнивая между собой интервальные векторы  $\mathbf{X}_{\text{оптим}}$ ,  $\mathbf{X}_{\text{ГЗ}}$  и  $\mathbf{X}_{\text{мультим}}$ , можно убедиться в «жизнеспособности» мультиметода, представляющего собой сочетание процедуры Хансена-Блика-Рона и интервального метода Гаусса-Зейделя, а также его пригодности для внешнего оценивания множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.101). ■

### 1.5.5 Формально-алгебраический подход

Идея *формально-алгебраического* или, кратко, *формального* подхода заключается в том, чтобы, отказавшись от работы с исходной ИСЛАУ, внешнее оценивание множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  которой выполняется, перейти к нахождению формального решения некоторой специальной интервальной системы уравнений.

Согласно работам С.П.Шарого [21] (первая публикация по внутреннему оцениванию множеств АЕ-решений ИСЛАУ — [15]), *формальное решение* интервальной системы уравнений можно определить как интервальный вектор, в результате подстановки которого в систему и выполнения всех операций по правилам интервальной арифметики (классической интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$ , полной интервальной арифметики Каухера  $\mathbb{KR}$  или какой-либо другой) каждое уравнение системы превращается в равенство.

Достоинством формально-алгебраического подхода является универсальность, поскольку его общая теоретическая схема применима к задачам как внешнего, так и внутреннего интервального оценивания, а выбор способов и численных методов, которые могут быть использованы для нахождения формального решения, не ограничен.

**Предложение.** Пусть  $\Lambda$  — неособенная диагональная матрица. Множество решений интервальной линейной системы уравнений  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  с  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  и  $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$  совпадает с множеством решений интервальной системы

$$x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}, \quad (1.105)$$

где  $\mathbf{C} = \mathbf{I} - \Lambda\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{d} = \Lambda\mathbf{b}$ .

В основе формального подхода к решению задачи внешнего оценивания множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ лежат следующие три теоремы:

**Теорема 1.5.2.** (теорема Майера-Варнке) Пусть  $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{d} \in \mathbb{IR}^n$ ,

$$\Xi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \mathbf{C} \in \mathbf{C})(\exists \mathbf{d} \in \mathbf{d})(x = \mathbf{C}x + \mathbf{d})\}$$

— множество решений интервальной линейной системы уравнений  $x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}$ , а  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{IR}^n$  — формальное решение этой системы. Тогда

- для любой линейной системы  $x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}$  с  $\mathbf{C} \in \mathbf{C}$  и  $\mathbf{d} \in \mathbf{d}$  по крайней мере одно её решение содержится в бресе  $\mathbf{x}^*$ ;
- включение  $\Xi \subseteq \mathbf{x}^*$  имеет место тогда и только тогда, когда интервальная матрица  $(\mathbf{I} - \mathbf{C})$  неособенна.

**Теорема 1.5.3.** (теорема Апостолатоса-Кулиша)

Если матрица  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  такова, что  $\rho(|\mathbf{C}|) < 1$ , то для любого вектора  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$  интервальная линейная система уравнений

$$x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}$$

имеет единственное правильное формальное решение. Оно может быть найдено с помощью итерационного процесса

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

при любом начальном векторе  $\mathbf{x}^{(0)}$  и является внешней интервальной оценкой множества решений рассматриваемой интервальной системы.

**Теорема 1.5.4.** (теорема Алефельда-Херцбергера)

Пусть в интервальной системе уравнений

$$x = G(\mathbf{a}, x)$$

отображение  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , действующее по правилу  $\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ , является сжимающим, а выражения для компонент  $G_i(\mathbf{a}, x)$  являются элементарными функциональными выражениями, определенными для рассматриваемых значений аргументов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{x}$ . Тогда правильное формальное решение интервальной системы уравнений  $x = G(\mathbf{a}, x)$  существует, единственно и является внешней интервальной оценкой ее множества решений  $\Xi(G, \mathbf{a}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a \in \mathbf{a}) (x = G(a, x))\}$ .

Несмотря на то, что формулировка теоремы Майера-Варнке является более общей, она не поглощает теоремы Апостолатоса-Кулиша и Алефельда-Херцбергера. Различие между этими тремя теоремами проявляется в том случае, когда  $\text{rad } \mathbf{d}_i = 0$  для некоторых  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Например, условия теоремы Апостолатоса-Кулиша могут не выполняться, однако путем специального подбора данных интервальной системы уравнений в рекуррентном виде (1.105) можно добиться успешного внешнего оценивания множества решений с помощью формально-алгебраического метода, основанного на теореме Майера-Варнке [21].

Точность оценок множеств решений, получаемых с помощью формального подхода, характеризует следующее предложение.

**Предложение.** Пусть в условиях теорем Апостолатоса-Кулиша или Майера-Варнке матрица  $\mathbf{C}$  неотрицательна. Тогда правильное формальное решение интервальной линейной системы  $x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}$  является оптимальной внешней оценкой её множества решений.

**Пример 43 (Теоремы Апостолатоса-Кулиша и Майера-Варнке)** Рассмотрим ИСЛАУ (1.72), в которой

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [5, 9] & [0, 0] \\ [0, 0] & [6, 7] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [2, 6] \end{pmatrix}. \quad (1.106)$$

Вспользуемся формальным подходом к нахождению внешней оценки множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  этой ИСЛАУ, которым, как можно убедиться, является брус  $x = (x_1, x_2)^\top = ([\frac{1}{9}, \frac{2}{5}], [\frac{2}{7}, 1])^\top$ .

Выберем в (1.105) диагональную масштабирующую матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} = 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда интервальная система уравнений  $x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}$  примет вид

$$x = \begin{pmatrix} [-3.5, -1.5] & [0.0, 0.0] \\ [0.0, 0.0] & [-2.5, -2.0] \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} [0.5, 1.0] \\ [1.0, 3.0] \end{pmatrix}.$$

Оказывается, что данная система уравнений не имеет формальных решений в  $\mathbb{IR}^n$  — ими являются «неправильные» интервалы

$$x_1 = \left[ \frac{4}{5}, -\frac{1}{5} \right], \quad x_2 = \left[ \frac{5}{3}, -\frac{1}{3} \right],$$

которые являются элементами полной интервальной арифметики Каухера  $\mathbb{KR}$ . Значит, интерпретировать полученные решения с помощью теоремы Майера-Варнке невозможно!

Добьемся того, чтобы вспомогательная интервальная система уравнений имела решения в  $\mathbb{IR}^n$ . Для этого изменим матрицу  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix} = 0.05 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда формальным решением системы в рекуррентном виде

$$x = \begin{pmatrix} [0.55, 0.75] & [0.00, 0.00] \\ [0.00, 0.00] & [0.65, 0.70] \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} [0.05, 0.10] \\ [0.10, 0.30] \end{pmatrix}$$

является правильный вектор  $([\frac{1}{9}, \frac{2}{5}], [\frac{2}{7}, 1])^\top$ , который в точности совпадает с объединенным множеством решений исходной ИСЛАУ (1.106).

Сравним спектральные радиусы матриц  $|C|$  в обоих случаях:

$$C = \begin{pmatrix} [-3.5, -1.5] & [0.0, 0.0] \\ [0.0, 0.0] & [-2.5, -2.0] \end{pmatrix} \rightarrow \rho(|C|) = 3.50 > 1,$$

$$C = \begin{pmatrix} [0.55, 0.75] & [0.00, 0.00] \\ [0.00, 0.00] & [0.65, 0.70] \end{pmatrix} \rightarrow \rho(|C|) = 0.75 < 1.$$

Значит, необходимым условием существования правильного формального решения системы (1.105) при  $\text{rad } \mathbf{d} > 0$  является

$$\rho(|C|) < 1,$$

т. е. спектральный радиус матрицы  $|C|$  должен быть *меньше единицы*. Достичь этого можно путем подбора подходящей матрицы  $A$ . ■

Формально-алгебраический подход будет востребован также в §2.3 при получении оценок в полной интервальной арифметике Каухера.

### 1.5.6 Интервальный метод Кравчика

Интервальный итерационный *метод Кравчика* является конкретным применением более общего подхода для систем уравнений общего вида §1.7.3 к решению ИСЛАУ. Он объединяет в себе элементы итерационных методов и процедур, которые были рассмотрены в предыдущих подразделах:

- *предобуславливание* (подраздел §1.5.1),
- *предварительное внешнее оценивание* объединенного множества решений ИСЛАУ (подраздел §1.5.2 и, если матрица  $A$  ИСЛАУ принадлежит классу интервальных  $H$ -матриц, подраздел §1.5.4),
- *вычисление формального решения* интервальной системы уравнений в рекуррентном виде (см. теорему Апостолатоса-Кулиша на стр. 127, подраздел §1.5.5).

Важным достоинством интервального метода Кравчика является независимость его итерационного процесса от величины диагональных элементов. Данный метод также может быть использован для решения нелинейных уравнений и их систем.

Итак, последовательность шагов при компьютерной реализации интервального метода Кравчика имеет следующий вид:

1. Выбирается вектор начального приближения  $\mathbf{x}^{(0)} \supseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Грубую внешнюю оценку множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ можно найти, воспользовавшись выражением (1.98). В частном случае сильной неособенности интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  для этой цели также пригодно выражение (1.99). Наконец, если интервальная матрица системы является  $H$ -матрицей, а средняя матрица  $\text{mid } \mathbf{A}$  недиагональна, то результат вычисления величин, определяемых выражением (1.103), также можно считать предварительной внешней оценкой объединенного множества решений ИСЛАУ.

2. Выбирается предобуславливатель  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Как правило, выполняется предобуславливание обратной к средней матрице ИСЛАУ:  $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ .

3. Организируются итерации

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \left( \Lambda \mathbf{b} + (I - \Lambda \mathbf{A}) \mathbf{x}^{(k)} \right) \cap \mathbf{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.107)$$

В качестве критерия останова итераций можно выбрать выполнение одного из условий:

$$\text{Dist}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^*) \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad \text{dist}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^*) \leq \varepsilon$$

для некоторой векторной или скалярной величины  $\varepsilon > 0$ .

**Теорема 1.5.5.** Пусть  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$  и матрица  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  такова, что для некоторой матричной нормы величина  $\eta := \|I - \Lambda \mathbf{A}\|$  удовлетворяет условию  $\eta < 1$ . Тогда для всякого начального приближения, содержащего множество решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , предел  $\mathbf{x}^*$  итераций метода Кравчика (1.107) удовлетворяет следующей оценке в согласованной векторной норме

$$\|\text{rad } \square \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\| \leq \|\text{rad } \mathbf{x}^*\| \leq \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \|\text{rad } \square \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\|.$$

**Пример 44 (Внешняя оценка объединенного множества решений ИСЛАУ, интервальный метод Кравчика)** Рассмотрим ИСЛАУ (1.104), в которой

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2, 4] & [3, 5] \\ [-6, -4] & [5, 10] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [2, 6] \end{pmatrix}.$$

Найдем внешнюю оценку объединенного множества решений данной ИСЛАУ, используя интервальный метод Кравчика.

Как нам уже известно (см. стр. 122, §1.5.4), матрица  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ (1.104) не относится к интервальным  $H$ -матрицам, а значит, к ней «напрямую», т. е. без выполнения предобуславливания, не применима процедура Хансена-Блика-Рона для внешнего оценивания множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . По этой же причине мы не можем воспользоваться интервальным методом Гаусса-Зейделя для нахождения внешней оценки объединенного множества решений ИСЛАУ (1.104). По сути, в нашем арсенале интервальных методов остается только итерационный метод Кравчика, который тесно связан с формально-алгебраическим подходом к внешнему оцениванию объединенного множества решений.

В первую очередь для организации итерационного процесса нам необходимо выбрать начальное приближение. Им станет ранее найденный (см. стр. 123) с помощью предобуславливания ИСЛАУ (1.104) обратный средней и применения процедуры Хансена-Блика-Рона брус

$$\mathbf{X}_{\text{ХБР}} = \left( \begin{array}{c} \left[ -\frac{197}{158}, \frac{70}{79} \right] \\ \left[ \frac{209}{1845}, \frac{100}{79} \right] \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} [-1.24684, 0.88608] \\ [0.11328, 1.26582] \end{array} \right).$$

В качестве предобуславливателя выберем матрицу  $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ .

Важным нюансом в использовании интервального метода Кравчика является выполнение условия

$$\rho(|I - \Lambda \mathbf{A}|) < 1,$$

которое обеспечивает сходимость итерационного процесса к единственному формальному решению из  $\mathbb{IR}^n$  интервальной системы уравнений  $x = (I - \Lambda \mathbf{A})x + \Lambda \mathbf{b}$ . Интервальный метод Кравчика «наследует» это условие от теоремы Апостолатоса-Кулиша, приведенной на стр. 127 §1.5.5.

Найдем спектральный радиус  $\rho$  матрицы  $|I - \Lambda \mathbf{A}|$ :

$$|I - \Lambda \mathbf{A}| = \left( \begin{array}{c} \frac{23}{85} \quad \frac{7}{17} \\ \frac{16}{85} \quad \frac{5}{17} \end{array} \right) \rightarrow \rho(|I - \Lambda \mathbf{A}|) = 0.561 < 1.$$

Таким образом, сходимость интервального метода Кравчика обеспечена, однако результат итерационных вычислений показывает, что

брус  $\mathbf{X}_{\text{ХБР}}$  с его помощью не будет улучшен:

$$\begin{aligned} \Lambda \mathbf{b} + (I - \Lambda \mathbf{A}) \mathbf{X}_{\text{ХБР}} &= \begin{pmatrix} [-1.24684, 1.02331] \\ [-0.34818, 1.26582] \end{pmatrix}, \\ (\Lambda \mathbf{b} + (I - \Lambda \mathbf{A}) \mathbf{X}_{\text{ХБР}}) \cap \mathbf{X}_{\text{ХБР}} &= \mathbf{X}_{\text{ХБР}}. \end{aligned}$$

Теперь попробуем взять в качестве начального приближения  $\mathbf{X}^{(0)}$  для построения итераций интервального метода Кравчика предварительную внешнюю оценку множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.104), которая определяется выражением (1.98):

$$\theta = \frac{\frac{56}{85}}{1 - \frac{58}{85}} = \frac{56}{27} \quad \rightarrow \quad \mathbf{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} [-2.07407, 2.07407] \\ [-2.07407, 2.07407] \end{pmatrix}.$$

Выбирая такое начальное приближение, мы получим следующую внешнюю оценку множества  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.104) на двадцать второй итерации интервального метода Кравчика:

$$\mathbf{X}^{(20)} = \begin{pmatrix} [-1.24684, 1.02331] \\ [-0.34818, 1.26583] \end{pmatrix}, \quad \text{Dist}(\mathbf{X}^{(22)}, \mathbf{X}^{(23)}) = \begin{pmatrix} 2.33269 \cdot 10^{-6} \\ 1.64524 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

Как видно на Рис. 1.19, найденный брус  $\mathbf{X}^{(20)}$  немного шире интервального вектора  $\mathbf{X}_{\text{ХБР}}$ . Тем не менее, использование интервального метода Кравчика позволило нам выполнить внешнее оценивание объединенного множества решений ИСЛАУ (1.104) так, что мы оказались избавлены от необходимости следить за принадлежностью матрицы  $\mathbf{A}$  классам  $M$ - и  $H$ -матриц, вычислять компарант  $\langle \mathbf{A} \rangle$ , проверять ее диагональность точечной средней матрицы  $\text{mid } \mathbf{A}$  и т. д. ■

## 1.6 Решение интервальной линейной задачи о допусках

Интервальная *линейная задача о допусках* (или, сокращенно, ЛЗД) заключается в нахождении (максимально большого) бруса, который содержится в допусковом множестве решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (1.75) ИСЛАУ. Фактически, решая ЛЗД, мы выполняем внутреннее оценивание множества  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной системы линейных уравнений (1.72).

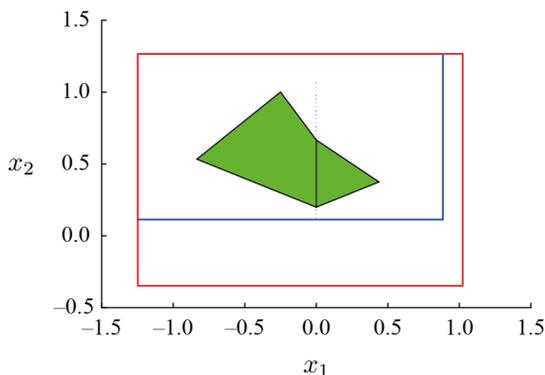


Рис. 1.19. Множество  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.104), брус  $\mathbf{X}_{\text{ХВР}}$  (синяя линия), а также интервальный вектор  $\mathbf{X}^{(20)}$ , полученный с помощью интервального метода Кравчика (красная линия). Объединенное множество решений ИСЛАУ была построено с использованием функции `EqnWeak2D` пакета `IntLinInc2D` для `MATLAB` [17]

Каково происхождение названия задачи? Как было указано в §1.4.5, допустовое множество решений ИСЛАУ является множеством решений задачи оценивания внутреннего состояния статической системы управления (см. Рис. 1.6), характеризуемой линейной связью вход-выход, для случая, когда все входные воздействия являются возмущающими, а все выходы — стабилизируемыми. Если в рассматриваемой статической системе входные воздействия  $x$  и выходные отклики  $y$  связаны линейной зависимостью  $y = Ax$ , где  $A = (a_{ij})$  — точечная вещественная матрица размера  $m \times n$ , и значения  $x$  и  $y$  имеют интервальную неопределенность, то допустовое множество решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{y})$  образовано такими  $x \in \mathbb{R}^n$ , при которых независимо от конкретных значений  $a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$  значения выходных откликов  $y_i, i = 1, 2, \dots, n$  попадают в интервалы неопределенности  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ , называемые *допусками*.

Решение ЛЗД можно разделить на следующие этапы:

1. исследование разрешимости ЛЗД (§1.6.1), в результате про-

ведения которого делается вывод о пустоте/непустоте допускового множества решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ,

2. **коррекция ЛЗД** ( §1.6.2–§1.6.4), выполняемая с целью достичь разрешимости поставленной интервальной задачи,
3. **построение бруса решения ЛЗД** ( §1.6.5).

### 1.6.1 Исследование разрешимости линейной задачи о допусках

Линейная задача о допусках *неразрешима* или *несовместна*, если допусковое множество решений ИСЛАУ пусто.

Из §1.4.5 и §1.4.6 нам известно, что установить принадлежность точки  $x \in \mathbb{R}^n$  множеству  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы можно двумя способами:

- 1) проверить выполнение для точки  $x$  условий теоремы И. А. Шарой и/или теоремы Рона в результате подстановки этой точки в системы линейных неравенств (1.88) и/или (1.89), соответственно.
- 2) «распознать» принадлежность точки  $x$  множеству  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  с помощью распознающего функционала Tol (1.96).

Для исследования разрешимости ЛЗД, заключающегося в установлении  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$  или  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ , мы выберем второй способ, основанный на использовании функционала Tol. Некоторые причины, по которым данный способ предпочтительнее представления множества  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  как решения системы двусторонних линейных неравенств, приведены в §1.4.6. Кроме того, выбранный этот способ имеет неочевидные, но весьма весомые преимущества, которые проявятся, когда мы перейдем к выполнению коррекции ЛЗД.

Посмотрим, как «строится» распознающий функционал Tol:

$$x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \Leftrightarrow \mathbf{A}x \subseteq \mathbf{b}$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij}x_j \subseteq \mathbf{b}_i = [\text{mid } \mathbf{b}_i - \text{rad } \mathbf{b}_i, \text{mid } \mathbf{b}_i + \text{rad } \mathbf{b}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij}x_j \subseteq [-\text{rad } \mathbf{b}_i, \text{rad } \mathbf{b}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij}x_j \right| \leq \text{rad } \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

В последней записи можно узнать выражение, которое определяет распознающий функционал

$$\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij}x_j \right| \right\}.$$

Поскольку

$$\text{rad } \mathbf{b}_i - \text{mid } \mathbf{b}_i = -\underline{\mathbf{b}}_i, \quad \text{rad } \mathbf{b}_i + \text{mid } \mathbf{b}_i = \bar{\mathbf{b}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

то функционал Tol представляет собой нижнюю огибающую не более чем  $m \cdot 2^{n+1}$  линейных функций, в которые  $\underline{\mathbf{b}}_i$  и  $\bar{\mathbf{b}}_i$  входят как свободные члены, а верхние и нижние границы интервальнозначных элементов матрицы  $\mathbf{A}$  — как коэффициенты перед аргументами функций.

Распознающий функционал Tol непрерывен по всем своим аргументам и непрерывен по Липшицу (см. стр. 69, §1.3.2), потому что в него входят только липшицевые функции, а также достигает конечного максимума на всем пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Последнее свойство функционала Tol является крайне важным для его *безусловной максимизации*, в которой заключается полное исследование разрешимости ЛЗД.

Итак, укажем последовательность действий, которую необходимо выполнить при исследовании разрешимости интервальной линейной задачи о допусках с помощью распознающего функционала Tol:

#### 1. Решение задачи абсолютной максимизации

Нахождение точки абсолютного максимума  $\tau \in \mathbb{R}^n$  функционала Tol (1.96) и его значения в этой точке  $T = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

## 2. Определение разрешимости ЛЗД

- если  $T \geq 0$ , то  $\tau \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ , т. е. линейная задача о допусках для ИСЛАУ  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  совместна, и точка  $\tau$  принадлежит допусковому множеству решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ;
- если  $T > 0$ , то  $\tau \in \text{int } \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ , причем принадлежность точки  $\tau$  допусковому множеству решений устойчива к малым возмущениям данных в матрице  $\mathbf{A}$  и векторе  $\mathbf{b}$ ;
- если  $T < 0$ , то  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$ , т. е. линейная задача о допусках для ИСЛАУ  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  несовместна.

На сегодняшний день существует достаточно много эффективных численных методов для решения задачи максимизации негладких вогнутых функционалов, каким является распознающий функционал Tol. Это свидетельствует о том, что данный способ исследования разрешимости ЛЗД является доступным и практичным. Если же размерность линейной задачи о допусках невелика, то для максимизации функционала Tol можно использовать методы прямого поиска.

**Пример 45 (Распознающий функционал допускового множества решений)** Вернемся к ИСЛАУ (1.91)

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [7, 8] \end{pmatrix},$$

ранее рассмотренную в подпараграфе «Антагонизм» управляемого и допускового множеств решений ИСЛАУ» в §1.4.5. Мы уже знаем, что допусковое множество решений ИСЛАУ (1.91) пусто, а ее непустое управляемое множество решений  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  показано на Рис. 1.10.

Подтвердим пустоту множества  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.91), которая равнозначна неразрешимости ЛЗД для данной интервальной линейной системы уравнений, используя функционал Tol (1.96).

Распознающий функционал допускового множества решений есть

$$\text{Tol} = \min \{ 0.5 - | 3.5 - ([2.0, 5.0] \cdot x_1 + [1.0, 2.0] \cdot x_2) |, \\ 0.5 - | 7.5 - ([-7.0, -5.0] \cdot x_1 + [6.0, 7.0] \cdot x_2) | \},$$

и его трехмерный и контурный графики представлены на Рис. 1.20.

На Рис. 1.20 хорошо видна многогранность поверхности распознающего функционала. Максимум функционала Tol равен  $-0.785$  и достигается в точке  $(0.354, 1.508)^T$ . Значит, допусковое множество решений ИСЛАУ (1.91) действительно пусто, и ЛЗД несовместна. ■

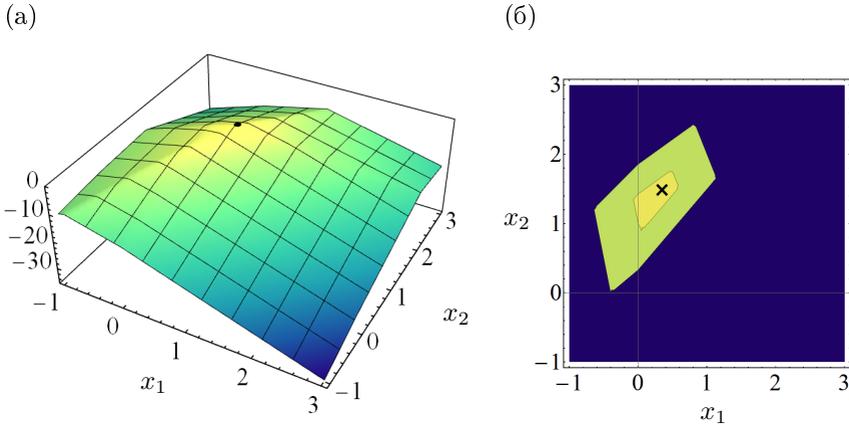


Рис. 1.20. Трехмерный (а) и контурный (б) графики распознающего функционала  $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ , построенного для ИСЛАУ (1.91). Положение точки  $(0.354, 1.508)$  показано на трехмерном и контурном графиках черной точкой и черным крестиком. Области  $\text{Tol} < -5$ ,  $-5 \leq \text{Tol} < -2$  и  $\text{Tol} \geq -2$  выделены синим, светло-зеленым и желтым цветами, соответственно

### 1.6.2 Коррекция линейной задачи о допусках

Если речь идет о решении практической задачи, то отрицательный результат, заключающийся в несовместности ЛЗД, малоинтересен. Гораздо большей ценностью обладает информация о том, насколько задача неразрешима и какие изменения над ее данными необходимо произвести, чтобы все же достичь разрешимости.

Несовместность линейной задачи о допусках может иметь разные причины. Если входные данные ЛЗД достоверны, то, как было ранее отмечено в §1.4.5, частой причиной пустоты допускового множества решений  $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ является слишком большая «ширина» произведения  $\mathbf{A}x$ , не позволяющая ему «уместиться» в  $\mathbf{b}$ .

Следовательно, для достижения разрешимости ЛЗД можно

- ▷ расширить интервальные компоненты вектора правой части  $\mathbf{b}$ ,
- ▷ сужать интервальные элементы матрицы  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ.

Такая процедура изменения входных данных ЛЗД для достижения ее совместности называется *коррекцией*.

### 1.6.3 Коррекция ИСЛАУ: изменение правой части

Первый, технически более простой, подход к достижению разрешимости ЛЗД заключается в коррекции вектора  $\mathbf{b}$  и направлен на ослабление ограничений в правой части ИСЛАУ, т. е. расширение допусков.

**Равномерное уширение всех компонент вектора правой части ИСЛАУ** Пусть матрица  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ неизменна, и значения  $\text{mid } \mathbf{b}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  зафиксированы. Тогда расширение вектора  $\mathbf{b}$  путем его замены на вектор

$$\mathbf{b} + K\mathbf{e}, \quad K \geq 0, \quad \mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$$

приведет к тому, что значение абсолютного максимума  $T$  распознающего функционала  $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$  возрастет на постоянную  $K$ :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + K\mathbf{e}) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) + K = T + K,$$

причем  $\text{Arg max Tol}$  — положение точки  $T$  — не изменится.

**Неравномерное уширение всех компонент вектора правой части ИСЛАУ** Если «размахи» интервальных компонент вектора правой части  $\mathbf{b}$  различаются значительно, то более целесообразным подходом к достижению разрешимости ЛЗД будет их расширение на неодинаковые величины. Мету, пропорционально которой увеличивается радиус каждой компоненты вектора  $\mathbf{b}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , определяет величина  $v_i$ , называемая весом. Весы формируют масштабирующий вектор

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m), \quad v_i \geq 0.$$

Неравномерно уширенный вектор  $\mathbf{b}$  ИСЛАУ представим в виде

$$\mathbf{b} + K\mathbf{v}([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top,$$

где  $K$  — некоторая постоянная.

Существует ли способ избежать перебора вручную в процессе поиска таких значений  $K$ , которые обеспечивают разрешимость ЛЗД? Если масштабирующий вектор  $\mathbf{v}$  задан, то мы можем произвести абсолютную максимизацию функционала  $\text{Tol}_v(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$  (1.108) и выбрать

$$K \geq |V|, \quad V = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}_v(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

$$\text{Tol}_v(x) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ v_i^{-1} \left( \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\}. \quad (1.108)$$

Стоит заметить, что, выбирая неравномерное уширение вектора правой части  $\mathbf{b}$  ИСЛАУ, мы должны ожидать изменения  $\text{Arg max Tol}$ .

### Характеристика совместности ЛЗД.

В §1.4.4 была введена величина  $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (1.83), служащая количественной мерой разрешимости ИСЛАУ, решением которой является множество  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ :

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \chi(\mathbf{b}_i) - \max_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ \mathbf{a}_{ij} \neq 0}} \chi(\mathbf{a}_{ij}) \right\}.$$

Поскольку множества  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ являются своеобразными «антагонистами» по отношению друг к другу (см. §1.4.5), то  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$  и  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$  при  $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$ .

Использование техники распознающих функционалов позволяет выбрать другую, значительно более «чувствительную» характеристику совместности интервальной линейной задачи о допусках:

$$\mathcal{F}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}_0(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

$$\text{Tol}_0(x) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ |\mathbf{b}_i|^{-1} \left( \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\}. \quad (1.109)$$

Если  $\mathcal{F}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) < 0$ , то ЛЗД несовместна; в противоположном случае  $\mathcal{F}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$  ЛЗД разрешима. В целом, для того, чтобы ответить на вопрос о степени (не-)разрешимости ЛЗД, нужно найти модуль  $\mathcal{F}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

**Пример 46 (Техника распознающих функционалов)** Рассмотрим ИСЛАУ (1.91):

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [7, 8] \end{pmatrix}.$$

Множество  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.91) является пустым (см. стр. 136):  $\max_{\mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.785$ ,  $\text{Arg max Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = (0.354, 1.508)$ .

Сначала добьемся разрешимости ЛЗД путем *равномерного* уширения радиусов компонент вектора правой части  $\mathbf{b}$ .

Выберем  $K = 5$ :

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [7, 8] \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 9] \\ [2, 13] \end{pmatrix}.$$

ИСЛАУ (1.91) с равномерно уширенной правой частью имеет вид

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 9] \\ [2, 13] \end{pmatrix}. \quad (1.110)$$

В результате равномерного уширения вектора  $\mathbf{b}$  ИСЛАУ (1.91) безусловный максимум распознающего функционала  $\text{Tol}$  становится равным  $4.215 = -0.785 + 5.000$  в точке  $(0.354, 1.508)$ . Следовательно, ЛЗД для ИСЛАУ (1.110) разрешима. На Рис. 1.21(а) показаны поверхности распознающего функционала  $\text{Tol}$  до и после коррекции вектора правой части  $\mathbf{b}$  ИСЛАУ (1.91). Можно заметить, что после равномерного уширения вектора  $\mathbf{b}$  ИСЛАУ (1.91) форма поверхности распознающего функционала  $\text{Tol}$  не изменилась. Контурный график функционала  $\text{Tol}$ , построенный для ИСЛАУ (1.110), представлен на Рис. 1.21(б).

Теперь произведем *неравномерное* уширение интервальных компонент вектора правой части ИСЛАУ (1.91) для того, чтобы достичь разрешимости линейной задачи о допусках.

Выберем произвольный масштабирующий вектор

$$v = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

и максимизируем функционал  $\text{Tol}_v$  (1.108) для ИСЛАУ (1.91):

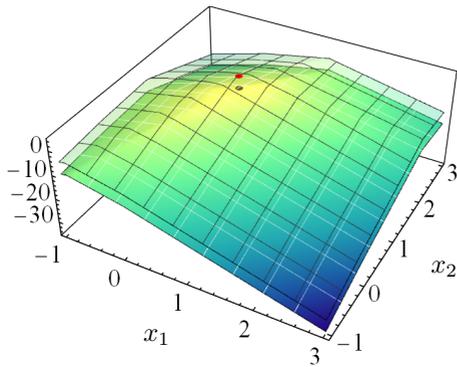
$$\text{Tol}_v = \min \{ 2.0 \cdot (0.5 - | 3.5 - ([2.0, 5.0] \cdot x_1 + [1.0, 2.0] \cdot x_2) ) |, \\ 0.5 \cdot (0.5 - | 7.5 - ([-7.5, -5.0] \cdot x_1 + [6.0, 7.0] \cdot x_2) ) | \}.$$

Поскольку

$$V = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}_v(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = -1.5, \quad \text{Arg max Tol}_v = (0.25, 1.75),$$

то постоянную  $K$ , входящую в неравномерно уширенный вектор  $\mathbf{b}$ , мы можем выбрать так же равной  $K = 5.0 \geq 1.5 = |V|$ .

(a)



(б)

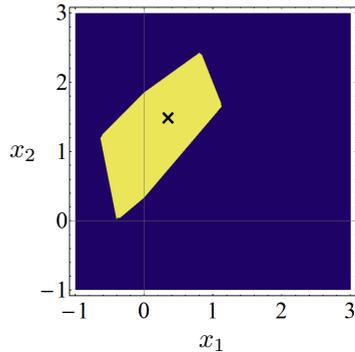


Рис. 1.21. (а) Трехмерные графики функционала  $Tol$ , построенные для ИСЛАУ (1.91) до (нижняя поверхность) и после (верхняя поверхность) равномерного уширения компонент вектора  $\mathbf{b}$ . Положения точек  $(0.354, 1.508, -0.785)$  и  $(0.354, 1.508, 4.215)$  выделены черной и красной точками, соответственно. (б)

Контурный график распознающего функционала  $Tol$ , построенный для ИСЛАУ (1.110). Области  $Tol < 0$  и  $Tol \geq 0$  выделены синим и желтым цветами, соответственно. Положение точки  $(0.354, 1.508)$  отмечено черным крестиком

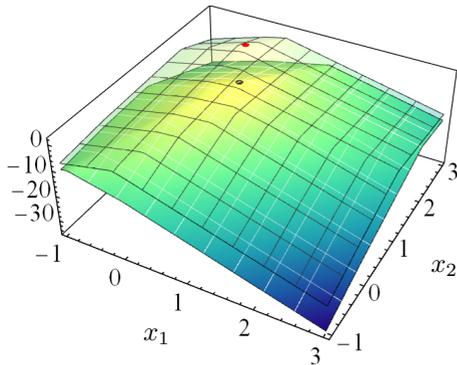
ИСЛАУ (1.91) с неравномерно уширенным вектором  $\mathbf{b}$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0.5, 6.5] \\ [-3, 18] \end{pmatrix}. \quad (1.111)$$

Неравномерное расширение интервального вектора  $\mathbf{b}$  правой части приводит к тому, что максимальное значение распознающего функционала  $Tol$  становится равным 1.831 и достигается в точке  $(0.008, 2.315)$ . Множество  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.111) непусто, а значит, разрешимость ЛЗД достигнута. На Рис. 1.22(а) показаны поверхности функционала  $Tol$  до и после неравномерного уширения вектора  $\mathbf{b}$  ИСЛАУ (1.91). Видно, что в отличие от случая равномерного уширения вектора правой части ИСЛАУ (1.91) формы поверхности и положения безусловных максимумов распознающего функционала  $Tol$  до и после неравномерного уширения вектора  $\mathbf{b}$  не совпадают. В дополнение к приведенным трехмерным графикам на Рис. 1.22(б) представлен контурный график

функционала Tol, построенный для ИСЛАУ (1.111).

(а)



(б)

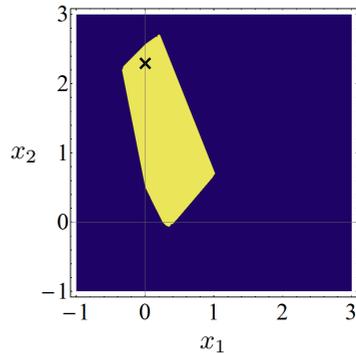


Рис. 1.22. (а) Трехмерные графики функционала Tol, построенные для ИСЛАУ (1.91) до (нижняя поверхность) и после (верхняя поверхность) неравномерного уширения вектора  $\mathbf{b}$ . Положения точек  $(0.354, 1.508, -0.785)$  и  $(0.008, 2.315, 1.831)$  выделены черной и красной точками, соответственно. (б) Контурный график распознающего функционала Tol, построенный для ИСЛАУ (1.111). Области  $Tol < 0$  и  $Tol \geq 0$  выделены синим и желтым цветами, соответственно. Положение точки  $(0.008, 2.315)$  отмечено черным крестиком

Теперь найдем значения величины  $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  стр. 139, модуль которой является количественной мерой неразрешимости ЛЗД для ИСЛАУ (1.91) и мерой разрешимости ЛЗД для двух ИСЛАУ (1.110) и (1.111). Безусловные максимумы функционала  $Tol_0$  (1.109), а также значения величины  $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (1.83) для данных интервальных линейных систем равны

до коррекции

$$\text{ИСЛАУ (1.91):} \quad \mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.193, \quad \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.018,$$

после коррекции

$$\text{ИСЛАУ (1.110):} \quad \mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.371, \quad \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.722,$$

$$\text{ИСЛАУ (1.111):} \quad \mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.274, \quad \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = -1.024.$$

Напомним, что ЛЗД разрешима, если  $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$ , и отрицательные

значения  $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  свидетельствуют о непустоте допускового множества решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ. Получается, что использование обеих количественных характеристик степени разрешимости ЛЗД позволило нам корректно установить случаи несовместности и совместности линейной задачи о допусках для всех трех ИСЛАУ (1.91), (1.110), (1.111). Заметим, что для каждой интервальной системы уравнений *оба* условия (i) и (ii) теоремы 1.4.7 (см. стр. 101) либо выполняются, либо не выполняются, что обеспечивает достоверность информации о знаках найденных значений  $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Что касается ответа на вопрос о том, какая из ЛЗД — для ИСЛАУ (1.110) или ИСЛАУ (1.111) — «более совместна», то предпочтение стоит отдать результату, полученному с использованием величины  $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ : ЛЗД для ИСЛАУ (1.110) «имеет больший запас» устойчивой разрешимости, чем ЛЗД для ИСЛАУ (1.111). ■

#### 1.6.4 Коррекция ИСЛАУ: изменение матрицы

Обсудим, как можно добиться разрешимости ЛЗД путем коррекции интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ, для которой имеет место

$$\text{rad } \mathbf{b}_i > 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^n \text{rad } \mathbf{a}_{ij} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Как и в случае коррекции вектора правой части  $\mathbf{b}$  ИСЛАУ путем его равномерного и неравномерного уширения, мы рассмотрим два приема — равномерное и неравномерное сужение интервальных элементов матрицы  $\mathbf{A}$  — и проиллюстрируем их применение примерами.

Идея коррекции матрицы  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ заключается в том, чтобы заменить ее интервальной матрицей  $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$  такой, что

$$\begin{aligned} \text{rad}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}) &< \text{rad } \mathbf{A}, \\ \text{mid}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}) &= \text{mid } \mathbf{A}, \end{aligned}$$

и тем самым достичь разрешимости ЛЗД для ИСЛАУ с интервальными матрицей  $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$  и неизменным вектором правой части  $\mathbf{b}$ . Операция, обозначаемая через « $\ominus$ » (2.8), называется внутренним вычитанием в полной интервальной арифметике Каухера  $\mathbb{KR}$  (см. стр. 200).

Матрица  $\mathbf{E}$ , которая вычитается с помощью операции « $\ominus$ » из матрицы  $\mathbf{A}$  исходной ИСЛАУ, является матрицей размера  $m \times n$  с уравновешенными интервальными элементами  $e_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}]$ , причем значения

точечных величин  $e_{ij}$  удовлетворяют двум условиям:

$$0 \leq e_{ij} \leq \text{rad } \mathbf{a}_{ij} \quad \text{для всех } i, j, \quad (1.112a)$$

$$\sum_{j=1}^n e_{ij} |\tau_j| = K, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.112b)$$

где  $K$  — положительная постоянная,  $\tau_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  — аргументы безусловного максимума распознающего функционала  $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{Tol}(\tau, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = T < 0.$$

Поскольку для двух интервалов  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{x}$  из  $\mathbb{IR}$  таких, что  $\text{rad } \mathbf{x} \geq \text{rad } \mathbf{s}$ , имеет место  $|\mathbf{x} \ominus \mathbf{s}| = |\mathbf{x}| - |\mathbf{s}|$ , то

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) = K + \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = K + T,$$

и, выбирая  $K \geq |T|$ , мы обеспечиваем разрешимость ЛЗД для интервальной линейной системы с новой матрицей  $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$  и вектором  $\mathbf{b}$ .

Если же мы выберем постоянную  $K$  такой, что  $0 < K \leq \Delta$ ,

$$\Delta := \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{j=1}^n |\tau_j| \text{rad } \mathbf{a}_{ij} \right\} > 0, \quad (1.113)$$

то после коррекции линейная задача о допусках для ИСЛАУ с матрицей  $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$  и вектором  $\mathbf{b}$  будет «более разрешима», чем она была для ИСЛАУ с тем же интервальным вектором  $\mathbf{b}$  и матрицей  $\mathbf{A}$ .

Стоит заметить, что система уравнений (1.112a)–(1.112b) недоопределена, а значит, интервальную  $m \times n$ -матрицу  $\mathbf{E}$  такую, что множество  $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ , можно выбрать неединственным образом.

Все вышеизложенное относилось к случаю равномерного сужения интервальных элементов матрицы  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ, для которой ЛЗД неразрешима. Теперь сделаем несколько комментариев относительно неравномерного сужения элементов интервальной матрицы  $\mathbf{A}$ . Для уменьшения радиусов интервальных элементов, расположенных в различных строках матрицы  $\mathbf{A}$ , пропорционально заданным величинам  $v_i > 0$ , так же, как в случае неравномерного уширения вектора  $\mathbf{b}$  ИСЛАУ, можно ввести масштабирующий вектор  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^\top$ . Тогда, решая систему уравнений (1.112a)–(1.112b), в которой  $e_{ij}$  заменены на  $v_i e_{ij}$ ,

$i = 1, 2, \dots, m$  мы можем построить матрицу  $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ , интервальная линейная задача с которой (и неизменным вектором  $\mathbf{b}$ ) разрешима.

**Пример 47 (Коррекция ИСЛАУ изменением матрицы)** Вернемся к ИСЛАУ (1.91):

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [7, 8] \end{pmatrix}.$$

Как нам известно из ранее рассмотренного примера (см. стр. 139), линейная задача о допусках для ИСЛАУ (1.91) несовместна:

$$\begin{aligned} T = \text{Tol}(\tau, \mathbf{A}, \mathbf{b}) &= -0.785 \rightarrow |T| = 0.785, \\ \tau &= \text{Arg max}_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = (0.354, 1.508) \rightarrow |\tau_1| = 0.354, |\tau_2| = 1.508. \end{aligned}$$

Поочередно прибегнем к равномерному и неравномерному сужению интервальных элементов матрицы  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ (1.91) для достижения разрешимости ЛЗД. Начнем с *равномерного* сужения матрицы  $\mathbf{A}$ .

Первым шагом в решении системы уравнений (1.112a)–(1.112b) будет нахождение точечной матрицы

$$\text{rad } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 1.0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Значит, для построения интервальной матрицы  $\mathbf{E}$  с уравновешенными интервальными элементами  $\mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}]$  необходимо выбрать такое значение  $e = e_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , которое удовлетворяет следующей системе неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq e \leq 1.5 = \text{rad } \mathbf{a}_{11}, \\ 0 \leq e \leq 0.5 = \text{rad } \mathbf{a}_{12}, \text{rad } \mathbf{a}_{22}, \\ 0 \leq e \leq 1.0 = \text{rad } \mathbf{a}_{21}, \\ 0.354 \cdot e + 1.508 \cdot e = K \geq |T| = 0.785 \end{array} \right. \rightarrow 0.422 \leq e \leq 0.500$$

Остановим свой выбор на значении  $e = 0.5$ .

Перейдем к нахождению матрицы  $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ . Согласно (2.8) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \ominus \mathbf{E} &= \begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} \ominus \begin{pmatrix} [-0.5, 0.5] & [-0.5, 0.5] \\ [-0.5, 0.5] & [-0.5, 0.5] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [2 - (-0.5), 5 - 0.5] & [1 - (-0.5), 2 - 0.5] \\ [-7 - (-0.5), -5 - 0.5] & [6 - (-0.5), 7 - 0.5] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{A} \ominus \mathbf{E} = \begin{pmatrix} [2.5, 4.5] & [1.5, 1.5] \\ [-6.5, -5.5] & [6.5, 6.5] \end{pmatrix}. \quad (1.114)$$

Для того, чтобы установить разрешимость ЛЗД для ИСЛАУ (1.91) с матрицей  $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ , максимизируем распознающий функционал

$$\text{Tol}(x, \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) = \min \{0.5 - |3.5 - ([2.5, 4.5] \cdot x_1 + 1.5 \cdot x_2)|, \\ 0.5 - |7.5 - ([-6.5, -5.5] \cdot x_1 + 6.5 \cdot x_2)|\}.$$

Безусловный максимум функционала  $\text{Tol}(x, \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b})$  достигается в точке  $(0.354, 1.508)$  и равен  $0.146 = T + K = -0.785 + 1.862e$ . В связи с тем, что  $\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) > 0$ , для интервальной линейной системы с вектором  $\mathbf{b}$  и матрицей  $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ , полученной в результате коррекции правой части ИСЛАУ (1.91), ЛЗД является разрешимой.

Теперь произведем *неравномерное* сужение интервальных элементов матрицы  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ (1.91). Выберем веса  $v_i$ , пропорционально которым будет происходить уменьшение радиусов интервалов в первой и второй строках матрицы, и сформируем масштабирующий вектор  $v$ :

$$v = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.9 \end{pmatrix} \rightarrow \text{diag } v = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

В случае неравномерного сужения матрицы  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ интервальная матрица  $\mathbf{E}$  размера  $m \times n$ , вычитаемая из матрицы  $\mathbf{A}$  с помощью операции « $\ominus$ », может быть представлена в виде

$$\mathbf{E} = \text{diag } v \cdot \begin{pmatrix} [-e, e] & [-e, e] \\ [-e, e] & [-e, e] \end{pmatrix},$$

Значение  $e$  определяется после решения системы неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq v_1 \cdot e \leq 1.5 = \text{rad } \mathbf{a}_{11}, \\ 0 \leq v_1 \cdot e \leq 0.5 = \text{rad } \mathbf{a}_{12}, \\ 0 \leq v_2 \cdot e \leq 1.0 = \text{rad } \mathbf{a}_{21}, \\ 0 \leq v_2 \cdot e \leq 0.5 = \text{rad } \mathbf{a}_{22}, \\ 0.354 \cdot v_1 \cdot e + 1.508 \cdot v_1 \cdot e \geq 0.785 = |T|, \\ 0.354 \cdot v_2 \cdot e + 1.508 \cdot v_2 \cdot e \geq 0.785 = |T| \end{array} \right. \rightarrow 0.468 \leq e \leq 0.5.$$

Мы выберем  $e = 0.5$  и запишем

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} [-0.50, 0.50] & [-0.50, 0.50] \\ [-0.45, 0.45] & [-0.45, 0.45] \end{pmatrix}.$$

Тогда результатом операции « $\ominus$ » является матрица

$$\mathbf{A} \ominus \mathbf{E} = \begin{pmatrix} [2.50, 4.50] & [1.50, 1.50] \\ [-6.55, -5.45] & [6.45, 6.55] \end{pmatrix} \quad (1.115)$$

Проверим, разрешима ли ЛЗД для ИСЛАУ (1.91) с матрицей  $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ , полученной в результате неравномерного сужения матрицы  $\mathbf{A}$ . Так как безусловным максимумом распознающего функционала

$$\text{Tol} = \min \{0.5 - |3.5 - ([2.50, 4.50] \cdot x_1 + [1.50, 1.50] \cdot x_2)|, \\ 0.5 - |7.5 - ([-6.55, -5.45] \cdot x_1 + [6.45, 6.55] \cdot x_2)|\}$$

является точка  $(0.358, 1.498, 0.142)$ , то множество  $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ .

Напоследок обсудим, какой запас устойчивой разрешимости имеют интервальные линейные системы с матрицами (1.114) и (1.115), полученными в результате равномерного и неравномерного сужения матрицы  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ (1.91). Найдем для всех трех ИСЛАУ безусловные максимумы функционала  $\text{Tol}_0$  (1.109) и значения величины  $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (1.83):

до коррекции

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.193, \quad \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.018,$$

после коррекции

$$\begin{pmatrix} [2.50, 4.50] & [1.50, 1.50] \\ [-6.50, -5.50] & [6.50, 6.50] \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.035, \quad \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.250, \\ \begin{pmatrix} [2.50, 4.50] & [1.50, 1.50] \\ [-6.55, -5.45] & [6.45, 6.55] \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.029, \quad \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.250.$$

ЛЗД разрешима, если  $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$ , и  $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) < 0$  означает непустоту допускового множества решений ИСЛАУ. Несмотря на то, что для двух ИСЛАУ с интервальными матрицами (1.114) и (1.115) не выполняется условие (ii) теоремы 1.4.7 (см. стр. 101), использование обеих характеристик степени разрешимости ЛЗД позволило нам верно определить, с какими интервальными матрицей и вектором линейная задача о допусках разрешима или неразрешима.

На Рис. 1.23 показаны непустые допусковые множества решений ИСЛАУ с матрицами (1.114) и (1.115) после выполнения коррекции исходных данных ЛЗД. Видно, что допусковое множество решений ИСЛАУ с матрицей (1.115) меньше, чем то же множество ИСЛАУ (1.114). Значит, для последней интервальной линейной системы ЛЗД более разрешима. На этом основании можно утверждать, что величина  $\mathcal{F}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , являющаяся безусловным максимумом функционала  $\text{ToI}_0$  (1.109), является более точной количественной характеристикой степени разрешимости ЛЗД. ■

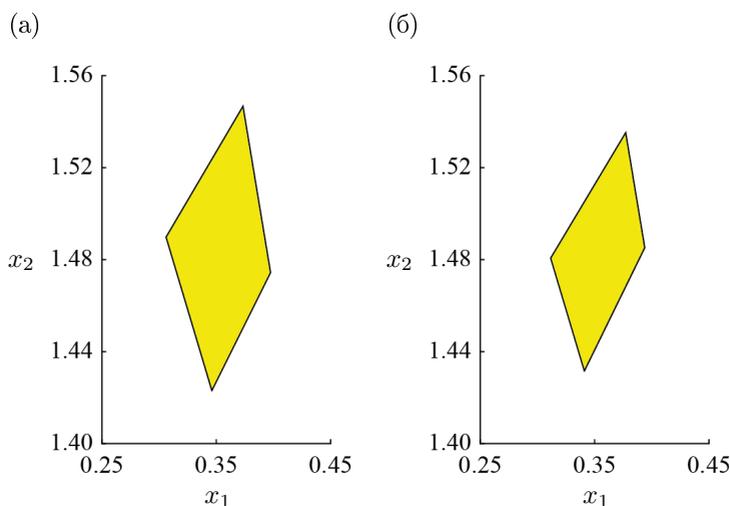


Рис. 1.23. Допусковые множества решений двух ИСЛАУ с матрицей (1.114) (а) и (1.115) (б), полученными в результате коррекции матрицы ИСЛАУ (1.91). Для построения множеств АЕ-решений использовалась функция `EqnTo12D` пакета `IntLinInc2D` для `MATLAB` [17]

### Ав- и вА-стратегии достижения разрешимости линейной задачи о допусках.

Как мы убедились, уширение вектора правой части  $\mathbf{b}$  и сужение интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ, выполняемые независимо друг от друга, приводят к разрешимости ЛЗД. Если же мы применим оба приема к одной и той же интервальной линейной системе поочередно, то разрешимости

мость линейной задачи о допусках будет достигнута *комбинированным* способом. В зависимости от порядка изменения матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора  $\mathbf{b}$  ИСЛАУ мы будем прибегать к  $\mathbf{A}\mathbf{b}$ - или  $\mathbf{b}\mathbf{A}$ -типам коррекции данных ЛЗД, при этом первый этап процесса — сужение элементов матрицы  $\mathbf{A}$  в случае выполнения коррекции  $\mathbf{A}\mathbf{b}$ -типа или уширение компонент вектора  $\mathbf{b}$  при выборе  $\mathbf{b}\mathbf{A}$ -коррекции — не обязательно должен приводить к разрешимости линейной задачи о допусках.

Авторами работы [22] была продемонстрирована техника комбинированной  $\mathbf{A}\mathbf{b}$ -стратегии для достижения разрешимости ЛЗД, предложенная С. П. Шарым [14]. В работе [22] разрешимость ЛЗД была достигнута путем коррекции правой части и матрицы ИСЛАУ, а также комбинацией этих способов, и, кроме того, показаны закономерности изменения положения решения ИСЛАУ  $\text{Arg max Tol}$  в зависимости от способа коррекции элементов интервальной матрицы системы.

### 1.6.5 Построение бруса решения задачи

После того, как разрешимость ЛЗД с матрицей  $\mathbf{A}$  и вектором  $\mathbf{b}$  установлена и достигнута, можно переходить к последнему из трех этапов решения линейной задачи о допусках — построению бруса решения.

«*Центровой подход*» к внутреннему оцениванию допускового множества решений ИСЛАУ заключается в выборе некоторой точки  $y \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и ее использовании в качестве *центра* искомого бруса внутренней оценки. Мы рассмотрим «центровой подход» в том виде, в каком он был предложен авторами работы [23] В. В. Шайдуровым и С. П. Шарым. К достоинствам метода В. В. Шайдурова, предназначенного для конструирования бруса решения ЛЗД вокруг заданного центра, можно отнести простоту и удобство компьютерной реализации, однако точность внутренней оценки, получаемой с помощью данного метода, в существенной мере зависит от ширины матрицы  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ: чем она меньше, тем выше точность.

**Алгоритм метода В. В. Шайдурова** для построения бруса внутренней оценки множества  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ имеет следующий вид:

1. Выбрать некоторую точку  $y \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

2. Для выбранной точки  $y$  вычислить

$$r_i = \frac{\left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} y_j \right|}{\sum_{j=1}^n |\mathbf{a}_{ij}|}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.116)$$

3. Определить величину  $\varrho := \min_{1 \leq i \leq m} r_i$ .

4. Построить интервальный вектор

$$y + \varrho \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top,$$

который является внутренней оценкой допускового множества решений ИСЛАУ  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ , т. е.  $(y + \varrho \mathbf{e}) \subseteq \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

**Пример 48 (Метод В.В. Шайдурова бруса внутренней оценки допускового множества)** Используя метод В. В. Шайдурова, построим брус внутренней оценки множества  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.110)

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 9] \\ [2, 13] \end{pmatrix},$$

которая была получена в результате коррекции ИСЛАУ (1.91) путем равномерного уширения интервальных компонент вектора  $\mathbf{b}$ .

Нашим первым шагом будет выбор некоторой точки — центра будущего бруса внутренней оценки — из допускового множества решений ИСЛАУ (1.110), изображенного на Рис. 1.21. Выберем  $y = (-0.2, 0.5)$  и проверим принадлежность данной точки множеству  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , для чего определим в ней значение распознающего функционала Tol (1.96):

$$y = (-0.2, 0.5) \rightarrow \text{Tol}(y, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = 1.5 > 0.$$

Вычислим значения величин  $r_1$  и  $r_2$ , определяемых в (1.116):

$$r_1 = \frac{5.5 - |3.5 - ([2.0, 5.0] \cdot (-0.2) + [1.0, 2.0] \cdot 0.5)|}{5 + 2} = 0.214,$$

$$r_2 = \frac{5.5 - |7.5 - ([-7.0, -5.0] \cdot (-0.2) + [6.0, 7.0] \cdot 0.5)|}{7 + 7} = 0.143.$$

Значит,

$$\varrho = \min(r_1, r_2) = 0.143,$$

и брусом решения ЛЗД для ИСЛАУ (1.110) является

$$y + \varrho \cdot e = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 1.0 \end{pmatrix} + 0.143 \cdot \begin{pmatrix} [-1.0, 1.0] \\ [-1.0, 1.0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-0.343, -0.057] \\ [0.357, 0.643] \end{pmatrix}$$

Теперь выберем в качестве центра бруса внутренней оценки множества  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.110) точку  $y = (0.354, 1.508)$ , которая, как мы ранее установили (см. стр. 140), является аргументом безусловного максимума распознающего функционала Tol:  $\text{Tol}(y, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = 4.215$ .

В таком случае

$$r_1 = \frac{5.5 - |3.5 - ([2.0, 5.0] \cdot 0.354 + [1.0, 2.0] \cdot 1.508)|}{5 + 2} = 0.602,$$

$$r_2 = \frac{5.5 - |7.5 - ([-7.0, -5.0] \cdot 0.354 + [6.0, 7.0] \cdot 1.508)|}{7 + 7} = 0.301.$$

Получается, что  $\varrho = r_2 = 0.301$ , и внутренней оценкой допускового множества решений ИСЛАУ (1.110) является интервальный вектор

$$y + \varrho \cdot e = \begin{pmatrix} 0.354 \\ 1.508 \end{pmatrix} + 0.301 \cdot \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0.053, 0.655] \\ [1.207, 1.809] \end{pmatrix}.$$

На Рис. 1.24 показаны множество  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (1.110), а также брусы его внутренней оценки, построенные вокруг двух разных центров  $y = (-0.2, 0.5)$  и  $y = (0.354, 1.508)$ .

Почему размер бруса, центр которого находится в точке  $(-0.2, 0.5)$ , значительно меньше размера бруса, сконструированного вокруг точки  $(0.354, 1.508)$ ? Можно заметить, что числитель величины  $r$  (1.116), значение которой задает «размахи» результирующего интервального вектора по осям  $x_1$  и  $x_2$ , представляет собой выражение, определяющее распознающий функционал Tol (1.96), в то время как знаменателем этой величины является сумма модулей интервальных элементов, расположенных в одной строке интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ. Знаменатель величины  $r$  не зависит от положения центра, вокруг которого строится брус-решение ЛЗД, и, следовательно, размер получаемой внутренней оценки множества  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ полностью определяется значением распознающего функционала Tol в точке, которая служит центром оценивающего бруса. Поэтому можно утверждать,

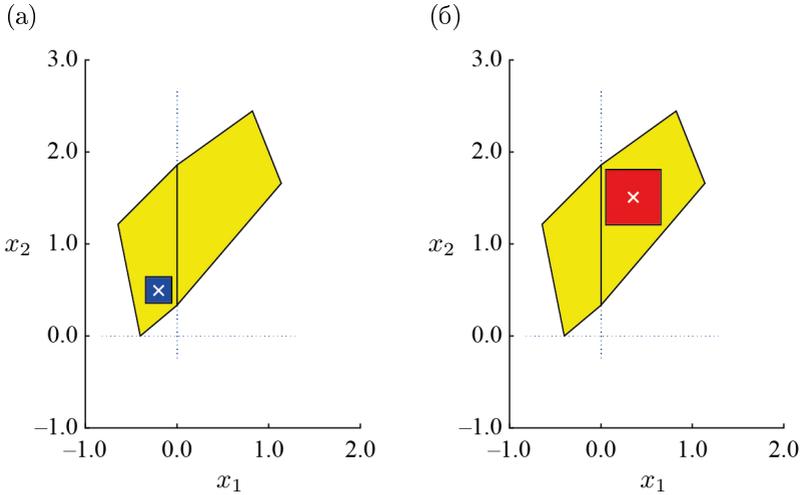


Рис. 1.24. Допусковое множество решений ИСЛАУ (1.110) и брусы его внутренней оценки, построенные вокруг точек  $(-0.2, 0.5)$  (а) и  $(0.354, 1.508)$  (б) с помощью метода В. В. Шайдурова. Положения центров оценивающих брусков выделены белыми крестиками. Для построения множества  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ была использована функция `EqnTol2D` пакета `IntLinInc2D` для `MATLAB` [17]

что при использовании метода В. В. Шайдурова размер бруса внутренней оценки допустимого множества решений ИСЛАУ (1.110) с центром в точке  $(0.354, 1.508)$  является максимально большим. Подробное рассмотрение методологии внутреннего оценивания множеств решений ИСЛАУ дано в главах 6 и 11 книги [2]. Различные виды оценок множеств решений обсуждаются в работах [24], [25], [26].

В завершение рассмотрения вопроса о построении бруса решения ЛЗД с помощью метода В. В. Шайдурова сделаем еще один комментарий, касающийся определения центра оценивающего бруса. На практике выбор его положения диктуется конкретными требованиями к входным данным линейной задачи о допусках, и потому нельзя однозначно утверждать, что центр в точке  $\text{Arg max Tol}$  будет «лучшим» выбором по той причине, что он позволяет получить оценивающий брус максимально большого размера. Хотя, конечно, в определении задачи линейной задачи о допусках, данном на стр. 132, фигурирует именно нахождение

по возможности большего бруса, который содержится в допусковом множестве решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ. ■

## 1.7 Решение интервальных систем нелинейных алгебраических уравнений

Перейдем от вычисления значения функций к решению уравнений и их систем. Начнём рассмотрение с задач *общего* вида, т.е., в общем случае, *нелинейных*. Для общего вида уравнений невозможно использовать какие-то специальные способы оценивания в силу бесконечного разнообразия их аналитического вида. Таким образом, можно исходить только из самых общих предпосылок, которые всегда выполнимы.

Численное решение простейшего нелинейного точечного уравнения с одной переменной вида  $f(x) = 0$  состоит из двух этапов:

- 1) *отделение корней* нелинейного уравнения, заключающееся в установлении аналитическим или графическим способом приближенных значений искомых корней или интервалов, каждый из которых содержит лишь один корень нелинейного уравнения,
- 2) *уточнение приближенных значений корней* до заданной степени точности с помощью выбранного итерационного метода: метода половинного деления (метода бисекции), метода простой итерации, метода Ньютона, метода хорд и проч.

Рассмотрим, как *интервальные* численные методы могут быть использованы для нахождения решений точечных нелинейных уравнений и систем точечных нелинейных уравнений, а также внешнего оценивания объединенного множества решений интервальных нелинейных уравнений и их систем. Далее нам предстоит познакомиться с различными модификациями интервального метода Ньютона — одномерного и многомерного. Отдельное внимание будет уделено интервальному методу Кравчика, частным случаем которого является итерационный метод Кравчика для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ вида  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  (см. стр. 129).

### 1.7.1 Одномерный интервальный метод Ньютона

Одномерный метод Ньютона является популярным способом нахождения корней уравнений. Его интервальное расширение лежит в

основе многих вычислительных конструкций.

Опишем процесс получения интервального аналога метода Ньютона. Пусть имеется функция

$$f : \mathbb{R} \supseteq \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R},$$

для которой известен интервал локализации  $\mathbf{X}$  нуля  $x^*$

$$f(x^*) = 0.$$

Также, функция  $f$  дифференцируема на интервале  $\mathbf{X}$ .

Тогда для любой точки  $\tilde{x} \in \mathbf{X}$  в силу *теоремы Лагранжа о конечных приращениях* справедливо

$$f(\tilde{x}) - f(x^*) = (\tilde{x} - x^*) \cdot f'(\xi) \quad (1.117)$$

где  $\xi$  — некоторая точка между  $\tilde{x}$  и  $x^*$ .

Полагая в (1.117)  $f(x^*) = 0$ , можем записать

$$x^* = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\xi)}, \quad f'(\xi) \neq 0. \quad (1.118)$$

Пользуясь включением  $f'(\xi) \in \mathbf{f}'(\mathbf{X})$ , где  $\mathbf{f}'(\mathbf{X})$  — какая-либо интервальная оценка производной от функции  $f$  на интервале локализации  $\mathbf{X}$ , мы можем интервализовать равенство (1.118):

$$x^* \in \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{\mathbf{f}'(\mathbf{X})}, \quad 0 \notin \mathbf{f}'(\mathbf{X}). \quad (1.119)$$

**Определение 1.7.1** Пусть заданы функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и интервальная оценивающая функция  $\mathbf{f}'$  для её производной. Отображение

$$\mathcal{N} : \mathbb{IR} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR},$$

действующее по правилу

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{\mathbf{f}'(\mathbf{X})} \quad (1.120)$$

называется (одномерным) интервальным оператором Ньютона для  $f$ .

Итерационная формула *интервального метода Ньютона* имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(k+1)} &\leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}), \\ \tilde{x}^{(k)} &\in \mathbf{X}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.121)$$

Выбор пересечения  $\mathbf{X} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x})$  в качестве нового, более точного интервала локализации корня  $x^*$  нелинейного точечного уравнения  $f(x) = 0$  на каждой итерации обусловлен тем, что любой нуль функции  $f$  на интервале  $\mathbf{X}$  лежит также в  $\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x})$ . Поэтому можно ожидать, что результирующий интервал  $(\mathbf{X} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}))$  будет хотя бы не хуже  $\mathbf{X}$ . Так же, как у обычного неинтервального метода Ньютона, асимптотический порядок сходимости интервального метода Ньютона к нулю функции  $f$  на интервале  $\mathbf{X}$  является квадратичным.

Если итерационный процесс одномерного интервального метода Ньютона организован правильно, то на каждом шаге вычислений мы будем получать интервал  $\mathbf{X}^{(k)}$  все меньшей ширины. При достижении требуемой точности локализации решения итерационное уточнение корня заданного нелинейного уравнения прекращается.

Какие проблемные ситуации могут возникать при выполнении итераций одномерного интервального метода Ньютона?

1.  $0 \in \mathbf{f}'(\mathbf{X})$

В этом случае необходим выход за рамки классической интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$ : например, деление на нульсодержащие интервалы допускается в интервальной арифметике Кэхэна.

2.  $\mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x})^{(k)} = \emptyset$

Получение пустого пересечения  $\mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)})$  сигнализирует о том, что на  $\mathbf{X}^{(k)}$ , а следовательно, и изначально выбранном интервале локализации  $\mathbf{X}$ , отсутствует решение нелинейного уравнения  $f(x) = 0$ . После получения пустого пересечения вычислительный процесс должен быть прекращен, так как арифметические операции с пустым множеством не опеределены.

3.  $\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}) = \mathbf{X}^{(k)}$

«Заставивание» — весьма неблагоприятный сценарий развития итераций. Эта ситуация возникает в том случае, если

$$\mathbf{X}^{(k)} \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}).$$

Устранить «застаивание» можно путем дробления исходного интервала локализации  $\mathbf{X}$  на несколько подынтервалов, к которым поочередно применяется интервальный метод Ньютона, и последующего объединения полученных результатов:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}' \cup \mathbf{X}''.$$

Часто используемым приемом является дробление интервала  $\mathbf{X}$  на два интервала равной ширины — так называемая *бисекция*.

Для того, чтобы закончить обсуждение интервального метода Ньютона, следует заметить, что наряду с одномерным интервальным оператором Ньютона можно ввести *наклонный интервальный оператор Ньютона* как отображение  $\mathcal{N} : \mathbb{IR} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}$ , действующее по правилу

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\mathbf{X}, \tilde{x})}, \quad 0 \notin f'(\mathbf{X}, \tilde{x}). \quad (1.122)$$

**Пример 49 (Интервальный метод Ньютона для численного решения уравнения)** Воспользуемся интервальным методом Ньютона для численного решения уравнения

$$x^3 e^x = 0.5. \quad (1.123)$$

В первую очередь построим график функции

$$f(x) = x^3 e^x - 0.5 \quad (1.124)$$

для того, чтобы определить, сколько корней имеет уравнение  $f(x) = 0$  и установить интервалы их локализации. Согласно Рис. 1.25, единственный корень данного уравнения принадлежит интервалу

$$\mathbf{X} = [0.5, 1.0].$$

На выбранном интервале  $\mathbf{X}$  сама функция  $f(x)$ , а также её первая и вторая производные по  $x$  непрерывны;  $f'(x)$  и  $f''(x)$  знакопостоянны.

Как мы убедились (см. пример на стр. 67), качество интервальной оценки области значения функции в значительной степени зависит от вида выражения, которое ее задает. По этой причине интервальной оценивающей функцией для первой производной функции  $f(x)$  (1.124) по  $x$  нам послужит естественное интервальное расширение функции

$$f'(x) = x^2 e^x (x + 3),$$

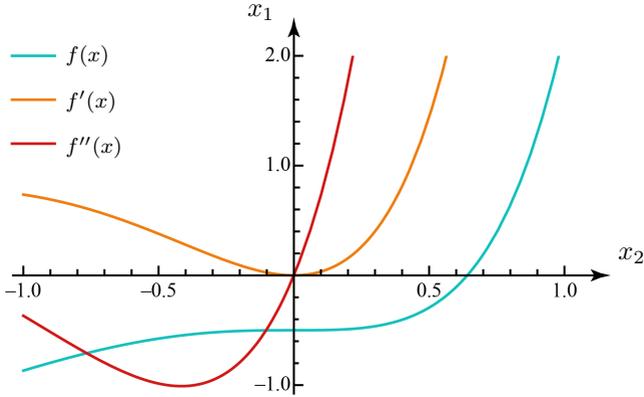


Рис. 1.25. Графики функции  $f(x) = x^3 e^x - 0.5$ , а также ее первой и второй производных по  $x$ , построенные для численного решения уравнения (1.123) с помощью интервального метода Ньютона

так как в выражении, ее задающем, приведены подобные слагаемые.

Наконец, для организации вычислительного процесса нам необходимо определиться с выбором точки  $\tilde{x} \in \mathbf{X}$ . Мы поочередно остановимся на  $\tilde{x}^{(k)} = \underline{\mathbf{X}}^{(k)}$ ,  $\tilde{x}^{(k)} = \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}$  и  $\tilde{x}^{(k)} = \overline{\mathbf{X}}^{(k)}$ . Результаты, получаемые на каждой итерации одномерного интервального метода Ньютона, приведены в таблицах 1.4, 1.5 и 1.6 соответственно.

$k$	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)})$
0	[0.50000, 1.00000]	[0.52703, 0.70373]
1	[0.52703, 0.70373]	[0.59501, 0.67891]
2	[0.59501, 0.67891]	[0.63033, 0.64618]
3	[0.63033, 0.64618]	[0.64052, 0.64126]
4	[0.64052, 0.64126]	[0.64100, 0.64101]
5	[0.64100, 0.64101]	[0.64101, 0.64101]

Таблица 1.4. Итерационное уточнение корня нелинейного уравнения (1.123) с помощью интервального метода Ньютона,

$$\tilde{x} = \underline{\mathbf{X}}$$

В зависимости от того, какая точка интервала локализации  $\mathbf{X}$  вы-

$k$	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)})$
0	[0.50000, 1.00000]	[0.50000, 0.71385]
1	[0.50000, 0.71385]	[0.63017, 0.66918]
2	[0.63017, 0.66918]	[0.64041, 0.64185]
3	[0.64041, 0.64185]	[0.64101, 0.64101]
4	[0.64101, 0.64101]	[0.64101, 0.64101]

Таблица 1.5. Итерационное уточнение корня нелинейного уравнения (1.123) с помощью интервального метода Ньютона,  $\tilde{x} = \text{mid } \mathbf{X}$

$k$	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)})$
0	[0.50000, 1.00000]	[0.50000, 0.79599]
1	[0.50000, 0.79599]	[0.50000, 0.68008]
2	[0.50000, 0.68008]	[0.59626, 0.64409]
3	[0.59626, 0.64409]	[0.64029, 0.64103]
4	[0.64029, 0.64103]	[0.64101, 0.64101]
5	[0.64101, 0.64101]	[0.64101, 0.64101]

Таблица 1.6. Итерационное уточнение корня нелинейного уравнения (1.123) с помощью интервального метода Ньютона,  $\tilde{x} = \overline{\mathbf{X}}$

брана в качестве  $\tilde{x}$ , решение нелинейного уравнения (1.123)

$$x^* = 0.64101$$

достигается после выполнения разного числа итераций:

$$\begin{aligned}
 k = 5 \quad \tilde{x} = \underline{\mathbf{X}}, \quad \text{dist}(\mathbf{X}^{(5)}, \mathbf{X}^{(6)}) &= 1.05143 \cdot 10^{-6}, \\
 k = 4 \quad \tilde{x} = \text{mid } \mathbf{X}, \quad \text{dist}(\mathbf{X}^{(4)}, \mathbf{X}^{(5)}) &= 4.25039 \cdot 10^{-7}, \\
 k = 5 \quad \tilde{x} = \overline{\mathbf{X}}, \quad \text{dist}(\mathbf{X}^{(5)}, \mathbf{X}^{(6)}) &= 6.64956 \cdot 10^{-8}.
 \end{aligned}$$

Впрочем, во всех трех случаях мы получаем одинаковый ответ

$$(0.64101)^3 \cdot e^{0.64101} \approx 0.50001.$$

Итак, корень уравнения (1.124):  $x = 0.64101$ . ■

## 1.7.2 Многомерный метод Ньютона

Рассмотрим обобщение одномерного метода Ньютона.

Пусть на брус  $\mathbf{X}$  задана система точечных нелинейных уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (1.125)$$

краткая векторная форма которой имеет вид

$$F(x) = 0, \quad (1.126)$$

где  $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))^T$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  и  $F_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  — некоторые функции от  $n$  переменных.

Используя интервальную матрицу Липшица  $\mathbf{L}$  отображения  $F$  на  $\mathbf{X}$ , запишем включение, справедливое для любых точек  $x, \tilde{x} \in \mathbf{X}$ :

$$F(x) \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(x - \tilde{x}).$$

Предположим, что  $x = x^*$  является решением заданной системы нелинейных уравнений (1.125), т. е.  $F(x^*) = 0$ . Тогда

$$0 \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(x^* - \tilde{x}).$$

Согласно характеристике Бека для множества решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ вида  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  (см. стр. 85), последнее включение имеет место в том случае, если точка  $x^*$  принадлежит объединенному множеству решений интервальной линейной системы

$$\mathbf{L}(x - \tilde{x}) = -F(\tilde{x}). \quad (1.127)$$

Введем процедуру *Encl* внешнего оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ :

$$Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}).$$

Тогда для интервальной линейной системы (1.127) справедливо

$$x^* - \tilde{x} \in Encl(\mathbf{L}, -F(\tilde{x})),$$

из которого следует, что

$$x^* \in \tilde{x} - Encl(\mathbf{L}, F(\tilde{x})).$$

**Определение 1.7.2** Пусть для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ зафиксирована процедура  $\text{Encl}$ , а для отображения

$$F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

известна интервальная матрица Липшица  $\mathbf{L} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ .

Отображение

$$\mathcal{N} : \mathbb{ID} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n,$$

задаваемое правилом

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) = \tilde{x} - \text{Encl}(\mathbf{L}, F(\tilde{x})), \quad (1.128)$$

называется интервальным оператором Ньютона на  $\mathbb{ID}$  относительно точки  $\tilde{x}$ .

Как и в одномерном случае, после выбора бруса начального приближения  $\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}$  итерационное уточнение решения системы нелинейных уравнений с помощью многомерного *интервального метода Ньютона* организуется следующим образом:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}), \quad \tilde{x}^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.129)$$

Центр разложения  $\tilde{x}^{(k)}$  следует выбирать так, чтобы значение нормы вектор-функции  $F(\tilde{x}^{(k)})$  было по возможности меньшим. Выполнение этого требования позволяет получать на каждой итерации более узкую оценку множества решений исходной системы нелинейных уравнений за счет уменьшения размера множества решений ИСЛАУ (1.127).

Обсудим, почему для построения интервального оператора Ньютона (1.128) мы прибегаем именно к процедуре внешнего оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ. В расчетной формуле обычного неинтервального метода Ньютона для решения системы уравнений

$$X^{(k+1)} \leftarrow X^{(k)} - \left( J(X^{(k)}) \right)^{-1} F(X^{(k)})$$

фигурирует  $(J(X^{(k)}))^{-1}$  — матрица, обратная к якобиану  $J(X^{(k)})$  отображения  $F$  в точке  $X^{(k)}$ . Поиск внешней оценки объединенного множества решений ИСЛАУ с матрицей  $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{(k)}$  и вектором  $\mathbf{b} = F(\tilde{x}^{(k)})$  вместо нахождения обратной интервальной матрицы для  $\mathbf{L}^{(k)}$  на каждой итерации и использование найденной внешней оценки в дальнейших вычислениях приводят к уменьшению трудоемкости метода и меньшему округлению результата.

Заметим, что рассмотренный прием также используется при построении вычислительного процесса решения формальных алгебраических уравнений с помощью субдифференциального метода Ньютона в полной интервальной арифметике Каухера (см. §2.3.1). Вычислительные методы, с помощью которых может быть произведено внешнее оценивание множеств решений ИСЛАУ вида  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , образующихся на итерациях многомерного интервального метода Ньютона, рассмотрены в §1.5 главы 1.

Проблемные ситуации, возникающие в ходе компьютерной реализации многомерного интервального метода Ньютона, а также способы их преодоления аналогичны тем, которые были рассмотрены при обсуждении одномерного интервального метода Ньютона.

**Пример 50 (Решение системы точечных нелинейных уравнений)** Решим систему точечных нелинейных уравнений

$$\begin{cases} 0.8x^2 + 1.5y^2 = 1, \\ \ln x = y, \end{cases} \quad (1.130)$$

используя многомерный интервальный метод Ньютона.

В первую очередь произведем графическое отделение корней уравнений. На Рис. 1.26 изображены эллипс с полуосями  $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ , соответствующий первому уравнению системы, кривая  $y = \ln x$ , а также кривая  $y = -\frac{8}{15}x^2$ ,  $x \neq 0$ , происхождение которой мы обсудим позже.

На Рис. 1.26 видно, что рассматриваемая система нелинейных уравнений имеет два корня. С помощью многомерного интервального метода Ньютона мы уточним корень, который локализован на интервале

$$\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}_1^{(0)} \times \mathbf{X}_2^{(0)} = [0.8, 1.2] \times [-0.2, 0.2].$$

Для системы нелинейных уравнений (1.130) можно записать

$$F = \begin{pmatrix} 0.8x^2 + 1.5y^2 - 1 \\ \ln x - y \end{pmatrix}.$$

В качестве интервальной матрицы Липшица  $\mathbf{L}$  выберем естественное интервальное расширение якобиана отображения  $F$  на  $\mathbf{X}$ :

$$L = \begin{pmatrix} 1.6x & 3y \\ \frac{1}{x} & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{L}^{(k)} = \mathbf{L}_1^{(k)} = \begin{pmatrix} 1.6\mathbf{X}_1^{(k)} & 3\mathbf{X}_2^{(k)} \\ \frac{1}{\mathbf{X}_1^{(k)}} & -1 \end{pmatrix}.$$

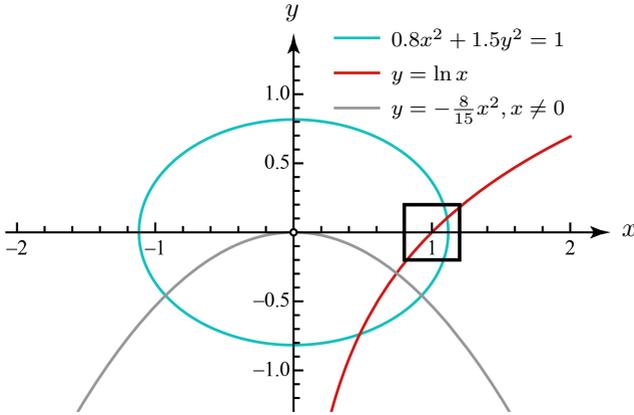


Рис. 1.26. Графики функций  $0.8x^2 + 1.5y^2 = 1$ ,  $y = \ln x$  (см. систему нелинейных уравнений (1.130)) и  $y = -\frac{8}{15}x^2, x \neq 0$ . Черной рамкой выделен брус начального приближения  $\mathbf{X}^{(0)}$ .

Найдем определитель матрицы  $L$ :

$$\det L = -1.6x - \frac{3y}{x} \quad \longrightarrow \quad \det L = 0 \text{ при } y = -\frac{8}{15}x^2, x \neq 0.$$

Таким образом, третья кривая  $y = -\frac{8}{15}x^2, x \neq 0$ , представленная на Рис. 1.26, является кривой, на которой якобиан системы нелинейных уравнений (1.130) сингулярен. Брус начального приближения  $\mathbf{X}^{(0)}$ , выбираемый для построения итераций многомерного интервального метода Ньютона, не должен содержать участка этой кривой для того, чтобы обеспечить его сходимость.

Определимся с выбором точки  $\tilde{x}$ , необходимой для выполнения итерационных вычислений. На каждой итерации мы будем выбирать

$$\tilde{x}^{(k)} = \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}.$$

Поиск внешней оценки объединенного множества решений ИСЛАУ с матрицей  $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{(k)}$  и вектором  $\mathbf{b} = F(\tilde{x}^{(k)})$  на каждой итерации многомерного интервального метода Ньютона будет выполняться с помощью интервального метода Кравчика, дополненного предварительным внешним оцениванием этого множества (см. §1.5.2 и §1.5.6). Например,

на нулевой итерации ( $k = 0$ ) мы имеем

$$\mathbf{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.6 \cdot [0.8, 1.2] & 3 \cdot [-0.2, 0.2] \\ \frac{1}{[0.8, 1.2]} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1.280, 1.920] & [-0.600, 0.600] \\ [0.833, 1.250] & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.8 \cdot 1^2 + 1.5 \cdot 0^2 - 1 \\ \ln(1) - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-0.200, -0.200] \\ [0.000, 0.000] \end{pmatrix}.$$

Предварительной внешней оценкой объединенного множества решений сформированной интервальной линейной системы с матрицей  $\mathbf{A}^{(0)}$  и вектором правой части  $\mathbf{b}^{(0)}$  является интервальный вектор-брус

$$\mathbf{X}_{\text{Кр}}^{(0)} = \begin{pmatrix} [-0.676, 0.676] \\ [-0.676, 0.676] \end{pmatrix}.$$

В выражении (1.98), которое было использовано для нахождения данной внешней оценки, выбран предобуславливатель  $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ . Далее на каждой итерации многомерного интервального метода Ньютона мы будем определять предобуславливающую матрицу таким же образом:  $\Lambda^{(k)} = (\text{mid } \mathbf{A}^{(k)})^{-1}$ .

Перед тем как перейти к уточнению  $\mathbf{X}_{\text{Кр}}^{(0)}$  с помощью интервального метода Кравчика, необходимо проверить, выполняется ли условие его сходимости  $\rho(|I - \Lambda \mathbf{A}|) < 1$  (см. пример на стр. 131):

$$|I - \Lambda^{(0)} \mathbf{A}^{(0)}| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.625 & 0.000 \\ 0.651 & -1.000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [1.280, 1.920] & [-0.600, 0.600] \\ [0.833, 1.250] & -1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{pmatrix} 0.200 & 0.375 \\ 0.417 & 0.391 \end{pmatrix} \rightarrow \rho(|I - \Lambda^{(0)} \mathbf{A}^{(0)}|) = 0.702.$$

Поскольку  $\rho(|I - \Lambda^{(0)} \mathbf{A}^{(0)}|) < 1$ , то на тридцатой итерации интервального метода Кравчика (и нулевой итерации многомерного интервального метода Ньютона!) мы получаем:

$$\mathbf{X}_{\text{Кр}}^{(31)} = \begin{pmatrix} [-0.377, 0.127] \\ [-0.472, 0.211] \end{pmatrix}, \quad \text{Dist} \left( \mathbf{X}_{\text{Кр}}^{(30)}, \mathbf{X}_{\text{Кр}}^{(31)} \right) = \begin{pmatrix} 1.519 \cdot 10^{-6} \\ 2.034 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

Согласно выражению (1.128)

$$\mathcal{N} \left( \mathbf{X}^{(0)}, \hat{x}^{(0)} \right) = \hat{x}^{(0)} - \mathbf{X}_{\text{Кр}}^{(31)} = \begin{pmatrix} [0.873, 1.377] \\ [-0.211, 0.472] \end{pmatrix},$$

и тогда

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(0)} \cap \mathcal{N} \left( \mathbf{X}^{(0)}, \tilde{x}^{(0)} \right) = \begin{pmatrix} [0.873, 1.200] \\ [-0.200, 0.200] \end{pmatrix}.$$

Результаты, получаемые на следующих итерациях многомерного интервального метода Ньютона, приведены в таблице 1.7. Как можно убедиться, решение системы точечных нелинейных уравнений (1.130) достигается на пятой итерации многомерного интервального метода Ньютона, если учитывать четвертый знак после запятой при проведении промежуточных вычислений:

$$\text{Dist} \left( \mathbf{X}^{(5)}, \mathbf{X}^{(6)} \right) = \begin{pmatrix} 1.601 \cdot 10^{-10} \\ 1.810 \cdot 10^{-10} \end{pmatrix}.$$

$k$	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{N} \left( \mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)} \right)$
0	$[0.8000, 1.2000] \times [-0.2000, 0.2000]$	$[0.8726, 1.3774] \times [-0.2113, 0.4717]$
1	$[0.8726, 1.2000] \times [-0.2000, 0.2000]$	$[0.9773, 1.2653] \times [-0.0586, 0.2980]$
2	$[0.9773, 1.2000] \times [-0.0586, 0.2000]$	$[1.0966, 1.1234] \times [0.0897, 0.1198]$
3	$[1.0966, 1.1234] \times [0.0897, 0.1198]$	$[1.1090, 1.1091] \times [0.1034, 0.1035]$
4	$[1.1090, 1.1091] \times [0.1034, 0.1035]$	$[1.1090, 1.1090] \times [0.1035, 0.1035]$
5	$[1.1090, 1.1090] \times [0.1035, 0.1035]$	$[1.1090, 1.1090] \times [0.1035, 0.1035]$

Таблица 1.7. Итерационное уточнение одного из двух корней системы точечных нелинейных уравнений (1.130) с помощью многомерного интервального метода Ньютона,  $\tilde{x} = \text{mid } \mathbf{X}$

Если бы мы выбрали центр разложения  $\tilde{x}^{(0)}$  такой, в котором чебышевская норма  $\|F(\tilde{x}^{(0)})\|_\infty$  принимает наименьшее значение

$$\tilde{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.109 \\ 0.104 \end{pmatrix} \rightarrow \|F(\tilde{x}^{(0)})\|_\infty = 4.751 \cdot 10^{-11},$$

то решение системы нелинейных уравнений (1.130) было бы достигнуто уже на первой итерации многомерного интервального метода Ньютона:

$$\mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} [1.1090, 1.1090] \\ [0.1035, 0.1035] \end{pmatrix}, \quad \text{Dist} \left( \mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)} \right) = \begin{pmatrix} 2.903 \cdot 10^{-11} \\ 4.588 \cdot 10^{-11} \end{pmatrix}.$$

Ответ:  $x = 1.1090$ ,  $y = 0.1035$ . ■

Все вышеизложенное вовсе не означает, что попытка «приблизить» многомерный интервальный метод Ньютона к своему неинтервальному аналогу непременно окажется неудачной. Итерационное уточнение решения системы точечных нелинейных уравнений

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N} \left( \mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)} \right), \quad \tilde{x}^k \in \mathbf{X}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$
$$\mathcal{N} \left( \mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)} \right) = \tilde{x}^{(k)} - \left( \mathbf{L}^{(k)} \right)^{-1} \cdot F \left( \tilde{x}^{(k)} \right),$$

основанное на нахождении на каждой итерации интервального расширения матрицы, обратной к якобиану отображения  $F$  на  $\mathbf{X}$ , также может быть успешно реализовано. Пример использования данной итерационной схемы рассмотрен в [3] на стр. 68.

**Метод Хансена-Сенгупты** Многомерный интервальный метод Ньютона имеет серьезный недостаток. Если интервальная матрица Липшица  $\mathbf{L}$  отображения  $F$  на  $\mathbf{X}$  содержит особенные вещественные матрицы, то множество решений ИСЛАУ (1.127) оказывается неограниченным, и произвести его внешнюю оценку для построения итераций является невозможным. Для решения данной проблемы был развит *метод Хансена-Сенгупты* — модифицированный многомерный интервальный метод Ньютона. Он не требует нахождения внешней оценки всего объединенного множества решений ИСЛАУ (1.127), позволяя ограничиться определением лишь той его части, которая ограничена брусом  $\mathbf{X}$ . Для выполнения локального оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ на каждой из итераций метода Хансена-Сенгупты можно использовать, например, интервальный метод Гаусса-Зейделя (см. стр. 116) или метод Кравчика (см. стр. 129).

### 1.7.3 Метод Кравчика

Ньютоновские методы имеют быструю сходимость. Обратной стороной этого достоинства является склонность к возникновению в ряде случаев колебаний в окрестности решения. Рассмотрим метод существенно уступающий в скорости, но не имеющий этого недостатка.

Вернемся к рассмотрению системы  $n$  нелинейных уравнений (1.125)

с  $n$  неизвестными, заданной на бруске  $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$ :

$$F(x) = 0,$$

где  $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))^\top$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ .

Выберем некоторую точку  $\tilde{x} \in \mathbf{X}$  и организуем относительно неё разложение функции  $F$ :

$$F(x) \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(x - \tilde{x})$$

где  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — интервальная матрица Липшица отображения  $F$  на интервальном бруске  $\mathbf{X}$ .

Если  $x = x^*$ , т. е.  $F(x^*) = 0$ , то выполняется включение

$$0 \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(x^* - \tilde{x}).$$

На данном этапе проявляется расхождение между многомерным интервальным методом Ньютона и методом Кравчика. Вместо перехода к рассмотрению ИСЛАУ (1.127) произведем домножение обеих частей полученного включения слева на точечную  $n \times n$ -матрицу  $(-A)$ :

$$0 \in -AF(\tilde{x}) - A\mathbf{L}(x^* - \tilde{x}).$$

Добавим  $(x^* - \tilde{x})$  к обеим частям соотношения:

$$x^* - \tilde{x} \in -AF(\tilde{x}) - A\mathbf{L}(x^* - \tilde{x}) + (x^* - \tilde{x}).$$

Теперь, воспользовавшись дистрибутивным соотношением (1.13), получаем равносильное выражение

$$x^* \in \tilde{x} - AF(\tilde{x}) + (I - A\mathbf{L})(x^* - \tilde{x}).$$

Поскольку мы предполагаем, что решение  $x$  системы нелинейных уравнений принадлежит брусу  $\mathbf{X}$ , то можем взять интервальное расширение по  $x \in \mathbf{X}$  правой части последнего записанного включения:

$$x^* \in \tilde{x} - AF(\tilde{x}) + (I - A\mathbf{L})(\mathbf{X} - \tilde{x}).$$

**Определение 1.7.3** Пусть определены некоторые правила, сопоставляющие брусу  $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$  точку  $\tilde{x} \in \mathbf{X}$  и вещественную матрицу  $A$  размером  $n \times n$  и пусть также  $\mathbf{L} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  — интервальная матрица Липшица отображения  $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$  на  $D$ . Отображение

$$\mathcal{H} : \mathbb{ID} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}^n,$$

задаваемое выражением

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - LF(\tilde{x}) + (I - L\mathbf{L})(\mathbf{X} - \tilde{x}) \quad (1.131)$$

называется оператором Кравчика на  $ID$  относительно точки  $\tilde{x}$ .

После того как выбран брус  $\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}$ , уточнение решения системы точечных нелинейных уравнений (1.125) с помощью *интервального метода Кравчика* можно организовать таким же образом, как и в случае реализации интервального метода Ньютона:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(k+1)} &\leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{K}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}), \\ \tilde{x}^{(k)} &\in \mathbf{X}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.132)$$

С целью получить брус  $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x})$  наименьшей ширины используются следующие рекомендации по выбору центра разложения  $\tilde{x}$  и вещественной  $n \times n$ -матрицы  $L$ :  $\tilde{x}^{(k)} = \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}$  и  $L^{(k)} = \left(\text{mid } \mathbf{L}^{(k)}\right)^{-1}$ . Впрочем, стоит отметить, что интервальный метод Кравчика «сохраняет свою работоспособность» при достаточно произвольных  $\tilde{x}$  и  $L$ .

**Пример 51 (Решение системы нелинейных уравнений интервальным методом Кравчика)** Дана система нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x^{2/3} + y^{2/3} = 2, \\ \frac{1}{x+1} + 0.3 = y, \end{cases} \quad (1.133)$$

Найдем корни данной системы точечных нелинейных уравнений, используя интервальный метод Кравчика.

Для заданной системы нелинейных уравнений можно записать

$$F = \begin{pmatrix} x^{2/3} + y^{2/3} - 2 \\ \frac{1}{x+1} + 0.3 - y \end{pmatrix}.$$

В качестве интервальной матрицы Липшица  $\mathbf{L}$  выберем естественное интервальное расширение матрицы якобиана отображения  $F$  на  $\mathbf{X}$  (см. параграф 1.3.1). Точечная матрица Якоби:

$$L = \begin{pmatrix} \frac{2}{3x^{1/3}} & \frac{2}{3y^{1/3}} \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Определитель интервальной матрицы  $L$  равен

$$\det L = -\frac{2}{3x^{1/3}} + \frac{2}{3y^{1/3}(x+1)^2} \rightarrow \det L = 0 \text{ при } y = \frac{x}{(x+1)^6}.$$

Определим брус локализации решения системы  $\mathbf{X}$ , который будет выбран в качестве начального приближения  $\mathbf{X}^{(0)}$ . Для этого построим графики функций  $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ ,  $y = 1/(x+1) + 0.3$ , соответствующих уравнениям системы (1.133), а также  $y = x/(x+1)^6$ .

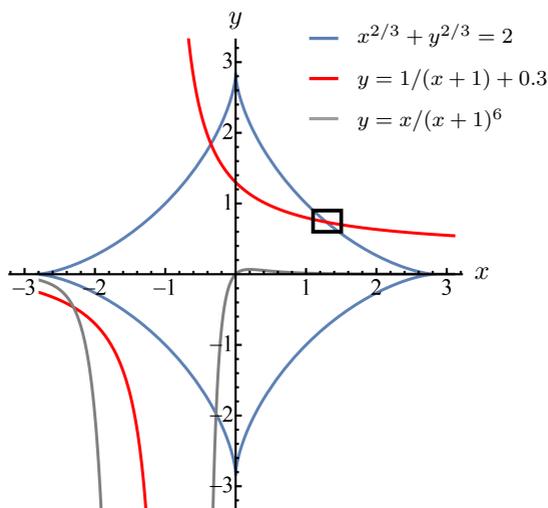


Рис. 1.27. Графики функций  $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ ,  $y = 1/(x+1) + 0.3$  (см. систему нелинейных уравнений (1.133)) и  $y = x/(x+1)^6$ . Брус начального приближения  $\mathbf{X}^{(0)}$  выделен черной рамкой.

Как видно на Рис. 1.27, система нелинейных уравнений имеет два различных корня, один из которых локализован на бресе

$$\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}_1^{(0)} \times \mathbf{X}_2^{(0)} = [1.1, 1.5] \times [0.6, 0.9].$$

Можно убедиться, что выбранное начальное приближение не пересекает график третьей функции  $y = x/(x+1)^6$ , которая представляет собой кривую, на которой якобиан системы (1.133) сингулярен. В противном случае сходимость численного метода не была бы обеспечена.

Для того, чтобы на каждой из итераций брус оператора Кравчика имел по возможности меньшую ширину, мы будем выбирать

$$\tilde{x}^{(k)} = \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}, \quad \Lambda^{(k)} = \left( \text{mid } \mathbf{L}^{(k)} \right)^{-1}.$$

Тогда на нулевой итерации ( $k = 0$ ) получаем

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3x^{1/3}} & \frac{2}{3y^{1/3}} \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{L}_q^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3\left(\mathbf{X}_1^{(k)}\right)^{1/3}} & \frac{2}{3\left(\mathbf{X}_2^{(k)}\right)^{1/3}} \\ -\frac{1}{\left(\mathbf{X}_1^{(k)} + 1\right)^2} & -1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{L}^{(0)} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3 \cdot ([1.1, 1.5])^{1/3}} & \frac{2}{3 \cdot ([0.6, 0.9])^{1/3}} \\ -\frac{1}{([1.1, 1.5] + 1)^2} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [0.582, 0.646] & [0.691, 0.790] \\ [-0.227, -0.160] & [-1.000, -1.000] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

и, значит,

$$\text{mid } \mathbf{L}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.614 & 0.741 \\ -0.193 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \Lambda^{(0)} = \begin{pmatrix} 2.124 & 1.572 \\ -0.411 & -1.304 \end{pmatrix}.$$

Также

$$\tilde{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.30 \\ 0.75 \end{pmatrix} \rightarrow F\left(\tilde{x}^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 0.017 \\ -0.015 \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условия сходимости интервального метода Кравчика для того, чтобы начать итерационный процесс:

$$\left| I - \Lambda^{(0)} \mathbf{L}^{(0)} \right| = \begin{pmatrix} 0.120 & 0.106 \\ 0.057 & 0.021 \end{pmatrix} \rightarrow \rho\left(\left| I - \Lambda^{(0)} \mathbf{L}^{(0)} \right|\right) = 0.162 < 1.$$

Спектральный радиус матрицы модулей для  $(I - \Lambda^{(0)} \mathbf{L}^{(0)})$  меньше единицы, поэтому можно ожидать сходимости интервального метода Кравчика. Результаты, получаемые на каждом шаге итерационного уточнения корня системы (1.133), приведены в таблице 1.8.

$k$	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{K}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)})$
0	$[1.1000, 1.5000] \times [0.6000, 0.9000]$	$[1.2488, 1.3285] \times [0.7226, 0.7514]$
1	$[1.2488, 1.3285] \times [0.7226, 0.7514]$	$[1.2874, 1.2896] \times [0.7365, 0.7374]$
2	$[1.2874, 1.2896] \times [0.7365, 0.7374]$	$[1.2885, 1.2885] \times [0.7370, 0.7370]$
3	$[1.2885, 1.2885] \times [0.7370, 0.7370]$	$[1.2885, 1.2885] \times [0.7370, 0.7370]$

Таблица 1.8. Итерационное уточнение одного из трех корней системы точечных нелинейных уравнений (1.133) с помощью интервального метода Кравчика

Если при проведении промежуточных вычислений мы учитываем четвертый знак после запятой, то на третьей итерации интервального метода Кравчика процесс уточнения может быть прекращен:

$$\text{Dist}(\mathbf{X}^{(3)}, \mathbf{X}^{(4)}) = \begin{pmatrix} 8.777 \cdot 10^{-7} \\ 3.683 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix}.$$

Ответ:  $x = 1.2885$ ,  $y = 0.7370$ . ■

**Бицентрированная форма оператора Кравчика** При внимательном рассмотрении можно заметить, что оператор Кравчика (1.131) является дифференциальной центрированной формой интервального расширения для отображения

$$\Phi(x) := x - AF(x)$$

с центром в точке  $\tilde{x}$  (см. §1.3.3).

Действительно, если записать выражение (1.62)

$$\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}) := f(c) + \mathbf{f}'(\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{X} - c)$$

и сравнить его с выражением

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - AF(\tilde{x}) + (I - \Lambda L)(\mathbf{X} - \tilde{x}),$$

задающим оператор Кравчика (1.131), в котором в качестве интервальной матрицы Липшица  $\mathbf{L}$  выбрано интервальное расширение якобиана отображения  $F$  на  $\mathbf{X}$ , то можно убедиться в том, что для отображения  $\Phi(x)$  дифференциальной центрированной (среднезначной) формой интервального расширения является именно оператор Кравчика.

Значит, в целях улучшения качества интервальных оценок, получаемых на итерациях интервального метода Кравчика, можно прибегнуть к построению бицентрированной среднезначной формы (см. §1.3.4) интервального расширения для отображения  $\Phi(x)$ . Этот подход подразумевает взятие пересечения двух дифференциальных центрированных форм интервальных расширений для отдельных компонент отображения  $\Phi(x)$ , взятых относительно индивидуальной пары оптимальных центров  $c_*$  и  $c^*$ . Проиллюстрируем предложение примером.

**Пример 52 (Решение системы нелинейных уравнений, бицентрированная форма оператора Кравчика)** Изменим правую часть первого уравнения нелинейной системы (1.133), в результате чего оно станет интервальным:

$$\begin{cases} x^{2/3} + y^{2/3} = [1.8, 2.0], \\ \frac{1}{x+1} + 0.3 = y. \end{cases} \quad (1.134)$$

На Рис. 1.28 показаны графики четырех функций  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1.8$ ,  $x^{2/3} + y^{2/3} = 2.0$  и  $y = 1/(x+1) + 0.3$ , а также  $y = x/(x+1)^6$ . Графики функций  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1.8$  и  $x^{2/3} + y^{2/3} = 2.0$  ограничивают область координатной плоскости, которая является «решением» первого уравнения системы (1.134). Происхождение последней функции  $y = x/(x+1)^6$  связано с выполнением проверки на сингулярность якобиана отображения  $F$  на  $\mathbf{X}$ , естественное интервальное расширение которого выбрано в качестве интервальной матрицы Липшица  $\mathbf{L}$  (см. пример на стр. 167).

Можно заметить, что система уравнений (1.134) имеет два интервальнозначных корня, один из которых локализован на брус

$$\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}_1^{(0)} \times \mathbf{X}_2^{(0)} = [0.7, 1.5] \times [0.6, 1.0].$$

Наша задача заключается в **двукратном** уточнении выбранного корня системы (1.134), принадлежащего  $\mathbf{X}^{(0)}$ , с помощью интервального метода Кравчика. Сначала мы выполним его уточнение, вычисляя на итерациях непосредственно оператор Кравчика (1.131), а затем повторим итерационное уточнение решения системы (1.134) с использованием *бицентрированной* формы оператора Кравчика.

Аналогично примеру, приведенному на стр. 167, запишем

$$F = \begin{pmatrix} x^{2/3} + y^{2/3} - [1.8, 2.0] \\ \frac{1}{x+1} + 0.3 - y \end{pmatrix},$$

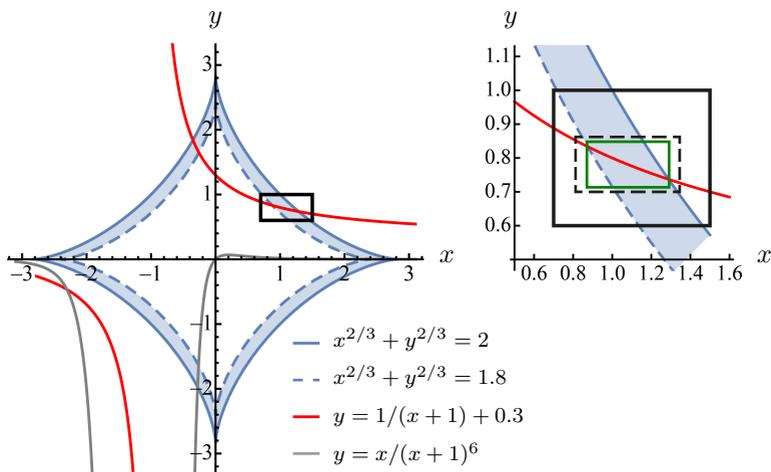


Рис. 1.28. Графики функций  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1.8$ ,  $x^{2/3} + y^{2/3} = 2.0$ ,  $y = 1/(x+1) + 0.3$  (см. систему нелинейных уравнений (1.134)) и  $y = x/(x+1)^6$ . Брус начального приближения  $\mathbf{X}^{(0)}$  показан черной рамкой. Интервальным векторам  $\mathbf{X}_{\mathcal{S}}$  и  $\mathbf{X}_{\mathcal{S},bic}$  соответствуют черная пунктирная и зеленая сплошная линии, соответственно.

а также

$$L = \begin{pmatrix} \frac{2}{3x^{1/3}} & \frac{2}{3y^{1/3}} \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & -1 \end{pmatrix}, \quad L_{\natural}^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3(\mathbf{X}_1^{(k)})^{1/3}} & \frac{2}{3(\mathbf{X}_2^{(k)})^{1/3}} \\ -\frac{1}{(\mathbf{X}_1^{(k)} + 1)^2} & -1 \end{pmatrix}.$$

На каждой итерации метода Кравчика мы будем выбирать

$$\tilde{x}^{(k)} = \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}, \quad A^{(k)} = \left( \text{mid } L^{(k)} \right)^{-1}.$$

Тогда

$$L^{(0)} = \begin{pmatrix} [0.582, 0.751] & [0.667, 0.790] \\ [-0.346, -0.160] & -1.000 \end{pmatrix}, \quad A^{(0)} = \begin{pmatrix} 2.074 & 1.511 \\ -0.525 & -1.382 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.100 \\ 0.800 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{F}(\tilde{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} [-0.073, 0.127] \\ -0.024 \end{pmatrix},$$

и сходимость интервального метода Кравчика подтверждает выполнение условия  $\rho \left( \left| I - A^{(0)} \mathbf{L}^{(0)} \right| \right) = 0.379 < 1$ . Важно отметить существенное отличие настоящей задачи от случая, рассмотренного в примере на стр. 167: теперь величина  $\mathbf{F}(\tilde{x}^{(0)})$  является интервальной.

Результаты, получаемые на дальнейших итерациях интервального метода Кравчика, приведены в таблице 1.9. Решение системы нелинейных уравнений (1.134) достигается на двенадцатой итерации:

$$\mathbf{X}_{\mathcal{K}}^{(12)} = \begin{pmatrix} [0.8124, 1.3453] \\ [0.6999, 0.8622] \end{pmatrix}, \text{Dist} \left( \mathbf{X}^{(12)}, \mathbf{X}^{(13)} \right) = \begin{pmatrix} 2.6574 \cdot 10^{-5} \\ 1.4708 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix},$$

$$\text{Dist} \left( \mathbf{X}^{(13)}, \mathbf{X}^{(14)} \right) = \begin{pmatrix} 1.2915 \cdot 10^{-5} \\ 7.1485 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

$k$	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{K} \left( \mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)} \right)$
0	$[0.7000, 1.5000] \times [0.6000, 1.0000]$	$[0.7201, 1.4383] \times [0.6534, 0.9095]$
1	$[0.7201, 1.4383] \times [0.6534, 0.9095]$	$[0.7582, 1.3995] \times [0.6694, 0.8927]$
2	$[0.7582, 1.3995] \times [0.6694, 0.8927]$	$[0.7826, 1.3751] \times [0.6834, 0.8787]$
3	$[0.7826, 1.3751] \times [0.6834, 0.8787]$	$[0.7969, 1.3608] \times [0.6913, 0.8707]$
4	$[0.7969, 1.3608] \times [0.6913, 0.8707]$	$[0.8046, 1.3531] \times [0.6956, 0.8665]$
5	$[0.8046, 1.3531] \times [0.6956, 0.8665]$	$[0.8086, 1.3492] \times [0.6978, 0.8643]$
6	$[0.8086, 1.3492] \times [0.6978, 0.8643]$	$[0.8105, 1.3472] \times [0.6989, 0.8632]$
7	$[0.8105, 1.3472] \times [0.6989, 0.8632]$	$[0.8115, 1.3462] \times [0.6994, 0.8627]$
8	$[0.8115, 1.3462] \times [0.6994, 0.8627]$	$[0.8120, 1.3457] \times [0.6997, 0.8624]$
9	$[0.8120, 1.3457] \times [0.6997, 0.8624]$	$[0.8122, 1.3455] \times [0.6998, 0.8623]$
10	$[0.8122, 1.3455] \times [0.6998, 0.8623]$	$[0.8123, 1.3454] \times [0.6999, 0.8622]$
11	$[0.8123, 1.3454] \times [0.6999, 0.8622]$	$[0.8124, 1.3453] \times [0.6999, 0.8622]$
12	$[0.8124, 1.3453] \times [0.6999, 0.8622]$	$[0.8124, 1.3453] \times [0.6999, 0.8622]$

Таблица 1.9. Итерационное уточнение одного из двух корней системы нелинейных уравнений (1.134) с помощью интервального метода Кравчика. Используется оператор Кравчика (1.131)

Зафиксируем этот результат и перейдем к построению бицентрированной среднечной формы оператора Кравчика. На каждой итерации нам необходимо определять отображение

$$\Phi(x) := x - \Lambda F(x),$$

и потому в первую очередь возникает вопрос о выборе преобуславливателя  $A$ . Мы выберем такую преобуславливающую матрицу, которая предлагается авторами работы [13]:

$$A = (\alpha \text{ mid } \mathbf{L} + \beta I)^{-1}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если производится построение оператора Кравчика (1.131), то  $\alpha = 1$ . При вычислении бицентрированной формы оператора Кравчика необходимо выбирать  $\alpha = 2$ . Значение коэффициента  $\beta$  зависит от того, является ли интервальная матрица  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\sharp}$  сингулярной: если да, то  $\beta = 1$ ; в противном случае  $\beta = 0$ .

Нетрудно заметить, что при построении «обычного» оператора Кравчика (1.131)  $A = (\text{mid } \mathbf{L})^{-1}$ , если, конечно, интервальные матрицы  $\mathbf{L}^{(k)}$  несингулярны, т. е. на каждой итерации выполняется преобуславливание «обратной средней».

На нулевой итерации интервального метода Кравчика имеем

$$\mathbf{L}^{(0)} = \begin{pmatrix} [0.582, 0.751] & [0.667, 0.790] \\ [-0.346, -0.160] & -1.000 \end{pmatrix},$$

$$\det \mathbf{L}^{(0)} = [-0.644, -0.309] \not\approx 0 \rightarrow A^{(0)} = \left( 2 \text{ mid } \mathbf{L}^{(0)} \right)^{-1}.$$

Тогда

$$\text{mid } \mathbf{L}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.667 & 0.729 \\ -0.253 & -1.000 \end{pmatrix}, \quad A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.037 & 0.755 \\ -0.262 & -0.691 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Phi^{(0)} = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(0)} \\ \Phi_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A^{(0)} \cdot \begin{pmatrix} x^{2/3} + y^{2/3} - [1.8, 2.0] \\ \frac{1}{x+1} + 0.3 - y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x - 1.037 \cdot (x^{2/3} + y^{2/3} - [1.8, 2.0]) - 0.755 \cdot \left( \frac{1}{x+1} + 0.3 - y \right) \\ y + 0.262 \cdot (x^{2/3} + y^{2/3} - [1.8, 2.0]) + 0.691 \cdot \left( \frac{1}{x+1} + 0.3 - y \right) \end{pmatrix}.$$

Следующим нашим шагом при построении бицентрированной фор-

мы оператора Кравчика является нахождение матрицы производных

$$\mathbf{L}_{\Phi}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{0.691}{x^{1/3}} + \frac{0.755}{(x+1)^2} & 0.755 - \frac{0.691}{y^{1/3}} \\ \frac{0.175}{x^{1/3}} - \frac{0.691}{(x+1)^2} & 0.309 + \frac{0.175}{y^{1/3}} \end{pmatrix}$$

и ее естественного интервального расширения

$$\left(\mathbf{L}_{\Phi}^{(0)}\right)_{\natural} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{0.691}{\left(\mathbf{X}_1^{(k)}\right)^{1/3} + \frac{0.755}{\left(\mathbf{X}_1^{(k)} + 1\right)^2} & 0.755 - \frac{0.691}{\left(\mathbf{X}_2^{(k)}\right)^{1/3}} \\ \frac{0.175}{\left(\mathbf{X}_1^{(k)}\right)^{1/3} - \frac{0.691}{\left(\mathbf{X}_1^{(k)} + 1\right)^2} & 0.309 + \frac{0.175}{\left(\mathbf{X}_2^{(k)}\right)^{1/3}} \end{pmatrix}.$$

Далее, следуя работе [13], введем два интервальных вектора

$$\mathbf{d}^{(01)} = \left(\mathbf{L}_{\Phi}^{(0)}\right)_1^{\top} = \left(1 - \frac{0.691}{\left(\mathbf{X}_1^{(k)}\right)^{1/3} + \frac{0.755}{\left(\mathbf{X}_1^{(k)} + 1\right)^2} \quad 0.755 - \frac{0.691}{\left(\mathbf{X}_2^{(k)}\right)^{1/3}}\right)^{\top},$$

$$\mathbf{d}^{(02)} = \left(\mathbf{L}_{\Phi}^{(0)}\right)_2^{\top} = \left(\frac{0.175}{\left(\mathbf{X}_1^{(k)}\right)^{1/3} - \frac{0.691}{\left(\mathbf{X}_1^{(k)} + 1\right)^2} \quad 0.309 + \frac{0.175}{\left(\mathbf{X}_2^{(k)}\right)^{1/3}}\right)^{\top}.$$

В выбранных обозначениях первое число, которое входит в верхний индекс интервального вектора  $\mathbf{d}$ , обозначает номер итерации интервального метода Кравчика, а второе число — номер строки интервальной матрицы  $\mathbf{L}_{\Phi}$  (или строки матрицы  $\Phi^{(0)}$ ).

Перейдем к нахождению двух пар оптимальных центров  $s_{\star}$  и  $s^{\star}$ , относительно которых будет производиться взятие дифференциальных центрированных форм интервальных расширений для функций, соответствующих отдельным строкам матрицы  $\Phi^{(0)}$ . Для этого нам потребуются результаты, которые содержит теорема Баумана (см. §1.3.4):

$$\mathbf{d}^{(01)} = \begin{pmatrix} [0.342, 0.658] \\ [-0.064, 0.064] \end{pmatrix} \rightarrow \frac{\text{mid } \mathbf{d}_1^{(01)}}{\text{rad } \mathbf{d}_1^{(01)}} = \frac{0.500}{0.158} = 3.173,$$

$$\frac{\text{mid } \mathbf{d}_2^{(01)}}{\text{rad } \mathbf{d}_2^{(01)}} = \frac{0.000}{0.064} = 0.000,$$

$$\mathbf{d}^{(02)} = \begin{pmatrix} [-0.086, 0.086] \\ [0.484, 0.516] \end{pmatrix} \rightarrow \frac{\text{mid } \mathbf{d}_1^{(02)}}{\text{rad } \mathbf{d}_1^{(02)}} = \frac{0.000}{0.086} = 0.000,$$

$$\frac{\text{mid } \mathbf{d}_2^{(02)}}{\text{rad } \mathbf{d}_2^{(02)}} = \frac{0.500}{0.016} = 30.806.$$

Тогда

$$p^{(01)} = \begin{pmatrix} \text{cut} \left( \frac{\text{mid } \mathbf{d}_1^{(01)}}{\text{rad } \mathbf{d}_1^{(01)}}, [-1, 1] \right) \\ \text{cut} \left( \frac{\text{mid } \mathbf{d}_2^{(01)}}{\text{rad } \mathbf{d}_2^{(01)}}, [-1, 1] \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(c_*)^{(01)} = \begin{pmatrix} \text{mid } \mathbf{X}_1^{(0)} - p_1^{(01)} \cdot \text{rad } \mathbf{X}_1^{(0)} \\ \text{mid } \mathbf{X}_2^{(0)} - p_2^{(01)} \cdot \text{rad } \mathbf{X}_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 - 1 \cdot 0.4 \\ 0.8 - 0 \cdot 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.8 \end{pmatrix},$$

$$(c^*)^{(01)} = \begin{pmatrix} \text{mid } \mathbf{X}_1^{(0)} + p_1^{(01)} \cdot \text{rad } \mathbf{X}_1^{(0)} \\ \text{mid } \mathbf{X}_2^{(0)} + p_2^{(01)} \cdot \text{rad } \mathbf{X}_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 + 1 \cdot 0.4 \\ 0.8 + 0 \cdot 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.8 \end{pmatrix},$$

а также

$$p^{(02)} = \begin{pmatrix} \text{cut} \left( \frac{\text{mid } \mathbf{d}_1^{(02)}}{\text{rad } \mathbf{d}_1^{(02)}}, [-1, 1] \right) \\ \text{cut} \left( \frac{\text{mid } \mathbf{d}_2^{(02)}}{\text{rad } \mathbf{d}_2^{(02)}}, [-1, 1] \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(c_*)^{(02)} = \begin{pmatrix} \text{mid } \mathbf{X}_1^{(0)} - p_1^{(02)} \cdot \text{rad } \mathbf{X}_1^{(0)} \\ \text{mid } \mathbf{X}_2^{(0)} - p_2^{(02)} \cdot \text{rad } \mathbf{X}_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 - 0 \cdot 0.4 \\ 0.8 - 1 \cdot 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.6 \end{pmatrix},$$

$$(c^*)^{(02)} = \begin{pmatrix} \text{mid } \mathbf{X}_1^{(0)} + p_1^{(02)} \cdot \text{rad } \mathbf{X}_1^{(0)} \\ \text{mid } \mathbf{X}_2^{(0)} + p_2^{(02)} \cdot \text{rad } \mathbf{X}_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 + 0 \cdot 0.4 \\ 0.8 + 1 \cdot 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.0 \end{pmatrix}.$$

Итак, нашим последним шагом при вычислении бицентрированной формы оператора Кравчика на нулевой итерации интервального метода Кравчика станет взятие двух дифференциальных центрированных форм интервальных расширений для функций  $\Phi_1^{(0)}$  и  $\Phi_2^{(0)}$  (1.62) относительно центров  $(c_*)^{(01)}$ ,  $(c^*)^{(01)}$  и  $(c_*)^{(02)}$ ,  $(c^*)^{(02)}$ , соответственно, и нахождение пересечения полученных интервальных оценок для каждой из этих функций по отдельности.

$$\Phi_1^{(0)} \left( \mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(01)} \right) = \Phi_1^{(0)} \left( (c_*)^{(01)} \right) + \mathbf{d}_1^\top \cdot \left( \mathbf{X}^{(0)} - (c_*)^{(01)} \right),$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{(0)} \left( \mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(01)} \right) &= [0.789, 0.996] + \begin{pmatrix} [0.342, 0.658] \\ [-0.064, 0.064] \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} [0.7, 1.5] - 0.7 \\ [0.6, 1.0] - 0.8 \end{pmatrix}, \\
\Phi_1^{(0)} \left( \mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(01)} \right) &= [0.776, 1.535], \\
\Phi_1^{(0)} \left( \mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(01)} \right) &= \Phi_1^{(0)} \left( (c^*)^{(01)} \right) + \mathbf{d}_1^\top \cdot \left( \mathbf{X}^{(0)} - (c^*)^{(01)} \right), \\
\Phi_1^{(0)} \left( \mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(01)} \right) &= [1.190, 1.397] + \begin{pmatrix} [0.342, 0.658] \\ [-0.064, 0.064] \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} [0.7, 1.5] - 1.5 \\ [0.6, 1.0] - 0.8 \end{pmatrix}, \\
\Phi_1^{(0)} \left( \mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(01)} \right) &= [0.651, 1.410].
\end{aligned}$$

Для функции  $\Phi_1^{(0)}$  получаем

$$\Phi_1^{(0)} \left( \mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(01)} \right) \cap \Phi_1^{(0)} \left( \mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(01)} \right) = [0.776, 1.410].$$

Аналогично для функции  $\Phi_2^{(0)}$ :

$$\begin{aligned}
\Phi_2^{(0)} \left( \mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(02)} \right) &= \Phi_2^{(0)} \left( (c_*)^{(02)} \right) + \mathbf{d}_2^\top \cdot \left( \mathbf{X}^{(0)} - (c_*)^{(02)} \right), \\
\Phi_2^{(0)} \left( \mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(02)} \right) &= [0.663, 0.716] + \begin{pmatrix} [-0.086, 0.086] \\ [0.484, 0.516] \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} [0.7, 1.5] - 1.1 \\ [0.6, 1.0] - 0.6 \end{pmatrix}, \\
\Phi_2^{(0)} \left( \mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(02)} \right) &= [0.629, 0.957], \\
\Phi_2^{(0)} \left( \mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(02)} \right) &= \Phi_2^{(0)} \left( (c^*)^{(02)} \right) + \mathbf{d}_2^\top \cdot \left( \mathbf{X}^{(0)} - (c^*)^{(02)} \right), \\
\Phi_2^{(0)} \left( \mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(02)} \right) &= [0.863, 0.915] + \begin{pmatrix} [-0.086, 0.086] \\ [0.484, 0.516] \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} [0.7, 1.5] - 1.1 \\ [0.6, 1.0] - 1.0 \end{pmatrix}, \\
\Phi_2^{(0)} \left( \mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(02)} \right) &= [0.622, 0.950].
\end{aligned}$$

Значит, для функции  $\Phi_2^{(0)}$  можно записать

$$\Phi_2^{(0)} \left( \mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(02)} \right) \cap \Phi_2^{(0)} \left( \mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(02)} \right) = [0.629, 0.950].$$

Бицентрированной формой оператора Кравчика, вычисленной на

нулевой итерации интервального метода Кравчика, является брус

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{bic}(\mathbf{X}^{(0)}) &= \left( \Phi_1^{(0)}(\mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(01)}) \cap \Phi_1^{(0)}(\mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(01)}) \right) \\ &\quad \left( \Phi_2^{(0)}(\mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(02)}) \cap \Phi_2^{(0)}(\mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(02)}) \right) \\ &= \begin{pmatrix} [0.776, 1.410] \\ [0.629, 0.950] \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(0)} \cap \mathcal{H}_{bic}(\mathbf{X}^{(0)}) = \begin{pmatrix} [0.776, 1.410] \\ [0.629, 0.950] \end{pmatrix}.$$

На Рис. 1.29 показан процесс формирования бруса бицентрированного оператора Кравчика  $\mathcal{H}_{bic}(\mathbf{X}^{(0)})$  на нулевой итерации интервального метода Кравчика, а также для сравнения изображен брус «обычного» оператора Кравчика  $\mathcal{H}(\mathbf{X}^{(0)}, \tilde{x}^{(0)})$  (см. таблицу 1.9).

Результаты, получаемые на следующих итерациях интервального метода Кравчика с бицентрированной формой оператора Кравчика, приведены в таблице 1.10. Если при проведении промежуточных вычислений мы учитываем четвертый знак после запятой, то на шестнадцатой итерации интервального метода Кравчика уточнение корня системы нелинейных уравнений (1.134) может быть прекращено:

$$\mathbf{X}_{\mathcal{H},bic}^{(16)} = \begin{pmatrix} [0.8704, 1.2910] \\ [0.7133, 0.8481] \end{pmatrix}, \quad \text{Dist}(\mathbf{X}^{(16)}, \mathbf{X}^{(17)}) = \begin{pmatrix} 9.3120 \cdot 10^{-6} \\ 1.1815 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}.$$

Узнаем «точное» решение системы (1.134)

$$\begin{aligned}2\sqrt[3]{1.8 - x^{2/3}} &= \frac{1}{x+1} + 0.3 \rightarrow x = 0.8742, \quad y = 0.8336, \\ 2\sqrt[3]{2.0 - x^{2/3}} &= \frac{1}{x+1} + 0.3 \rightarrow x = 1.2885, \quad y = 0.7370\end{aligned}$$

и сравним «точный» вектор-брус  $\mathbf{X}_{\text{точн}}$  с результатами использования интервального метода Кравчика (номер итерации  $k$ , на которой получено уточненное решение, опущен):

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^{(0)} &= \begin{pmatrix} [0.7000, 1.5000] \\ [0.6000, 0.9000] \end{pmatrix}, & \mathbf{X}_{\mathcal{H}} &= \begin{pmatrix} [0.8124, 1.3453] \\ [0.6999, 0.8622] \end{pmatrix}, \\ \mathbf{X}_{\mathcal{H},bic} &= \begin{pmatrix} [0.8704, 1.2910] \\ [0.7133, 0.8481] \end{pmatrix}, & \mathbf{X}_{\text{точн}} &= \begin{pmatrix} [0.8742, 1.2885] \\ [0.7370, 0.8336] \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

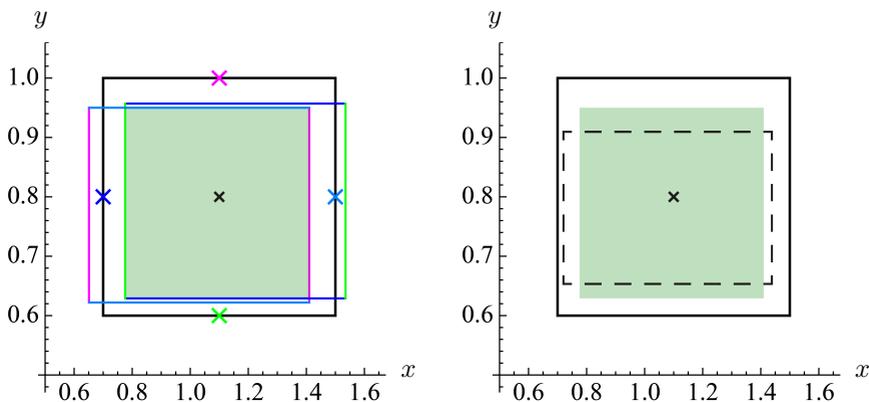


Рис. 1.29. Результаты, получаемые на нулевой итерации интервального метода Кравчука в ходе уточнения решения системы (1.134). Центры  $(c_*)^{(01)}$ ,  $(c^*)^{(01)}$ ,  $(c_*)^{(02)}$  и  $(c^*)^{(02)}$  показаны крестиками синего, голубого, зеленого и розового цветов, соответственно. Центр бруса  $\mathbf{X}^{(0)}$  отмечен крестиком черного цвета. Ребрам интервальных векторов  $\Phi^{(0)}(\mathbf{X}^{(0)}, c_*)$  и  $\Phi^{(0)}(\mathbf{X}^{(0)}, c^*)$  соответствуют две пары цветов, каждый из которых также определяет один из центров  $c_*$  или  $c^*$ . Брус  $\mathcal{H}_{bic}(\mathbf{X}^{(0)})$  выделен заливкой светло-зеленым цветом. Границы интервального вектора  $\mathcal{H}(\mathbf{X}^{(0)}, \text{mid } \mathbf{X}^{(0)})$  показаны черной пунктирной линией.

Как видно на Рис. 1.28, использование интервального метода Кравчука с бицентрированной формой оператора Кравчука позволило добиться большего сужения бруса начального приближения  $\mathbf{X}^{(0)}$  и тем самым «ближе подойти» к  $\mathbf{X}_{\text{точн}}$ . Это оправдывает некоторое усложнение алгоритма для построения оператора Кравчука, связанное с поиском четырех оптимальных центров для взятия двух пар дифференциальных центрированных форм и их пересечений. ■

$k$	$\mathbf{X}_{bic}^{(k)}$	$\mathcal{H}_{bic}(\mathbf{X}^{(k)})$
0	$[0.7000, 1.5000] \times [0.6000, 1.0000]$	$[0.7759, 1.4099] \times [0.6287, 0.9495]$
1	$[0.7759, 1.4099] \times [0.6287, 0.9495]$	$[0.8172, 1.3588] \times [0.6578, 0.9106]$
2	$[0.8172, 1.3588] \times [0.6578, 0.9106]$	$[0.8405, 1.3293] \times [0.6788, 0.8853]$
3	$[0.8405, 1.3293] \times [0.6788, 0.8853]$	$[0.8537, 1.3126] \times [0.6924, 0.8699]$
4	$[0.8537, 1.3126] \times [0.6924, 0.8699]$	$[0.8611, 1.3031] \times [0.7009, 0.8607]$
5	$[0.8611, 1.3031] \times [0.7009, 0.8607]$	$[0.8652, 1.2977] \times [0.7060, 0.8553]$
6	$[0.8652, 1.2977] \times [0.7060, 0.8553]$	$[0.8675, 1.2948] \times [0.7091, 0.8522]$
7	$[0.8675, 1.2948] \times [0.7091, 0.8522]$	$[0.8688, 1.2931] \times [0.7109, 0.8505]$
8	$[0.8688, 1.2931] \times [0.7109, 0.8505]$	$[0.8695, 1.2922] \times [0.7119, 0.8494]$
9	$[0.8695, 1.2922] \times [0.7119, 0.8494]$	$[0.8699, 1.2916] \times [0.7125, 0.8489]$
10	$[0.8699, 1.2916] \times [0.7125, 0.8489]$	$[0.8701, 1.2913] \times [0.7128, 0.8485]$
11	$[0.8701, 1.2913] \times [0.7128, 0.8485]$	$[0.8702, 1.2912] \times [0.7130, 0.8484]$
12	$[0.8702, 1.2912] \times [0.7130, 0.8484]$	$[0.8703, 1.2911] \times [0.7131, 0.8483]$
13	$[0.8703, 1.2911] \times [0.7131, 0.8483]$	$[0.8703, 1.2910] \times [0.7132, 0.8482]$
14	$[0.8703, 1.2910] \times [0.7132, 0.8482]$	$[0.8704, 1.2910] \times [0.7132, 0.8482]$
15	$[0.8704, 1.2910] \times [0.7132, 0.8482]$	$[0.8704, 1.2910] \times [0.7133, 0.8481]$
16	$[0.8704, 1.2910] \times [0.7133, 0.8481]$	$[0.8704, 1.2910] \times [0.7133, 0.8481]$

Таблица 1.10. Итерационное уточнение одного из корней системы точечных нелинейных уравнений (1.134) с помощью интервального метода Кравчика. Используется бицентрированная среднезначная форма оператора Кравчика  $\mathcal{H}_{bic}(\mathbf{X})$ .

### 1.7.4 Внешнее оценивание для интервальных уравнений и систем уравнений

До настоящего момента мы использовали интервальные итерационные методы Ньютона (одномерный, многомерный) и Кравчика только для решения точечных нелинейных уравнений и их систем. Теперь мы перейдем к рассмотрению более общего случая внешнего оценивания решений *интервальных* уравнений и систем интервальных уравнений. Мы сосредоточим внимание на одномерной задаче; тем не менее, предлагаемый подход может быть легко расширен на многомерный случай, что далее будет проиллюстрировано примером.

Итак, пусть имеется интервальное уравнение

$$f(\mathbf{a}, x) = 0,$$

и необходимо найти внешнюю оценку той части объединенного множества решений этого уравнения  $\Xi_{uni}(f, \mathbf{a})$ , которая находится в пределах заданного интервала  $\mathbf{X}$ .

Пусть  $x^* \in \mathbf{X} \cap \Xi_{uni}(f, \mathbf{a})$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}$ , и  $f(a, x^*) = 0$  для какого-то  $a \in \mathbf{a}$ . Выберем некоторую точку  $\tilde{x} \in \mathbf{X}$ . Тогда в силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях

$$f(a, \tilde{x}) - f(a, x^*) = (\tilde{x} - x^*) \cdot f'(a, \xi),$$

где  $\xi$  — некоторая точка между  $\tilde{x}$  и  $x^*$ .

Если  $f'(a, \xi) \neq 0$ , то

$$x^* = \tilde{x} - \frac{f(a, \tilde{x})}{f'(a, \xi)}.$$

Поскольку

$$f'(a, \xi) \in \mathbf{f}'(a, \mathbf{X}),$$

где  $\mathbf{f}'(a, \mathbf{X})$  — какая-либо внешняя интервальная оценка производной от функции  $f(a, x)$  по  $x$  на интервале  $\mathbf{X}$ , то можно интервализовать правую часть последнего полученного равенства:

$$x^* \in \tilde{x} - \frac{f(a, \tilde{x})}{\mathbf{f}'(a, \mathbf{X})}, \quad 0 \notin \mathbf{f}'(a, \mathbf{X}).$$

Если  $\mathbf{f}(a, \tilde{x})$  и  $\mathbf{f}'(a, \mathbf{X})$  являются внешними интервальными оценками областей значений для  $f(a, x)$  и  $f'(a, \xi)$  по всем  $a \in \mathbf{a}$  и  $\xi \in \mathbf{X}$ , то для любой точки  $x^* \in \mathbf{X} \cap \Xi_{uni}(f, \mathbf{a})$  выполняется

$$x^* \in \tilde{x} - \frac{\mathbf{f}(a, \tilde{x})}{\mathbf{f}'(a, \mathbf{X})}.$$

**Определение 1.7.4** Пусть заданы функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , зависящая от параметра  $a \in \mathbf{a}$ , и интервальные оценивающие функции  $\mathbf{f}(a, x)$  и  $\mathbf{f}'$  для  $f(a, x)$  и ее производной по  $x$ , соответственно.

Образжение

$$\mathcal{N} : \mathbb{IR} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR},$$

действующее по правилу

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \frac{\mathbf{f}(a, \tilde{x})}{\mathbf{f}'(a, \mathbf{X})}, \quad (1.135)$$

называется (одномерным) интервальным оператором Ньютона для  $f$  с интервальным параметром  $a$ .

После выбора начального приближения  $\mathbf{X}^{(0)} := \mathbf{X}$  итерационное уточнение корня уравнения  $f(\mathbf{a}, x) = 0$  с помощью *интервального метода Ньютона* может быть организовано следующим образом:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N} \left( \mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)} \right), \quad \tilde{x}^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Пример 53 (Решение интервального нелинейного уравнения, интервальный метод Ньютона)** Используя интервальный метод Ньютона, найдем решение интервального нелинейного уравнения

$$[2.0, 2.2]\sqrt{x} + [0.3, 0.4]x - [3.0, 3.1] = 0. \quad (1.136)$$

Произведем графическое отделение корней. На Рис. 1.30 показан график функции  $y = [2.0, 2.2]\sqrt{x} + [0.3, 0.4]x - [3.0, 3.1]$ . Так как коэффициенты перед слагаемыми, входящими в  $y$ , являются интервальными величинами, то две кривые  $y_1 = 2.2\sqrt{x} + 0.4x - 3$  (верхняя граница) и  $y_2 = 2\sqrt{x} + 0.3x - 3.1$  (нижняя граница) ограничивают область координатной плоскости, выделенную заливкой розовым цветом.

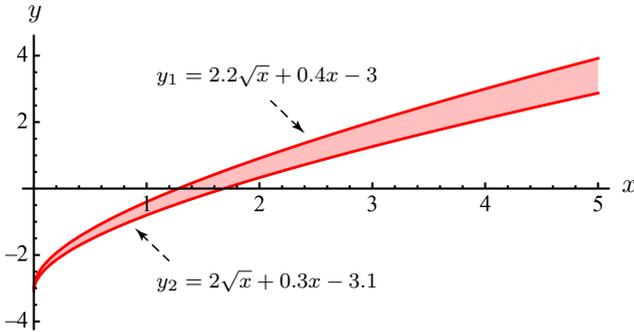


Рис. 1.30. График функции  $y = [2.0, 2.2]\sqrt{x} + [0.3, 0.4]x - [3.0, 3.1]$

Как видно на Рис. 1.30, искомый корень локализован на интервале

$$\mathbf{X}^{(0)} = [1.0, 2.0].$$

Определим первую производную функции  $y$  по  $x$ :

$$y' = [2.0, 2.2] \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + [0.3, 0.4] = \frac{[1.0, 1.1]}{\sqrt{x}} + [0.3, 0.4].$$

Поскольку естественные и оптимальные интервальные расширения функций  $y$  и  $y'$  совпадают (см. параграф 1.3.1), то для построения итерационного процесса мы можем выбрать естественные интервальные расширения функции  $y$  и ее первой производной по  $x$ :

$$\mathbf{y}_{\natural}(\mathbf{X}^{(k)}), \quad \mathbf{y}'_{\natural}(\mathbf{X}^{(k)}).$$

Мы выполним уточнение корня нелинейного уравнения трижды для разных точек  $\tilde{x}$ :

$$\tilde{x}^{(k)} = \underline{\mathbf{X}}^{(k)}, \quad \tilde{x}^{(k)} = \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}, \quad \tilde{x}^{(k)} = \overline{\mathbf{X}}^{(k)}.$$

Результаты, получаемые на итерациях интервального метода Ньютона, приведены в таблицах 1.11, 1.12 и 1.13, соответственно.

$k$	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)})$	$\text{dist}(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{X}^{(k+1)})$
0	[1.0000, 2.0000]	[1.2667, 1.7944]	0.2667
1	[1.2667, 1.7944]	[1.2792, 1.7149]	0.0795
2	[1.2792, 1.7149]	[1.2793, 1.7062]	0.0087
3	[1.2793, 1.7062]	[1.2793, 1.7055]	0.0008
4	[1.2793, 1.7055]	[1.2793, 1.7054]	0.0001
5	[1.2793, 1.7054]	[1.2793, 1.7054]	$6.2655 \cdot 10^{-6}$

Таблица 1.11. Итерационное уточнение корня уравнения (1.136) с помощью интервального метода Ньютона,  $\tilde{x}^{(k)} = \underline{\mathbf{X}}^{(k)}$

$k$	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)})$	$\text{dist}(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{X}^{(k+1)})$
0	[1.0000, 2.0000]	[1.2076, 1.6991]	0.3009
1	[1.2076, 1.6991]	[1.2345, 1.6903]	0.0269
2	[1.2345, 1.6903]	[1.2329, 1.6894]	0.0009
3	[1.2345, 1.6894]	[1.2330, 1.6894]	$2.0087 \cdot 10^{-5}$

Таблица 1.12. Итерационное уточнение корня уравнения (1.136) с помощью интервального метода Ньютона,  $\tilde{x}^{(k)} = \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}$

$k$	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)})$	$\text{dist}(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{X}^{(k+1)})$
0	[1.0000, 2.0000]	[1.0952, 1.7811]	0.2190
1	[1.0952, 1.7811]	[1.1631, 1.7098]	0.0713
2	[1.1631, 1.7098]	[1.1833, 1.6900]	0.0202
3	[1.1833, 1.6900]	[1.1887, 1.6850]	0.0054
4	[1.1887, 1.6850]	[1.1901, 1.6838]	0.0013
5	[1.1901, 1.6838]	[1.1904, 1.6836]	0.0003
6	[1.1904, 1.6836]	[1.1905, 1.6835]	0.0001
7	[1.1905, 1.6835]	[1.1905, 1.6835]	$1.8712 \cdot 10^{-5}$

Таблица 1.13. Итерационное уточнение корня уравнения (1.136) с помощью интервального метода Ньютона,  $\tilde{x}^{(k)} = \overline{\mathbf{X}}^{(k)}$

Таким образом, с помощью выбранного численного метода мы определили три значения одного и того же интервального решения нелинейного уравнения (1.136):

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [1.2793, 1.7054], \text{rad } \mathbf{X} = 0.2131 \quad \text{при } \tilde{x}^{(k)} = \underline{\mathbf{X}}^{(k)}, \\ \mathbf{X} &= [1.2345, 1.6894], \text{rad } \mathbf{X} = 0.2274 \quad \text{при } \tilde{x}^{(k)} = \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}, \\ \mathbf{X} &= [1.1905, 1.6835], \text{rad } \mathbf{X} = 0.2465 \quad \text{при } \tilde{x}^{(k)} = \overline{\mathbf{X}}^{(k)}. \end{aligned}$$

Сравним границы полученных интервалов с решениями двух точечных уравнений

$$\begin{aligned} y_1 &= 2.2\sqrt{x} + 0.4x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1.2793 \\ y_2 &= 2\sqrt{x} + 0.3x - 3.1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1.6835 \\ &\quad \text{rad } [x_1, x_2] = 0.2021. \end{aligned}$$

Как мы видим, три интервала, полученные путем изменения  $\tilde{x}$  при построении итераций интервального метода Ньютона, отличаются от «точного» интервала [1.2793, 1.6835] и притом различны между собой.

Во-первых, можно заметить, что выбор на каждой из итераций нижней и верхней границ уточняемого интервала в качестве центра разложения привел к поочередному «попаданию» в нижнюю и верхнюю границы «точного» решения нелинейного уравнения (1.136). Выбирая точкой  $\tilde{x}^{(k)}$  середину уточняемого интервала, мы не «попали» ни в одну

из границ «точного» интервала [1.2793, 1.6835]. Значит, выбор центра разложения  $\tilde{x}$  влияет на получаемое решение нелинейного интервального уравнения, и этот факт необходимо учитывать при организации итерационных вычислений с помощью интервального метода Ньютона.

Во-вторых, почему, изменяя точку  $\tilde{x}$ , мы так и не добились полного совпадения интервала-решения с интервалом [1.2793, 1.6835]? Каждый раз, независимо от выбора центра разложения, радиус результирующего интервала оказывался больше радиуса «точного» корня. Несмотря на малость присутствующего расхождения, оно неслучайно. Обнаруженная погрешность связана с интервальным характером коэффициентов, входящих в нелинейное уравнение: чем шире интервальные коэффициенты и чем больше размер множества решений нелинейного интервального уравнения, тем больше возникающая погрешность. Например, если мы изменим в уравнении (1.136) множитель перед слагаемым, пропорциональным  $\sqrt{x}$ , на [2.0, 3.0] и выберем  $\mathbf{X}^{(0)} = [0.5, 2.0]$  и  $\tilde{x}^{(k)} = \underline{\mathbf{X}}^{(k)}$ , то интервал-решение будет равен

$$\mathbf{X}^{(9)} = [0.7984, 1.8316], \quad \text{dist}(\mathbf{X}^{(8)}, \mathbf{X}^{(9)}) = 2.3314 \cdot 10^{-6},$$

а «точный» интервал, получающийся в результате решения двух точечных нелинейных уравнений, окажется равным  $[x_1, x_2] = [0.7984, 1.6835]$ .

Тогда при одинаковом выборе центра разложения  $\tilde{x}^{(k)} = \underline{\mathbf{X}}^{(k)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= [2.0, 2.2]\sqrt{x} + [0.3, 0.4]x - [3.0, 3.1] \\ \mathbf{X} &= [1.2793, 1.7054], \quad \text{rad } \mathbf{X} = 0.2131, \\ [x_1, x_2] &= [1.2793, 1.6835], \quad \text{rad } [x_1, x_2] = 0.2021, \\ \text{rad } \mathbf{X} - \text{rad } [x_1, x_2] &= 0.0110, \\ \mathbf{y} &= [2.0, 3.0]\sqrt{x} + [0.3, 0.4]x - [3.0, 3.1] \\ \mathbf{X} &= [0.7984, 1.8316], \quad \text{rad } \mathbf{X} = 0.5166, \\ [x_1, x_2] &= [0.7984, 1.6835], \quad \text{rad } [x_1, x_2] = 0.4426, \\ \text{rad } \mathbf{X} - \text{rad } [x_1, x_2] &= 0.0740. \end{aligned}$$

В наличии этой погрешности заключается принципиальное различие решений интервального и точечного нелинейных уравнений с помощью интервальных численных методов.

Для большей корректности сравнения решений двух нелинейных интервальных уравнений укажем, что неизменном выборе начального

приближения  $\mathbf{X}^{(0)} = [0.5, 2.0]$  для второго уравнения

$$[2.0, 3.0]\sqrt{x} + [0.3, 0.4]x - [3.0, 3.1] = 0$$

мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(5)} &= [0.5335, 1.7285], & \text{dist}(\mathbf{X}^{(4)}, \mathbf{X}^{(5)}) &= 4.6417 \cdot 10^{-6}, \\ \text{rad } \mathbf{X}^{(5)} &= 0.5975 & \text{при } \tilde{x}^{(k)} &= \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}, \\ \mathbf{X}^{(20)} &= [0.5000, 1.6835], & \text{dist}(\mathbf{X}^{(19)}, \mathbf{X}^{(20)}) &= 3.9030 \cdot 10^{-6}, \\ \text{rad } \mathbf{X}^{(20)} &= 0.5917 & \text{при } \tilde{x}^{(k)} &= \overline{\mathbf{X}}^{(k)} \end{aligned}$$

с помощью интервального метода Ньютона. ■

**Пример 54 (Решение системы нелинейных интервальных уравнений интервальным методом Ньютона)** Воспользуемся интервальным методом Ньютона для нахождения решения системы нелинейных интервальных уравнений

$$\begin{cases} [-0.75, -0.50]x + [0.50, 0.75] = 0, \\ [1.00, 2.00] \arcsin x = 0. \end{cases} \quad (1.137)$$

Построим графики двух функций  $y_1 = [-0.75, -0.50]x + [0.50, 0.75]$  и  $y_2 = [1.00, 2.00] \arcsin x$ . На Рис. 1.31 видно, что рассматриваемая система уравнений имеет единственное решение, локализованное на брус

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^{(0)} \\ \mathbf{X}_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0.10, 0.70] \\ [0.10, 0.70] \end{pmatrix}.$$

Далее запишем

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} [-0.75, -0.50]x + [0.50, 0.75] - y, \\ [1.00, 2.00] \arcsin x - y \end{pmatrix}, \\ F' &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-0.75, -0.50] & -1 \\ \frac{[1.00, 2.00]}{\sqrt{1-x^2}} & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

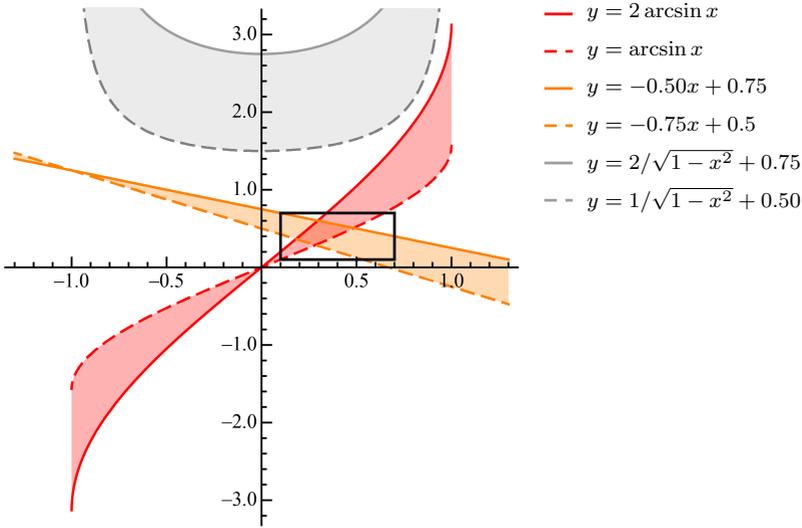


Рис. 1.31. К нахождению решения системы интервальных нелинейных уравнений (1.137) с помощью интервального метода Ньютона

Однако в большей степени нас интересует не матрица Якоби  $F'$ , которая, уместно отметить, не является сингулярной, так как

$$\det F' = \frac{[1.00, 2.00]}{\sqrt{1-x^2}} + [0.50, 0.75] \neq 0$$

при любом  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq \pm 1$  (см. Рис. 1.31, а естественное интервальное расширение обратной к ней, которое будет выбрано для построений итераций интервального метода Ньютона:

$$(\mathbf{F}')_{\natural}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{[0.50, 0.75] + \frac{[1.00, 2.00]}{\sqrt{1-\mathbf{X}_1^2}}} & \frac{1}{[0.50, 0.75] + \frac{[1.00, 2.00]}{\sqrt{1-\mathbf{X}_1^2}}} \\ \frac{-1}{[0.25, 0.75]\sqrt{1-\mathbf{X}_1^2} + [0.50, 2.00]} & \frac{[-0.75, -0.50]}{[0.50, 0.75] + \frac{[1.00, 2.00]}{\sqrt{1-\mathbf{X}_1^2}}} \end{pmatrix}.$$

Тогда интервальный оператор Ньютона (1.135) для  $F$  примет вид

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) = \tilde{x} - (\mathbf{F}')_{\natural}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{\natural}(\tilde{x}),$$

где  $F_{\natural}$  — естественное интервальное расширение  $F$ ,

$$F_{\natural} = \begin{pmatrix} [-0.75, -0.50] \mathbf{X}_1 + [0.50, 0.75] - \mathbf{X}_2, \\ [1.00, 2.00] \arcsin \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}.$$

Дальнейшее уточнение решения системы нелинейных интервальных уравнений (1.137) будет производиться по «стандартной» схеме:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N} \left( \mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)} \right), \quad \tilde{x}^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В качестве центра разложения  $\tilde{x}$  поочередно выберем четыре точки

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(k)} &= \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{X}}_1^{(k)} \\ \underline{\mathbf{X}}_2^{(k)} \end{pmatrix}, & \tilde{x}^{(k)} &= \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{X}}_1^{(k)} \\ \overline{\mathbf{X}}_2^{(k)} \end{pmatrix}, \\ \tilde{x}^{(k)} &= \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{X}}_1^{(k)} \\ \overline{\mathbf{X}}_2^{(k)} \end{pmatrix}, & \tilde{x}^{(k)} &= \begin{pmatrix} \text{mid } \mathbf{X}_1^{(k)} \\ \text{mid } \mathbf{X}_2^{(k)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Опуская промежуточные вычисления, приведем результаты уточнения корня системы (1.137), выполненного с помощью интервального метода Ньютона:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(k)} &= \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{X}}_1^{(k)} \\ \underline{\mathbf{X}}_2^{(k)} \end{pmatrix} : & \mathbf{X}^{(6)} &= \begin{pmatrix} [0.1651, 0.4964] \\ [0.2551, 0.7000] \end{pmatrix}, \\ & & \text{Dist} \left( \mathbf{X}^{(5)}, \mathbf{X}^{(6)} \right) &= \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 3.4068 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}, \\ \tilde{x}^{(k)} &= \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{X}}_1^{(k)} \\ \overline{\mathbf{X}}_2^{(k)} \end{pmatrix} : & \mathbf{X}^{(5)} &= \begin{pmatrix} [0.1000, 0.5573] \\ [0.1000, 0.7000] \end{pmatrix}, \\ & & \text{Dist} \left( \mathbf{X}^{(4)}, \mathbf{X}^{(5)} \right) &= \begin{pmatrix} 1.9929 \cdot 10^{-5} \\ 0.0000 \end{pmatrix}, \\ \tilde{x}^{(k)} &= \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{X}}_1^{(k)} \\ \overline{\mathbf{X}}_2^{(k)} \end{pmatrix} : & \mathbf{X}^{(4)} &= \begin{pmatrix} [0.1045, 0.4984] \\ [0.1000, 0.6296] \end{pmatrix}, \\ & & \text{Dist} \left( \mathbf{X}^{(3)}, \mathbf{X}^{(4)} \right) &= \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \end{pmatrix}, \\ \tilde{x}^{(k)} &= \begin{pmatrix} \text{mid } \mathbf{X}_1^{(k)} \\ \text{mid } \mathbf{X}_2^{(k)} \end{pmatrix} : & \mathbf{X}^{(3)} &= \begin{pmatrix} [0.1000, 0.4963] \\ [0.1760, 0.7000] \end{pmatrix}, \\ & & \text{Dist} \left( \mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(3)} \right) &= \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

«Точное» решение системы нелинейных уравнений (1.137) представляет собой замкнутый многоугольник с вершинами

$$\begin{aligned} 2 \arcsin x &= -0.50x + 0.75 &\rightarrow & x = 0.2964, y = 0.6018, \\ 2 \arcsin x &= -0.75x + 0.50 &\rightarrow & x = 0.1811, y = 0.3642, \\ \arcsin x &= -0.50x + 0.75 &\rightarrow & x = 0.4857, y = 0.5072, \\ \arcsin x &= -0.75x + 0.50 &\rightarrow & x = 0.2835, y = 0.2874. \end{aligned}$$

На Рис. 1.32 показана зависимость положения уточненного брусарешения системы интервальных нелинейных уравнений (1.137) от выбора центра разложения  $\tilde{x}$ . Данный пример более наглядно, чем предыдущий пример (см. стр. 182), демонстрирует, насколько неоптимальными могут быть внешние оценки множеств решений нелинейных интервальных уравнений или их систем, получаемые с помощью интервального метода Ньютона, по причине вхождения в нелинейные уравнения интервальнозначных параметров. ■

**Пример 55 (Уточнение интервального корня системы нелинейных интервальных уравнений бицентрированной формой оператора Кравчика)** Попробуем применить интервальный метод Кравчика с бицентрированной формой оператора Кравчика (см. стр. 170 и пример на стр. 171) для уточнения интервального корня системы нелинейных интервальных уравнений (1.137).

$$\begin{cases} [-0.75, -0.50]x + [0.50, 0.75] = 0, \\ [1.00, 2.00] \arcsin x = 0. \end{cases} \quad (1.137)$$

Выбирая такое же начальное приближение

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^{(0)} \\ \mathbf{X}_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0.10, 0.70] \\ [0.10, 0.70] \end{pmatrix},$$

как и при выполнении итерационных вычислений интервальным методом Ньютона (см. пример на стр. 186), на двадцать второй итерации интервального метода Кравчика получим

$$\mathbf{X}_{\mathcal{X},bic}^{(23)} = \begin{pmatrix} [0.1811, 0.4857] \\ [0.2343, 0.6502] \end{pmatrix}, \quad \text{Dist} \left( \mathbf{X}^{(22)}, \mathbf{X}^{(23)} \right) = \begin{pmatrix} 4.2863 \cdot 10^{-6} \\ 4.4721 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

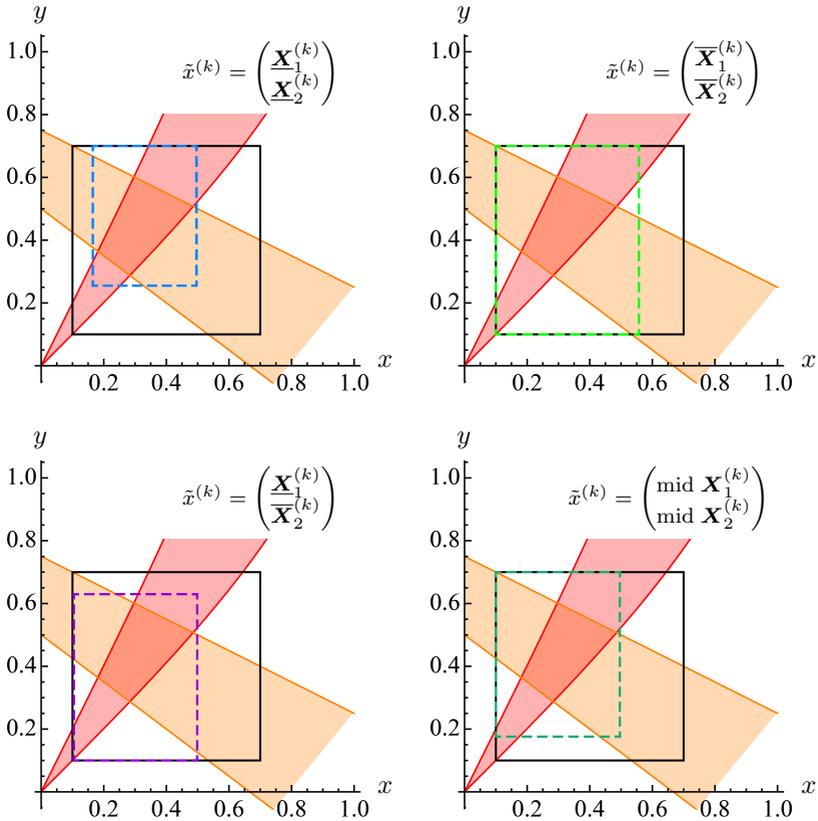


Рис. 1.32. Бруссы-решения системы нелинейных интервальных уравнений (1.137) (выделены пунктирной линией), полученные с помощью интервального метода Ньютона. Выбираемые на каждой итерации центры разложения  $\tilde{x}^{(k)}$  указаны на подрисунках.

На Рис. 1.33 показан результат пересечения

$$\mathbf{X}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} [0.1651, 0.4964] \\ [0.2551, 0.6296] \end{pmatrix}$$

двух интервальных векторов, являющихся «решениями» системы уравнений (1.137). Оба они были получены в примере на стр. 186 с помощью

интервального метода Ньютона для центров разложения

$$\tilde{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{X}}_1^{(k)} \\ \underline{\mathbf{X}}_2^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\bar{x}}^{(k)} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{X}}_1^{(k)} \\ \overline{\mathbf{X}}_2^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Найденный таким образом интервальный вектор  $\mathbf{X}_{\mathcal{N}}$  можно сравнить с брусом  $\mathbf{X}_{\mathcal{H},bic}$ , а также брусом «точного» решения системы (1.137)

$$\mathbf{X}_{\text{точн}} = \begin{pmatrix} [0.1811, 0.4857] \\ [0.2874, 0.6018] \end{pmatrix}$$

и заметить, что использование интервального метода Кравчика с бицентрированным оператором Кравчика позволило получить оценку множества решений системы нелинейных уравнений (1.137), близкую по «размерам» к пересечению двух интервальных векторов, найденных на интервальных итерациях Ньютона:

$$\|\mathbf{X}_{\mathcal{H},bic}\|_1 = 1.1359, \quad \|\mathbf{X}_{\mathcal{N}}\|_1 = 1.1260, \quad \|\mathbf{X}_{\text{точн}}\|_1 = 1.0875.$$

Кроме того, нам удалось непреднамеренно и с достаточно высокой точностью (учитывая четвертый знак после запятой) «попасть» в одну из компонент бруса  $\mathbf{X}_{\text{точн}}$ . Эти выводы иллюстрируются Рис. 1.33. ■

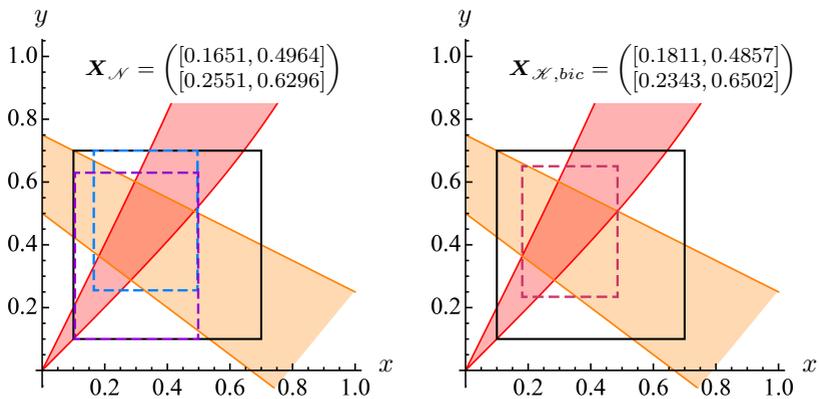


Рис. 1.33. Интервальные векторы  $\mathbf{X}_{\mathcal{N}}$  и  $\mathbf{X}_{\mathcal{N},bic}$ , являющиеся решениями системы нелинейных интервальных уравнений (1.137) (выделены пунктирной линией). Брус  $\mathbf{X}_{\mathcal{N}}$  получен как результат пересечения двух брусов, ребра которых показаны голубой и фиолетовой пунктирными линиями (см. Рис. 1.32).

## Глава 2

# Интервальная арифметика Каухера

В настоящей главе мы обсудим одно из возможных расширений классической интервальной арифметики — так называемую полную интервальную арифметику или арифметику Каухера.

### 2.1 Зачем и как расширять классическую интервальную арифметику?

В главе 1 мы неоднократно сталкивались с необходимостью выхода за пределы классической интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$ . Возникновение «эффекта обёртывания» §1.2.1, определение метрики в пространстве  $\mathbb{IR}^n$  §1.2.4, нахождение внешней оценки объединённого множества решений ИСЛАУ в рамках формально-алгебраического подхода §1.5.5, достижение разрешимости ЛЗД путем коррекции матрицы ИСЛАУ §1.6.4 — каждая из этих задач привела нас к идее о использовании некоторой интервальной арифметики, свойства которой «лучше» и «полнее», чем свойства  $\mathbb{IR}$ .

Перечислим свойства классической интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$ , которые можно считать неудовлетворительными.

1. Как нам уже известно, *интервалы с ненулевой шириной не имеют обратных элементов по отношению к арифме-*

*тическим операциям* (1.3), а сами *арифметические операции над интервалами связаны слабым соотношением субдистрибутивности* (1.12). Более подробное обсуждение различий обычной и классической интервальной арифметик, проиллюстрированное примерами, приведено на стр. 28.

Указанные особенности  $\mathbb{IR}$  значительно ограничивают возможности при решении даже самых простых уравнений вида

$$a + x = b, \quad a \cdot x = b$$

и подобных им относительно переменной  $x$ . Отсутствие полноценной дистрибутивности приводит к невозможности приведения подобных членов, а отсутствие обратных элементов по отношению к арифметическим операциям запрещает перенос членов из одной части уравнения в другую.

Кроме того, рассматриваемые интервальные уравнения могут вообще не иметь решений в  $\mathbb{IR}$ . Именно этот случай, уже упомянутый в начале параграфа, возник при нахождении внешней оценки объединенного множества решений ИСЛАУ (1.106) с помощью формально-алгебраического подхода. Как показано в примере на стр. 128, решение вспомогательной ИСЛАУ, матрица и вектор правой части которой содержали только «правильные» (в классической интервальной арифметике) интервалы, оказалось «неправильным», так как включало интервалы  $[\underline{x}, \bar{x}]$ , у которых  $\underline{x} > \bar{x}$ .

2. *Классическая интервальная арифметика  $\mathbb{IR}$  обладает плохими порядковыми свойствами относительно упорядочения по включению « $\subseteq$ ».* Из двух операций взятия нижней « $\wedge$ » и верхней « $\vee$ » граней относительно порядка « $\subseteq$ » для двух любых элементов частично упорядоченного множества

$$a \wedge b := \inf_{\subseteq} \{a, b\} = [\max\{\underline{a}, \underline{b}\}, \min\{\bar{a}, \bar{b}\}], \quad (2.1)$$

$$a \vee b := \sup_{\subseteq} \{a, b\} = [\min\{\underline{a}, \underline{b}\}, \max\{\bar{a}, \bar{b}\}] \quad (2.2)$$

первая операция не всегда оказывается осуществимой. В частности, в классической интервальной арифметике  $\mathbb{IR}$  не существует минимум  $[5, 7] \wedge [8, 10]$ , поскольку  $[5, 7] \wedge [8, 10] = [8, 7]$ .

3. **Классическая интервальная арифметика**  $\mathbb{IR}$  не является минимаксной, т. е. позволяет вычисление так называемых «чистых» минимумов или максимумов только по всем переменным одновременно. В то же время часть задач интервального анализа имеет минимаксную природу, для решения которых классическая интервальная арифметика  $\mathbb{IR}$  оказывается непригодной.

Одной из таких задач, например, является определение принадлежности точки  $x \in \mathbb{R}^n$  множеству АЕ-решений  $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ вида  $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ , левая часть которой содержит интервальный вектор  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)^\top$ . Эту задачу, представляющую собой аналитическое описание множества АЕ-решений  $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ вида  $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ , рассматривает Теорема 5.1.2 из книги [2], сформулированная в публикациях С.П. Шарого [27], [28]:

**Теорема 2.1.1.** *Если интервальная система уравнений*

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$$

такова, что отображение  $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывно по первому аргументу на брус  $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}^l$  при любых значениях второго аргумента, то принадлежность точки  $x \in \mathbb{R}^n$  АЕ-множеству решений  $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  влечет справедливость следующей системы 2m неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \max_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{a} + \check{a}, x) \geq \bar{\mathbf{b}}_i, \\ \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \min_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{a} + \check{a}, x) \leq \underline{\mathbf{b}}_i, \end{array} \right. \\ \quad \text{— для компонент } \mathbf{b}_i, \text{ имеющих} \\ \quad \text{интервальную } A\text{-неопределенность,} \\ \left\{ \begin{array}{l} \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \max_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{a} + \check{a}, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_i, \\ \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \min_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{a} + \check{a}, x) \leq \bar{\mathbf{b}}_i, \end{array} \right. \\ \quad \text{— для компонент } \mathbf{b}_i, \text{ имеющих} \\ \quad \text{интервальную } E\text{-неопределенность.} \end{array} \right.$$

Если же отображение  $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  таково, что каждый из параметров  $a_{r+1}, \dots, a_l$ , соответствующих интервальной

*E*-неопределенности, входит лишь в одну из компонент  $F_i(a, x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , то принадлежность  $x \in \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  равносильна вышеприведенной системе неравенств.

Для решения минимаксных задач было бы целесообразным и более удобным использовать иную интервальную арифметику, которая позволяет вычислять минимаксы на уровне элементарных арифметических операций, каждая из которых сама по себе является функцией двух переменных.

Таким образом, классическая интервальная арифметика  $\mathbb{IR}$  обладает многими недостатками; наиболее серьезным из них является отсутствие дистрибутивности. Однако на сегодняшний день неясно, имеется ли возможность и, главное, необходимость устранять отсутствие дистрибутивности в классической интервальной арифметике.

Как решить, хотя бы частично, другие проблемы арифметики  $\mathbb{IR}$ , связанные с необратимостью арифметических операций и плохими порядковыми свойствами? Для этого можно обратиться к использованию более широкой и полной алгебраической системы.

Для построения такой «улучшенной» алгебраической системы, классическую интервальную арифметику  $\mathbb{IR}$  можно достроить так, чтобы выполнялся *принцип соответствия*: если результат арифметических операций лежит вне  $\mathbb{IR}$ , он имеет содержательный смысл, а если он находится в  $\mathbb{IR}$ , то совпадает с обычным вычислением по формулам классической интервальной арифметики.

Такую систему предложил немецкий математик Э. Каухер [29], наиболее развернутое изложение содержится в его диссертации на немецком языке [30]. Он выполнил расширение классической интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$ , вложив ее в более широкую алгебраическую систему, обозначаемую в настоящее время  $\mathbb{KR}$ . В *полной интервальной арифметике Каухера*  $\mathbb{KR}$  сохранено свойство монотонности интервальных арифметических операций по включению, она обладает лучшими в сравнении с классической арифметикой  $\mathbb{IR}$  порядковыми свойствами, что позволяет без ограничений выполнять операции (2.1) и (2.2), и, наконец, интервальная арифметика Каухера является минимаксной.

Помимо Каухера, большой вклад в полную интервальную арифметику внесли испанские Gardenes E., Trepal A. [32], M.A. Sainz [33] и болгарские математики — Dimitrova N.S., Markov S.M., а в России — А.В.Лакеев и С.П.Шарый. Их результаты входят в дальнейшее изложение материала.

В книге *Modal Interval Analysis* [33] в главе 5 «Interval Arithmetic» показывается эквивалентность развитого испанскими математиками «модального интервального анализа» и арифметики Каухера [29]. Этот факт важен в связи с тем, что часть результатов §2.2.5 наиболее подробно обсуждается именно в [33].

## 2.2 Описание полной интервальной арифметики

В полной интервальной арифметике Каухера  $\mathbb{KR}$  так же, как в классической интервальной арифметике  $\mathbb{IR}$ , интервал обозначается

$$\mathbf{a} = [\eta, \theta],$$

где  $\eta = \underline{\mathbf{a}} = \inf \mathbf{a}$  и  $\theta = \bar{\mathbf{a}} = \sup \mathbf{a}$  — левый (нижний) и правый (верхний) концы интервала  $\mathbf{a}$ , соответственно.

Однако в  $\mathbb{KR}$  может быть нарушено обязательное для  $\mathbb{IR}$  соотношение между нижним и верхним концами интервала  $\eta \leq \theta$ . Иначе говоря, интервальная арифметика Каухера  $\mathbb{KR}$  получается присоединением неправильных интервалов  $[\eta, \theta]$ ,  $\eta > \theta$  ко множеству  $\mathbb{IR}$ .

Несмотря на присутствующие смысловые различия между правильными и неправильными интервалами, теоретико-множественное упорядочение по включению « $\subseteq$ » (1.7) определяется на множестве интервалов из  $\mathbb{KR}$  так же, как и на множестве интервалов из  $\mathbb{IR}$ :

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \iff \underline{\mathbf{a}} \geq \underline{\mathbf{b}} \ \& \ \bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{b}}. \quad (2.3)$$

**Пример 56 (Упорядочение по включению на  $\mathbb{KR}$ )** Пусть  $\mathbf{a} = [7, 3]$ ,  $\mathbf{b} = [4, 5]$ . Тогда  $[7, 3] \subseteq [4, 5]$ . ■

Следствием введенного упорядочения (2.3) является выполнимость на  $\mathbb{KR}$  операций взятия нижней « $\wedge$ » и верхней « $\vee$ » граней относительно рассматриваемого порядка « $\subseteq$ »:

**Пример 57 (Минимум и максимум по включению на  $\mathbb{KR}$ )** Согласно выражениям (2.1) и (2.2),

$$\begin{aligned} [1, 2] \wedge [3, 8] &= [3, 2], \\ [1, 2] \vee [3, 8] &= [1, 8]. \end{aligned}$$



На множестве интервалов  $\mathbb{KR}$  можно ввести еще одно частичное упорядочение, которое обобщает порядок « $\leq$ » на вещественной оси.

**Определение 2.2.1** Для интервалов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{KR}$  будем считать, что  $\mathbf{a}$  не превосходит  $\mathbf{b}$  и писать « $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ », если  $\underline{\mathbf{a}} \leq \underline{\mathbf{b}}$  и  $\bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{b}}$ .

Интервал называется неотрицательным, т. е. « $\geq 0$ », если неотрицательны оба его конца. Интервал называется неположительным, т. е. « $\leq 0$ », если неположительны оба его конца.

**Пример 58 (Частичный линейный порядок в  $\mathbb{KR}$ )** Можно убедиться, что  $[2, 1] \leq [3, 8]$ , причем оба сравниваемых интервала являются неотрицательными. ■

### 2.2.1 Дуализация в арифметике Каухера

Правильные и неправильные интервалы в  $\mathbb{KR}$  связаны между собой отображением *дуализации*, которое задает симметрию правильных и неправильных интервалов относительно вещественной оси  $\mathbb{R}$ .

**Определение 2.2.2** Отображением дуализации  $\text{dual} : \mathbb{KR} \rightarrow \mathbb{KR}$  называется операция, меняющая местами (переворачивающая) концы интервала, т. е.

$$\text{dual } \mathbf{a} := [\bar{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{a}}]. \tag{2.4}$$

С дуализацией в полной интервальной арифметике  $\mathbb{KR}$  тесно связано понятие *правильной проекции* интервала. Эта операция необходима для превращения любого (правильного или неправильного) интервала в правильный интервал — обычный числовой промежуток в  $\mathbb{R}$ .

**Определение 2.2.3** Правильной проекцией интервала  $\mathbf{a}$  называется величина

$$\text{pro } \mathbf{a} := \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a} \text{ правильный,} \\ \text{dual } \mathbf{a}, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.5}$$

**Пример 59 (Дуализация и правильная проекция интервала)**  $\mathbf{a} = [7, 8] \rightarrow \text{dual } \mathbf{a} = [8, 7], \text{pro } \mathbf{a} = \mathbf{a}$ . ■

Стоит заметить, что дуализация в  $\mathbb{KR}$  превращает отношение включения (2.3) в ему противоположное:

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \iff \text{dual } \mathbf{a} \supseteq \text{dual } \mathbf{b}.$$

Вследствие этого «переворота» операции взятия нижней « $\wedge$ » и верхней « $\vee$ » граней (2.1) и (2.2) относительно рассматриваемого порядка « $\subseteq$ » приобретают следующие свойства:

$$\begin{aligned} \text{dual } (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) &= \text{dual } \mathbf{a} \vee \text{dual } \mathbf{b}, \\ \text{dual } (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) &= \text{dual } \mathbf{a} \wedge \text{dual } \mathbf{b}. \end{aligned}$$

**Пример 60 (Дуализация и взятия нижней « $\wedge$ » и верхней « $\vee$ » граней)** Пусть  $\mathbf{a} = [6, 3]$  и  $\mathbf{b} = [9, 11]$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= [9, 3] \rightarrow \text{dual } (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = [3, 9], \\ \text{dual } \mathbf{a} &= [3, 6], \text{dual } \mathbf{b} = [11, 9] \rightarrow \text{dual } \mathbf{a} \vee \text{dual } \mathbf{b} = [3, 9]. \end{aligned}$$

■

## 2.2.2 Сложение в полной интервальной арифметике

Арифметические операции сложения и вычитания определяются в  $\mathbb{KR}$  так же, как в классической интервальной арифметике  $\mathbb{IR}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &:= [\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}], \\ \mathbf{a} - \mathbf{b} &:= \mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{b} = [\underline{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}], \end{aligned}$$

причем

$$\text{dual}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{dual } \mathbf{a} + \text{dual } \mathbf{b}. \quad (2.6)$$

**Пример 61 (Дуализация и сложение в полной интервальной арифметике)** Пусть  $\mathbf{a} = [2, -1]$  и  $\mathbf{b} = [1, 2]$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{dual } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \text{dual } ([3, 1]) = [1, 3], \\ \text{dual } (\mathbf{a}) + \text{dual } (\mathbf{b}) &= [-1, 2] + [2, 1] = [1, 3]. \end{aligned}$$

Можно заметить, что соотношение (2.6) отражает «зеркальный» характер связи между сложением неправильных интервалов в  $\mathbb{KR}$  и сложением правильных интервалов в  $\mathbb{IR}$ . ■

Помимо «обычной» арифметической операции вычитания в полной интервальной арифметике определена операция *внутреннего вычитания*, которая позволяет задать *обратный по сложению* интервал:

$$[0, 0] = [\underline{a} + (-\underline{a}), \bar{a} + (-\bar{a})] = [\underline{a}, \bar{a}] + [-\underline{a}, -\bar{a}] = \mathbf{a} + \text{орр } \mathbf{a}.$$

**Определение 2.2.4** *Каждый элемент  $\mathbf{a}$  из  $\mathbb{KR}$  имеет единственный обратный по сложению (противоположный) элемент, обозначаемый через «орр  $\mathbf{a}$ », и из равенства  $\mathbf{a} + \text{орр } \mathbf{a} = 0$  следует*

$$\text{орр } \mathbf{a} := [-\underline{a}, -\bar{a}]. \quad (2.7)$$

**Определение 2.2.5** *Будем обозначать через « $\ominus$ » операцию, которая обратна сложению и называется внутренним (или алгебраическим) вычитанием в  $\mathbb{KR}$ :*

$$\mathbf{a} \ominus \mathbf{b} := \mathbf{a} + \text{орр } \mathbf{b} = [\underline{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b}]. \quad (2.8)$$

**Пример 62 (Различие арифметических операций вычитания в  $\mathbb{IR}$  и внутреннего вычитания в  $\mathbb{KR}$ )** Проиллюстрируем различие арифметических операций вычитания в  $\mathbb{IR}$  и внутреннего вычитания в  $\mathbb{KR}$ :

$$\begin{aligned} [-1, 1] - [-1, 1] &= [-2, 2], \\ [-1, 1] \ominus [-1, 1] &= [0, 0]. \end{aligned}$$

Данный пример дополняет задачу, рассмотренную на стр. 29. ■

### 2.2.3 Умножение в полной интервальной арифметике

Поскольку

$$\mathbb{KR} = \mathbb{IR} \cup (\text{dual } Z) = P \cup Z \cup (-P) \cup (\text{dual } Z),$$

где

$$\begin{aligned} P &:= \{\mathbf{a} \in \mathbb{KR} \mid \underline{a} \geq 0 \ \& \ \bar{a} \geq 0\} && \text{— неотрицательные интервалы,} \\ Z &:= \{\mathbf{a} \in \mathbb{KR} \mid \underline{a} \leq 0 \leq \bar{a}\} && \text{— нульсодержащие интервалы,} \\ -P &:= \{\mathbf{a} \in \mathbb{KR} \mid -\mathbf{a} \in P\} && \text{— неположительные интервалы,} \\ \text{dual } Z &:= \{\mathbf{a} \in \mathbb{KR} \mid \text{dual } \mathbf{a} \in Z\} && \text{— интервалы, содержащиеся в нуле,} \end{aligned}$$

то умножение в полной интервальной арифметике Каухера может быть описано расширенной таблицей Кэли (таблица 2.1), которая получается в результате добавления в таблицу 1.1 еще одного столбца и еще одной строки. Во всех случаях для умножения в  $\mathbb{KR}$  справедливо

$$\text{dual}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \text{dual } \mathbf{a} \cdot \text{dual } \mathbf{b}.$$

	$\mathbf{b} \in P$	$\mathbf{b} \in Z$	$\mathbf{b} \in -P$	$\mathbf{b} \in \text{dual } Z$
$\mathbf{a} \in P$	$[\underline{\mathbf{a}}\mathbf{b}, \overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}]$	$[\overline{\mathbf{a}}\mathbf{b}, \underline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}]$	$[\overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}]$	$[\underline{\mathbf{a}}\mathbf{b}, \overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}]$
$\mathbf{a} \in Z$	$[\underline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}]$	$[\min \{ \underline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}} \}, \max \{ \underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}} \}]$	$[\overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}]$	0
$\mathbf{a} \in -P$	$[\underline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}]$	$[\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}]$	$[\overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}]$	$[\overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}]$
$\mathbf{a} \in \text{dual } Z$	$[\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}]$	0	$[\overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}]$	$[\max \{ \underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}} \}, \min \{ \underline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}} \}]$

Таблица 2.1. Интервальное умножение в полной интервальной арифметике  $\mathbb{KR}$

Следует обратить внимание на тот факт, что в отличие от  $\mathbb{IR}$  умножение в арифметике Каухера допускает нетривиальные делители нуля. Как видно из таблицы 2.1, произведение двух интервалов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , один из которых является нульсодержащим ( $\mathbf{a} \in Z$ ), а второй содержится в нуле ( $\mathbf{b} \in \text{dual } Z$ ), равно нулю.

Наконец, результат умножения интервала из  $\mathbb{KR}$  на вещественное число определяется выражением (1.6), справедливым и для  $\mathbb{IR}$ :

$$\mu \cdot \mathbf{a} := \begin{cases} [\mu\underline{\mathbf{a}}, \mu\overline{\mathbf{a}}], & \text{если } \mu \geq 0, \\ [\mu\overline{\mathbf{a}}, \mu\underline{\mathbf{a}}], & \text{иначе.} \end{cases}$$

Исключая из дальнейшего рассмотрения интервалы, правильная проекция (2.5) которых содержит нуль, определим для двух интервалов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{KR}$  операцию деления. По аналогии с определением арифметической операции вычитания в полной интервальной арифметике Каухера можно ввести деление и *внутреннее деление*.

«Обычное» деление в  $\mathbb{KR}$  определяется так же, как и в  $\mathbb{IR}$ :

$$\mathbf{a}/\mathbf{b} := \mathbf{a} \cdot 1/\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot [1/\bar{\mathbf{b}}, 1/\underline{\mathbf{b}}], \quad 0 \notin \text{pro } \mathbf{b}.$$

**Определение 2.2.6** Будем обозначать операцию, обратную умножению, называемую внутренним (алгебраическим) делением в  $\mathbb{KR}$ , через « $\circ$ », так что

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} := \mathbf{a} \cdot \text{inv } \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot [1/\underline{\mathbf{b}}, 1/\bar{\mathbf{b}}], \quad 0 \notin \text{pro } \mathbf{b}.$$

**Определение 2.2.7** Для интервалов  $\mathbf{a}$  из  $\mathbb{KR}$ , которые не содержат нуль и сами не содержатся в нуле, существует единственный обратный относительно умножения элемент, который мы будем обозначать через « $\text{inv } \mathbf{a}$ », и из равенства  $\mathbf{a} \cdot \text{inv } \mathbf{a} = 1$  следует

$$\text{inv } \mathbf{a} := [1/\underline{\mathbf{a}}, 1/\bar{\mathbf{a}}]. \quad (2.9)$$

**Пример 63 (Умножение и деление в  $\mathbb{KR}$ )** Пусть  $\mathbf{a} = [2, 1] \in P$ . Найдем значения двух величин:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}/\mathbf{a} &= \mathbf{a} \cdot 1/\mathbf{a} = [2, 1] \cdot [1, 0.5] = [2, 0.5], \\ \mathbf{a} \circ \mathbf{a} &= \mathbf{a} \cdot \text{inv } \mathbf{a} = [2, 1] \cdot [0.5, 1] = 1. \end{aligned}$$

Введем еще один интервал  $\mathbf{b} = [-3, 5] \in Z$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= [2, 1] \cdot [-3, 5] = [-3, 5] \rightarrow \text{dual}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = [5, -3], \\ \text{dual}(\mathbf{a}) &= [1, 2], \text{dual}(\mathbf{b}) = [5, -3] \rightarrow \text{dual}(\mathbf{a}) \cdot \text{dual}(\mathbf{b}) = [5, -3]. \end{aligned}$$

Наконец, можно убедиться в том, что  $-2 \cdot \mathbf{b} = [-10, 6]$ . ■

## 2.2.4 Свойства полной интервальной арифметики

Все арифметические операции интервальной арифметики Каухера «наследуют» свойство монотонности по включению « $\subseteq$ » от классической интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$ :

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{a}', \mathbf{b} \subseteq \mathbf{b}' \implies \mathbf{a} \star \mathbf{b} \subseteq \mathbf{a}' \star \mathbf{b}' \quad (2.10)$$

для любых  $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathbb{KR}$  и операций  $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$ .

Как уже было упомянуто в параграфе 2.1, отсутствие полноценной дистрибутивности является существенным недостатком классической

интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$ . По этой причине рассмотрение взаимосвязи сложения и умножения в  $\mathbb{KR}$  представляет особый интерес.

В зависимости от того, является ли некоторой интервал  $\mathbf{a}$  из  $\mathbb{KR}$  правильным или неправильным, операции сложения и умножения в арифметике Каухера оказываются связаны соотношениями

*субдистрибутивности*

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \subseteq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \text{ если } \mathbf{a} \text{ правильный,} \quad (2.11)$$

*супердистрибутивности*

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \supseteq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \text{ если } \mathbf{a} \text{ неправильный.} \quad (2.12)$$

Точная дистрибутивность выполняется в следующем ряде случаев:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \text{ если } \mathbf{a} = a \in \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \text{ если } \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \geq 0, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + (\text{dual } \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}. \quad (2.15)$$

Последнее равенство (2.15) справедливо только при строго определенном соотношении между знаками интервалов  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ :

$$\text{sgn } \mathbf{b} = -\text{sgn } \mathbf{c} = \text{sgn}(\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Обсудим, как арифметические операции сложения и умножения в  $\mathbb{KR}$  связаны с операциями взятия нижней и верхней граней по включению (2.1) и (2.2). Для сложения имеет место точная дистрибутивность

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{c}),$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} + \mathbf{c}),$$

однако для умножения точные равенства справедливы при  $0 \notin \text{prg } \mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{ab} \wedge \mathbf{ac},$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) = \mathbf{ab} \vee \mathbf{ac}.$$

Кроме того, также имеют место следующие дистрибутивные свойства операции умножения:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \subseteq \mathbf{ab} \wedge \mathbf{ac}, \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) = \mathbf{ab} \vee \mathbf{ac} \quad \text{если } \mathbf{a} \text{ правильный,}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{ab} \wedge \mathbf{ac}, \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) \supseteq \mathbf{ab} \vee \mathbf{ac} \quad \text{если } \mathbf{a} \text{ неправильный.}$$

Следует заметить, что интервал в полной интервальной арифметике Каухера имеет иной смысл по сравнению с тем, как интервал определяется в классической интервальной арифметике. В частности, ширина неправильного интервала отрицательна — см. (1.17). Вместе с тем, такой интервал по-прежнему можно охарактеризовать с помощью магнитуды (абсолютного значения, модуля).

**Определение 2.2.8** Абсолютной величиной (*модулем*) интервала  $\mathbf{a}$  называется величина  $|\mathbf{a}| = \max\{|\underline{\mathbf{a}}|, |\overline{\mathbf{a}}|\}$ .

В частности, результатом обобщения магнитуды интервала в  $\mathbb{IR}$  на  $\mathbb{KR}$  является невыполнение соотношения

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{a}| \leq |\mathbf{b}|,$$

которое всегда справедливо в классической интервальной арифметике. К тому же легко убедиться, что в  $\mathbb{IR}$  имеет место следующее свойство магнитуды произведения двух интервалов

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|,$$

однако в полной интервальной арифметике Каухера вместо равенства может выполняться только

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|.$$

**Пример 64 (Магнитуды интервалов)** Выберем три интервала:  $\mathbf{a} = [2, 5]$ ,  $\mathbf{b} = [1, 6]$  и  $\mathbf{d} = [7, 3]$ .

$$\mathbb{IR}: \mathbf{a} \subset \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{a}| = 5, |\mathbf{b}| = 6, \quad |\mathbf{a}| < |\mathbf{b}|,$$

$$\mathbb{KR}: \mathbf{d} \subset \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{d}| = 7, |\mathbf{b}| = 6, \quad |\mathbf{d}| > |\mathbf{b}|.$$

■

**Пример 65 (Магнитуды произведения интервалов)** Пусть  $\mathbf{a} = [1, 2] \in P$  и  $\mathbf{b} = [4, 8] \in P$ .

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |[1, 2] \cdot [4, 8]| = |[4, 16]| = 16,$$

$$|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| = |[1, 2]| \cdot |[4, 8]| = 2 \cdot 8 = 16,$$

$$16 = 16.$$

Произведем замену: пусть теперь  $\mathbf{b} = [4, -8] \in \text{dual } Z$ .

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| &= |[1, 2] \cdot [4, -8]| = |[4, -8]| = 8, \\ |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| &= |[1, 2]| \cdot |[4, -8]| = 2 \cdot 8 = 16, \\ 8 &< 16. \end{aligned}$$

■

## 2.2.5 Минимаксный характер полной интервальной арифметики

Для того, чтобы обнаружить и подтвердить минимаксный характер полной интервальной арифметики Каухера, введем *условную операцию взятия экстремума по включению*:

$$\mathbb{I}_x^{\mathbf{a}} := \begin{cases} \bigvee_{x \in \mathbf{a}}, & \text{если } \mathbf{a} \text{ правильный,} \\ \bigwedge_{x \in \text{dual } \mathbf{a}}, & \text{если } \mathbf{a} \text{ неправильный.} \end{cases} \quad (2.16)$$

Тогда выражение (1.2), определяющее результат любой арифметической операции в классической интервальной арифметике, можно переписать с использованием введенной условной операции в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \star \mathbf{b} &= \{ a \star b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b} \} = \\ &= \left[ \min_{a \in \mathbf{a}} \min_{b \in \mathbf{b}} (a \star b), \max_{a \in \mathbf{a}} \max_{b \in \mathbf{b}} (a \star b) \right] = \\ &= \bigvee_{a \in \mathbf{a}} \bigvee_{b \in \mathbf{b}} (a \star b), \text{ где } \star \in \{ +, -, \cdot, / \}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

(Заметим, что вторая строка (2.17) совпадает с выражением (1.4).)

Нетрудно убедиться, что эквивалентный вид результата арифметической операции умножения в  $\mathbb{IR}$  заменяет содержимое ячеек расширенной таблицы Кэли (таблица 2.1), которые находятся на пересечении строк и столбцов, относящихся к множествам  $P$ ,  $Z$  и  $-P$ .

**Пример 66 (Произведение интервалов, относящихся к множеству  $Z$ )** Пусть  $\mathbf{a} = [-4, 9] \in Z$  и  $\mathbf{b} = [-2, 3] \in Z$ .

Определим результат интервальной операции  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  согласно (2.17):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \left[ \min_{a \in \mathbf{a}} \min_{b \in \mathbf{b}} (a \cdot b), \max_{a \in \mathbf{a}} \max_{b \in \mathbf{b}} (a \cdot b) \right] = [-18, 27]. \\ \min_{a \in [-4, 9]} \left( \min_{b \in [-2, 3]} (a \cdot b) \right) &= \min_{a \in [-4, 9]} \begin{cases} a \geq 0, & a \cdot (-2) = -2a, \\ a < 0, & a \cdot 3 = 3a. \end{cases} = \\ &= \min \left( \min_{a \in [0, 9]} (-2 \cdot a) = -18, \min_{a \in [-4, 0]} (3 \cdot a) = -12 \right) = -18. \\ \max_{a \in [-4, 9]} \left( \max_{b \in [-2, 3]} (a \cdot b) \right) &= \max_{a \in [-4, 9]} \begin{cases} a \geq 0, & a \cdot 3 = 3a, \\ a < 0, & a \cdot (-2) = -2a. \end{cases} = \\ &= \max \left( \max_{a \in [0, 9]} (3 \cdot a) = 27, \max_{a \in [-4, 0]} (-2 \cdot a) = 8 \right) = 27. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся выражением, приведенным в ячейке расширенной таблицы Кэли, которая соответствует  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in Z$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= [\min\{\underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}] = \\ &= [\min\{-12, -18\}, \max\{8, 27\}] = [-18, 27]. \end{aligned}$$

Итак, в обоих случаях  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [-18, 27]$ . Рассуждая аналогичным образом можно получить результат одной из арифметических операций  $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$  над двумя любыми интервалами из  $\mathbb{IR}$  — неотрицательными, неположительными и нульсодержащими. ■

Попробуем использовать условную операцию взятия экстремума по включению (2.16) для представления результатов арифметических операций в  $\mathbb{KR}$ . Для этого нам придется рассмотреть два возможных варианта сочетания оперируемых интервалов:

1. *оба интервала  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , которые участвуют в арифметической операции, являются неправильными,*
2. *неправилен один из интервалов:  $\mathbf{a}$  правильный,  $\mathbf{b}$  неправильный или  $\mathbf{a}$  неправильный,  $\mathbf{b}$  правильный.*

Начнем с рассмотрения более простого случая, когда *оба интервала  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  являются неправильными*. Продолжая сравнение получаемых результатов с расширенной таблицей Кэли (таблица 2.1), для

операции умножения в  $\mathbb{KR}$  запишем:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \bigwedge_{a \in \text{pro } \mathbf{a}} \bigwedge_{b \in \text{pro } \mathbf{b}} (a \cdot b) = \left[ \max_{a \in \text{pro } \mathbf{a}} \max_{b \in \text{pro } \mathbf{b}} (a \cdot b), \min_{a \in \text{pro } \mathbf{a}} \min_{b \in \text{pro } \mathbf{b}} (a \cdot b) \right].$$

**Пример 67 (Произведение интервалов, относящихся к множеству  $\text{dual } Z$ )** Пусть  $\mathbf{a} = [4, -9] \in \text{dual } Z$  и  $\mathbf{b} = [2, -3] \in \text{dual } Z$ .

Определим границы интервала  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  и сравним последний с тем результатом, который мы получим, используя выражение, приведенное в ячейке расширенной таблицы Кэли для  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \text{dual } Z$ :

$$\begin{aligned} \max_{a \in [-9, 4]} \left( \max_{b \in [-3, 2]} (a \cdot b) \right) &= \max_{a \in [-9, 4]} \begin{cases} a \geq 0, & a \cdot 2 = 2a, \\ a < 0, & a \cdot (-3) = -3a \end{cases} = \\ &= \max \left( \max_{a \in [0, 4]} (2 \cdot a) = 8, \max_{a \in [-9, 0]} (-3 \cdot a) = 27 \right) = 27. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{a \in [-9, 4]} \left( \min_{b \in [-3, 2]} (a \cdot b) \right) &= \min_{a \in [-9, 4]} \begin{cases} a \geq 0, & a \cdot (-3) = -3a, \\ a < 0, & a \cdot 2 = 2a \end{cases} = \\ &= \min \left( \min_{a \in [0, 4]} (-3 \cdot a) = -12, \min_{a \in [-9, 0]} (2 \cdot a) = -18 \right) = -18. \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [27, -18].$$

С другой стороны,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [\max\{\underline{ab}, \overline{a\bar{b}}\}, \min\{\overline{a\bar{b}}, \underline{ab}\}] = [27, -18],$$

и, как мы видим, полученные ответы полностью совпадают. ■

Пользуясь приведенным описанием нахождения границ результирующего интервала  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , можно убедиться, что то выражение, в которое входят условные операции взятия экстремумов по включению, также справедливо для определения результатов операций сложения, вычитания и деления (если  $\mathbf{b}$  — делитель, то должно выполняться  $0 \notin \text{pro } \mathbf{b}$ ), в которых участвуют два неправильных интервала из множеств  $P$ ,  $-P$  и  $\text{dual } Z$ . Значит,

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \bigwedge_{a \in \text{pro } \mathbf{a}} \bigwedge_{b \in \text{pro } \mathbf{b}} (a \star b), \quad \star \in \{+, -, \cdot, /\}.$$

Перейдем к рассмотрению второго случая, когда *один из интервалов*, над которыми производится арифметическая операция, *является правильным, а второй — неправильным*. Тогда с использованием выражения (2.16) результат умножения двух таких интервалов можно представить в виде:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \bigvee_{a \in \mathbf{a}} \bigwedge_{b \in \text{pro } \mathbf{b}} (a \cdot b) = \left[ \min_{a \in \mathbf{a}} \max_{b \in \text{pro } \mathbf{b}} (a \cdot b), \max_{a \in \mathbf{a}} \min_{b \in \text{pro } \mathbf{b}} (a \cdot b) \right],$$

если  $\mathbf{a}$  — правильный интервал, а  $\mathbf{b}$  — неправильный интервал,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \bigwedge_{a \in \text{pro } \mathbf{a}} \bigvee_{b \in \mathbf{b}} (a \cdot b) = \left[ \max_{a \in \text{pro } \mathbf{a}} \min_{b \in \mathbf{b}} (a \cdot b), \min_{a \in \text{pro } \mathbf{a}} \max_{b \in \mathbf{b}} (a \cdot b) \right],$$

если  $\mathbf{a}$  — неправильный интервал, а  $\mathbf{b}$  — правильный интервал.

Как мы видим, определение результата операции умножения двух интервалов, один из которых является неправильным, в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$  требует вычисления минимаксов и максиминов! Следовательно, интервальная арифметика Каухера действительно является *минимаксной*.

**Пример 68 (Произведение интервалов, относящихся к множествам  $Z, \text{dual } Z$ )** Пусть  $\mathbf{a} = [-4, 9] \in Z$  и  $\mathbf{b} = [2, -3] \in \text{dual } Z$ .

Выполним умножение интервалов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\begin{aligned} \min_{a \in [-4, 9]} \left( \max_{b \in [-3, 2]} (a \cdot b) \right) &= \min_{a \in [-4, 9]} \begin{cases} a \geq 0, & a \cdot 2 = 2a, \\ a < 0, & a \cdot (-3) = -3a \end{cases} = \\ &= \min \left( \min_{a \in [0, 9]} (2 \cdot a) = 0, \min_{a \in [-4, 0]} (-3 \cdot a) = 0 \right) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{a \in [-4, 9]} \left( \min_{b \in [-3, 2]} (a \cdot b) \right) &= \max_{a \in [-4, 9]} \begin{cases} a \geq 0, & a \cdot (-3) = -3a, \\ a < 0, & a \cdot 2 = 2a \end{cases} = \\ &= \max \left( \max_{a \in [0, 9]} (-3 \cdot a) = 0, \max_{a \in [-4, 0]} (2 \cdot a) = 0 \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если  $\mathbf{a} \in Z$  и  $\mathbf{b} \in \text{dual } Z$ , то  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , как и указано в расширенной таблице Кэли.

Рассмотрение умножения неправильного интервала  $\mathbf{a}$  на правильный интервал  $\mathbf{b}$  не имеет смысла, поскольку рассуждения и результат

окажутся точно такими же, как в настоящем случае; отличие будет заключаться лишь в том, что все величины, имеющие отношение к  $\mathbf{a}$ , необходимо заменить на те же, относящиеся к  $\mathbf{b}$ , и наоборот. ■

Распространяется ли введенное определение результата операции умножения в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$  на другие операции, в которых участвуют один правильный и один неправильный интервалы? Да, распространяется, однако необходимо повторно сделать важное замечание: в операции деления не может участвовать такой интервал-делитель, правильная проекция которого является нульсодержащей.

Таким образом,

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \bigvee_{a \in \mathbf{a}} \bigwedge_{b \in \text{pro } \mathbf{b}} (a \star b), \quad \star \in \{+, -, \cdot, /\},$$

если  $\mathbf{a}$  — правильный интервал, а  $\mathbf{b}$  — неправильный интервал,

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \bigwedge_{a \in \text{pro } \mathbf{a}} \bigvee_{b \in \mathbf{b}} (a \star b), \quad \star \in \{+, -, \cdot, /\},$$

если  $\mathbf{a}$  — неправильный интервал, а  $\mathbf{b}$  — правильный интервал.

Подводя итог всему вышеизложенному, можно заключить, что все интервальные арифметические операции в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$  объединены следующим представлением:

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \prod_a^{\mathbf{a}} \prod_b^{\mathbf{b}} (a \star b), \quad \star \subseteq \{+, -, \cdot, /\}. \quad (2.18)$$

И, как мы убедились, если один из интервалов, участвующих в арифметической операции, является неправильным, а второй — правильным, то концы результирующего интервала оказываются *минимаксом* и *максимином* результатов точечных арифметических операций.

Можно ли использовать минимаксный характер  $\mathbb{K}\mathbb{R}$  для оценивания областей значений функций, т. е. вычисления минимаксов и максимумов от сложных выражений? Ответ на этот вопрос неоднозначен, так как в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$  поставленная задача оказывается гораздо более сложной, чем в  $\mathbb{I}\mathbb{R}$ . Необходимо учитывать тот факт, что в общем случае операции взятия минимума и максимума не перестановочны друг с другом даже при однократном вхождении каждой переменной в выражение, область значений которого предстоит определить. Тем не менее, для

любых правильных интервальных векторов  $x \in \mathbb{IR}^p$ ,  $y \in \mathbb{IR}^q$  справедливо следующее соотношение, которое может быть выведено из (2.18):

$$\bigvee_{x \in \mathbf{x}} \bigwedge_{y \in \mathbf{y}} f(x, y) \subseteq f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}) \subseteq \bigwedge_{y \in \mathbf{y}} \bigvee_{x \in \mathbf{x}} f(x, y), \quad (2.19)$$

если рациональное выражение  $f(x, y) = f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$  имеет не более одного вхождения каждой переменной  $x_i$  и  $y_j$  в первой степени.

Детальный анализ интервальных оценок выражений функций в арифметике Каухера проведён в упомянутой выше книге *Modal Interval Analysis* [33] в главах 3 «Modal Interval Extensions» и 4 «Interpretability and Optimality».

## 2.3 Внешнее оценивание множеств АЕ-решений ИСЛАУ

С.П.Шарым в ряде публикаций ([34], [35], [36] и др.) развит метод нахождения формальных решений ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона. В настоящем разделе кратко излагаются полученные им результаты. Более подробно они изложены в монографии [2].

Вернёмся к подразделу 1.4.2, в котором обсуждаются способы характеристики множеств АЕ-решений ИСЛАУ, левая часть которой представлена матрицей  $\mathbf{A}$ , а правая часть — вектором  $\mathbf{b}$  (множество АЕ-решений типа  $\mathcal{A}\beta$ ). Перечислим эти методы:

- прямое указание кванторов — кванторной матрицы  $\mathcal{A}$ , а также кванторного вектора  $\beta$ , относящегося к правой части ИСЛАУ,
- дизъюнктное разложение интервальных параметров системы.

Выход за пределы классической интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$  позволяет дать еще одно определение множества АЕ-решений для ИСЛАУ вида  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ , которое содержит следующая

**Теорема 2.3.1.** (С.П.Шарый, [36]) *Точка  $x \in \mathbb{R}^n$  принадлежит множеству АЕ-решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c \quad (2.20)$$

*в полной интервальной арифметике Каухера.*

Интервальные матрица  $\mathbf{A}^c$  и вектор  $\mathbf{b}^c$ , определяемые как

$$\mathbf{A}^c = \mathbf{A}^\vee + \text{dual } \mathbf{A}^\exists, \quad \mathbf{b}^c = \mathbf{b}^\vee + \text{dual } \mathbf{b}^\exists,$$

называются характеристическими для множества АЕ-решений ИСЛАУ вида  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ , задаваемого дизъюнктными разложениями  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{A}^\vee$  и  $\mathbf{A}^\exists$  и  $\mathbf{b}$  на  $\mathbf{b}^\vee$  и  $\mathbf{b}^\exists$ .

Таким образом, множество АЕ-решений некоторой ИСЛАУ, обозначаемое  $\Xi(\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c)$ , может быть определено путем задания характеристических матрицы и вектора правой части, и в случае выбора такого способа определения множества АЕ-решений явное указание ИСЛАУ и распределения типов неопределенности в ней оказывается необязательным.

Как только характеристические матрица и вектор ИСЛАУ заданы, внешнее оценивание объединенного множества решений можно произвести с помощью формально-алгебраического подхода. Идея этого подхода, называемого также формальным, — нахождение внешней оценки объединенного множества решений ИСЛАУ путем нахождения формального решения некоторой вспомогательной ИСЛАУ — была рассмотрена ранее в подразделе 1.5.5 в рамках интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$  и сейчас будет реализована в интервальной арифметике Каухера.

Добавим к обеим частям выражения (2.20) по  $(x \ominus \mathbf{A}^c x)$  и получим:

$$x \subseteq x + \mathbf{b}^c \ominus \mathbf{A}^c x.$$

Поскольку  $x \in \mathbb{R}$ , мы можем воспользоваться свойством дистрибутивности операции умножения в  $\mathbb{KR}$  (2.13) и вынести переменную  $x$  за скобки. Окончательно имеем:

$$x \in \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff x \subseteq \mathbf{b}^c + (I \ominus \mathbf{A}^c) x.$$

Положения, лежащие в основе формального подхода к оцениванию объединенного множества решений ИСЛАУ в  $\mathbb{KR}$ , обобщает следующая

**Теорема 2.3.2.** (С.П.Шарый, [37]) Пусть для интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  множество АЕ-решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  непусто, а  $\mathbf{A}^c$  и  $\mathbf{b}^c$  — характеристические матрица и правая часть этого множества решений — таковы, что

$$\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1.$$

Тогда формальное решение интервальной линейной системы

$$x = (I \ominus \mathbf{A}^c) x + \mathbf{b}^c \tag{2.21}$$

является правильным интервальным вектором, содержащим множество решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Для нахождения формального решения уравнения (2.21) существуют два метода. Первый из них, уже знакомый, заключается в выборе вектора начального приближения  $\mathbf{x}^{(0)}$ , который, как нам заранее известно, включает в себя множество  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , предобуславливании ИСЛАУ для выполнения условия, накладываемого на спектральный радиус матрицы  $|I \ominus \mathbf{A}^c|$ , и организации итераций по формуле

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow (I \ominus \mathbf{A}^c) \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}^c.$$

Вторым методом нахождения формального решения уравнения (2.21) является *субдифференциальный метод Ньютона*. Этот метод отличают высокая вычислительная эффективность, а также применимость для работы с ИСЛАУ, в характеристических матрицах  $\mathbf{A}^c$  которых встречаются как правильные, так и неправильные интервалы.

Итак, мы имеем уравнение (2.21), заданное в рекуррентном виде,

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}, \quad \mathbf{C} = (I \ominus \mathbf{A}^c), \quad \mathbf{d} = \mathbf{b}^c,$$

и мы можем записать равносильное ему в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$ :

$$\mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{x} + \mathbf{d} = 0. \tag{2.22}$$

Как решить это уравнение или, точнее, каким подходом к вычислению его решения можно воспользоваться? В разделе 1.2.2 уже было отмечено, что отсутствие полноценной дистрибутивности в интервальных арифметиках, в том числе, как мы убедились, в полной интервальной арифметике Каухера, приводит к нарушению аксиомы линейного пространства:

$$(\mu + \nu)\mathbf{x} \neq \mu\mathbf{x} + \nu\mathbf{x}$$

для любых  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  и любых скаляров  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ . Значит, множество  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  не является линейным пространством, и большинство существующих подходов к определению решений операторных уравнений неприменимы для решения уравнения (2.22).

С.П.Шарым был развит специальный аппарат, связанный с отображением пространства  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в вещественное пространство  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Определение 2.3.1** (С.П.Шарым, [37]) *Погружение*  $\text{sti} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , которое действует по правилу

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \mapsto (-\underline{\mathbf{x}}_1, -\underline{\mathbf{x}}_2, \dots, -\underline{\mathbf{x}}_n, \bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}}_n),$$

т. е. такое, при котором взятые с противоположным знаком левые концы интервалов  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  становятся первой, второй,  $\dots$ ,  $n$ -ой компонентами точечного  $2n$ -вектора, а правые концы  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  становятся  $(n + 1)$ -ой,  $\dots$ ,  $2n$ -ой компонентами точечного  $2n$ -вектора соответственно, будем называть стандартным погружением интервального пространства  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Важно, что стандартное погружение переводит экстремумы по включению на интервальном пространстве  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в экстремумы на  $\mathbb{R}^{2n}$ . В конструктивном построении вычислительного метода используется матрица специального вида. Для стандартного погружения sti она является точечной блочной  $2n \times 2n$ -матрицей  $Q^\sim$  вида

$$Q^\sim := \left( \begin{array}{c|c} Q^+ & Q^- \\ \hline Q^- & Q^+ \end{array} \right),$$

где  $n \times n$ -подматрицы  $Q^+ = (q_{ij}^+)$  и  $Q^- = (q_{ij}^-)$  — это положительная и отрицательная части  $Q$ , т. е. матрицы, образованные положительными и отрицательными частями элементов  $Q$  соответственно. Величины  $q_{ij}^\pm$  определяются как  $q_{ij}^+ = \max\{q_{ij}, 0\}$  и  $q_{ij}^- = \max\{-q_{ij}, 0\}$ . Для правильного интервала  $\mathbf{x}$  положительной и отрицательной частями являются

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ &:= \{x^+ \mid x \in \mathbf{x}\} = \{\max\{x, 0\} \mid x \in \mathbf{x}\}, \\ \mathbf{x}^- &:= \{x^- \mid x \in \mathbf{x}\} = \{\max\{-x, 0\} \mid x \in \mathbf{x}\}. \end{aligned}$$

### 2.3.1 Субдифференциальный метод Ньютона

В публикации С.П.Шарого [34]) изложен способ конструктивного построения специального метода Ньютона.

*Алгоритм субдифференциального метода Ньютона:*

1. Выберем некоторое начальное приближение  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$ .
2. Если  $(k-1)$ -е приближение  $x^{(k-1)} \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , уже найдено, то вычисляем какой-нибудь субградиент  $D^{(k-1)}$  отображения  $\mathcal{F}$  в точке  $x^{(k-1)}$  и полагаем

$$x^{(k)} \leftarrow x^{(k-1)} - \tau \left( D^{(k-1)} \right)^{-1} \mathcal{F} \left( x^{(k-1)} \right),$$

где  $\tau \in [0, 1]$  — релаксационный параметр.

Здесь  $D, \mathcal{F}$  — матрицы специального вида.

**Пример 69 (Решение системы интервальных линейных уравнений вида  $x = Cx + d$ , матрица  $C$  содержит интервалы из  $\mathbb{IR}$ )**

Найдем решение системы интервальных линейных уравнений вида  $x = Cx + d$ , где

$$C = \begin{pmatrix} [6, 8] & [1, 1.5] \\ [1, 1.5] & [13, 15] \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

с помощью субдифференциального метода Ньютона. Для вычислений будем использовать свободно распространяемое программное обеспечение `fipso1`, разработанное С. П. Шарым [39].

При значении  $\tau = 1$  решение интервальной линейной системы (2.23) достигается за две итерации:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} [-0.1149, -0.1695] \\ [-0.1306, -0.1525] \end{pmatrix}.$$

Полученный результат позволяет сделать два вывода. Во-первых, получение искомого корня — интервального вектора  $x^{(2)}$  — на второй итерации свидетельствует о высокой сходимости субдифференциального метода Ньютона. Во-вторых, можно заметить, что обе компоненты вектора-решения  $x^{(2)}$  являются неправильными интервалами. ■

**Пример 70 (Решение системы интервальных линейных уравнений вида  $Cx = d$ , матрица  $C$  содержит интервалы из  $\mathbb{IR}$  и  $\mathbb{KR}$ )**

Рассмотренный далее пример относится, строго говоря, к задаче внутреннего оценивания множества решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ . Тем не менее, интересно изучить, насколько высока эффективность субдифференциального метода Ньютона при нахождении решений интервальных уравнений вида  $Cx = d$ .

Пусть

$$C = \begin{pmatrix} [4, 10] & [1, 3] \\ [-1, -7] & [-4, -6] \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} [2, 4] \\ [1, 8] \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Как видно, первая строка матрицы  $C$  содержит только правильные интервалы из  $\mathbb{IR}$ , а вторая строка образована неправильными интервалами из  $\mathbb{KR}$ . Таким образом, для матрицы  $C$  выполняется условие «построчной однородности».

С помощью свободно распространяемого программного обеспечения `subdiff`, разработанного С. П. Шарым [40], можно установить, что для системы уравнений (2.24) субдифференциальный метод Ньютона порождает осциллирующую последовательность:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \begin{pmatrix} [-6.4000, 0.4237] \\ [9.2000, -0.2373] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} [0.3390, 0.4237] \\ [-1.3898, -0.2373] \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}^{(3)} &= \begin{pmatrix} [-6.4000, 0.4237] \\ [9.2000, -0.2373] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} [0.3390, 0.4237] \\ [-1.3898, -0.2373] \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}^{(99)} &= \begin{pmatrix} [-6.4000, 0.4237] \\ [9.2000, -0.2373] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(100)} = \begin{pmatrix} [0.3390, 0.4237] \\ [-1.3898, -0.2373] \end{pmatrix} \text{ при } \tau = 1. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{pmatrix} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ (\text{pro } \mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [4, 10] & [1, 3] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [-7, -1] & [-6, -4] \\ 0 & 0 & [4, 10] & [1, 3] \\ [-7, -1] & [-6, -4] & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ (\text{pro } \mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{pmatrix} = [-3645, 1539] \ni 0.$$

Уменьшим ширины элементов  $\mathbf{C}_{11}$  и  $\mathbf{C}_{21}$  матрицы  $\mathbf{C}$  (2.24):

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [4, 8] & [1, 3] \\ [-1, -5] & [-4, -6] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} [2, 4] \\ [1, 8] \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

В этом случае

$$\det \begin{pmatrix} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ (\text{pro } \mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{pmatrix} = [-2255, 689] \ni 0,$$

решение интервальной системы  $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$  (2.25) находится на первой итерации субдифференциального метода Ньютона и далее не улучшается:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(100)} = \begin{pmatrix} [32.0000, 0.5319] \\ [-42.0000, -0.2553] \end{pmatrix} \text{ при } \tau = 1.$$

Попробуем еще раз сузить элементы  $\mathbf{C}_{11}$  и  $\mathbf{C}_{21}$  матрицы  $\mathbf{C}$  (2.24):

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [9, 10] & [1, 3] \\ [-1, -3] & [-4, -6] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} [2, 4] \\ [1, 8] \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Тогда

$$\det \begin{pmatrix} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ (\text{pro } \mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{pmatrix} = [-3513, -441] \neq 0,$$

и, как можно убедиться, использование субдифференциального метода Ньютона позволяет достичь решения интервальной линейной системы  $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$  (2.26) уже на второй итерации:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} [1.1852, 0.4237] \\ [-2.8889, -0.2373] \end{pmatrix} \text{ при } \tau = 1.$$

■

## 2.4 Место полной интервальной арифметики в интервальном анализе.

Насколько широко используется полная интервальная арифметика в интервальном анализе? Каково её место в описании структур данных, построении вычислительных методов, характеризации результатов вычислений?

В §2.1 представлен ряд побудительных мотивов для развития этой арифметики, основанных на недостатках классической интервальной арифметики. Они разрешимы в рамках системы, построенной в работах Каухера.

Однако потенциал использования идей, лежащих в основе полной интервальной арифметики, существенно шире. Приведём кратко ряд направлений, в которых без полной интервальной арифметики очень трудно получать содержательные результаты.

**Описание структур данных.** Книга А.Н.Баженова, С.И.Жилина, С.И.Кумкова и С.П.Шарого «Обработка и анализ данных с интервальной неопределённостью» [5] посвящена применению интервального подхода к анализу данных. В главе «Базовые понятия и математический аппарат» рассматривается вопрос об описании результатов изменений в виде интервалов. Это привычный для практиков способ наложения двухсторонних ограничений. Однако существует также потребность представлять более подробную информацию о данных, приводя как внутренние, так и внешние оценки. Эта потребность реализована специальной структурой «твин» §2.10. В ходе развития теории твинов

выяснилось, что для содержательного описания арифметики твинов полная интервальная арифметика также востребована.

Другой пример: для выборок интервальных данных взятие минимума и максимума по включению неизбежно приводит к использованию неправильных интервалов.

**Построение вычислительных методов.** Весьма общая Теорема 2.1.1. из §2.1 о множествах решений интервальных систем уравнений задаёт систему неравенств, позволяющую описать различные типы решений. При интервальном оценивании областей значений функций также востребовано использование минимаксных и максиминных оценок в зависимости от типа переменных. Такие оценки существенно расширяют и обогащают процесс оценивания. В большей части полная интервальная арифметика более просто решает вопрос использования свойств монотонности, чем так называемая «направленная интервальная арифметика». Построение и использование специализированных библиотек для полной интервальной арифметики проще, а это очень важно для практических применений.

Реализации  $\mathbb{KR}$  имеются для различных языков программирования, и что важно для математиков, для системы компьютерной математики `Octave` — С.И.Жилин <https://github.com/szhilin/kinterval> [43]. В наиболее популярном на настоящий момент языке `Python` отметим библиотеку А.С.Андросова `intvalpy` [44].

Нахождение внешней оценки объединенного множества решений ИСЛАУ в рамках формально-алгебраического подхода, сначала §1.5.5, и далее в §2.3 с использованием субдифференциального метода Ньютона, конструктивно использует полную интервальную арифметику.

В целом, внедрение полной интервальной арифметики как в базовые структуры, так и в методы вычислений постепенно становится если не рутинным, то весьма популярным подходом.

В частности, это привело к изменению статуса ряда понятий. Например, если в относительно недавнем прошлом принято было специально оговаривать, что в случае неправильного интервала используется ширина его правильной проекции, то в настоящее время ширина интервала определяется универсально выражением (1.17), которое отрицательно для неправильных интервалов. Также см. меру совместности выборки — §3.3.4 [5], где использованы операции взятия минимума и максимума по включению и сравнение ширин результатов операций.

# Литература

- [1] KEARFOTT R. B., NAKAO M. T., NEUMAIER A., RUMP S. M., SHARY S. P., VAN HENTENRYCK P. Standardized notation in interval analysis // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 1. С. 7–13.
- [2] ШАРЫЙ С.П. Конечномерный интервальный анализ. – ФИЦ ИВТ: Новосибирск, 2023. Электронная книга, доступная на <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>
- [3] А.Н.БАЖЕНОВ Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры: учебное пособие. – СПб. 2020 <https://elib.spbstu.ru/d1/2/s20-76.pdf/info>
- [4] ДОБРОНЕЦ Б.С. Интервальная математика. – Красноярск: Издательство КГУ, 2004.
- [5] А.Н. БАЖЕНОВ, С.И. ЖИЛИН, С.И. КУМКОВ, С.П. ШАРЫЙ. «Обработка и анализ данных с интервальной неопределённостью». (готовится к публикации) 2024.
- [6] ШАРАЯ И.А. О дистрибутивности в классической интервальной арифметике // Вычислительные Технологии. – 1997. – Том 2, № 1. – С. 71–83.
- [7] ГИБРИДНЫЕ ШАГОВЫЕ ДВИГАТЕЛИ ТИПОРАЗМЕРА NEMA 17 (FL42STH) // НПО «Атом» : [сайт]. – 2021. – URL: [http://www.npoatom.ru/katalog/step\\_motor/fl42sth/](http://www.npoatom.ru/katalog/step_motor/fl42sth/) (дата обращения 20.06.2024).
- [8] КОЛЛАТЦ Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. – Москва: Мир, 1969.

- [9] Лакеев А.В. Оценка спектрального радиуса нерасширяющих матриц // Вычислительные Технологии. – 1998. – Т. 3, №2. – С. 21–30.
- [10] NEUMAIER A. Interval methods for systems of equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [11] НЕСТЕРОВ В.М. Твинные арифметики и их применение в методах и алгоритмах двустороннего интервального оценивания. Диссертация ... докт. физ.-мат. наук. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, 1999. – 234 с. Доступна на <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteDiss/Nesterov-disser-1999.pdf>
- [12] HANSON E., WALSTER G.W. Global optimization using interval analysis: Second Edition, Revised and Expanded – New York: Marcel Dekker, 2004.
- [13] А.Д. МАМИНОВ, М.А. ПОСЫПКИН, С.П. ШАРЫ Reliable bounding of the implicitly defined sets with applications to robotics // 14th International Symposium "Intelligent Systems", INTELS'20, 14-16 December 2020, Moscow, Russia
- [14] S.P. SHARY Solving the linear interval tolerance problem. // Mathematics and Computers in Simulation. – 1995. – Vol. 39. – P. 53-85
- [15] S.P. SHARY Linear static systems under interval uncertainty: algorithms to solve control and stabilization problems International Journal of Reliable Computing. Supplement. Extended Abstracts of APIC'95, International Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, TX, February 23-25, 1995 / Ed.: V. Kreinovich. – El Paso: University of Texas at El Paso, 1995. – P. 181-184
- [16] ШАРЫЙ С.П. О характеристике объединенного множества решений интервальной линейной алгебраической системы. – Красноярск, 1990. – 20 с. – Депонировано в ВИНТИ, № 726-В91.
- [17] ШАРАЯ И.А. Пакет IntLinInc2D для визуализации множеств решений интервальных линейных систем с двумя неизвестными. – Программное обеспечение, доступное на <http://www.nsc.ru/interval/sharaya/>. Описание <http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/IntLinInc2D.pdf>

- [18] Лакеев А.В., Носков С.И. Описание множества решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // Доклады Академии Наук. – 1993. – Т. 330, №4. – С. 430–433.
- [19] ШАРАЯ И.А. Структура допустимого множества решений интервальной линейной системы // Вычислительные технологии – 2005. – Том 10, №. 5. – Р. 103-119.
- [20] RONN J. Inner solutions of linear interval systems // *Interval Mathematics 1985*, ed. by K. Nickel. – Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, 1986. – P. 157-158.
- [21] ШАРЫЙ С.П. О сравнении теорем Апостолатоса–Кулиша и Майера–Варнке в интервальном анализе // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2009. – Т. 12. – №3. – С. 351–359.
- [22] Bazhenov, A.N., Telnova, A.Y. Combined Method for the Correction of Interval Systems of Linear Algebraic Equations. Meas Tech (2022). <https://doi.org/10.1007/s11018-022-02031-6>
- [23] ШАЙДУРОВ В.В., ШАРЫЙ С.П. Решение интервальной алгебраической задачи о допусках. – Красноярск, 1988. – 27 с. – (Препринт / ВЦ СО АН СССР ; №5).
- [24] ШАРЫЙ С.П. Еще раз о внутреннем оценивании множеств решений интервальных линейных систем Вычислительные Технологии. – 2003. – Том 8, специальный выпуск. – С. 146-160.
- [25] ШАРЫЙ С.П. О мере вариабельности оценки параметров в статистике интервальных данных // Вычислительные технологии. 2019. Т. 24, № 5. С. 90–108. DOI: 10.25743/ICT.2019.24.5.008.
- [26] ШАРАЯ И.А., ШАРЫЙ С.П. Резерв характеристического включения для интервальных линейных систем отношений. Вычислительные технологии. 2021; 26(3):61–85. DOI:10.25743/ICT.2021.26.3.005
- [27] S.P. SHARY. A new approach to the analysis of static systems under interval uncertainty. Scientific Computing and Validated Numerics, Proceedings of the International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetics and Validated Numerics SCAN'95 held in Wuppertal, Germany, September 26-29, 1995, Götz Alefeld, Andreas Frommer and Bruno Lang, eds. (Mathematical Research, Vol. 90). – Akademie Verlag, Berlin, 1996. – P. 118-132

- [28] S.P. SHARY. A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity. *Reliable Computing*. – 2002. – Vol. 8, No. 5. – P. 321-418.
- [29] KAUCHER, E. Interval Analysis in the Extended Interval Space  $\mathbb{IR}$  // *Fundamentals of Numerical Computation (Computer-Oriented Numerical Analysis)* / Alefeld G., Grigorieff R.D., eds. – Wien: Springer, 1980. – P. 33–49. – (Computing Supplement; 2)
- [30] Edgar Kaucher. Über metrische und algebraische Eigenschaften einiger beim numerischen Rechnen auftretender Räume. – Karlsruhe, 1973. Zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Naturwissenschaften von der Fakultät für Naturwissenschaftlern I der Univesität Karlsruhe, genehmigte Dissertation.  
<http://www.nsc.ru/interval/Library/InteDiss/Kaucher-disser-1973.pdf>
- [31] KEARFOTT, R.B., NAKAO, M., NEUMAIER, A., RUMP, S., SHARY, S.P., VAN HENTENRYCK, P. Standardized notation in interval analysis // *Вычислительные Технологии*. – 2010. – Т. 15, №1. – С. 7–13.
- [32] GARDEÑES, E., TREPAT, A., AND JANER, J.M. Approaches to simulation and to the linear problem in the SIGLA system // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1981. – Vol. 81/8. – P. 1–28.
- [33] Miguel A. Sainz, Joaquim Armengol, Remei Calm, Pau Herrero, Lambert Jorba, Josep Vehi. *Modal Interval Analysis. New Tools for Numerical Information*. Springer. *Lecture Notes in Mathematics (LNM, volume 2091)*. pp. 330. 2014 DOI 10.1007/978-3-319-01721-1\_5
- [34] S.P. SHARY Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic. // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2, No. 1. – P. 3-33.
- [35] ШАРЫЙ С.П. Численное нахождение алгебраического решения интервальных линейных систем *Дискретная математика*. – Красноярск: КГТУ, 1996. – С. 129-145.
- [36] ШАРЫЙ С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределённостью. // *Известия РАН. Теория и системы управления*. – 1997. – № 3. – С. 51-61.

- [37] S.P. Shary. Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems. *Reliable Computing*. – 1999. – Vol. 5. – P. 323-335.
- [38] ШАРЫЙ С.П. Программное обеспечение, доступное на <http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/>
- [39] Шарый С. П. Программное обеспечение `fiposol`, доступное на <http://www.nsc.ru/interval/shary/Codes/index.html>
- [40] Шарый С. П. Программное обеспечение `subdiff`, доступное на <http://www.nsc.ru/interval/shary/Codes/index.html>
- [41] ШАРЫЙ С.П. Разрешимость интервальных линейных уравнений и анализ данных с неопределённостями // *Автоматика и Телемеханика*. – 2012. – №2. – С. 111–125.
- [42] ШАРЫЙ С.П., ШАРЯЯ И.А. Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных // *Вычислительные Технологии*. – 2013. – Т. 18. – №3. – С. 80–109.
- [43] Жилин С.И. Библиотека `kinterval`. <https://github.com/szhilin/kinterval>
- [44] Андросов А.С., ШАРЫЙ С.П. `IntvalPy` — библиотека интервальных вычислений на языке Python. *Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии*. 2022;20(4):5-23. <https://doi.org/10.25205/1818-7900-2022-20-4-5-23>

# Предметный указатель

- $P$ -сжимающее отображение, 50  
 $M$ - и  $H$ -матрицы, 59
- абсолютные характеристики  
интервала, 25
- аксиомы нормы, 42
- алгоритм Шайдурова вычисления  
размера бруса решения,  
149
- бинарные арифметические  
операции, 18
- брус, 32
- вершина интервального вектора, 32
- вершина интервальной матрицы, 32
- включение интервалов, 21
- внешняя оценка Бекка, 113
- внутреннее (алгебраическое)  
вычитание в арифметике  
Каухера, 200
- внутреннее (алгебраическое)  
деление в  $\mathbb{KR}$ , 202
- возмущения внешние, 81
- входы управления, 81
- выделяющий предикат, 82
- выражения функциональные  
элементарные, 66
- вырожденный интервал, 18
- выходы стабилизируемые, 81
- выходы управляемые, 81
- дерево Канторовича, 67
- дуализация в арифметике Каухера,  
198
- зависимые (связанные)  
интервальные величины,  
23
- задача интервальная, 80
- знак интервала, 19
- измерение косвенное, 63
- интервал, 17
- интервальная задача — множество  
решений, 80
- интервальная матрица, 32
- интервальная оболочка, interval hull,  
33
- интервальное расширение  
естественное, 66
- интервальный (одномерный)  
оператор Ньютона, 155
- интервальный вектор, 31
- классическая интервальная  
арифметика, 18
- компарант матрицы, 60
- константа Липшица, 69
- коррекция ИСЛАУ: изменение  
матрицы, 143
- коррекция ИСЛАУ: изменение  
правой части, 138
- коррекция линейной задачи о  
допусках, 137
- критерий Фань Цзы, 60

критерий неособенности Баумана, 52  
 линейная задача о допусках, 132  
 магнитуда, 26  
 матрица знаково-блочная, 213  
 матрица интервальная неособенная, 50  
 матрица интервальная обратная, 56  
 матрица интервальная особенная, 50  
 матрица интервальная с диагональным преобладанием, 51  
 матрица интервальная сильно неособенная, 55  
 матрица преобуславливающая, 111  
 метод Гаусса-Зейделя интервальный, 116  
 метод Кравчика, 129  
 метод Кравчика для нелинейных уравнений, 165  
 метод Ньютона интервальный, 155  
 метод Ньютона многомерный, 159  
 метод Ньютона одномерный, 153  
 метод Шульца интервальный, 58  
 метрика на множествах интервалов, 28  
 магнитуда, 26  
 множество  $\mathbb{IR}^n$ , 31  
 множество АЕ-решений типа  $\mathcal{A}\beta$ , 83  
 множество кванторных решений, 82  
 множество решений допусковое, 85  
 множество решений интервальной системы уравнений, 81  
 множество решений объединённое, 85  
 множество решений управляемое, 85  
 монотонность по включению, 21  
 независимые (несвязанные) интервальные величины, 23  
 нейтральные элементы, 24  
 непрерывность функции по Липшицу, 69  
 норма интервального вектора, 42  
 норма интервальной матрицы, 43  
 норма чебышёвская, 43  
 норма чебышёвская взвешенная, 43  
 нормы интервальных векторов и матриц согласованные, 43  
 нормы интервальных матриц и векторов, 42  
 обратный по сложению элемент в арифметике Каухера, 200  
 оператор Кравчика для систем нелинейных уравнений, 167  
 относительная ширина интервала, 27  
 отображение  $P$ -сжимающее, 49  
 оценивание множества решений внешнее, 112  
 оценивание области значений функции, 64  
 оценка интервальная внешняя, 64  
 оценка интервальная внутренняя, 64  
 погружение стандартное, 212  
 подмножества  $\mathbb{IR}$ , 19  
 подмножества  $\mathbb{KR}$ , 201  
 подход формально-алгебраический, 126  
 порядок линейный, 21  
 порядок по включению, 21  
 порядок частичный на множестве логических кванторов, 86  
 правильная проекция интервала, 198  
 преобуславливание, 111  
 преобладание диагональное, 51  
 преобладание диагональное слабое, 51  
 признак Адамара интервальный, 51  
 признак Бекка, 52  
 признак Рона-Рекса, 53  
 признак Румпа, 53  
 процедура Хансена-Блика-Рона, 120  
 радиус интервала, 25  
 радиус спектральный, 49

распространенные векторные нормы, 43  
 расстояние на множествах интервалов, 28  
 расширение интервальное слабое, 65  
 расширение интервальное функции оптимальное, 65  
 свойства интервальных арифметических операций, 24  
 свойства радиуса интервала, 26  
 свойства середины и радиуса матричных операций, 36  
 свойства середины интервала, 25  
 свойства ширины интервала, 26  
 середина интервала, 25  
 сингулярное число матрицы, 43  
 система линейных алгебраических уравнений интервальная (ИСЛАУ), 83  
 система уравнений интервальная, 81  
 субдистрибутивность умножения относительно сложения, 24  
 субдифференциальный метод Ньютона, 212  
 супердистрибутивность, 203  
 таблица Кэли в классической интервальной арифметике, 20  
 теорема Аелефельда-Херцбергера, 127  
 теорема Апостолатоса-Кулиша, 127  
 теорема Банаха о неподвижной точке, 49  
 теорема Бауманна, 78  
 теорема И. А. Шарой о строении допускового множества решений, 98  
 теорема Капрани-Мадсена, 73  
 теорема Лакеева-Носкова, 91  
 теорема Майера-Варнке, 126  
 теорема Рона о допусковом множестве решений, 99  
 теорема Шрёдера о неподвижной точке, 49  
 теорема о непустоте управляемого множества решений, 92  
 теорема о пустоте допускового множества, 101  
 теорема об аналитической характеристизации АЕ-решений ИСЛАУ, 84  
 теорема основная интервальной арифметики, 23  
 теоретико-множественное упорядочение по включению, 197  
 умножение в полной интервальной арифметике  $\mathbb{K}\mathbb{R}$ , 201  
 унарный минус, 21  
 уравновешенный интервал, 25  
 условие Липшица, 68  
 условная операция взятия экстремума по включению, 205  
 форма бицентрированная, 77  
 форма среднезначная, 73  
 форма центрированная, 72  
 форма центрированная дифференциальная, 73  
 форма центрированная наклонная, 73  
 функционал  $\text{Ctr}$ , 106  
 функционал  $\text{Tot}$ , 106  
 функционал  $\text{Uni}$ , 105  
 функционал  $\text{Uss}$ , 105  
 функционал Рачека, 27  
 функционал распознающий, 104  
 функция внешняя оценивающая, 65  
 функция срезки  $\text{cut}$ , 78  
 функция элементарная, 66  
 характеристизация Бекка, 85  
 хаусдорфово расстояние, 28  
 центровой подход к построению

внутренней оценки  
допускового множества  
решений, 149  
частичный линейный порядок в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$ ,  
198  
числа сингулярные матрицы, 44  
ширина интервала, 25  
эффект обёртывания, 36