Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

А. Г. Сиднев

Элементы теории расписаний

и сетевого планирования

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

1. Теория расписаний

1.1. Сферы применения теории расписаний

- Задачи календарного и сетевого планирования
- Оптимальная организация технологического процесса – задача Джонсона [1]
- Диспетчеризация вычислительных процессов
- Системы контроля – оптимизация диагностических процедур элементов сложных технических систем
- Оптимизация конвейерных вычислений – проблема выбора латентности, предотвращающей столкновения ступеней [5]

1.2. Общая постановка задачи построения расписания

1. Задан состав работ (операций) – объектов планирования $\{a_i\},\ i=\overline{1,n}$
2. Работа a_i характеризуется временем выполнения t_i, которое может быть детерминированной или случайной величиной
3. Задан порядок выполнения работ, то есть, определен порядок предшествования: $a_i \prec a_l$ (работа a_i предшествует работе a_l) или $a_l \prec a_i$ (работа a_l предшествует работе a_i). Символ $\prec\prec$ означает непосредственное предшествование.
4. Планирование предполагает параллелизм выполнения работ, поэтому выделяются пары работ, которые не могут совпадать во времени
5. Задан состав ресурсов (исполнителей) $r_j \in R,\ j=\overline{1,m}$, j – номер ресурса, r_j – количество экземпляров j-го ресурса
6. Может быть задана матрица назначений $N\{ij\}$. Иногда построение матрицы назначений — одна из задач составления расписаний.
7. Каждой работе при необходимости могут быть поставлены в соответствие временные границы на ее осуществление: $a_i \to \{T_{iн}, T_{iз}\}$

1.3. Цели построения расписания

- Оптимизация расписания по некоторому критерию: поиск расписания, доставляющего экстремум целевой функции (например, времени, стоимости, вероятности выполнения в срок)

- Если поиск оптимального расписания затруднен, ставится задача отыскания **допустимого** расписания

Можно выделить две группы задач построения расписаний:

1. **Задачи сетевого планирования** – в формализм математических моделей не входит учет ресурсов-исполнителей работ. Рассматривается только порядок выполнения работ при условии, что каждой работе назначен свой ресурс-исполнитель. Решение находит экстремум целевой функции, временной, вероятностной или стоимостной.

2. **Построение расписаний с учетом ресурсов** – показатели, относящиеся к ресурсам (загруженность ресурсов, их назначение на операции) входят в целевую функцию или участвуют в ограничениях.

1.4. Задачи сетевого планирования

При решении задач сетевого планирования определяются 2 типа характеристик:

1. Интегральные временные характеристики, дающие представление о расписании целом:

Время $\boldsymbol{T}$ выполнения комплекса работ (операций) для детерминированной постановки задачи

Вероятностные характеристики случайной величины $\boldsymbol{T}$ — $\boldsymbol{M(T), D(T)}$ или $\boldsymbol{P\{T < T_{зад}\}}$.

2. Временные локальные характеристики, характеризующие отдельные работы — резервы времени $\{\boldsymbol{r_i}\}$ начала работ. Если $\boldsymbol{r_i = 0}$, работа $\boldsymbol{a_i}$, как правило, получает наивысший приоритет.

1.4.1. Определение интегральных и локальных характеристик расписания

Изначально последовательность выполнения работ может быть задана таблично, табл. 1:

Таблица 1.

Обозначение работы				*Обозначение работы-предшественницы*				*Длительность работы*
2	*01*	*2*	*01*	*Нет*		*Нет*		*2*
4	*02*	*4*	*02*	*Нет*		*Нет*		*1*
3	*03*	*3*	*03*	*Нет*		*Нет*		*1*
1	*04*	*1*	*04*	*Нет*		*Нет*		*2*
5	*14*	*5*	*16*	*01*	*2*	*2*	*01*	*2*
6	*23*	*6*	*23*	*02*	*4*	*4*	*02*	*3*
7	*15*	*7*	*15*	*01*	*2*	*2*	*01*	*4*
8	*34*	*8*	*36*	*03, 23*	*3, 6*	*3, 6*	*03, 23*	*1*
9	*45*	*9*	*65*	*04, 14, 34*	*1, 5, 8*	*5, 8, 46*	*16, 36, 46*	*1*
		10	*45*			*1*	*04*	*1*

Эквивалентное задание последовательности выполнения работ может быть представлено в форме графа (рис. 1).

Дуге графа ставится в соответствие работа ij, обозначаемая двумя индексами i и j, соответствующими номерам узлов.

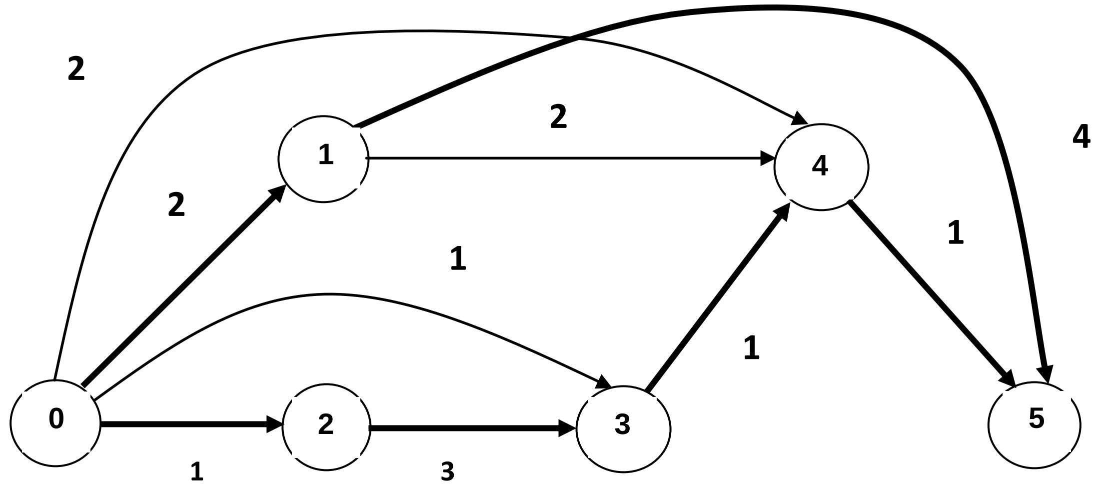


Рис. 1

Узлу i графа ставится в соответствие событие, состоящее в том, все работы-дуги, входящие в узел завершены и можно начинать работы, исходящие из узла i.

Иногда, следуя логике выполнения работ, приходится вводить фиктивные работы с нулевой длительностью. Представленный ниже граф (рис. 2) соответствует части табличного задания порядка следования работ (см. красный цвет в табл.1). Работа ***46***

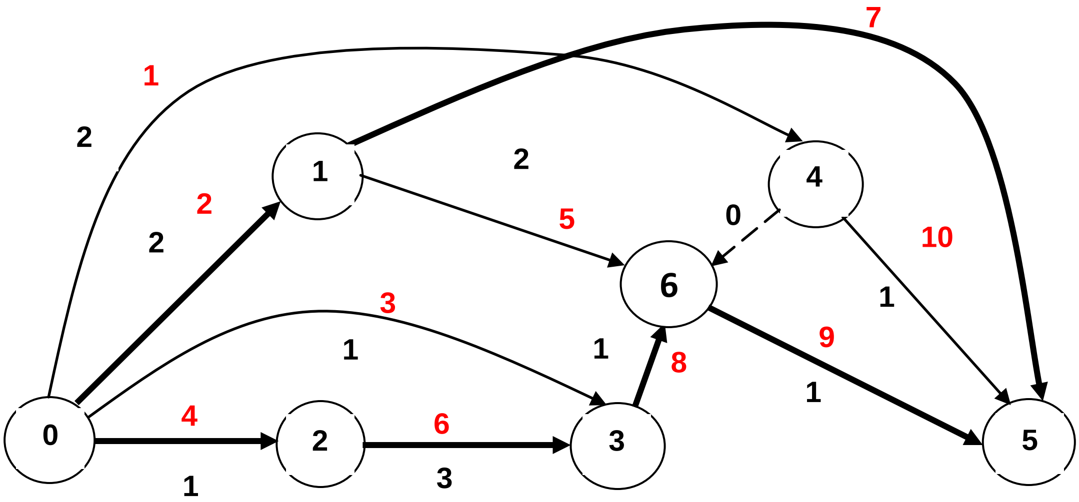


Рис. 2

является фиктивной работой с нулевой длительностью.

Это один из возможных вариантов представления графика выполнения работ в форме графа [4, стр. 520]. В [4] фактически изложена методика построения подобного графа, включающего в случае необходимости дуги-фиктивные работы.

1.4.1.1. Метод динамического программирования в задаче оптимизации графика выполнения комплекса работ

Введем условные обозначения:

τ_{ij} – время выполнения (длительность) работы ij;

t_i^* – наиболее ранний момент осуществления i-го события;

t_i^{**} – наиболее поздний момент осуществления i-го события;

r_{ij} – резерв времени выполнения работы ij.

Смысловое содержание этих параметров, характеризующих назначенный к выполнению комплекс работ следующее:

t_i^* – наиболее ранний возможный момент осуществления i-го события, обусловленный взаимной подчинённостью работ;

t_i^{**} – наиболее поздний момент осуществления i-го события в условиях обеспечения минимально возможного времени выполнения всего комплекса работ;

r_{ij} – резерв времени выполнения работы ij, определяемый по формуле:

$$r_{ij} = t_j^{**} - (t_i^* + \tau_{ij}).$$

В соответствии с терминологией сетевого планирования для определения времени выполнения комплекса работ необходимо найти критический или экстремальный путь на графе. Работы, принадлежащие критическому пути, определяют минимально возможное время выполнения комплекса работ.

Отметим, что для графа, представленного на рис.1, имеется 5 путей перемещения из узла 0 в узел 5:

1. $0 \to 1 \to 4 \to 5$
2. $0 \to 4 \to 5$
3. $0 \to 1 \to 5$
4. $0 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$
5. $0 \to 3 \to 4 \to 5$

Применительно к рассматриваемому графу метод критического пути приводит к следующей формуле для определения времени выполнения комплекса работ:

$$T_\Sigma = \max\{(\tau_{01} + \tau_{14} + \tau_{45}), (\tau_{04} + \tau_{45}), (\tau_{01} + \tau_{15}), (\tau_{02} + \tau_{23} + \tau_{34} + \tau_{45}), (\tau_{03} + \tau_{34} + \tau_{45})\}$$

Математическим аппаратом решения этой задачи является динамическое программирование.

Уравнения Беллмана поиска условно оптимального управления на каждом шаге для данной задачи выглядят следующим образом:

$$t_i^* = \max_{j \in G^-(i)} \left\{ t_j^* + \tau_{ji} \right\}, \tag{1}$$

где $G^-(i)$ — множество узлов обратного соответствия узлу i (узлов, из которых можно попасть в узел i).

Процесс вычисления t_i^* производится от начального узла к конечному.

В частности $G^-(4) = \{0, 1, 3\}$, рис. 1.

$$t_j^{**} = \min_{i \in G^+(j)} \left\{ t_i^{**} - \tau_{ji} \right\}, \tag{2}$$

где $G^+(j)$ — множество узлов прямого соответствия узлу j (узлов, в которые можно попасть из узла j). В частности, $G^+(1) = \{4, 5\}$, рис. 1.

Процесс вычисления t_j^{**} производится от конечного узла к начальному.

Для рассматриваемого примера использование данного математического аппарата приводит к следующим результатам:

- Минимальное время выполнения комплекса работ $t_5^* = t_5^{**} = 6$; В дальнейшем будем использовать обозначение T_Σ ($T_\Sigma = 6$);
- Время T_Σ равно сумме времен выполнения работ, лежащих на любом из двух критических путей: $0-1-5$ или $0-2-3-4-5$ (специально выделенных жирным шрифтом на рис. 1);
- Работы, не лежащие на критическом пути, имеют резервы времени, а именно: $r_{03} = 3,\ r_{04} = 2,\ r_{14} = 1.$

1.4.1.1.1. Виды резервов времени

Выше был упомянут резерв времени, который носит название полного резерва времени, по крайней мере, по терминологии Бигеля (Biegel) [6]. У Филипса и Гарсиа [7] фигурируют аналогичные названия за некоторым исключением. Ниже приводятся формулы расчета полного и трех других резервов времени работы ij. Разные виды резервов времени работы ij принимаются во внимание при мониторинге процесса выполнения работ [6].

Полный резерв времени

$$F_n = r_{ij} = t_j^{**} - (t_i^{*} + \tau_{ij}). \tag{3}$$

Ограниченность показателя «Полный резерв времени» состоит в том, что работа ij может быть задержана на r_{ij} без увеличения времени окончания комплекса работ только при условии, что остальные работы начаты в наиболее ранние моменты времени!

Свободный резерв времени

$$F_c = t_j^{*} - (t_i^{*} + \tau_{ij}). \tag{4}$$

Показатель максимальной задержки работы ij, не влияющей на начало последующих работ.

Независимый резерв времени 1-го порядка

$$F_{нз1} = t_j^{**} - t_j^{*}. \tag{5}$$

Показатель максимальной задержки работы ij, без задержки последующих работ, если все предшествующие работы начинались как можно позже.

Независимый резерв времени 2-го порядка

$$F_{нз2} = t_j^{*} - (t_i^{**} + \tau_{ij}). \tag{6}$$

Показатель максимальной задержки работы ij, без задержки последующих работ, если все предшествующие работы начинались как можно позже.

Плановые сроки начала работ могут нарушаться. Это показатель имеющегося запаса времени при наихудших условиях. Некоторые работы могут не иметь этого резерва

Отметим, что $F_n = F_{нз1} + F_c$.

Систематизация четырех рассмотренных резервов времени поясняется табл. 2 [7], в которой приводятся рекомендации по назначению резервов времени последующих работ, в зависимости от уже назначенных резервов времени предшествующих работ.

Таблица 2

Выбор резерва времени начала работы ij

		Сроки завершения последующих работ	
		Наиболее ранние	Наиболее поздние
Сроки завершения предшествующих работ	Наиболее ранние	Свободный резерв времени	Полный резерв времени
	Наиболее поздние	Независимый резерв времени 2-го порядка	Гарантированный резерв времени

1.4.1.2. Метод математического программирования для поиска критического пути

Введем дополнительные обозначения

T_{ij} – время окончания работы ij;

t_{ij} – время начала работы ij;

τ_{ij} – продолжительность работы ij;

$$T_{ij} = t_{ij} + \tau_{ij} .$$

Задачу поиска критического пути на графе, узлы с номерами от 0 до M (M — номер последнего узла), можно сформулировать как задачу линейного программирования:

$$\min \sum_{(ij)} t_{ij}$$

$$\begin{cases} t_{ij} \geq \tau_{li} + t_{li}, \quad i = \overline{1, M-1}; \quad l \in G^{-}(i), \\ t_{ij} \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

Ограничения задачи определяют последовательность выполнения работ, отображая структуру графа.

Для рассматриваемого примера (7) трансформируется в (8):

$$\min \sum_{(ij)} t_{ij}$$

$$\begin{cases} \tau_{14} \geq \tau_{01} + t_{01} = \tau_{01} + 2 \\ \tau_{15} \geq \tau_{01} + t_{01} = \tau_{01} + 2 \\ \tau_{23} \geq \tau_{02} + t_{02} = \tau_{02} + 1 \\ \tau_{34} \geq \tau_{23} + t_{23} = \tau_{23} + 3 \\ \tau_{34} \geq \tau_{03} + t_{03} = \tau_{03} + 1 \\ \tau_{45} \geq \tau_{14} + t_{14} = \tau_{14} + 2 \\ \tau_{45} \geq \tau_{04} + t_{04} = \tau_{04} + 2 \\ \tau_{45} \geq \tau_{34} + t_{34} = \tau_{34} + 1 \\ \tau_{ij} \geq 0 \end{cases} \tag{8}$$

Усложним исходную задачу:

Пусть m_{ij} – число ресурсов, отданных работе ij; Q_{ij} – трудоёмкость работы ij;

Тогда продолжительность τ_{ij} работы ij определяется так:

$$\tau_{ij} = \frac{Q_{ij}}{m_{ij}}, \text{ а } T_{ij} = \tau_{ij} + t_{ij} = t_{ij} + \frac{Q_{ij}}{m_{ij}}.$$

Отметим, что ресурсы отдаются работам в монопольное пользование. Освобожденные ресурсы не занимаются другими работами. Задача линейного программирования превращается в задачу нелинейного программирования поиска минимального суммарного числа используемых ресурсов:

$$\min \left\{ \sum_{(ij)} m_{ij} \right\}$$

$$\begin{cases} t_{ij} \geq \tau_{li} + \dfrac{Q_{li}}{m_{li}}, \quad i = \overline{1, M-1}; \quad l \in G^{-}(i), \\ t_{lM} + \dfrac{Q_{lM}}{m_{lM}} \leq T_{зад}, \quad l \in G^{-}(M) \\ t_{ij} \geq 0 \end{cases} \qquad (9)$$

1.5. Задача составления расписания с учетом распределения работ по ресурсам

Недостатком приведённых выше постановок задачи математического программирования является неучёт высвобождения ресурса-исполнителя после завершения назначенной ему работы.

Рассмотрим модель задачи математического программирования, свободную от этого недостатка. Подход к построению такой модели предложен в [1, стр. 141] и рассмотрен также в [2, стр. 198]. Будем считать, что ресурс каждого вида представлен в единственном экземпляре. Каждому ресурсу комплекса работ можно поставить в соответствие список работ, число r_k работ в списке и дополнительную характеристику $C_{r_k}^2$, смысл которой поясняется ниже (табл. 3).

Таблица 3.

Ресурс k	Список работ r_k, назначенных на ресурс k	r_k – число работ в списке	$C_{r_k}^2$ – число переменных $Y_{ij,lm,k}$
1	$\{ij\}$	r_1	
2	$\{ij\}$	r_2	
. . .	$\{ij\}$	r_j	
m	$\{ij\}$	r_m	

Помимо ограничений (7), обусловленных заданной логической последовательностью выполнения работ, вводятся ограничения, запрещающие единовременное занятие ресурса разными работами. С этой целью вводятся искусственные, так называемые альтернативные, переменные $Y_{ij,lm,k}$.

Предположим, что некоторый ресурс k предназначен для выполнения списка $\{ij\}$ работ, которые, как и ранее обозначаются двумя индексами. Пусть число работ в этом списке равно r_k. Тогда можно образовать $C_{r_k}^2$ пар работ списка, таких, что одна из этих работ должна обязательно начаться после завершения другой. При этом любая из пары работ, в принципе, может начаться первой. Для того чтобы отразить этот факт, для каждой такой пары работ вводится пара бинарных переменных $Y_{ij,lm,k}$ и $Y_{lm,ij,k}$, принимающих значения 0 или 1.

Если в паре работ $\{ij,\ lm\}$ сначала выполняется работа ij, а затем lm, то $Y_{ij,lm,k} = 1$, а $Y_{lm,ij,k} = 0$, в противном случае $Y_{ij,lm,k} = 0$, $Y_{lm,ij,k} = 1$.

Пусть τ_{ij}, как и ранее обозначает время выполнения работы ij. Заметим, что с учётом проведённого заранее назначения работ на ресурсы τ_{ij} есть время выполнения работы ij вполне определённым ресурсом.

Введём некоторую постоянную M, заведомо большую времени выполнения комплекса работ, например,

$|M| \gg \sum_{\{ij\}} t_{ij}$, тогда каждой паре работ $\{ij,\ lm\}$ можно поставить в соответствие 3 следующих ограничения:

$$\begin{cases} (M + \tau_{lm})Y_{ij,lm,k} + (t_{ij} - t_{lm}) \geq \tau_{lm} \quad , \\ (M + \tau_{ij})Y_{lm,ij,k} + (t_{lm} - t_{ij}) \geq \tau_{ij} \quad , \\ Y_{ij,lm,k} + Y_{lm,ij,k} = 1 \end{cases} \tag{10}$$

Ограничения (10) выполняются при любом порядке следования работ, то есть при любых допустимых значениях $Y_{ij,lm,k}$ и $Y_{lm,ij,k}$.

Ограничения (10) обеспечивают выполнение условия

$\left((t_{ij} - t_{lm}) \geq \tau_{lm}\right) \wedge \left((t_{lm} - t_{ij}) \geq \tau_{ij}\right) = 1$, означающего невозможность наложения процессов выполнения работ ij и lm во времени.

При $Y_{ij,lm} = 0$ первое ограничение системы уравнений (10) приобретает вид $(t_{ij} - t_{lm}) \geq \tau_{lm}$, а второе выполняется как тривиальное, при $Y_{ij,lm} = 1$, то есть при $Y_{lm,ij} = 0$ второе ограничение приобретает вид $(t_{lm} - t_{ij}) \geq \tau_{ij}$, а первое выполняется как тривиальное.

Рассмотрим пример, представленный на рис 1, со следующим распределением работ по ресурсам. Работам 01, 02, 03, 04 отводится ресурс 1, работам 14 и 23 – ресурс 2, работам 34, 15, 45 – ресурс 3.

Для этого примера система ограничений (8) должна быть дополнена 30 ограничениями, $30 = 3(C_4^2 + C_2^2 + C_3^2) = 3(6+1+3)$. Приведём часть из них – 6 ограничений – для ресурса 3.

$$\begin{cases} (M + t_{15})Y_{34,15,3} + (t_{34} - t_{15}) \geq \tau_{15} \\ (M + t_{34})Y_{15,34,3} + (t_{15} - t_{34}) \geq \tau_{34} \\ (M + t_{45})Y_{34,45,3} + (t_{34} - t_{45}) \geq \tau_{45} \\ (M + t_{34})Y_{45,34,3} + (t_{45} - t_{34}) \geq \tau_{34} \\ (M + t_{45})Y_{15,45,3} + (t_{15} - t_{45}) \geq \tau_{45} \\ (M + t_{15})Y_{45,15,3} + (t_{45} - t_{34}) \geq \tau_{15} \end{cases} \qquad (11)$$

Формально эта задача может быть решена методом целочисленного программирования.

Более эффективным методом решения подобных задач являются так называемые комбинаторные методы.

Примечание. *Данная модель не применима для случая наличия нескольких экземпляров однотипных ресурсов.*

1.6. Частные постановки задачи построения расписания

Пример частной задачи – задача Джонсона: обработка n деталей на m станках при следующих ограничениях:

- Исключается совмещенная обработка деталей на одном станке
- Порядок обработки деталей (порядок следования операций) одинаковый
- Временные затраты при перемещении деталей от станка к станку отсутствуют

Число станков m означает, что работа по изготовлению детали состоит из m операций: обработка сначала на первом станке, затем – на втором, и в самом конце на m-м станке.

При $m = 2$ задача Джонсона получает строгое решение.

Алгоритм решения задачи Джонсона представлен на рис. 3.

Используются следующие обозначения:

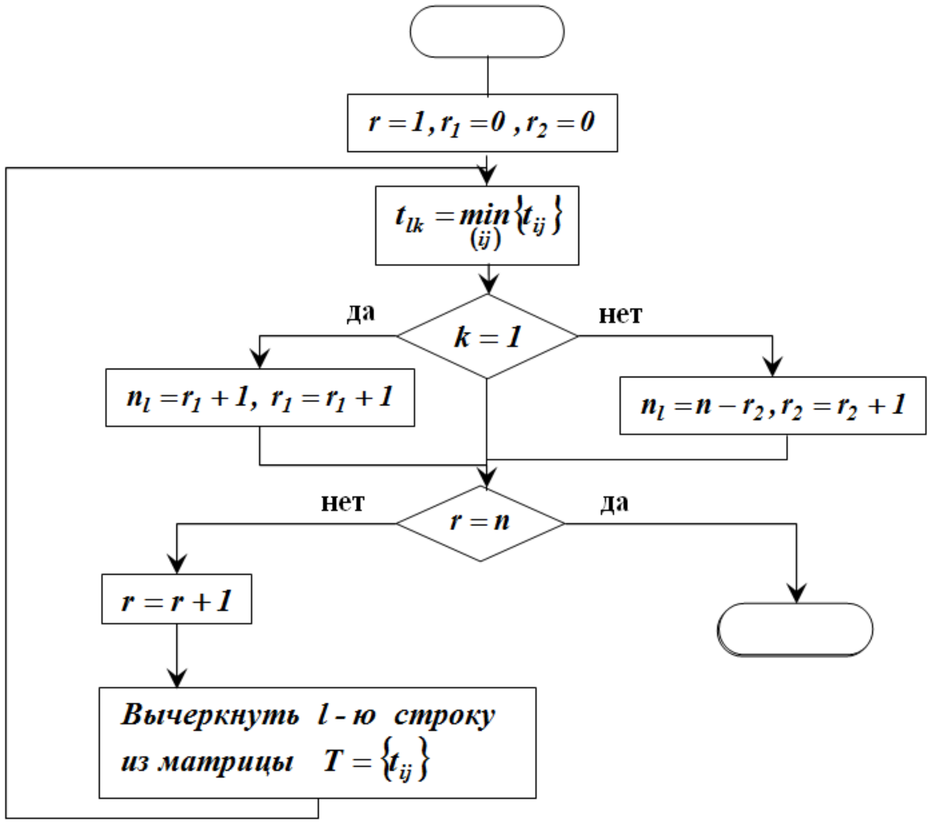


Рис. 3

$T = \{t_{ij}\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = 1,2$ – матрица времен выполнения операций,

n_l – порядок следования l-й работы, найденный в результате выполнения алгоритма.

Пусть $T = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 8 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, тогда согласно алгоритму будет получен следующий порядок выполнения работ (табл. 4).

Таблица 4

№ работы l	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Порядок выполнения n_l	**4**	**1**	**3**	**1**	**5**

Временная диаграмма выполнения операций в формате диаграммы Ганта представлена в табл. 5. Заштрихованные области соответствуют простоям машины 2, размеры столбцов таблицы пропорциональны временам выполнения операций.

Таблица 5

<table>
<tr><td>Машина 1</td><td colspan="2">4</td><td>3</td><td colspan="2">1</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>Машина 2</td><td>2</td><td></td><td>4</td><td>3</td><td></td><td>1</td><td>5</td></tr>
</table>

Отметим, что для составления расписания достаточно найти порядок выполнения работ на первой машине.

1.7. Вероятностные постановки задачи построения расписания

1.7.1. Слабый разброс времён выполнения работ

В этом случае следует рассматривать две постановки задачи:

1. Разброс значений времён выполнения относительно невелик и состав критического пути на графе работ остаётся неизменным.
2. Разброс значений времён выполнения работ значителен и может приводить к изменению состава критического пути.

В первом случае, математическое ожидание времени выполнения комплекса работ равно сумме математических ожиданий работ, лежащих на единственном критическом пути:

$M(T_\Sigma) = \sum_{ij \in critical\ path} t_{ij}$. Если указанные времена суть независимые случайные величины, то дисперсия $D(T_\Sigma)$ определяется по теореме о числовых характеристиках случайных величин:

$$D(T_\Sigma) = \sigma_{T_\Sigma}{}^2 = \sum_{ij \in critical\ path} D(t_{ij}).$$

По центральной предельной теореме закон распределения суммы значительного числа случайных соизмеримых величин близок к нормальному. Поэтому, зная математическое ожидание и дисперсию, можно найти вероятность принадлежности времени выполнения комплекса работ некоторому заданному интервалу.

$$P\{\left| T_\Sigma - M(T_\Sigma) \right| \le \varepsilon\} = \frac{1}{\sigma_{T_\Sigma}\sqrt{2\pi}} \int_{T_\Sigma-\varepsilon}^{T_\Sigma+\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{T_\Sigma - M(T_\Sigma)}{\sigma_{T_\Sigma}}\right)^2} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{D(T_\Sigma)}}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – табулированный интеграл вероятности (функция Лапласа).

В том случае, если критических путей несколько, можно использовать более сложную вероятностную схему для расчёта подобной вероятности.

Для примера, представленного выше (рис. 1), граф содержит 2 критических пути, поэтому вероятность гарантированного завершения комплекса работ рассчитывается по следующей формуле:

$$P\{T_\Sigma \le T_{зад}\} = [1 - P\{T_{crit1} > T_{зад}\}][1 - P\{T_{crit2} > T_{зад}\}],$$ где

T_{crit1} и T_{crit2} – длины критических путей, а вероятности $P\{T_{crit1} > T_{зад}\}$ и $P\{T_{crit2} > T_{зад}\}$ также как и ранее определяются в предположении нормального закона распределения T_{crit1} и T_{crit2} с использованием функции Лапласа.

Дополним данными о значениях дисперсий времён выполнения работ упомянутую выше задачу построения расписания (рис. 1), представив их в табл. 6. Считаем, что длительности работ распределены по закону равномерной плотности.

Таблица 6

Работа	*Длительность работы/ мин/ макс*	*Дисперсия длительности/СКО/пол_ширины*
01	*2 0,77 3,23*	*0,5 / 0,71 / 1,23*
02	*1 0,05 1,95*	*0,3 / 0,55 / 0,95*
03	*1 0,05 1,95*	*0,3 / 0,55 / 0,95*
04	*2 0,77 3,23*	*0,5 / 0,71 / 1,23*
14	*2 0,77 3,23*	*0,5 / 0,71 / 1,23*
23	*3 1,55 4,45*	*0,7 / 0,84 / 1,45*
15	*4 2,27 5,73*	*1 / 1 / 1,73*
34	*1 0,05 1,95*	*0,3 / 0,55 / 0,95*
45	*1 0,05 1,95*	*0,3 / 0,55 / 0,95*

Тогда $D\{T_{crit1}\} = 0{,}5 + 1 = 1{,}5$, а

$$D\{T_{crit2}\} = 0{,}3 + 0{,}7 + 0{,}3 + 0{,}3 = 1{,}6 .$$

Математическое ожидание времени выполнения комплекса работ равно:

$$T_{\Sigma} = T_{crit1} = T_{crit2} = 6 .$$

Найдём вероятность того, что оно не превысит значения, равного 8.

$$P\{T_{crit1} > 8\} = 0{,}5 - \Phi(\frac{8-6}{\sqrt{1{,}5}}) \approx 0{,}5 - \Phi(1{,}633) = 0{,}5 - 0{,}449 = 0{,}051$$

$$P\{T_{crit2} > 8\} = 0{,}5 - \Phi(\frac{8-6}{\sqrt{1{,}6}}) \approx 0{,}5 - \Phi(1{,}581) = 0{,}5 - 0{,}443 = 0{,}057$$

Тогда $P\{ T_{\Sigma} \le 8 \} = [1-0{,}051]\,[1-0{,}057] = 0{,}895$

1.7.2. Разброс времен выполнения работ значителен — возможно изменение состава критического пути

В этом случае конструктивным методом поиска времени выполнения комплекса работ является имитационное моделирование, реализуемое по следующей схеме:

1. Обращение к датчикам случайных величин и генерация исходных данных $\left\{ t_{ij} \right\}$

2. Определение длины критического пути в соответствии с детерминированными алгоритмами

3. Повторение п.1 и 2, накопление и обработка статистики. Результатом моделирования являются статистические временные оценки

1.8. Моделирование расписания

Аналитическое решение задачи построения оптимального расписания характеризуется сложностью и трудоемкостью, особенно в условиях действия случайных факторов.

Имитационное моделирование является инструментом управления расписанием. Обычно используется эвристический подход, предполагающий выбор некоторого наилучшего правила составления расписания из ряда предложенных эвристических правил. Название «эвристический» означает, что данное правило не претендует на строгое обоснование.

Исходные предпосылки моделирования расписания

1. Любая из работ начинается всегда, если

- Выполнены все работы, от которых она зависит
- Имеется свободный ресурс-исполнитель

2. Все работы следует объединить в две группы:

- Неконкурирующие работы (не создающие конфликта при назначении на ресурс)

- Конкурирующие работы (претендующие на общий ресурс)

Эвристические правила назначения работ на ресурсы:

1. $\min\limits_{(i)}\left\{ t_{ij} \right\}$ — «короткие» работы в первую очередь.

2. $\max\limits_{(i)}\left\{ t_{ij} \right\}$ — «длинные» работы в первую очередь.

3. $\min\limits_{(i)}\left\{ rez_{ij} \right\}$ — работы с минимальным резервом в первую очередь.

4. $\min\limits_{(i)}\left\{ lev_{ij} \right\}$ — работы, принадлежащие начальным уровням в первую очередь.

1.8.1. Смысл и процедура присвоения уровней работам

С позиции здравого смысла в первую очередь следует загружать ресурсы работами, сдерживающими наибольшее число невыполненных работ. Для реализации этого подхода к назначению работ на ресурсы каждой работе следует поставить в соответствие формальный параметр «уровень».

Уровень работы ij равен уровню события j. Условием наступления события j является завершение всех работ-дуг ij, входящих в событие-узел j. Поэтому уровень события j определяется соотношением уровней всех событий узлов $i \in G^{-}(j)$ графа работ. Наивысший (нулевой) уровень принадлежит событию **0**, поскольку оно изначально является совершённым (наступившим).

Формальное правило присвоения уровня событию следующее:

Уровень события j (узла) на единицу больше максимального из уровней узлов $i \in G^{-}(j)$, (см. рис. 1 графа логической последовательности работ комплекса). В табл. 6 приведены уровни событий для примера на рис.1. В табл. 7 — уровни работ.

Таблица 6.

Событие j	$i \in G^{-}(j)$	**Уровень события**
0	нет	0
1	0	1
2	0	1
3	0, 2	2
4	0, 1, 3	3
5	4, 1	4

Таблица 7.

Обозначение работы	**Уровень работы**
01	1
02	1
03	2
04	3
14	3
15	4
23	2
34	3
45	4

6. Комбинация эвристических правил

Эвристические правила, в том числе и перечисленные выше могут использоваться в комбинации. Например, сначала формируется подмножество работ с минимальных уровнем, затем осуществляется выбор работы с минимальным резервом времени в этом подмножестве.

7. Вероятностные стратегии

Рассмотрим вероятностный вариант решающего правила SJF (shortest job first) то есть «короткие работы вперед». Тогда для заданного набора работ $\{ij\}$ вероятность P_{ij} назначения работы ij на выполнение определяется по очевидной формуле

$$P_{ij} = \frac{\frac{1}{t_{ij}}}{\sum\limits_{(ij)} \frac{1}{t_{ij}}}, \quad \sum_{(ij)} P_{ij} = 1.$$

1.8.2. Алгоритм моделирования расписания

Перейдем к описанию алгоритма моделирования расписания.

Условные обозначения алгоритма и основные понятия

T — системное время.

m — число ресурсов, $s = \overline{1,\ m}$.

$\Omega(T)$ — список возможных на момент T работ $\{ij\}$, где

ij — обозначение работы (дуги ij, соединяющей работы i и j: $i \to j$).

Возможные работы — работы, выполнение которых к данному моменту T системного времени возможно с учётом их логической последовательности.

Возможная работа-дуга исходит из осуществлённого события-узла.

Осуществленное событие — событие, состоящее в том, что все дуги-работы, входящие в событие, выполнены.

$\Omega_p(T)$ — ранжированный список возможных работ. _Ранжировка осуществляется в соответствии с принятым эвристическим правилом._

$N(T)$ — список выполняемых на момент времени T работ: начатых, но не завершенных к моменту $\boldsymbol{T}$

$\boldsymbol{N(T) = (n_1,\ n_2,\ \dots, n_l,\ \dots, n_m)}$, где

$$n_l = \begin{cases} <\textit{пусто}>, & \textit{ресурс } l \textit{ не занят;} \\ ij & , \textit{ресурс } l \textit{ назначен на работу } ij\,. \end{cases}$$

$\boldsymbol{Z(T)}$ — список времён освобождения ресурсов на момент времени $\boldsymbol{T}$

$\boldsymbol{Z(T) = (z_1,\ z_2,\ \dots, z_l,\ \dots, z_m)}$, где,

$$z_l = \begin{cases} <\textit{пусто}>, & \textit{ресурс } l \textit{ не занят;} \\ T^{l}_{осв} - \textit{абсолютный момент текущего освобождения ресурса } l \end{cases}$$

$\boldsymbol{B(T)}$ — список выполненных на момент времени $\boldsymbol{T}$ работ

$\boldsymbol{I}$ — список всех событий

$\boldsymbol{I(T)}$ — список осуществлённых событий на момент времени $\boldsymbol{T}$

$\boldsymbol{IJ}$ — множество дуг–работ, исходящих из осуществленных событий

3 типа списков для каждого ресурса $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s = \overline{1, m}}$:

$$r_{sJOB} - \left\{ \begin{matrix} \textit{список всех работ,} \\ \textit{выполненных ресурсом } s. \end{matrix} \right\};$$

$$r_{sSTART} - \left\{ \begin{matrix} \textit{список моментов начала всех работ,} \\ \textit{выполненных ресурсом } s. \end{matrix} \right\};$$

$$r_{sFINISH} - \left\{ \begin{matrix} \textit{список моментов окончания всех работ,} \\ \textit{выполненных ресурсом } s. \end{matrix} \right\}.$$

Начальные условия:

$\boldsymbol{T = 0}$

$\boldsymbol{\Omega(0)}$ — множество возможных работ задано

$N(0) = (<пусто>, <пусто>, \ldots, <пусто>,)$.

$Z(0) = N(0)$ (списки имеют одинаковое число элементов)

$B(0) = <пустой\ \ список>$

$r_{sJOB} = r_{sSTART} = r_{sFINISH} = <пустой\ \ список>$.

Шаги стандартного i-го цикла построения расписания

Шаг 1

Обращение к Диспетчеру — определение наиболее раннего текущего момента освобождения ресурса z_l, определение наиболее раннего момента наступления события в процессах освобождения ресурсов и номера s освободившегося ресурса:

$$z_s = \min_{(l)} \{z_l\}, \quad l = \overline{1,\ m}$$ и

определение текущего значения системного времени для i-го цикла:

$$T_i = z_s.$$

Шаг 2

Коррекция списка B выполненных работ:

В списке N найти работу ij, назначенную на ресурс s, и добавить работу ij в список B

Коррекция списка N выполняемых работ:

$$присвоить\ \ s-му\ \ элементу\ \ списка\ \ N\ \ значение <пусто>$$

$$n_s = <пусто>$$

Коррекция списка Z времён освобождения ресурсов:

$$присвоить\ \ s-му\ \ элементу\ \ списка\ \ Z\ \ значение <пусто>$$

$$z_s = <пусто>$$

Коррекция списка $\boldsymbol{I(T)}$ осуществленных событий: добавить в список событие $\boldsymbol{i}$, если выполнены все работы $\boldsymbol{ij}$.

Формирование множества $\boldsymbol{IJ}$ дуг-работ, исходящих из осуществленных событий.

Если $\boldsymbol{I(T)} = \boldsymbol{I}$, переход к **шагу 11**

Шаг 3

Коррекция списка $\boldsymbol{\Omega}$ возможных работ: $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{IJ} \setminus (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{N})$.

<u>Комментарий</u>: Множество $\boldsymbol{IJ}$ есть множество дуг, исходящих из осуществлённых событий. $\boldsymbol{\Omega}$ есть разность множеств $\boldsymbol{IJ}$ и суммы множеств $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{N}$.

Шаг 4

Ранжировка списка возможных работ в соответствии с принятым эвристическим правилом:

$$\boldsymbol{\Omega} \xrightarrow{\textit{ранжировка}} \boldsymbol{\Omega_p}$$

<u>Комментарий: </u>В случае, если применение выбранного эвристического правила не позволяет однозначно определить позицию работы в множестве $\boldsymbol{\Omega_p}$, следует

применять дополнительно четвертое эвристическое правило (работы, принадлежащие начальным уровням, в первую очередь)

Шаг 5

Назначение первой в списке $\boldsymbol{\Omega_p}$ работы $\boldsymbol{ij(1)}$ на ресурс $\boldsymbol{s}$

Шаг 6

Коррекция списка $\boldsymbol{r_{sJOB}}$: добавить работу $\boldsymbol{ij(1)}$ в список

Шаг 7

Коррекция списка $\boldsymbol{N}$:

$$\boldsymbol{n_s = ij(1)}$$

Коррекция списка r_{sSTART} : добавить значение T системного времени в список.

Шаг 8

Коррекция списка Z :

$$z_s = T + t_{ij(1)}.$$

Шаг 9

Коррекция списка $r_{sFINISH}$: добавить значение $z_s = T + t_{ij(1)}$ в список.

Шаг 10 Идти к Шагу 1

Шаг 11

Конец

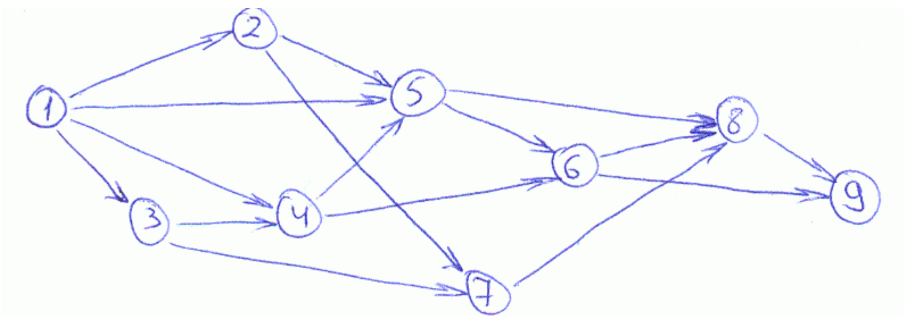
Алгоритм позволяет получить данные, обеспечивающие построение расписания (графика) выполнения работ комплекса, например, в форме диаграммы Ганта. Для этого достаточно располагать тремя наборами списков для каждого ресурса:

$$r_{sJOB}, \quad r_{sSTART}, \quad r_{sFINISH}.$$

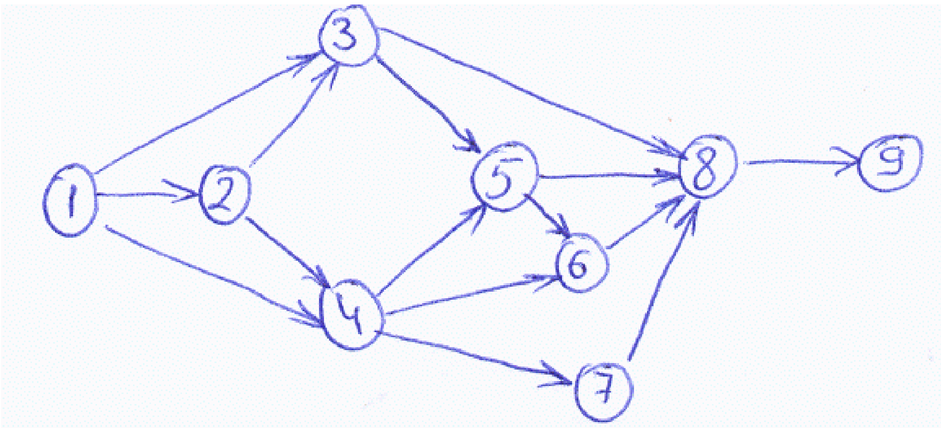
Кроме того, эти же списки позволяют определить коэффициенты загрузки ресурсов.

Приложение. Задания по теории расписаний и сетевому планированию

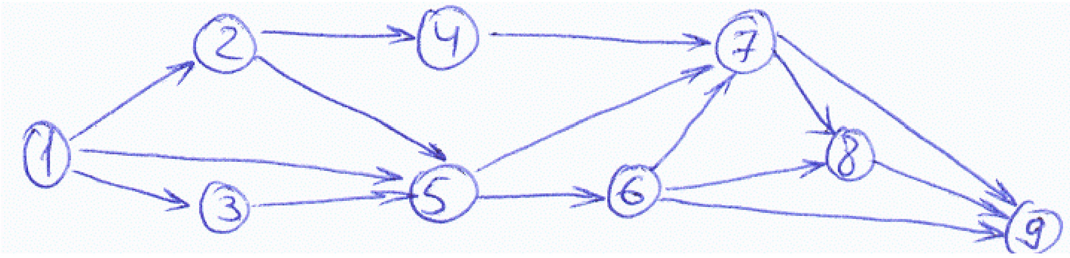
Вариант 1



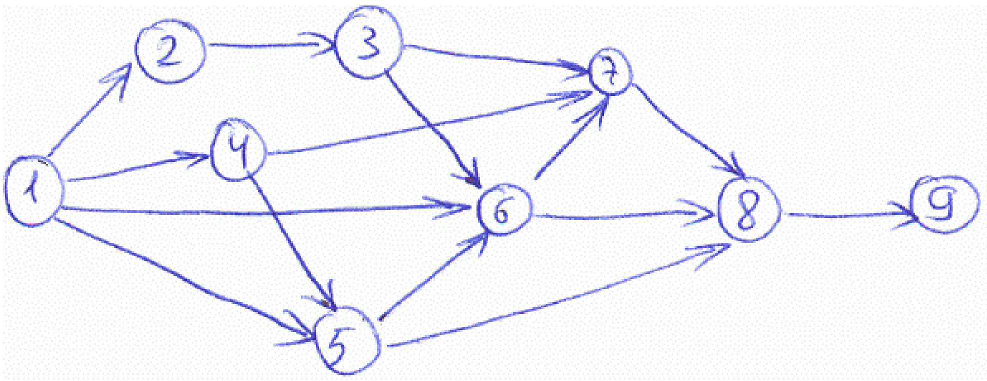
Вариант 2



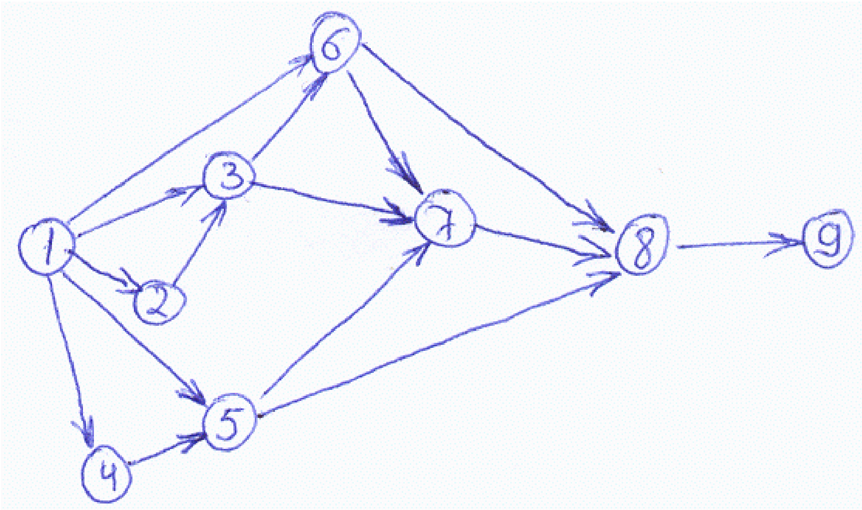
Вариант 3



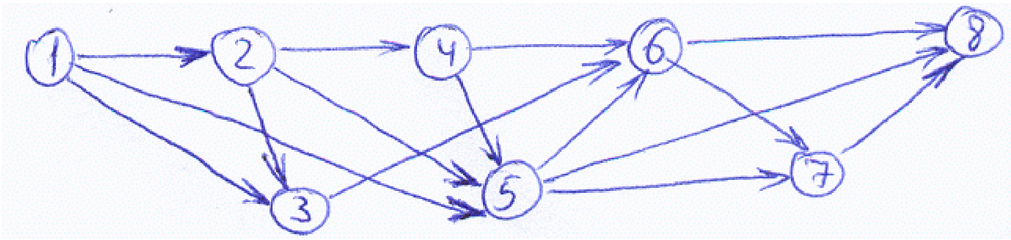
Вариант 4



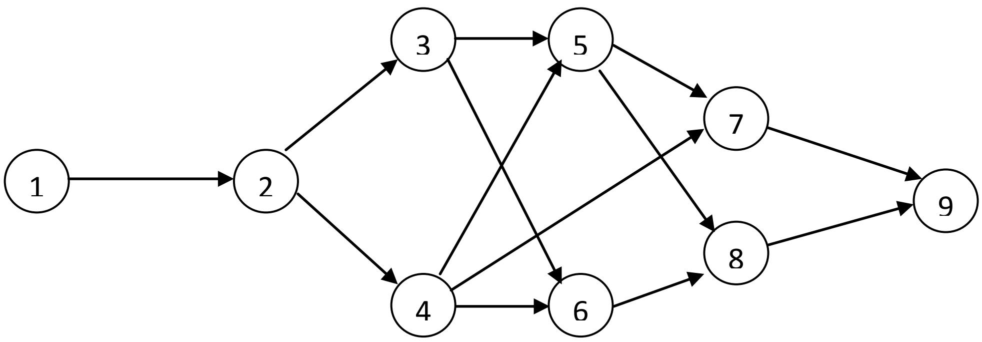
Вариант 5



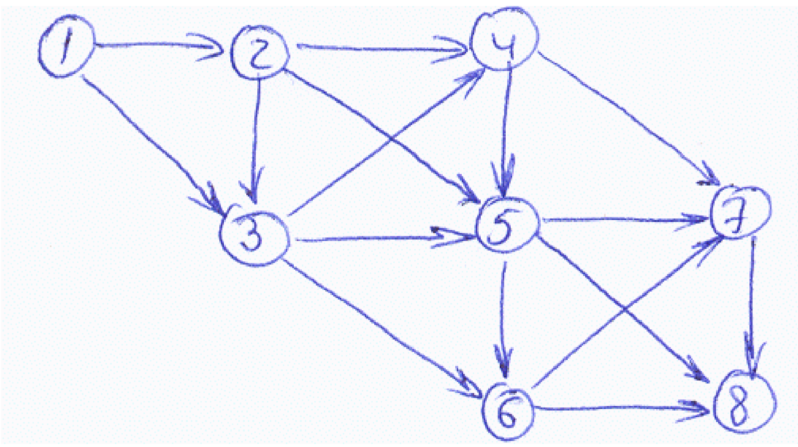
Вариант 6



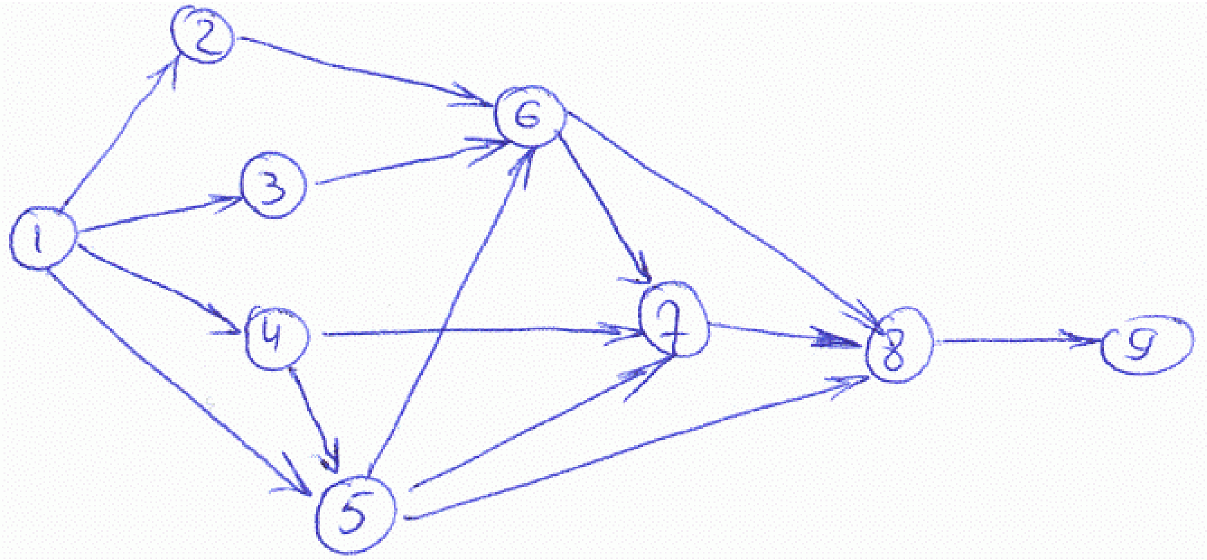
Вариант 7



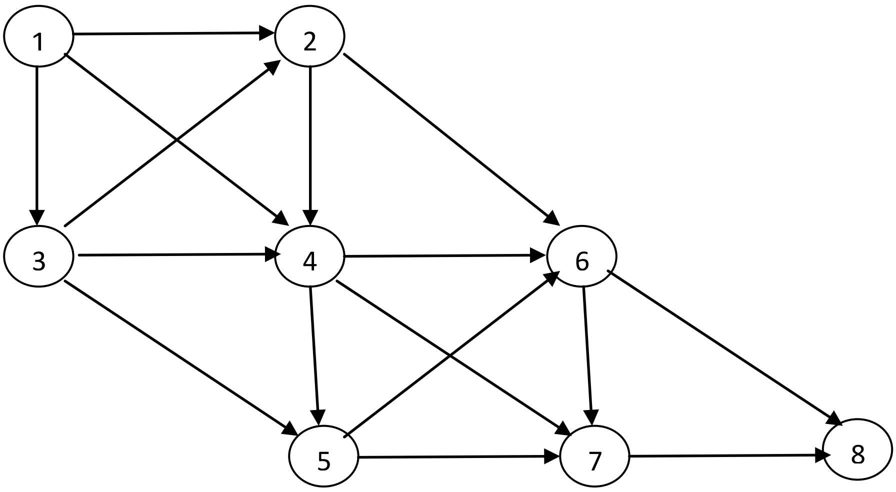
Вариант 8



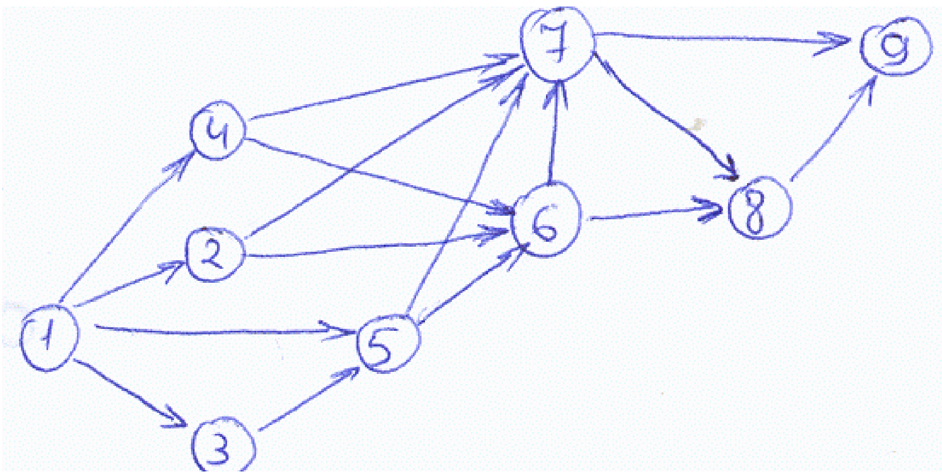
Вариант 9



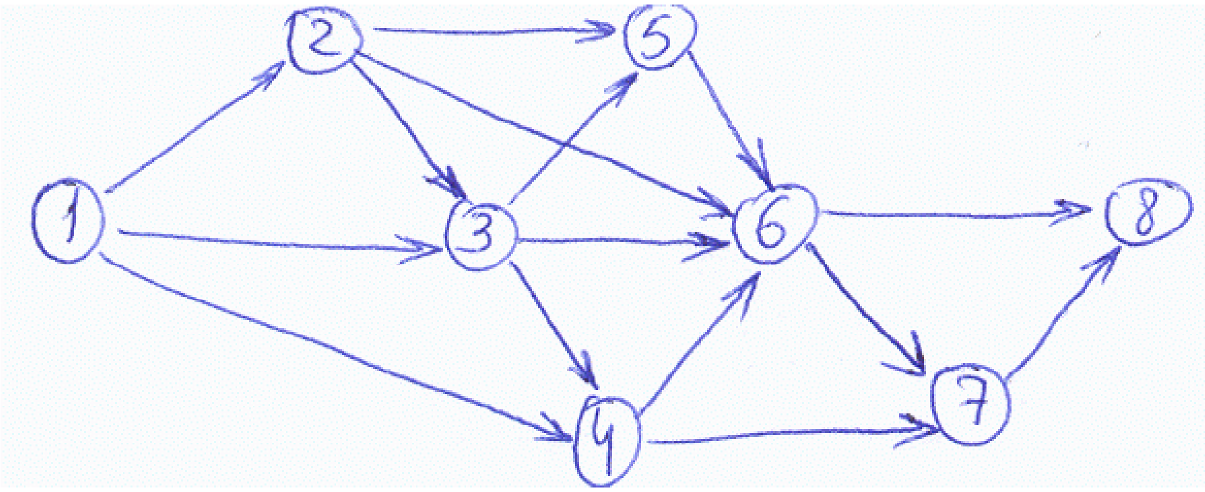
Вариант 10



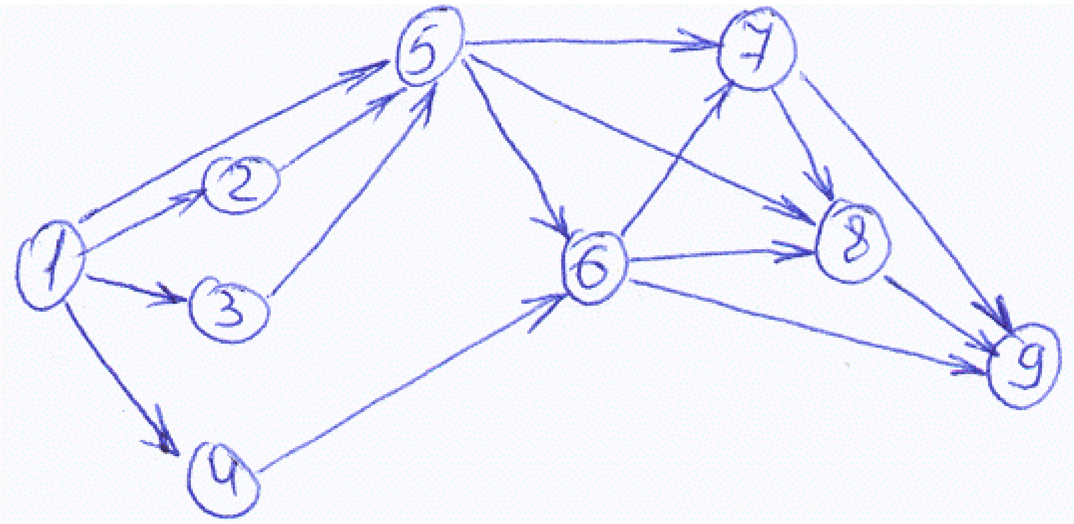
Вариант 11



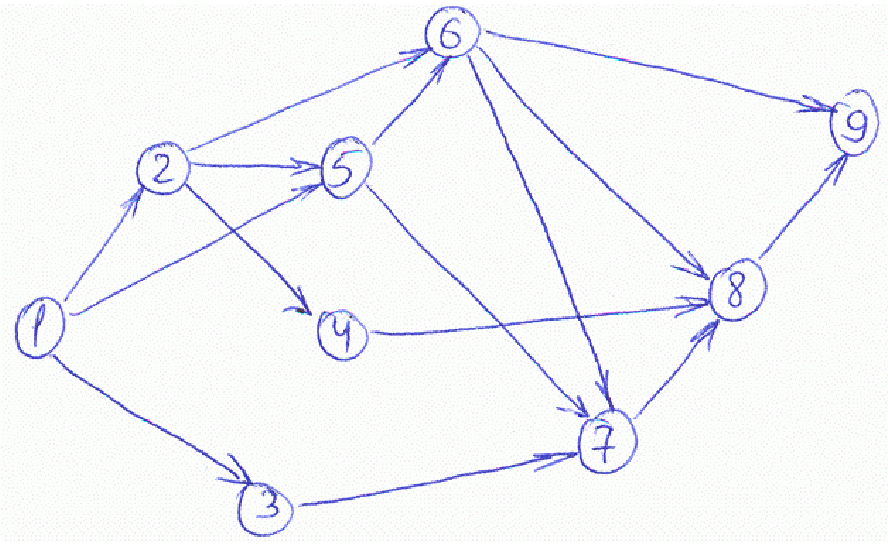
Вариант 12



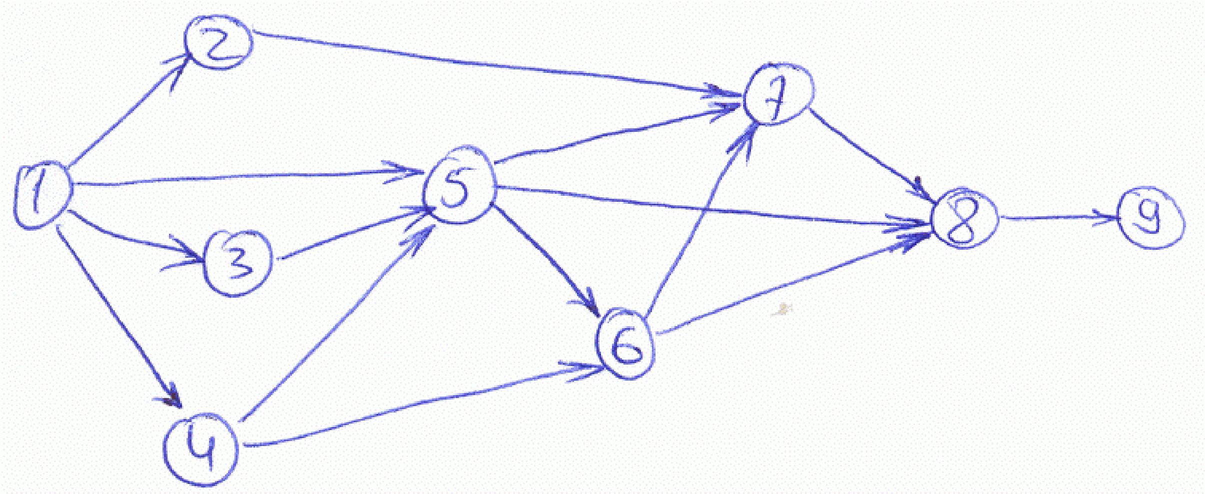
Вариант 13



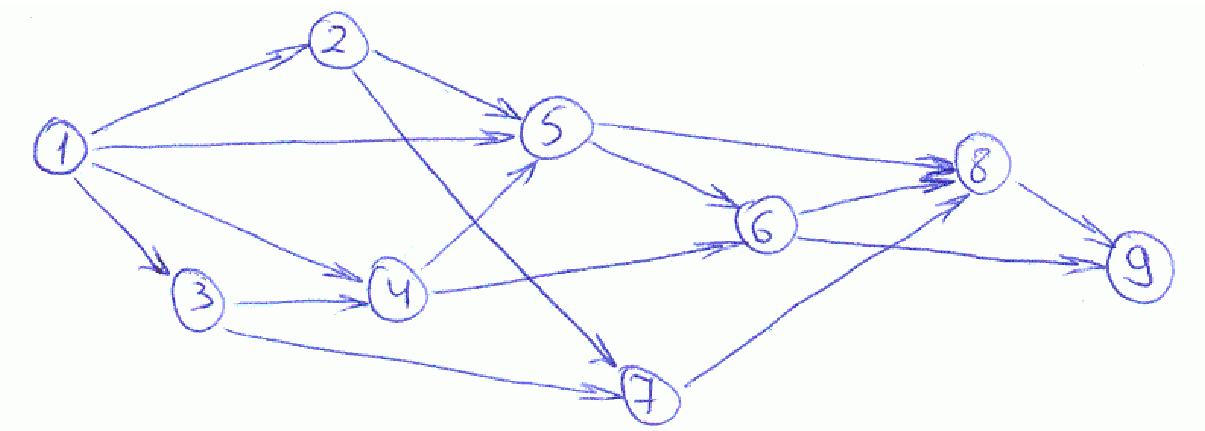
Вариант 14



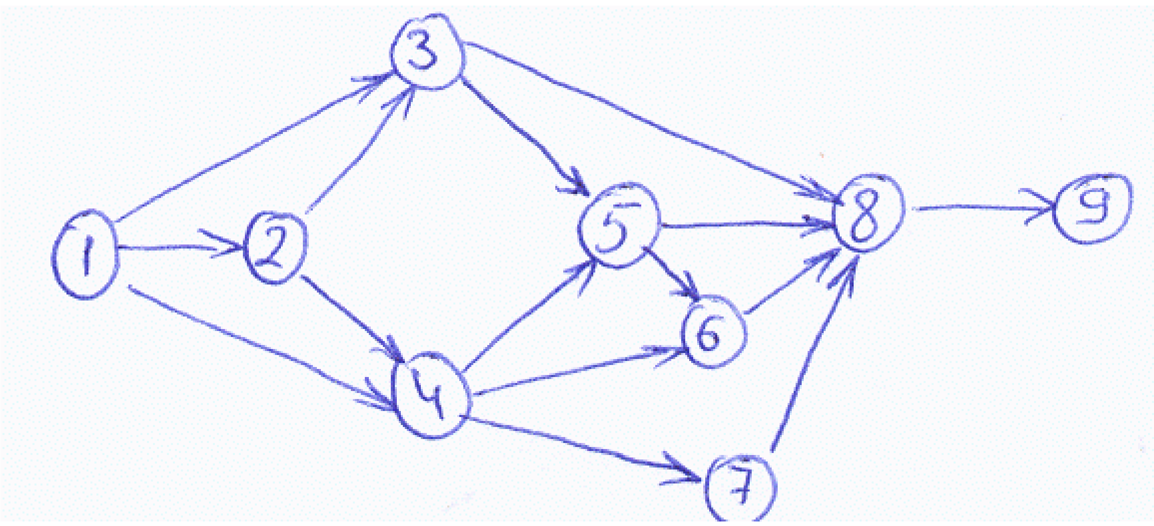
Вариант 15



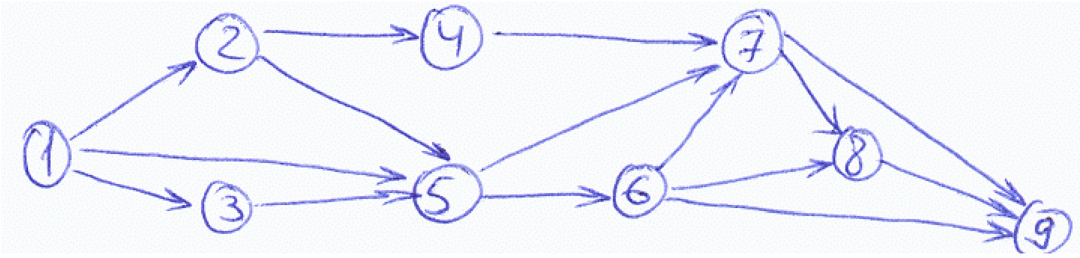
Вариант 16



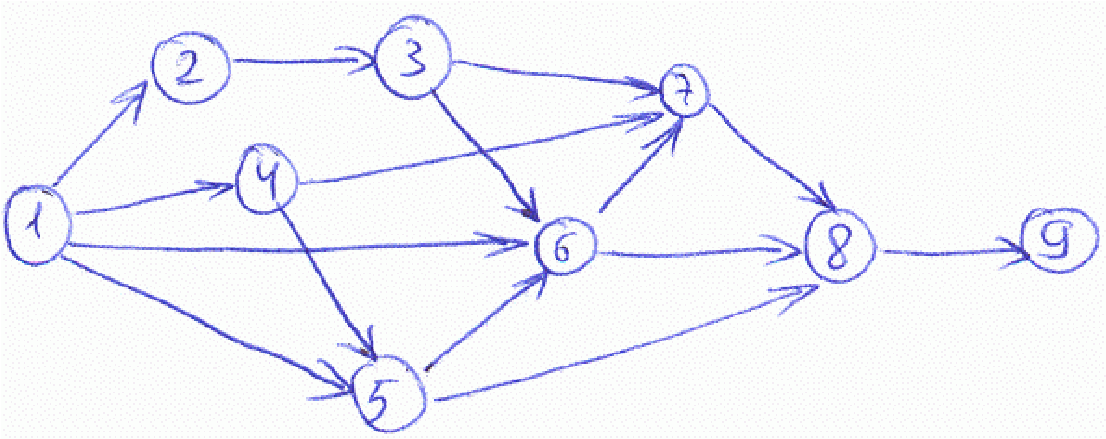
Вариант 17



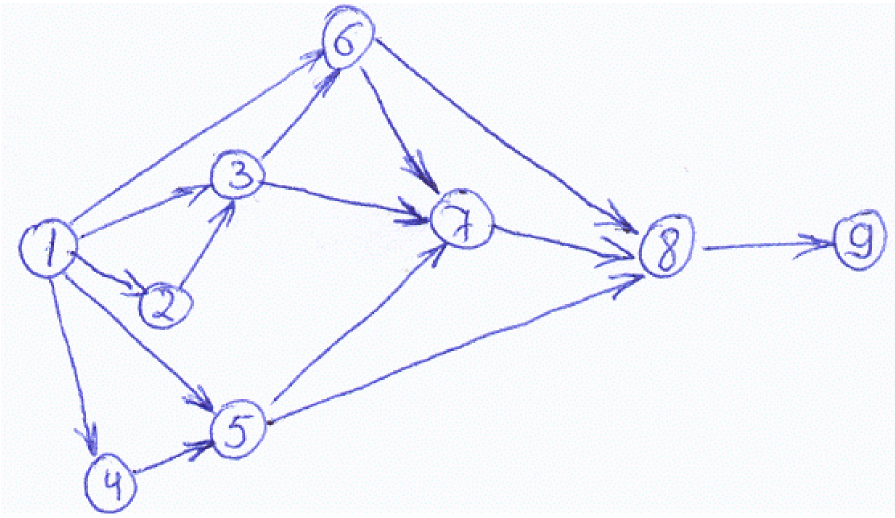
Вариант 18



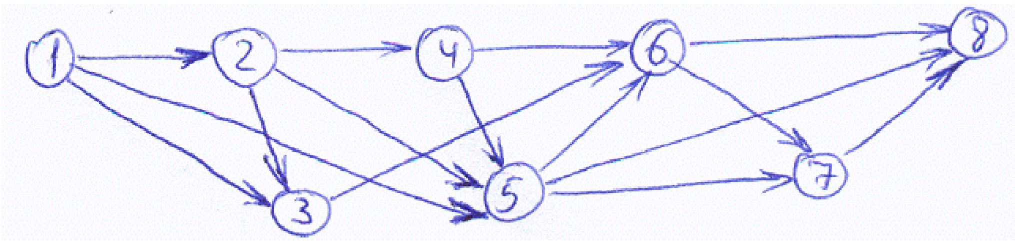
Вариант 19



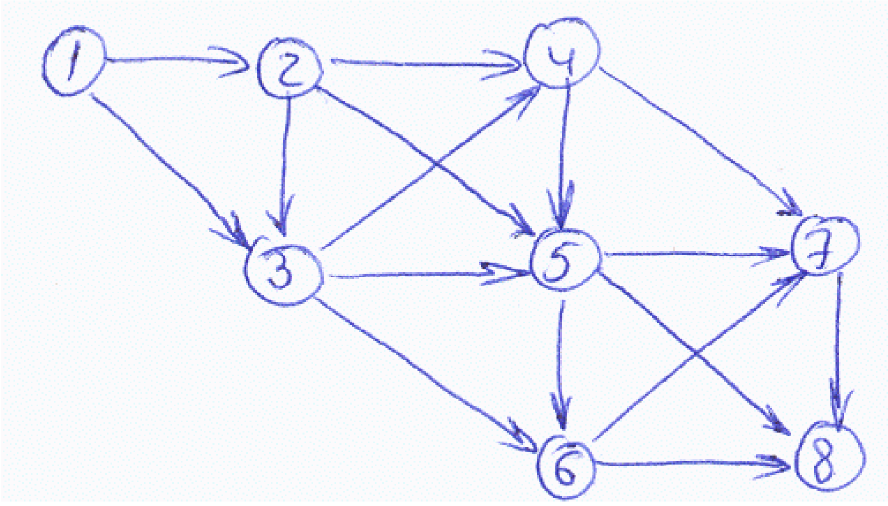
Вариант 20



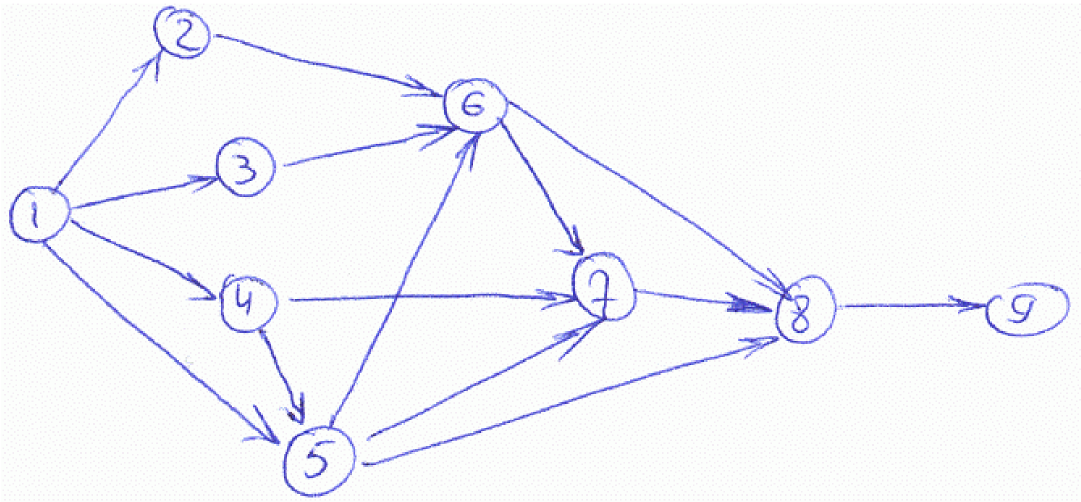
Вариант 21



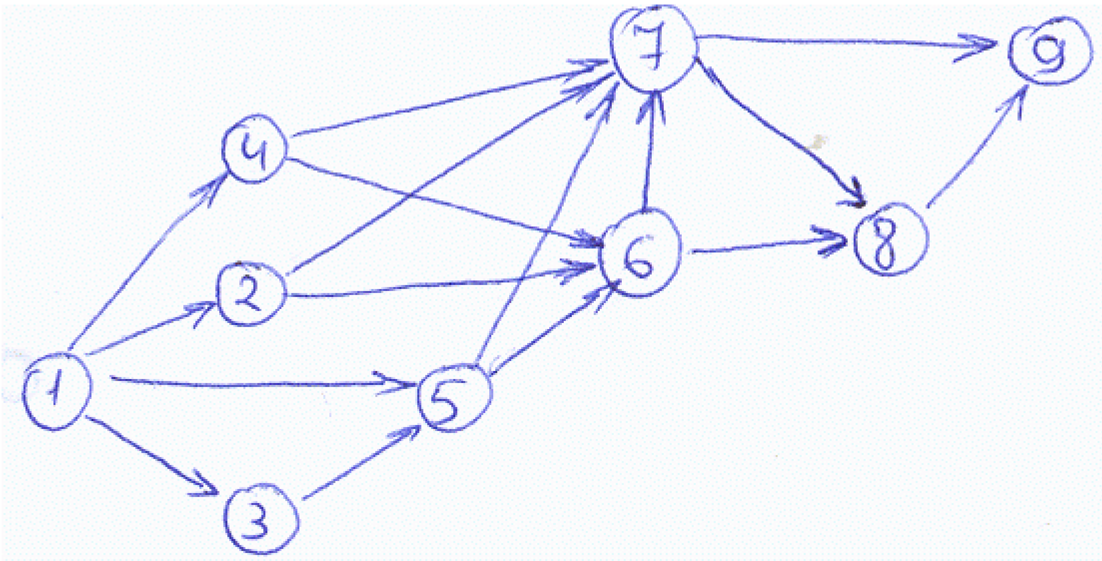
Вариант 22



Вариант 23



Вариант 24



Длительности работ, длины дуг нк, заданы в табл. П1 для столбцов-вариантов заданий.

Таблица П.1

н	к	Вариант																							
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
1	**2**	3	6	7	4	6	7	6	6	5	2	4	7	9	5	8	5	8	9	6	8	9	8	7	6
1	**3**	5	7	7		4	6		7	4	3	4	9	9	9	5	7	9	9		6	8	9	6	6
1	**4**	3	4		3	5				4	8	4	6	9		6	5	6		5	7			6	6
1	**5**	6		4	4	5	3			7		5		5	6	5	8		6	6	7	5		9	7
1	**6**				3	4														5	6				
2	**3**		6		5	5	7	5	4		5		5					8		7	7	9	6		
2	**4**		4	7			4	3	3		2				5			6	9			6	5		
2	**5**	4		4			3		7		4		8	6	8		6		6			5	9		
2	**6**									6		7	7		7									8	9
2	**7**	5										3				7	7								4
3	**4**	6							6		2		9				8						8		
3	**5**		5	5				11	3			6	9	7		8		7	7				5		8
3	**6**				3	3	4	10	6	7	4		6							5	5	6	8	8	
3	**7**	6			5	3		17							8		8			7	4				
3	**8**		5															7							
4	**5**	6	6		7	5	5	4	5	6	7					5	8	8		9	7	7	6	8	
4	**6**	3	4				4	4			6	7	8	5		8	5	6				5			9
4	**7**		6	5	6				3	5	5	4	7					8	7	7			5	7	6
4	**8**														5										
5	**6**	3	4	7	3		7		5	5	4	3	8	8	9	9	4	5	8	5		9	7	7	5
5	**7**			4		3	5	8	5	5	3	4		8	7	5			6		5	7	7	7	6
5	**8**	3	3		5	7	7	5	7	4				9		6	5	5		7	9	9	9	6	
6	**7**			5	7	7	5		3	5	1	7	7	5	6	6			7	9	9	7	5	7	9
6	**8**	7	5	6	7	3	7	3	7	5	8	3	9	8	6	7	9	7	8	9	5	9	9	7	5
6	**9**	3		7										9	7		5		9						
7	**8**	7	7	7	5	7	6		6	3	9	7	5	9	9	8	9	9	9	7	9	8	8	5	9
7	**9**			3				2				4		7					5						6
8	**9**	6	4	3	6	7		7		7		4		9	9	9	8	6	5	8	9			9	6

Кодировка задания

Первое число — номер варианта. Далее через запятую приводятся параметры задания: число исполнителей и номер решающего правила.

Например, 12, 3, 1 — вариант 12, 3 исполнителя, решающее правило №1

Параметры задания

1. Число исполнителей. Определяет число одновременно исполняемых заданий при имитационном моделировании расписания.

2. Решающее правило. Определяет выбор работ, назначаемых на свободных исполнителей из числа возможных работ. Каждому заданию соответствует одно из следующих правил:

1. Короткие работы — вперед
2. Длинные работы — вперед
3. Работы с минимальным резервом — вперед
4. Работы на младших (наиболее близких к началу) уровнях — вперед + Короткие работы — вперед (для работ на одинаковых уровнях)

Разделы задания

1. Определение наиболее ранних моментов начала работ с использованием метода математического программирования.

Составить задачу линейного программирования для определения наиболее ранних моментов начала работ. «Погрузить» ее в МАТЛАБ, получить решение. Определить по нему время выполнения комплекса работ.

2. Считать, что вместо длительностей работ Вам заданы трудоемкости работ. Длительность равна трудоемкость/интенсивность выполнения работы. Определить наиболее ранние моменты начала работ и назначенные работам интенсивности их выполнения при условии, что суммарная интенсивность не превышает 75% общего числа выполняемых работ.

Для этого составить задачу математического программирования и решить ее в Matlab, подобрав для этого подходящую функцию из оптимизационного тулбокса.

3. Самостоятельно распределить работы между заданным числом исполнителей и сформулировать задачу математического программирования с бинарными индикаторными переменными $\boldsymbol{Y}_{ij,lm,k}$. Определить число ограничений в этой задаче и дать формулировку части ограничений с бинарными переменными.

3.1. Изменить формулировку задачи так, чтобы число бинарных переменных не превышало 10. Решить полученную задачу с использованием функции intlinprog Matlab или другого математического пакета. Определить мощность множества бинарных переменных задачи и дать содержательную интерпретацию полученному решению.

4. Найти характеристики t_i^*, t_i^{**} и r_{ij} расписания выполнения комплекса работ с использованием метода динамического программирования. Привести соответствующие уравнения Беллмана. Определить критические пути на графе.

5. Найти те же характеристики t_i^*, t_i^{**} и r_{ij} расписания выполнения комплекса работ с использованием математического программирования.

6. Определить помимо полных резервов времени $F_п = r_{ij}$ работ ij резервы времени, относящиеся к событиям j сетевого графа, а именно:

$F_{нз1}$, $F_с$, $F_{нз2}$, рис. П1.

Виды резервов времени

Полный резерв времени

$$F_п = r_{ij} = t_j^{**} - (t_i^* + \tau_{ij})$$

$$F_п = F_{нз1} + F_с$$

Независимый резерв времени 1-го порядка

$$F_{нз1} = t_j^{**} - t_j^*$$

Свободный резерв времени

$$F_с = t_j^* - (t_i^* + \tau_{ij})$$

Независимый резерв времени 2-го порядка

$$F_{нз2} = t_j^* - (t_i^{**} + \tau_{ij})$$

Рис. П1

7. Рассмотреть вероятностную постановку задачи анализа расписания.

Считать СКО времен выполнения работ равными 5% от их длительностей. Предполагая неизменным критический путь (оценить справедливость этого предположения) найти вероятность того, что время выполнения комплекса работ не превысит найденного для детерминированной задачи в п.1 на 10%.

8. Представить пошаговую процедуру имитационного моделирования расписания по схеме событий с учетом числа исполнителей и решающего правила ранжирования работ из числа возможных. По результатам моделирования построить диаграмму Ганта.

Библиографический список

Теория расписаний

1. Конвей Р.В., Максвелл В. Л. Теория расписаний. М.: Наука, 1975. 360 с.

2. Танаев В.С., Шкурба В.В. Введение в теорию расписаний. М.: Наука, 1975. 256 с.

3. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. Изд. 2-е, доп. и перераб. М., «Высшая школа», 1975, 270 с.

4. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972. 522 с

5. Коуги П. М. Архитектура конвейерных ЭВМ. М: Радио и связь1985. 360 с.

6. Бигель Дж. Управление производством. Количественный подход. Пер. с англ. М.: Мир, 1973. 304 с.

7. Филипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 496 с.