Министерство образования науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

А.Н.Баженов, Т.О.Яворук

Внутренние и внешние оценки в анализе данных. Твины и твинная регрессия

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2024

УДК 519.9 Р32
А в т о р ы:
А.Н.Баженов, Т.О.Яворук. Внутренние и внешние оценки в анализе данных. Твины и твинная регрессия. – СПб., 2024. – 80 с.

Учебное пособие соответствует образовательному стандарту высшего образования Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» по направлению подготовки бакалавров 01.03.02 и магистров 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», по дисциплинам «Математическая статистика», «Интервальный анализ» и «Анализ данных с интервальной неопределённостью».

Интервальная статистика или анализ данных с интервальной неопределённостью — молодая ветвь анализа данных, возникшая в последние десятилетия на базе идей интервального анализа.

Составные интервальные объекты — твины являются способом одновременного описания внутренних и внешних оценок данных и результатов вычислений.

В пособии приводятся необходимые сведения по теории, приведены различные примеры.

Особое внимание уделено построению коридоров совместности моделей данных в твинной арифметике. Описаны оригинальные методы уточнения внутренних оценок параметров моделей.

Пособие адресовано всем, кто интересуется применением математики к решению практических задач в области анализа данных.

Материал апробирован в учебных курсах для студентов кафедры «Прикладная математика» Физико-Механического Института СПбПУ.

Ключевые слова: Классическая интервальная арифметика, интервальная арифметика Каухера, множества решений интервальных задач, интервальная статистика, интервальные твины, твинная регрессия

Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation

PETER THE GREAT
SAINT PETERSBURG POLYTECHNIC UNIVERSITY

Institute of Physics and Mechanics
Graduate School of Applied Mechanics and Computational Physics

A. N. Bazhenov T. Iavoruk

Internal and External Estimations in Data Science Twins and Linear Regression Problem

Training Manual

POLYTECH PRESS
Peter the Great
St.Petersburg Polytechnic
University

St. Petersburg
2024

A. N. Bazhenov, T. Iavoruk
Internal and External Estimations in Data Science. Twins and Linear Regression Problem : training manual / A. N. Bazhenov, T. Iavoruk. — St. Petersburg. : POLYTECH-PRESS, 2024. — 76 p.

The training manual corresponds to the educational standard of higher education of Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University in the Bachelor's degree program 01.03.02 «Applied mathematics and informatics», for the discipline «Interval analysis».

Interval statistics, or data analysis with interval uncertainty, is a young branch of data analysis that has emerged in recent decades based on interval analysis ideas.

Composite interval objects, or twins, simultaneously describe internal and external estimates of data and calculation results.

The manual provides the necessary information on the theory and gives various examples.

In twin arithmetic, special focus is given to the calculation of forecast corridors of data models. The Training Manual describes new techniques for improving internal estimations of model parameters.

An important part of the manual is examples illustrating calculations and many illustrations.

The manual is intended for undergraduates, graduate students, researchers and engineers, engaged in research using tomography methods.

Tables 5. Figures 20. References: 26 titles.

Keywords: Classical interval arithmetic, interval Kucher arithmetic, interval solutions of interval problems, interval statistics, interval twins, twin regression

doi:10.18720/SPBPU/5/tr24-155

Оглавление

Список иллюстраций

Список таблиц

Список примеров

Глава 1

Введение

Математические вычисления и обработка данных стали неотъемлемой частью всех сфер человеческой деятельности, включая гуманитарные и социальные области. В связи с колоссально выросшей за последние десятилетия производительностью компьютеров и увеличением возможностью хранения информации, вычисления стали гораздо более быстрыми и могут оперировать огромными объемами данных.

Математиками и программистами разработано очень большое количество методов и программных средств для различных вычислений. В подавляющем числе этих методов и средств результатом вычислений является число в $\mathbb{R}^n$ (более точно, рациональное $\mathbb{Q}^n$, $n \in \mathbb{N}$). Эта информация часто является недостаточной. Необходимо знать, насколько может измениться решение при вариации условий задачи: параметров модели, исходных данных и т.п. Получение такой информации может оказаться более сложной, чем получение точечной оценки.

Во второй половине XX века возникла новая ветвь математики — *интервальный анализ*. В интервальном анализе (ИА) первичный объект является *интервалом* — отрезком вещественной оси. Интервалами являются и различные операции над интервалами и функции от интервалов.

$$\mathbb{IR} = \{\boldsymbol{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \ : \ \underline{x} \leq \overline{x}, \ \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}\} \tag{1.1}$$

Таким образом, на самом базовом уровне ИА содержится идея двусторонней оценки. Вместе с тем, в первой и наиболее простой версии интервальной арифметики, классической интервальной арифметике $\mathbb{IR}$, имеются определённые ограничения. Почти при любой операции над интервалами происходит расширение неопределённости результата. Это является результатом способа определения операций в $\mathbb{IR}$. Фактически, они дают *внешнюю* оценку результатов вычислений. Единственным естественным способом каким-то более узким способом оценить результат, является вычисление точечной оценки, например, среднего значения интервала. Эта величина неустойчива по отношению к условиям задачи.

Для получения более содержательных результатов, помимо внешней оценки результатов вычислений, желательно иметь *внутреннюю* оценку результатов вычислений в виде интервала. Для этого нужно или организовать процедуру такой оценки или каким-то образом определить вычисления таким образом, чтобы эта оценка возникала естественным образом.

Второй подход был реализован путём использования в качестве базового элемента более сложной алгебраической структуры, которую называют *твин* от <u>TW</u>ice <u>IN</u>terval — двойной интервал. Твины можно определить разными способами, как и операции над ними.

Помимо структуры твина, при проведении вычислений надо иметь в виду, что их результатом могут быть *неправильные* интервалы, для которых

$$\overline{\mathbb{IR}} = \{\boldsymbol{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \ : \ \underline{x} \geq \overline{x}, \ \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}\}. \tag{1.2}$$

Объединение правильных и неправильных интервалов позволяет получить более общую алгебраическую систему — *полную интервальную арифметику (Каухера)* $\mathbb{KR}$,

$$\mathbb{KR} = \mathbb{IR} \cup \overline{\mathbb{IR}}. \tag{1.3}$$

Арифметические операции в $\mathbb{KR}$ имеют большую гибкость, чем в $\mathbb{IR}$. Помимо этого, в полной интервальной арифметике всегда существует результат взятия минимума по включению для любых пар интервалов, в том числе и не пересекающихся.

В целом интервальные арифметики образуют иерархию

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{IR} \subseteq \mathbb{KR} \subseteq \mathbb{TR}. \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbb{TR}$ — твины, составные интервальные объекты, см. §2.4. В определении твина можно использовать различные частичные порядки ($\subseteq$ и $\leq$) на множестве интервалов, эти два определения эквивалентны и имеют способ перехода из одного в другой. Различные порядки используются для интерпретации решения и/или условия задачи.

Глава 2

Интервальные арифметики

2.1 Классическая интервальная арифметика

Вещественные интервалы. Первичное понятие интервального анализа данных и интервальной статистики — *интервал*. Это простое подмножество множества всех вещественных (действительных) чисел, которое задаёт целый диапазон значений интересующей нас величины. С помощью интервалов можно описывать и моделировать неопределённости и неоднозначности.

Интервалы могут определяться на вещественной оси, на комплексной плоскости, а также в многомерных пространствах. Кроме того, существуют различные определения интервалов, и некоторые их них не равносильны друг другу, задавая разные математические объекты. Далее нас будут интересовать, главным образом, вещественные интервалы, вещественные интервальные векторы и матрицы, так как именно они играют главную роль в измерениях и их обработке.

Определение 2.1.1 *Интервалом* $[a, b]$ *вещественной оси* $\mathbb{R}$ *называется множество всех чисел, расположенных между заданными числами* a *и* b*, включая их самих, т. е.*

$$[a, b] := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}.$$

При этом a *и* b *называются* концами *интервала* $[a, b]$*, левым (или нижним) и правым (или верхним) соответственно.*

Характеристики интервала. Любой интервал полностью задаётся двумя числами — своими концами, но на практике широко используются также другие характеристики интервалов и представления интервалов на их основе.

Важнейшими характеристиками интервала являются его *середина* (центр)

$$\operatorname{mid} \boldsymbol{a} = \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{a}}),$$

и его *радиус*

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{a} = \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}}).$$

Также используется понятие *ширины* интервала

$$\operatorname{wid} \boldsymbol{a} = \overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}}.$$

Таким образом, задание середины и радиуса интервала также однозначно определяет его, чем часто пользуются и в теории, и на практике.

Середина интервала — это точка, которая «представляет его» наилучшим образом, так как наименее удалена от остальных точек этого интервала.

Радиус и ширина характеризуют разброс (рассеяние) точек интервала. Интервалы нулевой ширины обычно называют *вырожденными*. Они отождествляются с вещественными числами, то есть, $[1, 1]$ — это то же самое, что и 1.

Отношения между интервалами. Интервалы являются множествами, и для них определены теоретико-множественные отношения и операции (объединение, пересечение и др.).

Особенно важно *отношение включения одного интервала в другой*:

$$\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b} \ \text{ равносильно тому, что } \ \underline{\boldsymbol{a}} \geq \underline{\boldsymbol{b}} \ \text{ и } \ \overline{\boldsymbol{a}} \leq \overline{\boldsymbol{b}}. \tag{2.1}$$

Отношение включения является частичным порядком и превращает множество интервалов в частично упорядоченное множество (см. [3]).

Кроме этого на множестве интервалов можно ввести порядок по свойству «$\leq$»:

Определение 2.1.2 *Для интервалов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}$ условимся считать, что $\boldsymbol{a}$ не превосходит $\boldsymbol{b}$ и писать «$\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$» тогда и только тогда, когда $\underline{\boldsymbol{a}} \leq \underline{\boldsymbol{b}}$ и $\overline{\boldsymbol{a}} \leq \overline{\boldsymbol{b}}$.*

Теоретико-множественные операции над интервалами. Если интервалы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют непустое пересечение, т. е. $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} \neq \varnothing$, то можно дать простые выражения для результатов теоретико-множественных операций пересечения и объединения через концы этих интервалов

$$\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} = \bigl[\max\{\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}\}, \min\{\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}\}\bigr],$$

$$\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = \bigl[\min\{\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}\}, \max\{\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}\}\bigr].$$

Если же $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} = \varnothing$, т. е. интервалы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не имеют общих точек, то эти равенства уже неверны.

Обобщением операций пересечения и объединения являются операции взятия точной нижней грани и точной верхней грани относительно включения «$\subseteq$»:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \bigl[\max\{\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}\}, \min\{\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}\}\bigr], \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b} = \bigl[\min\{\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}\}, \max\{\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}\}\bigr]. \tag{2.3}$$

Точная нижняя грань не обязательно присутствует во множестве, в отличие от минимума по множеству.

Классическая интервальная арифметика Определение операций между интервалами производится через результаты операций между их членами, т. е. «по представителям». Именно, результат интервальной операции есть множество всевозможных результатов операции между числами из интервалов. Для двухместной операции «$\star$» имеем

$$\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b} \;=\; \bigl\{\, a \star b \mid a \in \boldsymbol{b},\, b \in \boldsymbol{b} \,\bigr\}. \tag{2.4}$$

Аналогично определяются интервальные одноместные операции.

Если рассматриваются арифметические операции, т. е. $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$, то множества, задаваемые правилом (2.4), тоже являются интервалами. Для конкретных арифметических операций имеем формулы:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \bigl[\, \underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}},\, \overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}} \,\bigr], \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \bigl[\, \underline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{b}},\, \overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}} \,\bigr], \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \bigl[\, \min\{\underline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}\,\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\,\overline{\boldsymbol{b}}\} \,,\, \max\{\underline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}\,\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\,\overline{\boldsymbol{b}}\} \,\bigr], \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \bigl[\, 1/\overline{\boldsymbol{b}},\, 1/\underline{\boldsymbol{b}}, \,\bigr] \qquad \text{для} \;\; \boldsymbol{b} \not\ni 0. \tag{2.8}$$

Множество всех интервалов вещественной оси с операциями сложения, вычитания, умножения и деления, определёнными формулами (2.5)–(2.8), называется *классической интервальной арифметикой*, и его обозначают $\mathbb{IR}$.

Выделим в $\mathbb{IR}$ следующие подмножества:

$$\begin{aligned} P \;&:= \bigl\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{IR} \mid \underline{\boldsymbol{a}} \geq 0 \;\&\; \overline{\boldsymbol{a}} \geq 0\bigr\} && \text{— неотрицательные интервалы,} \\ Z \;&:= \bigl\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{IR} \mid \underline{\boldsymbol{a}} \leq 0 \leq \overline{\boldsymbol{a}}\bigr\} && \text{— нульсодержащие интервалы,} \\ -P \;&:= \bigl\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{IR} \mid -\boldsymbol{a} \in P\bigr\} && \text{— неположительные интервалы.} \end{aligned}$$

Определение 2.1.3 *Интервал* $\boldsymbol{a}$ *называется* неотрицательным*, т. е.* $\boldsymbol{a} \geq 0$*, если неотрицательны оба его конца. Интервал* $\boldsymbol{a}$ *называется* неположительным*, т. е.* $\boldsymbol{a} \leq 0$*, если неположительны оба его конца.*

Таким образом, интервал в $\mathbb{IR}$ характеризуется *знаком*:

$$\operatorname{sgn} \boldsymbol{a} = \begin{cases} \quad + \ , & \text{если } \ \boldsymbol{a} \geq 0, \\ \quad - \ , & \text{если } \ \boldsymbol{a} \leq 0, \\ \text{не определен,} & \text{если } \ \underline{\boldsymbol{a}} \leq 0 \leq \overline{\boldsymbol{a}}. \end{cases} \tag{2.9}$$

С учётом введённых подмножеств множество $\mathbb{IR}$ можно представить в виде символической формулы:

$$\mathbb{IR} = P \cup Z \cup (-P).$$

После разбиения всего множества $\mathbb{IR}$ на подмножества интервальное умножение можно определить в виде *таблицы Кэли* (таблица 2.1).

$\cdot$	$\boldsymbol{b} \in P$	$\boldsymbol{b} \in Z$	$\boldsymbol{b} \in -P$
$\boldsymbol{a} \in P$	$[\underline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}]$	$[\overline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}]$	$[\overline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}]$
$\boldsymbol{a} \in Z$	$[\underline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}]$	$[\min\{\underline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}\}, \max\{\underline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}\}]$	$[\overline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}]$
$\boldsymbol{a} \in -P$	$[\underline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}]$	$[\underline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}]$	$[\overline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}]$

Таблица 2.1. Интервальное умножение в классической интервальной арифметике $\mathbb{IR}$, *таблица Кэли*

2.2 Полная интервальная арифметика

Элементами арифметики $\mathbb{KR}$ являются пары чисел вида $[\alpha, \beta]$. Если $\alpha \leq \beta$, то $[\alpha, \beta]$ обозначает обычный интервал вещественной оси, и его называют *правильным.* Если же $\alpha > \beta$, то $[\alpha, \beta]$ — *неправильный интервал.* Таким образом, $\mathbb{IR} \subset \mathbb{KR}$.

Правильные и неправильные интервалы, образующие $\mathbb{KR}$, переходят друг в друга в результате отображения *дуализации*, которое обозначается символом `dual` и меняет местами (переворачивает) концы интервала, т. е.

$$\operatorname{dual} \boldsymbol{a} \ := [\ \overline{\boldsymbol{a}}, \ \underline{\boldsymbol{a}}\ ]. \tag{2.10}$$

Правильной проекцией интервала $\boldsymbol{a}$ из $\mathbb{KR}$ называют интервал, обозначаемый $\operatorname{pro}\boldsymbol{a}$:

$$\operatorname{pro}\boldsymbol{a} = \begin{cases} \boldsymbol{a}, & \text{если } \boldsymbol{a} \text{ — правильный}, \\ \operatorname{dual}\boldsymbol{a}, & \text{если } \boldsymbol{a} \text{ — неправильный}. \end{cases}$$

С помощью правильной проекции из произвольного интервала получается правильный.

Арифметические операции между интервалами в $\mathbb{KR}$ продолжают операции в $\mathbb{IR}$, их подробное описание можно найти в [18]. Умножение интервала из $\mathbb{KR}$ на число определяется совершенно так же, как и для обычных правильных интервалов.

Чрезвычайно важным в интервальной арифметике Каухера является обратимость арифметических операций. В частности, для любого интервала имеется противоположный ему, т. е. обратный по сложению. Для интервалов, не содержащих нуля, имеются обратные к ним по умножению. Для сложения (2.5) обратной операцией является не операция интервального вычитания (2.6), а операция, которую называют «алгебраическим вычитанием» и обозначают знаком «$\ominus$»:

$$\boldsymbol{a} \ominus \boldsymbol{b} = [\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{b}}]. \tag{2.11}$$

Для любых интервалов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ из $\mathbb{KR}$ справедливы равенства

$$\boldsymbol{a} \ominus \boldsymbol{a} = 0, \qquad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \ominus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}, \qquad (\boldsymbol{a} \ominus \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}.$$

Пример 1 (Алгебраическое вычитание в $\mathbb{KR}$)

$$[1, 2] \ominus [1, 2] = [1, 2] + [-1, -2] = [1 - 1, 2 - 2] = [0, 0] = 0.$$

$\blacksquare$

Полная интервальная арифметика Каухера $\mathbb{KR}$ пополняет классическую интервальную арифметику $\mathbb{IR}$ не только в алгебраическом смысле, но также и относительно естественного порядка по включению «$\subseteq$».

Определение 2.2.1 *Для интервалов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{KR}$ выполняется включение $\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b}$, если*

$$\underline{\boldsymbol{a}} \geq \underline{\boldsymbol{b}} \quad \text{и} \quad \overline{\boldsymbol{a}} \leq \overline{\boldsymbol{b}}.$$

Относительно введённого таким образом отношения включения в $\mathbb{KR}$ для любых двух интервалов существуют интервалы точной нижней грани и точной верхней грани по включению, т. е. результаты операций $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}$ всегда определены.

Пример 2 (Взятие точной нижней грани и точной верхней грани по включению в $\mathbb{KR}$)

$$[0,1] \wedge [4,5] = [4,1], \quad [0,1] \vee [4,5] = [0,5].$$

$\blacksquare$

Поскольку

$$\mathbb{KR} = \mathbb{IR} \;\cup\; (\operatorname{dual} Z) = P \;\cup\; Z \;\cup\; (-P) \;\cup\; (\operatorname{dual} Z),$$

где

$$\begin{aligned}
P &:= \bigl\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{KR} \mid \underline{\boldsymbol{a}} \ge 0 \;\&\; \overline{\boldsymbol{a}} \ge 0\bigr\} && \text{— неотрицательные интервалы,}\\
Z &:= \bigl\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{KR} \mid \underline{\boldsymbol{a}} \le 0 \le \overline{\boldsymbol{a}}\bigr\} && \text{— нульсодержащие интервалы,}\\
-P &:= \bigl\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{KR} \mid -\boldsymbol{a} \in P\bigr\} && \text{— неположительные интервалы,}\\
\operatorname{dual} Z &:= \bigl\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{KR} \mid \operatorname{dual} \boldsymbol{a} \in Z\bigr\} && \text{— интервалы, содержащиеся в нуле,}
\end{aligned}$$

то умножение в полной интервальной арифметике Каухера может быть описано *расширенной таблицей Кэли* (таблица 2.2), которая получается в результате добавления в таблицу 2.1 еще одного столбца и еще одной строки. Во всех случаях для умножения в $\mathbb{KR}$ справедливо

$$\operatorname{dual}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \operatorname{dual} \boldsymbol{a} \cdot \operatorname{dual} \boldsymbol{b}.$$

	$\boldsymbol{b} \in P$	$\boldsymbol{b} \in Z$	$\boldsymbol{b} \in -P$	$\boldsymbol{b} \in \operatorname{dual} Z$
$\boldsymbol{a} \in P$	$[\underline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}]$	$[\overline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}]$	$[\overline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}]$	$[\underline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}]$
$\boldsymbol{a} \in Z$	$[\underline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}]$	$\bigl[\min\bigl\{\underline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}\bigr\}, \max\bigl\{\underline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}\bigr\}\bigr]$	$[\overline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}]$	0
$\boldsymbol{a} \in -P$	$[\underline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}]$	$[\underline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}]$	$[\overline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}]$	$[\overline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}]$
$\boldsymbol{a} \in \operatorname{dual} Z$	$[\underline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}]$	0	$[\overline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}]$	$\bigl[\max\bigl\{\underline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}\bigr\}, \min\bigl\{\underline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}\bigr\}\bigr]$

Таблица 2.2. Интервальное умножение в полной интервальной арифметике $\mathbb{KR}$, *расширенная таблица Кэли*

Внутренние оценки результатов вычислений. Для получения *внутренних* оценок результатов вычислений ожидается получение интервала в виде следующей конструкции

$$\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b} = \left[\max_{a \in \boldsymbol{a}} \min_{b \in \boldsymbol{b}} (\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b}),\ \min_{a \in \boldsymbol{a}} \max_{b \in \boldsymbol{b}} (\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b}) \right], \tag{2.12}$$

В арифметике $\mathbb{IR}$ такую оценку построить невозможно, однако это можно сделать, если один из операндов — неправильный интервал в арифметике $\mathbb{KR}$.

Например, можно показать (см. [18]), что если первый из интервалов, над которыми производится арифметическая операция, является правильным, а второй — неправильным, результат умножения двух таких интервалов можно представить в виде:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \left[\max_{a \in \operatorname{pro} \boldsymbol{a}} \min_{b \in \boldsymbol{b}} (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}), \min_{a \in \operatorname{pro} \boldsymbol{a}} \max_{b \in \boldsymbol{b}} (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \right]. \tag{2.13}$$

Это подводит к идее, что внутренние оценки значений операций можно получать, переходя в арифметику $\mathbb{KR}$ и заменяя один из правильных интервалов на дуальный — см. (2.10).

2.3 Метрики, топология, сравнение интервалов

2.3.1 Расстояние на множестве интервалов

Расстояние на множестве интервалов обобщает расстояние на вещественной оси.

Предложение. ([18]) Отображение $\operatorname{dist} : \mathbb{IR} \times \mathbb{IR} \to \mathbb{R}_+$, определяемое как

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := \max\{|\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}}|, |\overline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{b}}|\}, \tag{2.14}$$

обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \geq 0, \text{ и равенство достигается только при } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}, \\
&\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \operatorname{dist}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}), \\
&\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \leq \operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \operatorname{dist}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \text{ для любых } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \text{ из } \mathbb{IR}.
\end{aligned}$$

Определение 2.3.1 ([18]) *Величину* $\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, *определяемую посредством выражения* (2.14), *называют* расстоянием (метрикой) *на множестве интервалов* $\mathbb{IR}$.

Отображение dist на $\mathbb{IR}$ (2.14) является *хаусдорфовым расстоянием* между множествами (интервалами) и является расстоянием между точками множеств вещественной оси $\mathbb{R}$.

В качестве расстояния $\operatorname{dist}(A, B)$ между множествами A и B рассматриваем известную в геометрии конструкцию *хаусдорфова расстояния* между множествами (расстояния Хаусдорфа), которое использует в качестве основы расстояние между отдельными точками множеств. Если на $\mathbb{R}^n$ задано некоторое расстояние d, то *хаусдорфово расстояние* между компактными множествами A, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ определяется как

$$\operatorname{dist}(A, B) = \max\big\{ \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} \ d(a,b), \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} \ d(a,b) \big\}. \tag{2.15}$$

Оно имеет ясный и естественный геометрический смысл, будучи максимумом из таких минимальных возможных неотрицательных чисел r_A и r_B, что r_B-окрестность множества A относительно расстояния d содержит B, а r_A-окрестность множества B относительно расстояния d содержит множество A.

Доказательство хаусдорфовости расстояния $\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ содержится в [18].

Основными свойствами введенной величины $\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ являются следующие формулы

$$\begin{aligned}
&\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),\\
&\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}) \le \operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \operatorname{dist}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}),\\
&\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\boldsymbol{c}) \le |\boldsymbol{a}| \operatorname{dist}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}),\\
&\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b} \subseteq \boldsymbol{c} \quad \Rightarrow \quad \max\{\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \operatorname{dist}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\} \le \operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}).
\end{aligned}$$

Пример 3 (Примеры вычислений расстояний между интервалами) Рассмотрим специально выбранные интервалы $\boldsymbol{a} = [2, 3]$, $\boldsymbol{b} = [1, 5]$ и $\boldsymbol{c} = [-1, 8]$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= \max\{|2-1|, |3-5|\} = 2,\\
\operatorname{dist}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= \max\{|1+1|, |5-8|\} = 3,\\
\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) &= \max\{|2+1|, |3-8|\} = 5.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\max\{\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \operatorname{dist}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\} = 3 < 5 = \operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}),$$

поскольку, как можно проверить, выполняется $\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b} \subseteq \boldsymbol{c}$. ■

2.3.2 Сравнение интервалов

В книге [1] С.П.Шарый подробно обсуждает сравнение интервалов.

Пусть V — множество элементов произвольной природы. Напомним, что бинарное отношение «$\preccurlyeq$» на V называется *порядком* (или *упорядочением*), если для любых элементов x, y из V оно удовлетворяет следующим свойствам (см. [3]:

рефлексивность, т. е. $x \preccurlyeq x$;

антисимметричность, т. е. из $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq x$ следует $x = y$;

транзитивность, т. е. из $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq z$ следует $x \preccurlyeq z$.

В любом из случаев, когда либо $x \preccurlyeq y$, либо $y \preccurlyeq x$, элементы x и y называются *сравнимыми*. Возможны ситуации, когда для каких-то двух элементов упорядоченного множества нельзя сказать, что они находятся в отношении «$\preccurlyeq$». В таких случаях говорят, что множество V является *частично упорядоченным*, а сам порядок «$\preccurlyeq$» называют *частичным*. Если же любые два элемента упорядоченного множества сравнимы, то порядок называют *линейным порядком*, а множество V — *линейно упорядоченное*.

Например, отношением порядка является отношение включения одного интервала в другой, задаваемое посредством (2.1), т. е.

$$\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\boldsymbol{x}} \geq \underline{\boldsymbol{y}} \ \text{ и } \ \overline{\boldsymbol{x}} \leq \overline{\boldsymbol{y}}.$$

Это частичный порядок в $\mathbb{IR}$, но не линейный.

На множестве вещественных чисел существует естественный линейный порядок «$\leq$», «меньше либо равно» (или «не больше»), противоположный к которому обозначают «$\geq$» («больше или равно»).

При сравнении интервалов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ смысл этого сравнения расширяется, и у него появляются новые исходы. Наиболее существенно, что рассматриваемые отношения могут удовлетворяться как для всех элементов интервала, так и только для части из них.

На множестве интервалов можно ввести линейное упорядочение:

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{\boldsymbol{x}} \leq \underline{\boldsymbol{y}} \ \text{ и } \ \overline{\boldsymbol{x}} \leq \overline{\boldsymbol{y}}. \tag{2.16}$$

Оно является частичным порядком на $\mathbb{IR}$, и с использованием логических кванторов можно записать:

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall x \in \boldsymbol{x})(\exists y \in \boldsymbol{y})(x \leq y) \ \& \ (\forall y \in \boldsymbol{y})(\exists x \in \boldsymbol{x})(x \leq y).$$

Этот порядок уникален в математическом смысле, так как является прямым произведением порядков «$\leq$» на вещественной оси и естественно дополняет порядок по включению «$\subseteq$» в том смысле, что для любых интервалов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ всегда верно как минимум одно из соотношений

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x} \supseteq \boldsymbol{y}.$$

Также интервалы можно сравнивать по какой-нибудь точке, выбрав заранее способ её определения. Например, можно сравнивать середины интервалов, медианы или деление интервала в определённом отношении.

2.4 Составные интервальные объекты — твины

Данные и результаты операций с ними можно описывать не только интервалами, но и более сложными объектами, которые поддерживают дополнительную функциональность.

В данных мы можем использовать интервал с интервальными концами — *твин*.

Слово «твин» является акронимом английского выражения «twice interval», т. е. «двойной интервал». Впервые такие объекты были рассмотрены Э. Гарденьесом с коллегами в 80-х годах XX века [7].

Они назвали развитое ими направление Modal Interval Analysis — модальный интервальный анализ.

Твин можно представить в виде

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\ [\underline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}], [\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{b}}]\ ],$$

и в зависимости от того, как мы определяем понятия «больше или равно» и «меньше или равно», подразумевать под ним множество всех интервалов, больших или равных $[\underline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}]$ и меньших или равных $[\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{b}}]$. Так как на множествах интервалов из $\mathbb{IR}$ и $\mathbb{KR}$ существуют частичные упорядочения «$\subseteq$» и «$\leq$», то, соответственно, возможны два типа твинов: «$\subseteq$»-твины и «$\leq$»-твины.

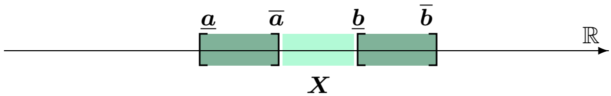

Рис. 2.1. Твины на вещественной оси

На рис. 2.1 твин $\boldsymbol{X}$ представлен в графической форме. Концы твина, т. е. интервалы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, представлены более темной заливкой, чем остальная часть твина.

В.М.Нестеров развил идеи твинов [10]. Особенно значимы его идеи о твинах, как способе одновременного вычисления внутренних и внешних оценок. Детали вычислений с твинами обсуждаются в §2.5.

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{A}] = [\ [\underline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}], [\underline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{A}}]\ ],$$

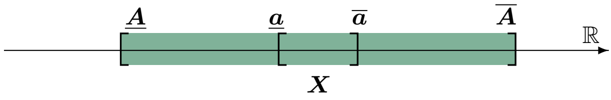

Рис. 2.2. Твины Нестерова

Как представление твинов, так и работа с ними сложнее, чем с обычными интервалами. В настоящее время развиты программные средства, реализующие арифметику твинов [11].

Существуют различные способы представления твинов:

1. Как интервал множества интервалов с отношением $\leq$ (2.3-a):

$$[a] \leq [b] \Leftrightarrow a^- \leq b^- \ \& \ a^+ \leq b^+;$$

2. Как интервал множества интервалов с отношением $\subseteq$ (2.3-b):

$$[a] \subset [b] \Leftrightarrow b^- \leq a^- \ \& \ a^+ \leq b^+;$$

3. Как вектор двух интервалов, содержащий нижнюю и верхнюю границу соответственно (2.3-c)

Рисунок 2.3 [12] демонстрирует различные способы представления твинов.

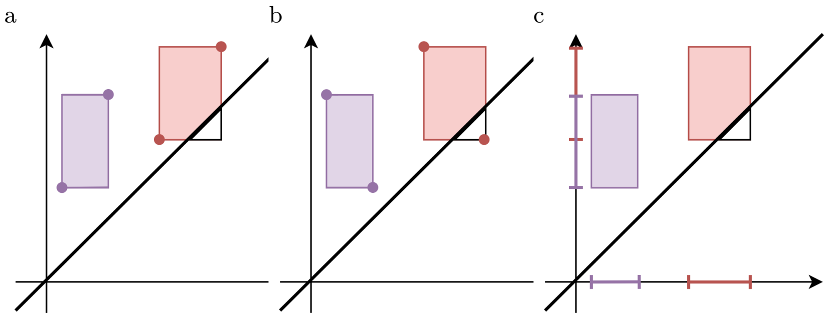

Рис. 2.3. Различные способы представления твинов: a — Как интервал множества интервалов с отношением $\leq$; b — Как интервал множества интервалов с отношением $\subset$; c — Как вектор двух интервалов, содержащий нижнюю и верхнюю границу соответственно.

2.5 Арифметика твинов

2.5.1 Определение и операции твинной арифметики в нотации В. М. Нестерова

Достаточно подробно твинная арифметика была рассмотрена в диссертации В. М. Нестерова [10].

Основные определения твинной арифметики

Определение 2.5.1 *Твин – это пара интервалов $T = (X_l, X)$, где $X_l \in I(\mathbb{R}) \cup \{\varnothing\}$ и $X \in I(\mathbb{R})$.*

Определение 2.5.2 *Оценить неизвестный интервал I твином – это значит найти такой твин $T = (X_l, X)$, что*

$$X_l \subseteq I \subseteq X. \tag{2.17}$$

Обозначим это как $I \sqsubseteq T$.

Определим «внутреннюю длину твина» как $|T|_l = |X_l|$. Аналогично определим «внешнюю длину твина» как $|T| = |X|$. Запись $I \sqsubseteq (\varnothing, X)$ обозначает, что существует только внешняя оценка I, равная X. Будем формально полагать, что в этом случает $|T|_l = -1$.

Твин $(\varnothing, [A, A])$ будем отождествлять с твином $([A, A], [A, A])$. Для твина $T = ([A, A], [A, A])$ будем считать, что $|T|_l = 0$.

Пусть $\diamond$ и $\circ$ – любая унарная и любая бинарная операция соответственно. Тогда все операции вводимой арифметики твинов должны удовлетворять следующим свойствам:

$$X \sqsubseteq T \Rightarrow \diamond X \sqsubseteq \diamond T; \tag{2.18}$$

$$X \sqsubseteq T_1 \;\;\&\;\; Y \sqsubseteq T_2 \Rightarrow X \circ Y \sqsubseteq T_1 \circ T_2. \tag{2.19}$$

Определение 2.5.3 *Пусть внутренние интервалы твинов T_1 и T_2 непусты. Тогда обозначим*

$$\begin{aligned} T_1 &= ([a^-, a^+], [A^-, A^+]), \\ T_2 &= ([b^-, b^+], [B^-, B^+]). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Определение 2.5.4 *Далее нам понадобится определение чисел p и q:*

- *Если внутренние интервалы твинов T_1 и T_2 непусты, то*

$$p = \min\,(a^- + B^+, b^- + A^+), \tag{2.21}$$

$$q = \max\,(a^+ + B^-, b^+ + A^-). \tag{2.22}$$

- *Если внутренний интервал твина T_1 является пустым множеством (но внутренний интервал твина T_2 непустой), то*

$$\begin{aligned} p &= b^- + A^+, \\ q &= b^+ + A^-. \end{aligned} \tag{2.23}$$

- *Если внутренний интервал твина T_2 является пустым множеством (но внутренний интервал твина T_1 непустой), то*

$$\begin{aligned} p &= a^- + B^+, \\ q &= a^+ + B^-. \end{aligned} \tag{2.24}$$

- *Если оба твина T_1 и T_2 одновременно являются вырожденными, то p и q являются неопределёнными.*

Определение 2.5.5 *Пусть Z – пустое или одноэлементное множество, $I_1, I_2 \in I(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\phi(I_1, I_2) = \begin{cases} \min\limits_{\subseteq}\Big\{[c^-, c^+] \mid (c^- \in I_1 \ \& \ c^+ \in I_2) \vee \\ (c^- \in I_2 \ \& \ c^+ \in I_1)\Big\}, & \text{если } I_1 \cap I_2 = Z; \\ \varnothing, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.25}$$

Определение 2.5.6

$$\psi(I_1, I_2) = \max_{\subseteq}\{[c^-, c^+] \mid c^-, c^+ \in I_1 \cup I_2\} \tag{2.26}$$

Формулы твинной арифметики

Теперь введём правила основных арифметических операций, которые используются в твинной арифметике.

Сложение Сложение в твинной арифметике задаётся следующей формулой:

$$T_1 + T_2 = \begin{cases} \left([p, q], [A^- + B^-, A^+ + B^+]\right), & \text{если } |T_1| \le |T_2|_l \vee |T_2| \le |T_1|_l; \\ \left(\varnothing, \quad [A^- + B^-, A^+ + B^+]\right), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}, \tag{2.27}$$

где p и q – это числа, определённые 2.5.4.

Сложение твинов обладает свойствами коммутативности и ассоциативности.

Умножение Формула умножения твинов зависит от пустоты внутренних интервалов твинов-операндов:

- Если $|T_1|_l \neq -1$ и $|T_2|_l \neq -1$, то

$$T_1 \cdot T_2 = \Big(\psi\Big(\phi\big(a^-[B^-, B^+], a^+[B^-, B^+]\big), \phi\big(b^-[A^-, A^+], b^+[A^-, A^+]\big)\Big), [A^-, A^+] \cdot [B^-, B^+]\Big) \tag{2.28}$$

- Если $|T_1|_l = -1$ и $|T_2|_l \neq -1$, то

$$T_1 \cdot T_2 = \Big(\phi\big(b^-[A^-, A^+], b^+[A^-, A^+]\big), [A^-, A^+] \cdot [B^-, B^+]\Big) \tag{2.29}$$

- Если $|T_1|_l \neq -1$ и $|T_2|_l = -1$, то

$$T_1 \cdot T_2 = \Big(\phi\big(a^-[B^-, B^+], a^+[B^-, B^+]\big), [A^-, A^+] \cdot [B^-, B^+]\Big) \tag{2.30}$$

- Если $|T_1|_l = -1$ и $|T_2|_l = -1$, то

$$T_1 \cdot T_2 = (\varnothing, [A^-, A^+] \cdot [B^-, B^+]) \tag{2.31}$$

Умножение твинов обладает свойствами коммутативности и ассоциативности.

Другие операции Также вводят операции унарного минуса и взятие обратного твина:

$$-T_1 = (-[a^-, a^+], -[A^-, A^+]) \tag{2.32}$$

$$\frac{1}{T_1} = \left(\frac{1}{[a^-, a^+]}, \frac{1}{[A^-, A^+]}\right), \quad 0 \notin [A^-, A^+]. \tag{2.33}$$

Необходимо отметить, что введённые операции твинной арифметики удовлетворяют свойствам (2.18) и (2.19).

Внутренние оценки результатов вычислений с твинами.

Пример 4 (Внутренняя оценка суммы твинов)
Рассмотрим сумму твинов $\boldsymbol{A} = [[0, 5], [-1, 6]]$ и $\boldsymbol{B} = [[2, 3], [1, 4]]$.

Проведём внешнюю и внутреннюю оценки суммы твинов, используя дуализацию (2.10).

$$\begin{aligned}
&\mathrm{wid}\,[0,5] > \mathrm{wid}\,[1,4] \\
&\qquad \longrightarrow \mathrm{InnerEst} = [0,5] + \mathrm{dual}\,[1,4] = [0,5] + [4,1] = [4,6], \\
&\mathrm{OuterEst} = [-1,6] + [1,4] = [0,10], \\
&\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = [[4,6],[0,10]].
\end{aligned}$$

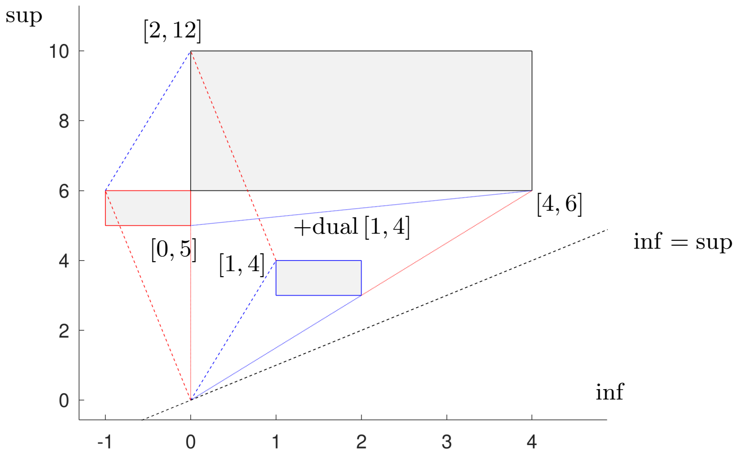

Рис. 2.4. Сумма твинов $\boldsymbol{A} = [[0,5],[-1,6]]$ и $\boldsymbol{B} = [[2,3],[1,4]]$

На Рис. 2.4 графически представлен процесс сложения твинов.

Красным прямоугольником показан твин$\boldsymbol{A} = [[0,5],[-1,6]]$, синим прямоугольником — твин $\boldsymbol{B} = [[2,3],[1,4]]$.

Внешняя оценка суммы формируется как геометрическая (векторная) сумма внешних оценок твинов.

Для невырожденности внутренней оценки твина суммы необходимо, чтобы ширина внутренней оценки одного из твинов превышала внешнюю оценку другого. В данном случае имеем

$$\mathrm{wid}\ |A|_l = 5 > \mathrm{wid}\ |B| = 3.$$

Внутренняя оценка суммы формируется как геометрическая (векторная) сумма внутренней оценки твина с бóльшей шириной внутренней оценки и дуальной внешней оценки второго твина, формула (2.10). ■

2.5.2 Сумма нескольких твинов.

Рассмотрим запись формул твинной арифметики [24] в виде, удобном для вычислений суммы твинов. Наша задача — найти форму записи, удобную для проведения различных вычислений. В частности, важно найти условия проведения итерационных вычислений без вырождения внутренних оценок.

Начнём с величин p (2.21) и q (2.22), которые определяют внутреннюю оценку в формуле сложения двух твинов (2.27). Выпишем эти формулы снова

$$p = \min\left(a^- + B^+, b^- + A^+\right), \tag{2.21}$$

$$q = \max\left(a^+ + B^-, b^+ + A^-\right). \tag{2.22}$$

Заменим обозначения a, b, A, B на a_j, A_j.

$$p = \min_i (a_i^- + A_{k\neq i}^+), \tag{2.34}$$

$$q = \max_i (a_i^+ + A_{k\neq i}^-). \tag{2.35}$$

Представление p (2.21) и q (2.22) можно обобщить на сумму нескольких твинов, если ширина внутренней оценки одного из слагаемых больше суммы внешних оценок остальных слагаемых.

Пусть надо найти сумму

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i, \quad T_i = ([a_i^-, a_i^+], [A_i^-, A_i^+]). \tag{2.36}$$

Обозначим

$$p = \min_i \left(a_i^- + \sum_{k\neq i}^{n} A_k^+\right), \tag{2.37}$$

$$q = \max_i \left(a_i^+ + \sum_{k\neq i}^{n} A_k^-\right). \tag{2.38}$$

Тогда

$$T = \left([p, q], \left[\sum_{i=1}^{n} A_i^-, \sum_{i=1}^{n} A_i^+ \right] \right). \tag{2.39}$$

Внутренний интервал в сумме твинов непуст, если

$$|a| \geq \sum_{k\neq 1}^{n} |A_k|. \tag{2.40}$$

Здесь $|a| = \max_i |a_i|$.

Таким образом,

проверка невырожденности внутренней оценки суммы твинов сводится к проверке условия (2.40).

Важным является случай равенства в (2.40). Внутренняя оценка в таком случае представляет собой вещественное число.

Внешний интервал представляет сумму внешних интервалов.

Пример 5 (Сумма трёх твинов в арифметике Нестерова)

Рассмотрим сумму трёх твинов [10]. Имеем твины

$$T_1 = ([a^-, a^+], [A^-, A^+]),$$
$$T_2 = ([b^-, b^+], [B^-, B^+]),$$
$$T_3 = ([c^-, c^+], [C^-, C^+]).$$

Тогда, согласно (2.34) и (2.35)

$$p = \min\left(a^- + B^+ + C^+, b^- + A^+ + C^+, c^- + A^+ + B^+\right);$$
$$q = \max\left(a^+ + B^- + C^-, b^+ + A^- + C^-, c^+ + A^- + B^-\right).$$

Внутренний интервал в сумме трёх слагаемых непуст, если $|a| \geq |B| + |C|$. ■

В работе [24] дана удобная нотация для формул твинной арифметики Нестерова и испанских авторов. Программная реализация на языке Python доступна на git-ресурсе Т. О. Яворук по адресу [22].

2.5.3 Определение и операции твинной арифметики в «французской» нотации

Обозначения, которые идут далее, отличаются от введённых ранее. Основой данных обозначений выступает статья [13], но они немного модифицированы в данной работе. Для ясности в таблице 2.3 указаны текущие обозначения.

Толстое множество

Power set множества S – это множество всех подмножеств S, включая пустое множество и само S.

Обозначим через $(\mathscr{P}(\mathbb{R}^n), \subset)$ power set множества $\mathbb{R}^n$ с включением $\subset$ в качестве отношения порядка. $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ является полной решеткой относительно $\subset$. Пересечение ($\wedge$) соответствует пересечению и объединение ($\vee$) соответствует объединению.

Определение 2.5.7 *Толстое множество* $[[\mathbb{X}]]$ *в* $\mathbb{R}^n$ *– это интервал в* $(\mathscr{P}(\mathbb{R}^n), \subset)$.

Таблица 2.3. Обозначения французских математиков.

Обозначение	Значение
$[x]$	Интервал
$[\boldsymbol{x}]$	Брус
$[[\mathbb{X}]]$	Толстое множество
$[\boldsymbol{f}]$	Толстая функция
$[[x]]$	Толстый интервал (твин)
$[[\boldsymbol{x}]]$	Толстый брус

Если $[[\mathbb{X}]]$ – это толстое множество в $\mathbb{R}^n$, тогда существует два подмножества $\mathbb{R}^n$, называемые subset-границей $[[\mathbb{X}^{\subset}]]$ и supset-границей $[[\mathbb{X}^{\supset}]]$, такие, что

$$[[\mathbb{X}]] = [[\mathbb{X}^{\subset}, \mathbb{X}^{\supset}]] = \{\mathbb{X} \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \mid \mathbb{X}^{\subset} \subset \mathbb{X} \subset \mathbb{X}^{\supset}\}. \tag{2.41}$$

Толстое множество делит $\mathbb{R}^n$ на три зоны:

1. Чистая зона $\mathbb{X}^{\subset}$;
2. Полутень $\mathbb{X}^{\supset} \setminus \mathbb{X}^{\subset}$;
3. Тёмная зона $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{X}^{\supset}$.

Толстое множество $[[\mathbb{X}]]$ является подрешёткой $(\mathscr{P}(\mathbb{R}^n), \subset)$, т.е. если $\mathbb{A} \in [[\mathbb{X}]]$ и $\mathbb{B} \in [[\mathbb{X}]]$, тогда $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \in [[\mathbb{X}]]$ и $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \in [[\mathbb{X}]]$.

Если у толстого множества $[[\mathbb{X}]] = [[\mathbb{X}^{\subset}, \mathbb{X}^{\supset}]]$, где $\mathbb{X}^{\subset} = \mathbb{X}^{\supset}$, тогда это толстое множество называют тонким. Оно соответствует синглтону в $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, или, что эквивалентно, классическому подмножеству $\mathbb{R}^n$.

Толстый интервал

Определение 2.5.8 *Пусть* $\mathbb{IR}$ *– множество всех интервалов* $\mathbb{R}$*. Толстый интервал (твин)* $[[x]]$ *– это подмножество* $\mathbb{IR}$*, которое может быть записано в виде*

$$[[x]] = [[[x^-], [x^+]]] = \{[x^-, x^+] \in \mathbb{IR} \mid x^- \in [x^-] \ \ \& \ \ x^+ \in [x^+]\}. \tag{2.42}$$

Здесь $[x^-]$ и $[x^+]$ – это два интервала, содержащие *нижнюю границу* $x^- \in \mathbb{R}$ и *верхнюю границу* $x^+ \in \mathbb{R}$ неопределённого интервала $[x^-, x^+]$.

Определим два интервала

$$[x^{\subset}] = \bigcap \{[x^-, x^+] \in \mathbb{IR} \mid x^- \in [x^-], x^+ \in [x^+]\}$$

и

$$[x^{\supset}] = \bigcup \{[x^-, x^+] \in \mathbb{IR} \mid x^- \in [x^-], x^+ \in [x^+]\},$$

называемые subset-границей и supset-границей $[[x]]$, тогда

$$[[x]] \subset \{[x] \in \mathbb{IR} \mid [x^{\subset}] \subset [x] \subset [x^{\supset}]\}, \tag{2.43}$$

при условии, что $[x^-] \cap [x^+] \neq \varnothing$.

Геометрическое представление

Как следствие всего вышесказанного, толстый интервал не обязательно является толстым множеством: он более точный или, лучше сказать, более узкий. Это можно объяснить, используя график на 2.5-а (слева), где интервалы представлены в виде точек в $\mathbb{R}^2$ (на графике – чёрные точки).

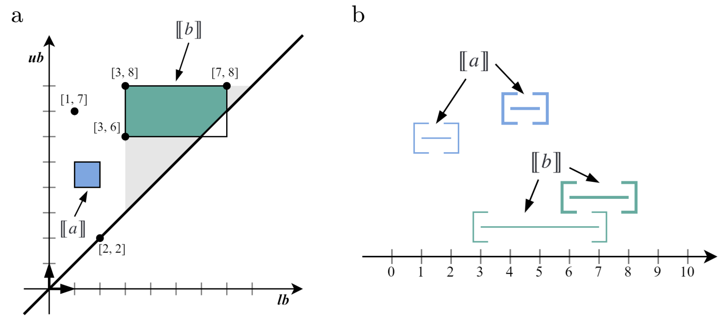

Рис. 2.5. Различные способы представления интервальных величин: *a* — первый; *b* — второй.

Например, интервалу $[1, 7]$ мы сопоставляем точку с координатами $(1, 7)$. Все вырожденные интервалы, такие как, например, $[2, 2]$, лежат на диагонали.

С помощью этого представления отношения между интервалами могут быть представлены геометрически. Например,

$$[x] \subset [y], \text{ если } [y] \text{ находится в верхнем левом углу от } [x].$$

Пересечение между двумя интервалами (или интервальная оболочка) получается путём взятия нижнего правого угла (или верхнего левого угла) наименьшего прямоугольника, который охватывает две интервальные точки. Например, если $[x] = [1, 4]$ и $[y] = [2, 5]$, то на 2.5-а голубым цветом окрашен покрывающий брус. Левый верхний край этого бруса соответствует объединению $[x] \cup [y] = [1, 5]$, Нижний правый край бруса соответствует пересечению $[x] \cap [y] = [2, 4]$. Этот голубой брус в данном представлении соответствует толстому интервалу $[[a]] = [[[1, 2], [4, 5]]]$. Тогда его subset-границей и supset-границей являются интервалы $[a^{\subset}] = [2, 4]$ и $[a^{\supset}] = [1, 5]$.

На 2.5-a зелёный многоугольник соответствует толстому интервалу $[[b]] = [[[3, 7], [6, 8]]]$. Его subset-границей и supset-границей являются интервалы $[b^{\subset}] = \varnothing$ и $[b^{\supset}] = [3, 8]$. Как показано на этом рисунке, представление, основанное на subset-supset границах влечёт за собой некоторые трудности, когда subset-граница пуста (может потребоваться больше интервалов для представления). Например, пусть $[c] = [4, 5]$, тогда $\varnothing \subset [c] \subset [3, 8]$, но $[c] \notin [[[3, 7], [6, 8]]]$.

На 2.5-b изображено представление интервальных величин с помощью верхних и нижних границ. Заметим, что когда subset-граница не пуста, оба представления являются эквивалентными.

Толстый брус и операции над ним

Определение 2.5.9 *Пусть $\mathbb{IR}^n$ – это множество всех боксов (брусов) в $\mathbb{R}^n$. Тогда thick box $[[\mathbf{x}]]$ – это множество боксов в $\mathbb{IR}^n$, определённых как*

$$[[\mathbf{x}]] = \{\left[\mathbf{x}^-, \mathbf{x}^+\right] \in \mathbb{IR}^n \mid \mathbf{x}^- \in \left[\mathbf{x}^-\right], \mathbf{x}^+ \in \left[\mathbf{x}^+\right]\}, \tag{2.44}$$

где $\left[\mathbf{x}^-\right]$ и $\left[\mathbf{x}^+\right]$ – это боксы (брусы) в $\mathbb{R}^n$.

Множество thick boxes в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать как $\mathbb{IIR}^n$. Thick box можно рассматривать как интервал боксов (брусов), т.е. интервал интервалов в $\mathbb{R}^n$. Это можно увидеть на рисунке 2.6, где показано, что все четыре бокса (бруса) содержатся в thick box $[[\mathbf{x}]] = [[\left[\mathbf{x}^-\right], \left[\mathbf{x}^+\right]]]$.

2.5.4 Толстая функция включения

Определение 2.5.10 *Дана функция $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Функция включения $[\mathbf{f}] : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^m$ для функции $\mathbf{f}$ – это интервальная функция, такая, что*

$$\mathbf{a} \in [\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{a}) \in [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]). \tag{2.45}$$

Определение 2.5.11 *Функция $[[\mathbf{f}]] : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IIR}^m$ называется толстой функцией включения для толстой функции $[\mathbf{f}] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{IR}^m$, если*

$$\mathbf{a} \in [\mathbf{x}] \Rightarrow [\mathbf{f}](\mathbf{a}) \in [[\mathbf{f}]]([\mathbf{x}]). \tag{2.46}$$

Теорема
Дана толстая функция $[\mathbf{f}](\mathbf{x})$.

Обозначим через $[\mathbf{f}^-]$ и $[\mathbf{f}^+]$ две функции включения для границ $\mathbf{f}^-$ и $\mathbf{f}^+$ функции $[\mathbf{f}]$.

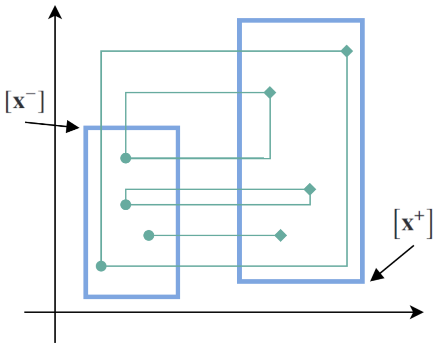

Рис. 2.6. Все четыре бокса (бруса) принадлежат thick box $[[\mathbf{x}]] = [[\left[\mathbf{x}^-\right], \left[\mathbf{x}^+\right]]]$

Тогда функция $[[\mathbf{f}]] : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IIR}^m$, определённая, как

$$[[\mathbf{f}]]([\mathbf{x}]) = [[[\mathbf{f}^-]([\mathbf{x}]), [\mathbf{f}^+]([\mathbf{x}])]], \tag{2.47}$$

является толстой функцией включения для функции $[\mathbf{f}](\mathbf{x})$.

Доказательство. Т.к. $[\mathbf{f}^-]$ и $[\mathbf{f}^+]$ являются функция включения для $\mathbf{f}^-$ и $\mathbf{f}^+$, то

$$\mathbf{a} \in [\mathbf{x}] \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{f}^-(\mathbf{a}) \in [\mathbf{f}^-](\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}^+(\mathbf{a}) \in [\mathbf{f}^+](\mathbf{x}) \end{cases}$$

Теперь правая часть эквивалентна $[\mathbf{f}](\mathbf{a}) \in [[\mathbf{f}]]([\mathbf{x}])$. ■

Продемонстрируем на рисунке 2.7, как соотносятся между собой функция включения и толстая функция включения.

На рис. 2.7 толстый брус $[[\mathbf{f}]]([\mathbf{x}])$ включает в себя все брусы $[\mathbf{f}](\mathbf{a})$ такие, что $\mathbf{a} \in [\mathbf{x}]$. Вектор $\mathbf{a} \in [\mathbf{x}] \subset \mathbb{R}^2$ представляется $[\mathbf{f}](\mathbf{a})$ как брус в $\mathbb{R}^2$ с нижней границей $\mathbf{f}^-(\mathbf{a})$ и верхней границей $\mathbf{f}^+(\mathbf{a})$. Используя классическую интервальную арифметику, можно получить функции включения $[\mathbf{f}^-]$ и $[\mathbf{f}^+]$ для функций $\mathbf{f}^-$ и $\mathbf{f}^+$ соответственно. Брусы $[\mathbf{f}^-]([\mathbf{x}])$ и $[\mathbf{f}^+]([\mathbf{x}])$ содержат $\mathbf{f}^-(\mathbf{a})$ и $\mathbf{f}^+(\mathbf{a})$. Следовательно, брус $[\mathbf{f}](\mathbf{a})$ находится внутри толстого бруса $[[\mathbf{f}]]([\mathbf{x}]) = [[[\mathbf{f}^-]([\mathbf{x}]), [\mathbf{f}^+]([\mathbf{x}])]]$.

2.6 Задача обращения толстого множества

Основываясь на понятиях, ведённых в разделе 2.5.3, ставится задача обращения толстого множества «Thick Set Inversion» [13]. На основе алгоритме

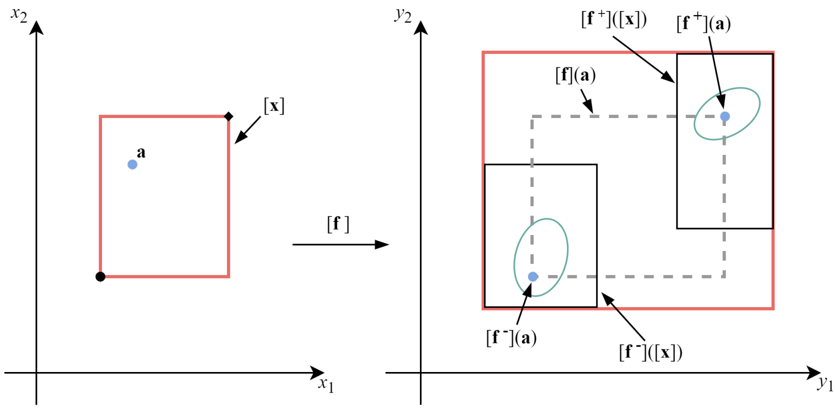

Рис. 2.7. Соотношение функции включения и толстой функции включения

`SIVIA` (Set Inversion Via Interval Analysis), построен алгоритм `thickSIVIA` и исследованы его свойства. Теория и примеры приведены в [12].

Пример 6 (Пример оценки с обращением тонкой функции) Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ – тонкая функция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Пусть $\mathbf{Y}$ – множество, такое, что $[2,3] \subset \mathbf{Y} \subset [1,4]$. Если $\mathbf{X} = f^{-1}(\mathbf{Y})$, тогда имеем

$$f^{-1}([2,3]) \subset \mathbf{X} \subset f^{-1}([1,4]). \tag{2.48}$$

Теперь все возможные $\mathbf{X}$ соответствуют центрированным кольцам, и ясно, что выше написанное включение содержит другие типы множеств. ■

2.6.1 Тестовая задача №3 [12]. Оценка параметров

Рассмотрим задачу оценки параметров. Пусть у нас есть параметрическая функция

$$y_m(\boldsymbol{x}, t) = x_1 e^{-x_2 t}, \tag{2.49}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ – вектор параметров и $t \in \mathbb{R}$ – время.

В момент времени t_i мы получаем измерения y_i с некоторыми интервальными неопределённостями, как указано в таблице 2.4. Обратим внимание, что одна из основных трудностей этой проблемы заключается в том, что существуют неопределённости, связанные с независимой переменной (в данном случае – это время t). В текущей формулировке задачи неопределённость времени сохраняется внутри модели в виде толстой функции.

Таблица 2.4. Измерения (t_i, y_i), используемые для оценки.

i	$[t_i]$	$[y_i]$
1	$[0.03, 0.06]$	$[4, 8]$
2	$[0.09, 0.12]$	$[2, 6]$
3	$[0.15, 0.18]$	$[2, 5]$
4	$[0.21, 0.24]$	$[1, 3]$
5	$[0.27, 0.3]$	$[0, 2]$

Множество всех возможных параметрических векторов – это

$$\mathbb{X} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \forall i \in \{1, \ldots, 5\}, \exists t \in [t_i] : x_1 e^{-x_2 t} \in [y_i]\}. \tag{2.50}$$

Если мы определим толстую функцию

$$[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 e^{-x_2 [t_1]} \\ \vdots \\ x_1 e^{-x_2 [t_5]} \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

и брус

$$[\boldsymbol{y}] = [y_1] \times \ldots \times [y_5], \tag{2.52}$$

тогда толстое множество $[[\mathbb{X}]] = [[\mathbb{X}^{\subset}, \mathbb{X}^{\supset}]] = [\boldsymbol{f}]^{-1}(\mathbb{Y})$, которое является решение задачи обращения толстого множества, состоит из двух толстых множеств:

$$[[\mathbb{X}^{\subset}]] = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \forall i \in \{1, \ldots, 5\}, \forall t \in [t_i] : x_1 e^{-x_2 t} \in [y_i]\} \tag{2.53}$$

и

$$[[\mathbb{X}^{\supset}]] = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists i \in \{1, \ldots, 5\}, \forall t \in [t_i] : x_1 e^{-x_2 t} \in [y_i]\}. \tag{2.54}$$

Для $\epsilon = 0.1$ алгоритм `thickSIVIA` вычислил аппроксимацию толстого множества $[[\mathbb{X}^{\subset}, \mathbb{X}^{\supset}]]$, как показано на рисунке 2.8. Здесь изображено представление толстого множества $[[\mathbb{X}^{\subset}, \mathbb{X}^{\supset}]]$, связанного с задачей оценки. Все голубые брусы находятся вне множества $\mathbb{X}^{\supset}$, все красные брусы находятся внутри множества $\mathbb{X}^{\subset}$. На 2.8-a оранжевые брусы находятся вне множества $\mathbb{X}^{\subset}$ и внутри множества $\mathbb{X}^{\supset}$. На 2.8-b, полученном с помощью классических интервальных тестов, не классифицируется ни один брус, лежащий в полутени. При использовании подхода `thickSIVIA`, получена внутренняя аппроксимация полутени.

a b

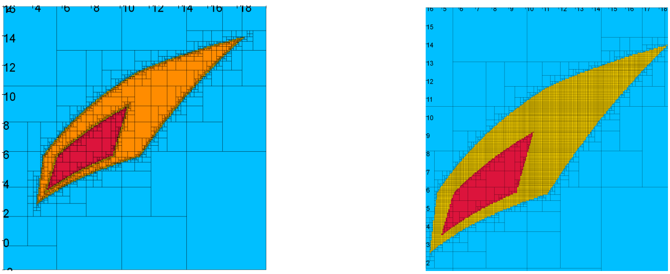

Рис. 2.8. Решение тестовой задачи №3: a — решение, полученное алгоритмом `thickSIVIA`; b — решение, полученное с помощью классического интервального теста.

Глава 3

Разрешимость интервальных задач

3.1 Постановки интервальных задач и множества решений

Математически свойства и отношения, представляющие задачу, могут выражаться, точечными уравнениями, неравенствами и т. п. Могут представиться следующие две принципиально различные ситуации:

- Рассматриваемое свойство имеет место для всех точек из заданного интервала.
- Свойство выполняется лишь для некоторых точек из интервала, не обязательно всех.

Принята следующая терминология:

- в первом случае говорят о $\forall$-типе (A-типе) неопределённости,
- во втором случае говорят о $\exists$-типе (E-типе) неопределённости.

В первом случае интервал отождествляется с совокупностью всех своих точек, тогда как во втором он представляет собой лишь границы, «вместилище» для некоторой неизвестной величины, которая может и не принимать некоторых значений из заданного интервала (возможно, что она принимает даже только одного значение из интервала).

Для краткости вполне уместно говорить интервальная A-неопределённость, интервальная E-неопределённость и т.п.

Далее мы собираемся исследовать лишь множества решений, у которых в выделяющем предикате все вхождения квантора всеобщности «∀» предшествуют вхождениям квантора существования «∃». Можно сказать, что соответствующий выделяющий предикат должен иметь *AE-форму.*

Пусть имеем ИСЛАУ

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b} \tag{3.1}$$

с интервальными $m \times n$-матрицей $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij})$ и m-вектором $\boldsymbol{b} = (\,\boldsymbol{b}_i)$ — это формальная запись, обозначающая семейство точечных линейных систем $Ax = b$ той же структуры с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$. Каждая система линейных алгебраических уравнений $Ax = b$, матрица которой взята из интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$, а правая часть b из $\boldsymbol{b}$, может иметь решения, которые во многих практических ситуациях имеет смысл рассматривать совместно, единой совокупностью, т. е. взяв их объединение. Таким образом получается так называемое *объединённое множество решений(united solution set)*

$$\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid\ \exists A \in \boldsymbol{A} \text{ и } b \in \boldsymbol{b}, \text{ что } Ax = b\,\} \tag{3.2}$$

Это наиболее простое и естественное понимание «решения» интервальной системы уравнений.

Второму типу согласованию параметров и данных соответствует так называемое *допусковое множество решений* интервальной линейной системы уравнений — множество, определяемое как

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \ = \ \left\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid\ \forall A \in \boldsymbol{A} \text{ справедлива принадлежность } Ax \in \boldsymbol{b}\,\right\}$$

(tolerable solution set). Это множество решений всевозможных точечных систем $Ax = b$, для которых произведение Ax при любых $A \in \boldsymbol{A}$ попадает в интервалы правых частей $\boldsymbol{b}$.

Допусковое множество решений может оказаться пустым, если интервалы правой части слишком узки в сравнении с интервалами элементов матрицы.

Всегда имеет место отношение

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}),$$

т.е., допусковое множество решений всегда является подмножеством объединённого множества решений.

3.2 Исследование разрешимости интервальных линейных систем алгебраических уравнений

3.2.1 Резерв интервального включения

И.А.Шарая и С.П.Шарый ввели понятие [17] резерва интервального включения в $\mathbb{IR}$.

Определение 3.2.1 *Для интервальных n-векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ резервом интервального включения $\boldsymbol{p} \subseteq \boldsymbol{q}$ (или же просто резервом) называется наибольшее вещественное число* Rsv *, такое что*

$$\boldsymbol{p} + [-\mathrm{Rsv}\,, \mathrm{Rsv}\,] \cdot (1, 1, \ldots, 1)^{\top} \subseteq \boldsymbol{q}.$$

Далее авторы [17] обсуждают смысл этого определения также при отрицательном Rsv, если все арифметические операции и отношения рассматриваются в полной интервальной арифметике Каухера $\mathbb{KR}$ (см. §2.2). Если $\mathrm{Rsv}\, < 0$, то $[-\mathrm{Rsv}\,, \mathrm{Rsv}\,]$ — это неправильный интервал из $\mathbb{KR}$, и абсолютное значение резерва показывает, насколько сильно в отношении $\boldsymbol{p} \subseteq \boldsymbol{q}$ левая часть далека от включения в правую.

Если рассматриваемое включение истинно, то его «резерв» — это наибольший радиус интервала, на который можно «раздуть» левую часть включения (или сузить правую), чтобы оно ещё оставалось истинным. Если же рассматриваемое включение неверно, то мы всегда можем добиться его выполнения, сужая левую часть, хотя для этого может понадобиться перейти к неправильным интервалам. В этом случае резерв превращается в «дефицит включения» и показывает, насколько нужно сузить левую часть, чтобы она стала включаться в правую.

Если $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ — одномерные интервалы, для которых $\boldsymbol{p} \subseteq \boldsymbol{q}$, то $\underline{\boldsymbol{p}} \geq \underline{\boldsymbol{q}}$ и $\overline{\boldsymbol{q}} \geq \overline{\boldsymbol{p}}$, а потому

$$\mathrm{Rsv}\; = \; \min \big\{ \, \underline{\boldsymbol{p}} - \underline{\boldsymbol{q}}, \, \overline{\boldsymbol{q}} - \overline{\boldsymbol{p}} \, \big\}. \tag{3.3}$$

Если $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ — интервальные n-векторы, для которых $\boldsymbol{p} \subseteq \boldsymbol{q}$, то

$$\mathrm{Rsv}\; = \; \min_{1 \leq i \leq n} \min \big\{ \, \underline{\boldsymbol{p}}_i - \underline{\boldsymbol{q}}_i, \, \overline{\boldsymbol{q}}_i - \overline{\boldsymbol{p}}_i \, \big\}. \tag{3.4}$$

Альтернативное представление резерва через середины и радиусы интервалов.

$$\min \big\{ \underline{\boldsymbol{p}} - \underline{\boldsymbol{q}}, \overline{\boldsymbol{q}} - \overline{\boldsymbol{p}} \big\} \; = \; \mathrm{rad}\; \boldsymbol{q} - |\mathrm{mid}\; \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}|,$$

где использовано представление модуля интервала в виде

$$|\boldsymbol{a}| = \max\big\{ \, \overline{\boldsymbol{a}}, -\underline{\boldsymbol{a}} \, \big\}$$

(см. [18]). Соответственно, для многомерного случая вместо (3.4) получаем следующее выражение для резерва включения:

$$\mathrm{Rsv} \;=\; \min_{1\le i\le n} \big\{ \,\mathrm{rad}\ \boldsymbol{q}_i - |\mathrm{mid}\ \boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{p}_i|\, \big\}. \tag{3.5}$$

3.2.2 Распознающий функционал.

Полное исследование разрешимости можно произвести, используя распознающий функционал. Его выражение имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tol}\,(x) &= \mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \\ &= \min_{1\le i\le m} \left\{ \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i - \left| \,\mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Принадлежность $x \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ равносильна $\mathrm{Tol}\,(x; A, b) \ge 0$, т. е. допусковое множество решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ есть множество уровня

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \mathrm{Tol}\,(x; A, b) \ge 0\} \tag{3.7}$$

функционала Tol.

По структуре выражения (3.6) видно, что по-существу, оно соответствует формуле (3.5), где в качестве одного интервала выступает произведение строки матрицы на вектор неизвестного, а второго — элемент вектора правой части.

Обсудим факт, выражаемый формулой (3.7).

$$\begin{gathered} x \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \Longleftrightarrow \boldsymbol{A} \cdot x \subseteq \boldsymbol{b} \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \subseteq \boldsymbol{b}_j = [\mathrm{mid}\ (\boldsymbol{b}_j) - \mathrm{rad}\ (\boldsymbol{b}_j), \mathrm{mid}\ (\boldsymbol{b}_j) + \mathrm{rad}\ (\boldsymbol{b}_j)] \\ \mathrm{mid}\ (\boldsymbol{b}_j) - \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \subseteq [-\mathrm{rad}\ (\boldsymbol{b}_j), \mathrm{rad}\ (\boldsymbol{b}_j)] \\ \left|\mathrm{mid}\ (\boldsymbol{b}_j) - \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i\right| \le \mathrm{rad}\ (\boldsymbol{b}_j) \\ \mathrm{rad}\ (\boldsymbol{b}_j) - \left|\mathrm{mid}\ (\boldsymbol{b}_j) - \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i\right| \ge 0 \end{gathered}$$

Последняя строка выражает покомпонентную «вместимость» левой части ИСЛАУ в правой части (абсолютную величины невязки). Если такое условие выполнено для всех компонент вектора $\boldsymbol{b}$, система разрешима.

Распознающий функционал имеет единственный максимум при значении аргумента, наиболее близкому к «решению» ИСЛАУ.

Выражение (3.6) соответствует выяснению знака минимума резерва по включению. Причем, даже отрицательные значения выражения для Rsv в левой части неравенства имеют смысл, так как они показывают «дефицит совместности» системы в точке, доставляющей распознающему функционалу максимум.

Распознающий функционал и резерв включения будут использоваться в главе 6 при уточнении решения твинных систем линейных алгебраических уравнений.

Глава 4

Оценка значений функций

Коль скоро интервалы являются множествами, не имеющими структуры — см. определение 2.1.1 , и все их элементы равноправны, то операции естественно определять «по представителям». Итогом любой бинарной операции должен быть интервал, покрывающий *все* возможные результаты выполнения арифметической операции над представителями обоих интервалов:

$$\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b} \;=\; \{\, a \star b \;\mid\; a \in \boldsymbol{a},\, b \in \boldsymbol{b} \,\}, \quad \text{где } \star \in \{\, +\,,-\,,\,\cdot\,,/\,\}. \tag{4.1}$$

В §2.2 были описаны некоторые аспекты полной интервальной арифметики. В частности, и что очень важно для анализа данных, в $\mathbb{KR}$ всегда определены операции взятия минимума и максимума по включению. Кроме этого, полная интервальная арифметика обладает и другими замечательными свойствами.

В частности, значения операций над интервалами в $\mathbb{KR}$ можно описывать взятием минимумов и максимумов по определелённым правилам.

4.1 Минимаксный характер полной интервальной арифметики

Для того, чтобы обнаружить и подтвердить минимаксный характер полной интервальной арифметики Каухера, введем *условную операцию взятия экстремума по включению* [8]:

$$\bigvee\!\!\!\!\bigwedge_{x}^{\boldsymbol{a}} := \begin{cases} \displaystyle\bigvee_{x \in \boldsymbol{a}}, & \text{если } \boldsymbol{a} \text{ правильный}, \\ \displaystyle\bigwedge_{x \in \operatorname{dual} \boldsymbol{a}}, & \text{если } \boldsymbol{a} \text{ неправильный}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Тогда выражение (4.1), определяющее результат любой арифметической операции в классической интервальной арифметике, можно переписать с использованием введенной условной операции в виде

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b} &= \{\ a \star b \ \mid \ a \in \boldsymbol{a},\, b \in \boldsymbol{b}\ \} = \\ &= \left[\min_{a\in\boldsymbol{a}} \min_{b\in\boldsymbol{b}}\ (a \star b),\ \max_{a\in\boldsymbol{a}} \max_{b\in\boldsymbol{b}}\ (a \star b)\right] = \\ &= \bigvee_{a\in\boldsymbol{a}} \bigvee_{b\in\boldsymbol{b}}\ (a \star b),\ \text{где}\ \star \in \{\,+\,,-\,,\,\cdot\,,/\,\}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Приведём несколько примеров из учебного пособия [9].

Пример 7 (Произведение интервалов, относящихся к множеству Z [9]) Пусть $\boldsymbol{a} = [-4, 9] \in Z$ и $\boldsymbol{b} = [-2, 3] \in Z$.

Определим результат интервальной операции $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ согласно (4.3):

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \left[\min_{a\in\boldsymbol{a}} \min_{b\in\boldsymbol{b}}\ (a \cdot b),\ \max_{a\in\boldsymbol{a}} \max_{b\in\boldsymbol{b}}\ (a \cdot b)\right] = [-18, 27].$$

$$\min_{a\in[-4,9]} \left(\min_{b\in[-2,3]}\ (a \cdot b)\right) = \min_{a\in[-4,9]} \begin{cases} a \geq 0, & a \cdot (-2) = -2a, \\ a < 0, & a \cdot 3 = 3a. \end{cases} =$$

$$= \min \left(\min_{a\in[0,9]} (-2 \cdot a) = -18,\ \min_{a\in[-4,0]} (3 \cdot a) = -12\right) = -18.$$

$$\max_{a\in[-4,9]} \left(\max_{b\in[-2,3]}\ (a \cdot b)\right) = \max_{a\in[-4,9]} \begin{cases} a \geq 0, & a \cdot 3 = 3a, \\ a < 0, & a \cdot (-2) = -2a. \end{cases} =$$

$$= \max \left(\max_{a\in[0,9]} (3 \cdot a) = 27,\ \max_{a\in[-4,0]} (-2 \cdot a) = 8\right) = 27.$$

Теперь воспользуемся выражением, приведенным в ячейке расширенной таблицы Кэли (таблица 2.2), которая соответствует $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in Z$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= [\min\{\underline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}\}, \max\{\underline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}\}] = \\ &= [\min\{-12, -18\}, \max\{8, 27\}] = [-18, 27].\end{aligned}$$

Итак, в обоих случаях $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = [-18, 27]$. Рассуждая аналогичным образом можно получить результат одной из арифметических операций $\star \in \{\,+\,,-\,,\,\cdot\,,/\,\}$ над двумя любыми интервалами из $\mathbb{IR}$ — неотрицательными, неположительными и нульсодержащими. ■

Попробуем использовать условную операцию взятия экстремума по включению (4.2) для представления результатов арифметических операций в $\mathbb{KR}$. Для этого нам придется рассмотреть два возможных варианта сочетания оперируемых интервалов:

1. *оба интервала* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, которые участвуют в арифметической операции, являются неправильными,
2. неправилен *один из интервалов*: $\boldsymbol{a}$ правильный, $\boldsymbol{b}$ неправильный или $\boldsymbol{a}$ неправильный, $\boldsymbol{b}$ правильный.

Начнем с рассмотрения более простого случая, когда ***оба интервала a и b являются неправильными***. Продолжая сравнение получаемых результатов с расширенной таблицей Кэли (таблица 2.2), для операции умножения в $\mathbb{KR}$ запишем:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \bigwedge_{a\in\operatorname{pro}\boldsymbol{a}}\ \bigwedge_{b\in\operatorname{pro}\boldsymbol{b}} (a\cdot b) = \left[\max_{a\in\operatorname{pro}\boldsymbol{a}}\ \max_{b\in\operatorname{pro}\boldsymbol{b}} (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),\ \min_{a\in\operatorname{pro}\boldsymbol{a}}\ \min_{b\in\operatorname{pro}\boldsymbol{b}} (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\right].$$

Пример 8 (Произведение интервалов, относящихся к множеству $\operatorname{dual}\mathbb{Z}$ **[9])** Пусть $\boldsymbol{a} = [4,-9] \in \operatorname{dual}\mathbb{Z}$ и $\boldsymbol{b} = [2,-3] \in \operatorname{dual}\mathbb{Z}$.

Определим границы интервала $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и сравним последний с тем результатом, который мы получим, используя выражение, приведенное в ячейке расширенной таблицы Кэли для $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \operatorname{dual}\mathbb{Z}$:

$$\max_{a\in[-9,4]}\left(\max_{b\in[-3,2]} (a\cdot b)\right) = \max_{a\in[-9,4]}\begin{cases} a\ge 0, & a\cdot 2 = 2a,\\ a<0, & a\cdot(-3) = -3a\end{cases} =$$

$$= \max\left(\max_{a\in[0,4]}(2\cdot a) = 8,\ \max_{a\in[-9,0]}(-3\cdot a) = 27\right) = 27;$$

$$\min_{a\in[-9,4]}\left(\min_{b\in[-3,2]} (a\cdot b)\right) = \min_{a\in[-9,4]}\begin{cases} a\ge 0, & a\cdot(-3) = -3a,\\ a<0, & a\cdot 2 = 2a\end{cases} =$$

$$= \min\left(\min_{a\in[0,4]}(-3\cdot a) = -12,\ \min_{a\in[-9,0]}(2\cdot a) = -18\right) = -18;$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = [27,-18].$$

С другой стороны,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = [\max\{\underline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}\}, \min\{\underline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\underline{\boldsymbol{b}}\}] = [27,-18],$$

и, как мы видим, полученные ответы полностью совпадают. ■

Пользуясь приведенным описанием нахождения границ результирующего интервала $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, можно убедиться, что то выражение, в которое входят условные операции взятия экстремумов по включению, также справедливо для определения результатов операций сложения, вычитания и деления (если $\boldsymbol{b}$ — делитель, то должно выполняться $0 \notin \operatorname{pro} \boldsymbol{b}$), в которых участвуют два неправильных интервала из множеств P, $-P$ и $\operatorname{dual} Z$. Значит,

$$\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b} = \bigwedge_{a \in \operatorname{pro} \boldsymbol{a}} \bigwedge_{b \in \operatorname{pro} \boldsymbol{b}} (a \star b), \quad \star \in \{+, -, \cdot, /\}.$$

Перейдем к рассмотрению второго случая, когда ***один из интервалов***, над которыми производится арифметическая операция, ***является правильным***, ***а второй — неправильным***. Тогда с использованием выражения (4.2) результат умножения двух таких интервалов можно представить в виде:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \bigvee_{a \in \boldsymbol{a}} \bigwedge_{b \in \operatorname{pro} \boldsymbol{b}} (a \cdot b) = \left[\min_{a \in \boldsymbol{a}} \max_{b \in \operatorname{pro} \boldsymbol{b}} (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}),\ \max_{a \in \boldsymbol{a}} \min_{b \in \operatorname{pro} \boldsymbol{b}} (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \right],$$

если $\boldsymbol{a}$ — правильный интервал, а $\boldsymbol{b}$ — неправильный интервал,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \bigwedge_{a \in \operatorname{pro} \boldsymbol{a}} \bigvee_{b \in \boldsymbol{b}} (a \cdot b) = \left[\max_{a \in \operatorname{pro} \boldsymbol{a}} \min_{b \in \boldsymbol{b}} (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}), \min_{a \in \operatorname{pro} \boldsymbol{a}} \max_{b \in \boldsymbol{b}} (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \right],$$

если $\boldsymbol{a}$ — неправильный интервал, а $\boldsymbol{b}$ — правильный интервал.

Как мы видим, определение результата операции умножения двух интервалов, один из которых является неправильным, в $\mathbb{KR}$ требует вычисления минимаксов и максиминов! Следовательно, интервальная арифметика Каухера действительно является *минимаксной*.

Пример 9 (Произведение интервалов, относящихся к множествам $Z, \operatorname{dual} Z$ [9]) Пусть $\boldsymbol{a} = [-4, 9] \in Z$ и $\boldsymbol{b} = [2, -3] \in \operatorname{dual} Z$.

Выполним умножение интервалов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\min_{a \in [-4,9]} \left(\max_{b \in [-3,2]} (a \cdot b) \right) = \min_{a \in [-4,9]} \begin{cases} a \geq 0, & a \cdot 2 = 2a, \\ a < 0, & a \cdot (-3) = -3a \end{cases} =$$

$$= \min \left(\min_{a \in [0,9]} (2 \cdot a) = 0, \min_{a \in [-4,0]} (-3 \cdot a) = 0 \right) = 0.$$

$$\max_{a \in [-4,9]} \left(\min_{b \in [-3,2]} (a \cdot b) \right) = \max_{a \in [-4,9]} \begin{cases} a \geq 0, & a \cdot (-3) = -3a, \\ a < 0, & a \cdot 2 = 2a \end{cases} =$$

$$= \max \left(\max_{a \in [0,9]} (-3 \cdot a) = 0, \max_{a \in [-4,0]} (2 \cdot a) = 0 \right) = 0.$$

Таким образом, если $\boldsymbol{a} \in Z$ и $\boldsymbol{b} \in \operatorname{dual} Z$, то $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, как и указано в расширенной таблице Кэли.

Рассмотрение умножения неправильного интервала $\boldsymbol{a}$ на правильный интервал $\boldsymbol{b}$ не имеет смысла, поскольку рассуждения и результат окажутся точно такими же, как в настоящем случае; отличие будет заключаться лишь в том, что все величины, имеющие отношение к $\boldsymbol{a}$, необходимо заменить на те же, относящиеся к $\boldsymbol{b}$, и наоборот. ■

4.2 Минимаксные оценки значений функций

Распространяется ли введенное опеределение результата операции умножения в $\mathbb{KR}$ на другие операции, в которых участвуют один правильный и один неправильный интервалы? Да, распространяется, однако необходимо повторно сделать важное замечание: в операции деления не может участвовать такой интервал-делитель, правильная проекция которого является нульсодержащей.

Таким образом,

$$\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b} = \bigvee_{a \in \boldsymbol{a}} \bigwedge_{b \in \operatorname{pro} \boldsymbol{b}} (a \star b), \quad \star \in \{+,-,\cdot,/\},$$

если $\boldsymbol{a}$ — правильный интервал, а $\boldsymbol{b}$ — неправильный интервал,

$$\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b} = \bigwedge_{a \in \operatorname{pro} \boldsymbol{a}} \bigvee_{b \in \boldsymbol{b}} (a \star b), \quad \star \in \{+,-,\cdot,/\},$$

если $\boldsymbol{a}$ — неправильный интервал, а $\boldsymbol{b}$ — правильный интервал.

Подводя итог всему вышеизложенному, можно заключить, что все интервальные арифметические операции в $\mathbb{KR}$ объединены следующим представлением:

$$\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b} = \bigvee\!\!\!\!\bigwedge_{a}^{\boldsymbol{a}} \bigvee\!\!\!\!\bigwedge_{b}^{\boldsymbol{b}} (a \star b), \quad \star \subseteq \{+,-,\cdot,/\}. \tag{4.4}$$

И, как мы убедились, если один из интервалов, участвующих в арифметической операции, является неправильным, а второй — правильным, то концы результирующего интервала оказываются *минимаксом* и *максимином* результатов точечных арифметических операций.

Можно ли использовать минимаксный характер $\mathbb{KR}$ для оценивания областей значений функций, т. е. вычисления минимаксов и максиминов от сложных выражений? Ответ на этот вопрос неоднозначен, так как в $\mathbb{KR}$ поставленная задача оказывается гораздо более сложной, чем в $\mathbb{IR}$. Необходимо учитывать тот факт, что в общем случае операции взятия минимума и максимума не перестановочны друг с другом даже при однократном вхождении каждой переменной в выражение, область значений которого предстоит определить. Тем не менее, для любых правильных интервальных векторов $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^p$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{IR}^q$ справедливо следующее соотношение, которое может быть выведено из (4.4):

$$\bigvee_{x \in \boldsymbol{x}} \bigwedge_{y \in \boldsymbol{y}} f(x, y) \subseteq f(\boldsymbol{x}, \operatorname{dual} \boldsymbol{y}) \subseteq \bigwedge_{y \in \boldsymbol{y}} \bigvee_{x \in \boldsymbol{x}} f(x, y), \tag{4.5}$$

если рациональное выражение $f(x, y) = f(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ имеет не более одного вхождения каждой переменной x_i и y_j в первой степени.

Детальный анализ интервальных оценок выражений функций в арифметике Каухера проведён в упомянутой выше книге Modal Interval Analysis [5] в главах 3 «Modal Interval Extensions» и 4 «Interpretability and Optimality». Краткое изложение приведено в книге С.П.Шарого [18].

Одним из способов оценивания интервальных величин являются твинные оценки — см. определение 2.5.2.

Глава 5

Постановки задач с твинами

5.1 Решение базовых алгебраических уравнений

При работе вычислительных методов определяющую роль играет возможность точных решений простейших уравнений, связанных со сложением и умножением. Если арифметическая система допускает точное вычитание, можно приводить подобные члены и сокращать выражения в разных сторонах равенств.

Рассммотрим, как обстоит дело в популярных арифметиках

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{IR} \subseteq \mathbb{KR} \subseteq \mathbb{TR}. \tag{5.1}$$

5.1.1 Сложение двух величин $a + b = c$

Рассмотрим решения уравнения

$$a + b = c, \tag{5.2}$$

где a, c — известные элементы, b - неизвестный.

Рассмотрим решения в которых выполняется точное равенство.

В пространстве вещественных чисел точность решения выполняется всегда

$$a, b, c \in \mathbb{R} : b = c - a. \tag{5.3}$$

В классической интервальной арифметике точного вычитания нет

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{IR} : \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}, \\ \boldsymbol{b} + 2 \,\mathrm{rad}\, \boldsymbol{a} \cdot [-1, 1] &= \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Точное равенство в (5.4) выполняется при вещественном a.

В полной интервальной арифметике есть два вида вычитания.

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{KR} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \ominus \boldsymbol{a}, \ \text{(алгебраическое вычитание)} \tag{5.5}$$

$$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} \supseteq \boldsymbol{c} \ominus \boldsymbol{a}. \tag{5.6}$$

Если будем использовать классический интервальный минус (5.6), получим интервал, который содержит в себе интервал с алгебраическим минусом (5.5).

Пример 10 (Вычитание в полной интервальной арифметике)

Вычитание в полной интервальной арифметике. Пусть $\boldsymbol{a} = [4, 5], \boldsymbol{c} = [8, 10]$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} \ominus \boldsymbol{a} &= [8, 10] \ominus [4, 5] = [4, 5], \\ \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} &= [8, 10] - [4, 5] = [3, 6] \supset [4, 5].\end{aligned}$$

■

Для твинов имеем

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{TR} : b_{ex} = c_{ex} \ominus a_{ex}, \tag{5.7}$$

$$b_{in} \subseteq c_{in} \ominus a_{ex}. \tag{5.8}$$

В последнем случае получим равенство, когда выполняется следующее:

$$a_{in} + dual(b_{ex}) \subseteq c_{in}. \tag{5.9}$$

Пример 11 (Вычитание в твинной арифметике)

Обсудим вычитание в твинной арифметике. Выше, в §2.5, мы определили операции с твинами в классической интервальной арифметике. Здесь мы будем использовать продолжение этих операций в полной интервальной арифметике.

Пусть $\boldsymbol{a} = [\ [4, 5], [3, 6]\ ],\ \boldsymbol{c} = [\ [8, 10], [7, 11]\ ]$.

$$\begin{aligned} b_{ex} &= [7, 11] \ominus [3, 6] = [4, 5], \\ b_{in} &\subseteq [8, 10] \ominus [3, 6] = [5, 4]. \end{aligned}$$

Проверим (5.9)

$$[4,5] + \mathrm{dual}\,[4,5] = [9,9] \subseteq [8,10]. \tag{5.10}$$

Значит, выражение для b_{in} точное. Окончательно

$$\boldsymbol{b} = [\ [5,4],[4,5]\ ]. \tag{5.11}$$

При этом $b_{in} \subseteq b_{ex}$ по определению включения, формула (2.1). ■

Пример 12 (Вычитание в твинной арифметике —2)

Еще один пример вычитания в твинной арифметике.

Пусть $\boldsymbol{a} = [\ [4,5],[3,6]\ ]$, $\boldsymbol{c} = [\ [8,13],[7,14]\ ]$.

$$b_{ex} = [7,14] \ominus [3,6] = [4,8],$$
$$b_{in} \subseteq [8,13] \ominus [3,6] = [5,7].$$

Проверим (5.9)

$$[4,5] + \mathrm{dual}\,[4,8] = [12,9] \subseteq [8,13]. \tag{5.12}$$

Значит, выражение для b_{in} точное. Окончательно

$$\boldsymbol{b} = [\ [5,7],[4,8]\ ]. \tag{5.13}$$

При этом $b_{in} \subseteq b_{ex}$. В данном примере b_{in} — правильный интервал. ■

5.1.2 Умножение двух величин $a \cdot b = c$

Если арифметическая система допускает точное деление, умножать выражения в разных сторонах равенств.

В полной интервальной арифметике есть два вида деления.

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{KR} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \oslash \boldsymbol{a}, \text{ (алгебраическое деление)} \tag{5.14}$$

$$\boldsymbol{c} \div \boldsymbol{a} \supseteq \boldsymbol{c} \oslash \boldsymbol{a}. \tag{5.15}$$

Если будем использовать классическое интервальное деление (5.15), получим интервал, который содержит в себе интервал с алгебраическим делением (5.14).

Пример 13 (Деление в полной интервальной арифметике)

Деление в полной интервальной арифметике.

Пусть $\boldsymbol{a} = [4,5], \boldsymbol{c} = [8,10]$.

$$\boldsymbol{c} \oslash \boldsymbol{a} = [8,10] \oslash [4,5] = [2,2] = 2,$$
$$\boldsymbol{c} \div \boldsymbol{a} = [8,10] \div [4,5] = [1.6, 2.5] \supset 2.$$

■

Для твинов имеем по общей методологии оценок

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{TR} : b_{ex} = c_{ex} \oslash a_{ex}, \tag{5.16}$$

$$b_{in} \subseteq c_{in} \oslash a_{ex}. \tag{5.17}$$

В последнем случае получим равенство, когда выполняется следующее:

$$a_{in} \cdot dual(b_{ex}) \subseteq c_{in}. \tag{5.18}$$

Пример 14 (Деление в твинной арифметике)

Деление в твинной арифметике.

Пусть $\boldsymbol{a} = [\ [2,4],[1,5]\ ]$, $\boldsymbol{c} = [\ [4,8],[2,10]\ ]$.

$$b_{ex} = [2,10]/[1,5] = [2,2] = 2,$$
$$b_{in} \subseteq [4,8]/[1,5] = [4,1.6].$$

Проверим (5.18)

$$[2,4] \cdot [2,2] = [4,8] \subseteq [4,8]. \tag{5.19}$$

Значит, выражение для b_{in} точное. Окончательно

$$\boldsymbol{b} = [\ [4,1.6],[2]\ ]. \tag{5.20}$$

При этом $b_{in} \subseteq b_{ex}$. ■

Примеры, приведенные в §5.1.1 и §5.1.2, демонстрируют мощь полной интервальной арифметики. Вместе с тем, получение внутренних оценок в виде неправильных интервалов требует осознания и содержательной интерпретации.

5.2 Системы линейных алгебраических уравнений с твинами — ТСЛАУ

5.2.1 Кванторный формализм и AE-множества решений интервальных систем уравнений

Для описания множеств решений интервальных задач С.П.Шарым [18] был разработан способ формального описания. Он использует логические кванторы $\forall$ (квантор всеобщности, «для всех») и $\exists$ (квантор существования, «существует») — см. главу 3.

Рассмотрим систему интервальных уравнений

$$F(\boldsymbol{a}, x) = \boldsymbol{b}. \tag{5.21}$$

Будем использовать символ Ξ для обозначения множества всех состояний x, которые удовлетворяют выписанной формуле.

$$\begin{aligned} \Xi := \{ & x \in \mathbb{R}^n \mid \\ & (\forall a_n \in \boldsymbol{a}_n)(\forall b_s \in \boldsymbol{b}_s)(\exists a_c \in \boldsymbol{a}_c)(\exists b_r \in \boldsymbol{b}_r) \\ & (F(a, x) = b)\} \,. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Множество Ξ можно назвать *множеством решений* интервальной системы уравнений (5.21). Таким образом, задача оценки внутреннего состояния системы x для заданных параметров модели a и выходов b сводится к его *обнаружению и оцениванию.*

В книге [18] рассмотрены различные способы описания постановок задач для нахождения множеств решений (5.22). Конкретизируем постановку задачи. Будем рассматривать интервальные системы алгебраических уравнений.

В таком случае, система уравнений (5.21) имеет вид

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, \tag{5.23}$$

где $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ — соответственно матрица и вектор ИСЛАУ.

Различным постановкам задач можно сопоставить различные способы кванторного описания

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \tag{5.24}$$

где α и β имеют значения $\forall$ и $\exists$. В таких обозначения соответствующее (5.26) множество решений можно обозначить как $\Xi_{\alpha\beta}$.

Наиболее хорошо изучены «крайние» постановки. Если $\alpha_{ik} = \beta_k = \exists, \forall i = 1, \dots m, k = 1 \dots n$, имеем объединённое множество решений Uni $\Xi_{\exists\exists}$. Допусковое множество решений Tol $\Xi_{\forall\exists}$ описывается как $\alpha_{ik} = \forall, \beta_k = \exists, \forall i, k$. Из-за предшествования оператора $\forall$ оператору $\exists$, такие постановки обозначают как **AE**-множества решений.

Перейдём к твинным системам алгебраических уравнений. Запишем систему (5.23) как

$$\mathbb{A}x = \mathbb{B}, \tag{5.25}$$

где $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — соответственно матрица и вектор ТСЛАУ.

Твины являются надмножествами интервалов, и кванторный формализм требует обобщения.

$$\mathscr{T}\mathscr{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{11} & \dots & \tilde{\alpha}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{\alpha}_{m1} & \dots & \tilde{\alpha}_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathscr{T}\beta = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_m \end{pmatrix}, \tag{5.26}$$

где $\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{in} \\ \tilde{\alpha}_{ex} \end{pmatrix}$, и $\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_{in} \\ \tilde{\beta}_{ex} \end{pmatrix}$, и $\tilde{\alpha}_{in}, \tilde{\alpha}_{ex}, \tilde{\beta}_{in}, \tilde{\beta}_{ex}$ имеют значения $\forall$ для внутренних и $\exists$ для внешних оценок.

Описание постановок (5.26) порождает для ТСЛАУ ещё большее число видов решения, чем для ИСЛАУ. В качестве первого шага возникает желание «оконтурить» решения, взяв экстремальные задачи, объединённое и допусковое.

$$\mathscr{T}\mathscr{A} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \forall \\ \forall \end{pmatrix}_{11} & \dots & \begin{pmatrix} \forall \\ \forall \end{pmatrix}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} \forall \\ \forall \end{pmatrix}_{m1} & \dots & \begin{pmatrix} \forall \\ \forall \end{pmatrix}_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathscr{T}\beta = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}_{1} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}_{m} \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

Постановка (5.27) порождает множество $\Xi_{\forall\forall\exists\exists}$. Это наиболее узкое из всех множеств, которые нас реально интересуют.

Самое широкое множество решений $\Xi_{\exists\exists\exists\exists}$ получается при самых слабых ограничениях (5.28).

$$\mathscr{T}\mathscr{A} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}_{11} & \dots & \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}_{m1} & \dots & \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathscr{T}\beta = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}_{1} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}_{m} \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

В рассмотренных постановках (5.27) и (5.28) каждый элемент системы уравнений — твин, как в матрице, так и в данных. Такие постановки встречаются редко. Так что рассмотрим далее самый простой, но содержательный частный случай.

Рассмотрим простой малоразмерный пример. Например, такова задача на поиск концентраций веществ x по системе уравнений (5.29)

$$\mathbb{A}x = \mathbb{B} \tag{5.29}$$

с твинной матрицей 2×2 и вектором твинов 2×1.

В общем виде системы внутренних и внешних оценок (5.30), (5.31), (5.33) можно записать следующим образом:

$$A_{ex}x = b_{ex} - \text{внешняя оценка} \tag{5.30}$$

$$A_{ex}x = b_{in} - \text{сужение правой части} \tag{5.31}$$

$$A_{in}x = b_{ex} - \text{сужение матричной части} \tag{5.32}$$

$$A_{in}x = b_{in} - \text{базовая внутренняя оценка} \tag{5.33}$$

Определение базовой внутренней оценки из (5.33) не всегда возможно из-за несовместности этой ситемы.

Заметим, что системы (5.31) и (5.33) тождественны, если матрицы A_{ex} и A_{in} —точечные.

5.3 Частный случай ТСЛАУ — твины в правой части

Рассмотрим конкретный случай (5.29) с точечной матрицей и твинной правой частью.

Пример 15 (Твинная регрессия — пример 1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} [\ [3,5], & [2,6]\ ] \\ [\ [7,9], & [6,10]\ ] \end{pmatrix}. \tag{5.34}$$

Система с такой матрицей, содержащей столбец из 1, соответствует задаче линейной регрессии со значениями входной переменной в первом столбце $[1;2]$ и твинной оценке данных. Зададимся целью построить коридор совместных зависимостей для задачи линейной регрессии.

Расщепим ТСЛАУ (5.34) на две ИСЛАУ (5.35) и (5.36)

$$A \cdot x_{in} = b_{in} \tag{5.35}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_{in} = \begin{pmatrix} [3,5] \\ [7,9] \end{pmatrix}$$

и

$$A \cdot x_{ex} = b_{ex} \tag{5.36}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_{ex} = \begin{pmatrix} [2,6] \\ [6,10] \end{pmatrix}$$

В ИСЛАУ (5.35) и (5.36) неизвестными являются коэффициенты сдвига и наклона регрессионной прямой.

В первую очередь, проверим непустоту решений для внутренних и внешних оценок. Для этого используем программную реализацию вычисления распознающего функционала (3.6), `tolsolvty`, `tollinprog` С.П.Шарого и С.И.Жилина.

Выходом этих программ являются:
- `tolmax` — значение максимума распознающего функционала
- `argmax` — аргументы переменных, доставляющие значение максимума распознающего функционала
- `env` — величины резерва совместности для каждого уравнения

Для системы (5.34) с внешней правой частью вычисления дают:
- `tolmax` $= 2$
- `argmax` $= \{4\ 0\ \}$
- `env` $= \{\ 2\ 2\ \}$.

Для системы (5.34) с внутренней правой частью вычисления дают:
- `tolmax` $= 1$
- `argmax` $= \{4\ 0\ \}$
- `env` $= \{\ 1\ 1\ \}$

Как видим, аргументы экстремума для внутренних и внешних задач одинаковы, а значение максимума распознающего функционала и резервов совместности для внутренней оценки в 2 раза меньше.

Теперь найдём множества решений для внутренних и внешних задач. Это можно сделать с помощью программ `IntLinInc2D` И.А.Шарой или `ir_plotbeta` С.И.Жилина.

На рисунке 5.1 представлены множества решений `argmax` для внутренних и внешних задач системы (5.34).

Как видно из рисунке 5.1, множества решений внутренних и внешних задач имеют форму параллелограммов, один из которых содержится в другом. Внутри этих фигур находится точка

$$\texttt{argmax} = \{4\ 0\}.$$

Используем программу `ir_plotmodelset` С.И.Жилина. Строим два коридора совместных решений см. рис. 5.2.

На рис. 5.2 показаны как коридоры совместных зависимостей для (5.34), так и твины данных. ■

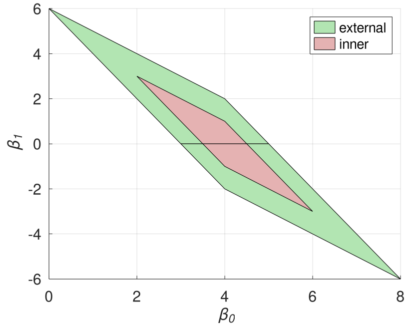

Рис. 5.1. Внутреннее (internal) и внешнее (external) решения ТСЛАУ (5.34)

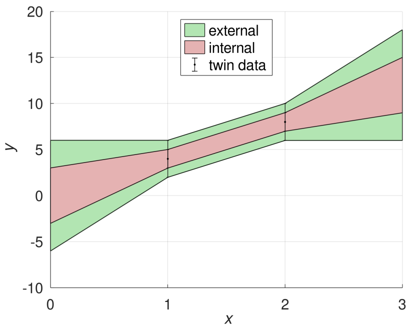

Рис. 5.2. Коридоры совместных зависимостей для ТСЛАУ (5.34)

Согласно книге [1]

Определение 5.3.1 *Пусть в задаче восстановления зависимостей информационное множество Ω параметров зависимостей $y = f(x, \beta)$, совместных с данными, является непустым. Коридором совместных зависимостей рассматриваемой задачи называется многозначное отображение Υ, сопоставляющее каждому значению аргумента x множество*

$$\Upsilon(x) = \bigcup_{\beta \in \Omega} f(x, \beta).$$

Пример 16 (Твинная регрессия — пример 2)

Построим новую задачу. В-первых, добавим еще одну точку - ровно посередине между имеющимися в (5.34). Также сместим крайний правый твин вверх на 2.31.

$$\begin{cases} \alpha_{1in} + \beta_{1in} & = [[3,5]\ [2,6]] \\ 1.5\alpha_{1in} + \beta_{1in} & = [[5,7]\ [4,8]] \\ 2\alpha_{2in} + \beta_{2in} & = [[9.31, 11.31]\ [8.31, 12.31]] \end{cases} \tag{5.37}$$

Для системы (5.37) с внешней правой частью вычисления дают:
- **tolmax** = 1.4225
- **argmax** = {6.31 -2.8875 }
- **env** = { 1.4225 1.4225 1.4225 }.

Для системы (5.37) с внутренней правой частью вычисления дают:
- **tolmax** = 0.4225
- **argmax** = {6.31 -2.8875 }
- **env** = { 0.4225 0.4225 0.4225 }

Используя методы исследования разрешимости интервальных линейных систем алгебраических уравнений §3.2 найдём внутреннее и внешнее решения (5.38) По-прежнему имеется два коридора совместных решений — см. рис.

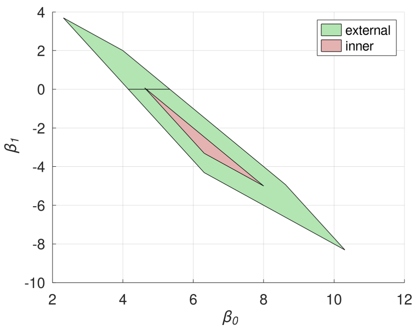

Рис. 5.3. Внутреннее (internal) и внешнее (external) решения ТСЛАУ (5.37)

5.4.

Можно заметить, что сечение коридора совместных зависимостей в точке $x = 1.5$ стало существенно уже. Нижняя грань коридора в этой точке определяется уже не внешним, а внутренним твином. ■

Пример 17 (Твинная регрессия — пример 3)
Сместим теперь крайний правый твин вниз на 3.2.

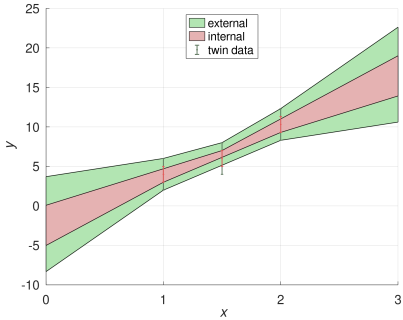

Рис. 5.4. Коридоры совместных зависимостей для ТСЛАУ (5.37)

$$\begin{cases} \alpha_{1in} + \beta_{1in} & = [[3,5]\ [2,6]] \\ 1.5\alpha_{1in} + \beta_{1in} & = [[5,7]\ [4,8]] \\ 2\alpha_{2in} + \beta_{2in} & = [[3.8,5.8]\ [2.8,6.8]] \end{cases} \tag{5.38}$$

Для системы (5.38) с внешней правой частью вычисления дают:
- `tolmax` $= 1.2$
- `argmax` $= \{0.8\ 4\ \}$
- `env` $= \{\ 1.2\ \ 1.2\ \ 1.2\ \}$.

Для системы (5.38) с внутренней правой частью вычисления дают:
- `tolmax` $= 0.2$
- `argmax` $= \{0.8\ 4\ \}$
- `env` $= \{\ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.25\ \}$

Используя методы исследования разрешимости интервальных линейных систем алгебраических уравнений §3.2 найдём внутреннее и внешнее решения (5.38)

Как видно из рисунка 5.6 множество внутренних оценок существенно уменьшилось и система уравнений (5.38) находится близко к грани разрешимости.

По-прежнему имеется два коридора совместных решений — см. рис. 5.6.

При этом коридор совместных зависимостей сместился вниз и особенно сузился в точке $x = 1.5$.

Из рисунка 5.6 видно, что сечение внутреннего коридора в этой точке определяется значениями снизу значениями $\overline{\boldsymbol{y}}_1$ и $\overline{\boldsymbol{y}}_3$, а сверху — значением $\underline{\boldsymbol{y}}_2$.

■

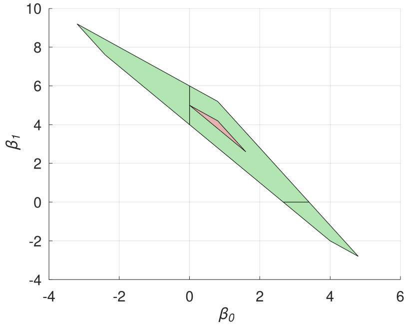

Рис. 5.5. Внутреннее и внешнее решения ТСЛАУ (5.38)

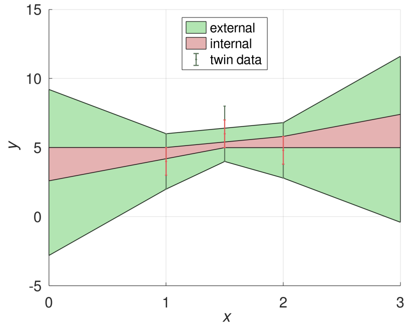

Рис. 5.6. Коридоры совместных зависимостей для ТСЛАУ (5.38)

Рассмотренные примеры демонстрируют размеры коридоров совместности при различных данных.

На основе расчёта регрессионных коэффициентов для внутренних и внешних оценок вычислим сечения коридора совместных зависимостей для точки $x = 1.5$. Составим сводную таблицу по примерам 15, 16 и 17.

Видно, что сечение коридора для точки $x = 1.5$ для последней задачи уменьшилось в 2.5 раза, и отношение ширин внешних и внутренних оценок возросло с 2 до 5.

Подобное уменьшение вообще характерно для внутренних оценок при снижении величины резерва совместности (величины распознающего функционала) при возникновении «изломов» в данных. При дальнейшем сдвиге данных друг от друга по оси ординат резерв совместности становится отри-

Таблица 5.1. Параметры решений задач 15 — 17

Пример	Tol_{in}	Tol_{ex}	$\frac{Tol_{ex}}{Tol_{in}}$	wid $y_{ex}(1.5)$	wid $y_{in}(1.5)$	$\frac{\text{wid } y_{ex}(1.5)}{\text{wid } y_{in}(1.5)}$
15	1	2	2	5	10	2
16	0.4225	1.4225	3.3369	4.225	10	2.3369
17	0.2	1.2	6	2	10	5

цательным, а задача регрессии неразрешимой.

Глава 6

Уточнение решений твинных уравнений

В рассмотренном выше примере (§5.2) задача с внутренними оценками разрешима. В таком случае можно получать результаты для внешних и внутренних оценок данных независимо. Такая ситуация встречается нечасто — в большом числе случаев задача с внутренними оценками неразрешима, что можно наблюдать по тенденции в примерах 15 — 17.

Интересно получить более точные результаты, чем просто внешние оценки, комбинируя внутренние и внешними оценками данных.

6.1 Методы уточнения решения

В публикации [26] рассмотрено два способа уточнения оценки параметров линейной регрессии. Рассмотрим эти приёмы на конкретном примере.

Пример 18 (Твинная регрессия — практический пример)
Рассматриваются модельные данные

$$x = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\} \tag{6.1}$$

$$y = \{5.5,\ 5.5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 8,\ 8.5,\ 9,\ 9.5\}. \tag{6.2}$$

Считается, что входные данные x (6.1) известны точно. Для выходных данных y (6.2) используются две оценки. Внутренняя оценка составляет 2 % значения y вверх и вниз, а величина внешней оценки — 10 % значения y. Вместе они образуют твин $\mathbb{Y} = [\boldsymbol{y}_{in}, \boldsymbol{y}_{ex}]$.

Исследование задачи линейной регрессии с внутренними оценками y приводит к пустому множеству решения. Решение с внешними оценками существует. В работе использовались два способа коррекции задачи для достижения разрешимости.

В первом случае выяснялось, какие данные не удовлетворяют оптимальному точечному решению. Для таких данных значения $\boldsymbol{y}_{in}$ заменялись на $\boldsymbol{y}_{ex}$.

Второй способ достижения разрешимости в [26] более тонкий. Предлагается решать расширенную систему уравнений. В неё первоначально включаются не только внутренние $\boldsymbol{y}_{in}$ и внешние $\boldsymbol{y}_{ex}$ оценки правой части $\mathbb{Y} = \left[\boldsymbol{y}_{in}, \boldsymbol{y}_{ex}\right]$, но и дополнительные интервалы.

Эти интервалы представляют нижние границы внутренних оценок и верхние границы внешних оценок $\left[\underline{\boldsymbol{y}}_{in}, \overline{\boldsymbol{y}}_{ex}\right]$, и наоборот $\left[\underline{\boldsymbol{y}}_{ex}, \overline{\boldsymbol{y}}_{in}\right]$. Имеем, таким образом, расширенную матрицу и вектор системы уравнений регрессии

$$X_{ext} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x & 1 \\ x & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Y}_{ext} = \begin{pmatrix} \left[\underline{\boldsymbol{y}}_{in}, \overline{\boldsymbol{y}}_{in}\right] \\ \left[\underline{\boldsymbol{y}}_{in}, \overline{\boldsymbol{y}}_{ex}\right] \\ \left[\underline{\boldsymbol{y}}_{ex}, \overline{\boldsymbol{y}}_{in}\right] \\ \left[\underline{\boldsymbol{y}}_{ex}, \overline{\boldsymbol{y}}_{ex}\right] \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

Матрица X_{ext} имеет в 4 раза больше строк (36), чем исходная X (9). С построенными $\mathbb{Y}_{ext}$ и X_{ext} решаем ИСЛАУ (6.4)

$$\mathbb{Y}_{ext} = X_{ext}\beta \tag{6.4}$$

Далее выясняется, какие уравнения в новой системе (6.4) несовместны, формируется массив номеров несовместных уравнений idx, и они исключаются из расширенной системы. Решение оставшейся системы будет более узким, чем в первом методе, поскольку наложено больше ограничений (уравнений).

На рисунке 6.1 представлены множества решений задач в различных постановках. На рисунке 6.2 представлены прогнозные коридоры с на основе твинных данных. Синий цвет соответствует второму методу и даёт самый узкий коридор. ■

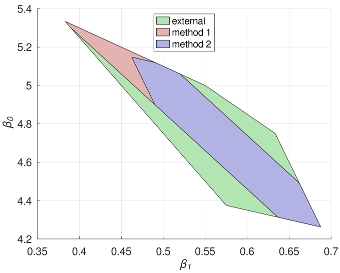

Рис. 6.1. Различные множества решений

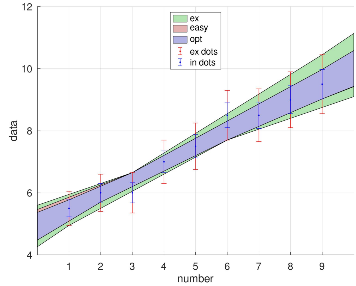

Рис. 6.2. Коридор совместных зависмостей

6.2 Пример с данными LIDAR

Рассмотрим теперь практическое применение техники, рассмотренной в §6.1.

6.2.1 Описание данных

В этом разделе мы описываем происхождение данных и математическую задачу из реальной практики. В технике часто используют зондирование пространственно недостижимых объектов световыми импульсами. Такие системы часто называют системами обнаружения и определения дальности света (LIDAR).

Регистрация сигнала осуществляется на основе специального оборудования.

Чип быстрой аналоговой памяти PSI DRS4 [14] имеет 8 каналов, каждый из которых содержит 1024 ячейки. Они включают конденсаторы для хранения значения заряда и электронные ключи для записи сигналов и считывания напряжений через АЦП (аналого-цифровой преобразователь). Ячейки объединяются в кольцевые буферы. При подаче сигнала синхронизации запись напряжений на конденсаторы прекращается, а номер ячейки (в которую была сделана последняя запись) запоминается.

Для сравнения значения входных сигналов и кода АЦП необходимо откалибровать устройство. На входы платы подается набор сигналов постоянного значения от опорного источника, охватывающий рабочий диапазон напряжений микросхемы DRS4. На основе полученных данных для каждой ячейки рассчитываются линейные регрессии. Коэффициенты регрессии (2 x 8 x 1024 = 16384 для одного устройства LIDAR) сохраняются в памяти и затем используются для восстановления сигнала LIDAR.

Таким образом, калибровка сводится к определению параметров линейной регрессии

$$\mathbf{y} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \mathbf{x}, \qquad (6.5)$$

здесь $\mathbf{x}$ — входные данные, $\mathbf{y}$ — интервальные выходные данные, β_0, β_1 — параметры линейной регрессии.

Параметры регрессии определяются из решения интервальной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{Y} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \mathbf{X}, \qquad (6.6)$$

где $\mathbf{X}$ — вектор входных калибровочных данных, $\mathbf{Y}$ — вектор интервальных выходных данных. В общем случае входных данных получение оценок параметров регрессии является нетривиальной задачей. Внешние оценки часто очень широкие. Расчет внутренних оценок является математически сложной задачей [18] и может быть неинформативным для расчета множеств решений. Получение как внутренних, так и внешних оценок мотивирует использование твинов.

Применяя входные опорные сигналы, стараются сделать эти сигналы максимально точными, чтобы оценки параметров регрессии β_0, β_1 были максимально узкими.

Если неопределенность справочных данных достаточно мала, система (6.6) принимает вид:

$$\mathbf{Y} = \beta_0 + \beta_1 \cdot X, \qquad (6.7)$$

где $X = \{x\}$ — вектор входных калибровочных данных, $x \in \mathbb{R}$.

Для системы (6.7) можно построить наборы β_0, β_1 и использовать только классическую интервальную арифметику. В этом случае в зависимости от конкретных данных получаются различные коридоры прогноза [1]

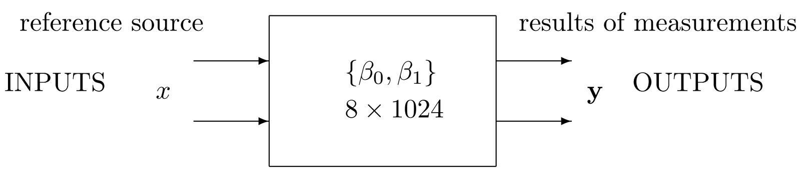

Рис. 6.3. Структурная схема калибровки DRS4

6.2.2 Пример вычисления

Рассмотрим пример данных калибровки. Для демонстрации возьмем один элемент PSI DRS4 [14], а именно канал номер 1, ячейку номер 2.

Вектор значений уровней входных калибровочных сигналов представлен в (6.8):

$$X = \{-0.027, -0.205, -0.471, -0.492, 0.061, 0.225, 0.43, 0, 0\}. \qquad (6.8)$$

Значения уровней входных сигналов в (6.8) даны не по возрастанию, а по порядку проведения измерений.

Для каждого значения уровня входных сигналов в (6.8) проводилось по 100 измерений $\mathbf{y}$. По этим наборам строились гистограммы и делались интервальные внешние и внутренние оценки.

Внешний вектор оценки выходных данных определялся с помощью боксплотов с удалением выборосов. Он равен

$$\begin{aligned} Y_{ex} = \{&[7597,\ 7665], [5290,\ 5362], [1807,\ 1937], [1579,\ 1659], [8746,\ 8802], \\ &[10875,\ 10938], [13555,\ 13631], [7957,\ 8027], [7952,\ 8012]\}. \end{aligned} \qquad (6.9)$$

Внутренний оценочный вектор выходных данных строился по границам первого и третьего квартилей. В результате получили

$$\begin{aligned} Y_{in} = \{&[7611,\ 7649], [5319,\ 5346], [1890,\ 1918], [1609,\ 1638], [8764,\ 8783], \\ &[10896,\ 10916], [13574,\ 13607], [7985,\ 8004], [7974,\ 7995]\}. \end{aligned} \qquad (6.10)$$

С внешними данными (6.9) ИСЛАУ (6.7) разрешима.

Исследуем разрешимость ИСЛАУ (6.7) с данными (6.10), используя значения распознающего функционала (3.6). Вычисления дают значения

$$\mathrm{Tol}(\beta, X, Y_{in}) = -2.93 < 0, \qquad (6.11)$$

$$\arg\max_{\beta} = [-0.01203,\ 0.7914]. \qquad (6.12)$$

В связи с тем, что Tol < 0 (6.11), не все уравнения ИСЛАУ удовлетворены. Индексы неудовлетворенных уравнений:

$$\mathrm{idx} := \{2, 7, 9\} : \mathrm{Tol}_k < 0,\ k \in \mathrm{idx}. \qquad (6.13)$$

Рассмотрим одно из измерений, дающих несовместность На рисунке 6.4 видно, что регрессионная прямая проходит ниже интервала второго измерения.

Затем меняем значения внутренних оценок на внешние оценки для уравнений как в массиве idx (6.13), как мы предлагали в разделе §6.1:

$$Y_{in}(\mathrm{idx}) := Y_{ex}(\mathrm{idx}). \qquad (6.14)$$

С исправленными данными значение допускового функционала (3.6) составляет $5.0 > 0$, поэтому задача линейной регрессии имеет (6.7) непустой набор решений β_0, β_1.

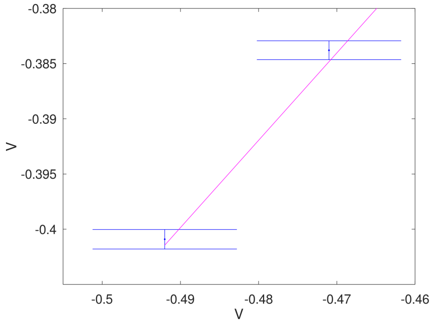

Рис. 6.4. Несовместное измерение 2 и прогноз с argmax (6.12)

Теперь рассмотрим метод улучшения оценки, рассмотренный в §6.1. Следуя этому методу, мы строим матрицу размером $9 \times 4 = 36 \times 2$ и вектор данных размером $9 \times 4 = 36$. Эта система несовместна со значением $\mathrm{Tol}_k < 0$.

Индексы уравнений, с отрицательными значениями резерва совместности

$$\mathrm{idx} := \{2, 7, 9, 11, 18, 25\} : \mathrm{Tol}_k < 0,\ k \in \mathrm{idx}. \tag{6.15}$$

После удаления уравнений с номерами idx (6.15) получаем значение допускового функционала (3.6), равное $5.0 > 0$.

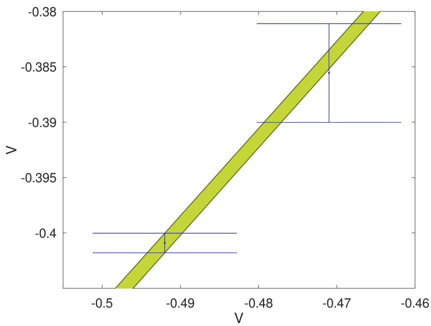

Рис. 6.5. Коридор совместных зависимостей и откорректированное измерение 2, для которого взяты внешние оценки

На рисунке 6.5 видно, что коридор совместных зависимостей показан зеленым цветом. Он пересекает интервал откорректированного измерения 2.

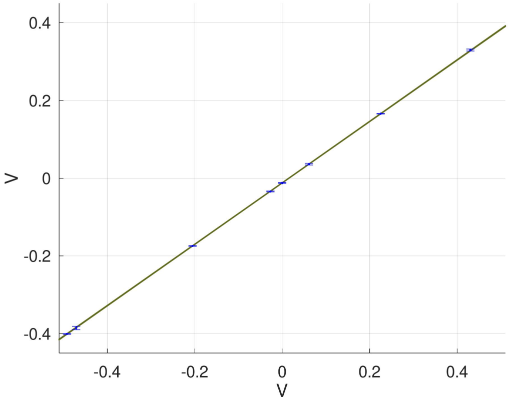

Рис. 6.6. Регрессионная зависимость для ячейки 2 канала 1 микросхемы DRS4

Вся регрессионная зависимость для ячейки 2 канала 1 микросхемы DRS4 приведена на рисунке 6.6. В масштабе рисунка 6.6 интервалы данных практически незаметны.

Глава 7

Заключение

Интервальная статистика или анализ данных с интервальной неопределённостью — молодая ветвь анализа данных, возникшая в последние десятилетия на базе идей интервального анализа.

Составные интервальные объекты — твины являются способом одновременного описания внутренних и внешних оценок данных и результатов вычислений.

В пособии приводятся необходимые сведения по теории, приведены различные примеры.

Особое внимание уделено построению коридоров совместности моделей данных в твинной арифметике. Описаны оригинальные методы уточнения внутренних оценок параметров моделей. В учебном пособии рассмотрены вопросы постановки задач и их решения для твинных объектов. Приведены конкретные примеры, модельные и с реальными данными.

Реальные данные взяты из практических исследований плазмы на токамаке «Глобус-М2» ФТИ им. А.Ф.Иоффе. Авторы выражают благодарность сотрудникам ФТИ им. А.Ф.Иоффе.

Авторы выражают благодарность В.М.Нестерову за обращение к твинной тематике, А.Г.Жаворонкой — за материал с французской версией твинов, А.А.Карповой — за примеры в полной интервальной арифметике.

Авторы выражают благодарность постоянным участникам Интервального вебинара: С.И.Жилину, С.И.Кумкову, Е.В.Чаусовой, А.В.Пролубникову, С.П.Шарому за обсуждение различных вопросов интервального анализа и интервальной статистики.

Обозначения [1]

Интервалы и другие интервальные величины (векторы, матрицы и др.) всюду в тексте обозначаются жирным математическим шрифтом, например: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\dots$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$. Неинтервальные (точечные) величины никак специально не выделяются. Арифметические операции с интервальными величинами — это операции классической интервальной арифметики $\mathbb{IR}$ или же полной интервальной арифметики Каухера $\mathbb{KR}$.

$\Rightarrow$	логическая импликация (следование)
$\Leftrightarrow$	логическая равносильность
$\&$	логическая конъюнкция, связка «и»
$\to$	отображение множеств; предельный переход
$\leftarrow$	оператор присваивания в алгоритмах
$\forall$	логический квантор всеобщности («для всех»)
$\exists$	логический квантор существования («существует»)
$\varnothing$	пустое множество
$x \in X$	элемент x принадлежит множеству X
$x \notin X$	элемент x не принадлежит множеству X
$X \cup Y$	объединение множеств X и Y
$X \cap Y$	пересечение множеств X и Y
$X \setminus Y$	разность множеств X и Y
$X \subseteq Y$	множество X есть подмножество множества Y
$X \subsetneq Y$	X есть собственное подмножество множества Y

$X \times Y$	прямое декартово произведение множеств X и Y
$\mathbb{R}$	множество вещественных (действительных) чисел
$\mathbb{IR}$	множество вещественных интервалов
$\mathbb{KR}$	полная интервальная арифметика Каухера
$\mathbb{R}^n$	множество вещественных n-мерных векторов
$\mathbb{IR}^n$, $\mathbb{KR}^n$	множества n-мерных интервальных векторов
$\mathbb{R}^{m \times n}$	множество вещественных $m \times n$-матриц
$\mathbb{IR}^{m \times n}$, $\mathbb{KR}^{m \times n}$	множества интервальных $m \times n$-матриц
$:=$	равенство по определению
$\approx$	приблизительно равно
$\inf X$	точная нижняя грань множества $X \subseteq \mathbb{R}$
$\sup X$	точная верхняя грань множества $X \subseteq \mathbb{R}$
$[a, b]$	интервал с нижним концом a и верхним b
$[a, b[$	полуоткрытый интервал с концами a и b
$]a, b[$	открытый интервал с концами a и b
$\underline{\boldsymbol{a}}$, $\inf \boldsymbol{a}$	левый конец интервала $\boldsymbol{a}$
$\overline{\boldsymbol{a}}$, $\sup \boldsymbol{a}$	правый конец интервала $\boldsymbol{a}$
$\mathrm{mid}\, \boldsymbol{a}$	середина интервала $\boldsymbol{a}$
$\mathrm{wid}\, \boldsymbol{a}$	ширина интервала $\boldsymbol{a}$
$\mathrm{rad}\, \boldsymbol{a}$	радиус интервала $\boldsymbol{a}$
$\mathrm{rer}\, \boldsymbol{a}$	относительный радиус интервала $\boldsymbol{a}$
$\lvert \boldsymbol{a} \rvert$	абсолютное значение (модуль, магнитуда) интервала $\boldsymbol{a}$
$\langle \boldsymbol{a} \rangle$	мигнитуда интервала $\boldsymbol{a}$
$\square X$	интервальная оболочка множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$
∂X	граница множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$
$\wedge$, $\bigwedge$	точная нижняя грань по включению
$\vee$, $\bigvee$	точная верхняя грань по включению
dist	расстояние (метрика) на множестве интервалов
Dist	векторнозначное расстояние (мультиметрика)
Ji	индекс Жаккара интервальный

$y = f(x, \beta)$	y есть функция f независимой переменной x, зависящая также от параметра β
$\operatorname{dom} f$	область определения функции f
$\operatorname{ran}(f, X)$	область значений функции f на множестве X
min, max	операции взятия минимума и максимума
$\sum$	символ суммы нескольких слагаемых
$a = (a_i)$	a есть вектор (упорядоченный набор) из элементов a_i
$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_i)$	интервальный вектор из элементов $\boldsymbol{a}_i$
$A = (a_{ij})$	A есть матрица из элементов a_{ij}
$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$	интервальная матрица из элементов $\boldsymbol{a}_{ij}$
$\lVert \cdot \rVert$	векторная или матричная норма
$\text{Ш}_r(x)$	шар радиусом r с центром в точке x
$\sigma_{\min}(A)$	минимальное сингулярное число матрицы A
$\sigma_{\max}(A)$	максимальное сингулярное число матрицы A
x^*	истинное значение измеряемой величины x
$\mathring{x}$	базовое измеренное значение величины x
$\hat{x}$	оценка величины x
$\mathit{\Omega}$	информационное множество задачи
$\mathit{\Xi}$	множество решений интервального уравнения или интервальной системы уравнений
$\mathit{\Xi}_{uni}$	объединённое множество решений
$\mathit{\Xi}_{tol}$	допусковое множество решений
$\mathit{\Pi}$, $\mathit{\Pi}(x)$	прогнозный коридор функциональной зависимости
$\mathit{\Upsilon}$, $\mathit{\Upsilon}(x)$	коридор совместных зависимостей

Литература

[1] Баженов А.Н., Жилин С.И., Кумков С.И., Шарый С.П. Обработка и анализ данных с интервальной неопределённостью. – Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2023. (готовится к печати)

[2] Баженов А.Н. Естественнонаучные и технические применения интервального анализа. : учеб. пособие / А.Н. Баженов. — СПб. – 2021. URL: https://elib.spbstu.ru/dl/5/tr/2021/tr21-169.pdf/info.

[3] Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. – Москва: Наука, – 1971 – С. 257.

[4] Kearfott R.B., Nakao M., Neumaier A., Rump S., Shary S.P., van Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis // Вычислительные Технологии. – 2010. – Т. 15, №1. – С. 7–13.

[5] Sainz M.A., Armengol J., Calm R., Herrero P., Jorba L.J., Vehi J. Modal Interval Analysis: New Tools for Numerical Information. – Cham, Switzerland: Springer, 2014. – (*Lecture Notes in Mathematics; vol. 2091*).

[6] Schichl H., Domes F., Montanher T., Kofler K. Interval unions // BIT Numerical Mathematics. – 2017. – Vol. 57. – P. 531–556.

[7] Gardeñes E., Trepat A., Janer J.M. Approaches to simulation and to the linear problem in the SIGLA system // Freiburger Intervall-Berichte. – 1981. – No. 8. – S. 1–28.

[8] Shary S.P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic Reliable Computing. – 1996. – Vol. 2, No. 1. – P. 3-33.

[9] Баженов А.Н., Карпова А.А. Интервальный анализ в примерах: учебное пособие. - Санкт-Петербург, 2024. DOI 10.18720/SPBPU/5/tr24-121

[10] Нестеров В.М. Твинные арифметики и их применение в методах и алгоритмах двустороннего интервального оценивания. дисс. . . . д.ф.-м.н. –

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, – 1999, – 234 с.

[11] Жаворонкова А.Г. Арифметика твинов Нестерова. twin — https://github.com/Zhavoronkova-Alina/twin

[12] Жаворонкова А.Г. Постановка и решение задач обработки данных в твинной арифметике. Магистерская диссертация. 2022

[13] Desrochers B., Jauli L. ThickSetInversion // ArtificialIntelligence.— 2017. —Vol.249.—P.1–18.

[14] Galli, L., Baldini, A.M., Cei, F., Chiappini, M., Francesconi, M., Grassi, M., Hartmann, U., Meucci, M., Morsani, F., Nicolò, D., Papa, A., Ritt, S., Schmid, E., and Signorelli G. 2019. WaveDAQ: An highly integrated trigger and data acquisition system. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 936, p.399-400.

[15] Баженов А.Н., Тельнова А.Ю. Обобщение коэффициента Жаккара для анализа данных с интервальной неопределённостью // Измерительная техника. – 2022. № 12, С. 12–15.

[16] Rezatofighi H., Tsoi N., Gwak J., Sadeghian A., Reid I. and Savarese. S. Generalized Intersection over Union // The IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), – June 2019. DOI: 10.1109/CVPR41558.2019

[17] Шарая И.А., Шарый С.П. Резерв характеристического включения для интервальных линейных систем отношений // Вычислительные технологии. – 2021 – Т. 26, №3. – С. 61–85.

[18] Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – ФИЦ ИВТ: Новосибирск, 2024. Электронная книга, доступная на http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf

[19] Hu C., Hu Z.H. On statistics, probability, and entropy of interval-valued datasets // Lesot MJ. et al. (eds) Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. IPMU 2020. Communications in Computer and Information Science, vol 1239. – Cham: Springer, 2020.

[20] Баженов А.Н. Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры. 2020 – СПбПУ, – с.78.

[21] Жилин С.И. Примеры анализа интервальных данных в Octave. Сборник jupyter-блокнотов с примерами анализа интервальных данных. https://github.com/szhilin/octave-interval-examples

[22] Яворук Т.О. Вычисления с изотопами MendeleevTwin — https://github.com/Tatiana655/MendeleevTwin

[23] Баженов А.Н., Яворук Т.О. Тензорные разложения и их применение в флуориметрии: учебное пособие. – 2021. DOI:10.18720/SPBPU/5/tr21-170

[24] Iavoruk T., Bazhenov A. The use of twins in isotopic analysis. – IC-MSQUARE 12th Int'l Conference on Mathematical Modeling in the Physical Sciences. September 28-31, 2023, Belgrade, Serbia.

[25] Кожевникова Д.Г. Применение твинов для вычислений с изотопными распределениям. Выпускная квалификационная работа работа бакалавра. – С.-Петербург. – 2023 https://www.overleaf.com/project/644fb6b969b09de2b7307c0d

[26] Iavoruk, T., Bazhenov, A. The use of twice intervals estimations in the calibration process of LIDAR-based data. 15th International Conference on Applied Physics and Mathematics. Tokyo, 2025.

Предметный указатель