Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

А. В. Баландюк, А. А. Моисеев

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Пособие для студентов направлений "Прикладная математика и информатика", "Механика и математическое моделирование"

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2024

УДК 517.387

Баландюк А. В., Моисеев А. А. Интегралы, зависящие от параметра. Для студентов направлений "Прикладная математика и информатика", "Механика и математическое моделирование": учеб. пособие /, А. В. Баландюк, А. А. Моисеев – СПб., 2024. – 48 с.

Учебное пособие соответствует ФГОС ВО по дисциплине "Математический анализ" по направлениям подготовки 01.03.02 "Прикладная математика и информатика", 01.03.03 "Механика и математическое моделирование". Рассматривается тема, занимающая важное место в курсе математического анализа. Стиль изложения согласован с рассмотрением смежных вопросов курса математического анализа в Физико-механическом институте.

Предназначается для студентов Физ-меха.

Интегралы, зависящие от параметра

Оглавление

Для краткости символами ◀ и ▶ будем отмечать соответственно начало и конец доказательств и вычислений.

§ 1. Постановка задач

Пусть f — функция на $\Delta \times Y$, Δ — промежуток, при каждом $y \in Y$ функция $f(\bullet, y)$, т. е. функция, которая в каждой точке $x \in \Delta$ принимает значение $f(x, y)$, интегрируема по промежутку Δ.

Положим

$$I : I(y) = \int_{\Delta} f(x, y)\,dx. \qquad (1)$$

Функция I называется интегралом, зависящим от параметра.

Мы рассмотрим вопросы о пределе и непрерывности этой функции, вычислим производную и интеграл. Задачи такого типа мы уже решали при рассмотрении функциональных последовательностей и рядов.

§ 2. Теорема о перестановке предельных переходов

Пусть f — функция на $X \times Y$, x_0 — предельная точка множества X, y_0 — предельная точка множества Y,

$$\varphi(x) = \lim_{y \to y_0} f(x, y), \psi(y) = \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

Мы скажем, что имеет место равномерная сходимость

$$f(x,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} \varphi(x), \quad \left(f(\bullet,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} \varphi \right),$$

относительно $x \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ 0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow \forall x\ |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\rho(y) = \sup_{x\in X} |f(x,y) - \varphi(x)| \underset{y\to y_0}{\to} 0.$$

Теорема 1. Пусть $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} \varphi(x),\ f(x,y) \underset{x\to x_0}{\to} \psi(y)$.

Тогда функции φ, ψ имеют общий предел A:

$$\exists A\ \varphi(x) \underset{x\to x_0}{\to} A, \psi(y) \underset{y\to y_0}{\to} A.$$

◀ 1) Критерий Коши позволяет для произвольного $\varepsilon > 0$ найти такое $\delta > 0$, что

$$0 < |y_1 - y_0| < \delta,\ 0 < |y_2 - y_0| < \delta \Rightarrow \forall x\ |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon.$$

Предельным переходом в последнем неравенстве получаем

$$|\psi(y_1) - \psi(y_2)| \le \varepsilon.$$

Критерий Коши дает существование предела для функции ψ, $\psi(y) \underset{y\to y_0}{\to} A$.

2) Осталось показать, что $\varphi(x) \underset{x\to x_0}{\to} A$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое y_1, что

$$\forall x\ |f(x,y_1) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, |\psi(y_1) - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Подберем $\delta > 0$ так, чтобы $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x,y_1) - \psi(y_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Теперь

$$|\varphi(x) - A| \le |\varphi(x) - f(x,y_1)| + |f(x,y_1) - \psi(y_1)| + |\psi(y_1) - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

$$\varphi(x) \underset{x \to x_0}{\to} A. \blacktriangleright$$

Контрпример. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Здесь

$$\forall x \neq 0 \ \lim_{y \to 0} f(x, y) = 1, \ \ \forall y \neq 0 \ \lim_{x \to 0} f(x, y) = -1,$$

так что

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 1, \ \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = -1.$$

Причина аномалии в отсутствии равномерной сходимости. Действительно, при любом $y \neq 0$ имеем соотношение

$$f(x,y) - 1 = \frac{-2y^2}{x^2 - y^2} \underset{x \to 0}{\to} 2,$$

которое, означает, что $\rho(y) = \sup\limits_{x \neq 0} \left| f(x,y) - 1 \right| \geq 2$.

§ 3. Собственные интегралы, зависящие от параметра

1⁰. Предельный переход и непрерывность.

Теорема 1. Пусть f — функция на $[a, b] \times Y$, y_0 — предельная точка множества Y,

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \tag{1}$$

(интеграл понимается в собственном смысле);

$$f(x,y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} \varphi(x) \text{ относительно } x \in [a, b]. \tag{2}$$

Тогда

1) функция φ интегрируема,

2) возможен предельный переход под знаком интеграла:

$$I(y)\underset{y\to y_0}{\to}\int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (3)$$

◀ 1) Докажем интегрируемость функции φ. Для этого достаточно показать, что для всякого $\varepsilon>0$ найдется разбиение τ, для которого разность между верхней и нижней суммами Дарбу

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Равномерная сходимость позволяет найти такое $y\in Y,\ y\neq y_0$, что

$$\forall x\in[a,b]\ \left|f(x,y)-\varphi(x)\right|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Функция $f(\bullet,y)$ предполагается интегрируемой, поэтому найдется такое разбиение τ, для которого

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заметим, что

$$M_k^\varphi - M_k \le \frac{\varepsilon}{4(b-a)},\ M_k^\varphi \le M_k+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\ \text{, а }\ m_k^\varphi \ge m_k - \frac{\varepsilon}{4(b-a)},$$

поэтому

$$S_\tau^\varphi - s_\tau^\varphi = \sum_{k=1}^{n}\left(M_\tau^\varphi - m_\tau^\varphi\right)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n}\left(M_k - m_k + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)\Delta x_k =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Требуемое разбиение построено. Функция φ интегрируема.

2) Положим $\rho(y)=\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f(x,y)-\varphi(x)\right|$. По условию теоремы $\rho(y)\underset{y\to y_0}{\to}0$.

Теперь

$$\left| I(y) - \int_a^b \varphi(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b \bigl(f(x,y) - \varphi(x) \bigr) dx \right| \le \rho(y)(b-a) \underset{y \to y_0}{\to} 0.$$

Теорема доказана. ▶

Теорема 2. f непрерывна на прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$.

Тогда интеграл, зависящий от параметра,

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx,$$

непрерывен на отрезке $[c,d]$.

◀ f равномерно непрерывна на прямоугольнике.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in [a,b]\ \forall y_1, y_2 \in [c,d]$$

$$|y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow \left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Поэтому

$$\left| I(y_1) - I(y_2) \right| = \left| \int_a^b \bigl(f(x,y_1) - f(x,y_2) \bigr) dx \right| \le \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Функция I равномерно непрерывна. ▶

2⁰. Интегрирование.

Теорема 3. f непрерывна на прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$,

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Тогда

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy, \tag{4}$$

т. е.

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy. \tag{5}$$

Утверждение теоремы следует из теоремы о сведении двойного интеграла к повторному.

Контрпример

$$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dy=\int_0^1 dx\left.\frac{y}{(x+y)^2}\right|_{y=0}^{1}=\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx=-\left.\frac{1}{x+1}\right|_0^1=\frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dx=-\frac{1}{2}.$$

Повторные интегралы имеют разные значения, причина этого факта — разрыв подынтегральной функции в точке $(0,0)$.

3⁰. Дифференцирование (правило Лейбница).

Теорема 4. $f,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$.

Тогда функция I непрерывно дифференцируема на отрезке $[c,d]$ и

$$\forall y\in[c,d]\ \ I'(y)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx. \qquad (6)$$

◀ Рассмотрим функцию

$$\Phi:\Phi(y)=\int_c^y d\eta\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)\,dx.$$

По теореме об интеграле с переменным верхним пределом

$$\Phi'(y)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

С другой стороны, по теореме 3

$$\Phi:\Phi(y)=\int_a^b dx\int_c^y\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)\,d\eta=\int_a^b\big(f(x,y)-f(x,c)\big)dx=I(y)-I(c).$$

Функции I и Φ различаются на постоянную, поэтому

$$I'(y)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx,$$

I непрерывно дифференцируема. ▶

§ 4 Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра

1⁰. Пусть f — функция на $[a,b)\times Y$, при каждом $y\in Y$ существует

$$I(y)=\int_a^{b-0} f(x,y)\,dx, \tag{1}$$

хотя бы в несобственном смысле, при этом несобственный интеграл имеет единственную особую точку b, роль которой может выполнять и $+\infty$. Верхний предел интегрирования записан в виде $b-0$, чтобы отметить возможное наличие особенности.

Примеры.

1)

$$I(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2}dx=\sqrt{\pi},\ y\in[0,+\infty).$$

Здесь $f(x,y)=e^{-(x-y)^2}\underset{y\to+\infty}{\longrightarrow}0$ при каждом $x\in(-\infty,+\infty)$, но $I(y)$ не стремится к нулю. Предельный переход под знаком интеграла невозможен без некоторых дополнительных условий.

2)

$$I(y)=\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx=1,\ y\in(0,+\infty).$$

$f(x,y)\underset{y\to0}{\longrightarrow}0$ при каждом $x\in(0,+\infty)$, но $I(y)$ не стремится к нулю (при $y\to0$).

$f(x,y)\underset{y\to+\infty}{\longrightarrow}0$ при каждом $x\in(0,+\infty)$, но $I(y)$ не стремится к нулю (при $y\to+\infty$).

При распространении теории интегралов, зависящих от параметра, на случай несобственных интегралов ключевую роль играет понятие равномерной сходимости. Как будет установлено ниже, рассматриваемый сейчас интеграл I сходится на $(0,+\infty)$ неравномерно, что и делает невозможным предельный переход под знаком интеграла.

2⁰. Если обозначить

$$F(\eta, y) = \int_a^\eta f(x, y)\,dx,$$

то $F(\eta, y) \underset{\eta \to b-0}{\to} I(y)$ при каждом $y \in Y$. Если эта сходимость оказывается равномерной, несобственный интеграл называется равномерно сходящимся.

Определение. Несобственный интеграл I равномерно сходится на множестве Y, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta_0\ \eta > \eta_0 \Rightarrow \forall y \in Y\ \left| \int_a^\eta f(x, y)\,dx - I(y) \right| < \varepsilon, \tag{2}$$

т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta_0\ \eta > \eta_0 \Rightarrow \forall y \in Y\ \left| \int_\eta^{b-0} f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon. \tag{3}$$

Еще можно сказать, что равномерная сходимость интеграла означает равномерную сходимость к нулю остатка:

$$\int_\eta^{b-0} f(x, y)\,dx \underset{\eta \to b-0}{\rightrightarrows} 0,\ y \in Y. \tag{4}$$

Если положить $\rho(\eta) = \sup\limits_{y \in Y} \left| \int_\eta^{b-0} f(x, y)\,dx \right|$, то условие равномерной сходимости интеграла запишется в виде

$$\rho(\eta) \underset{\eta \to b-0}{\to} 0. \tag{5}$$

В приведенной конструкции b называется особой точкой. Обычно интеграл существует только в несобственном смысле, хотя иногда целесообразно и собственный интеграл представить пределом при $\eta \to b-0$ функции $F(\eta, y)$.

Примеры.

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2}$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$, поскольку

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2} \le \int\limits_A^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{A} \underset{A\to+\infty}{\to} 0.$$

2) $I(y) = \int\limits_0^{\infty} y e^{-xy} dx = 1$ равномерно сходится на $[y_0, +\infty)$ (при любом $y_0 > 0$), поскольку

$$\int\limits_A^{+\infty} y e^{-xy} dx = -e^{-xy} \Big|_{x=A}^{+\infty} = e^{-Ay} \le e^{-Ay_0} \underset{A\to+\infty}{\to} 0.$$

На $(0, +\infty)$ интеграл не является равномерно сходящимся:

$$\rho(A) = \sup_{y>0} \int\limits_A^{+\infty} y e^{-xy} dx = \sup_{y>0} e^{-Ay} = \lim_{y\to+0} e^{-Ay} = 1.$$

3^0. Теорема 1. Критерий Коши. Для равномерной сходимости интеграла I на множестве Y необходимым и достаточным является условие

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta_0 \; \eta_1, \eta_2 > \eta_0 \Rightarrow \forall y \in Y \; \left| \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon. \tag{5}$$

Условие (5) можно записать в виде

$$\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x, y) dx \underset{\eta_1, \eta_2 \to b-0}{\rightrightarrows} 0, \; y \in Y.$$

Теорема 2. Признак Вейерштрасса. Пусть φ — положительная функция на $[a, b)$, интеграл $\int\limits_a^{b-0} \varphi(x)dx$ сходится и

$$\forall x \in [a,b)\ \forall y \in Y\ \left| f(x,y) \right| \le \varphi(x). \tag{6}$$

Тогда интеграл I равномерно сходится.

◀ Заметим, что условия теоремы гарантируют сходимость интеграла при каждом фиксированном y.

Для остатка интеграла I можно написать равномерную оценку (правая часть — $\int\limits_\eta^{b-0} \varphi(x)dx$ — не зависит от параметра y)

$$\left| \int\limits_\eta^{b-0} f(x,y)dx \right| \le \int\limits_\eta^{b-0} \varphi(x)dx \underset{\eta \to b-0}{\to} 0,$$

которая и приводит к равномерной сходимости интеграла. ▶

Признак Вейерштрасса можно было применить в предыдущем примере, заметив, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{x^2+y^2} \le \frac{1}{x^2} \text{ и интеграл } \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ сходится.}$$

Пример. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2+1} dx,\ \alpha \in (-\infty, +\infty)$ равномерно сходится, поскольку

$$\left| \frac{\cos \alpha x}{x^2+1} \right| \le \frac{1}{x^2+1}, \text{ а интеграл } \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} \text{ сходится.}$$

4^0. Теорема 3. Признак Абеля. Рассматривается интеграл

$$\int\limits_a^{b-0} f(x,y)g(x,y)dx.$$

Предположим, что

1) $\int\limits_{a}^{b-0} f(x,y)\,dx$ равномерно сходится,

2) $\forall y\ g(x,y)$ монотонна на $[a,b)$, равномерно ограничена:

$$\exists M\ \forall x,y\ |g(x,y)| \le M\ .$$

Тогда $\int\limits_{a}^{b-0} f(x,y)\,g(x,y)\,dx$ равномерно сходится.

◀ По второй теореме о среднем

$$\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,y)\,g(x,y)\,dx = g(\eta_1,y)\int\limits_{\eta_1}^{\xi} f(x,y)\,dx + g(\eta_2,y)\int\limits_{\xi}^{\eta_2} f(x,y)\,dx, \text{ где } \eta_1 < \xi < \eta_2.$$

Возьмем произвольное положительное ε. Найдем такое η_0, что выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ для } \eta_1,\eta_2 > \eta_0 \text{ и для всех } y \text{ из } Y.$$

Тогда для всех $\eta_1,\eta_2 > \eta_0$ и для всех $y \in Y$

$$\left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,y)\,g(x,y)\,dx\right| < M\,\frac{\varepsilon}{2M} + M\,\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши, $\int\limits_{a}^{b-0} f(x,y)\,g(x,y)\,dx$ равномерно сходится на множестве Y. ▶

Теорема 4. Признак Дирихле. Предположим, что

1) Функция $F(\eta,y) = \int\limits_{a}^{\eta} f(x,y)\,dx$ равномерно ограничена, т. е.

$$\exists M\ \forall \eta, \forall y\ |F(\eta,y)| \le M\ ,$$

2) $\forall y\ g(x,y)$ монотонна на $[a,b)$,

$$g(x,y) \underset{x\to b-0}{\rightrightarrows} 0, \text{ относительно } y \in Y.$$

Тогда $\int\limits_a^{b-0} f(x,y)g(x,y)dx$ равномерно сходится.

◀ По второй теореме о среднем

$$\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,y)g(x,y)dx = g(\eta_1,y)\int\limits_{\eta_1}^{\xi} f(x,y)dx + g(\eta_2,y)\int\limits_{\xi}^{\eta_2} f(x,y)dx, \text{где } \eta_1 < \xi < \eta_2.$$

Возьмем произвольное положительное ε. Найдем такое η_0, что для всех $\eta > \eta_0$ и для всех y из Y выполняется неравенство $\left|g(\eta,y)\right| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$. Тогда для $\eta_1, \eta_2 > \eta_0$ и для всех $y \in Y$ имеем неравенство

$$\left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,y)g(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{4M}2M + \frac{\varepsilon}{4M}2M = \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши, $\int\limits_a^{b-0} f(x,y)g(x,y)dx$ равномерно сходится на множестве Y. ▶

Примеры.

1) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^\alpha}dx,\ \alpha \ge \alpha_0 > 0$ равномерно сходится по признаку Дирихле.

Действительно, $\int\limits_1^A \sin x dx$ — ограниченная функция, $\dfrac{1}{x^\alpha}$ убывает (как функция от x), $0 \le \dfrac{1}{x^\alpha} \le \dfrac{1}{x^{\alpha_0}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0,\ \dfrac{1}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\rightrightarrows} 0,\ \alpha \ge \alpha_0$.

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx,\ y \ge 0$ равномерно сходится по признаку Абеля.

Действительно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится, $0 \le e^{-xy} \le 1,\ e^{-xy}$ убывает (как функция от x).

§ 5. Основные теоремы о несобственных интегралах, зависящих от параметра

1^0. Теорема 1. О предельном переходе под знаком несобственного интеграла

$$I(y) = \int\limits_a^{b-0} f(x,y)dx,\ y \in Y,\ y_0 \text{ — предельная точка } Y. \qquad (1)$$

Предполагаем, что интеграл существует хотя бы в несобственном смысле, b — единственная особая точка. Еще раз отметим, что запись верхнего предела в форме $b-0$ означает, что точка b и только она может быть особой.

Пусть

1) $\forall \eta \in (a,b)\ f(x,y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ относительно $x \in [a,\eta]$, (2)

2) интеграл I равномерно сходится на Y.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{b-0} \varphi(x)dx$ сходится и возможен предельный переход под знаком интеграла:

$$I(y) \underset{y \to y_0}{\rightarrow} \int\limits_a^{b-0} \varphi(x)dx, \qquad (3)$$

т. е.
$$\int\limits_a^{b-0} f(x,y)dx \underset{y \to y_0}{\rightarrow} \int\limits_a^{b-0} \varphi(x)dx. \qquad (4)$$

◀ Рассмотрим функцию

$$F(\eta,y)=\int_a^{\eta} f(x,y)dx.$$

По теореме о предельном переходе в собственном интеграле

$$F(\eta,y)\underset{y\to y_0}{\to}\Phi(\eta)=\int_a^{\eta}\varphi(x)dx \text{ при каждом } \eta\in[a,b),$$

а $F(\eta,y)\underset{\eta\to b-0}{\rightrightarrows} I(y)$ (условие равномерной сходимости интеграла).

По теореме о перестановке предельных переходов

$$\exists A\,\Phi(\eta)\underset{\eta\to b-0}{\to}A,\, I(y)\underset{y\to y_0}{\to}A.$$

Соотношение $\Phi(\eta)\underset{\eta\to b-0}{\to}A$ означает, что интеграл $\int_a^{b-0}\varphi(x)dx$ сходится и

$A=\int_a^{b-0}\varphi(x)dx$. ▶

2⁰. Теорема 2. О непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Пусть

1) функция f непрерывна на $[a,b)\times[c,d]$,

2) интеграл I равномерно сходится на $[c,d]$.

Тогда I — непрерывная функция на $[c,d]$.

◀ Возьмем $y_0\in[c,d]$ и установим непрерывность функции I в точке y_0.

Положим

$$F(\eta,\, y)=\int_a^{\eta} f(x,\, y)dx$$

Тогда $F(\eta, y) \underset{\eta\to b-0}{\rightrightarrows} I(y),\ y\in[c, d]$ (равномерная сходимость интеграла),

$F(\eta,y) \underset{y\to y_0}{\to} F(\eta, y_0),\ \eta\in[a, b)$ (по теореме о непрерывности для собственного интеграла). По теореме о перестановке предельных переходов функции I и $F(\bullet, y_0)$ имеют общий предел. Но $F(\eta, y_0) \underset{\eta\to b-0}{\to} I(y_0)$, так что и $I(y) \underset{y\to y_0}{\to} I(y_0)$. Последнее соотношение означает непрерывность функции I в точке y_0.▶

Установлено, что равномерная сходимость интеграла обеспечивает непрерывность. Оказывается, для положительных функций равномерная сходимость необходима для непрерывности.

Теорема 3. Теорема Дини.

Пусть

1) функция f непрерывна и <u>положительна</u> на $[a,b)\times[c,d]$,

2) интеграл I — непрерывная функция на $[c,d]$.

Тогда I равномерно сходится на $[c,d]$.

◀ **Доказательство (от противного).** Допустим, равномерной сходимости нет:

$$\exists\varepsilon>0\ \forall\eta\ \exists y\in[c,d]\ \int_{\eta}^{b-0} f(x,y)dy\ge\varepsilon .$$

Возьмем последовательность $\eta_n \underset{n\to\infty}{\to} b$ и для каждого натурального n в соответствии с предыдущей формулой подберем y_n, для которого $\int_{\eta_n}^{b} f(x,y_n)dy\ge\varepsilon$. Получена последовательность y_n точек отрезка $[c,d]$. Извлечем из нее сходящуюся подпоследовательность $y_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} y_0\in[c,d]$. Несобственный интеграл $I(y_0)$ сходится, найдется такое η_0, для которого

$\int\limits_{\eta_0}^{b-0} f(x, y_0)dy < \varepsilon$. Из непрерывности интеграла I, зависящего от параметра, следует, что неравенство выполняется не только в точке y_0 но и в целой окрестности этой точки, найдется такая окрестность V точки y_0, что

$$\forall y \in V \int\limits_{\eta_0}^{b-0} f(x, y)dy < \varepsilon .$$

Поскольку $y_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} y_0$, $\eta_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} b$, то для некоторого k выполнятся условия $y_{n_k} \in V,\ \eta_{n_k} > \eta_0$ и, следовательно, $\int\limits_{\eta_{n_k}}^{b-0} f(x, y_{n_k})dy < \varepsilon$ в противоречие с проведенным построением. Противоречие заставляет признать равномерную сходимость интеграла. ▶

3^0. Теорема 4. О собственном интегрировании под знаком несобственного интеграла. Пусть f непрерывна на $[a,b)\times[c,d]$, интеграл

$$I(y) = \int\limits_{a}^{b-0} f(x, y)dx$$

равномерно сходится на $[c,d]$;

$$J(x) = \int\limits_{c}^{d} f(x, y)dy,\ x \in [a,b). \tag{5}$$

Тогда интеграл $\int\limits_{a}^{b-0} J(x)dx$ сходится и возможно интегрирование под знаком несобственного интеграла:

$$\int\limits_{a}^{b-0} J(x)dx = \int\limits_{c}^{d} I(y)dy , \tag{6}$$

т. е.

$$\int_a^{b-0} dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^{b-0} f(x,y)\,dx\,. \qquad (7)$$

Говорят еще, что возможна перестановка порядка интегрирований, одно из которых несобственное.

◀ По теореме об интегрировании собственного интеграла, зависящего от параметра

$$\int_a^{\eta} J(x)\,dx = \int_c^d F(\eta,y)\,dy\,,$$

где

$$F(\eta,y) = \int_a^{\eta} f(x,y)\,dx \underset{\eta\to b-0}{\rightrightarrows} I(y)\,.$$

По теореме о предельном переходе под знаком собственного интеграла

$$\int_a^{\eta} J(x)\,dx \underset{\eta\to b-0}{\to} \int_c^d I(y)\,dy\,,$$

несобственный интеграл $\int_a^{b-0} J(x)\,dx$ сходится и

$$\int_a^{b-0} J(x)\,dx = \int_c^d I(y)\,dy\,. \text{ ▶}$$

Теорема 4'. Пусть f непрерывна на $[a,b)\times[c,d]$ и $f \ge 0$, интеграл

$$I(y) = \int_a^{b-0} f(x,y)\,dx$$

сходится в каждой точке отрезка $[c,d]$ и является непрерывной функцией на этом отрезке;

$$J(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy,\ x\in[a,b)\,.$$

Тогда интеграл $\int\limits_a^{b-0} J(x)dx$ сходится и

$$\int\limits_a^{b-0} J(x)dx = \int\limits_c^d I(y)dy$$

т. е.

$$\int\limits_a^{b-0} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^{b-0} f(x,y)dx$$

◀ В силу теоремы Дини I равномерно сходится на отрезке $[c,d]$, так что выполнены условия теоремы 4. ▶

4⁰. Теорема 5. Правило Лейбница. Пусть f, $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $[a,b)\times[c,d]$, интеграл

$$I(y) = \int\limits_a^{b-0} f(x,y)dx$$

сходится в точке y_0,

$$J(y) = \int\limits_a^{b-0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

равномерно сходится на $[c,d]$.

Тогда интеграл I сходится во всех точках $y \in [c,d]$, функция I непрерывно дифференцируема, $I' = J$,

$$I'(y) = \int\limits_a^{b-0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx. \tag{8}$$

Правило Лейбница разрешает направить дифференцирование по параметру на подынтегральную функцию, провести дифференцирование под знаком несобственного интеграла.

Замечание. Можно показать, что имеет место равномерная сходимость интеграла I.

◀ Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi : \Phi(y) = \int_{y_0}^{y} J(t)\,dt = \int_{y_0}^{y} dt \int_{a}^{b-0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dx. \tag{9}$$

По теореме об интеграле с переменным верхним пределом

$$\Phi'(y) = J(y).$$

С другой стороны, по предыдущей теореме

$$\Phi(y) = \int_{a}^{b-0} dx \int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt = \int_{a}^{b-0} \left(f(x,y) - f(x,y_0) \right) dx.$$

Последний интеграл сходится, поэтому сходится и интеграл

$$I(y) = \int_{a}^{b-0} f(x,y)\,dx = \int_{a}^{b-0} \left(f(x,y) - f(x,y_0) \right) dx + \int_{a}^{b-0} f(x,y_0)\,dx.$$

Теперь мы замечаем, что

$$\Phi(y) = I(y) - I(y_0),$$

функция I отличается от Φ на постоянную,

$$I' = \Phi' = J.$$

Поскольку функция J непрерывна, то установлена непрерывная дифференцируемость функции I. ▶

5^0. Теорема 6. Перестановка несобственных интегрирований положительной функции.

Пусть f непрерывна на $[a,b)\times[c,d)$, $f \geq 0$.

1) Интеграл

$$I(y) = \int_{a}^{b-0} f(x,y)\,dx$$

сходится и является непрерывной функцией на $[c,d)$;

2) интеграл

$$J(x)=\int_{c}^{d-0} f(x,y)dy$$

сходится и является непрерывной функцией на $[a,b)$;

3) сходится один из интегралов

$$\int_{a}^{b-0} J(x)dx,\ \int_{c}^{d-0} I(y)dy.$$

Тогда сходится и второй интеграл, интегралы равны между собой:

$$\int_{a}^{b-0} J(x)dx=\int_{c}^{d-0} I(y)dy. \tag{10}$$

◀ Пусть $\int_{a}^{b-0} J(x)dx$ сходится. По теореме 4'.

$$\int_{c}^{\eta} I(y)dy=\int_{a}^{b-0} dx\int_{c}^{\eta} f(x,y)dy\le\int_{a}^{b-0} J(x)dx.$$

Частичные интегралы $\int_{c}^{\eta} I(y)dy$ положительной функции I ограничены числом $\int_{a}^{b-0} J(x)dx$. По условию сходимости положительного интеграла сходится интеграл $\int_{c}^{d-0} I(y)dy$ и справедливо неравенство

$$\int_{c}^{d-0} I(y)dy\le\int_{a}^{b-0} J(x)dx.$$

Теперь, поменяв роли интегралов, мы получаем противоположное неравенство

$$\int_{a}^{b-0} J(x)dx\le\int_{c}^{d-0} I(y)dy.$$

В итоге равенство

$$\int_a^{b-0} J(x)dx = \int_c^{d-0} I(y)dy$$

доказано. ▶

Теорема 7. Перестановка несобственных интегрирований.

Пусть f непрерывна на $[a,b)\times[c,d)$. Функция $g = |f|$ удовлетворяет условиям теоремы 6:

1) интеграл

$$A(y) = \int_a^{b-0} g(x,y)dx$$

сходится и является непрерывной функцией на $[c,d)$;

2) интеграл

$$B(x) = \int_c^{d-0} g(x,y)dy$$

сходится и является непрерывной функцией на $[a,b)$;

3) сходится один из интегралов

$$\int_a^{b-0} B(x)dx,\ \int_c^{d-0} A(y)dy.$$

Тогда

1) интеграл

$$I(y) = \int_a^{b-0} f(x,y)dx$$

сходится и является непрерывной функцией на $[c,d)$;

2) интеграл

$$J(x) = \int_c^{d-0} f(x,y)dy$$

сходится и является непрерывной функцией на $[a,b)$;

3) интегралы $\int\limits_a^{b-0} J(x)dx,\ \int\limits_c^{d-0} I(y)dy$ сходятся и равны между собой:

$$\int\limits_a^{b-0} J(x)dx = \int\limits_c^{d-0} I(y)dy.$$

Замечание. Теорема Дини позволяет заменить в теоремах 6, 7 условия непрерывности интегралов I, J, A, B условиями равномерной сходимости интегралов I, A на любом отрезке $[c,\xi]\subset[c,d)$ и интегралов J, B на любом отрезке $[a,\eta]\subset[a,d)$.

◀ Интеграл $A(y)=\int\limits_a^{b-0} g(x,y)dx$ равномерно сходится на любом отрезке $[c,\xi]\subset[c,d)$ (по теореме Дини); $|f(x,y)|=g(x,y)$. Следовательно, $I(y)=\int\limits_a^{b-0} f(x,y)dx$ равномерно сходится (на любом отрезке $[c,\xi]\subset[c,d)$) и является непрерывной функцией на $[c,d)$. То же самое мы скажем про интеграл $J(x)=\int\limits_c^{d} f(x,y)dy$. $|I(y)|\le\int\limits_a^{b}|f(x,y)|dx=A(y)$, $\int\limits_c^{d-0} A(y)dy$ сходится. По теореме сравнения $\int\limits_c^{d-0} I(y)dy$ сходится. Аналогичные рассуждения дают сходимость второго интеграла.

Осталось проверить равенство интегралов. По теореме о собственном интегрировании несобственного интеграла

$$\int\limits_c^{\xi} I(y)dy=\int\limits_c^{\xi}dy\int\limits_a^{b-0} f(x,y)dx=\int\limits_a^{b-0}dx\int\limits_c^{\xi} f(x,y)dy=\int\limits_a^{b-0}\Phi(x,\xi)dx,$$

где $\Phi(x,\xi)=\int\limits_c^{\xi} f(x,y)dy$.

Интеграл $\int\limits_{a}^{b-0} \Phi(x,\xi)dx$ равномерно сходится относительно параметра $\xi \in [c,d)$ на основании теоремы Вейерштрасса, поскольку

$\left|\Phi(x,\xi)\right| \le \int\limits_{c}^{\xi} \left| f(x,y)\right| \le \int\limits_{c}^{d-0} \left| f(x,y)\right|$ и $\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} \left| f(x,y)\right| dx$ сходится.

$\Phi(x,\xi) \underset{\xi \to d-0}{\rightrightarrows} \int\limits_{c}^{d-0} f(x,y)dy$ относительно $x \in [a,\eta] \subset [a,b)$. По теореме о предельном переходе в несобственном интеграле

$$\int\limits_{c}^{\xi} I(y)dy = \int\limits_{a}^{b-0} \Phi(x,\xi)dx \underset{\xi \to d-0}{\rightarrow} \int\limits_{a}^{b-0} dx \int\limits_{c}^{d-0} f(x,y)dy .$$

Последнее означает сходимость интеграла $\int\limits_{c}^{d-0} I(y)dy$ и равенство

$$\int\limits_{c}^{d-0} I(y)dy = \int\limits_{a}^{b-0} J(x)dx . \blacktriangleright$$

Замечание. Мы рассмотрели несобственные интегралы с единственной особой точкой на верхнем пределе интегрирования. Аналогичным образом строится теория интегралов с особенностью на нижнем пределе. Если особенности присутствуют на обоих пределах, можно разбить интеграл на два слагаемых и отдельно их рассмотреть. Можно сформулировать теоремы для всего интеграла, при этом, конечно, условия, которые раньше предполагались выполненными на всевозможных отрезках $[a,\eta] \subset [a,b)$ должны быть отнесены к отрезкам $[\xi,\eta] \subset (a,b)$.

§ 6. Несколько знаменитых интегралов

1⁰. Интеграл Дирихле

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} .$$

◀ Рассмотрим интеграл, зависящий от параметра

$$I(y)=\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx,\ y\in[0,+\infty).$$

Интеграл равномерно сходится на $[0,+\infty)$ по признаку Абеля. I — непрерывная функция на $[0,+\infty)$.

Интеграл

$$J(y)=-\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x dx$$

равномерно сходится на любом отрезке вида $[y_0,A]\,(y_0>0)$ по признаку Вейерштрасса. Поэтому

$$I'(y)=J(y),\ y\in(0,+\infty).$$

Но

$$J(y)=\left.\frac{e^{-xy}(y\sin x+\cos x)}{y^2+1}\right|_0^{+\infty}=-\frac{1}{y^2+1},$$

так что

$$I(y)=C-\operatorname{arctg} y.$$

Предельный переход при $y\to+\infty$ дает $C=\dfrac{\pi}{2}$ (поскольку $|I(y)|\le\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx=\dfrac{1}{y}\underset{y\to+\infty}{\to}0$).

Итак,

$$I(y)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} y,\ y\in(0,+\infty).$$

Предельный переход при $y\to+0$ дает равенство

$$I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.\ ◀$$

Замечания.

1) Подынтегральную функцию $f(x,y)=e^{-xy}\dfrac{\sin x}{x}$ можно доопределить соотношением $f(0,y)=1$ и доказать непрерывность функции f на $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$.

2) Можно считать 0 особой точкой несобственного интеграла. В таком случае по отношению к этой "особенности" следует установить равномерную сходимость.

2⁰. Интеграл Эйлера-Пуассона

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

◀ Полагая $x=ut$, получим

$$I=u\int_0^{+\infty} e^{-u^2t^2}dt .$$

Умножим это равенство на e^{-u^2} и проинтегрируем:

$$Ie^{-u^2}=ue^{-u^2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2t^2}dt=\int_0^{+\infty} ue^{-u^2\left(t^2+1\right)}dt ,$$

$$I^2=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} ue^{-u^2\left(t^2+1\right)}du\right)dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\left(t^2+1\right)}dt=\frac{\pi}{4}.$$

Из последнего равенства получается $I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Обсудим подробнее возможность перестановки несобственных интегрирований, т. е. равенство

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} ue^{-u^2\left(t^2+1\right)}dt\right)du=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} ue^{-u^2\left(t^2+1\right)}du\right)dt .$$

Внутренний интеграл в правой части последнего равенства

$$J(t)=\int\limits_0^{+\infty} ue^{-u^2(t^2+1)}du=\frac{1}{2(t^2+1)}$$

непрерывен на $[0,+\infty)$.

Внутренний интеграл в левой части

$$K(u)=\int\limits_0^{+\infty} ue^{-u^2(t^2+1)}dt=\begin{cases} e^{-u^2}I,\ u>0 \\ 0,\ \ u=0 \end{cases}$$

является разрывной функцией, так что прямое применение теоремы 6 § 5 невозможно. Однако, можно сослаться на замечание в конце § 5, считать 0 и $+\infty$ особыми точками этого интеграла. В таком случае нужна непрерывность интеграла K на $(0,+\infty)$, которая только что установлена. ◀

3⁰. Интегралы Френеля

$$\int\limits_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\int\limits_0^{+\infty}\cos(x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

◀ Выполняя замену переменной $y=x^2$, получаем

$$\int\limits_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to+0}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda y}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy,$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\cos(x^2)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos y}{\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to+0}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda y}\frac{\cos y}{\sqrt{y}}dy.$$

Предельный переход при $\lambda\to+0$ возможен в силу того, что интегралы $\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda y}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy$ и $\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda y}\frac{\cos y}{\sqrt{y}}dy$ равномерно сходятся на любом отрезке $[0;A]$ по признаку Абеля.

В интеграле Эйлера-Пуассона $\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ сделаем замену переменной $t=x\sqrt{y}$. Получаем

$$\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{y}e^{-x^2y}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \ \frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2y}dx,\ y>0.$$

Заменим $\frac{1}{\sqrt{y}}$ равным ему интегралом: $\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2y}dx.$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to+0}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda y}\sin y\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2y}dx\right)dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\lambda\to+0}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}\sin y dx\right)dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\lambda\to+0}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}\sin y dy\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\lambda\to+0}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\lambda+x^2\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos y}{\sqrt{y}}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\lambda\to+0}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}\cos y dx\right)dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\lambda\to+0}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}\cos y dy\right)dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\lambda\to+0}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\left(\lambda+x^2\right)}{1+\left(\lambda+x^2\right)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

При вычислении интегралов Френеля использовались следующие интегралы:

1) $$\int\limits_0^{+\infty}e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}\sin y dy=\left.\frac{e^{-\left(\lambda+x^2\right)y}\left(-\left(\lambda+x^2\right)\sin y-\cos y\right)}{\left(\lambda+x^2\right)^2+1}\right|_0^{+\infty}=\frac{1}{\left(\lambda+x^2\right)^2+1},$$

2) $$\int\limits_0^{+\infty}e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}\cos y dy=\left.\frac{e^{-\left(\lambda+x^2\right)y}\left(-\left(\lambda+x^2\right)\cos y+\sin y\right)}{\left(\lambda+x^2\right)^2+1}\right|_0^{+\infty}=\frac{\lambda+x^2}{\left(\lambda+x^2\right)^2+1},$$

3) $$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Для получения значения последних интегралов заметим, что

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\left(1/x^2\right)}{1+\left(1/x\right)^4}dx=-\int_{+\infty}^{0}\frac{dt}{1+t^4}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}.$$

Поэтому

$$2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\left(1+1/x^2\right)}{x^2+1/x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{d\left(x-1/x\right)}{\left(x-1/x\right)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1/x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Возможность перестановки несобственных интегрирований

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}\sin y dx\right)dy=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}\sin y dy\right)dx$$

обоснуем, исходя из теоремы 7 § 5, при этом наша задача заметно облегчится благодаря введенному «множителю сходимости» $e^{-\lambda y}$, $\lambda>0$.

Интеграл $I\left(x\right)=\int_0^{+\infty}\left|e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}\sin y\right|dy$ — непрерывная функция на $\left[0;+\infty\right)$, так как он равномерно сходится на любом отрезке $\left[0;A\right]$ по признаку Вейерштрасса $\left(\left|e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}\sin y\right|\le e^{-\lambda y},\lambda>0,\quad \int_0^{+\infty}e^{-\lambda y}dy<+\infty\right)$.

Интеграл $J\left(y\right)=\int_0^{+\infty}\left|e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}\sin y\right|dx$ — непрерывная функция на $\left(0;+\infty\right)$ в силу равномерной сходимости на любом отрезке вида $\left[y_0,A\right]\left(y_0>0\right)$ по признаку Вейерштрасса $\left(\left|e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}\sin y\right|\le e^{-x^2y}\le e^{-x^2y_0},\quad \int_0^{+\infty}e^{-x^2y_0}dx<+\infty\right)$.

Значит, прямо применить теорему 7 не представляется возможным. Но, исходя из замечания в конце § 5, можно считать $\left(0\right)$ и $\left(+\infty\right)$ особыми точками этого интеграла, тогда в условиях теоремы 7 нужна непрерывность $\int_0^{+\infty}\left|e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}\sin y\right|dx$ именно на $\left(0;+\infty\right)$.

И, наконец, сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty}\left|e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}\sin y\right|dy\right)dx$ следует из оценки $\int\limits_0^{+\infty}\left|e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}\sin y\right|dy \le \int\limits_0^{+\infty} e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}dy = \dfrac{1}{\lambda+x^2}$ и сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{\lambda+x^2}$.

Аналогичные рассуждения можно привести для обоснования перестановки несобственных интегрирований в интегралах

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}\cos y dx\right)dy = \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-y\left(\lambda+x^2\right)}\cos y dy\right)dx .$$

Предельный переход при $\lambda \to +0$ под знаком интегралов $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+\left(\lambda+x^2\right)^2}dx$ и $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\left(\lambda+x^2\right)}{1+\left(\lambda+x^2\right)^2}dx$ возможен в силу их равномерной сходимости на отрезке $[0;1]$ по признаку Вейерштрасса. ▶

4⁰. Формула Фруллани. Пусть f непрерывна на $[0,+\infty)$ и при любом $\eta > 0$ интеграл $\int\limits_\eta^{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}dx$ сходится.

Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

◀ Для определенности считаем, что $a < b$. Для любого $\eta > 0$

$$\int\limits_\eta^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int\limits_\eta^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx - \int\limits_\eta^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}dx = \int\limits_{a\eta}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt - \int\limits_{b\eta}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt =$$

$$= \int\limits_{a\eta}^{b\eta}\frac{f(t)}{t}dt \overset{(\exists\xi\in[a\eta,b\eta])}{=} f(\xi)\int\limits_{a\eta}^{b\eta}\frac{1}{t}dt = f(\xi)\ln\frac{b}{a} \underset{\eta\to 0}{\to} f(0)\ln\frac{b}{a}. \blacktriangleright$$

Пусть f непрерывна на $[0,+\infty)$ и имеет конечный предел $f(+\infty)$.

Тогда

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \left(f(0)-f(+\infty)\right)\ln\frac{b}{a}.$$

◀ Для любых $\eta,\ A>0$

$$\int_\eta^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_\eta^A \frac{f(ax)}{x}dx - \int_\eta^A \frac{f(bx)}{x}dx = \int_{a\eta}^{aA} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{b\eta}^{bA} \frac{f(t)}{t}dt =$$

$$= \int_{a\eta}^{b\eta} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{aA}^{bA} \frac{f(t)}{t}dt \overset{\left(\substack{\exists\xi_1\in[a\eta,b\eta] \\ \exists\xi_2\in[aA,bA]}\right)}{=} f(\xi_1)\int_{a\eta}^{b\eta}\frac{1}{t}dt - f(\xi_2)\int_{aA}^{bA}\frac{1}{t}dt$$

$$= \left(f(\xi_1)-f(\xi_2)\right)\ln\frac{b}{a} \underset{\substack{\eta\to 0 \\ A\to+\infty}}{\to} \left(f(0)\right)-f(+\infty)\ln\frac{b}{a}. \blacktriangleright$$

Пример

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}-e^{-4x^2}}{x}dx.$$

◀ Вычислим интеграл тремя способами.

а) Применяя формулу Фруллани с $f(x)=e^{-x^2}$, $a=1,\ b=2$, получим $I = f(0)\ln 2 = \ln 2$.

б) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}-e^{-\alpha x^2}}{x}dx$, $I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}dx = -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2\alpha}$,

$I(\alpha) = \frac{1}{2}\ln\alpha + C$, $0 = I(1) = C$, $I = I(4) = \ln 2$.

в) При $y>0$ имеем равенство $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2y}dx = \frac{1}{2y}$, интегрируя которое по отрезку $[1,4]$, получаем

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}-e^{-4x^2}}{x}dx=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_1^4 xe^{-x^2y}dy\right)dx=\int\limits_1^4\frac{dy}{2y}=\ln 2\,.\blacktriangleright$$

5⁰. Интегралы Лапласа

$$I(\beta)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta},\ \alpha,\ \beta>0\,.$$

$$J(\beta)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta},\ \alpha,\ \beta>0\,.$$

◀ Дифференцированием под знаком первого интеграла получаем соотношение

$$I'(\beta)=-J(\beta)\,.$$

Повторное дифференцирование оказывается невозможным, поскольку приводит к расходящемуся интегралу.

Рассмотрим разность интеграла J и интеграла Дирихле $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$:

$$J(\beta)-\frac{\pi}{2}=\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}-\frac{\sin\beta x}{x}\right)dx=-\alpha^2\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x\left(\alpha^2+x^2\right)}dx\,.$$

Теперь дифференцирование стало возможным, и мы приходим к равенству

$$J'(\beta)=-\alpha^2 I(\beta).$$

Для функции I получается дифференциальное уравнение

$$I''=\alpha^2 I\,,$$

общее решение которого дается формулой

$$I=C_1e^{\alpha\beta}+C_2e^{-\alpha\beta}\,.$$

Поскольку

$$\left|I(\beta)\right|\le\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{\pi}{2\alpha}\,,$$

I — ограниченная функция, то $C_1 = 0$, $I(\beta) = C_2 e^{-\alpha\beta}$. Но $I(0) = \dfrac{\pi}{2\alpha}$, так что

$C_2 = \dfrac{\pi}{2\alpha}$,

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos\beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}, \ \alpha > 0.$$

Вторая формула

$$J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}, \ \alpha > 0$$

получается дифференцированием. ▶

6⁰.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos\beta x \, dx.$$

◀ Фиксируем $\alpha > 0$ и рассмотрим функцию

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos\beta x \, dx.$$

Производная представляется интегралом

$$I'(\beta) = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x \sin\beta x \, dx.$$

Интегрирование по частям дает

$$I'(\beta) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} \sin\beta x \Big|_0^{+\infty} - \frac{\beta}{2\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos\beta x \, dx = -\frac{\beta}{2\alpha} I(\beta).$$

Для функции I получено дифференциальное уравнение

$$I' = -\frac{\beta}{2\alpha} I,$$

из которого с учетом начального условия $I(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}$,

получаем окончательный результат

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \blacktriangleright$$

§ 7. Интегралы Эйлера

1⁰. Бета-функция (B -функция) Эйлера. Рассмотрим интеграл $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$. Если $p\ge 1, q\ge 1$, интеграл существует в собственном смысле. При других значения p,q интеграл имеет особенности в точках 0 и 1. Сходимость имеет место, если $p,q>0$. Сказанное позволяет ввести

Определение

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,\ p,q>0. \tag{1}$$

Определенная формулой (1) функция B называется бета-функцией, а фигурирующий в этой формуле интеграл — интегралом Эйлера первого рода.

Свойства B -функции

1) Симметрия

$$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p). \tag{2}$$

Формула (2) получается заменой переменной по формуле $x=1-y$:

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\int_0^1 (1-y)^{p-1}y^{q-1}dx=\mathrm{B}(q,p).$$

2) Рекуррентная формула

$$\mathrm{B}(p+1,q)=\frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q). \tag{3}$$

◀ Формула (3) получается интегрированием по частям:

$$\mathrm{B}(p+1,q)=\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx=-\frac{x^p(1-x)^q}{q}\Bigg|_0^1+\frac{p}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx=$$

$$=\frac{p}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx=\frac{p}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx-\frac{p}{q}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx,$$

т. е.

$$\mathrm{B}(p+1,q)=\frac{p}{q}\mathrm{B}(p,q)-\frac{p}{q}\mathrm{B}(p+1,q),$$

$$q\mathrm{B}(p+1,q)=p\mathrm{B}(p,q)-p\mathrm{B}(p+1,q),$$

$$\mathrm{B}(p+1,q)=\frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q),$$

что и требовалось доказать.▶

3) Заметив, что

$$\mathrm{B}(p,1)=\frac{1}{p} \text{ (для } p>0\text{)}, \tag{4}$$

можем написать

$$\mathrm{B}(p,n)=\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{p(p+1)\cdots(p+n-1)} \text{ (для } p>0 \text{ и натурального } n\text{)}, \tag{5}$$

$$\mathrm{B}(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \text{ (для натуральных } m,n\text{)}. \tag{6}$$

4) Другое аналитическое выражение для B -функции

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx. \tag{7}$$

◀Выполняя в (1) замену переменной по формулам

$$x=\frac{y}{1+y},\ 1-x=\frac{1}{1+y},\ dx=\frac{dy}{(1+y)^2},$$

получаем

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy. \blacktriangleright$$

2⁰. Гамма-функция (Γ-функция) Эйлера. Γ-функция Эйлера была определена при рассмотрении бесконечных произведений.

1)Вспомним это **определение**:

$$\Gamma(s)=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s}{1+\frac{s}{n}} \text{ для } s\neq 0,-1,-2,\dots. \tag{8}$$

2) Была получена **формула Эйлера-Гаусса**

$$\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^s n!}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n)}. \tag{9}$$

3) Установлено **рекуррентное соотношение**

$$s\Gamma(s)=\Gamma(s+1). \tag{10}$$

4) Γ**-функция —продолжение факториала:**

$$\Gamma(m+1)=m!. \tag{11}$$

5) Формула дополнения

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s},\ s\neq 0,-1,-2,\dots. \tag{12}$$

Если в формуле дополнения взять $s=\frac{1}{2}$, получается значение

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

Γ-функции в точке $\frac{1}{2}$.

Рекуррентная формула позволяет найти значения и в точках вида $\frac{2m+1}{2}$:

$$\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)=\frac{(2m-1)!!}{2^m}\sqrt{\pi}\,.$$

Перейдем к рассмотрению новых фактов. Важнейшим среди них будет представление Γ-функции несобственным интегралом.

6) Интегральное представление Γ-функции

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx,\; s>0. \qquad (13)$$

Интеграл в формуле (13) называется интегралом Эйлера второго рода. Он имеет особенности на нижнем (0) и верхнем $(+\infty)$ пределах интегрирования. На нижнем пределе сходимость имеет место, если $s>0$, а на верхнем — при любом s.

◀ Если в формуле Эйлера-Гаусса убрать последний сомножитель $\frac{n}{s+n}\underset{n\to\infty}{\to}1$, значение предела не изменится, а оставшееся произведение выражается через B-функцию:

$$\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^s(n-1)!}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}=\lim_{n\to\infty}n^s\mathrm{B}(s,n)=\lim_{n\to\infty}n^s\int_0^1(1-v)^{s-1}v^{n-1}dv\,.$$

В последнем интеграле произведем замену переменной по формуле $u=v^n$:

$$\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(n\left(1-u^{\frac{1}{n}}\right)\right)^{s-1}du\,.$$

Подынтегральная функция имеет предел $\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{s-1}$. На основании рассмотренных выше теорем мы можем перейти к пределу под знаком интеграла.

$$\Gamma(s)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{s-1}du\,.$$

Полагая теперь $x=\ln\frac{1}{u}$, мы получаем $u=e^{-x}$ и

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx .$$

Обсудим более тщательно вопрос предельного перехода под знаком интеграла. Будем считать, что $s > 1$, тогда интеграл $\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ не имеет особенности в нуле, а интеграл $\Gamma(s) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{s-1} du$ — в единице.

Установим возрастание (с ростом n) функциональной последовательности

$$f_n(u) = n\left(1 - u^{1/n}\right) = -\frac{e^{\frac{\ln u}{n}} - 1}{1/n} .$$

Для этого рассмотрим функцию $\varphi(t) = \frac{e^t - 1}{t}$, $\varphi(0) = 1$. Производная $\varphi'(t) = \frac{te^t - e^t + 1}{t^2} > 0$, поскольку для $\psi(t) = te^t - e^t + 1$ имеем $\psi'(t) = te^t$, ψ принимает в нуле свое наименьшее значение $\psi(0) = 0$. Функция φ строго возрастает, а

$$f_n(u) = -\varphi\left(\frac{\ln u}{n}\right) \ln u = \varphi\left(\frac{\ln u}{n}\right) \ln \frac{1}{u} .$$

При каждом $u \in (0,1]$ последовательность $\left\{ f_n(u) \right\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает. Если $s > 1, \left\{ \left(f_n(u) \right)^{s-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает. Функциональная последовательность $\left\{ \left(f_n(u) \right)^{s-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из непрерывных функций и имеет непрерывную предельную функцию $\left(\ln \frac{1}{u} \right)^{s-1}$. По теореме Дини

$$\left(f_n(u) \right)^{s-1} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{s-1}, \; u \in [\varepsilon, 1] .$$

(**Теорема Дини.** Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — функциональная последовательность на отрезке $[a, b]$;

1) $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ на $[a, b]$ поточечно;

2) $\forall x \in [a, b]$ последовательность $\{f_n(x)\}$ монотонна;

3) функции f, f_1, $f_2, \ldots$ непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Тогда $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $[a, b]$).

Имеет место неравенство

$$0 \le \left(f_n(u)\right)^{s-1} \le \ln^{s-1}\frac{1}{u},$$

а интеграл $\int\limits_0^1 \ln^{s-1}\frac{1}{u}\,du$ сходится. По признаку Вейерштрасса интеграл $\int\limits_0^1 \left(f_n(u)\right)^{s-1} du$ равномерно сходится (относительно параметра n). Выполнены условия теоремы о предельном переходе под знаком несобственного интеграла (теорема 1 § 5, роль множества Y выполняет множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, $y_0 = \infty$).

Нам удалось обосновать наши преобразования при дополнительном условии $s > 1$. Но при произвольном $s > 0$ справедливо неравенство $s+1 > 1$, поэтому $\Gamma(s+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^s e^{-x} ds$, а

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \frac{1}{s}\int\limits_0^{+\infty} x^s e^{-x} ds = -\frac{1}{s}x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x} ds = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x} ds. \blacktriangleright$$

При $s = \frac{1}{2}$ формула (13) превращается в равенство

$$\int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \sqrt{\pi},$$

из которого заменой переменной по формуле $x = y^2$ мы еще раз получаем интеграл Эйлера-Пуассона:

$$\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

7) Функциональные свойства Γ-функции на $(0,+\infty)$

а) Непрерывность и дифференцируемость. На любом интервале (s_1, s_2), $s_1 > 0$ интеграл $\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ сходится равномерно, Γ — непрерывная функция. Непрерывную дифференцируемость Γ-функции установим дифференцированием интеграла Эйлера. Формальное дифференцирование приводит нас к формуле

$$\Gamma'(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \ln x\, e^{-x} dx.$$

Для обоснования проведенного дифференцирования следует установить равномерную сходимость полученного интеграла. Интеграл имеет особенности как на нижнем, так и на верхнем пределах интегрирования. Следует рассмотреть два интеграла: $\int\limits_0^1 x^{s-1} \ln x\, e^{-x} dx$ и $\int\limits_1^{+\infty} x^{s-1} \ln x\, e^{-x} dx$.

Можно ограничиться рассмотрением $s > 1$, чтобы интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1} \ln x\, e^{-x} dx$ имел особую точку только на бесконечности, а затем распространить доказанное на случай произвольного $s > 0$ на основе соотношения $\Gamma(s) = \dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$.

Выберем первый вариант. Возьмем произвольный отрезок $[s_1, s_2]$ $(s_2 > s_1 > 0)$. Для $x \geq 1$ справедливо неравенство $0 \leq x^{s-1} \ln x e^{-x} \leq x^{s_2-1} \ln x e^{-x}$, а интеграл $\int_1^{+\infty} x^{s_2-1} \ln x e^{-x} dx$ сходится. Признак Вейерштрасса дает равномерную сходимость $\int_1^{+\infty} x^{s-1} \ln x e^{-x} dx$. Для $x \leq 1$ справедливо неравенство $0 \leq x^{s-1} \ln \frac{1}{x} e^{-x} \leq x^{s_1-1} \ln \frac{1}{x} e^{-x}$. Поскольку интеграл $\int_0^1 x^{s_1-1} \ln \frac{1}{x} e^{-x} dx$ сходится, то признак Вейерштрасса дает равномерную сходимость $\int_0^1 x^{s-1} \ln x e^{-x} dx$.

Итак, $\int_0^{+\infty} x^{s-1} \ln x e^{-x} dx$ равномерно сходится на любом отрезке вида $[s_1, s_2]$, на любом интервале (s_1, s_2) возможно дифференцирование под знаком интеграла. Поскольку интервал выбирался произвольно, то дифференцировать можно на всем луче $(0, +\infty)$.

Повторное дифференцирование дает непрерывную производную второго порядка

$$\Gamma''(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \ln^2 x e^{-x} dx > 0.$$

Дифференцирование возможно благодаря равномерной сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} x^{s-1} \ln^2 x e^{-x} dx > 0.$

Продолжая рассуждение, получаем бесконечную дифференцируемость Γ-функции.

б) Монотонность, выпуклость

$$\Gamma(1)=\Gamma(2),\ \exists s_0\in(1,2)\ \Gamma'(s_0)=0,$$
$$\forall s>0\ \Gamma''(s)>0,$$

Γ — выпуклая функция, убывает на $(0,s_0)$, возрастает на $(s_0,+\infty)$.

в) Предельное поведение

$$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+1)}{s}\underset{s\to+0}{\to}+\infty,\ \Gamma(s)\underset{s\to+0}{\sim}\frac{1}{s},\ \Gamma(s)\underset{s\to+\infty}{\to}+\infty.$$

Имеет место формула Стирлинга

$$\begin{aligned}&\Gamma(s+1)=\sqrt{2\pi s}\left(\frac{s}{e}\right)^s e^{\frac{\theta_s}{12s}},\ \theta_s\in(0,1);\\ &\Gamma(s+1)\underset{s\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi s}\left(\frac{s}{e}\right)^s.\end{aligned}\tag{14}$$

Формулу Стирлинга примем без доказательства.

3^0. Связь B и Γ функций

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ p,q>0.\tag{15}$$

◀Рассмотрим функцию

$$f:\ f(x,y)=y^{p-1}x^{p+q-1}e^{-x(1+y)}.$$

$$I(y)=\int\limits_0^{+\infty}f(x,y)dx=y^{p-1}\int\limits_0^{+\infty}x^{p+q-1}e^{-x(1+y)}dx=\left[u=x(1+y)\right]=$$
$$=\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\int\limits_0^{+\infty}u^{p+q-1}e^{-u}du=\Gamma(p+q)\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}},$$

$$J(x)=\int\limits_0^{+\infty}f(x,y)dy=x^{p+q-1}e^{-x}\int\limits_0^{+\infty}y^{p-1}e^{-xy}dy=\left[v=xy\right]=$$
$$=x^{q-1}e^{-x}\int\limits_0^{+\infty}v^{p-1}e^{-v}dv=\Gamma(p)x^{q-1}e^{-x},$$

$$\int_0^{+\infty} I(y)\,dy = \Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q),$$

$$\int_0^{+\infty} J(x)\,dx = \Gamma(p)\Gamma(q),$$

$$\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q),$$

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Право на перестановку интегрирований обеспечивается теоремой 6 § 5. Решающую роль здесь играет полученная в ходе проведенных вычислений сходимость интегралов $\int_0^{+\infty} I(y)\,dy$ и $\int_0^{+\infty} J(x)\,dx$. Непрерывность функций I и J также установлена в процессе вычислений. ▶

Следствие. Формула дополнения для B-функции

$$\mathrm{B}(s,1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s},\ s \in (0,1). \tag{16}$$

◀ $$\mathrm{B}(s,1-s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s},\ s \in (0,1).$$ ▶

В завершение рассмотрим несколько примеров.

1. $$\int_0^{\pi/2} \sin^{5/3} x \cos^{7/3} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^{2/3} x \cos^{4/3} x\ 2\sin x \cos x\,dx =$$

$$= \left[t = \sin^2 x\right] == \frac{1}{2}\int_0^1 t^{1/3}(1-t)^{2/3}\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma(3)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2!} = \frac{1}{18}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{9\sqrt{3}}.$$

2. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{2n-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{2n+1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}}{n!}\pi = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}.$

3. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^6}dx = \frac{1}{6}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{6}-1}}{1+t}dt = \frac{1}{6}\mathrm{B}\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{6}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}.$

4. $\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx = \left[y = x^2,\ x = y^{1/2}\right] = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} y e^{-y} y^{-1/2}dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} y^{1/2}e^{-y}dy =$

$= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$

5. $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[\mathrm{B}(p,\varepsilon)-\mathrm{B}(1-p,\varepsilon)\right] =$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\Gamma(\varepsilon)\cdot\left(\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\varepsilon)} - \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p+\varepsilon)}\right) = \left[\Gamma(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to+0}{\sim}\frac{1}{\varepsilon}\right] =$

$= \frac{1}{\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)}\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p+\varepsilon)-\Gamma(1-p)\Gamma(p+\varepsilon)}{\varepsilon}\right).$

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\frac{1}{\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)}\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\Gamma(p)\Gamma'(1-p+\varepsilon)-\Gamma(1-p)\Gamma'(p+\varepsilon)}{1}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(p)\Gamma'(1-p)-\Gamma(1-p)\Gamma'(p)}{\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)} = -\frac{\frac{d}{dp}\left(\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)\right)}{\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)} =$$

$$= -\frac{\frac{d}{dp}\left(\frac{\pi}{\sin\pi p}\right)}{\frac{\pi}{\sin\pi p}} = \pi\operatorname{ctg}\pi p,\ 0 < p < 1.$$

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}dx$$ сходится при $0<p<1$ по признаку сравнения.

Предельный переход при $\varepsilon\to+0$ возможен в силу равномерной сходимости $\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}}dx$ при $\varepsilon\ge 0$ по признаку Вейерштрасса: $\left|\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}}\right|\le\left|\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\right|$, а $\int_0^1 \frac{\left|x^{p-1}-x^{-p}\right|}{1-x}dx$ сходится при $0<p<1$.

6. $$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}dx=\frac14\int_0^1\frac{t^{-\frac12}\ln t}{t-1}dt=-\frac14\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^1 t^{-\frac12}\ln t\cdot(1-t)^{\varepsilon-1}dt=$$

$$=-\frac14\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{d}{dp}\mathrm{B}(p,\varepsilon)\right)\Bigg|_{p=\frac12}=\frac{-1}{4}\lim_{\varepsilon\to+0}\Gamma(\varepsilon)\frac{\Gamma'(p)\cdot\Gamma(p+\varepsilon)-\Gamma(p)\cdot\Gamma'(p+\varepsilon)}{\Gamma^2(p+\varepsilon)}\Bigg|_{p=\frac12}=$$

$$=\left[\Gamma(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to+0}{\sim}\frac{1}{\varepsilon}\right]=\frac{-1}{4\Gamma^2(p)}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\Gamma'(p)\cdot\Gamma(p+\varepsilon)-\Gamma(p)\cdot\Gamma'(p+\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\Bigg|_{p=\frac12}=$$

$$=\frac{-1}{4\Gamma^2(p)}\left(\left(\Gamma'(p)\right)^2-\Gamma(p)\cdot\Gamma''(p)\right)\Bigg|_{p=\frac12}=\frac14\cdot\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac12\right)}\left(\Gamma\left(\frac12\right)\cdot\Gamma''\left(\frac12\right)-\left(\Gamma'\left(\frac12\right)\right)^2\right).$$

С другой стороны,

$$2\left(\Gamma\left(\frac12\right)\cdot\Gamma''\left(\frac12\right)-\left(\Gamma'\left(\frac12\right)\right)^2\right)=$$

$$=\left(\Gamma''(p)\Gamma(1-p)-2\Gamma'(p)\Gamma'(1-p)+\Gamma(p)\Gamma''(1-p)\right)\Big|_{p=\frac12}=$$

$$=\frac{d^2}{dp^2}\left(\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)\right)\Bigg|_{p=\frac12}=\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{\pi}{\sin\pi p}\right)\Bigg|_{p=\frac12}=\pi^3.$$

Получаем

$$\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}dx=\frac14\cdot\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac12\right)}\frac{\pi^3}{2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Предельный переход при $\varepsilon \to +0$ возможен в силу равномерной сходимости $\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} \ln t \cdot (1-t)^{\varepsilon-1}\,dt$ при $\varepsilon \ge 0$ по признаку Вейерштрасса.

Так как $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t}dt$ (замена $t = -\ln x$), то попутно мы получили значение ещё одного интеграла: $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t}dt = \frac{\pi^2}{4}$.

7. Вычислим еще интеграл $R = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx$ от логарифма Γ-функции. Сходимость интеграла обеспечена соотношением $\Gamma(x) \underset{x\to+0}{\sim} \frac{1}{x}$.

Заметим, что $R = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx = \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\,dx$, поэтому

$$2R = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\Gamma(1-x)\,dx = \int_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin\pi x}dx = \ln\pi - \int_0^1 \ln\sin\pi x dx = \ln\pi - 2A,$$

где $A = \int_0^{1/2} \ln\sin\pi x dx = \int_0^{1/2} \ln\cos\pi x dx,$

$$2A = \int_0^{1/2} \ln\sin\pi x dx + \int_0^{1/2} \ln\cos\pi x dx = \int_0^{1/2} \ln\sin\pi x\cos\pi x dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \ln\frac{1}{2}\sin 2\pi x dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\sin\pi x dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \int_0^{1/2} \ln\sin\pi x dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + A.$$

Получается, что $A = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$, а $2R = \ln\pi - 2A = \ln\pi + \ln 2 = \ln 2\pi$. Наконец,

$$R = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx = \ln\sqrt{2\pi}\ .$$

Литература:

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ. Ч.2 — СПб.: — Изд-во Политехн. ун-та, 2005, 759 с. ISBN 5-7422-0625-9.

2. Зорич В. А. Математический анализ. Часть II. — 6-е изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2012. — XIV + 818 с. Библ.: 60 назв. Илл.: 41. ISBN 978-5-94057-893-2

3. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Дрофа, 2004. — 720 с.