Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Инженерно-строительный институт

В. А. Тарасов

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В БАЛКАХ И РАМАХ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2024

УДК 624.04 (075.8)

Рецензент:
Доктор технических наук, профессор Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого В.В. Лалин

Тарасов В. А. Строительная механика плоских стержневых систем. Правила построения эпюр внутренних усилий в балках и рамах: учеб. пособие / В. А. Тарасов. – 1-е изд. – СПб, 2024. – 146 с.

В пособии рассмотрены схематизация опорных закреплений и нагрузок, действующих на стержни, классификация плоских стержневых систем, понятия внутренних усилий. Подробным образом рассмотрены правила построения эпюр внутренних усилий в стержневых системах, правила знаков, а также свойства эпюр. Все теоретические выкладки проиллюстрированы представительными примерами решения задач строительной механики для простых балок и рам.

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлению «Строительство», соответствует научным специальностям 2.1.1. Строительные конструкции, здания и сооружения и 2.1.9. Строительная механика, ФГОС и СУОС СПбПУ по направлению «Строительство».

Пособие может быть полезно для подготовки бакалавров, специалистов и магистров в строительных вузах, а также в системах повышения квалификации и в учреждениях дополнительного профессионального образования.

Оглавление

Введение

Строительная механика плоских стержневых систем является для инженеров-строителей логическим продолжением курсов сопротивления материалов и теоретической механики.

На первом этапе изучения механики деформируемого твердого тела, в курсе теоретической механики, рассматривается абсолютно твердое недеформируемое тело, понятия внутренних усилий не вводятся. Изучаются общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел, в частности, системы сил и действия над ними, равновесие и методы определения опорных реакций, основы кинематики и динамики.

На втором этапе изучения механики деформируемого твердого тела, в курсе сопротивления материалов, рассматривается деформируемое тело простой конфигурации (обычно прямолинейный стержень, балка и т.п.), вводятся понятия внутренних усилий и метод сечений. Изучаются свойства различных материалов сопротивляться внешней нагрузке, приводящей к различным напряженно-деформированным состояниям (растяжению-сжатию, изгибу, кручению и т.п.). Изучаются экспериментальные методы определения физических свойств различных материалов, постановки и решения задач о подборе рационального и экономичного сечения несущей конструкции или об определении грузоподъемности заданной конструкции.

На третьем этапе изучения механики деформируемого твердого тела, в курсе строительной механики плоских стержневых систем, рассматриваются деформируемые тела сложной конфигурации: рамы, многопролетные балки, фермы, арки. Причем центральным вопросом курса строительной механики плоских стержневых систем является изучение методов определения напряженно-деформированного состояния в системах различной конфигурации, то есть определение распределения внутренних усилий в этих системах.

С появлением и широким распространением персональных компьютеров, а также множества расчетных комплексов, прочностные и другие виды расчетов строительных конструкций в наши дни производятся в расчетных программах. Тем не менее, освоение вышеупомянутых курсов критически необходимо для инженера-расчетчика и инженера-конструктора строительных специальностей. Их изучение позволяет инженеру «осознать» поведение строительных конструкций различной конфигурации при различных нагрузках на простейших примерах, допускающих ручное решение. Лишь освоив методы строительной механики, инженер будет в состоянии грамотно проводить расчеты сложных систем с большой степенью детализации в расчетных программах, а также критически оценивать адекватность полученных результатов.

В связи с тем, что в курсе строительной механики плоских стержневых систем фокус смещен в сторону определения напряженно-деформированного состояния, данное учебное пособие посвящено правилу построения эпюр внутренних усилий в простых балках и рамах.

Основной целью данного учебного пособия автор ставит детализацию информации:

– об определении реакций в простейших статически-определимых системах;

– о правилах построения эпюр внутренних усилий;

– о свойствах эпюр внутренних усилий;

– о правилах знаков для внутренних усилий.

Автор считает вышеуказанную информацию основополагающей для курса строительной механики, и надеется, что данное учебное пособие поможет студентам достичь наилучшего понимания данных вопросов. А это, несомненно, приведет к улучшению усвоения основного материала курса строительной механики, и как следствие, к повышению уровня и качества технической подготовки инженеров-строителей.

Список сокращений, обозначений и аббревиатур

Внешние нагрузки

q	Равномерно распределенная нагрузка, Н/м
P	Сосредоточенная сила, Н
M	Сосредоточенные момент, Н·м

Внутренние усилия

M	Изгибающий момент, Н·м
Q	Поперечная сила, Н
N	Продольная сила, Н
ΔQ	Изменение поперечной силы за счет действия изгибающего момента, Н
$M_К$	Значение изгибающего момента в конце участка, Н·м
$M_Н$	Значение изгибающего момента в начале участка, Н·м

Прочие обозначения

$n_{ст.н.}$	Степень статической неопределимости
$C_{оп}$	Количество реакций опорных связей
К	Количество замкнутых контуров
Ш	Количество простых шарниров
H_A; H_B…	Горизонтальные реакции связей в точках A, B…
V_A; V_B…	Вертикальные реакции связей в точках A, B…
A	Площадь поперечного сечения, м^2
h_i	Плечо силы i, м
l_i	Длина стержня (участка стержня) i, м
x	Текущая координата сечения, в котором определяются внутренние усилия
Δc	Осадка опоры, м

1. Опорные закрепления и схематизация узлов

Прежде чем перейти к определению внутренних усилий в подавляющем большинстве задач строительной механики приходится определять реакции опор (реакции связей опорных закреплений). В данном разделе кратко будут приведены основные виды простейших опор для задач строительной механики плоских стержневых систем, а также схематизация узлов сопряжения стержней друг с другом.

Шарнирно-подвижная опора

Шарнирно-подвижная (катковая) опора представляет собой опору, препятствующую одному из линейных перемещений на плоскости. В данном опорном закреплении возникает одна (линейная) реакция связи. Возможные изображения шарнирно-подвижных опор, а также соответствующие им реакции связей представлены на рис.1.1.

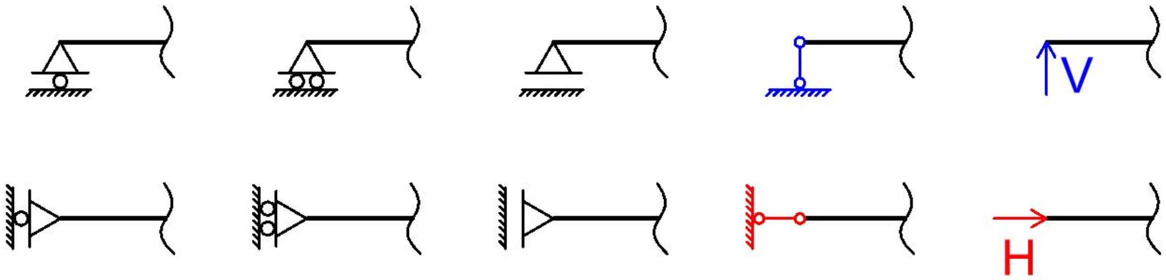


Рис. 1.1. Изображение шарнирно-подвижной опоры на схеме

Далее на рис.1.2 и рис.1.3 представлены шарнирно-подвижные опоры, в реальных строительных конструкциях. Чаще всего подобные опоры реализуются в тех случаях, когда необходимо обеспечить внешнюю статическую определимость конструкции для снижения реакции конструкции на температурные воздействия. Опора достаточно трудно реализуема и используется лишь при крайней необходимости.

Рис. 1.2. Шарнирно-подвижная опора, вариант 1 [1]

Рис. 1.3. Шарнирно-подвижная опора, вариант 2 [2]

Шарнирно-неподвижная опора

Шарнирно-неподвижная опора представляет собой опору, препятствующую двум взаимно-перпендикулярным линейным перемещениям на плоскости. В данном опорном закреплении возникают две линейные (вертикальная и горизонтальная) реакции связи.

Возможные изображения шарнирно-неподвижных опор, а также соответствующие им реакции связей представлены на рис.1.4.

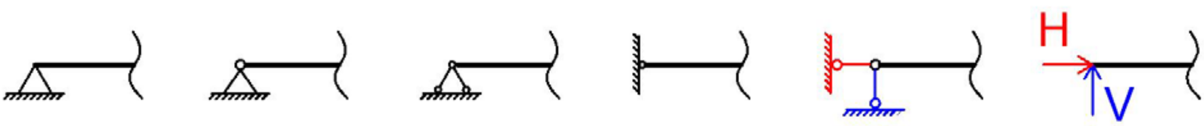


Рис. 1.4. Изображение шарнирно-неподвижной опоры на схеме

Далее на рис.1.5 и рис.1.6 представлены шарнирно-подвижные опоры, реализованные в реальных строительных конструкциях. Данные опоры используются чаще шарнирно-подвижных опор и обеспечивают, в первую очередь, отсутствие передачи изгибающего момента на основание.

Рис. 1.5. Шарнирно-неподвижная опора, вариант 1 [3]

Рис. 1.6. Шарнирно-неподвижная опора, вариант 2 [4]

Жесткое защемление (заделка)

Жесткое защемление (заделка) представляет собой опору, препятствующую двум взаимно-перпендикулярным линейным и одному угловому перемещениям на плоскости. В данном опорном закреплении возникают две линейные (вертикальная и горизонтальная) и одна поворотная реакции связи.

Изображение жесткой заделки, а также соответствующие ей реакции связей представлены на рис.1.7.

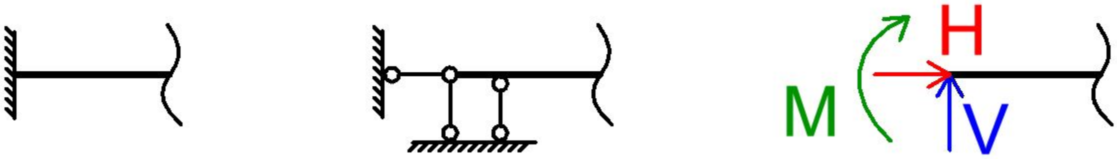


Рис. 1.7. Изображение жесткой заделки на схеме

Далее на рис.1.8 и рис.1.9 представлены жесткие заделки, реализованные в реальных строительных конструкциях. Жесткая заделка является наиболее частым видом опор в строительных конструкциях. Чаще всего они реализуются при строительстве из монолитного железобетона, а также при строительстве консольных конструкций.

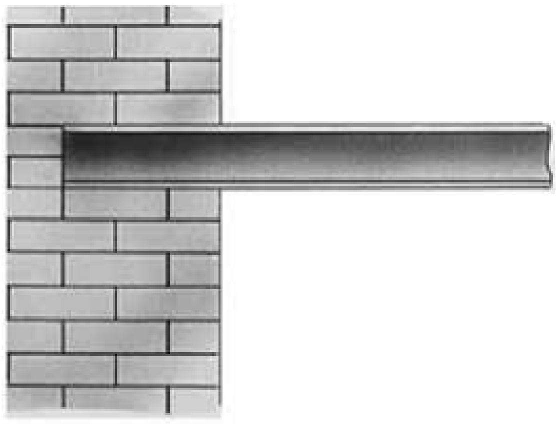


Рис. 1.8. Жесткая заделка стальной балки в кирпичную стену

Рис. 1.9. Жесткая заделка колонн в фундаментную плиту [5]

Подвижная заделка (ползун)

Подвижная заделка (ползун) представляет собой опору, препятствующую одному линейному и одному угловому перемещениям на плоскости. В данном опорном закреплении возникают одна линейная (вертикальная или горизонтальная) и одна поворотная реакции связи.

Изображение подвижных заделок, а также соответствующие им реакции связей представлены на рис.1.10.

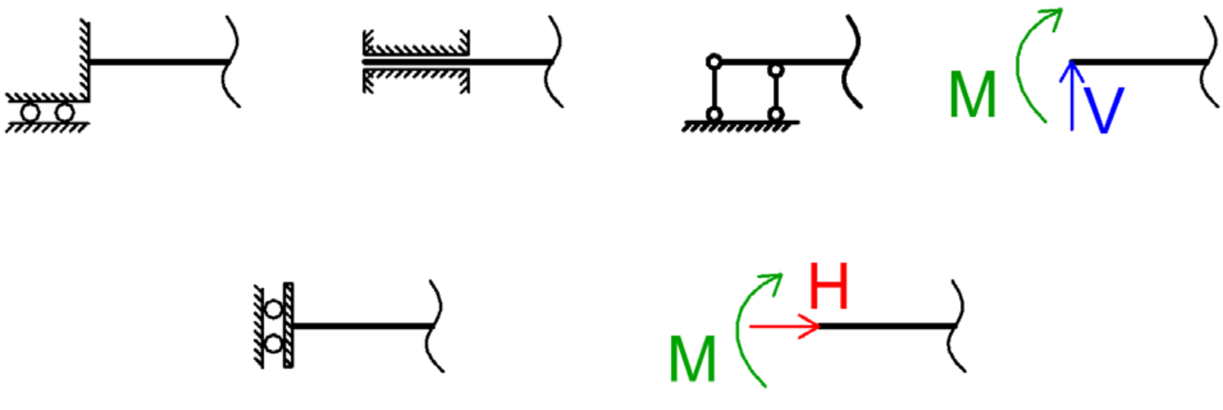


Рис. 1.10. Изображение подвижной заделки на схеме

Далее на рис.1.11 и рис.1.12 представлены подвижные заделки, в реальных конструкциях. Данный вид опор также как и шарнирно-подвижная опора используется не часто в связи со сложностью исполнения. Позволяет снизить температурные напряжения в конструкции за счет освобождения одной из связей (по сравнению с жесткой заделкой).

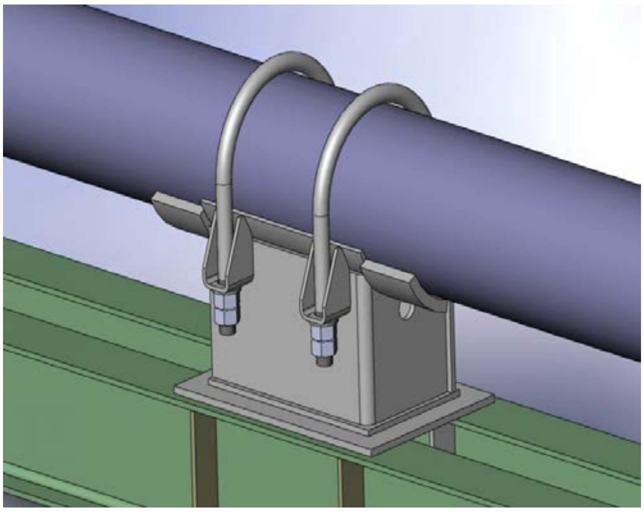


Рис. 1.11. Подвижная заделка опора подвижна вдоль трубы [6]

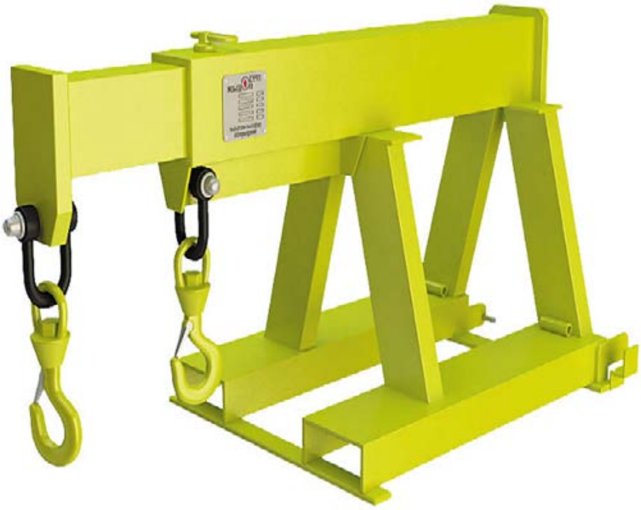


Рис. 1.12. Подвижная заделка телескопическая балка [7]

Схематизируя опорный узел одной из вышеперечисленных опор важно всегда помнить, что шарнирная опора или жесткая заделка лишь две идеализации опорного узла без поворотной жесткости и с бесконечно-большой поворотной жесткостью соответственно. Реальные же опоры всегда, имеют конечную поворотную жесткость: в шарнирных опорах обязательно присутствует трение, а монолитный узел или сварной шов не являются бесконечно-жесткими. Тем не менее, использование подобной, немного грубой схематизации опорных узлов, во многих задачах приводит к результатам достаточным с точки зрения инженерной точности. Поэтому в курсе строительной механики плоских стержневых систем ограничимся приведенными в данном разделе видами опорных закреплений стержней.

Схематизация узлов

В строительной механике плоских стержневых систем используются два основных типа узлов сопряжения стержней друг с другом: жесткий узел и шарнирный узел.

На рисунке 1.13 представлены схемы жестких узлов до воздействия нагрузки и после. Сечения стержней, входящих в такой узел, не поворачиваются относительно друг друга, а могут повернуться лишь все вместе с узлом на общий угол.

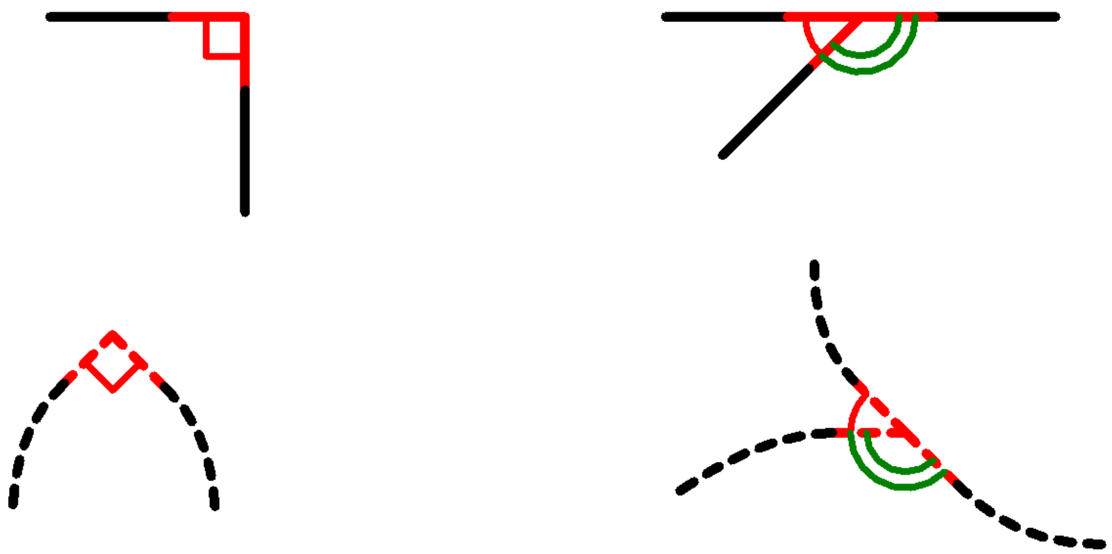


Рис. 1.13. Схематизация жестких узлов

К жестким узлам относятся монолитные узлы сопряжения балок и колонн в железобетонных конструкциях, узлы сопряжения балок и колонн, спроектированные специальным образом в металлических конструкциях. Примеры подобных узлов представлены на рисунках 1.14–1.15.

Рис. 1.14. Жесткий узел в железобетонных конструкциях [8]

Рис. 1.15. Жесткий узел в железобетонных конструкциях [9]

На рисунке 1.16 представлены схемы шарнирных узлов до воздействия нагрузки и после. Сечения стержней, входящих в такой узел, могут свободно поворачиваться относительно друг друга.

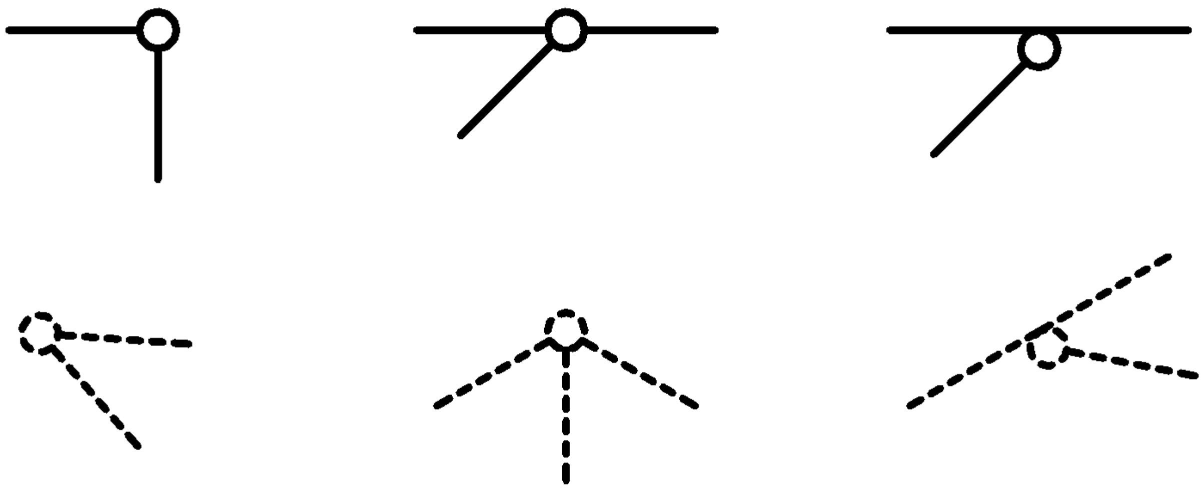


Рис. 1.16. Схематизация шарнирных узлов

На рисунке 1.17 представлены два шарнирных узла: в левом стержни своими концами соединяются в шарнирном узле, в правом нижний стержень своим концом шарнирно примыкает к середине стержня.

Рис. 1.17. Пример шарнирных узлов, [10]

На рисунке 1.18 представлен общий вид шарнирного узла: желтым и зеленым показаны соединяемые стержни, красным непосредственно шарнир (устройство, обеспечивающее возможность свободы поворота конца желтого стержня относительно начала зеленого).

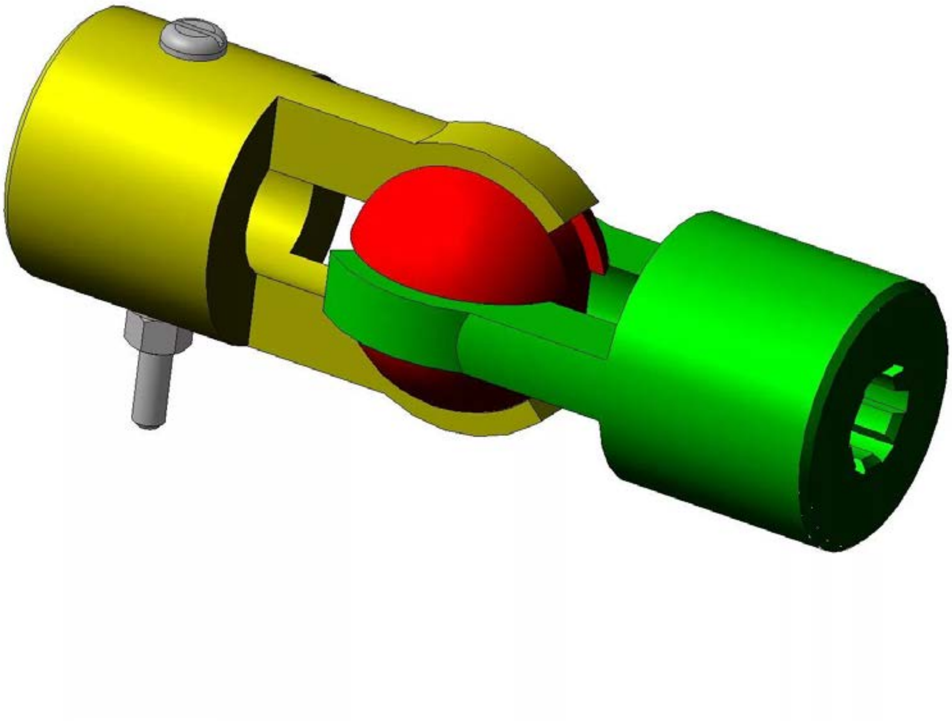


Рис. 1.18. Общий вид шарнирного узла, [11]

2. Схематизация нагрузок

Все нагрузки, действующие на рассчитываемую конструкцию, являются результатом взаимодействия этой конструкции с окружающими телами и средой.

Нагрузки имеют множество различных классификаций, связанных с их природой и особенностями. Остановимся на классификации, которая потребуется при изучении курса строительной механики плоских стержневых систем.

Нагрузки на конструкции подразделяются на силовые, температурные и кинематические.

Силовые нагрузки

Силовые нагрузки — это механические силы, действующие на строительные конструкции. На плоские стержневые системы рассматриваются сосредоточенные и распределенные силовые нагрузки.

Если передача нагрузки происходит через площадку с пренебрежимо малой площадью (для стержневых систем линию с пренебрежимо малой длинной), то нагрузку заменяют на сосредоточенную в точке.

Если передача нагрузки происходит через площадку с значительной площадью (для стержневых систем линию с значительной длинной), то нагрузку рассматривают как распределенную.

Сосредоточенная сила, как правило, обозначается **P** и измеряется в **ньютонах, [P] = Н**. Эта сила является линейной и приложена в одной точке.

Сосредоточенный момент, как правило, обозначается **M** и измеряется в **ньютонах, умноженных на метр, [M] = Н·м.** Момент является парой взаимно-обратных сил, действующих в одной плоскости на некотором расстоянии друг от друга. Это расстояние называется плечом пары сил.

Распределенная нагрузка, как правило, обозначается **q** и измеряется в **ньютонах, деленных на метр, [q] = Н/м.** В общем случае закон распределения нагрузки вдоль оси стержня может быть произвольный, однако наиболее часто встречается случай равномерно распределенной вдоль оси стержня нагрузки.

На рисунке 2.1 представлены изображения сосредоточенных сил, моментов и распределенных нагрузок.

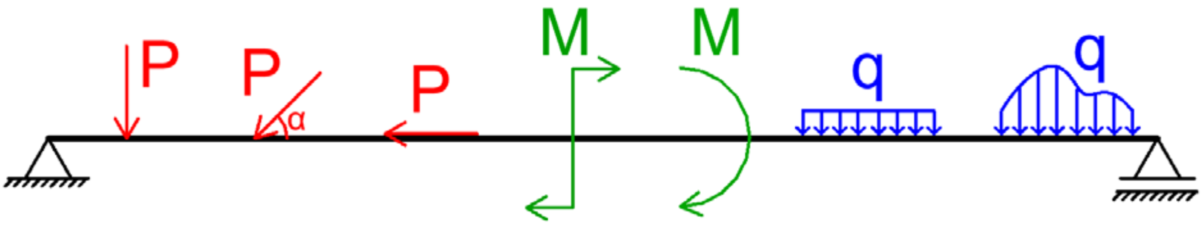


Рис. 2.1. Изображение P, M и q

Температурное воздействие

Температурная нагрузка связана со свойством конструкций изменять свою форму и размеры при изменении температуры окружающей среды. При равномерном нагреве (охлаждении) стержневые конструкции стремятся удлиниться (укоротиться), рисунок 2.2. В результате в некоторых типах конструкций усилий не возникает, но возникают перемещения и деформации (рисунок 2.2 А), а в других, наоборот, помимо перемещений и деформаций, возникают усилия (рисунок 2.2 Б).

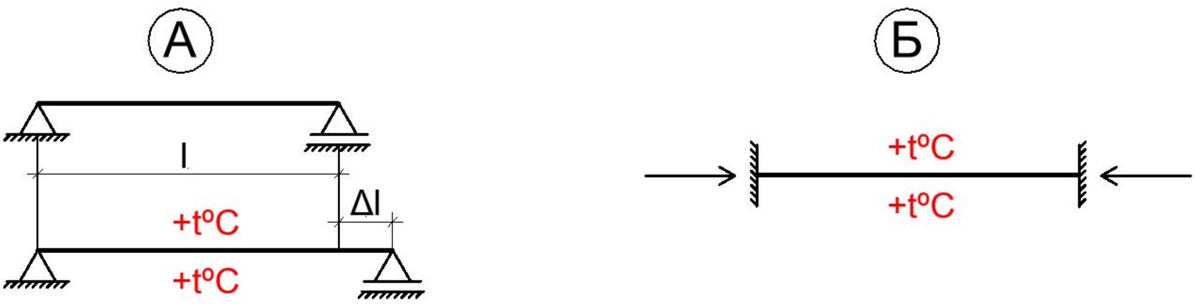


Рис. 2.2. Равномерный нагрев стержня
А – удлинение без усилий, Б – усилие есть

При неравномерном нагреве стержень искривляется и в зависимости от способов его закрепления в нем могут не возникать (рисунок 2.3 А) или возникнуть усилия, (рисунок 2.3 Б).

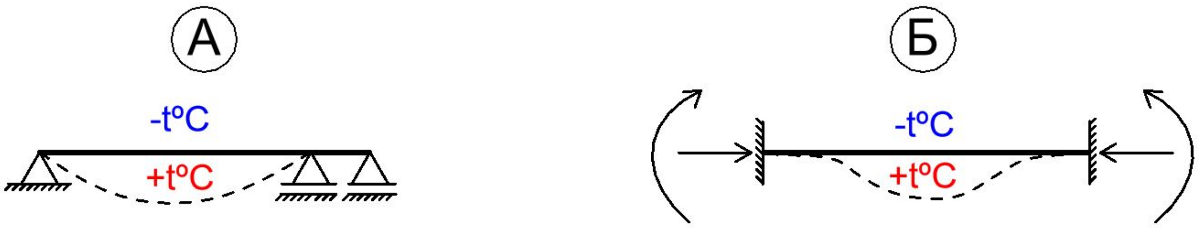


Рис. 2.3. Неравномерный нагрев стержня
А – искривление без усилий, Б – усилия и деформации есть

Кинематическое воздействие

Кинематическое воздействие — это задание перемещений одной или нескольким точкам конструкции. Данные перемещения могут быть связаны с осадкой опор или неточностью изготовления деталей конструкции (стержень изготовлен длиннее или короче проектной длинны). В конструкциях, где опоры не сопротивляются заданному перемещению усилий не возникает (рисунок 2.4 А), в противном случае возникают (рисунок 2.4 Б).

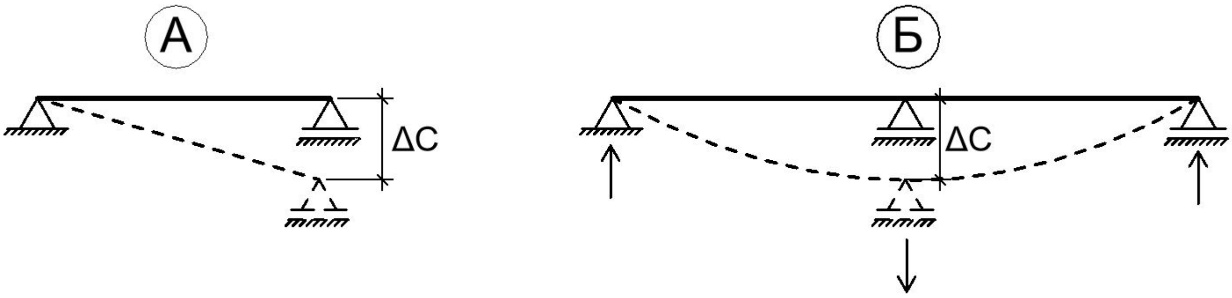


Рис. 2.4. Кинематическое воздействие, связанное с осадкой опоры
А – усилий нет, Б – усилия есть

3. Внутренние усилия. Классификация стержневых систем. Статически определимые стержневые системы

Вспомним введенные в курсе сопротивления материалов понятия внутренних сил (усилий) с использованием метода сечений.

Для расчета конструкций на прочность необходимо знать величину и направление внутренних сил, возникающих в конструкциях. Для их определения используют метод сечений: в теле проводят разрез некоторой плоскостью и рассматривают равновесие любой отсеченной части. Согласно основному принципу механики если тело находится в равновесии под действием внешних сил, то и любая его отсеченная часть должна находиться в равновесии под действием внешних и внутренних сил, приложенных к ней.

На рисунке 3.1 А представлено находящееся в равновесии тело, нагруженное уравновешенной пространственной системой сил $\{P_1 \ldots P_n\}$. Проведем сечение и рассмотрим левую отсеченную часть, рисунок 3.1 Б, которая также должны находиться в равновесии. Равновесие отсеченной части достигается за счет элементарных сил упругости в сечении. Элементарные силы упругости в сечении можно привести к $\vec{R}$ и $\vec{M}$, рисунок 3.1 В, где $\vec{R}$ – главный вектор (вектор, равный векторной сумме всех сил, приложенных к рассматриваемой части тема, иными словами результирующая сила элементарных сил упругости), $\vec{M}$ – главный момент элементарных сил упругости (вектор, равный сумме моментов всех сил, приложенных к рассматриваемой части тема).

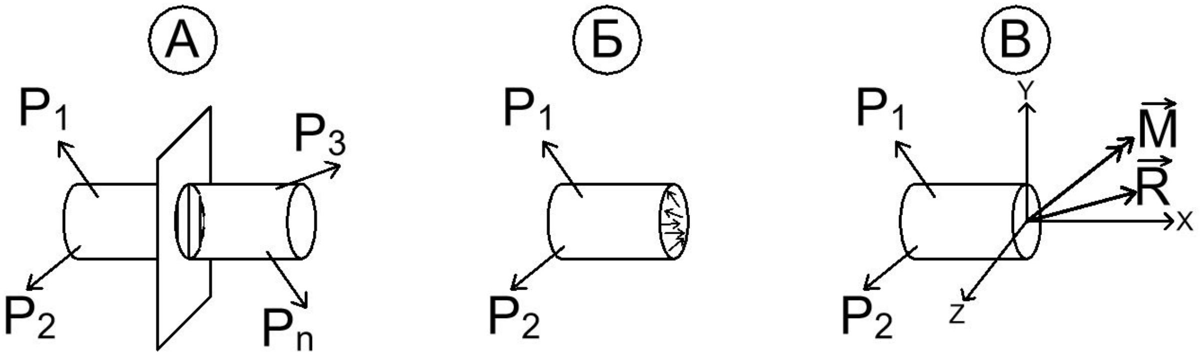


Рис. 3.1. Метод сечений, усилия

Если ввести в центре сечения прямоугольную декартову систему координат, и спроектировать на нее $\vec{R}$, рисунок 3.2 А, в общем случае получим 3 проекции, 3 линейные силы: N, Q_y и Q_z. Аналогично, спроектировав $\vec{M}$ можно получить 3 момента (3 поворотные силы), рисунок 3.2 Б.

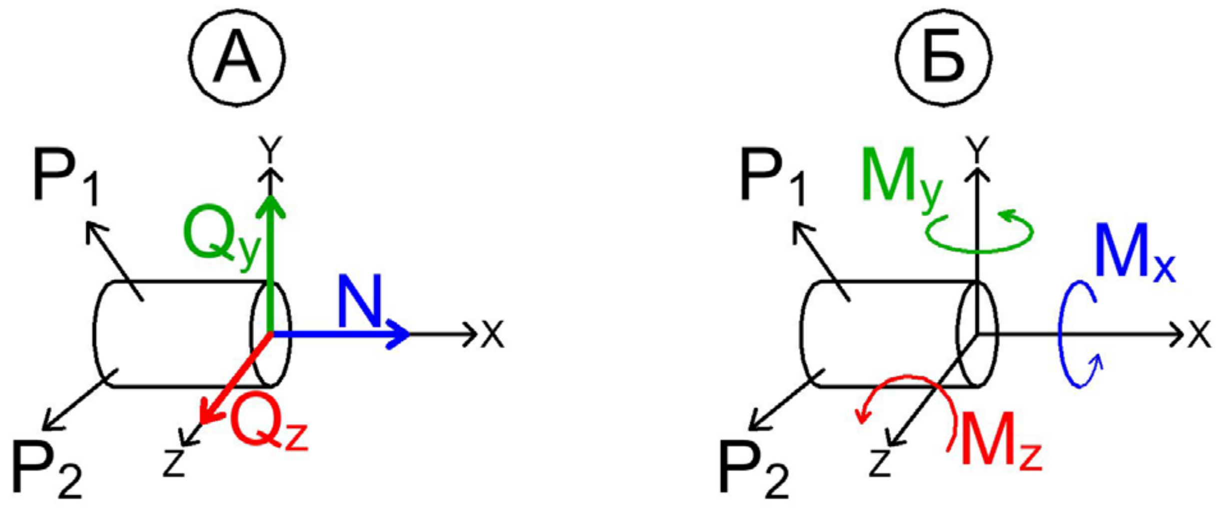


Рис. 3.2. Внутренние силы

N – продольная сила, проекция $\vec{R}$ на ось X;

Q_y – поперечная сила, проекция $\vec{R}$ на ось Y;

Q_z – поперечная сила, проекция $\vec{R}$ на ось Z;

M_y, M_z – изгибающие моменты;

M_x – крутящий момент.

Эти внутренние силы и называются усилиями, определение значений которых в различных типах конструкций и будет центральным вопросом в курсе строительной механики плоских стержневых систем.

Для плоских стержневых систем из 6 усилий в общем случае, остается только 3: продольная сила N, поперечная сила Q и изгибающий момент M. Здесь и в дальнейшем N, Q и M указаны без индексов, во-первых, в связи с отсутствием необходимости отличать Q_y и Q_z и M_y и M_z, а также в связи с введением произвольных систем координат в сечении.

Изгибающий момент M в некотором сечении численно равен алгебраической сумме статических моментов всех сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно центра тяжести сечения.

Поперечная сила Q в некотором сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, приложенных по одну сторону от сечения, на нормаль к оси стержня в этом сечении.

Продольная сила N в некотором сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, приложенных по одну сторону от сечения, на касательную к оси стержня в этом сечении.

Если проводить сечения в разных местах конструкции, то и внутренние усилия, необходимые для обеспечения равновесия отсеченной части в общем случае могут быть различны как по значению, так и по направлению, рисунок 3.3.

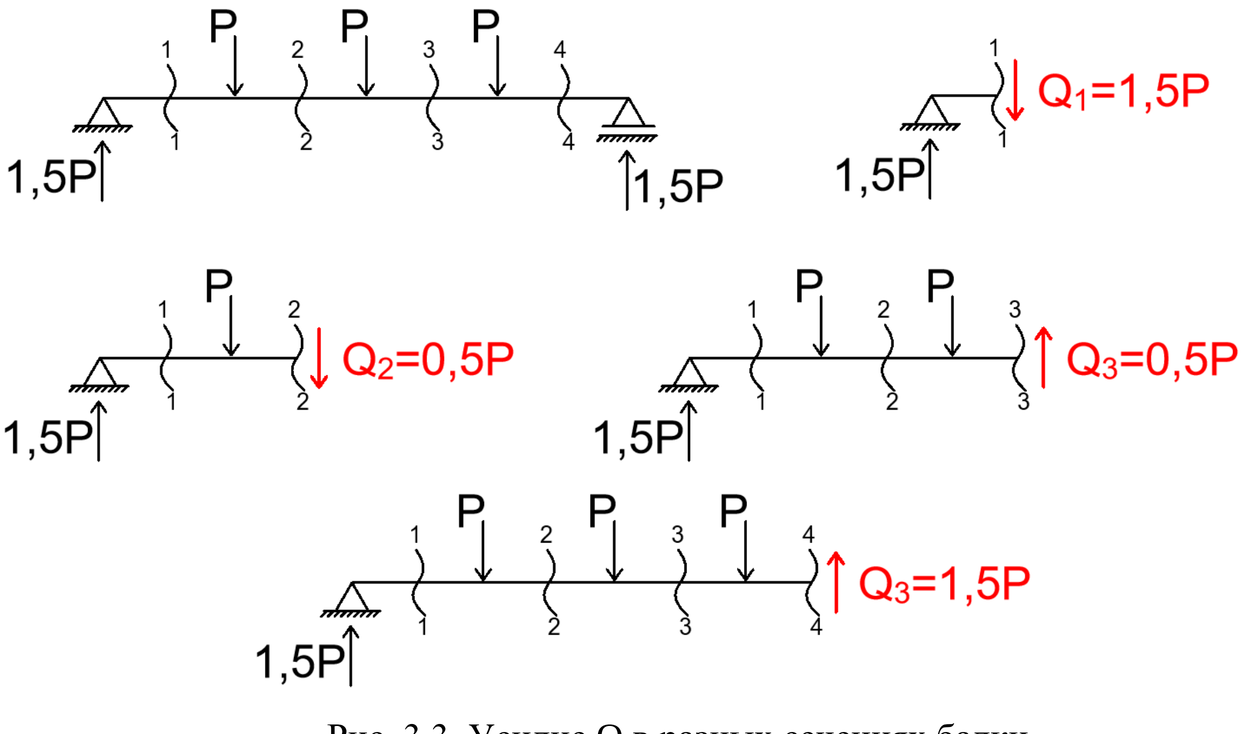
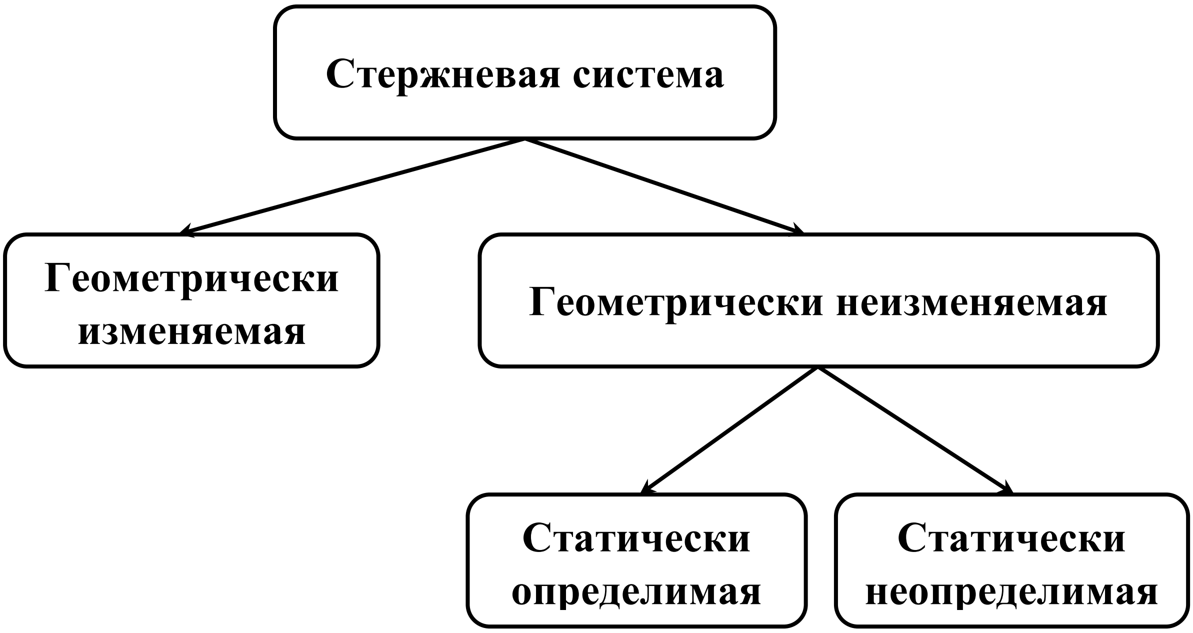


Рис. 3.3. Усилие Q в разных сечениях балки

Для успешного расчета конструкции необходимо определить значения внутренних усилий во всех сечениях. Графики, характеризующие законы изменения усилий вдоль оси стержня называются **эпюрами усилий**. Иными словами, эпюры усилий – графики, показывающие, как изменяются внутренние силовые факторы по длине стержня. Именно их построение и будет являться результатом решения большей части расчетно-графических работ курса строительной механики плоских стержневых систем.

Перейдем теперь к классификации стержневых систем.

На схеме представлена наиболее общая классификация стержневых систем.



Геометрически изменяемая система — это система, допускающая конечное относительное смещение без деформации. Геометрически изменяемые системы способны нести только нагрузку, при которой возможно удовлетворение равновесия и не способны нести произвольную нагрузку, не доводящую до разрушения. Примеры геометрически изменяемых, в том числе мгновенно изменяемых систем представлены на рисунке 3.4. В строительстве следует избегать применения геометрически изменяемых систем.

Структурный анализ плоских стержневых систем с подробными пояснениями методов проверки геометрической изменяемости систем будут даны в отдельном пособии

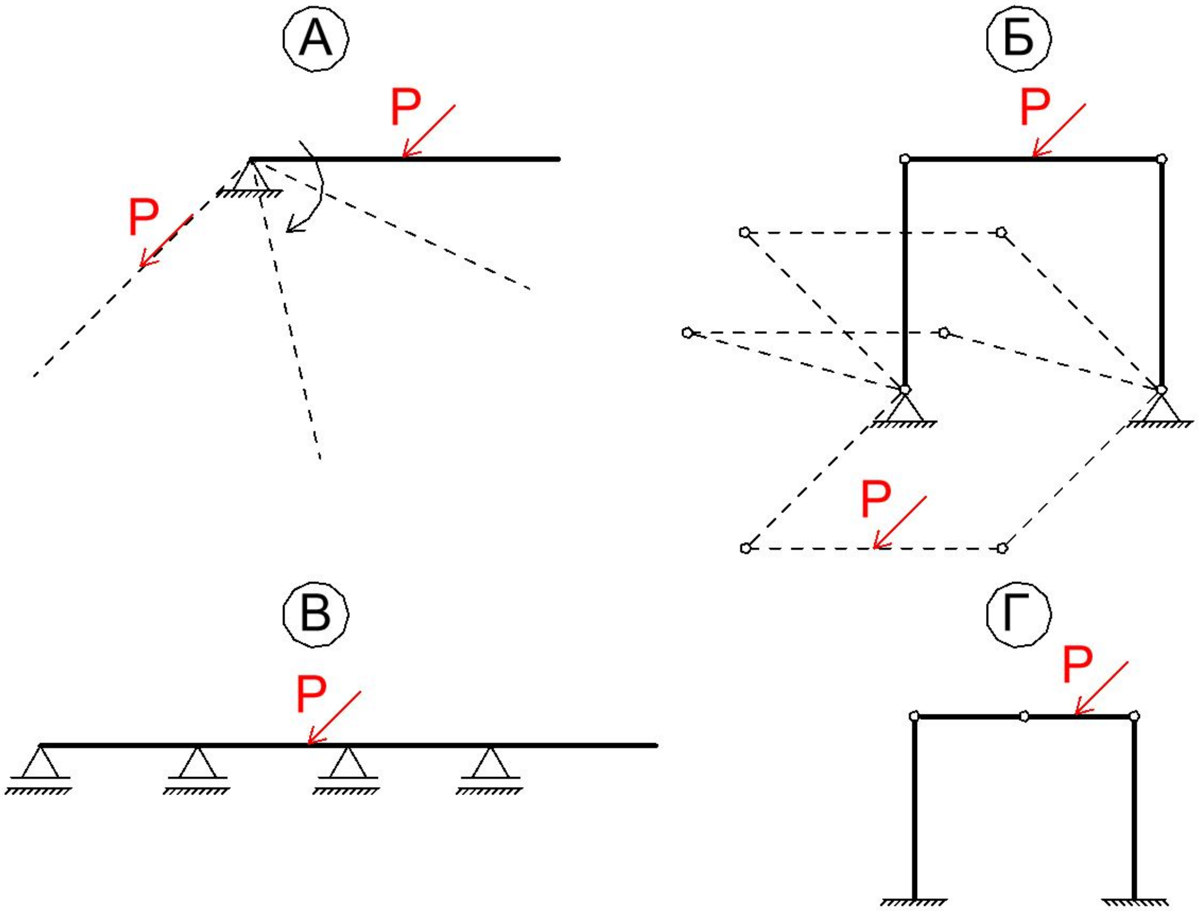


Рис. 3.4. Геометрически изменяемые системы

К геометрической изменяемости системы приводит либо отсутствие достаточного количества опорных связей (А на рисунке 3.4), либо наличие избыточного числа шарниров (Б на рисунке 3.4). Возможны также случаи неверной расстановки необходимого количества опорных связей (В на рисунке 3.4) и шарниров (Г на рисунке 3.4).

Геометрически неизменяемая система — это система соединенных между собой элементов, допускающих относительные перемещения только в случае деформации. Геометрически неизменяемые системы могут нести произвольную нагрузку, не доводящую до разрушения. Примеры геометрически неизменяемых систем представлены на рисунке 3.5. Геометрическая неизменяемость одно из основных свойств, которым должна обладать грамотно спроектированная строительная конструкция из любого материала.

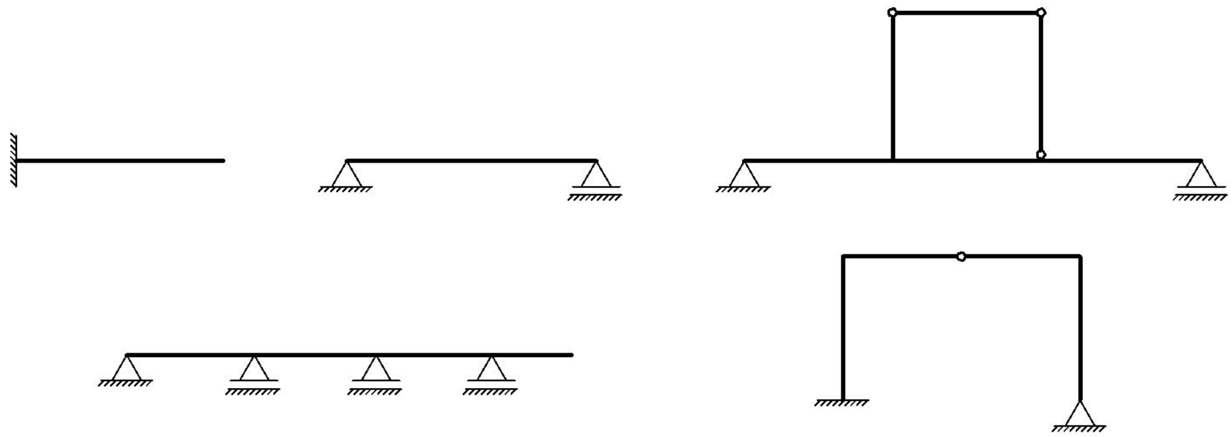


Рис. 3.5. Геометрически неизменяемые системы

Вопрос о геометрической изменяемости / неизменяемости конструкции можно решить на основе структурного анализа стержневых систем [12]–[13]. Данный вопрос является достаточно объемным и, несмотря на его важность, в данном пособии не рассматривается.

Статически определимой системой называется геометрически неизменяемая стержневая система, в которой все внутренние усилия могут быть определены с помощью только уравнений статики (уравнений равновесия). Для них нет необходимости рассматривать деформированное состояние системы, следовательно, все стержни рассматриваются как абсолютно жесткие, следовательно, распределение внутренних усилий не зависят от жесткостных характеристик отдельных частей.

Для определения внутренних усилий в **статически неопределимых системах** недостаточно уравнений равновесия и необходимо рассматривать их деформированное состояние, следовательно, распределение внутренних усилий зависит от формы и размеров поперечного сечения и материалов отдельных частей.

Проверка условия статической определимости стержневой системы определяется с помощью формулы

$$n_{ст.н.} = \text{С}_{\text{оп}} + 3 \cdot \text{К} - 3 - \text{Ш}$$

где

$\mathbf{С_{ОП}}$ – количество **реакций** опорных связей;

3·К – утроенное количество **замкнутых контуров**;

3 – количество **уравнений равновесия** для плоских систем;

Ш – число **простых шарниров**.

В данной формуле ($С_{ОП}$+3·К) – общее количество неизвестных в задаче (внешних и внутренних), (3+Ш) – общее количество уравнений равновесия, которые можно составить для заданной системы.

Если $\mathbf{n_{ст.н.} = 0}$**,** то число неизвестных в задаче равно числу уравнений равновесия и система статически-определимая.

Если $\mathbf{n_{ст.н.} > 0}$**,** то число неизвестных в задаче превышает число уравнений равновесия и система статически-неопределимая.

Если $\mathbf{n_{ст.н.} < 0}$**,** то число неизвестных в задаче меньше числа уравнений равновесия и система геометрически изменяемая.

Следует отметить, что условие $n_{ст.н.} = 0$ и $n_{ст.н.} > 0$ являются необходимыми, но недостаточными для того, чтобы отнести систему к статически-определимым и неопределимым соответственно. Помимо выполнения данного условия, система должна быть геометрически неизменяемой. Ниже будут приведены примеры, иллюстрирующие данное утверждение. Поэтому анализ геометрической неизменяемости системы необходимо проводить вне зависимости от результата n, полученного по формуле, указанной выше.

Дадим несколько дополнительных пояснений к формуле.

$С_{ОП}$ – именно количество реакций опорных связей, а не количество опор. Так в шарнирно-подвижной опоре возникает 1 реакция (рисунок 1.1), в шарнирно-неподвижной опоре возникает 2 реакции (рисунок 1.4), в жесткой заделке возникает 3 реакции (рисунок 1.7), в подвижной заделке возникает 2 реакции (рисунок 1.10).

3·К – утроенное количество замкнутых контуров. Каждый замкнутый контур добавляет по три дополнительные внутренние неизвестные в связи с тем, что проводя сечение через замкнутый контур, разрезаются не один, а два стержня в каждом из которых возникают по 3 неизвестных внутренних усилия, рисунок 3.6.

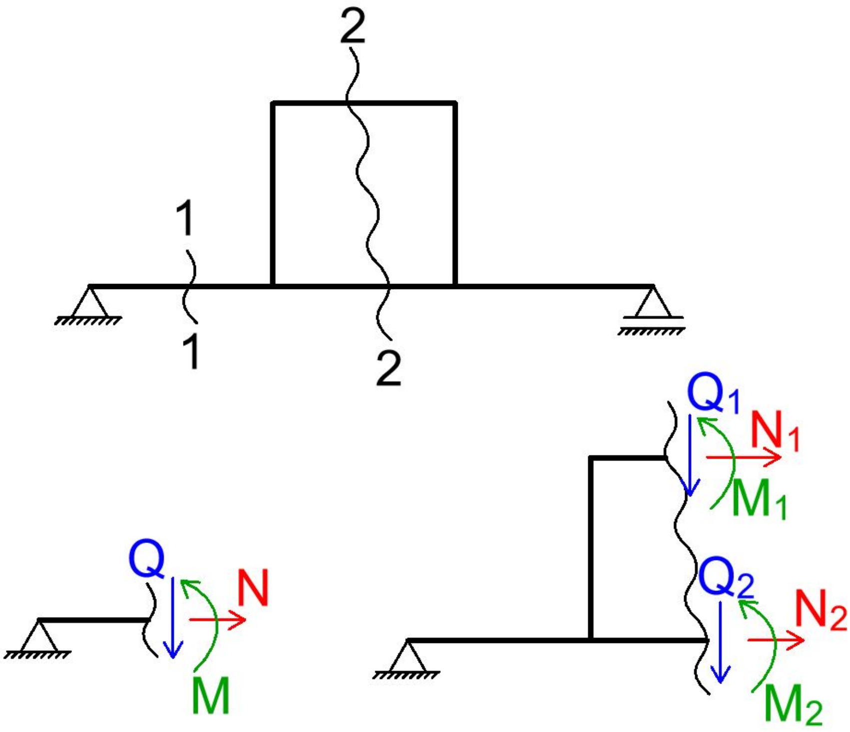


Рис. 3.6. Сечение через замкнутый контур

3 – количество уравнений равновесия для плоских систем. Два из них — это равенство нулю суммы проекций всех сил на две взаимно-перпендикулярные оси (обычно горизонтальную X и вертикальную Y). Третье – равенство нулю суммы статических моментов всех сил относительно любой точки плоскости. В символьном виде система трех уравнений равновесия имеет вид:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_{(\cdot)} = 0 \end{cases}$$

Ш – число простых шарниров. Простым называется шарнир, в котором сходятся 2 стержня (соединяющий 2 стержня). Иными словами, Ш – суммарная кратность всех шарниров в системе. Поясним на примере как определить численное значение Ш в различных случаях. На рисунке 3.7 представлена плоская рама сложной конфигурации с несколькими шарнирами различной кратности. Кратность любого шарнира в плоской задаче определяется как количество стержней входящих в шарнир минус единица.

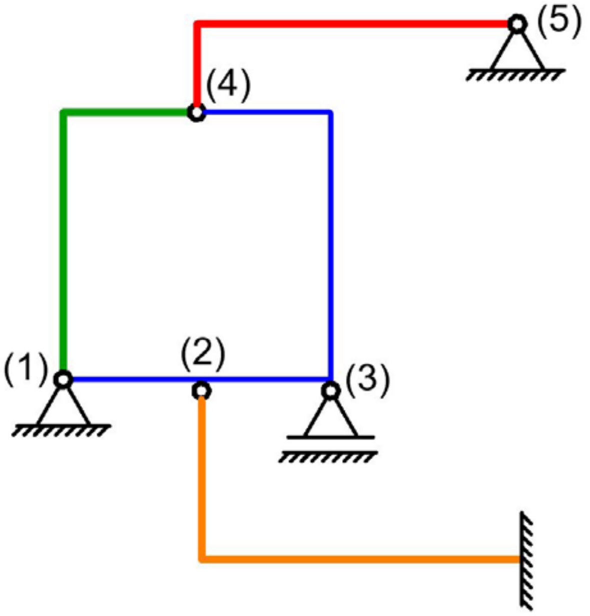


Рис. 3.7. Пример для подсчета Ш

Начнем с шарнира (5). Это шарнирно-неподвижная опора, шарнир в который входит 1 стержень (красного цвета), значит его кратность равна 1–1=0, $Ш_{(5)}=0$.

Шарнир (1) также является шарнирно-неподвижной опорой, но в ней шарнир является «врезанным» межу зеленым и синим стержнями, то есть в этом шарнире соединяются 2 стержня, и его кратность равна 2–1=1, $Ш_{(1)}=1$.

Шарнир (3) является шарнирно-подвижной опорой, но в отличии от шарнира (1) он не является «врезанным», сплошной единый синий стержень не разрезается в углу шарниром (3), а лишь примыкает шарнирно к опоре, поэтому его кратность равна 1–1=0, $Ш_{(3)}=0$.

Шарнир (2) соединяет два стержня: сплошной единый синий стержень с оранжевым, значит его кратность равна 2–1=1, $Ш_{(2)}=1$.

Наконец шарнир (4) полностью «врезан», он соединяет три стержня: красный, зеленый, синий, его кратность равна 3–1=2, $Ш_{(4)}=2$.

Суммарная кратность всех шарниров системы равна:

$$Ш = Ш_{(1)} + Ш_{(2)} + Ш_{(3)} + Ш_{(4)} + Ш_{(5)}$$

$$Ш = 1 + 1 + 0 + 2 + 0 = 4$$

Очень важно понять разницу между шарнирами (1) и (3), а также (2) и (4), если разница четко не ясна обратитесь еще раз к данному примеру.

Приведем пример подсчета степени статической неопределимости на примере рамы изображенной на рисунке 3.8.

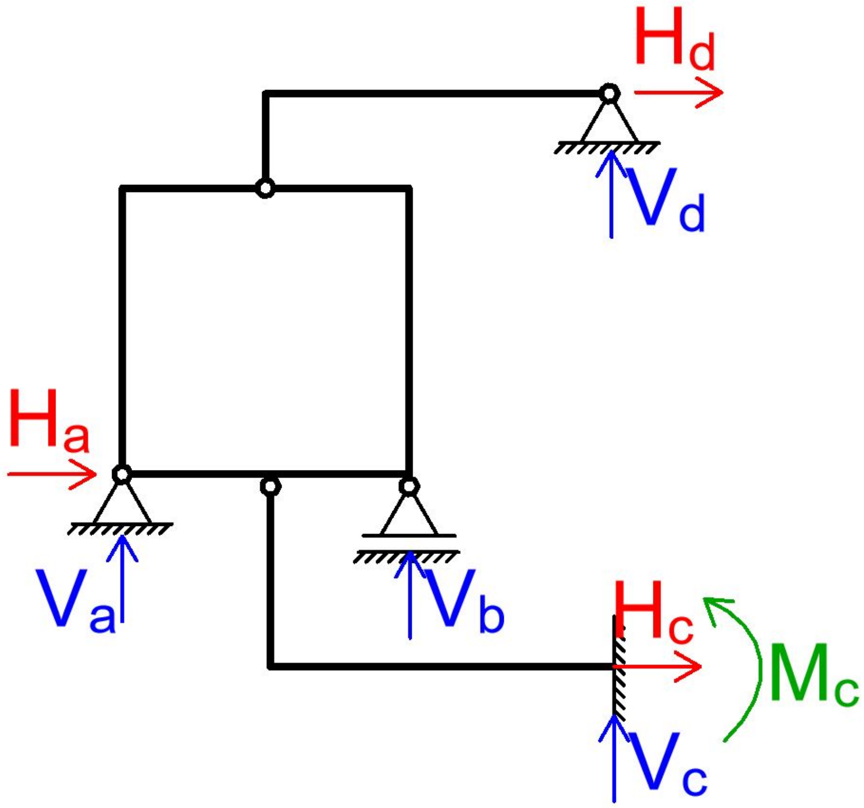


Рис. 3.8. Пример для вычисления $n_{ст.н.}$

Реакции связей всех опорных закреплений представлены на рисунке 3.5, $С_{оп} = 8$. В системе 1 замкнутый контур. Суммарная кратность всех шарниров Ш = 4 (вычислено выше). Таким образом,

$$n_{ст.н.} = С_{оп} + 3 \cdot К - 3 - Ш = 8 + 3 \cdot 1 - 3 - 4 = 4$$

В связи с тем, что рама, изображенная на рисунке 3.5, является геометрически неизменяемой, то $n_{ст.н.}$=4 говорит о том, что данная рама статически-неопределима. Для ее расчета к уравнениям равновесия необходимо составить еще 4 дополнительные уравнения.

4. Правила построения эпюр внутренних усилий. Правила знаков

Прежде чем ввести правила построения эпюр внутренних усилий, а также связанные с этим правила знаков для эпюр внутренних усилий, напомним, что такое статический момент силы и как он вычисляется в различных случаях. Статический момент силы или просто момент силы относительно некоторой точки определяется как произведение силы на плечо силы. Плечо силы — это кратчайшее расстояние от линии действия силы до точки, в которой определяется момент. Линия действия силы — это прямая линия, вдоль которой действует сила. На рисунке 4.1 представлен пример вычисления моментов сил относительно различных точек.

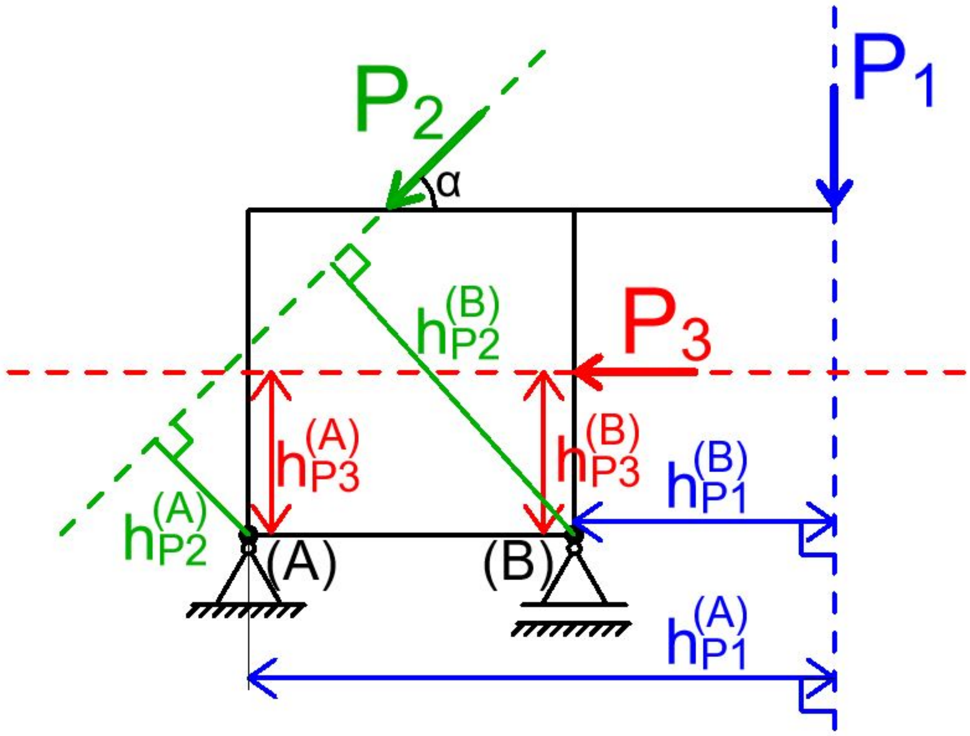


Рис. 4.1. Пример вычисления моментов сил

Момент силы P_1, относительно точки (A) равен $P_1 \cdot h_{P1}^{(A)}$, где $h_{P1}^{(A)}$ – кратчайшее расстояние (перпендикуляр) от точки (A) до линии действия силы P_1 (синяя штрихпунктирная линия). Момент силы P_1, относительно точки (B) равен $P_1 \cdot h_{P1}^{(B)}$, где $h_{P1}^{(B)}$ – кратчайшее расстояние (перпендикуляр) от точки (B) до линии действия силы P_1.

Момент силы P_2, относительно точки (А) равен $P_2 \cdot h_{P2}^{(A)}$, где $h_{P2}^{(A)}$ – кратчайшее расстояние (перпендикуляр) от точки (А) до линии действия силы P_2 (зеленая штрихпунктирная линия). Момент силы P_2, относительно точки (В) равен $P_2 \cdot h_{P2}^{(B)}$, где $h_{P2}^{(B)}$ – кратчайшее расстояние (перпендикуляр) от точки (В) до линии действия силы P_2.

Момент силы P_3, относительно точки (А) равен $P_3 \cdot h_{P3}^{(A)}$, где $h_{P3}^{(A)}$ – кратчайшее расстояние (перпендикуляр) от точки (А) до линии действия силы P_3 (красная штрихпунктирная линия). Момент силы P_3, относительно точки (В) равен $P_3 \cdot h_{P3}^{(B)}$, где $h_{P3}^{(B)}$ – кратчайшее расстояние (перпендикуляр) от точки (В) до линии действия силы P_3.

Как видно из приведенного примера, в зависимости от того где находится точка, относительно которой вычисляется момент, а также в зависимости от ориентации линии действия силы, плечи силы могут совпадать ($h_{P3}^{(A)} = h_{P3}^{(B)}$) или не совпадать.

В случае действия равномерно распределенной нагрузки q, статический момент определяется как момент силы, являющейся равнодействующей распределенной нагрузки, рисунок 4.2. Равнодействующая R_q в случае равномерно распределенной нагрузки равна величине распределенной нагрузки умноженной на длину приложения (действия) нагрузки l: $R_q = q \cdot l$.

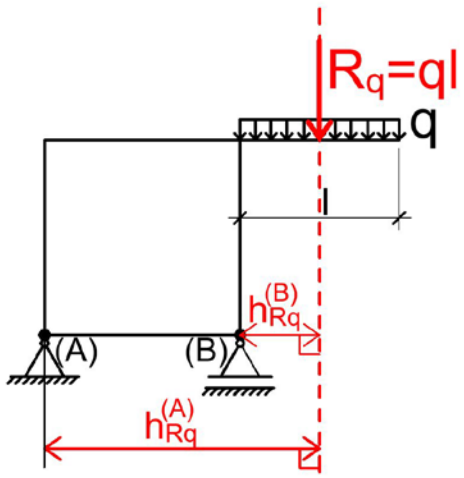


Рис. 4.2. Пример вычисления моментов от распределенной нагрузки q

Момент от распределенной нагрузки q, относительно точки (A) равен $R_q \cdot h_{Rq}^{(A)} = (q \cdot l) \cdot h_{Rq}^{(A)}$, где $h_{Rq}^{(A)}$ – кратчайшее расстояние (перпендикуляр) от точки (A) до линии действия равнодействующей распределенной нагрузки R_q (красная штрихпунктирная линия).

Момент от распределенной нагрузки q, относительно точки (B) равен $R_q \cdot h_{Rq}^{(B)} = (q \cdot l) \cdot h_{Rq}^{(B)}$, где $h_{Rq}^{(B)}$ – кратчайшее расстояние (перпендикуляр) от точки (B) до линии действия равнодействующей распределенной нагрузки R_q.

В случае вычисления внутреннего изгибающего момента от распределенной нагрузки в стержне, на который эта нагрузка действует, со сменой сечения вычисления M меняется и длина распределения действия нагрузки (т.е. величина равнодействующей), и плечо ($R_1 \neq R_2$; $h_1 \neq h_2$). В случае вычисления внутреннего изгибающего момента от распределенной нагрузки в соседнем стержне, где распределенная нагрузка уже не действует, со сменой сечения вычисления M меняется только плечо равнодействующей ($R_2 = R_3$; $h_2 \neq h_3$), рисунок 4.3.

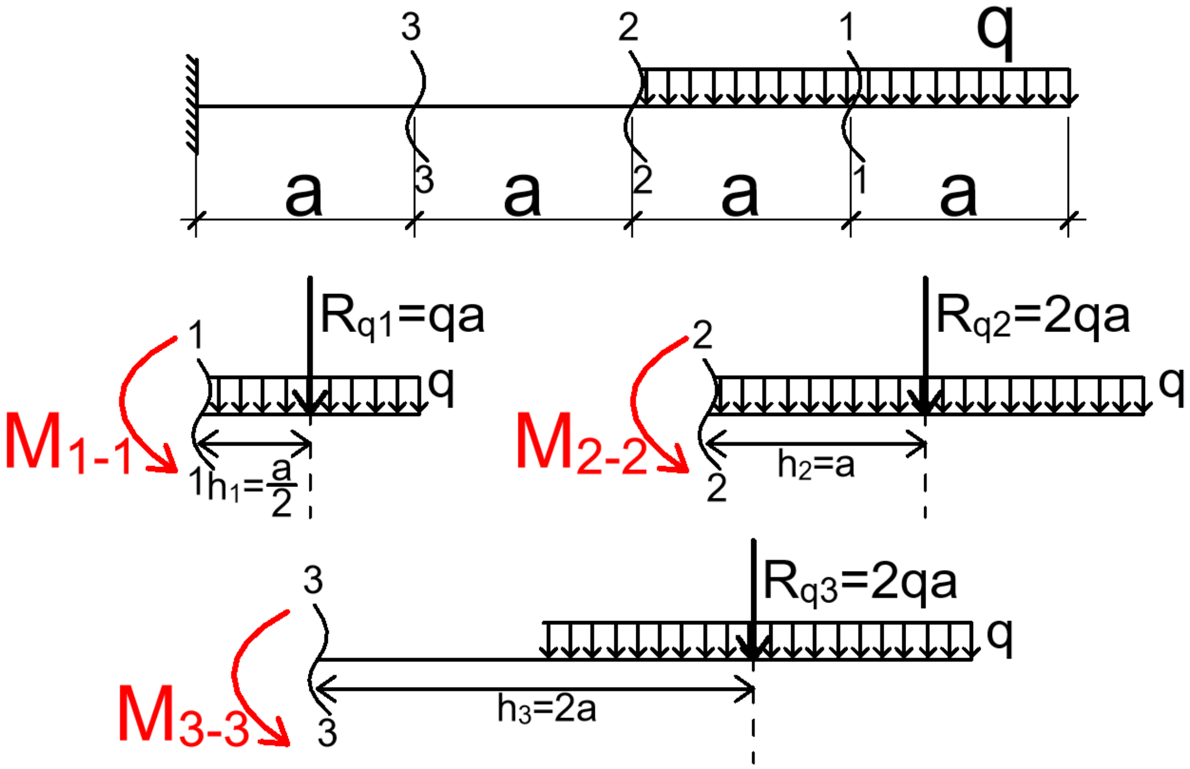


Рис. 4.3. Пример вычисления моментов от распределенной нагрузки q

В сечении 1-1 действует изгибающий момент:

$$M_{1-1} = R_1 \cdot h_1 = (q \cdot a) \cdot \frac{a}{2} = \frac{qa^2}{2}$$

В сечении 2-2 действует изгибающий момент:

$$M_{2-2} = R_2 \cdot h_2 = (q \cdot 2a) \cdot a = 2qa^2$$

В сечении 3-3 действует изгибающий момент:

$$M_{3-3} = R_3 \cdot h_3 = (q \cdot 2a) \cdot 2a = 4qa^2$$

Правила построения эпюр внутренних усилий

Так же, как и для построения графиков функций в школьном курсе алгебры, для построения эпюр внутренних усилий необходимо выбрать систему отсчета (систему координат) и договориться о правилах построения графиков.

Условимся при построении эпюры изгибающего момента М, численное значение изгибающего момента откладывать со стороны растянутых волокон стержня (со стороны растянутой зоны, растянутой грани, растянутой стороны стержня). Данное правило общее для всех строительных специальностей и совпадает с правилом курса сопротивления материалов для строителей.

Часто, в технической (машиностроительной) литературе используется правило построения М на сжатом волокне, однако в строительной отрасли оно не закрепилось.

На рисунке 4.4 представлены два простейших примера, в которых изначально ясно какие волокна горизонтального стержня (верхние или нижние) растягиваются. На рисунке 4.4 А представлен консольно-закрепленный стержень с сосредоточенной силой на конце. В результате действия силы Р стержень прогибается так, как показано на рисунке штрихпунктирной линией. Значит, по всей длине стержня растянутые волокна находятся сверху, и значит, по всей длине стержня сверху же откладываются значения внутреннего изгибающего момента.

На рисунке 4.4 Б представлен шарнирно-закрепленный стержень с равномерно-распределенной нагрузкой, распределенной по всей длине стержня и действующей перпендикулярно оси стержня. В результате действия нагрузки q стержень прогибается так, как показано на рисунке штрихпунктирной линией. Значит, по всей длине стержня растянутые волокна находятся снизу, и значит, по всей длине стержня снизу же откладываются значения внутреннего изгибающего момента.

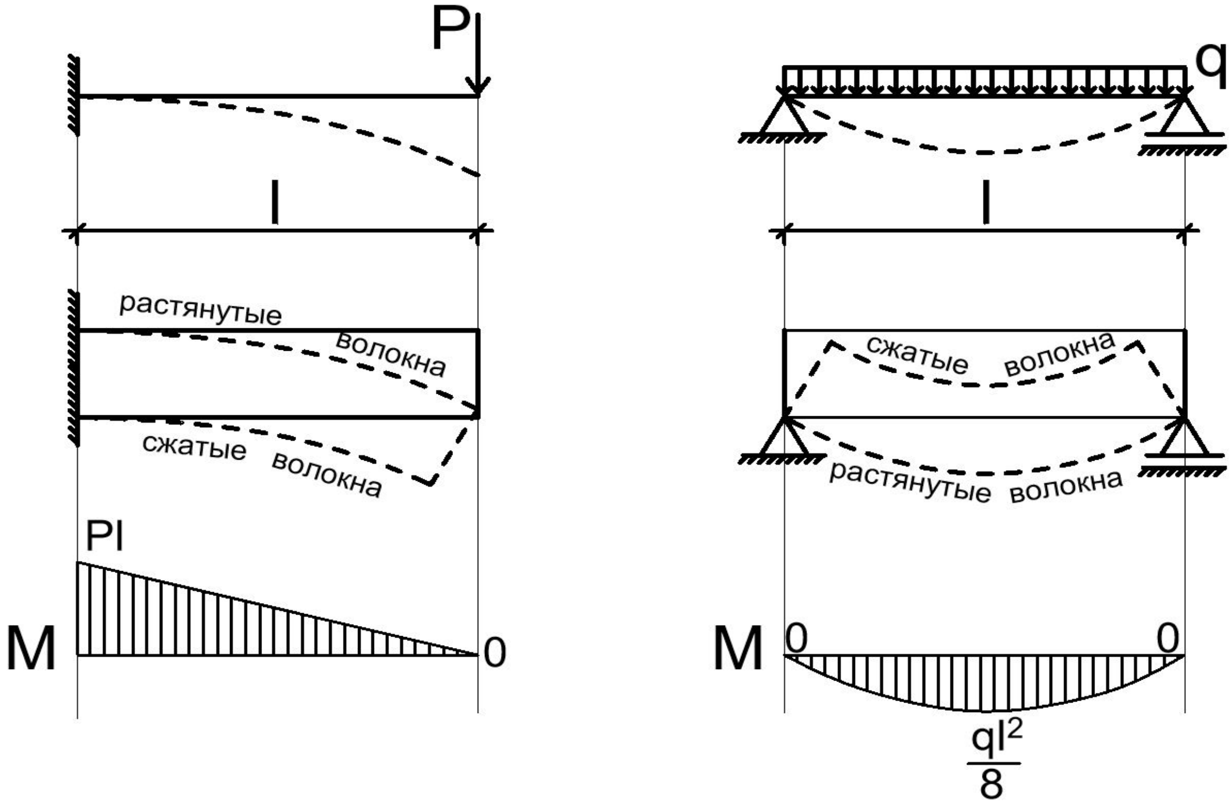


Рис. 4.4. Пример с растянутыми волокнами

Теперь необходимо договориться о знаках для внутренних усилий.

В строительной механике для внутренних усилий не вводят правила знаков, связанные с общей системой координат. Таким образом знак «+» или «–» для изгибающего момента в сечении выбирается произвольно, на усмотрение расчетчика. На рисунке 4.5 представлено два противоположных друг другу правила знаков для эпюры M. Оба данных решения абсолютно верны: в обоих случаях эпюра M построена со стороны растянутых волокон и имеет одинаковые значения по модулю.

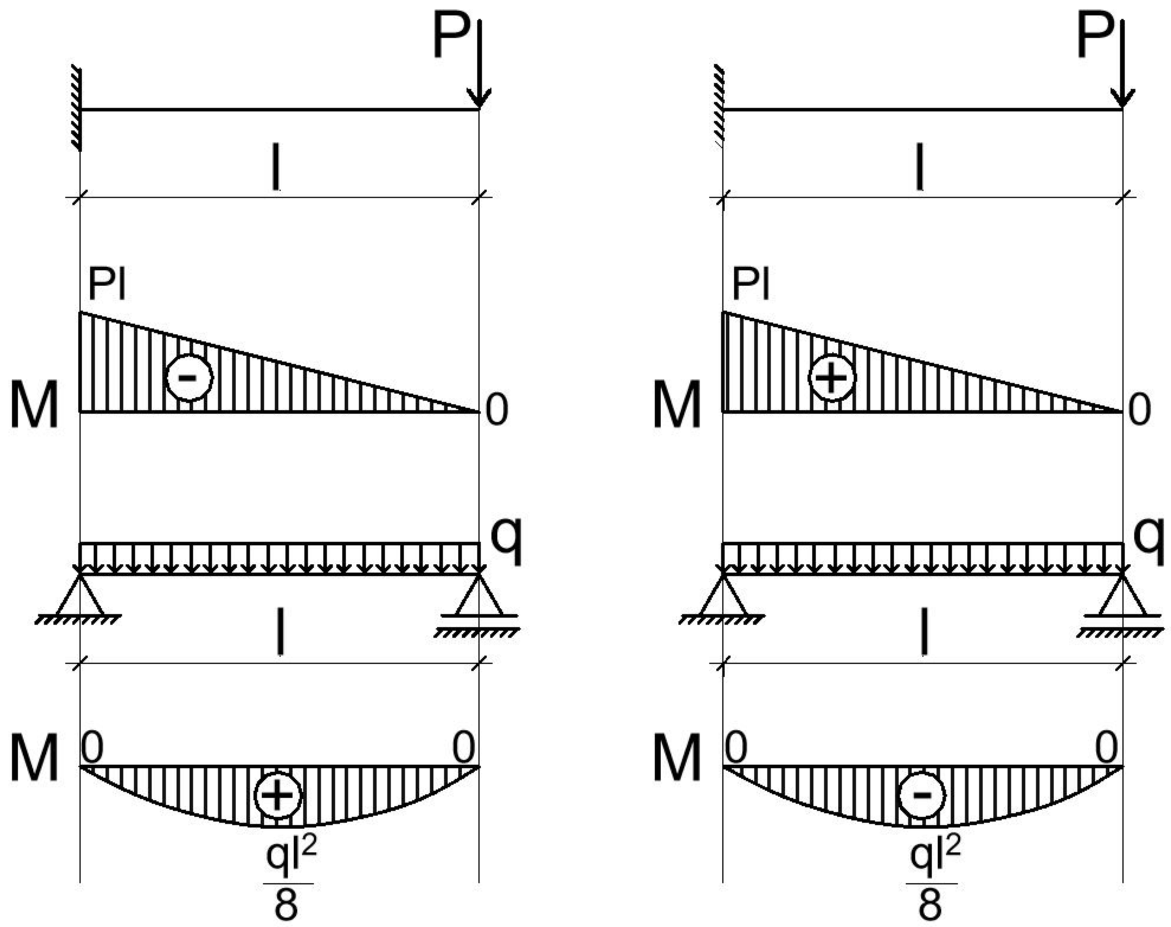


Рис. 4.5. Пример выбора знака для эпюры M

Тем не менее, после того, как расчетчик произвольным образом выбрал правило знаков для эпюры M, далее должны соблюдаться определенные зависимости для оставшихся эпюр Q и N, в частности, M и Q связаны между собой как функция и ее производная:

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

Поэтому выбрав правило знаков для M, мы однозначно определили правило знаков и для Q.

Так как при возрастании функции M, ее производная Q должна быть положительной, и наоборот, при убывании функции M, ее производная Q должна быть отрицательной, то необходимо произвольно выбранному правилу знаков для эпюры M однозначно сопоставить направление движения по стержню, от начала к концу, направление, вдоль которого определяется возрастает функция M или убывает. Для этого есть множество способов, остановимся на двух наиболее часто используемых в курсах строительной механики. Подчеркнем, что **оба этих способа описывают одно и то же правило знаков!**

Первый вариант: каждый стержень в стержневой системе отмечается по всей его длине с одной из сторон пунктиром, рисунок 4.6.

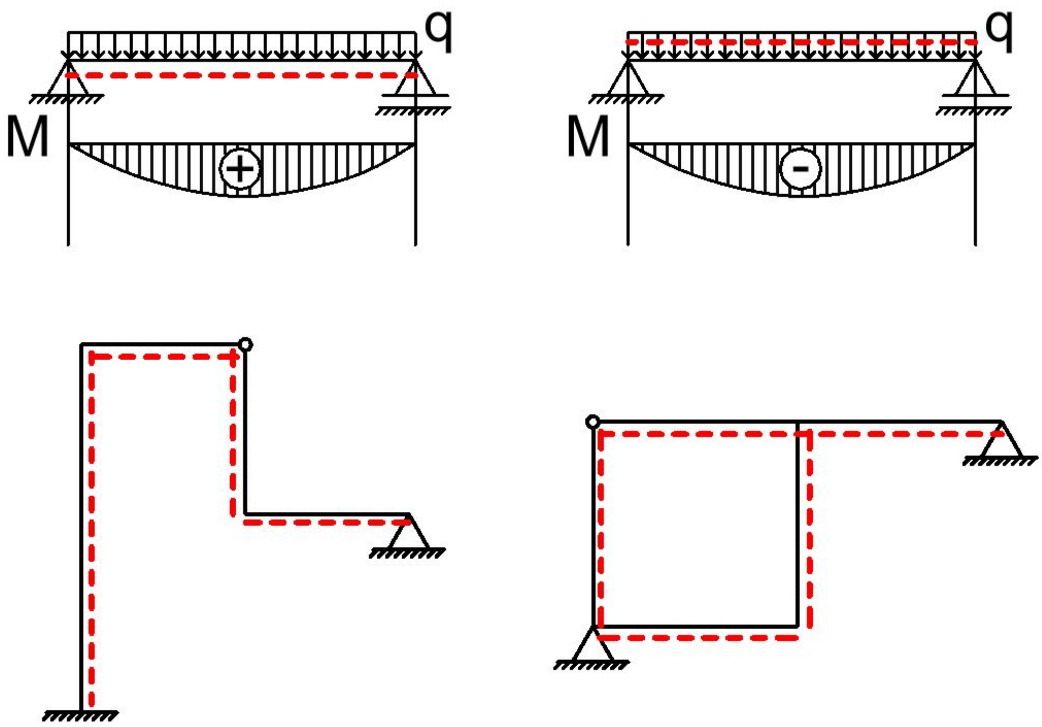


Рис. 4.6. Изображение пунктира

Со стороны пунктира значения эпюры M отмечаются знаком «+», с противоположной стороны знаком «–». При движении от начала стержня к концу пунктир должен быть справа, рисунок 4.7.

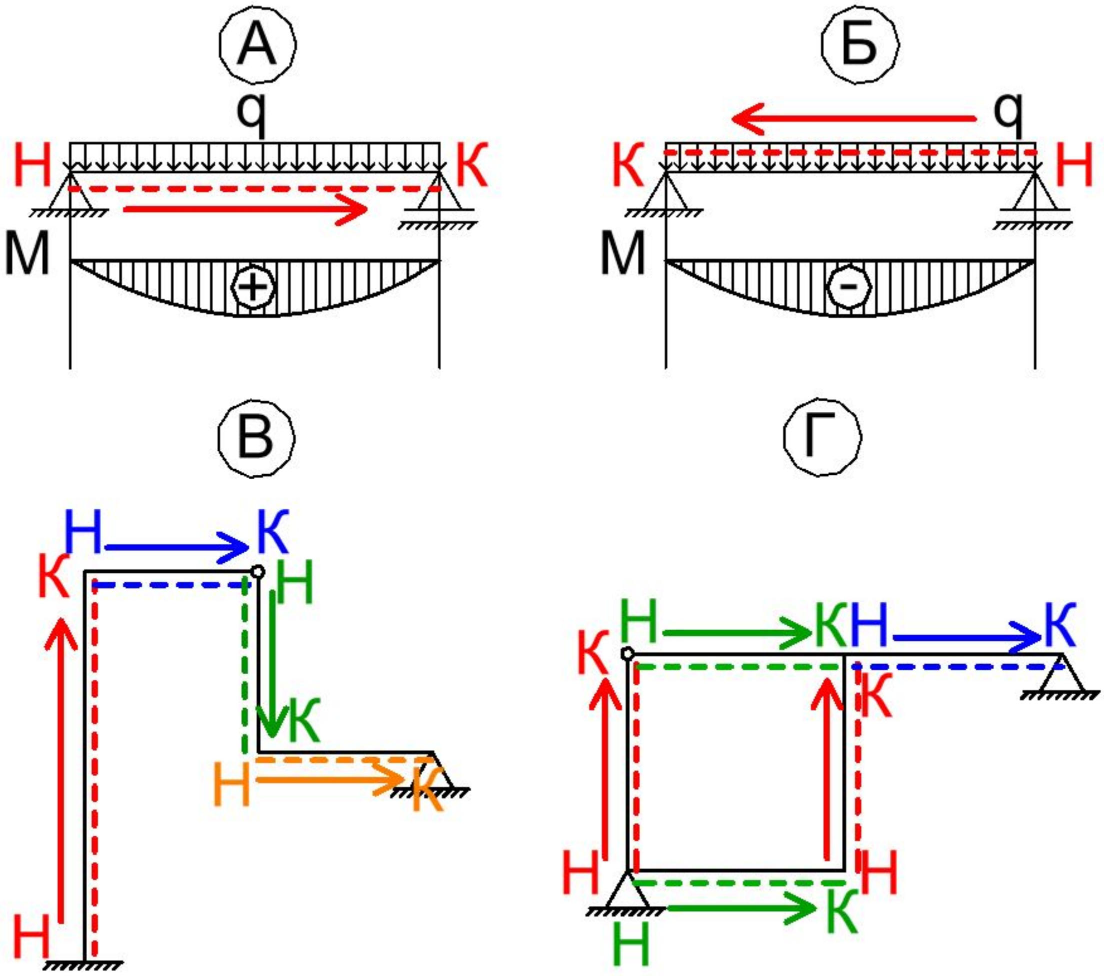


Рис. 4.7. Направление движения по стержню

На рисунке 4.7 А пунктир выбран снизу, значит, чтобы он был по правую руку при движении по стержню, двигаться нужно слева направо: левая точка стержня начало (Н), правая точка конец (К).

На рисунке 4.7 Б пунктир выбран сверху, значит, чтобы он был по правую руку при движении по стержню, двигаться нужно справа налево: правая точка стержня начало, левая точка конец.

На рисунке 4.7 В, Г показан пунктир на рамах. Каждому стержню необходимо отметить сторону пунктиром. Данный выбранный пунктир сохраняется на протяжении всего решения задачи, включая построение эпюр Q и N.

Еще раз подчеркнем, что эпюра изгибающего момента М строится со стороны растянутого волокна стержня и ни ее вид, ни ее значения по модулю не зависят от того с какой стороны будет нарисован пунктир, и соответственно, проставлены знаки «+» или «–».

Для эпюры поперечных сил Q знак «+» со стороны противоположной пунктиру, а со стороны отмеченной пунктиром у эпюры Q ставится знак «–», рисунок 4.8.

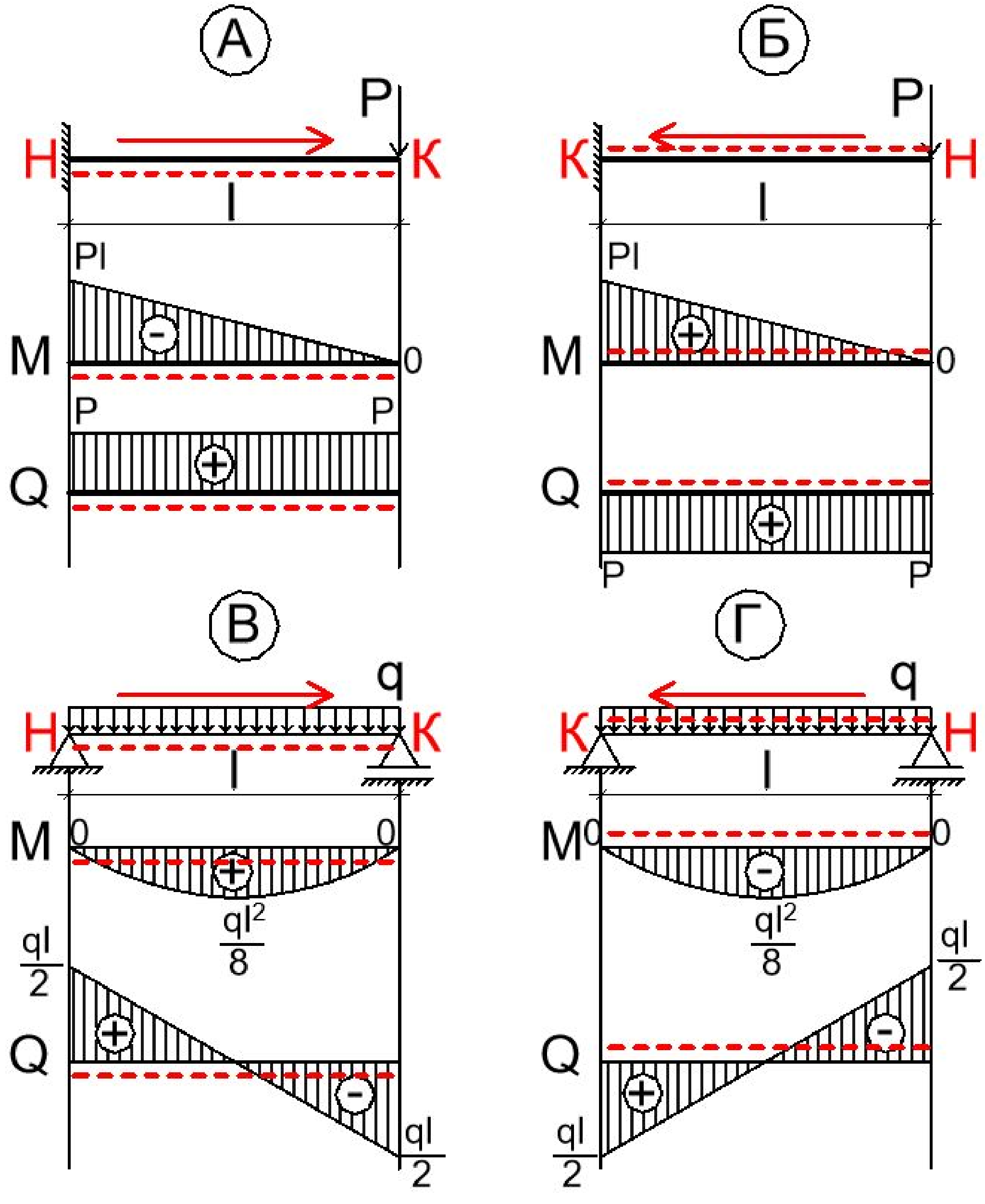


Рис. 4.8. Знаки на эпюре Q

На рисунке 4.8 А пунктир выбран снизу, значит движение по стержню от начала к концу слева направо. При движении слева направо эпюра М возрастает (значения растут от отрицательного –Pl до 0), значит значения Q, как производной от M должны быть положительны. Положительные значения Q откладываются со стороны противоположной пунктиру.

На рисунке 4.8 В аналогично, пунктир снизу, движение по стержню слева направо. При этом эпюра M вначале возрастает от 0 до $+\frac{ql^2}{8}$, а затем убывает от $+\frac{ql^2}{8}$ до 0. На участке возрастания Q положительна, на участке убывания – отрицательна.

На рисунке 4.8 Б пунктир выбран сверху, значит движение по стержню от начала к концу справа налево. При движении справа налево эпюра M возрастает (от 0 до Pl), значит значения Q, как производной от M должны быть положительны. Положительные значения Q откладываются со стороны противоположной пунктиру. Аналогично с рисунком 4.8 Г.

Несмотря на внешнее различие в эпюрах Q на рисунке 4.8 А и Б, В и Г, оба решения верны, отличие лишь в выбранном нами направлении движения по стержню.

Для эпюры продольных сил N, так же как и в сопротивлении материалов, растяжение имеет знак «+», сжатие знак «–». В остальном правило знаков совпадает с эпюрой Q: значения N со знаком «+» откладываются со стороны противоположной пунктиру, значения N со знаком «–» откладываются со стороны пунктира.

На данном этапе очень важно понять, что описанное выше правило полностью совпадает с правилом из сопротивления материалов. В курсе сопротивления материалов говорилось строить эпюру M на растянутом волокне и откладывать значения со знаком «+» вниз, а со знаком «–» вверх.

В связи с тем, что в сопротивлении материалов рассматривается простой стержень (балка), то там не вводилось громоздкое правило знаков с пунктиром, а изначально принималось, что пунктир всегда снизу, начало у балки всегда слева, а конец справа, тогда M со знаком «+» нужно откладывать вниз, а со знаком «–» вверх (как на рисунке 4.8 А, В). Это один частный случай выше описанного общего правила.

В строительной механике из-за рассмотрения стержневых систем сложной конфигурации (рисунок 4.7 В, Г) приходится вводить общий случай правила знаков. Но важно понимать, что это не принципиально новое правило знаков, а лишь обобщенное, используемое в курсе сопротивления материалов для строителей.

Кратко правило знаков для эпюр M, Q и N при использовании пунктира представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 Правила знаков для эпюр M, Q и N с использованием пунктира

Эпюра	**Знак на эпюре**	
	Со стороны пунктира	**Со стороны противоположной пунктиру**
M	+	–
Q	–	+
N	–	+

Второй вариант: каждому стержню в стержневой системе присваивается своя местная система осей координат, присваивается она специальным образом. Данный метод менее наглядный, чем метод с пунктиром, однако он соответствует специализированным строительным расчетным комплексам, таким как SCAD Office [14], ЛИРА 10 [15] и т.д.

В расчетных комплексах расчетная модель строится в глобальной прямоугольной декартовой системе координат XYZ, правосторонней, представленной на рисунке 4.9.

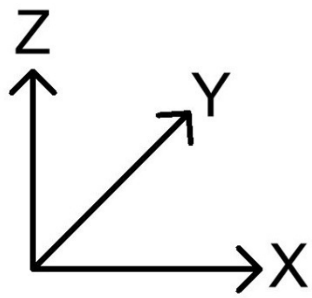


Рис. 4.9. Глобальная прямоугольная декартова система координат XYZ

Каждому стержневому элементу в программе присваивается своя «личная» местная система координат $X_1Y_1Z_1$, причем ось X_1 направляется вдоль оси стержня, рисунок 4.10.

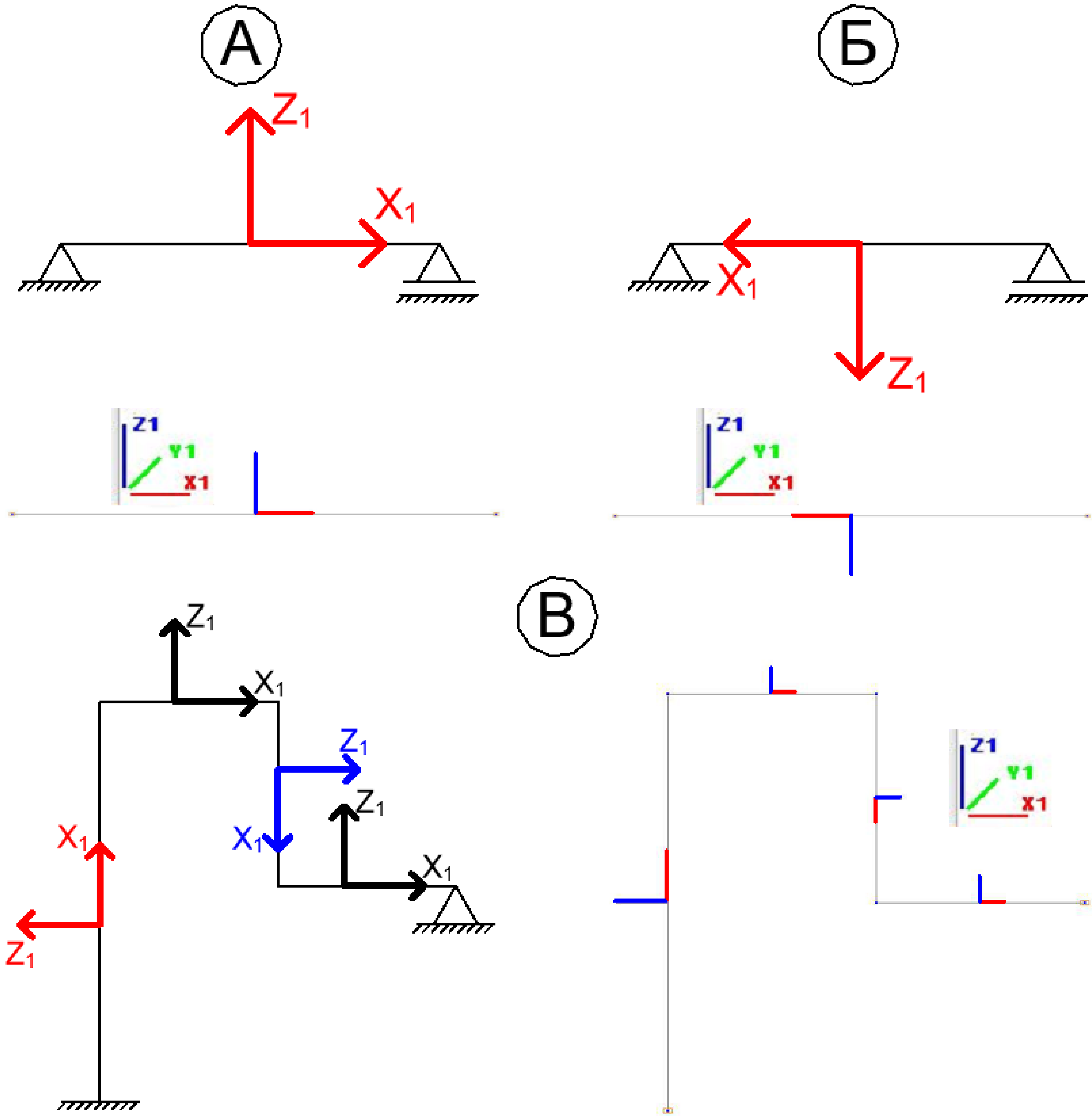


Рис. 4.10. Местные системы координат стержневых элементов

Началом стержня считается та точка (узел) с которой мы начали моделировать стержень в расчетной программе, а концом, та, которой мы закончили ввод стержня: на рисунке 4.10 А стержень введен слева направо (местная ось X_1 направлена вправо), на рисунке 4.10 Б стержень введен справа налево (местная ось X_1 направлена влево). Аналогично на рисунке 4.10 В красный стержень введен в программе снизу вверх (местная ось X_1

направлена вверх), синий стержень введен сверху вниз (местная ось X_1 направлена вниз).

После присваивания каждому из стержней стержневой системы местной системы осей движение по каждому из стержней осуществляется в направлении его местной оси X_1 и правило знаков для эпюр M, Q и N сформулируем следующим образом. Двигаясь по направлению оси X_1: на эпюре изгибающего момента M справа от стержня ставим знак «+», слева от стержня ставим знак «–»; на эпюрах поперечной силы Q и продольной силы N справа от стержня ставим знак «–», слева от стержня ставим знак «+».

Кратко правило знаков для эпюр M, Q и N при использовании местных осей представлены в таблице 4.2.

Таблица 4.2 Правила знаков для эпюр M, Q и N с использованием местных осей

Эпюра	**Знак на эпюре при движении в направлении местной оси стержня X_1**	
	Справа от стержня	**Слева от стержня**
M	+	–
Q	–	+
N	–	+

При этом все правила о том, что эпюра M строится на растянутой стороне стержня, поперечная сила Q является производной от M и продольная сила N положительна при растяжении и отрицательна при сжатии сохраняются.

Как видно, оба варианта описывают одно и то же правило знаков. В первом случае пунктиром отмечается сторона стержня, где M положительна, Q и N отрицательны, но направление движения по стержню нужно определить, и оно должно быть такое, чтобы пунктир был справа. Во втором случае местная ось дает сразу направление движения по стержню, но нужно запомнить, что при движении вдоль оси X_1 стержня справа от него M будет положительна, а Q и N отрицательны.

В дальнейшем, при повествовании в данном учебном пособии правило знаков для эпюр внутренних усилий будет обозначаться с помощью пунктира.

На рисунке 4.11 представлены результаты расчета балок с рисунка 4.8. в программном комплексе SCAD Office[14] с указанием местных осей. В связи с невозможностью решения задачи в общем виде приняты следующие размеры балки и величины нагрузок: l = 2 м, P = 1 Н, q = 1 Н/м, тогда Pl=2 Н·м, $\frac{ql^2}{8} = 0{,}5$ Н · м.

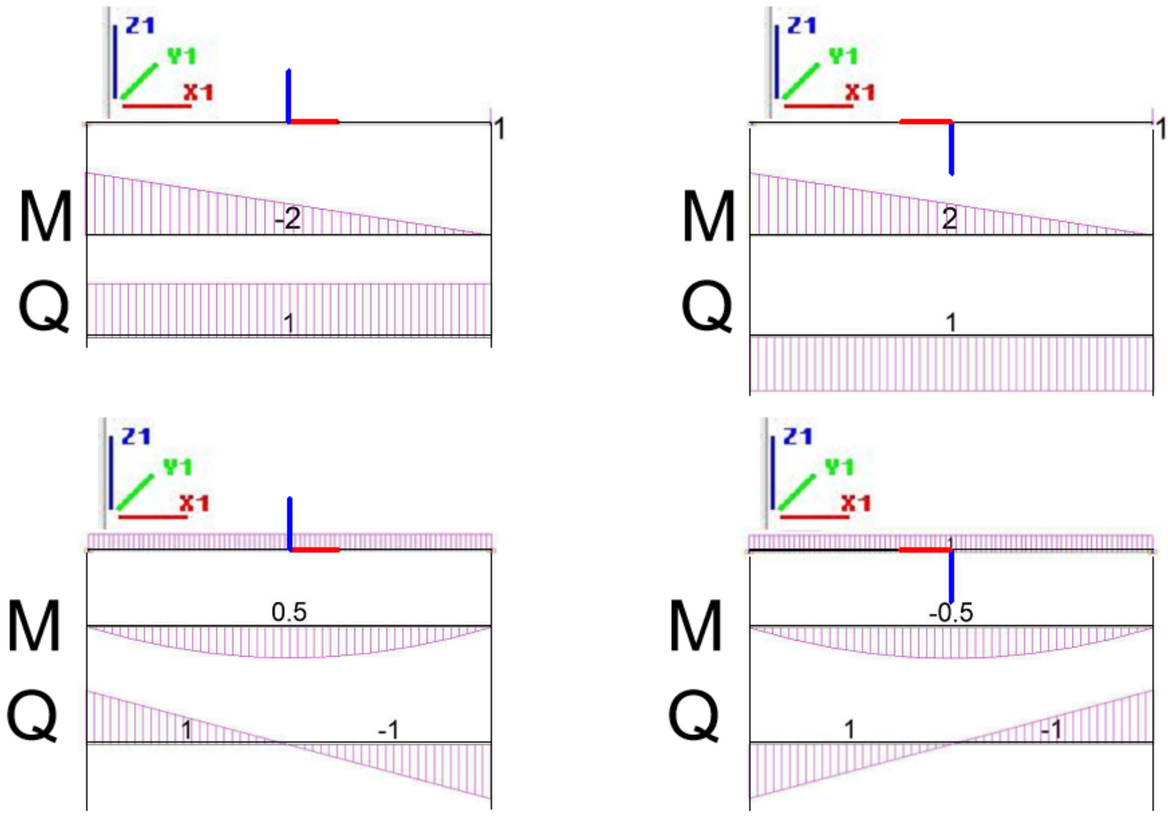


Рис. 4.11. Результаты расчета в программном комплексе

Сравним рисунки 4.8 и 4.11 и убедимся в единстве правила знаков при его объяснении разными способами.

Итак, эпюра изгибающего момента М строится с растянутой стороны стержня (на растянутых волокнах, рисунок 4.4) и после путем введения пунктира или местных осей X для каждого из стержней системы определяется правило знаков и направление движения по стержням, которое должно соблюдаться на протяжении всего последующего решения задачи при построении эпюр поперечных сил Q и продольных сил N.

В связи с этим **рекомендуется выбирать правило знаков** (рисовать пунктир или обозначать местные оси X стержней) **до начала решения задачи**.

Более того, встречаются случаи, особенно в сложных рамах, когда необходимо провести пунктир или задать местные оси X стержней до построения эпюры M, тем самым облегчив ее построение. Речь идет о случаях, когда изначально, без расчета неочевидно, какие волокна в данном сечении являются растянутыми, а какие сжатыми. В простейших примерах, приведенных на рисунке 4.4, сразу было очевидно какие волокна растянуты, а какие сжаты. На рисунке 4.12 приведен пример, в котором определить какие волокна растянуты (верхние или нижние) без расчета возможно лишь в сечении 1-1. А в сечениях 2-2 и 3-3 невозможно, так как различные по величине и направлению силы изгибают стержень с различными плечами.

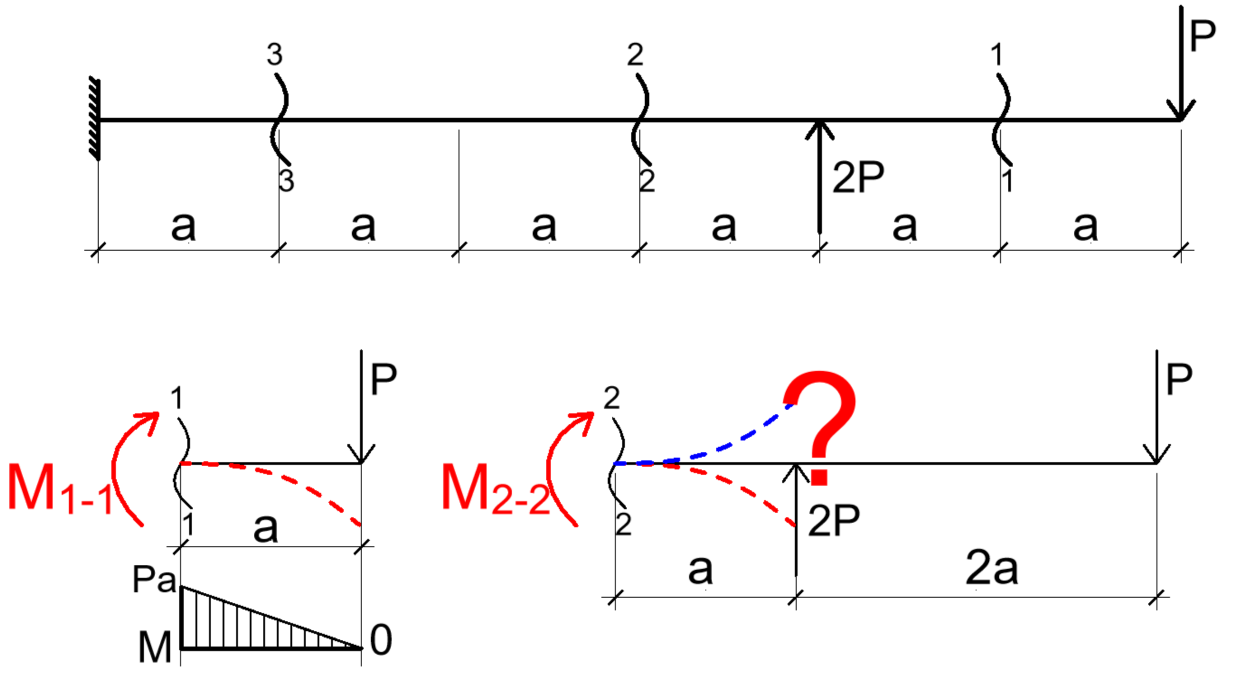


Рис. 4.12. Использование пунктира при построении эпюры M, сечения 1-1 и 2-2

Если до начала построения эпюры М выбрать правило знаков (отметим пунктиром нижнюю часть стержней, рисунок 4.13), то станет возможным составление выражения для М с «автоматически» правильным знаком. Моменты всех сил, которые однозначно растягивают волокна (сторону стержня), отмеченные пунктиром учитываются со знаком «+»: сила 2Р на рисунке 4.13. Моменты всех сил, которые однозначно растягивают волокна (сторону стержня), не отмеченные пунктиром учитываются со знаком «–»: сила Р на рисунке 4.13.

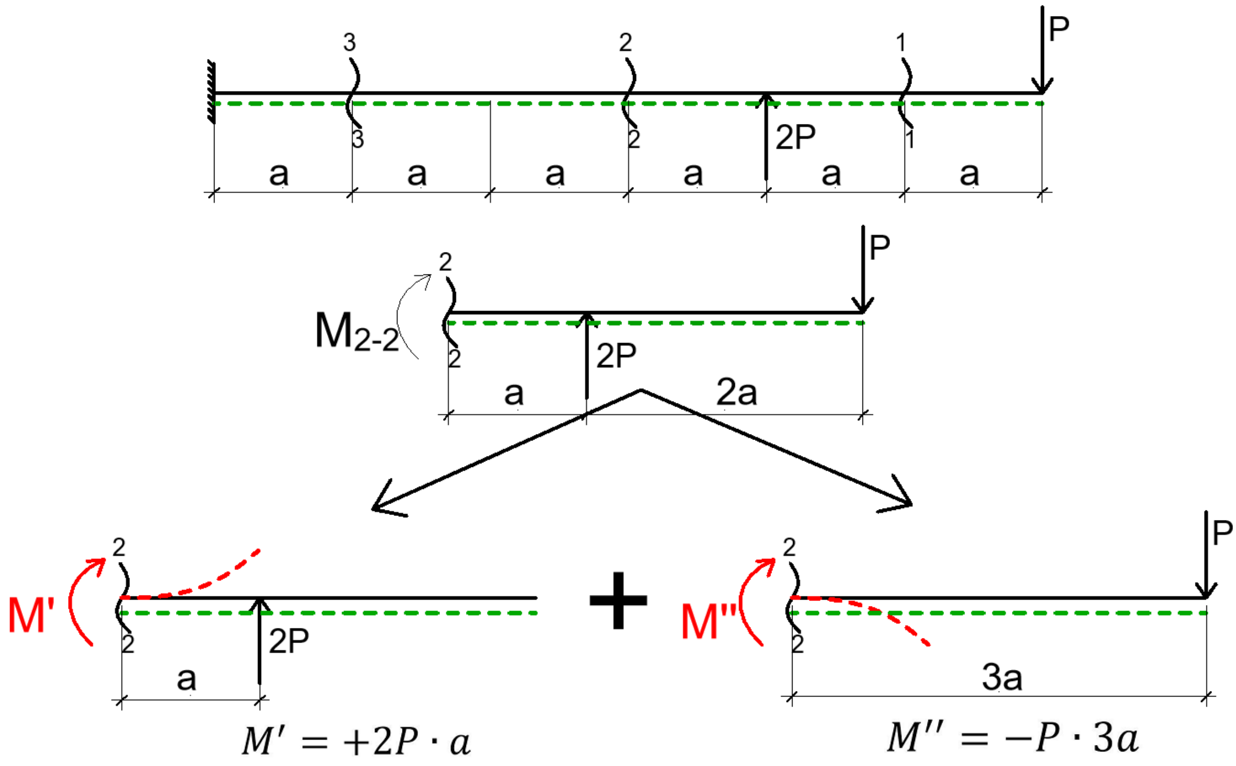
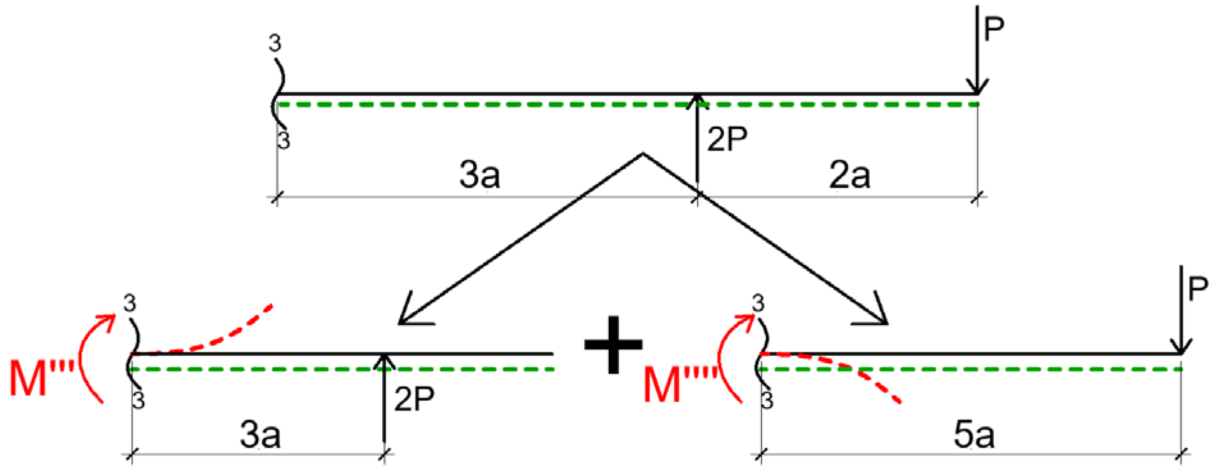


Рис. 4.13. Использование пунктира при построении эпюры М, сечение 2-2

$$M_{2-2} = M^{'} + M^{''} = +2P \cdot a - P \cdot 3a = -P \cdot a$$

Знак, полученный в данном выражении, соответствует выбранному ранее правилу знаков, а значит значение изгибающего момента со знаком «–» нужно откладывать не со стороны пунктира.

Аналогично поступим с сечением 3-3, изображенным на рисунке 4.14: сила 2Р растягивает нижние волокна (со стороны пунктира), значит момент от нее запишем со знаком «+»; сила Р растягивает верхние волокна (не со стороны пунктира), значит момент от нее запишем со знаком «–».



$$M''' = +2P \cdot 3a = +6Pa \qquad M'''' = -P \cdot 5a = -5Pa$$

Рис. 4.14. Использование пунктира при построении эпюры М, сечение 3-3

$$M_{3-3} = M''' + M'''' = +6Pa - 5Pa = +P \cdot a$$

Знак, полученный в данном выражении, соответствует выбранному ранее правилу знаков, а значит значение изгибающего момента со знаком «+» нужно откладывать со стороны пунктира.

На рисунке 4.15 изображена эпюра изгибающего момента М, построенная по сечениям 1-1, 2-2 и 3-3.

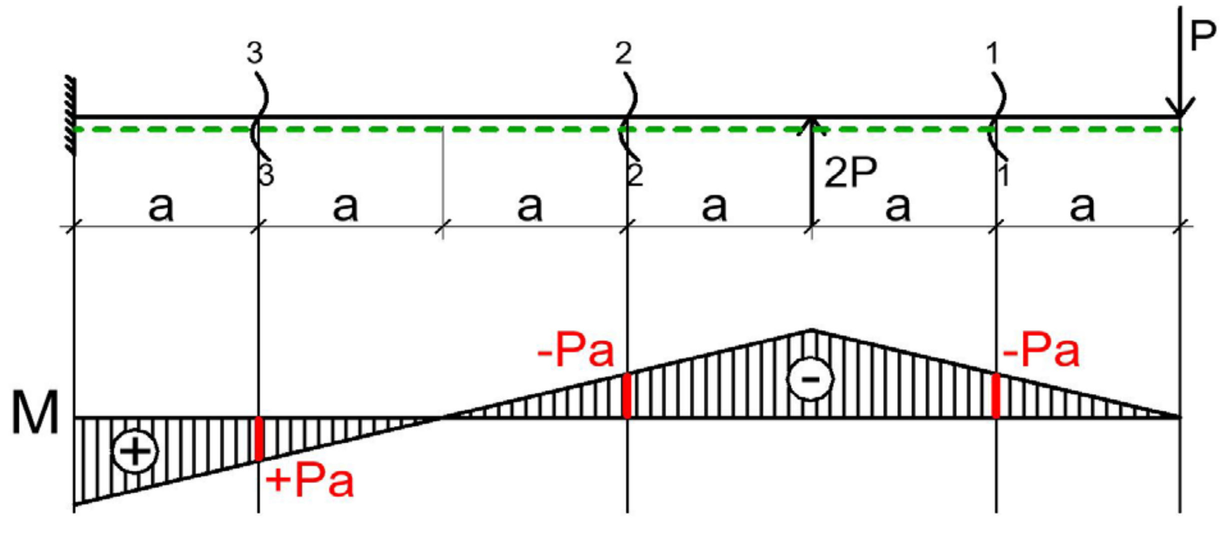


Рис. 4.15. Эпюра изгибающего момента М

Разумеется, на данном этапе изучения строительной механики плоских стержневых систем, значений изгибающего момента в трех сечениях (1-1, 2-2 и 3-3) недостаточно для однозначного построения эпюры, представленной на рисунке 4.15. Однако данный пример приведен исключительно для разъяснения того, каким образом при построении эпюры

М можно пользоваться выбранным изначально правилом знаков. Подробные разъяснения технической стороны построения эпюры М будут даны в следующих главах данного учебного пособия.

5. Построение эпюр усилий в простых балках

Построение эпюр усилий в простых балках выполняется в следующей последовательности:

1. Проверка геометрической неизменяемости системы, определение типа системы: статически-определимая или статически-неопределимая;
2. Выбор правила знаков для эпюр внутренних усилий;
3. Определение опорных реакций;
4. Построение эпюры M;
5. Построение эпюры Q.

Приведем примеры для семи простейших расчетных схем, представленных на рисунке 5.1. Сразу отметим, что все рассмотренные в данном и последующих разделах системы являются геометрически неизменяемыми, поэтому не оказывается особое внимание проверке и доказательству их геометрической неизменяемости.

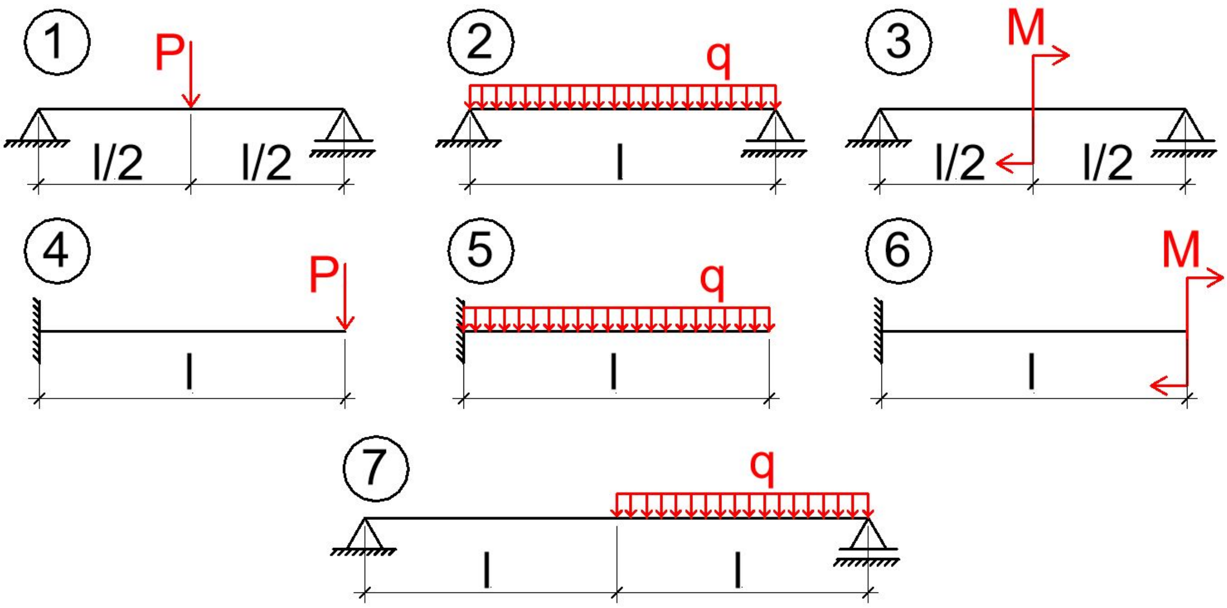


Рис. 5.1. Примеры простейших балок и их загружений

Задача 1

На рисунке 5.2 представлена расчетная схема для задачи 1. Система является жестким диском (единым стержнем), закрепленным на плоскости тремя связями не параллельными и не пересекающимися в одной точке, а значит, система геометрически неизменяемая. До решения задачи реакции связей рисуются с произвольным (любым) направлением, нарисуем их вправо и вверх, рисунок 5.2. Если в ходе решения задачи значения вычисленных реакций получатся со знаком «+», значит изначально выбранное направление, указанное на рисунке 5.2, является верным. Если же значения вычисленных реакций получатся со знаком «–», значит на самом деле реакции направлены в противоположную сторону от выбранного изначально направления.

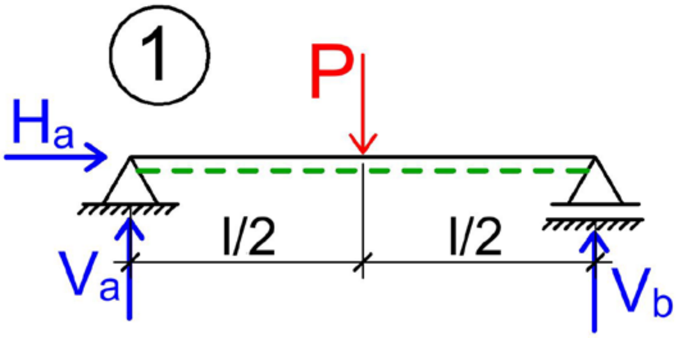


Рис. 5.2. Расчетная схема задачи 1

Определяем тип системы по формуле

$$n_{ст.н.} = С_{оп} + 3 \cdot К - 3 - Ш, \text{ где}$$

$С_{оп}$ = 3, т.к. три связи возникают в опорных закреплениях;

К = 0, т.к. замкнутых контуров нет;

Ш = 0, т.к. простых шарниров, в которых соединяются два стержня нет.

$$n_{ст.н.} = 3 + 3 \cdot 0 - 3 - 0 = 0$$

С учетом геометрической неизменяемости, система является статически определимой.

Проведем пунктир, закрепив тем самым правило знаков, рисунок 5.2: изгибающий момент, построенный снизу (со стороны пунктира) будет иметь знак «+», изгибающий момент, построенный сверху (не со стороны пунктира) будет иметь знак «–». Эпюра поперечных сил Q будет иметь снизу (со стороны пунктира) знак «–», сверху (не со стороны пунктира) будет иметь знак «+». Чтобы пунктир был справа при движении по стержню, движение по стержню осуществляется слева направо, начало стержня в точке А, конец в точке В.

Так как система статически определима, то реакции связей можно найти из уравнений равновесия. Для плоских стержневых систем есть три уравнения равновесия: сумма проекций всех сил на горизонтальную ось X, сумма проекций всех сил на вертикальную ось Y и сумма моментов всех сил относительно любой точки плоскости С.

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_{(\cdot \mathrm{C})} = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения сразу можно найти горизонтальную реакцию H_a:

$$\sum F_X = 0: H_a = 0$$

Во второе уравнение входит сразу две неизвестные реакции V_a и V_b:

$$\sum F_Y = 0: V_a + V_b - P = 0$$

Для их нахождения необходимо составить еще одно третье уравнение и решать систему с двумя уравнениями и двумя неизвестными. Это часто порождает ошибки в вычислениях и, как следствие, неверно вычисленные реакции и неверно построенные эпюры внутренних усилий.

Поэтому рекомендуется впрямую второе уравнение (сумму проекций всех сил на вертикальную ось) не использовать, а оставить его для проверки вычисления вертикальных опорных реакций. Рекомендуется составить два уравнения суммы моментов относительно двух различных точек плоскости. Причем точки нужно попытаться выбрать таким образом, чтобы в каждое из уравнений входила лишь одна из неизвестных. В этом случае система с двумя уравнениями и двумя неизвестными распадется на два отдельных уравнения, с одной неизвестной в каждом. Для этого точки, относительно которых составляются уравнения моментов должны лежать на линии действия сил реакций опор: плечо силы до такой точки равно 0, а значит и момент силы относительно этой точки равен 0.

Для неизвестной реакции V_a это точка A, для неизвестной реакции V_b это точка B. Составим суммы моментов относительно точек A и B:

$$\begin{cases} \sum M_{(\cdot A)} = 0: V_b \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} = 0 \\ \sum M_{(\cdot B)} = 0: V_a \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} = 0 \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что никакого правила знаков для моментов в данных уравнениях нет. Знак «+» может ставиться и у момента, поворачивающего против часовой стрелки, как в первом уравнении, так и у момента, поворачивающего по часовой стрелке, как во втором уравнении. Единственное правило здесь состоит в том, что **моменты, вращающие в противоположные стороны** (по и против часовой стрелки) **должны иметь противоположные знаки**, без разницы какие, но противоположные друг другу. Действительно, домножив первое уравнение справа и слева на –1, получим:

$$\sum M_{(\cdot A)} = 0: V_b \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad \Big| \times (-1)$$

$$\sum M_{(\cdot A)} = 0: -V_b \cdot l + P \cdot \frac{l}{2} = 0$$

Оба слагаемых поменяли знаки, но остались с разными знаками.

Теперь из первого и второго уравнения определяются неизвестные реакции:

$$\begin{cases} \sum M_{(\cdot A)} = 0: V_b \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} = 0 \ \rightarrow \ V_b = \frac{P}{2} \\ \sum M_{(\cdot B)} = 0: V_a \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} = 0 \ \rightarrow \ V_a = \frac{P}{2} \end{cases}$$

Значения реакций оказались со знаком «+», значит указанные на рисунке 5.2 направления верные и V_a и V_b направлены вверх.

Все три независимых уравнения равновесия мы использовали для нахождения реакций. Уравнение суммы проекций всех сил на вертикальную ось уже не является независимым, но может быть использовано для проверки значений вычисленных вертикальных реакций. Данную проверку автор рекомендует обязательно проводить, так как большинство ошибок в решении задач строительной механики связано именно с неверным определением реакций опор.

$$\sum F_Y = 0 \colon V_a + V_b - P = 0 \;\rightarrow\; \frac{P}{2} + \frac{P}{2} - P = 0, \text{верно}$$

Переходим к построению эпюры М. Для этого нужно стержневую систему разделить на участки и использовать метод сечений. Разделим систему на 2 участка: до приложенной силы Р и после. Проведем сечения 1-1 и 2-2, соответственно на первом и втором участках, рисунок 5.3.

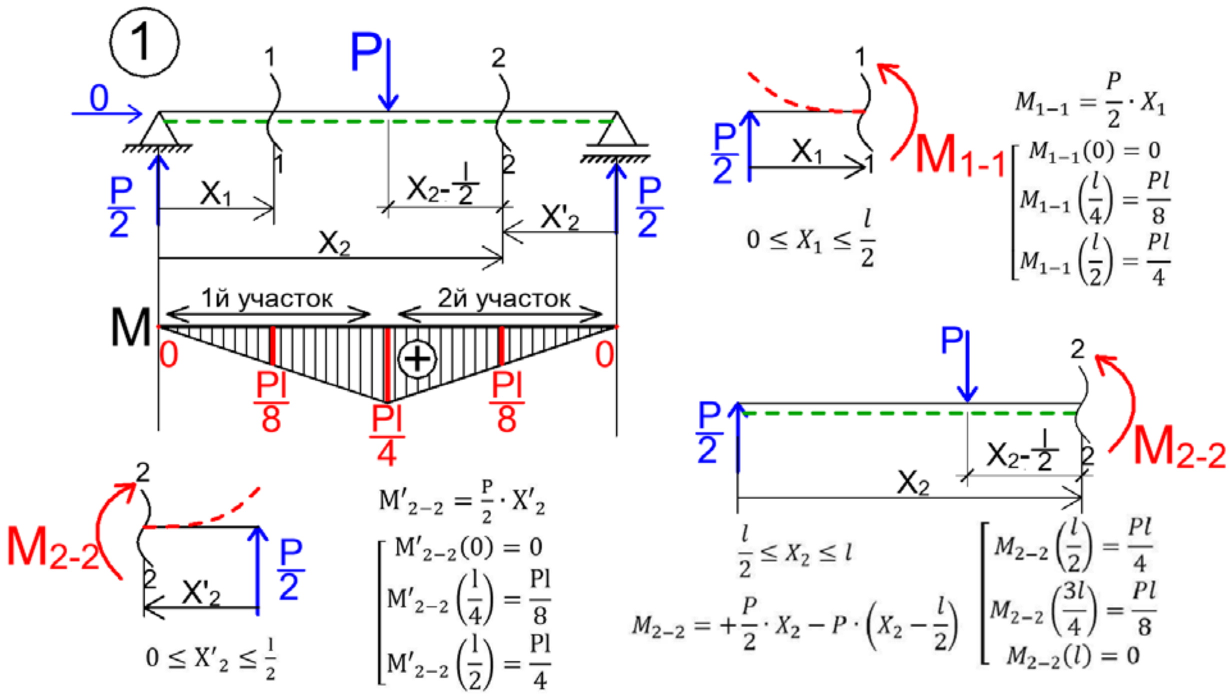


Рис. 5.3. Построение эпюры М, задача 1

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 1-1 слева. Относительно центра сечения 1-1 стержень изгибается одной единственной силой $\frac{\mathrm{P}}{2}$, а значит однозначно определяем, что от действия этой силы растягиваются нижние волокна, значит значение момента будем откладывать вниз. Значение изгибающего момента, равное произведению силы на плечо будет $M_{1-1} = \frac{P}{2} \cdot X_1$, при этом плечо меняется $0 \le X_1 \le \frac{l}{2}$. Тогда значения изгибающего момента в начале, в середине и в конце участка будут равны:

$$\left[\begin{array}{l} M_{1-1}(0) = 0 \\ M_{1-1}\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{Pl}{8} \\ M_{1-1}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{4} \end{array}\right.$$

Откладываем данные значения вниз и соединяем линией, рисунок 5.3. Так как эпюра изгибающих моментов, построенная с растянутой стороны, оказалась снизу, и пунктир снизу, то на эпюре моментов ставим знак «+».

Рассмотрим теперь часть, отсеченную сечением 2-2 слева. Относительно центра сечения 2-2 стержень изгибается двумя силами $\frac{P}{2}$ и P в разных направлениях, однозначно определить верхние или нижние волокна растягиваются от данной комбинации сил без расчета невозможно, значит нанесем на отсеченную часть пунктир и составим выражение для изгибающего момента с учетом знака. Если бы на отсеченную часть действовала бы только сила $\frac{P}{2}$, то она, аналогично сечению 1-1 (рисунок 5.3), изгибала бы стержень вверх, растягивала бы нижние волокна, отмеченные пунктиром, то есть создавала бы положительный изгибающий момент, поэтому момент от силы $\frac{P}{2}$ входит в общее выражение для момента со знаком «+». Сила P изгибает стержень в противоположном направлении, значит входит в общее выражение для момента со знаком «–»:

$$M_{2-2} = +\frac{P}{2} \cdot X_2 - P \cdot \left(X_2 - \frac{l}{2}\right)$$

Плечи сил указаны на рисунке 5.3. Величина X_2 для второго участка находится в пределах $\frac{l}{2} \leq X_2 \leq l$. Тогда значение изгибающего момента в начале, в середине и в конце участка будут равны:

$$\begin{cases} M_{2-2}\left(\frac{l}{2}\right) = +\frac{Pl}{4} \\ M_{2-2}\left(\frac{3l}{4}\right) = +\frac{Pl}{8} \\ M_{2-2}(l) = 0 \end{cases}$$

Изгибающий момент со знаком «+» откладывается со стороны пунктира, так как его выражение составлено с учетом правила знаков. Откладываем данные значения вниз и соединяем линией, рисунок 5.3.

Видно, что выражения для изгибающего момента линейно зависят от X_1 или X_2, а значит на каждом из участков достаточно было определения двух (любых) значений, по которым можно однозначно построить линейную функцию. В примере избыточно вычислены ординаты в трех точках на каждом из участков для наглядности. В будущих примерах будут вычисляться минимально необходимое количество значений для построения эпюр.

Эпюру изгибающего момента на втором участке можно и нужно было бы строить из рассмотрения части справа от сечения 2-2, рисунок 5.3.

Единственной силой $\frac{P}{2}$ стержень загибается вверх, как показано на рисунке 5.3, а значит однозначно определяем, что от действия этой силы растягиваются нижние волокна, значит значение момента будем откладывать вниз. Значение изгибающего момента, равное произведению силы на плечо будет $M'_{2-2} = \frac{P}{2} \cdot X'_2$, при этом плечо меняется $0 \leq X'_2 \leq \frac{l}{2}$. Тогда значение изгибающего момента в начале, в середине и в конце участка будут равны:

$$\begin{cases} M'_{2-2}(0) = 0 \\ M'_{2-2}\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{Pl}{8} \\ M'_{2-2}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{4} \end{cases}$$

Убеждаемся, что эти значения совпадают с построенной ранее эпюрой, однако получены они с меньшими вычислительными сложностями. Всегда нужно рассматривать ту отсеченную часть, которая для расчетчика представляется более простой.

Перейдем к построению эпюры Q. Для этого используются те же сечения 1-1 и 2-2, рассматривается, в нашем частном случае, равновесие отсеченной части по вертикали под действием внешних сил и внутренней силы Q. Знак на эпюре Q определяется исходя из связи M и Q как функции и ее производной:

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

При возрастании значений функции M, функция Q – положительна, при убывании значений функции M, функция Q – отрицательна.

На рисунке 5.4 зелеными стрелками показано направление движения по стержню: при движении от начала к концу стержня пунктир должен быть справа, так как пунктир в самом начале задачи мы нарисовали снизу, то движение по стержню должно происходить слева направо.

При движении слева направо по первому участку значение M возрастает от 0 до $+\frac{Pl}{4}$, значит эпюра Q имеет знак «+».

При движении слева направо по второму участку значение M убывает от $+\frac{Pl}{4}$ до 0, значит эпюра Q имеет знак «–».

После определения знаков, абсолютные значения Q можно определить из равновесия отсеченных частей по вертикали. Нужно обратить внимание на то, что знаки для Q были определены ранее и теперь нужно определить лишь **абсолютное значение**. В зависимости от направления неизвестной Q в сечении (Q_{11} и Q'_{11} на рисунке 5.4) из уравнения равновесия получатся одинаковые значения, но с противоположными знаками ($Q_{11}=\frac{P}{2}$ и $Q'_{11}=-\frac{P}{2}$) этот знак нас не интересует, так как верный знак для эпюры Q определен ранее, и ищем мы лишь абсолютное значение $|Q_{11}| = \frac{P}{2}$. На всем первом участке от 0 до $\frac{l}{2}$, где бы мы ни провели сечение 1-1 значение Q_{11} будет постоянным. Откладывается оно вверх, так как знак «+» у эпюры поперечных сил Q не со стороны пунктира.

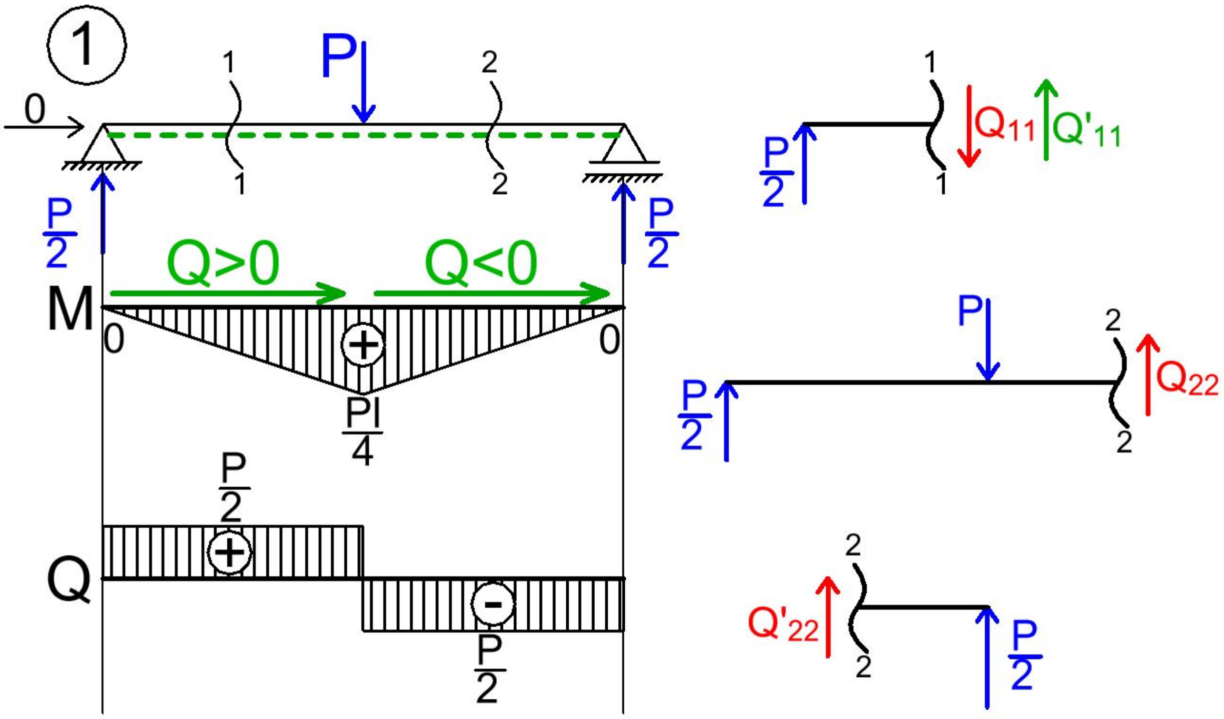


Рис. 5.4. Построение эпюры Q, задача 1

Рассмотрим аналогично с построением эпюры M части отсеченные сечением 2-2 слева и справа, рисунок 5.4. Для части слева:

$$\sum F_Y = 0: \frac{P}{2} - P + Q_{22} = 0 \rightarrow |Q_{22}| = \frac{P}{2}$$

Для части справа:

$$\sum F_Y = 0: Q'_{22} + \frac{P}{2} = 0 \rightarrow |Q'_{22}| = \frac{P}{2}$$

Нас интересует абсолютное значение $Q_{22} = \frac{P}{2}$, которое на втором участке, на эпюре Q откладывается со знаком «–», вниз, со стороны пунктира, рисунок 5.4.

Итоговые эпюры внутренних усилий для задачи 1 представлены на рисунке 5.4.

Задача 2

На рисунке 5.5 представлена расчетная схема для задачи 2. Задача решается аналогично предыдущей, поэтому часть пояснений будет опущено, внимание будет обращено на особенности данной задачи. Система является жестким диском (единым стержнем), закрепленным на плоскости тремя связями не параллельными и не пересекающимися в одной точке, а значит, система геометрически неизменяемая. Обозначаем реакции связей с произвольным направлением, рисунок 5.5.

Проведем пунктир, закрепив тем самым правило знаков, рисунок 5.5: M со стороны пунктира будет иметь знак «+», не со стороны пунктира будет иметь знак «–». Эпюра Q будет иметь со стороны пунктира знак «–», не со стороны пунктира будет иметь знак «+». Чтобы пунктир был справа при движении по стержню, движение по стержню осуществляется слева направо.

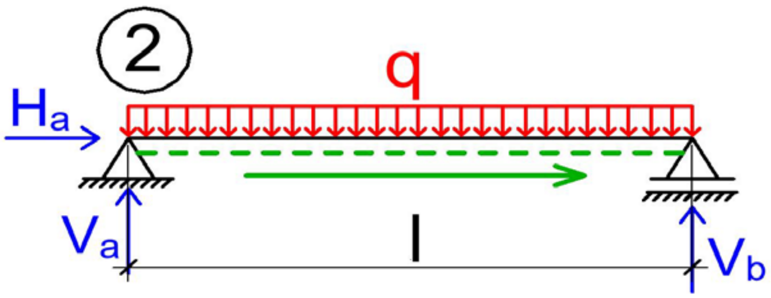


Рис. 5.5. Расчетная схема задачи 2

Определяем тип системы по формуле

$$n_{ст.н.} = С_{оп} + 3 \cdot К - 3 - Ш, \text{ где}$$

$С_{оп}$ = 3, т.к. три связи возникают в опорных закреплениях;

К = 0, т.к. замкнутых контуров нет;

Ш = 0, т.к. простых шарниров, в которых соединяются два стержня нет.

$$n_{ст.н.} = 3 + 3 \cdot 0 - 3 - 0 = 0$$

С учетом геометрической неизменяемости, система является статически определимой.

Так как система статически определима, то реакции связей можно найти из уравнений равновесия.

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_{(\cdot C)} = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения сразу можно найти горизонтальную реакцию H_a:

$$\sum F_X = 0: H_a = 0$$

Составим суммы моментов относительно точек A и B:

$$\begin{cases} \sum M_{(\cdot A)} = 0: V_b \cdot l - (q \cdot l) \cdot \dfrac{l}{2} = 0 \\ \sum M_{(\cdot B)} = 0: V_a \cdot l - (q \cdot l) \cdot \dfrac{l}{2} = 0 \end{cases}$$

Здесь $(q \cdot l)$ – равнодействующая равномерно-распределенной нагрузки, действующая по середине длины распределения, $\frac{l}{2}$ – плечо равнодействующей до точки вращения. Автор рекомендует в выражениях для изгибающего момента записывать равнодействующую силу в скобках, умножая ее на плечо: $(q \cdot l) \cdot \frac{l}{2}$, или $(q \cdot a) \cdot \frac{a}{2}$, или $(q \cdot 3l) \cdot \frac{3l}{2}$. Данная запись исключает возможность ошибочно «забыть» умножить силу на плечо.

Определяются неизвестные реакции:

$$\begin{cases} \sum M_{(\cdot A)} = 0: V_b \cdot l - \dfrac{ql^2}{2} = 0 \ \rightarrow \ V_b = \dfrac{ql}{2} \\ \sum M_{(\cdot B)} = 0: V_a \cdot l - \dfrac{ql^2}{2} = 0 \ \rightarrow \ V_a = \dfrac{ql}{2} \end{cases}$$

Значения реакций оказались со знаком «+», значит указанные на рисунке 5.5 направления верные и V_a и V_b направлены вверх.

Выполним проверку, составив уравнение суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum F_Y = 0: V_a + V_b - q \cdot l = 0 \ \rightarrow \ \frac{ql}{2} + \frac{ql}{2} - ql = 0, \text{верно}$$

Переходим к построению эпюры М. Данную стержневую систему можно рассматривать как один участок, проведем сечение 1-1, рисунок 5.6.

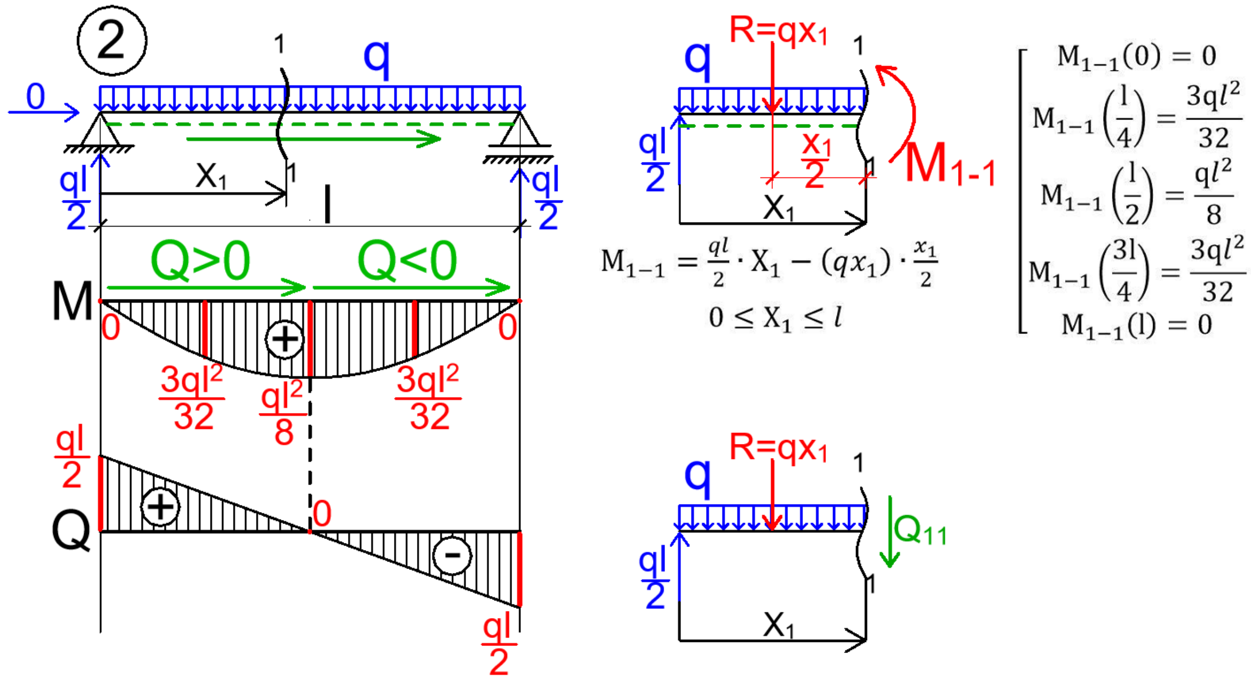


Рис. 5.6. Построение эпюр М и Q, задача 2

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 1-1 слева. Относительно центра сечения 1-1 стержень изгибается силой $\frac{ql}{2}$ (вертикальной реакцией опоры) в одном направлении, а распределенной нагрузкой q стержень изгибается в другом направлении, значит составим выражение для изгибающего момента М с учетом правила знаков. Если бы на стержень действовала только сила $\frac{ql}{2}$, то он изгибался бы вверх, нижние волокна, отмеченные пунктиром были бы растянуты и значение изгибающего момента было бы со знаком «+». Нагрузка q изгибает стержень в противоположном направлении (вниз), поэтому от нее значение изгибающего момента со знаком «–».

Напомним, что значение изгибающего момента от распределенной нагрузки определяется как произведение равнодействующей распределенной нагрузки $R = qx_1$ на плечо $\frac{x_1}{2}$ (расстояние от линии действия равнодействующей R до сечения 1-1). Тогда, изгибающий момент в сечении

1-1 равен: $M_{1-1} = \frac{ql}{2} \cdot X_1 - (qx_1) \cdot \frac{x_1}{2} = \frac{ql}{2} \cdot X_1 - \frac{qx_1^2}{2}$, где $0 \leq X_1 \leq l$. Выражение является квадратной параболой, определим его значение при $X_1 = 0$; $X_1 = \frac{l}{4}$; $X_1 = \frac{l}{2}$; $X_1 = \frac{3l}{4}$; $X_1 = l$:

$$\begin{cases} M_{1-1}(0) = 0 \\ M_{1-1}\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{3ql^2}{32} \\ M_{1-1}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{8} \\ M_{1-1}\left(\frac{3l}{4}\right) = \frac{3ql^2}{32} \\ M_{1-1}(l) = 0 \end{cases}$$

Значения изгибающего момента получились со знаком «+», откладываем их со стороны пунктира, вниз и соединяем линией, рисунок 5.6.

В будущих примерах для построения эпюры изгибающих моментов в виде квадратной параболы будут вычисляться три значения: в начале, в середине и в конце участка.

Перейдем к построению эпюры Q. Для этого используются то же сечение 1-1, рассмотрим равновесие отсеченной части по вертикали под действием внешних сил и внутренней силы Q_{11}. Знак на эпюре Q определяется исходя из связи M и Q как функции и ее производной:

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

При возрастании значений функции M, функция Q – положительна, при убывании значений функции M, функция Q – отрицательна.

На рисунке 5.6 зелеными стрелками показано направление движения по стержню: при движении от начала к концу стержня пунктир должен быть справа, так как пунктир в самом начале задачи мы нарисовали снизу, то движение по стержню должно происходить слева направо.

При движении слева направо от 0 до $\frac{l}{2}$ значение M возрастает от 0 до $+\frac{ql^2}{8}$, значит эпюра Q имеет знак «+».

При дальнейшем движении слева направо от $\frac{l}{2}$ до l, значение M убывает от $+\frac{ql^2}{8}$ до 0, значит эпюра Q имеет знак «–».

После определения знаков, абсолютные значения Q можно определить из равновесия отсеченной части по вертикали.

$$\sum F_Y = 0: \frac{ql}{2} - qx_1 - Q_{11} = 0 \ \rightarrow \ |Q_{11}| = \left|\frac{ql}{2} - qx_1\right|$$

Функция Q_{11} линейно зависит от x_1, подставим

$X_1 = 0;\ X_1 = \frac{l}{2};\ X_1 = l$:

$$\left[\begin{array}{l} |Q_{11}(0)| = \dfrac{ql}{2} \\ \left|Q_{11}\left(\dfrac{\mathrm{l}}{2}\right)\right| = 0 \\ |Q_{11}(\mathrm{l})| = \dfrac{ql}{2} \end{array}\right.$$

Еще раз обращается внимание, что выше получены абсолютные значения Q_{11}. Верные знаки для эпюры Q были определены ранее по возрастанию и убыванию эпюры изгибающего момента M. Строим эпюру Q, рисунок 5.6, откладывая найденные значения так, чтобы было соответствие с правилом знаков: при x_1=0 значение $Q_{11}(0) = \frac{ql}{2}$ откладываем вверх, т.к. сверху, со стороны обратной пунктиру должна откладываться эпюра Q со знаком «+». При x_1=l, значение $|Q_{11}(\mathrm{l})| = \frac{ql}{2}$ откладываем вниз, т.к. снизу, со стороны пунктира должна откладываться эпюра Q со знаком «–».

Задача 3

На рисунке 5.7 представлена расчетная схема для задачи 3. Задача решается аналогично предыдущим, поэтому часть пояснений будет опущено, внимание будет обращено на особенности данной задачи. Система является жестким диском (единым стержнем), закрепленным на плоскости тремя связями не параллельными и не пересекающимися в одной точке, а значит, система геометрически неизменяемая. Обозначаем реакции связей с произвольным направлением, рисунок 5.7.

Проведем пунктир, закрепив тем самым правило знаков, рисунок 5.7: М со стороны пунктира будет иметь знак «+», не со стороны пунктира будет иметь знак «–». Эпюра Q будет иметь со стороны пунктира знак «–», не со стороны пунктира будет иметь знак «+». Чтобы пунктир был справа при движении по стержню, движение по стержню осуществляется слева направо.

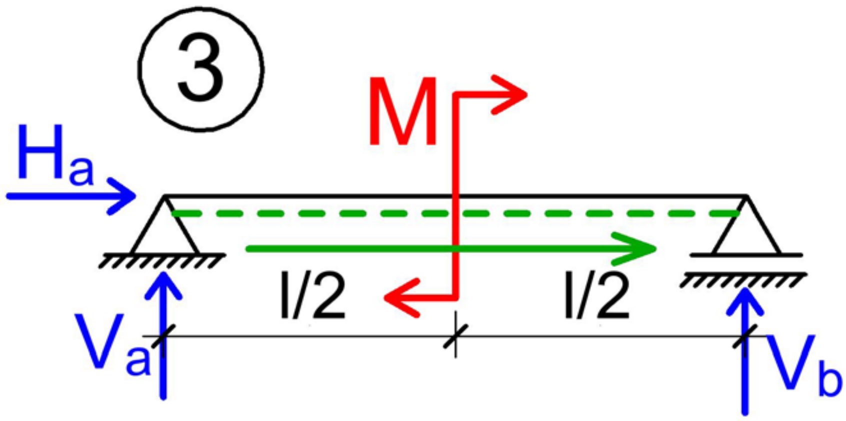


Рис. 5.7. Расчетная схема задачи 3

Определяем тип системы по формуле

$$n_{ст.н.} = С_{оп} + 3 \cdot К - 3 - Ш, \text{ где}$$

$С_{оп}$ = 3, т.к. три связи возникают в опорных закреплениях;

К = 0, т.к. замкнутых контуров нет;

Ш = 0, т.к. простых шарниров, в которых соединяются два стержня нет.

$$n_{ст.н.} = 3 + 3 \cdot 0 - 3 - 0 = 0$$

С учетом геометрической неизменяемости, система является статически определимой.

Так как система статически определима, то реакции связей можно найти из уравнений равновесия.

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_{(\cdot C)} = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения сразу можно найти горизонтальную реакцию H_a:

$$\sum F_X = 0: H_a = 0$$

Составим суммы моментов относительно точек A и B и определим неизвестные реакции:

$$\begin{cases} \sum M_{(\cdot A)} = 0: V_b \cdot l - M = 0 \ \rightarrow \ V_b = \dfrac{M}{l} \\ \sum M_{(\cdot B)} = 0: V_a \cdot l + M = 0 \ \rightarrow \ V_a = -\dfrac{M}{l} \end{cases}$$

Значения реакции V_b получено со знаком «+», значит указанное на рисунке 5.7 направления верное и V_b направлена вверх. Значения реакции V_a получено со знаком «–», значит указанное на рисунке 5.7 направления неверное и V_a должна быть направлена вниз.

Прежде чем менять направление реакций на правильное, рекомендуется выполнить проверку, проверив равновесие по вертикали:

$$\sum F_Y = 0: V_a + V_b = 0 \ \rightarrow \ -\frac{M}{l} + \frac{M}{l} = 0, \text{верно.}$$

Дело в том, что выражение $V_a + V_b = 0$ верно лишь для направления реакций указанных на рисунке 5.7. Если изменить направление реакции V_a на правильное (вниз), то уравнение равновесия всех сил по вертикали нужно было бы записать $-V_a + V_b = 0$. Чтобы избежать путаницы со знаками **рекомендуется определять все реакции и выполнять проверку, не меняя направлений реакций, выбранных изначально. И лишь после определения всех реакций опор и выполнения проверки нужно**

нарисовать отдельную картинку с правильными направлениями всех реакций и по ней выполнять построения эпюр.

Переходим к построению эпюры М. Данную стержневую систему разделим на 2 участка: слева и справа от сосредоточенного момента, проведем сечения 1-1, 2-2, рисунок 5.8.

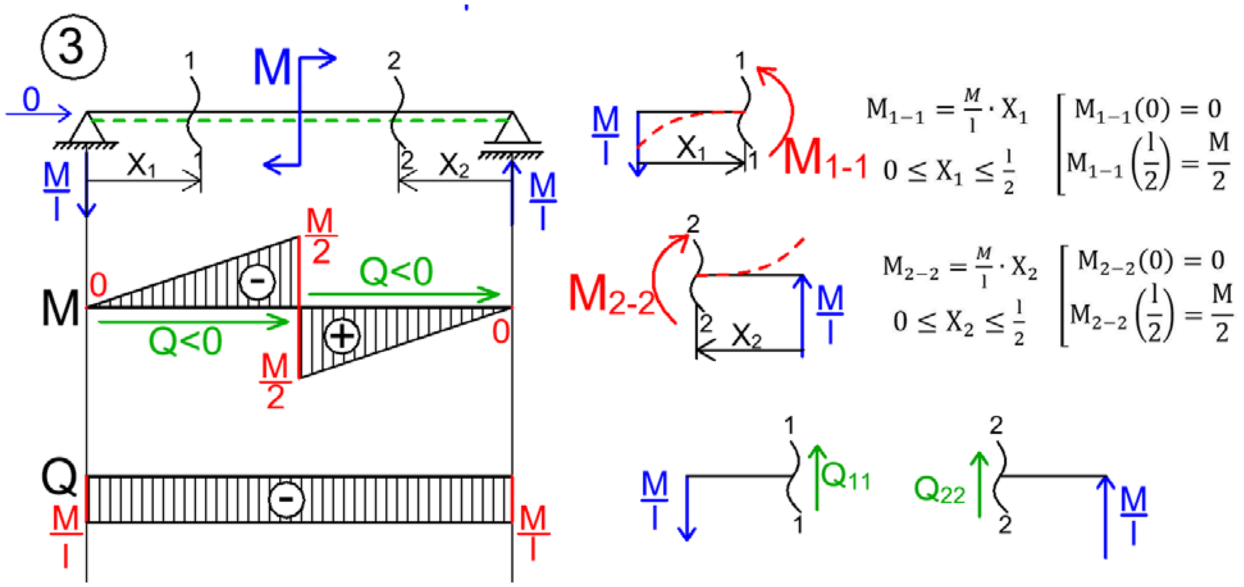


Рис. 5.8. Построение эпюр М и Q, задача 3

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 1-1 слева. Относительно центра сечения 1-1 стержень изгибается одной единственной силой $\frac{M}{l}$, а значит однозначно определяем, что от действия этой силы растягиваются верхние волокна (рисунок 5.8), значит значение момента будем откладывать вверх. Значение изгибающего момента, равное произведению силы на плечо будет

$M_{1-1} = \frac{M}{l} \cdot X_1$, при этом плечо меняется $0 \le X_1 \le \frac{l}{2}$. Тогда значения изгибающего момента в начале и в конце участка будут равны:

$$\left[\begin{array}{l} M_{1-1}(0) = 0 \\ M_{1-1}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{M}{2} \end{array}\right.$$

Определены всего 2 значения, так как функция линейна и для ее построения достаточно двух точек.

Откладываем данные значения вверх и соединяем линией, рисунок 5.8. Так как эпюра изгибающих моментов, построенная с растянутой стороны, оказалась сверху, не со стороны пунктира, то на эпюре моментов ставим знак «–».

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 2-2 справа. Относительно центра сечения 2-2 стержень изгибается одной единственной силой $\frac{M}{l}$, а значит однозначно определяем, что от действия этой силы растягиваются нижние волокна (рисунок 5.8), значит значение момента будем откладывать вниз. Значение изгибающего момента, равное произведению силы на плечо будет $M_{2-2} = \frac{M}{l} \cdot X_2$, при этом плечо меняется $0 \leq X_2 \leq \frac{l}{2}$. Тогда значения изгибающего момента в начале и в конце участка будут равны:

$$\left[\begin{array}{l} M_{2-2}(0) = 0 \\ M_{2-2}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{M}{2} \end{array}\right.$$

Определены всего 2 значения, так как функция линейна и для ее построения достаточно двух точек.

Откладываем данные значения вниз и соединяем линией, рисунок 5.8. Так как эпюра изгибающих моментов, построенная с растянутой стороны, оказалась снизу, со стороны пунктира, то на эпюре моментов ставим знак «+».

Перейдем к построению эпюры Q. Для этого используются те же сечения 1-1 и 2-2, рассмотрим равновесие отсеченных частей по вертикали под действием внешних сил и внутренних сил Q_{11} и Q_{22}. Знак на эпюре Q определяется исходя из связи M и Q как функции и ее производной:

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

При возрастании значений функции M, функция Q – положительна, при убывании значений функции M, функция Q – отрицательна.

На рисунке 5.8 зелеными стрелками показано направление движения по стержню: при движении от начала к концу стержня пунктир должен быть справа, так как пунктир в самом начале задачи мы нарисовали снизу, то движение по стержню должно происходить слева направо.

При движении слева направо от 0 до $\frac{l}{2}$ и далее от $\frac{l}{2}$ до l, значение M убывает от 0 до $-\frac{M}{2}$, и от $+\frac{M}{2}$ до 0, значит эпюра Q имеет знак «–» на обоих участках.

После определения знаков, абсолютные значения Q можно определить из равновесия отсеченных частей по вертикали.

$$\begin{cases} \sum F_Y = 0: -\frac{M}{l} + Q_{11} = 0 \rightarrow |Q_{11}| = \frac{M}{l} \\ \sum F_Y = 0: Q_{22} + \frac{M}{l} = 0 \rightarrow |Q_{22}| = \frac{M}{l} \end{cases}$$

Функции Q_{11} и Q_{22} от x не зависят, являются константой, а значит для их построения достаточно одного любого значения (для любой абсциссы).

$$\left[\begin{array}{l} |Q_{11}(0)| = \frac{M}{l} \\ |Q_{22}(0)| = \frac{M}{l} \end{array} \right.$$

Еще раз обращается внимание, что выше получены абсолютные значения Q_{11} и Q_{22}. Верный знак «–» для эпюры Q на обеих участках был определен ранее по убыванию эпюры изгибающего момента M. Строим эпюру Q, рисунок 5.8, откладывая найденные значения так, чтобы было соответствие с правилом знаков: Q со знаком «–» откладываем вниз, т.к. пунктир снизу и со стороны пунктира должна откладываться эпюра Q со знаком «–».

Задачи 4, 5, 6

Задачи 4, 5 и 6 принципиально похожи, они будут решаться одним и тем же приемом, поэтому объединены в один раздел. Расчетных схемы для них изображены на рисунке 5.9.

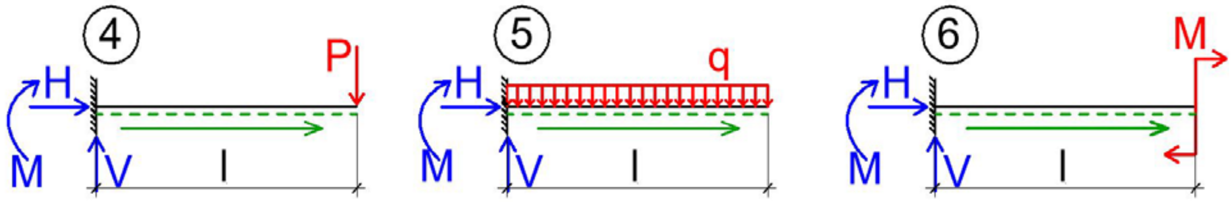


Рис. 5.9. Расчетные схемы задач 4, 5 и 6

Расчетные схемы на рисунке 5.9 являются консольными балками (консолями). Вычисление внутренних усилий в них можно произвести без определения опорных реакций: нужно провести сечение и рассматривать равновесие отсеченной части с той стороны от сечения, где нет опор (со свободного конца балки).

На рисунке 5.10 представлено построение эпюр М и Q для задачи 4: проведем сечение 1-1 и рассмотрим отсеченную часть справа от сечения.

Относительно центра сечения 1-1 стержень изгибается одной единственной силой Р, а значит однозначно определяем, что от действия этой силы растягиваются верхние волокна (рисунок 5.10), значит значение момента будем откладывать вверх. Значение изгибающего момента, равное произведению силы на плечо будет $\mathrm{M}_{1-1} = P \cdot \mathrm{X}_1$, при этом плечо меняется $0 \leq \mathrm{X}_1 \leq l$. Функция М линейна. Тогда значения изгибающего момента в начале и в конце участка будут равны:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M}_{1-1}(0) = 0 \\ \mathrm{M}_{1-1}(\mathrm{l}) = \mathrm{P} \cdot \mathrm{l} \end{bmatrix}$$

Откладываем данные значения вверх и соединяем линией, рисунок 5.10. Так как эпюра изгибающих моментов, построенная с растянутой стороны, оказалась сверху, не со стороны пунктира, то на эпюре моментов ставим знак «–».

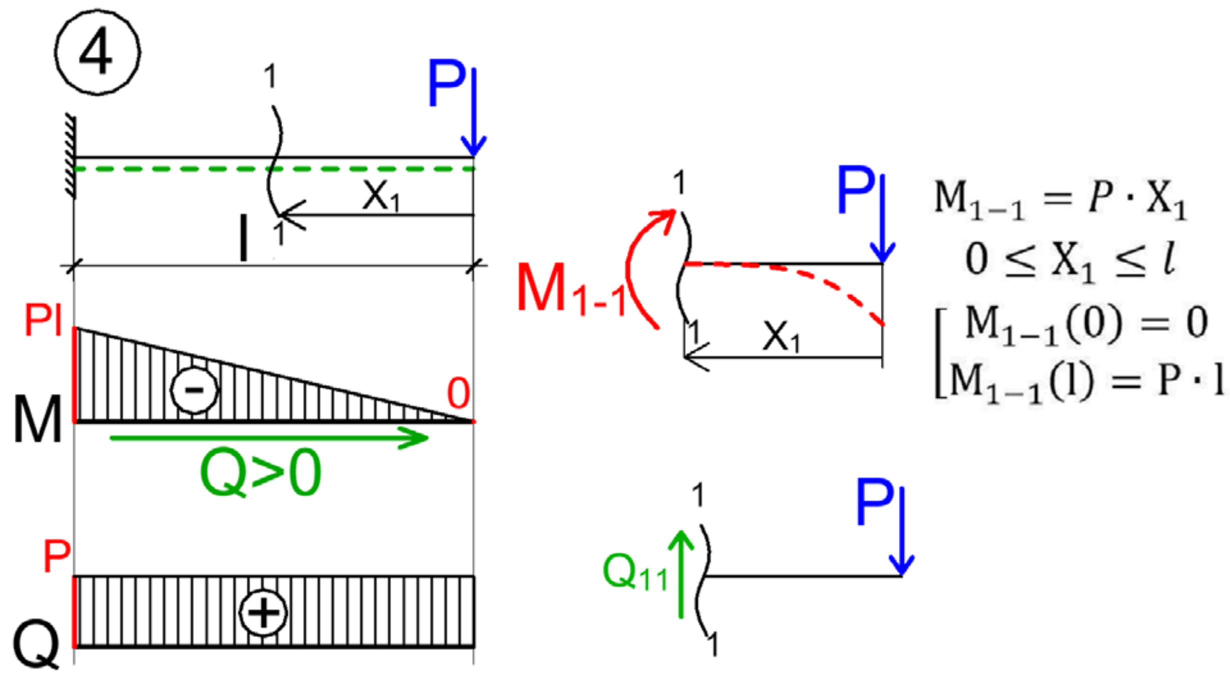


Рис. 5.10. Построение эпюр M и Q, задача 4

Перейдем к построению эпюры Q. Для этого используются то же сечение 1-1, рассмотрим равновесие отсеченной части по вертикали под действием внешних сил и внутренней Q_{11}. Знак на эпюре Q определяется исходя из связи M и Q как функции и ее производной:

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

При возрастании значений функции M, функция Q – положительна, при убывании значений функции M, функция Q – отрицательна.

На рисунке 5.10 зелеными стрелками показано направление движения по стержню: при движении от начала к концу стержня пунктир должен быть справа, так как пунктир в самом начале задачи мы нарисовали снизу, то движение по стержню должно происходить слева направо.

При движении слева направо от 0 до l, значение M возрастает от –Pl до 0, значит эпюра Q имеет знак «+».

После определения знака, абсолютное значения Q можно определить из равновесия отсеченной части по вертикали.

$$\sum F_Y = 0 : Q_{11} - P = 0 \;\rightarrow\; |Q_{11}| = P$$

Функция Q_{11} от x не зависит, является константой на всей длине стержня.

На рисунке 5.11 представлено построение эпюр M и Q для задачи 5: проведем сечение 1-1 и рассмотрим отсеченную часть справа от сечения.

Относительно центра сечения 1-1 стержень изгибается одной единственной силой R (равнодействующей распределенной нагрузки, зависящей от X_1), а значит однозначно определяем, что от действия этой силы растягиваются верхние волокна (рисунок 5.11), значит значение момента будем откладывать вверх. Значение изгибающего момента, равное произведению силы на плечо будет $\mathrm{M}_{1-1} = (q \cdot \mathrm{x}_1) \cdot \frac{\mathrm{x}_1}{2}$, при этом длина зоны распределения нагрузки меняется $0 \le \mathrm{X}_1 \le l$, плечо равнодействующей меняется от 0 до $\frac{l}{2}$. Функция $\mathrm{M}_{1-1} = \frac{(qx_1^2)}{2}$ – квадратная парабола, построим ее по 3 значениям: в начале, в середине и в конце участка.

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{M}_{1-1}(0) = 0 \\ \mathrm{M}_{1-1}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{8} \\ \mathrm{M}_{1-1}(\mathrm{l}) = \frac{ql^2}{2} \end{array}\right.$$

Откладываем данные значения вверх и соединяем плавной линией, рисунок 5.11. Так как эпюра изгибающих моментов, построенная с растянутой стороны, оказалась сверху, не со стороны пунктира, то на эпюре моментов ставим знак «–».

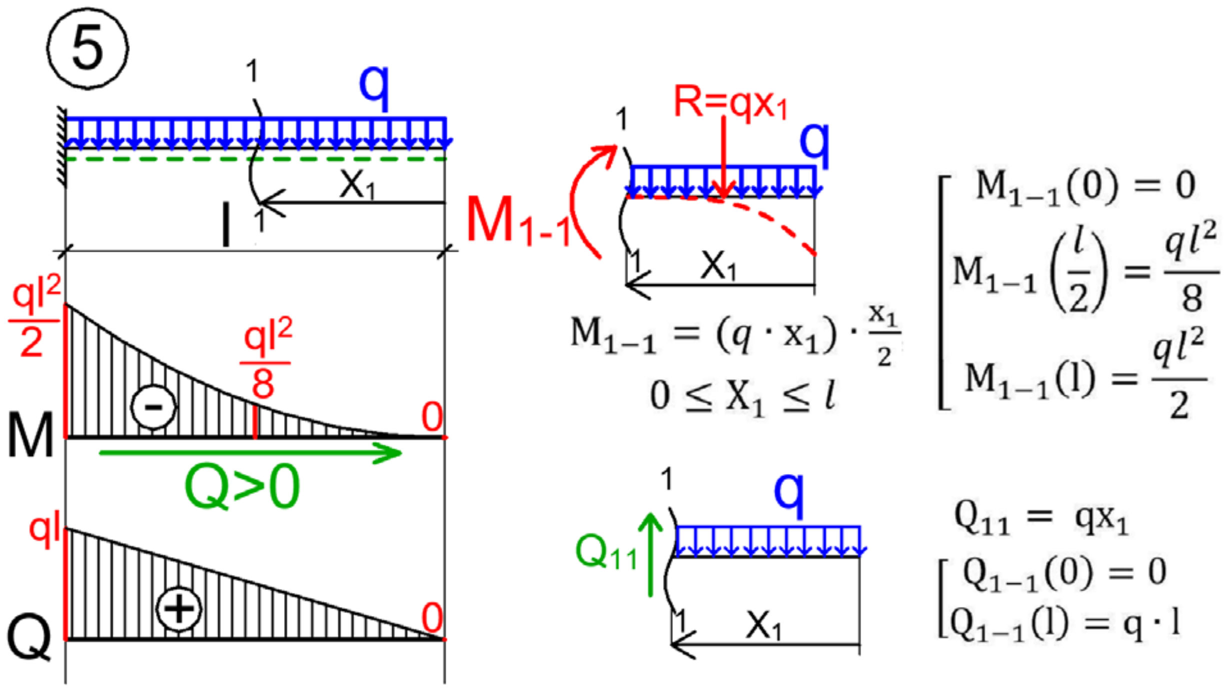


Рис. 5.11. Построение эпюр M и Q, задача 5

Перейдем к построению эпюры Q. Для этого используются то же сечение 1-1, рассмотрим равновесие отсеченной части по вертикали под действием внешних сил и внутренней Q_{11}. Знак на эпюре Q определяется исходя из связи M и Q как функции и ее производной:

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

При возрастании значений функции M, функция Q – положительна, при убывании значений функции M, функция Q – отрицательна.

На рисунке 5.11 зелеными стрелками показано направление движения по стержню: при движении от начала к концу стержня пунктир должен быть справа, так как пунктир в самом начале задачи мы нарисовали снизу, то движение по стержню должно происходить слева направо.

При движении слева направо от 0 до l, значение M возрастает от $-\frac{ql^2}{2}$ до 0, значит эпюра Q имеет знак «+».

После определения знака, абсолютное значения Q можно определить из равновесия отсеченной части по вертикали.

$$\sum F_Y = 0: Q_{11} - q \cdot x_1 = 0 \rightarrow |Q_{11}| = qx_1$$

Функция Q_{11} от x зависит линейно, определим для ее построения 2 значения при $x_1=0$ и $x_1=l$:

$$\left[\begin{array}{l}|Q_{1-1}(0)| = 0\\ |Q_{1-1}(l)| = q\cdot l\end{array}\right.$$

Найденные значения Q откладываются вверх, со стороны противоположной пунктиру (т.к. эпюра Q должна быть со знаком «+»), рисунок 5.11.

На рисунке 5.12 представлено построение эпюр M и Q для задачи 6: проведем сечение 1-1 и рассмотрим отсеченную часть справа от сечения.

Относительно центра сечения 1-1 стержень изгибается сосредоточенным моментом со значением M, а значит однозначно определяем, что от действия этой нагрузки растягиваются верхние волокна (рисунок 5.12), значит значение момента будем откладывать вверх. Значение изгибающего момента в случае приложения сосредоточенного момента не зависит от координаты сечения $M_{1-1} = M$. Функция M постоянна (константа) на всей длине стержня.

Откладываем значение вверх, рисунок 5.12. Так как эпюра изгибающих моментов, построенная с растянутой стороны, оказалась сверху, не со стороны пунктира, то на эпюре моментов ставим знак «–».

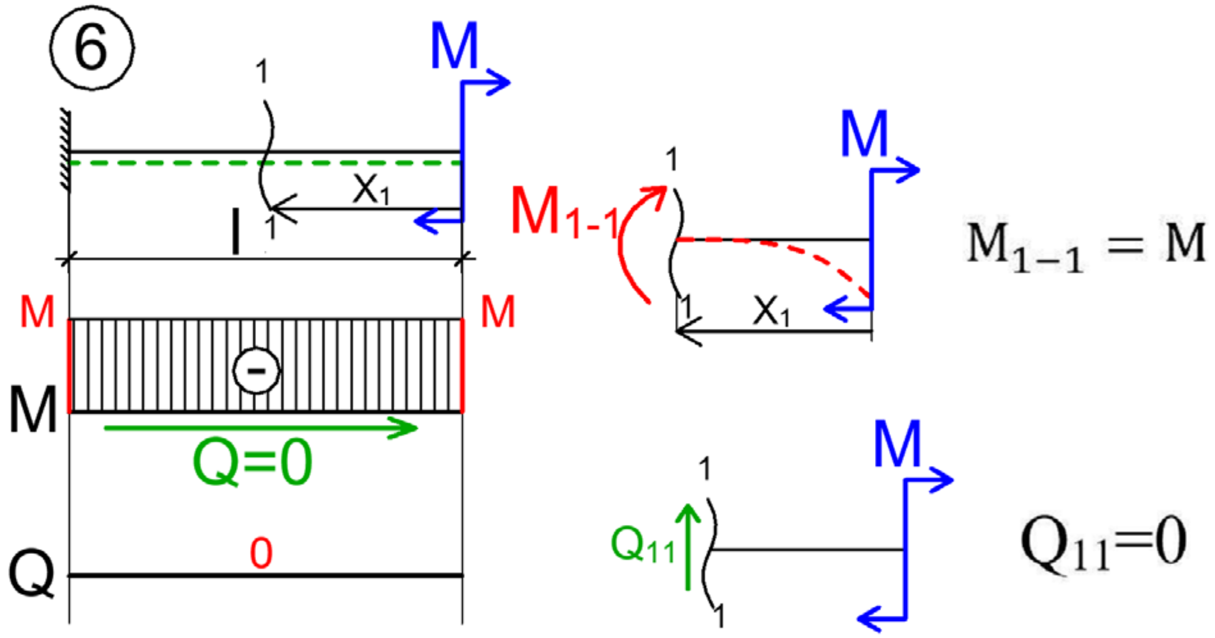


Рис. 5.12. Построение эпюр M и Q, задача 6

Перейдем к построению эпюры Q. Так как функция M постоянна и, учитывая связь M и Q как функции и ее производной $Q = \frac{dM}{dx}$ получаем, что Q_{11}=0 на всей длине стержня, рисунок 5.12.

Задача 7

На рисунке 5.13 представлена расчетная схема для задачи 7. Система является жестким диском (единым стержнем), закрепленным на плоскости тремя связями не параллельными и не пересекающимися в одной точке, а значит, система геометрически неизменяемая. Обозначаем реакции связей с произвольным направлением, рисунок 5.13.

Проведем пунктир, закрепив тем самым правило знаков, рисунок 5.13: M со стороны пунктира будет иметь знак «+», не со стороны пунктира будет иметь знак «–». Эпюра Q будет иметь со стороны пунктира знак «–», не со стороны пунктира будет иметь знак «+». Чтобы пунктир был справа при движении по стержню, движение по стержню осуществляется слева направо.

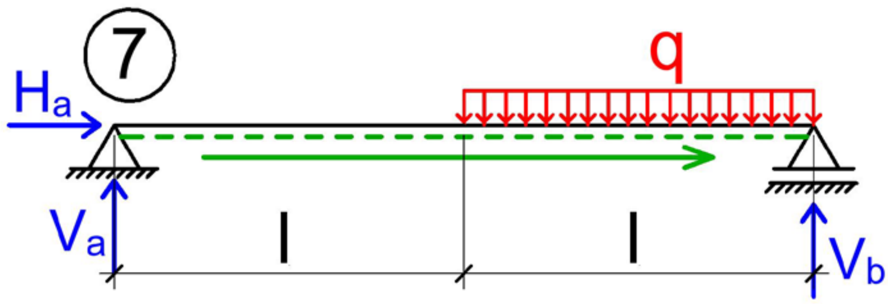


Рис. 5.13. Расчетная схема задачи 7

Определяем тип системы по формуле

$$n_{ст.н.} = С_{оп} + 3 \cdot К - 3 - Ш, \text{ где}$$

$С_{оп}$ = 3, т.к. три связи возникают в опорных закреплениях;

К = 0, т.к. замкнутых контуров нет;

Ш = 0, т.к. простых шарниров, в которых соединяются два стержня нет.

$$n_{ст.н.} = 3 + 3 \cdot 0 - 3 - 0 = 0$$

С учетом геометрической неизменяемости, система является статически определимой.

Так как система статически определима, то реакции связей можно найти из уравнений равновесия.

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_{(\cdot C)} = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения сразу можно найти горизонтальную реакцию H_a:

$$\sum F_X = 0: H_a = 0$$

Составим суммы моментов относительно точек A и B:

$$\begin{cases} \sum M_{(\cdot A)} = 0: V_b \cdot 2l - (q \cdot l) \cdot 1{,}5l = 0 \\ \sum M_{(\cdot B)} = 0: V_a \cdot 2l - (q \cdot l) \cdot 0{,}5l = 0 \end{cases}$$

Здесь (q · l) – равнодействующая равномерно-распределенной нагрузки, действующая по середине длины распределения, 1,5l – плечо равнодействующей до точки A, 0,5l – плечо равнодействующей до точки B. Автор рекомендует в выражениях для изгибающего момента записывать равнодействующую силу в скобках, умножая ее на плечо: (q · l) · $1{,}5l$ или (q · l) · 0,5l. Данная запись исключает возможность ошибочно «забыть» умножить силу на плечо.

Определяются неизвестные реакции:

$$\begin{cases} \sum M_{(\cdot A)} = 0: 2V_b l - 1{,}5ql^2 = 0 \rightarrow \ V_b = 0{,}75ql \\ \sum M_{(\cdot B)} = 0: 2V_a l - 0{,}5ql^2 = 0 \rightarrow \ V_a = 0{,}25ql \end{cases}$$

Значения реакций оказались со знаком «+», значит указанные на рисунке 5.13 направления верные и V_a и V_b направлены вверх.

Выполним проверку, составив уравнение суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum F_Y = 0: V_a + V_b - q \cdot l = 0 \ \rightarrow 0{,}25ql + 0{,}75ql - ql = 0, \text{верно}$$

Переходим к построению эпюры М. Данную стержневую систему нужно разбить на 2 участка: первый участок свободный от нагрузки, второй участок с действующей равномерно распределенной нагрузкой q. Проведем сечения 1-1 и 2-2, рисунок 5.14.

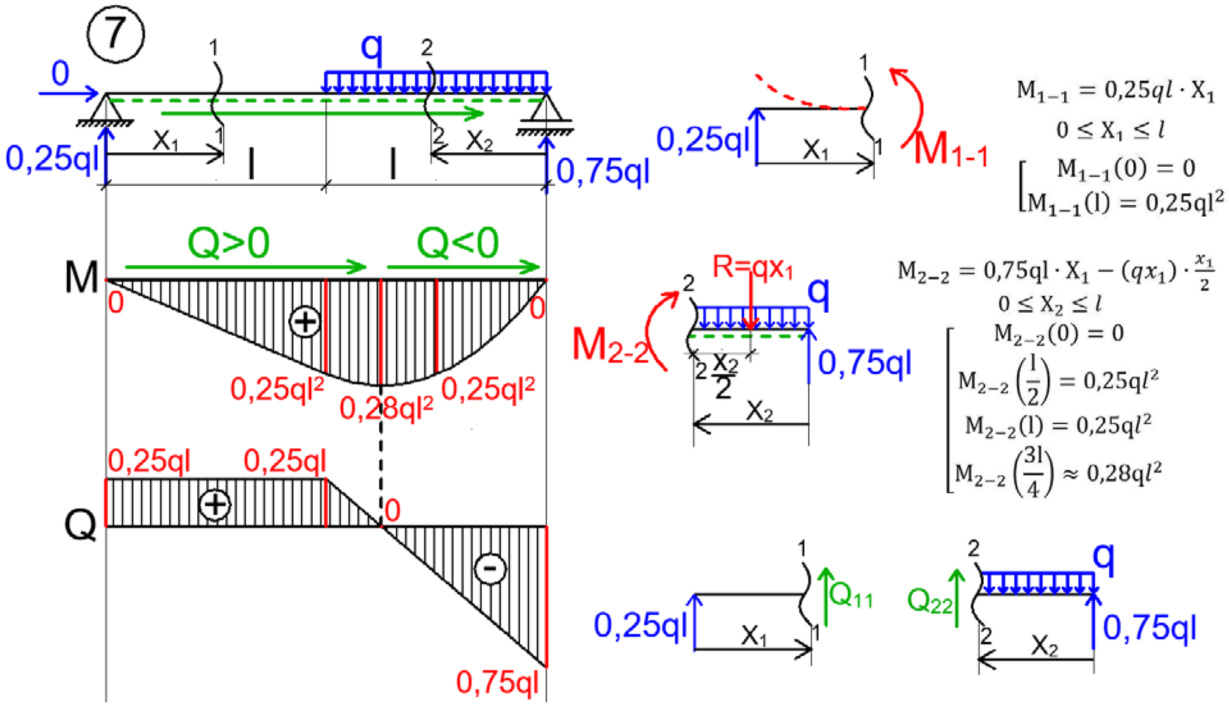


Рис. 5.14. Построение эпюр М и Q, задача 7

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 1-1 слева. Относительно центра сечения 1-1 стержень изгибается единственной силой 0,25ql а значит однозначно определяем, что от действия этой силы растягиваются нижние волокна (рисунок 5.14), значит значение момента будем откладывать вниз. Изгибающий момент в сечении 1-1 равен: $M_{1-1} = 0{,}25ql \cdot X_1$, где $0 \le X_1 \le l$. Выражение является линейным, определим его значение при $X_1 = 0;\ X_1 = l$:

$$\left[\begin{array}{l} M_{1-1}(0) = 0 \\ M_{1-1}(l) = 0{,}25ql^2 \end{array}\right.$$

Откладываем значение вниз, рисунок 5.14. Так как эпюра изгибающих моментов, построенная с растянутой стороны, оказалась снизу, со стороны пунктира, то на эпюре моментов ставим знак «+».

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 2-2 справа. Стержень изгибается вертикальной реакцией опоры 0,75ql в одном направлении, а распределенной нагрузкой q стержень изгибается в другом направлении, значит составим выражение для изгибающего момента M с учетом правила знаков. Если бы на стержень действовала только сила 0,75ql, то он изгибался бы вверх, нижние волокна, отмеченные пунктиром, были бы растянуты и значение изгибающего момента было бы со знаком «+». Нагрузка q изгибает стержень в противоположном направлении (вниз), поэтому от нее значение изгибающего момента со знаком «–».

Напомним, что значение изгибающего момента от распределенной нагрузки определяется как произведение равнодействующей распределенной нагрузки $R = qx_1$ на плечо $\frac{x_1}{2}$ (расстояние от линии действия равнодействующей R до сечения 2-2). Тогда, изгибающий момент в сечении 2-2 равен: $\mathrm{M}_{2-2} = 0{,}75\mathrm{ql} \cdot \mathrm{X}_1 - (qx_1) \cdot \frac{x_1}{2} = 0{,}75\mathrm{ql} \cdot \mathrm{X}_1 - \frac{qx_1^2}{2}$, где $0 \leq \mathrm{X}_2 \leq l$. Выражение является квадратной параболой, определим его значение при $\mathrm{X}_2 = 0$; $\mathrm{X}_2 = \frac{l}{2}$; $\mathrm{X}_1 = l$, дополнительно определим значение в сечении с координатой $\mathrm{X}_2 = \frac{3l}{4}$:

$$\left[\begin{array}{c} \mathrm{M}_{2-2}(0) = 0 \\ \mathrm{M}_{2-2}\left(\frac{\mathrm{l}}{2}\right) = 0{,}25\mathrm{q}l^2 \\ \mathrm{M}_{2-2}(\mathrm{l}) = 0{,}25\mathrm{q}l^2 \\ \mathrm{M}_{2-2}\left(\frac{3\mathrm{l}}{4}\right) \approx 0{,}28\mathrm{q}l^2 \end{array}\right.$$

Значения изгибающего момента получились со знаком «+», откладываем их со стороны пунктира, вниз и соединяем плавной линией, рисунок 5.14. Значение изгибающего момента в сечении с дополнительной координатой $\mathrm{X}_2 = \frac{3l}{4}$ вычислено для уточнения вида эпюры в связи с тем, что в середине и в конце участка получены одинаковые значения $M_{2-2}\left(\frac{l}{2}\right) = M_{2-2}(l) = 0{,}25ql^2$, а вид эпюры – квадратная парабола.

В будущих примерах, пользуясь свойствами эпюры изгибающего момента для построения эпюры изгибающих моментов в подобных случаях все равно будут вычисляться три значения: в начале, в середине и в конце участка.

Перейдем к построению эпюры Q. Для этого используются те же сечения 1-1 и 2-2, рассмотрим равновесие отсеченных частей по вертикали под действием внешних сил и внутренних сил Q_{11} и Q_{22}. Знак на эпюре Q определяется исходя из связи M и Q как функции и ее производной:

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

При возрастании значений функции M, функция Q – положительна, при убывании значений функции M, функция Q – отрицательна.

На рисунке 5.14 зелеными стрелками показано направление движения по стержню: при движении от начала к концу стержня пунктир должен быть справа, так как пунктир в самом начале задачи мы нарисовали снизу, то движение по стержню должно происходить слева направо.

При движении слева направо от 0 до 1,25l значение M возрастает от 0 до $0{,}28ql^2$ значит эпюра Q имеет знак «+». При дальнейшем движении слева направо от 1,25l до 2l значение M убывает от $0{,}28ql^2$ до 0, значит эпюра Q имеет знак «–».

После определения знаков, абсолютные значения Q можно определить из равновесия отсеченной части по вертикали.

$$\begin{cases} \sum F_Y = 0\colon 0{,}25ql + Q_{11} = 0 \ \rightarrow \ |Q_{11}| = \ 0{,}25ql \\ \sum F_Y = 0\colon Q_{22} - qx_2 + 0{,}75ql = 0 \ \rightarrow \ |Q_{22}| = \ |qx_2 - 0{,}75ql| \end{cases}$$

Функция Q_{11} не зависит от x_1, и на всем протяжении возрастания графика изгибающего момента M положительна и равна $+0{,}25ql$, откладываем вверх (не со стороны пунктира), рисунок 5.14.

Функция Q_{22} линейно зависит от x_2, подставим $X_2 = 0$; $X_2 = l$:

$$\begin{bmatrix} |Q_{22}(0)| = 0{,}75ql \\ |Q_{22}(l)| = 0{,}25ql \end{bmatrix}$$

Значение $|Q_{22}(l)| = 0{,}25ql$ находится в зоне возрастания графика изгибающего момента М, а значит $+0{,}25ql$ откладывается вверх (не со стороны пунктира), рисунок 5.14. Значение $|Q_{22}(0)| = 0{,}75ql$ находится в зоне убывания графика изгибающего момента М, а значит $-0{,}75ql$ откладывается вниз (со стороны пунктира), рисунок 5.14.

Отложенные значения соединяются прямыми линиями, рисунок 5.14.

6. Построение эпюр усилий в простых рамах

Построение эпюр усилий в простых рамах выполняется в следующей последовательности:

1. Проверка геометрической неизменяемости системы, определение типа системы: статически-определимая или статически-неопределимая;
2. Выбор правила знаков для эпюр внутренних усилий;
3. Определение опорных реакций;
4. Построение эпюры M;
5. Построение эпюры Q;
6. Построение эпюры N.

Приведем примеры для четырех простейших расчетных схем, представленных на рисунке 6.1. Сразу отметим, что все рассмотренные в данном и последующих разделах системы являются геометрически неизменяемыми, поэтому не оказывается особое внимание проверке и доказательству их геометрической неизменяемости.

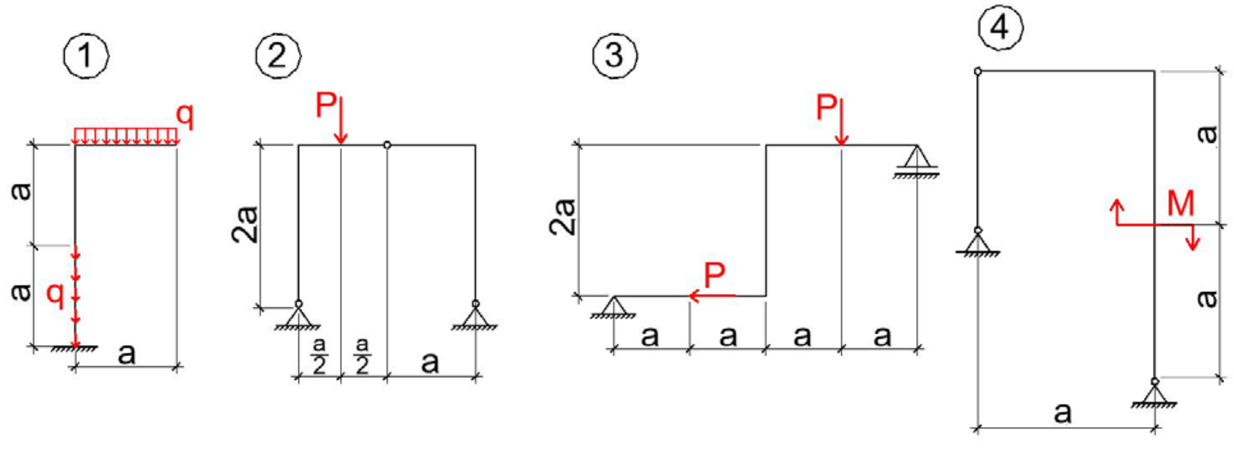


Рис. 6.1. Примеры простейших рам

Задача 1

На рисунке 6.2 представлена расчетная схема для задачи 1 с обозначенными реакциями связей с произвольным направлением.

Проведем пунктир, закрепив тем самым правило знаков, рисунок 6.2: М со стороны пунктира будет иметь знак «+», не со стороны пунктира будет иметь знак «–». Эпюры Q и N будут иметь со стороны пунктира знак «–», не со стороны пунктира будет иметь знак «+». Чтобы пунктир был справа при движении по стержню, движение по вертикальному стержню осуществляется снизу-вверх, по горизонтальному слева направо.

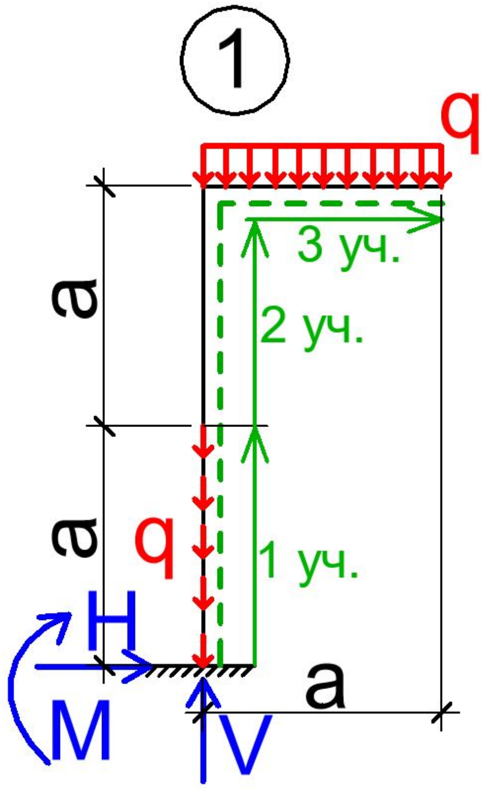


Рис. 6.2. Расчетная схема задачи 1

Определяем тип системы по формуле

$$n_{ст.н.} = С_{оп} + 3 \cdot К - 3 - Ш, \text{ где}$$

$С_{оп} = 3$, т.к. три связи возникают в опорных закреплениях;

К = 0, т.к. замкнутых контуров нет;

Ш = 0, т.к. простых шарниров, в которых соединяются два стержня нет.

$$n_{ст.н.} = 3 + 3 \cdot 0 - 3 - 0 = 0$$

С учетом геометрической неизменяемости, система является статически определимой.

Так как система статически определима, то реакции связей можно найти из уравнений равновесия.

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_{(\cdot \text{C})} = 0 \end{cases}$$

Однако по аналогии с консольными балками эпюры внутренних усилий в данной задаче возможно построить без отыскания реакций опор, так и поступим.

Построение эпюр усилий, как и в балках, начинается с разделения систем на отдельные участки, в пределах которых характер эпюр внутренних усилий не меняется. Для этого, обязательными границами участков должны быть выбраны:

– точки излома оси стержня;

– точки приложения сосредоточенных сил или сосредоточенных моментов;

– границы зоны приложения распределенных нагрузок.

Разделим систему на 3 участка, рисунок 6.2: на первом участке действует распределенная нагрузка вдоль оси стержня, на втором участке не действует никаких нагрузок, на третьем участке действует распределенная нагрузка перпендикулярно оси стержня.

Аналитические выражения для М в зависимости от ординаты Х обычно не записываются (как было сделано в предыдущих разделах и как делалось в курсе сопротивления материалов). На каждом из участков, в зависимости от ожидаемого характера эпюры М намечаются сечения, в которых вычисляется значение изгибающего момента. На участке 3, аналогично с задачей 5, показанной на рисунке 5.11 эпюра М будет очерчена квадратной параболой, значит для ее построения определим 3 значения: в начале, в середине и в конце участка. На 1 и 2 участке эпюра моментов линейна, поэтому достаточно по 2 значения на каждом из участков. Вычисляя значения изгибающего момента в начале и в конце участков, сокращаем количество вычислений за счет того, что конец первого участка это начало второго участка, конец второго участка это начало третьего и т.д.

Итак, на рисунке 6.3 представлены 5 сечений, в которых нужно определить значения внутренних усилий, для построения их эпюр.

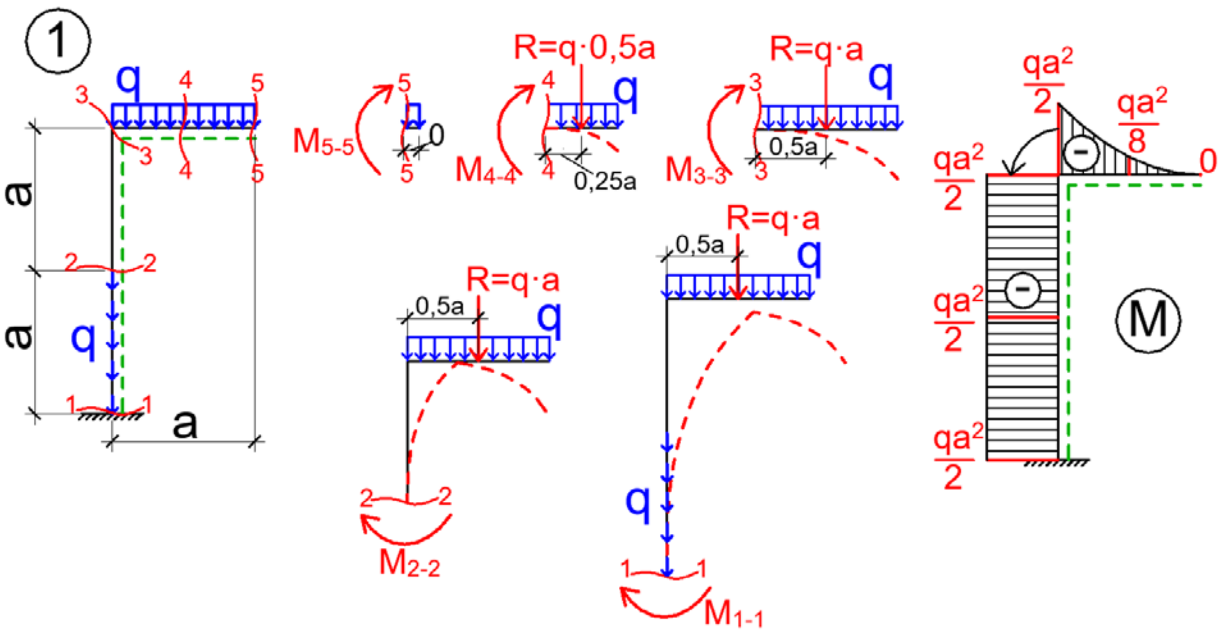


Рис. 6.3. Построение эпюры М, задача 1

Сечение 5-5 находится в самой правой точке горизонтального стержня, длинна распределения нагрузке и плечо до ее равнодействующей равны 0, а значит и изгибающий момент в сечении 5-5 равен 0: $M_{5-5} = 0$. На рисунке 6.3 данное сечение показано условно, для разъяснения. В последующих задачах, сечение на свободном конце стержня устанавливаться не будет.

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 4-4 справа. Относительно центра сечения 4-4 стержень изгибается единственной силой (q·0,5a) (равнодействующей распределенной нагрузки), а значит однозначно определяем, что от действия этой силы растягиваются верхние волокна (рисунок 6.3), значит значение момента будем откладывать наверх.

Изгибающий момент в сечении 4-4 равен: $\text{М}_{4-4} = (q \cdot 0{,}5a) \cdot 0{,}25a = \frac{q \cdot a^2}{8}$, где 0,25a – плечо равнодействующей. Откладываем значение наверх, рисунок 6.3.

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 3-3 справа. Относительно центра сечения 3-3 стержень изгибается единственной силой (q·a) (равнодействующей распределенной нагрузки), а значит однозначно определяем, что от действия этой силы растягиваются верхние волокна (рисунок 6.3), значит значение момента будем откладывать наверх. Изгибающий момент в сечении 3-3 равен: $\text{М}_{3-3} = (q \cdot a) \cdot 0{,}5a = \frac{q \cdot a^2}{2}$ где 0,5a – плечо равнодействующей.. Откладываем значение наверх, рисунок 6.3. Соединяем значения, отложенные наверх в сечениях 3-3, 4-4 и 5-5 плавной линией (т.к. действует распределенная нагрузка перпендикулярно оси стержня и эпюра М криволинейна). Так как эпюра изгибающих моментов, построенная с растянутой стороны, оказалась сверху, не со стороны пунктира, то на эпюре моментов ставим знак «–».

Обратим внимание, что верхняя точка вертикального стержня (конец 2 участка на рисунке 6.2) и левая точка горизонтального стержня (начало участка 3 на рисунке 6.2) являются одной и той же точкой, с одним и там же значением изгибающего момента. Поэтому полученное с помощью сечения 3-3 значение с горизонтального стержня переносим на вертикальный (показано стрелочкой на рисунке 6.3).

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 2-2 сверху. Относительно центра сечения 2-2 вертикальный стержень изгибается единственной силой (q·a) (равнодействующей распределенной нагрузки) в одном направлении, а значит однозначно определяем, что от действия этой силы растягиваются левые волокна (рисунок 6.3), значит значение момента будем откладывать слева. Изгибающий момент в сечении 2-2 равен: $\text{М}_{2-2} = (q \cdot a) \cdot 0{,}5a = \frac{q \cdot a^2}{2}$ где 0,5a – плечо равнодействующей. Откладываем значение слева от стержня, рисунок 6.3.

Наконец рассмотрим часть, отсеченную сечением 1-1 сверху. Относительно центра сечения 1-1 вертикальный стержень изгибается единственной силой (q·a) (равнодействующей распределенной нагрузки) в одном направлении, а значит однозначно определяем, что от действия этой силы растягиваются левые волокна (рисунок 6.3), значит значение момента будем откладывать слева. Изгибающий момент в сечении 2-2 равен: $\mathrm{M}_{2-2} = (q \cdot a) \cdot 0{,}5a = \frac{q \cdot a^2}{2}$ где 0,5a – плечо равнодействующей. Откладываем значение слева от стержня, рисунок 6.3 и соединяем все отложенные значения прямой линией (т.к. распределенная нагрузка перпендикулярно оси стержня отсутствует и эпюра M линейна).

Перейдем к построению эпюр Q и N. Для этого используются те же сечения, что и для построения эпюры изгибающего момента M, однако разделим сечение 3-3 на сечение, относящееся к вертикальному и горизонтальному стержням.

Рассмотрим равновесие отсеченных частей по вертикали и по горизонтали под действием внешних сил и внутренних усилий Q и N. Знак на эпюре Q определяется исходя из связи M и Q как функции и ее производной:

$$\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{dx}}$$

При возрастании значений функции M, функция Q – положительна, при убывании значений функции M, функция Q – отрицательна.

На рисунке 6.2 зелеными стрелками показано направление движения по стержню: при движении от начала к концу стержня пунктир должен быть справа, так как пунктир в самом начале задачи мы нарисовали для вертикального стержня справа, а для горизонтального стержня снизу, то движение по вертикальному стержню должно происходить снизу-вверх, по горизонтальному слева направо.

При движении по вертикальному стержню снизу-вверх значение M не изменяется, является константой, значит эпюра Q=0.

При движении слева направо по горизонтальному стержню значение М возрастает от $-\frac{ql^2}{2}$ до 0, значит эпюра Q имеет знак «+».

Продольное усилие имеет знак «+» если оно растягивающее (растягивает стержень, действует «от сечения») и имеет знак «–», если оно сжимающее (сжимает стержень, действует «к сечению»). Для того, чтобы из уравнений равновесия отсеченных частей автоматически получать правильный знак для N рекомендуется неизвестную N в сечении всегда рисовать как растягивающую (направленную «от сечения»). В этом случае, если правильное направление действительно в сторону растяжения будет получен знак «+», а если для соблюдения условий равновесия правильное направление N противоположно растяжению (соответствует сжатию), будет получен знак «–».

Напоминаем, что значения Q и N на эпюрах со знаком «+» откладываются не со стороны пунктира, а со знаком «–» откладываются со стороны пунктира.

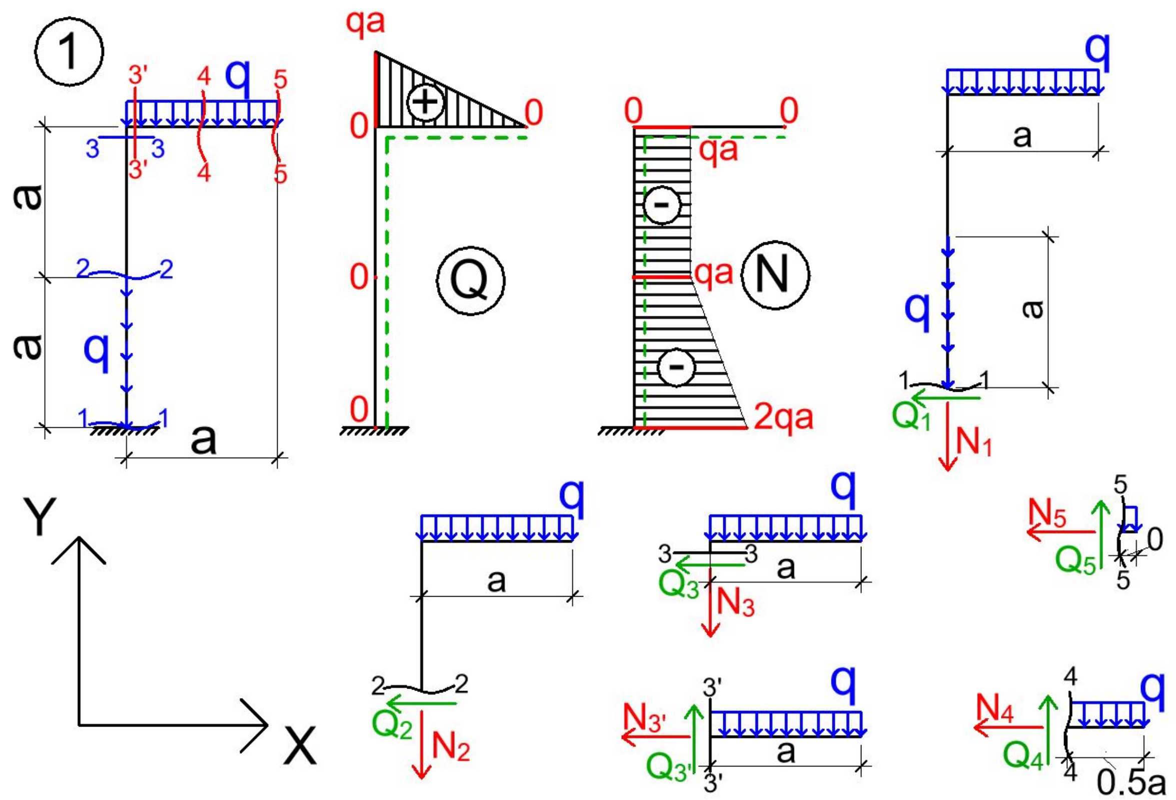


Рис. 6.4. Построение эпюр Q и N, задача 1

Определим значения N и абсолютные значения Q из рассмотрения равновесия отсеченных частей по горизонтали и вертикали.

Часть, отсеченная сечением 5-5 справа:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0:\ -N_5 = 0\ \rightarrow N_5 = 0 \\ \sum F_Y = 0: Q_5 = 0\ \rightarrow\ |Q_5| =\ 0 \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 4-4 справа:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0:\ -N_4 = 0\ \rightarrow N_4 = 0 \\ \sum F_Y = 0: Q_4 - q \cdot 0{,}5a = 0\ \rightarrow\ |Q_4| =\ 0{,}5qa \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 3’-3’ справа:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0:\ -N_{3'} = 0\ \rightarrow N_{3'} = 0 \\ \sum F_Y = 0: Q_{3'} - q \cdot a = 0\ \rightarrow\ |Q_{3'}| =\ qa \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 3-3 сверху:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0:\ -Q_3 = 0\ \rightarrow |Q_3| = 0 \\ \sum F_Y = 0: -N_3 - q \cdot a = 0\ \rightarrow\ N_3\ = -\, qa \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 2-2 сверху:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0:\ -Q_3 = 0\ \rightarrow |Q_3| = 0 \\ \sum F_Y = 0: -N_3 - q \cdot a = 0\ \rightarrow\ N_3\ = -\, qa \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 1-1 сверху:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0:\ -Q_3 = 0\ \rightarrow |Q_3| = 0 \\ \sum F_Y = 0: -N_3 - q \cdot a - q \cdot a = 0\ \rightarrow\ N_3\ = -\, 2qa \end{cases}$$

Откладываем значения Q на горизонтальном стержне наверх, не со стороны пунктира, так как эпюра Q должна иметь знак «+» (быть не со стороны пунктира) и соединяем прямой линией. На вертикальном стержне эпюра Q нулевая.

Откладываем значения N на вертикальном стержне вправо, так как эпюра N должна иметь знак «–» (быть со стороны пунктира) и соединяем прямыми линиями. На горизонтальном стержне эпюра N нулевая.

Итоговое решение задачи 1: построенные эпюры M, Q и N представлены на рисунке 6.5.

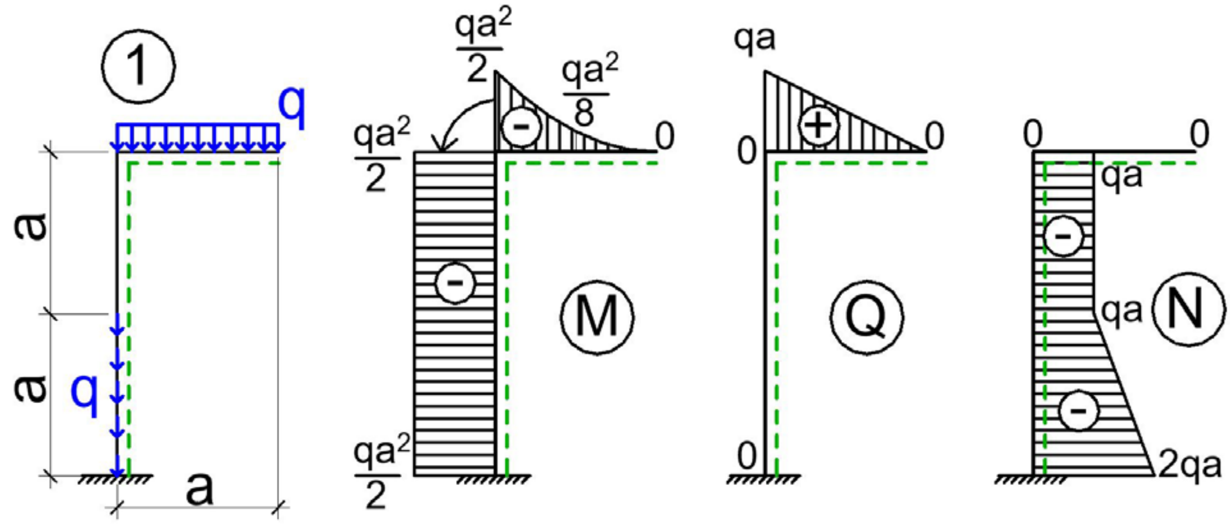


Рис. 6.5. Задача 1, эпюры M, Q, N

Обратим внимание на два важных момента. Во-первых, участок 3 это, вообще говоря, консоль, решенная в предыдущем разделе (задача 5, рисунок 5.11). Важно понимать, что к сколь сложной конструкции ни крепился бы подобный участок, он все еще остается простой консолью.

Во-вторых, сечения 3-3 и 3’-3’ это сечения через угловую точку (конец 2 участка и начало 3 участка). Для изгибающего момента, стремящегося повернуть сечение нет разницы какое из сечений рассматривать: горизонтальное 3-3 или вертикальное 3’-3’. Так как точка одна и та же, то все расстояния, а значит и плечи сил одинаковы. Для рассмотрения же поперечных и продольных сил, сила $Q_{3'}$ в вертикальном сечении является силой N_3 в горизонтальном сечении, и наоборот, сила $N_{3'}$ в вертикальном сечении является силой Q_3 в горизонтальном сечении.

Задача 2

На рисунке 6.6 представлена расчетная схема для задачи 2 с обозначенными реакциями связей с произвольным направлением.

Проведем пунктир, закрепив тем самым правило знаков, рисунок 6.6: М со стороны пунктира будет иметь знак «+», не со стороны пунктира будет иметь знак «–». Эпюры Q и N будут иметь со стороны пунктира знак «–», не со стороны пунктира будет иметь знак «+». Чтобы пунктир был справа при движении по стержню, движение по левому вертикальному стержню осуществляется снизу-вверх, по горизонтальному слева направо, по правому вертикальному стержню сверху-вниз.

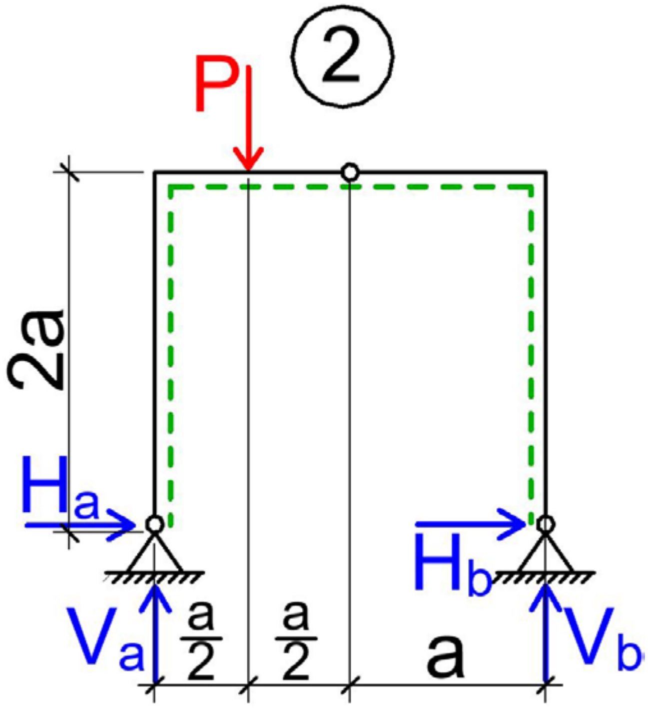


Рис. 6.6. Расчетная схема задачи 2

Определяем тип системы по формуле

$$n_{ст.н.} = С_{оп} + 3 \cdot К - 3 - Ш, \text{ где}$$

$С_{оп} = 4$, т.к. четыре связи возникают в опорных закреплениях;

$К = 0$, т.к. замкнутых контуров нет;

$Ш = 1$, т.к. есть один простой шарнир, в которых соединяются два стержня.

$$n_{ст.н.} = 4 + 3 \cdot 0 - 3 - 1 = 0$$

С учетом геометрической неизменяемости, система является статически определимой.

Так как система статически определима, то реакции связей можно найти из уравнений равновесия. К стандартным трем уравнениям равновесия, используемым нами ранее (сумма проекций всех сил на оси X и Y и сумма моментов всех сил относительно одной любой точки плоскости) за счет шарнира добавляется еще одно уравнение: равная 0 сумма моментов всех сил с одной из сторон от шарнира (с любой стороны, справа или слева).

Важно понимать, что, составив 2 уравнения: сумма моментов всех сил относительно шарнира слева и справа, уравнения получатся не независимые, и найти с их помощью можно будет одну дополнительную неизвестную, а не две. Также как происходит с уравнением суммы моментов всех сил относительно одной (любой точки). Так как точек на плоскости бесконечное количество, то и уравнений можно составить бесконечно много, но все они будут зависимыми и не позволят определить сколь угодно много неизвестных реакций опор.

Итак, имеет 4 уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_{(\cdot \mathrm{C})} = 0 \\ \sum \mathrm{M}_{\text{слева/справа}}^{\text{шарнира}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum \mathrm{F_X} = 0 \rightarrow \mathbf{H_a} + \mathbf{H_b} = 0 \\ \sum \mathrm{F_Y} = 0 \rightarrow \ \mathbf{V_a} - \mathrm{P} + \mathbf{V_b} = 0 \\ \sum \mathrm{M}_{(\cdot \mathrm{A})} = 0 \rightarrow \mathbf{V_b} \cdot 2\mathrm{a} - \mathrm{P} \cdot 0{,}5\mathrm{a} = 0 \\ \sum \mathrm{M}_{\text{справа}}^{\text{шарнира}} = 0 \rightarrow \mathbf{H_b} \cdot 2\mathrm{a} + \mathbf{V_b} \cdot \mathrm{a} = 0 \end{cases}$$

Имеем систему 4 уравнений с 4 неизвестными. Однако в 3 из 4 уравнений входят по 2 неизвестные, а значит уравнения должны решаться совместно, в системе. Рекомендуется поступать так же, как мы поступали при определении реакций в шарнирной балке (задача 1, рисунок 5.2).

Нужно попытаться составить уравнения, в которые вошли бы неизвестные по отдельности, чтобы можно было сразу их определить из одного уравнения, не решая системы. Из составленных ранее таким уравнением является третье $\sum M_{(\cdot A)} = 0$. В точке А пересекаются линии действия сил H_a, V_a и H_b, а значит момента вокруг точки А они не создают (их плечи равны 0), рисунок 6.7 А.

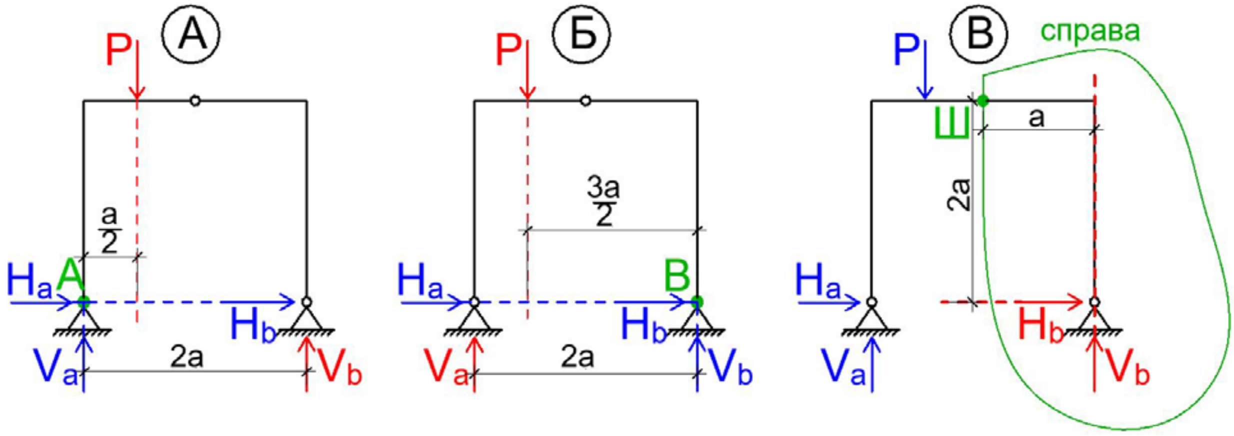


Рис. 6.7. Пояснения к составлению уравнений равновесия задачи 2

Аналогично, если составить сумму моментов всех сил относительно точки В, в которой пересекаются линии действия сил H_a, H_b и V_b, в него войдет только одна неизвестная V_a, рисунок 6.7 Б.

Для составления четвертого из уравнений (суммы моментов всех сил относительно шарнира справа) необходимо учесть моменты от всех сил, которые приложены к правой от шарнира части системы, рисунок 6.7 В. При составлении данного уравнения важно обратить внимание на плечи сил. Сила H_b горизонтальна, и плечо (кратчайшее расстояние от линии ее действия, красной штрихпунктирной линии на рисунке 6.7 В) до шарнира составляет 2а. Сила V_b вертикальна, и и плечо (кратчайшее расстояние от линии ее действия, красной штрихпунктирной линии на рисунке 6.7 В) до шарнира составляет а.

Составляем и решаем уравнения в такой последовательности, чтобы разделить их решение:

$$\begin{cases} \sum M_{(\cdot A)} = 0 \rightarrow V_b \cdot 2a - P \cdot 0{,}5a = 0 \rightarrow V_b = \dfrac{P}{4} \\ \sum M_{(\cdot B)} = 0 \rightarrow V_a \cdot 2a - P \cdot 1{,}5a = 0 \rightarrow V_a = \dfrac{3P}{4} \\ \sum M_{\text{справа}}^{\text{шарнира}} = 0 \rightarrow H_b \cdot 2a + V_b \cdot a = 0 \rightarrow H_b \cdot 2a + \dfrac{P}{4} \cdot a = 0 \rightarrow H_b = -\dfrac{P}{8} \\ \sum F_X = 0 \rightarrow H_a + H_b = 0 \rightarrow H_a + \left(-\dfrac{P}{8}\right) = 0 \rightarrow H_a = \dfrac{P}{8} \end{cases}$$

Проверка:

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow \ V_a - P + V_b = \frac{3P}{4} - P + \frac{P}{4} = 0 \text{ верно}$$

Так как у реакции H_b получено значение со знаком «–», то изначально выбранное направление неверно, а верно противоположное. Направления остальных реакций изначально было указано верно. Переходим к построению эпюры М.

Разделим систему на отдельные участки, в пределах которых характер эпюр внутренних усилий не меняется, получено 4 участка, рисунок 6.8. Также направим все найденные раньше реакции в верном направлении.

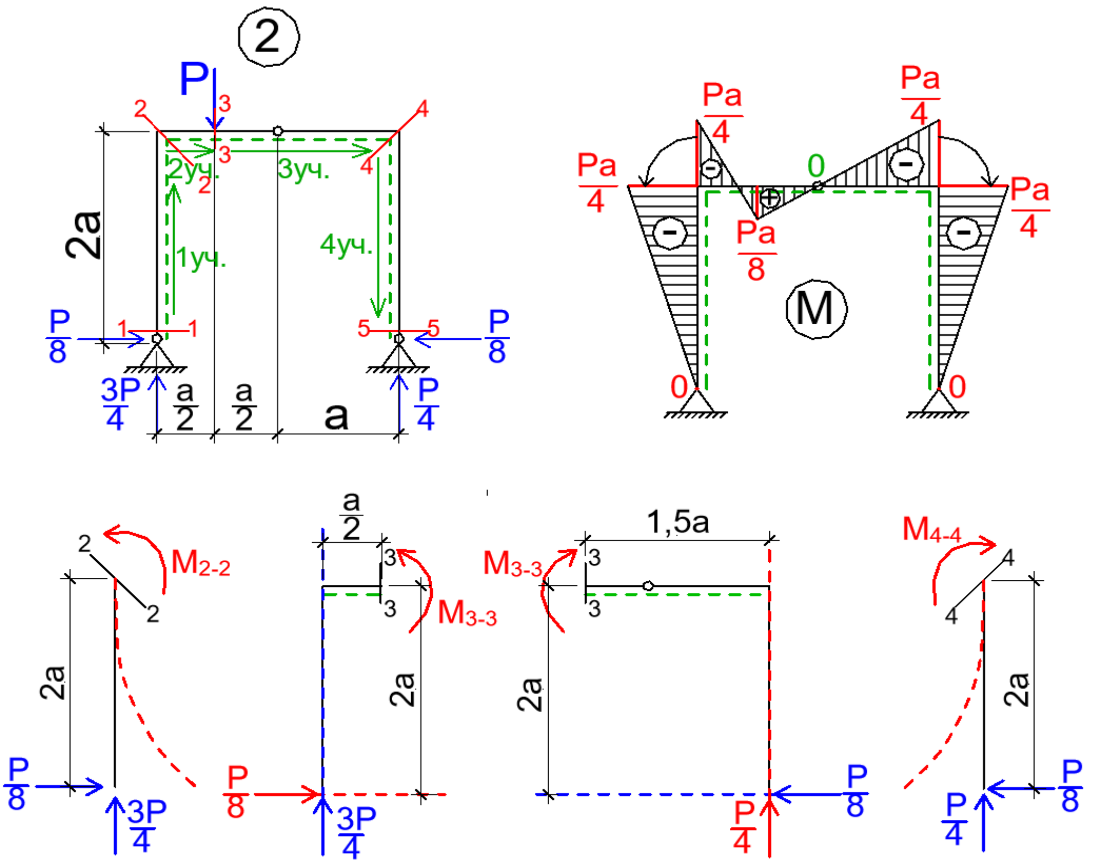


Рис. 6.8. Построение эпюры М, задача 2

Рассматривая части, отсеченные сечениями 1-1 и 5-5 снизу видим, что все силы проходят через сечение, а значит не создают изгибающих моментов: $\text{M}_{1-1} = 0, \text{M}_{5-5} = 0$.

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 2-2 снизу, рисунок 6.8. Относительно центра сечения 2-2 стержень изгибается единственной силой $\frac{P}{8}$. Сила $\frac{3P}{4}$ не изгибает стержень, а лишь сжимает его, поэтому в построении эпюры изгибающего момента М на данном стержне не участвует. Однозначно определяем, что от действия силы $\frac{P}{8}$ растягиваются левые волокна (рисунок 6.8), значит значение момента будем откладывать слева. Изгибающий момент в сечении 2-2 равен: $\text{M}_{2-2} = \frac{P}{8} \cdot 2a = \frac{Pa}{4}$, где 2a – плечо силы. Откладываем значение влево, рисунок 6.8.

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 3-3 слева, рисунок 6.8. Относительно центра сечения 3-3 горизонтальный стержень изгибается двумя силами $\frac{P}{8}$ и $\frac{3P}{4}$ причем в разные стороны. Поэтому нанесем пунктир и составим выражение для изгибающего момента с учетом знака. Если бы действовала бы только сила $\frac{3P}{4}$, то горизонтальный стержень изгибался бы наверх, нижние его волокна были бы растянуты, а так как пунктир тоже снизу, то значение момента было бы со знаком «+». Плечо от линии действия силы $\frac{3P}{4}$ до сечения 0,5a. Сила $\frac{P}{8}$ изгибает горизонтальный стержень в противоположную сторону, а значит момент от нее учитывается со знаком «–». Плечо от линии действия силы $\frac{P}{8}$ до сечения 2a. Изгибающий момент в сечении 3-3 равен: $\text{M}_{3-3} = \frac{3P}{4} \cdot 0{,}5a - \frac{P}{8} \cdot 2a = +\frac{Pa}{8}$. Получено значение со знаком «+», откладываем его вниз, со стороны пунктира, рисунок 6.8.

Дополнительно рассмотрим часть, отсеченную сечением 3-3 справа, рисунок 6.8. При решении задач требуется рассмотреть один из вариантов: либо слева, либо справа. Результат должен быть одинаковым. Относительно центра сечения 3-3 горизонтальный стержень изгибается двумя силами $\frac{P}{8}$ и $\frac{P}{4}$ причем в разные стороны. Поэтому нанесем пунктир и составим выражение для изгибающего момента с учетом знака. Если бы действовала бы только сила $\frac{P}{4}$, то горизонтальный стержень изгибался бы наверх, нижние его волокна были бы растянуты, а так как пунктир тоже снизу, то значение момента было бы со знаком «+». Плечо от линии действия силы $\frac{P}{4}$ до сечения 1,5a. Сила $\frac{P}{8}$ изгибает горизонтальный стержень в противоположную сторону, а значит момент от нее учитывается со знаком «–». Плечо от линии действия силы $\frac{P}{8}$ до сечения 2a. Изгибающий момент в сечении 3-3 равен: $М_{3-3} = \frac{P}{4} \cdot 1{,}5a - \frac{P}{8} \cdot 2a = +\frac{Pa}{8}$. Получено значение, совпадающее с тем, что получено из рассмотрения левой части.

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 4-4 снизу, рисунок 6.8. Относительно центра сечения 4-4 стержень изгибается единственной силой $\frac{P}{8}$. Сила $\frac{P}{4}$ не изгибает стержень, а лишь сжимает его, поэтому в построении эпюры изгибающего момента М на данном стержне не участвует. Однозначно определяем, что от действия силы $\frac{P}{8}$ растягиваются правые волокна (рисунок 6.8), значит значение момента будем откладывать справа. Изгибающий момент в сечении 4-4 равен: $М_{4-4} = \frac{P}{8} \cdot 2a = \frac{Pa}{4}$, где 2a – плечо силы. Откладываем значение справа, рисунок 6.8.

Соединяем все отложенные значения прямыми линиями (т.к. распределенная нагрузка перпендикулярно оси стержня отсутствует и эпюра М линейна).

Следует обратить внимание на шарнир. Во-первых, он не должен обязательно являться границей участка (в нем не происходит изменения характера эпюры М). Во-вторых, в шарнире изгибающий момент должен быть равен 0. А значит, вычислять значение изгибающего момента в сечении

4-4 было необязательно. Эпюру М на 3 участке можно было построить по начальной (левой) точке участка и по 0 в шарнире. В данном случае значение в конце 3 участка, справа можно определить из подобия треугольников, рисунок 6.9: $\frac{0{,}5a}{a} = \frac{Pa/8}{X} \to X = \frac{Pa}{4}$

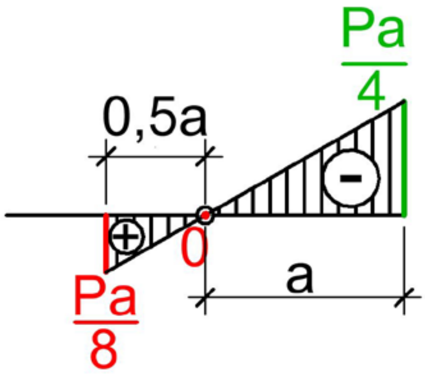


Рис. 6.9. Построение эпюры М на 3 участке, задача 2

Перейдем к построению эпюр Q и N. Для этого используются те же сечения, что и для построения эпюры изгибающего момента М, однако разделим сечения 2-2 и 4-4 на сечения, относящиеся к вертикальному и горизонтальному стержням, и сечение 3-3 на сечение слева и справа от силы Р.

Рассмотрим равновесие отсеченных частей по вертикали и по горизонтали под действием внешних сил и внутренних усилий Q и N. Знак на эпюре Q определяется исходя из связи М и Q как функции и ее производной:

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

При возрастании значений функции М, функция Q – положительна, при убывании значений функции М, функция Q – отрицательна.

Заметим, что так как функция М на всех участках линейна, то функция Q в пределах каждого из участков должна быть постоянна.

На рисунке 6.8 зелеными стрелками показано направление движения по стержню: при движении от начала к концу стержня пунктир должен быть справа, то движение по левому вертикальному стержню должно происходить снизу-вверх, по горизонтальному слева направо, по правому вертикальному стержню сверху вниз.

При движении по левому вертикальному стержню (по первому участку) снизу-вверх значение М убывает от 0 до $-\frac{Pa}{4}$, значит эпюра Q должна иметь знак «–».

При движении по горизонтальному стержню (по второму участку) слева направо значение М возрастает от $-\frac{Pa}{4}$ до $+\frac{Pa}{8}$, значит эпюра Q должна иметь знак «+».

При движении по горизонтальному стержню (по третьему участку) слева направо значение М убывает от $+\frac{Pa}{8}$ до $-\frac{Pa}{4}$, значит эпюра Q должна иметь знак «–».

При движении по правому вертикальному стержню (по четвертому участку) сверху-вниз значение М возрастает от $-\frac{Pa}{4}$ до 0, значит эпюра Q должна иметь знак «+».

Продольное усилие имеет знак «+» если оно растягивающее (растягивает стержень, действует «от сечения») и имеет знак «–», если оно сжимающее (сжимает стержень, действует «к сечению»).

Напоминаем, что значения Q и N на эпюрах со знаком «+» откладываются не со стороны пунктира, а со знаком «–» откладываются со стороны пунктира.

Определим значения N и абсолютные значения Q из рассмотрения равновесия отсеченных частей по горизонтали и вертикали, рисунок 6.10.

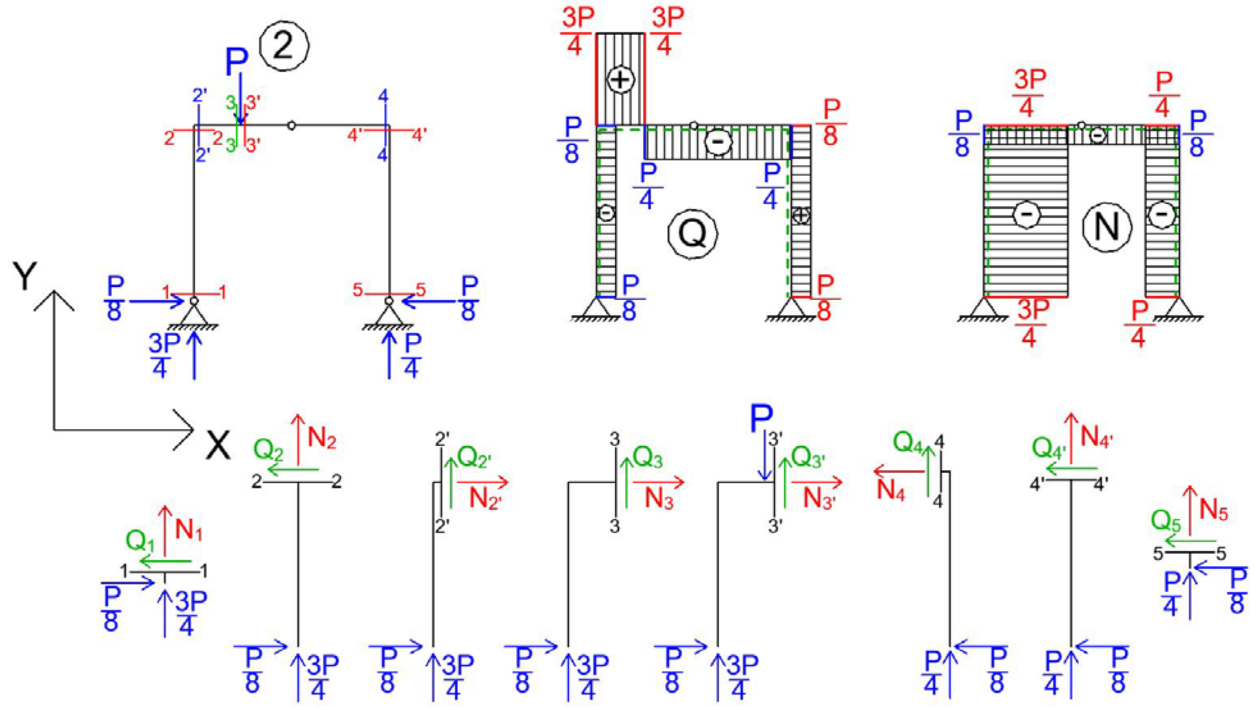


Рис. 6.10. Построение эпюр Q и N, задача 2

Часть, отсеченная сечением 1-1 снизу:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0:\ \frac{P}{8} - Q_1 = 0 \ \rightarrow |Q_1| = \frac{P}{8} \\ \sum F_Y = 0:\ \frac{3P}{4} + N_1 = 0 \ \rightarrow \ N_1 = -\frac{3P}{4} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 2-2 снизу:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0:\ \frac{P}{8} - Q_2 = 0 \ \rightarrow |Q_2| = \frac{P}{8} \\ \sum F_Y = 0:\ \frac{3P}{4} + N_2 = 0 \ \rightarrow \ N_2 = -\frac{3P}{4} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 2’-2’ слева:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0:\ \frac{P}{8} + N_{2'} = 0 \ \rightarrow N_{2'} = -\frac{P}{8} \\ \sum F_Y = 0:\ \frac{3P}{4} + Q_{2'} = 0 \ \rightarrow |Q_{2'}| = \frac{3P}{4} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 3-3 слева:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0:\ \frac{P}{8} + N_3 = 0 \ \rightarrow N_3 = -\frac{P}{8} \\ \sum F_Y = 0:\ \frac{3P}{4} + Q_3 = 0 \ \rightarrow |Q_3| = \frac{3P}{4} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 3’-3’ слева:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0: \dfrac{P}{8} + N_{3'} = 0 \ \rightarrow N_{3'} = -\dfrac{P}{8} \\ \sum F_Y = 0: \dfrac{3P}{4} - P + Q_{3'} = 0 \ \rightarrow |Q_{3'}| = \dfrac{P}{4} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 4-4 справа:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0: \ -N_4 - \dfrac{P}{8} = 0 \ \rightarrow N_4 = -\dfrac{P}{8} \\ \sum F_Y = 0: \dfrac{P}{4} + Q_4 = 0 \ \rightarrow \ |Q_4| = \dfrac{P}{4} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 4’-4’ снизу:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0: \ -\dfrac{P}{8} - Q_{4'} = 0 \ \rightarrow \ |Q_{4'}| = \dfrac{P}{8} \\ \sum F_Y = 0: \dfrac{P}{4} + N_{4'} = 0 \ \rightarrow \ N_{4'} = -\dfrac{P}{4} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 5-5 снизу:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0: \ -\dfrac{P}{8} - Q_5 = 0 \ \rightarrow \ |Q_5| = \dfrac{P}{8} \\ \sum F_Y = 0: \dfrac{P}{4} + N_5 = 0 \ \rightarrow \ N_5 = -\dfrac{P}{4} \end{cases}$$

Откладываем значения Q на левом вертикальном стержне со стороны пунктира, так как эпюра Q должна иметь знак «–» и соединяем прямой линией. На горизонтальном стержне на 2 участке эпюра Q строится не со стороны пунктира, так как она должна иметь знак «+». На горизонтальном стержне на 3 участке эпюра Q строится со стороны пунктира, так как она должна иметь знак «–». На правом вертикальном стержне откладываем значения Q не со стороны пунктира, так как она должна иметь знак «+».

Откладываем значения N на всех стержнях со стороны пунктира, так как эпюра N должна иметь знак «–» и соединяем прямыми линиями. Итоговое решение задачи 2: построенные эпюры M, Q и N представлены на рисунке 6.11.

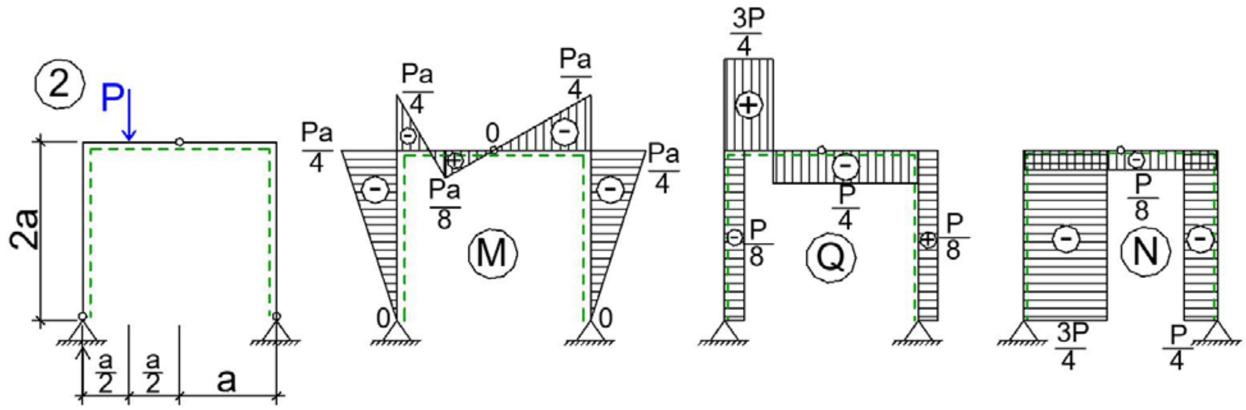


Рис. 6.11. Задача 2, эпюры M, Q, N

Еще раз обратим внимание на шарнир. Он не должен в обязательном порядке быть границей участков, значение изгибающего момента M в шарнире должно быть равно 0, на эпюрах поперечных Q и продольных N сил в шарнире не происходит ни скачков, ни изломов.

Задача 3

На рисунке 6.12 представлена расчетная схема для задачи 3 с обозначенными реакциями связей с произвольным направлением.

Проведем пунктир, закрепив тем самым правило знаков, рисунок 6.12: M со стороны пунктира будет иметь знак «+», не со стороны пунктира будет иметь знак «–». Эпюры Q и N будут иметь со стороны пунктира знак «–», не со стороны пунктира будет иметь знак «+». Чтобы пунктир был справа при движении по стержню, движение по горизонтальным стержням осуществляется слева направо, по вертикальному снизу-верх.

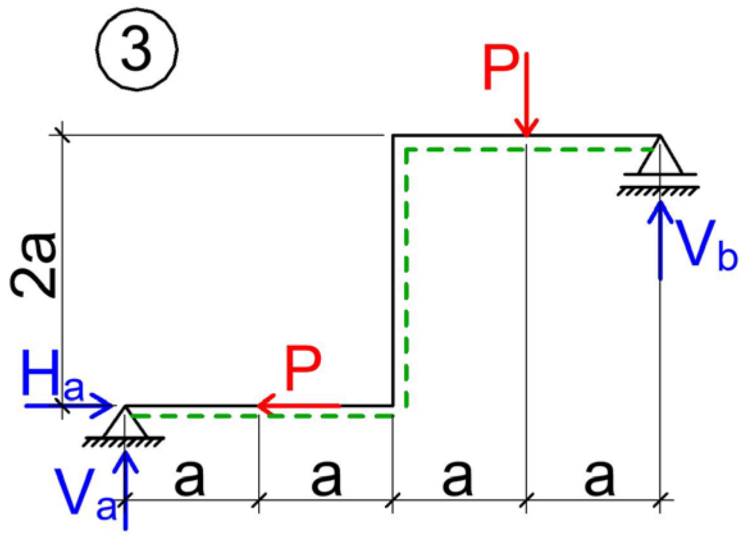


Рис. 6.12. Расчетная схема задачи 3

Определяем тип системы по формуле

$$n_{ст.н.} = С_{оп} + 3 \cdot К - 3 - Ш, \text{ где}$$

$С_{оп}$ = 3, т.к. четыре связи возникают в опорных закреплениях;

К = 0, т.к. замкнутых контуров нет;

Ш = 0, т.к. нет шарниров, в которых соединяются два стержня и более.

$$n_{ст.н.} = 3 + 3 \cdot 0 - 3 - 0 = 0$$

С учетом геометрической неизменяемости, система является статически определимой.

Так как система статически определима, то реакции связей найдем из уравнений равновесия. Составим сумму проекций всех сил на горизонтальную ось и из нее найдем горизонтальную реакцию. Составим суммы моментов всех сил относительно точек А и С и из них найдем вертикальные реакции, рисунок 6.13.

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \rightarrow H_a - P = 0 \rightarrow H_a = P \\ \sum M_{(\cdot A)} = 0 \rightarrow \mathbf{V_b \cdot 4a - P \cdot 3a = 0} \rightarrow \mathbf{V_b} = \dfrac{3P}{4} \\ \sum M_{(\cdot C)} = 0 \rightarrow \mathbf{V_a} \cdot 4a - P \cdot a = 0 \rightarrow \mathbf{V_a} = \dfrac{P}{4} \end{cases}$$

Проверка:

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow V_a - P + V_b = \frac{P}{4} - P + \frac{3P}{4} = 0 \text{ верно}$$

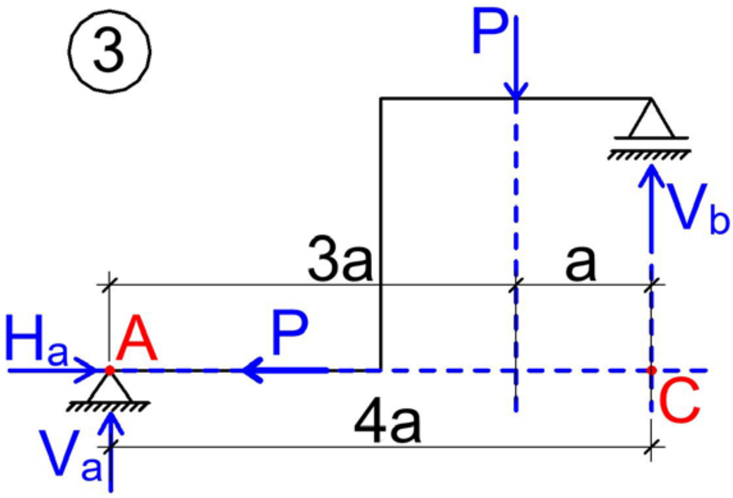


Рис. 6.13. Пояснения к составлению уравнений равновесия задачи 3

Все вычисленные реакции имеют знак «+», а значит указанные на рисунке 6.13 направления реакций верные. Переходим к построению эпюры М.

Разделим систему на отдельные участки, в пределах которых характер эпюр внутренних усилий не меняется, получено 5 участков, рисунок 6.14.

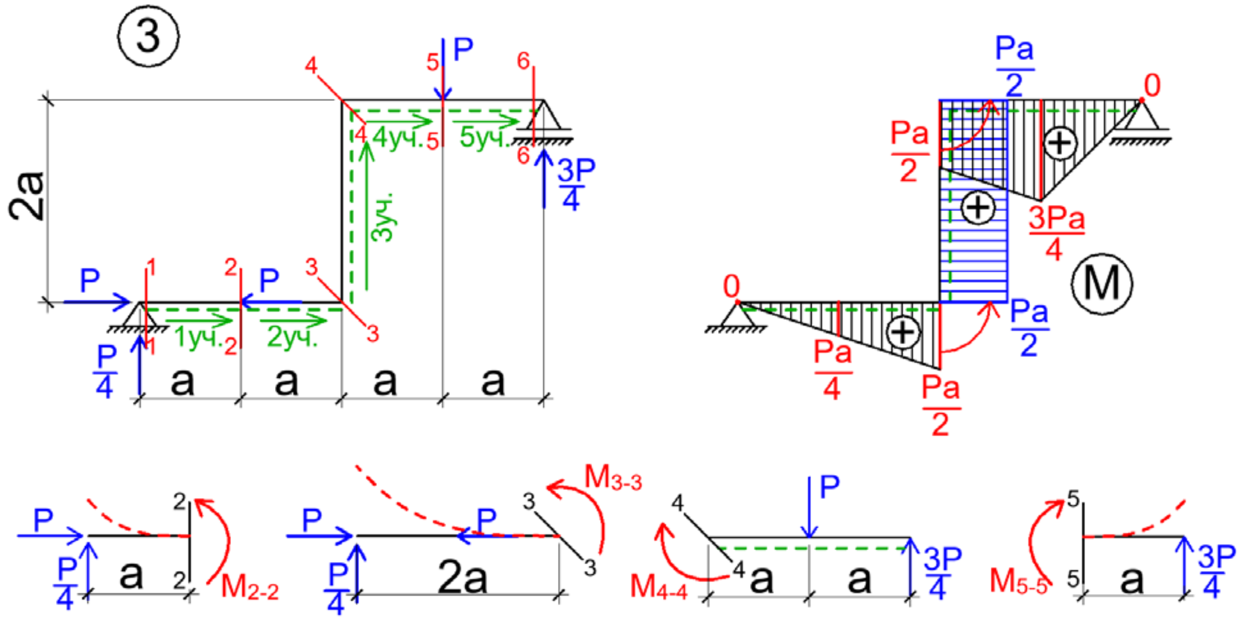


Рис. 6.14. Построение эпюры М, задача 3

Рассматривая части, отсеченные сечениями 1-1 и 5-5 снизу видим, что все силы проходят через сечение, а значит не создают изгибающих моментов: $\mathrm{M}_{1-1}=0, \mathrm{M}_{5-5}=0$.

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 2-2 слева, рисунок 6.14. Относительно центра сечения 2-2 стержень изгибается единственной силой $\frac{P}{4}$. Сила Р не изгибает стержень, а лишь сжимает его, поэтому в построении эпюры изгибающего момента М на данном стержне не участвует. Однозначно определяем, что от действия силы $\frac{P}{4}$ растягиваются нижние волокна (рисунок 6.14), значит значение момента будем откладывать вниз. Изгибающий момент в сечении 2-2 равен: $\mathrm{M}_{2-2}=\frac{P}{4}\cdot a=\frac{Pa}{4}$, где а – плечо силы. Откладываем значение вниз, рисунок 6.14.

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 3-3 слева, рисунок 6.14. Относительно центра сечения 3-3 стержень изгибается единственной силой $\frac{P}{4}$. Силы Р не изгибают стержень, а лишь сжимают и растягивают его, поэтому в построении эпюры изгибающего момента М на данном стержне не участвует. Однозначно определяем, что от действия силы $\frac{P}{4}$ растягиваются нижние волокна (рисунок 6.14), значит значение момента будем откладывать вниз. Изгибающий момент в сечении 3-3 равен: $\mathrm{M}_{3-3} = \frac{P}{4} \cdot 2a = \frac{Pa}{2}$, где 2а – плечо силы. Откладываем значение вниз и переносим направо от вертикального стержня, рисунок 6.14.

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 4-4 справа, рисунок 6.14. Относительно центра сечения 4-4 горизонтальный стержень изгибается двумя силами Р и $\frac{3P}{4}$ причем в разные стороны. Поэтому нанесем пунктир и составим выражение для изгибающего момента с учетом знака. Если бы действовала бы только сила $\frac{3P}{4}$, то горизонтальный стержень изгибался бы наверх, нижние его волокна были бы растянуты, а так как пунктир тоже снизу, то значение момента было бы со знаком «+». Плечо силы составляет 2а. Сила Р изгибает горизонтальный стержень в противоположную сторону, а значит момент от нее учитывается со знаком «–». Плечо силы а. Изгибающий момент в сечении 4-4 равен: $\mathrm{M}_{4-4} = \frac{3P}{4} \cdot 2a - P \cdot a = +\frac{Pa}{2}$. Получено значение со знаком «+», откладываем его вниз, со стороны пунктира, рисунок 6.14.

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 5-5 справа, рисунок 6.14. Относительно центра сечения 5-5 стержень изгибается единственной силой $\frac{3P}{4}$. Однозначно определяем, что от действия силы $\frac{3P}{4}$ растягиваются нижние волокна (рисунок 6.14), значит значение момента будем откладывать вниз. Изгибающий момент в сечении 5-5 равен: $\mathrm{M}_{5-5} = \frac{3P}{4} \cdot a = \frac{3Pa}{4}$, где а – плечо силы. Откладываем значение вниз, рисунок 6.14. Соединяем все отложенные значения прямыми линиями (т.к. распределенная нагрузка перпендикулярно оси стержня отсутствует и эпюра М линейна).

Перейдем к построению эпюр Q и N. Для этого используются те же сечения, что и для построения эпюры изгибающего момента М, однако разделим сечения 3-3 и 4-4 на сечения, относящиеся к вертикальному и горизонтальному стержням, и сечения 2-2 и 5-5 на сечение слева и справа от точки приложения сосредоточенной силы Р.

Рассмотрим равновесие отсеченных частей по вертикали и по горизонтали под действием внешних сил и внутренних усилий Q и N. Знак на эпюре Q определяется исходя из связи М и Q как функции и ее производной:

$$\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{dx}}$$

При возрастании значений функции М, функция Q – положительна, при убывании значений функции М, функция Q – отрицательна.

Заметим, что так как функция М на всех участках линейна, то функция Q в пределах каждого из участков должна быть постоянна.

На рисунке 6.14 зелеными стрелками показано направление движения по стержню: при движении от начала к концу стержня пунктир должен быть справа, то движение по горизонтальным стержням происходит слева направо, по вертикальному снизу-вверх.

При движении по первому и второму участкам слева направо значение М возрастает от 0 до $+\frac{Pa}{2}$, значит эпюра Q должна иметь знак «+».

При движении по третьему участку значение М постоянно, значит Q=0 на всем участке.

При движении по четвертому участку слева направо значение М возрастает от $+\frac{Pa}{2}$ до $+\frac{3Pa}{4}$, значит эпюра Q должна иметь знак «+».

При движении по пятому участку слева направо значение М убывает от $+\frac{3Pa}{4}$ до 0, значит эпюра Q должна иметь знак «–».

Продольное усилие имеет знак «+» если оно растягивающее (растягивает стержень, действует «от сечения») и имеет знак «–», если оно сжимающее (сжимает стержень, действует «к сечению»).

Значения Q и N на эпюрах со знаком «+» откладываются не со стороны пунктира, а со знаком «–» откладываются со стороны пунктира.

Определим значения N и абсолютные значения Q из рассмотрения равновесия отсеченных частей по горизонтали и вертикали, рисунок 6.15.

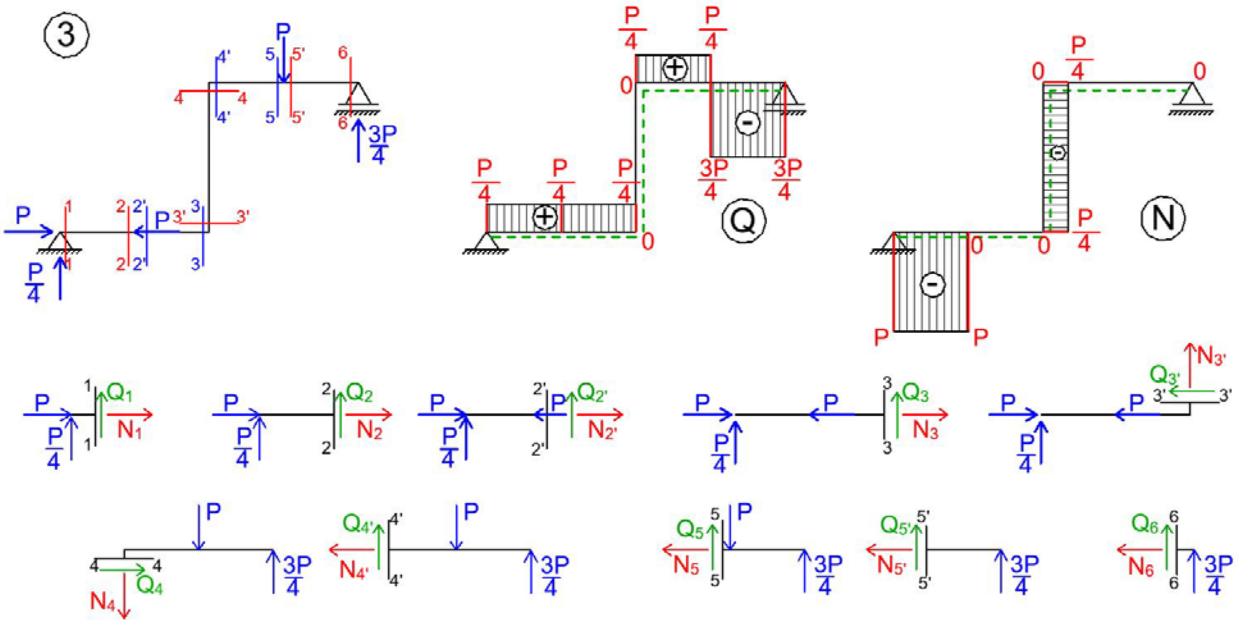


Рис. 6.15. Построение эпюр Q и N, задача 3

Часть, отсеченная сечением 1-1 слева:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0: P + N_1 = 0 \ \rightarrow N_1 = -P \\ \sum F_Y = 0: \dfrac{P}{4} + Q_1 = 0 \ \rightarrow \ |Q_1| = \dfrac{P}{4} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 2-2 слева:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0: P + N_2 = 0 \ \rightarrow N_2 = -P \\ \sum F_Y = 0: \dfrac{P}{4} + Q_2 = 0 \ \rightarrow \ |Q_2| = \dfrac{P}{4} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 2’-2’ слева:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0: P - P + N_{2'} = 0 \ \rightarrow N_{2'} = 0 \\ \sum F_Y = 0: \dfrac{P}{4} + Q_{2'} = 0 \ \rightarrow \ |Q_{2'}| = \dfrac{P}{4} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 3-3 слева:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0: P - P + N_3 = 0 \ \rightarrow N_3 = 0 \\ \sum F_Y = 0: \dfrac{P}{4} + Q_3 = 0 \ \rightarrow \ |Q_3| = \dfrac{P}{4} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 3’-3’ снизу:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0: P - P - Q_{3'} = 0 \ \rightarrow |Q_{3'}| = 0 \\ \sum F_Y = 0: \dfrac{P}{4} + N_{3'} = 0 \ \rightarrow \ N_3 = -\dfrac{P}{4} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 4-4 сверху:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0: Q_4 = 0 \ \rightarrow |Q_4| = 0 \\ \sum F_Y = 0: \dfrac{3P}{4} - P - N_4 = 0 \ \rightarrow \ N_4 \ = -\dfrac{P}{4} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 4’-4’ справа:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0: \ -N_{4'} = 0 \ \rightarrow \ \ N_{4'} = 0 \\ \sum F_Y = 0: Q_{4'} - P + \dfrac{3P}{4} = 0 \ \rightarrow \ |Q_{4'}| \ = \dfrac{P}{4} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 5-5 справа:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0: \ -N_5 = 0 \ \rightarrow \ \ N_5 = 0 \\ \sum F_Y = 0: Q_5 - P + \dfrac{3P}{4} = 0 \ \rightarrow \ |Q_5| \ = \dfrac{P}{4} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 5’-5’ справа:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0: \ -N_{5'} = 0 \ \rightarrow \ \ N_{5'} = 0 \\ \sum F_Y = 0: Q_{5'} + \dfrac{3P}{4} = 0 \ \rightarrow \ |Q_{5'}| \ = \dfrac{3P}{4} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 6-6 справа:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0: \ -N_6 = 0 \ \rightarrow \ \ N_6 = 0 \\ \sum F_Y = 0: Q_6 + \dfrac{3P}{4} = 0 \ \rightarrow \ |Q_6| \ = \dfrac{3P}{4} \end{cases}$$

Откладываем значения Q и N согласно правилу знаков, рисунок 6.15.

Итоговое решение задачи 3: построенные эпюры M, Q и N представлены на рисунке 6.16.

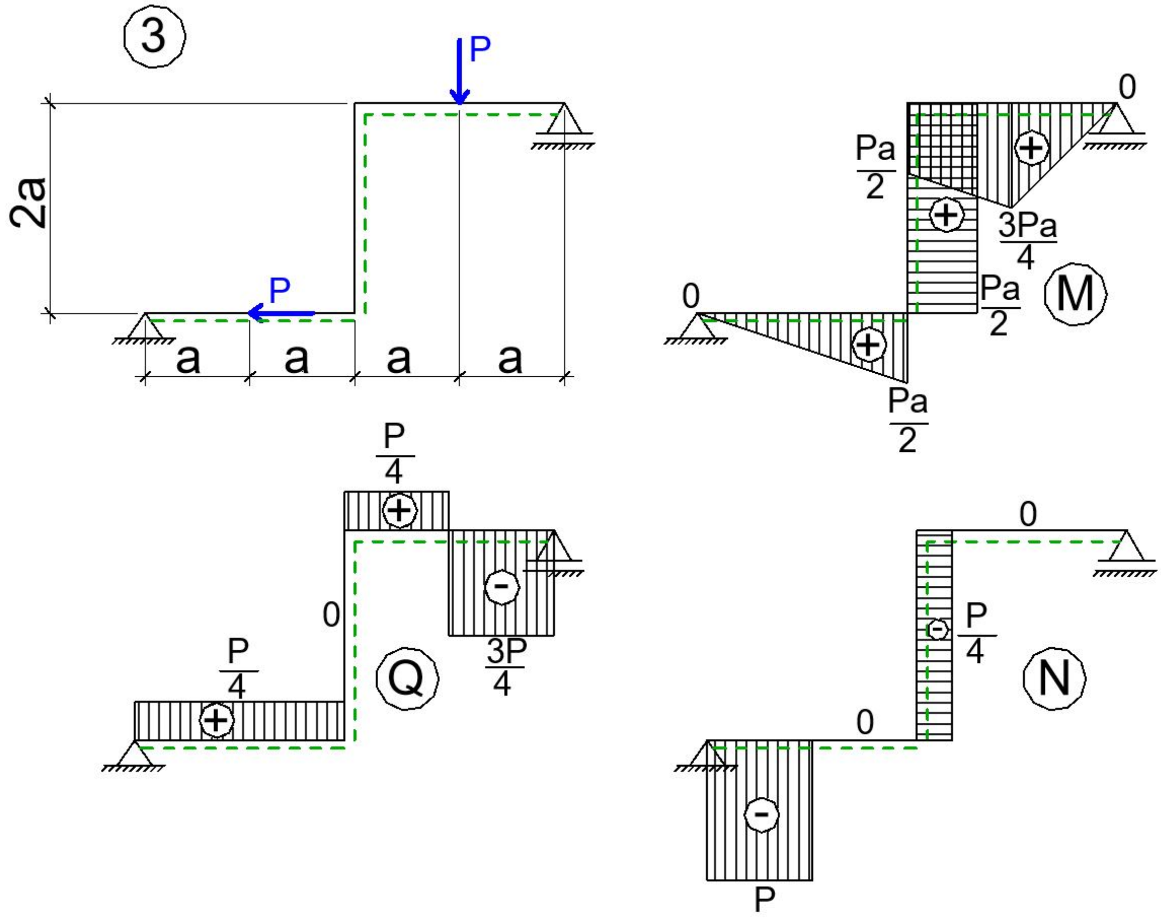


Рис. 6.16. Задача 3, эпюры M, Q, N

Обратим внимание на избыточность вычислений при построении эпюр Q и N. Заранее определив, что в пределах каждого из участков эпюра Q имеет постоянное значение достаточно было бы вычислить 5 значений Q (а не 10, как это было сделано). Здесь это сделано для лучшего разъяснения материала. В будущем используя свойства эпюр M, Q и N достаточно будет рассматривать еще меньшее количество сечений. Свойства эпюр M, Q и N будут даны в следующем разделе учебного пособия.

Задача 4

На рисунке 6.17 представлена расчетная схема для задачи 4 с обозначенными реакциями связей с произвольным направлением.

Проведем пунктир, закрепив тем самым правило знаков, рисунок 6.17: М со стороны пунктира будет иметь знак «+», не со стороны пунктира будет иметь знак «–». Эпюры Q и N будут иметь со стороны пунктира знак «–», не со стороны пунктира будет иметь знак «+». Чтобы пунктир был справа при движении по стержню, движение по левому вертикальному стержню осуществляется снизу-вверх, по горизонтальному слева направо, по правому вертикальному стержню сверху-вниз.

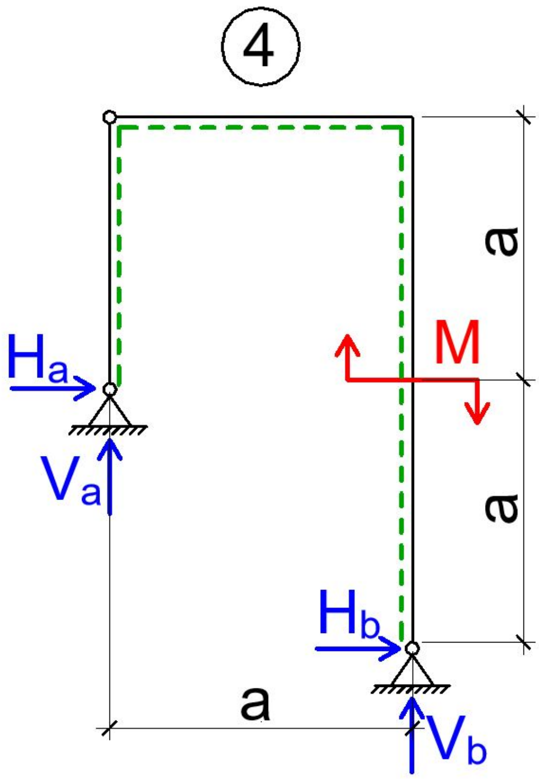


Рис. 6.17. Расчетная схема задачи 4

Определяем тип системы по формуле

$$n_{ст.н.} = С_{оп} + 3 \cdot К - 3 - Ш, \text{ где}$$

$С_{оп}$ = 4, т.к. четыре связи возникают в опорных закреплениях;

К = 0, т.к. замкнутых контуров нет;

Ш = 1, т.к. есть один простой шарнир, в которых соединяются два стержня.

$$n_{ст.н.} = 4 + 3 \cdot 0 - 3 - 1 = 0$$

С учетом геометрической неизменяемости, система является статически определимой.

Составим уравнения равновесия попытавшись разделить неизвестные. Составим уравнения суммы моментов всех сил относительно шарнира снизу сразу сможем найти горизонтальную реакция H_a, рисунок 6.18 А:

$$\sum M_{\text{снизу}}^{\text{шарнира}} = 0 \rightarrow H_a \cdot a = 0 \rightarrow H_a = 0$$

Далее составив уравнение суммы проекций всех сил на горизонтальную ось и зная H_a найдем H_b:

$$\sum F_X = 0 \rightarrow H_a + H_b = 0 \rightarrow H_b = 0$$

Далее составив уравнение суммы моментов всех сил относительно точек A и B и зная H_a и H_b найдем V_a и V_b, рисунок 6.18 Б, В:

$$\begin{cases} \sum M_{(\cdot A)} = 0 \rightarrow H_b \cdot a + V_b \cdot a - M = 0 \rightarrow V_b = \dfrac{M}{a} \\ \sum M_{(\cdot B)} = 0 \rightarrow H_a \cdot a + V_a \cdot a + M = 0 \rightarrow V_a = -\dfrac{M}{a} \end{cases}$$

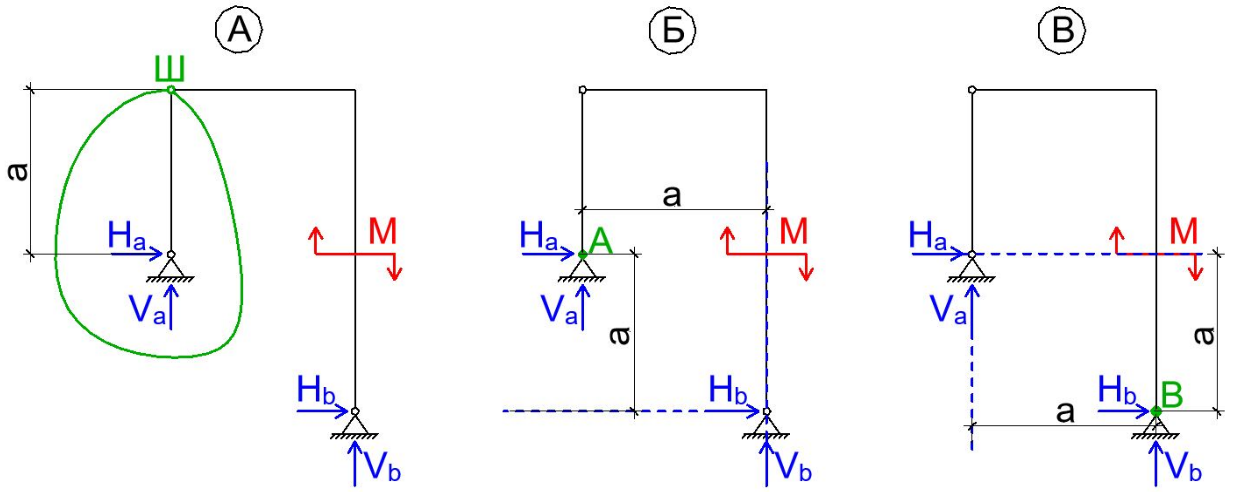


Рис. 6.18. Пояснения к составлению уравнений равновесия задачи 4

Проверка:

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow \; V_a + V_b = -\frac{M}{a} + \frac{M}{a} = 0 \text{ верно}$$

Так как у реакции V_a получено значение со знаком «–», то изначально выбранное направление неверно, а верно противоположное. Направления остальных реакций изначально было указано верно. Переходим к построению эпюры М.

Разделим систему на отдельные участки, в пределах которых характер эпюр внутренних усилий не меняется, получено 4 участка, рисунок 6.19. Направим все найденные раньше реакции в верном направлении.

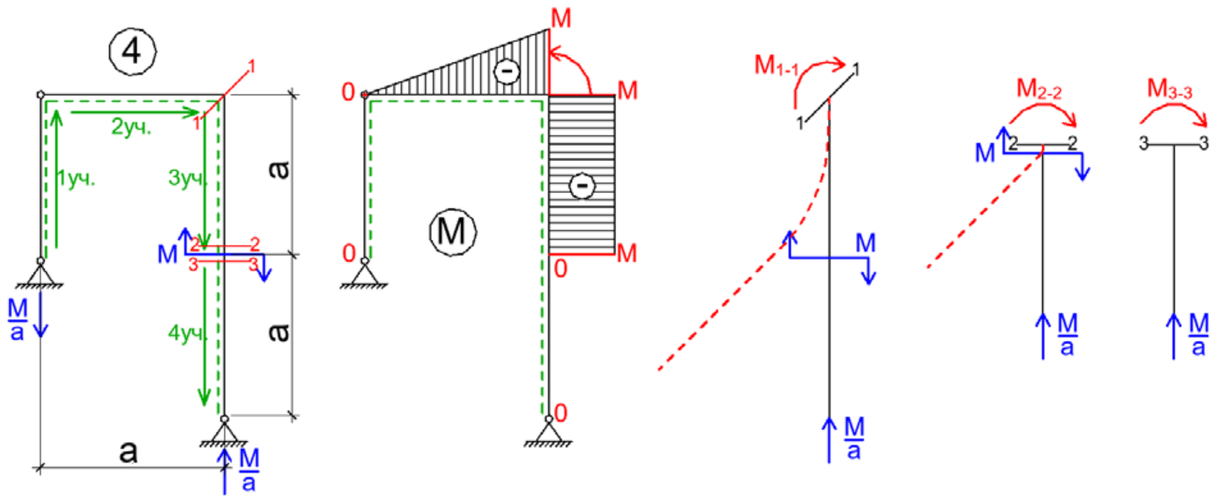


Рис. 6.19. Построение эпюры М, задача 4

В начале первого участка шарнирная опора, в конце первого участка шарнир, и там, и там значение изгибающего момента равно 0. Внутри участка нет нагрузки, значит по длине всего 1 участка эпюра моментов нулевая.

На втором участке в начале шарнир (изгибающий момент равен 0) в конце участка сечение 1-1, совпадающее с началом третьего участка. Рассматривая часть, отсеченную сечением 1-1 снизу видим, что стержень изгибается только сосредоточенным моментом М (сила $\frac{M}{a}$ не изгибает, а лишь сжимает стержень), а значит однозначно определяем, что растягиваются правые волокна, значит направо откладывается значение $M_{1-1} = M$. Это же значение с начала третьего участка переносится и в конец второго участка.

Рассматривая часть, отсеченную сечением 2-2 снизу видим, что стержень изгибается только сосредоточенным моментом М (сила $\frac{M}{a}$ не изгибает, а лишь сжимает стержень), а значит однозначно определяем, что растягиваются правые волокна, значит направо откладывается значение $M_{2-2} = M$.

Рассматривая часть, отсеченную сечением 3-3 снизу видим, что стержень не изгибается, а только сжимается силой $\frac{M}{a}$, а значит $M_{3-3} = 0$.

Перейдем к построению эпюр Q и N. Отличной от 0 эпюра Q будет только на 2 участке, так как на 1, 3 и 4 участках эпюра M постоянна и $Q = \frac{dM}{dx} = 0$. На втором участке, при движении по стержню слева направо M убывает от 0 до –M, значит Q должна иметь знак «–». Продольное усилие имеет знак «+» если оно растягивающее (растягивает стержень, действует «от сечения») и имеет знак «–», если оно сжимающее (сжимает стержень, действует «к сечению»).

Проведем сечения 1-1, 2-2, 3-3 и 4-4, рисунок 6.20. Определим значения N и абсолютные значения Q из рассмотрения равновесия отсеченных частей по горизонтали и вертикали, рисунок 6.20.

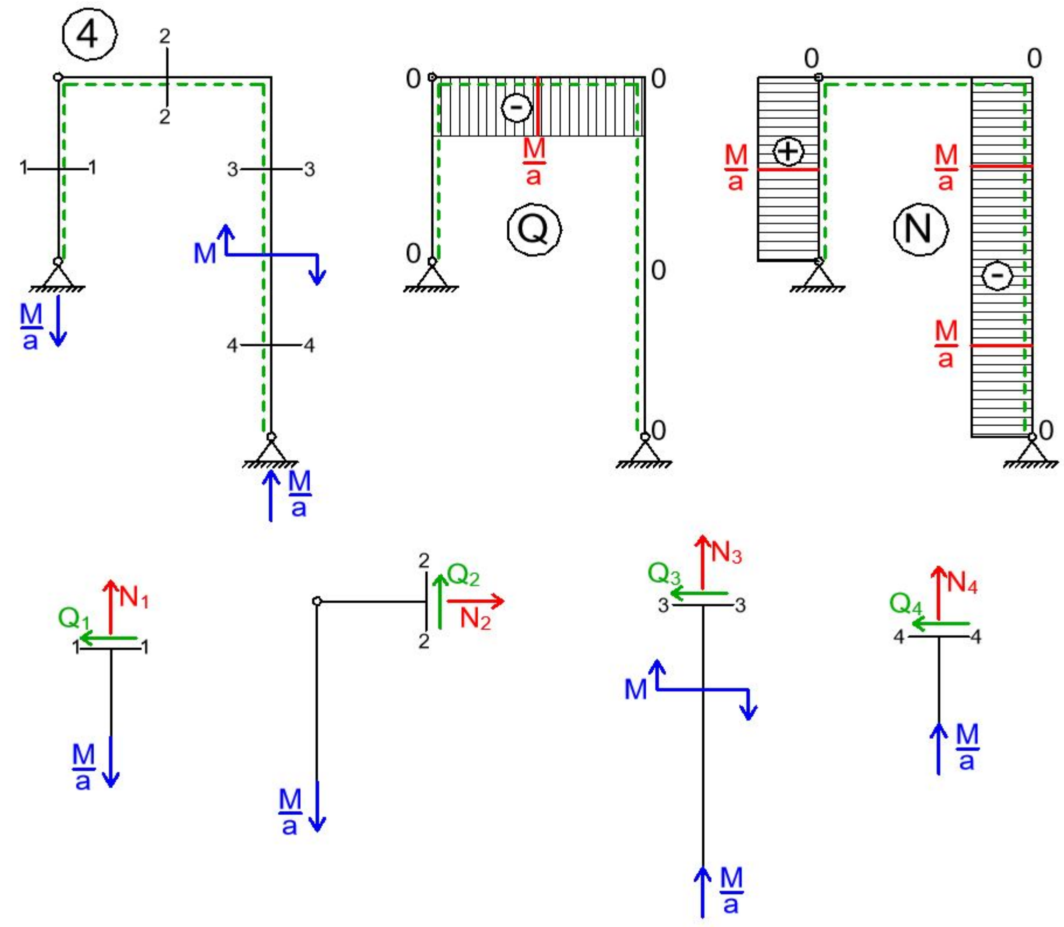


Рис. 6.20. Построение эпюр Q и N, задача 4

Часть, отсеченная сечением 1-1 снизу:

$$\begin{cases} \sum \mathrm{F_X} = 0: \; -\mathrm{Q_1} = 0 \; \rightarrow |\mathrm{Q_1}| = 0 \\ \sum \mathrm{F_Y} = 0: \; -\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{a}} + \mathrm{N_1} = 0 \; \rightarrow \; \mathrm{N_1} = \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{a}} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 2-2 слева:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0: N_2 = 0 \; \rightarrow N_2 = 0 \\ \sum F_Y = 0: \; -\dfrac{M}{a} + Q_2 = 0 \; \rightarrow \; |Q_2| = \dfrac{M}{a} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 3-3 снизу:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0: \; -Q_3 = 0 \; \rightarrow |Q_3| = 0 \\ \sum F_Y = 0: \dfrac{M}{a} + N_3 = 0 \; \rightarrow N_3 = -\dfrac{M}{a} \end{cases}$$

Часть, отсеченная сечением 4-4 снизу:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0: \; -Q_4 = 0 \; \rightarrow |Q_4| = 0 \\ \sum F_Y = 0: \dfrac{M}{a} + N_4 = 0 \; \rightarrow N_4 = -\dfrac{M}{a} \end{cases}$$

Откладываем значения Q со стороны пунктира, так как эпюра Q должна иметь знак «–». Откладываем значения N на левом вертикальном стержне не со стороны пунктира, так как N имеет знак «+», на правом вертикальном стержне откладываем со стороны пунктира так как N имеет знак «–», рисунок 6.20.

Итоговое решение задачи 4: построенные эпюры M, Q и N представлены на рисунке 6.21.

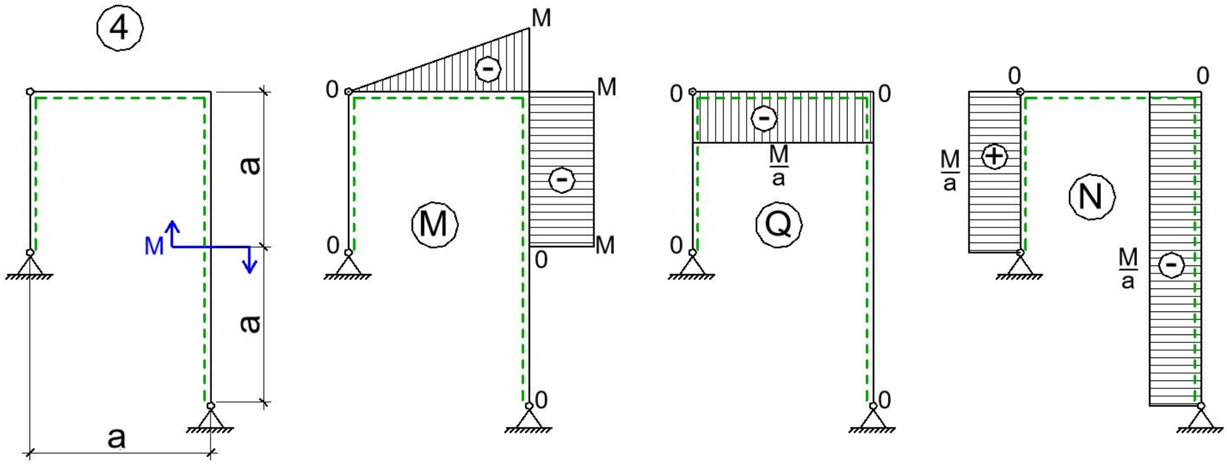


Рис. 6.21. Задача 4, эпюры M, Q, N

Обратим внимание на то, что на эпюрах поперечных Q и продольных N сил в месте приложения сосредоточенного изгибающего момента не происходит ни скачков, ни изломов.

7. Свойства эпюр внутренних усилий

В данном разделе приведены основные свойства эпюр внутренних усилий для плоских стержневых систем. Для лучшей визуализации и понимания свойства, для каждого свойства дана поясняющая иллюстрация из числа примеров задач, приведенных в разделах 5 и 6.

Основные свойства эпюр изгибающего момента M

1. На незагруженном участке эпюра M очерчена прямой линией (изменяется по линейному закону). Пример: рисунок 7.1.

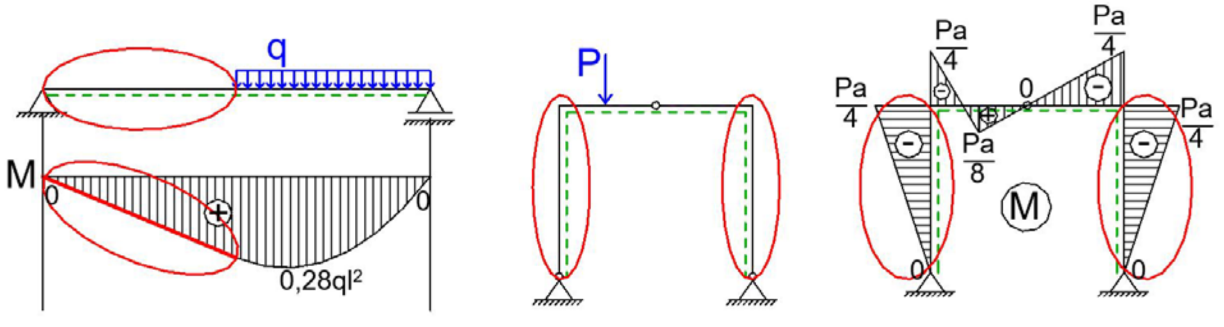


Рис. 7.1. Пример свойства

2. На участке, где приложена распределенная нагрузка, перпендикулярная оси стержня, эпюра M криволинейна, причем своей выпуклостью кривая обращена в сторону действия нагрузки. Если нагрузка равномерно распределенная, то кривая является квадратной параболой. Пример: рисунок 7.2.

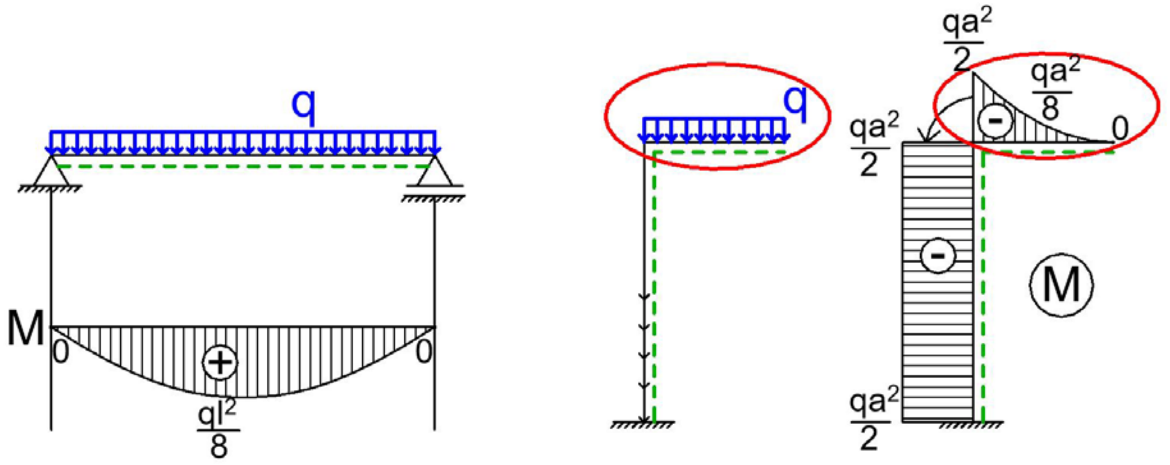


Рис. 7.2. Пример свойства

3. В сечении, где приложена сосредоточенная сила, перпендикулярная оси стержня, эпюра М имеет излом, острие которого направлено по направлению действия силы. Пример: рисунок 7.3.

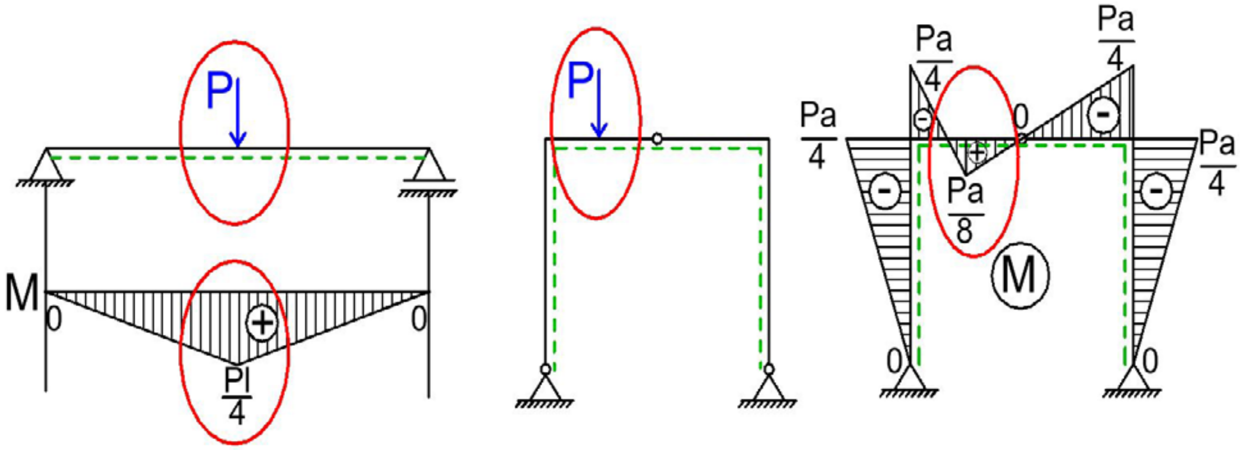


Рис. 7.3. Пример свойства

4. В точке приложения сосредоточенного изгибающего момента на эпюре М происходит скачок, численно равный величине этого момента. Пример: рисунок 7.4.

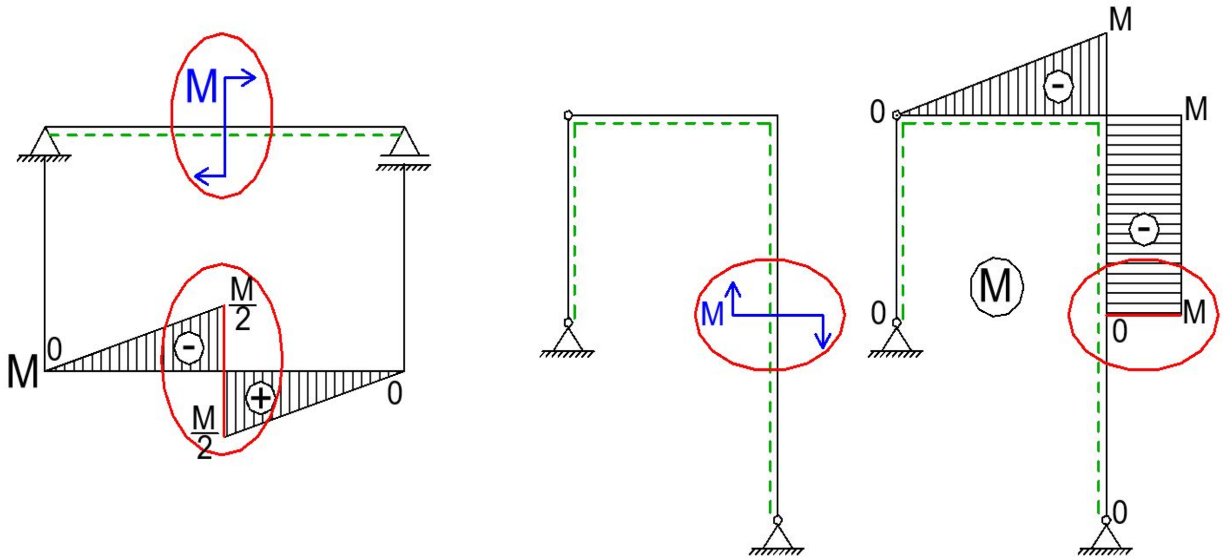


Рис. 7.4. Пример свойства

5. На границах участков, где не приложено сосредоточенных сил и моментов, эпюра М плавно переходит с участка на участок (имеет общую касательную в точке границы). Пример: рисунок 7.5.

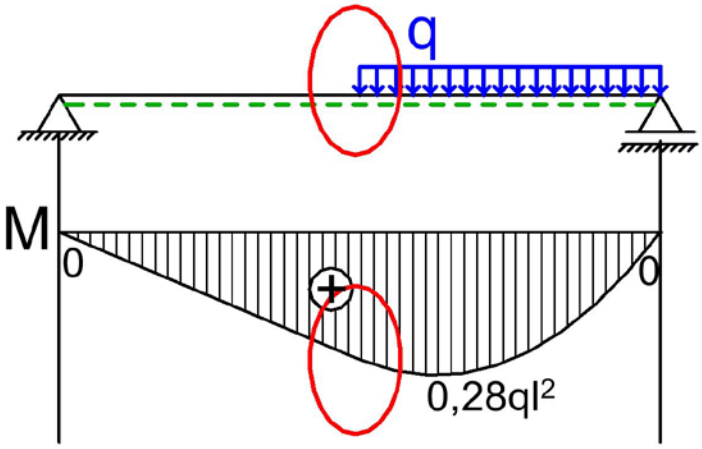


Рис. 7.5. Пример свойства

Основные свойства эпюр поперечных сил Q

1. На незагруженном участке, эпюра Q очерчена по прямой, параллельной оси стержня (величина Q постоянна). Пример: рисунок 7.6.

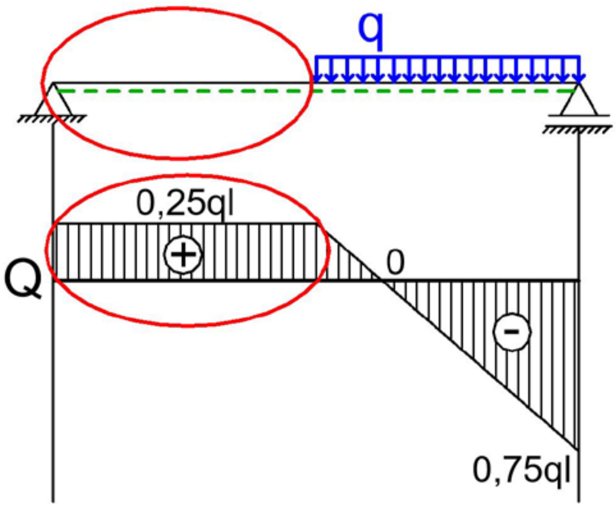


Рис. 7.6. Пример свойства

2. На участке с распределенной нагрузкой, перпендикулярной оси стержня, эпюра Q в общем случае криволинейна. В частном случае равномерно-распределенной нагрузки эпюра Q – линейна. В точке пересечения эпюры Q с осью отсчета (Q=0) эпюра M имеет экстремум: максимум или минимум (касательная параллельна оси стержня). Пример: рисунок 7.7.

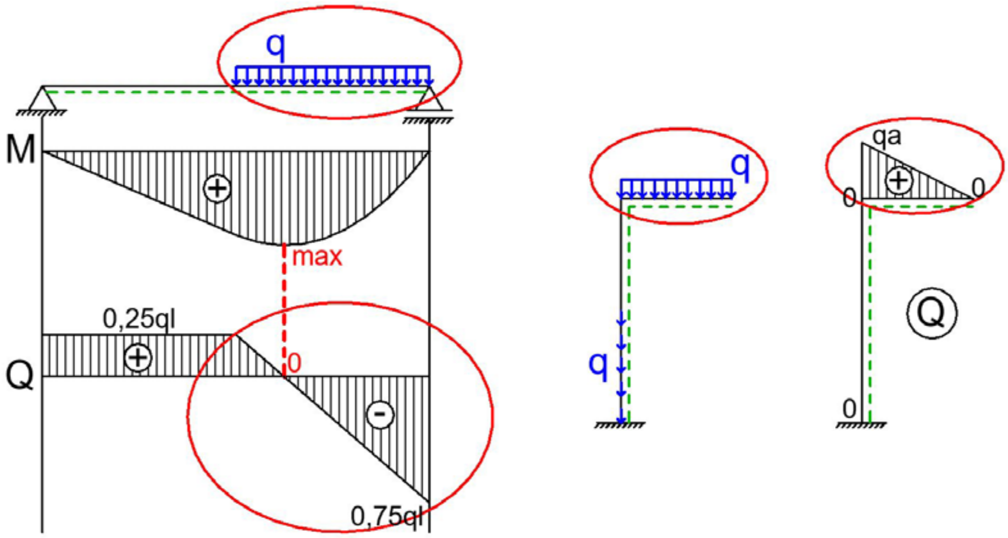


Рис. 7.7. Пример свойства

3. В точке приложения сосредоточенной силы, направленной перпендикулярно оси стержня, на эпюре Q имеет место скачок численно равный величине этой силы и направленный в сторону действия силы. Пример: рисунок 7.8.

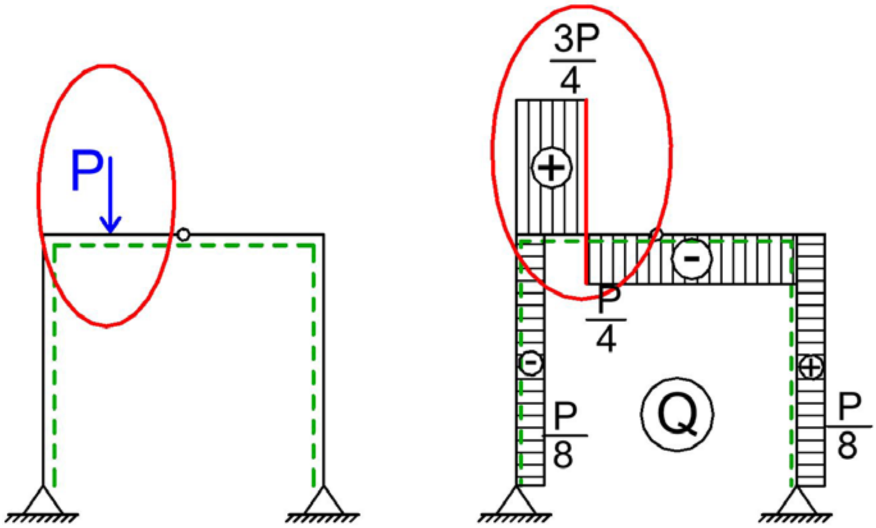


Рис. 7.8. Пример свойства

4. На границе между незагруженным участком и участком действия распределенной нагрузки перпендикулярной оси стержня на эпюре Q – излом. Пример: рисунок 7.9.

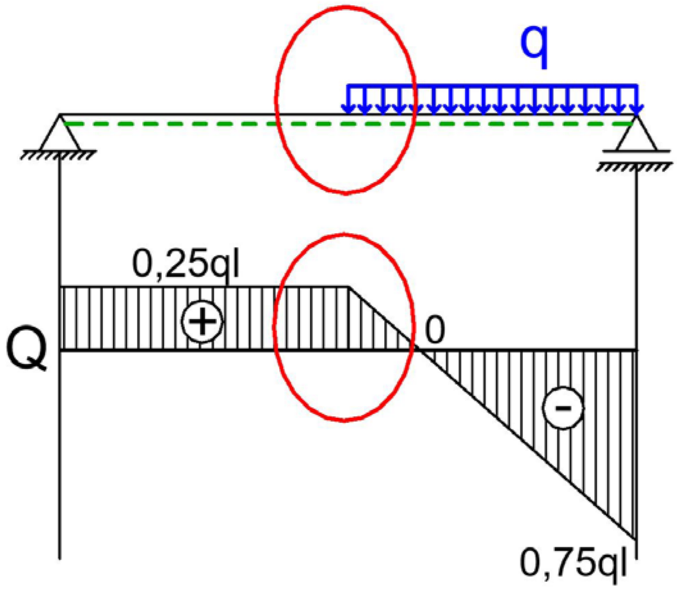


Рис. 7.9. Пример свойства

5. В сечении, где приложен сосредоточенный изгибающий момент, на эпюре Q нет ни излома, ни скачка. Пример: рисунок 7.10.

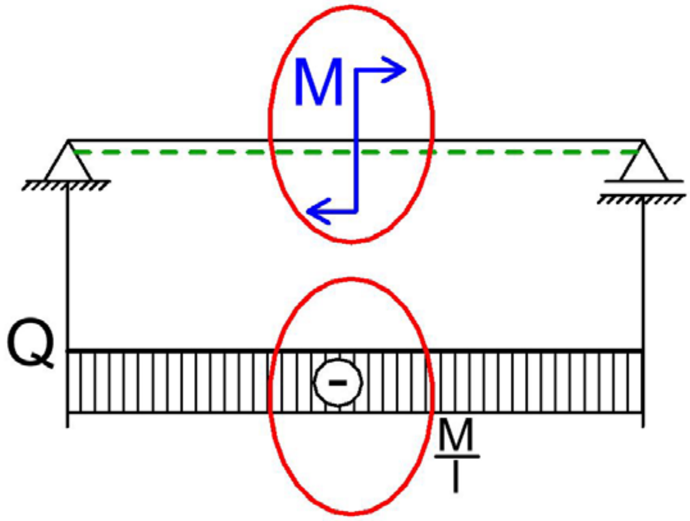


Рис. 7.10. Пример свойства

Основные свойства эпюр продольных сил N

1. На незагруженном участке, эпюра N очерчена по прямой, параллельной оси стержня (величина N постоянна). Пример: рисунок 7.11.

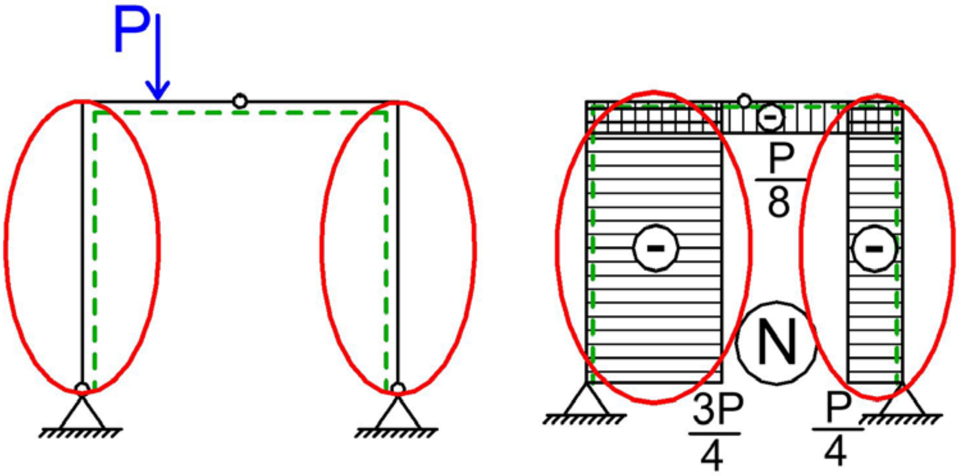


Рис. 7.11. Пример свойства

2. На участке с распределенной нагрузкой, вдоль оси стержня, эпюра N в общем случае криволинейна. В частном случае равномерно-распределенной нагрузки эпюра N – линейна. Пример: рисунок 7.12.

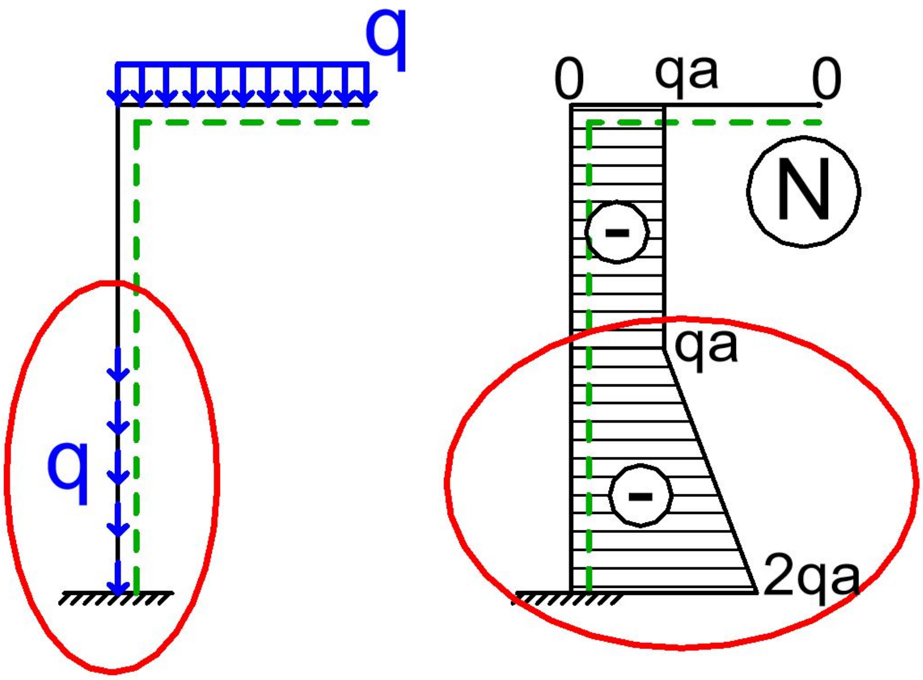


Рис. 7.12. Пример свойства

3. В точке приложения сосредоточенной силы, направленной вдоль оси стержня, на эпюре N имеет место скачок численно равный величине этой силы. Пример: рисунок 7.13.

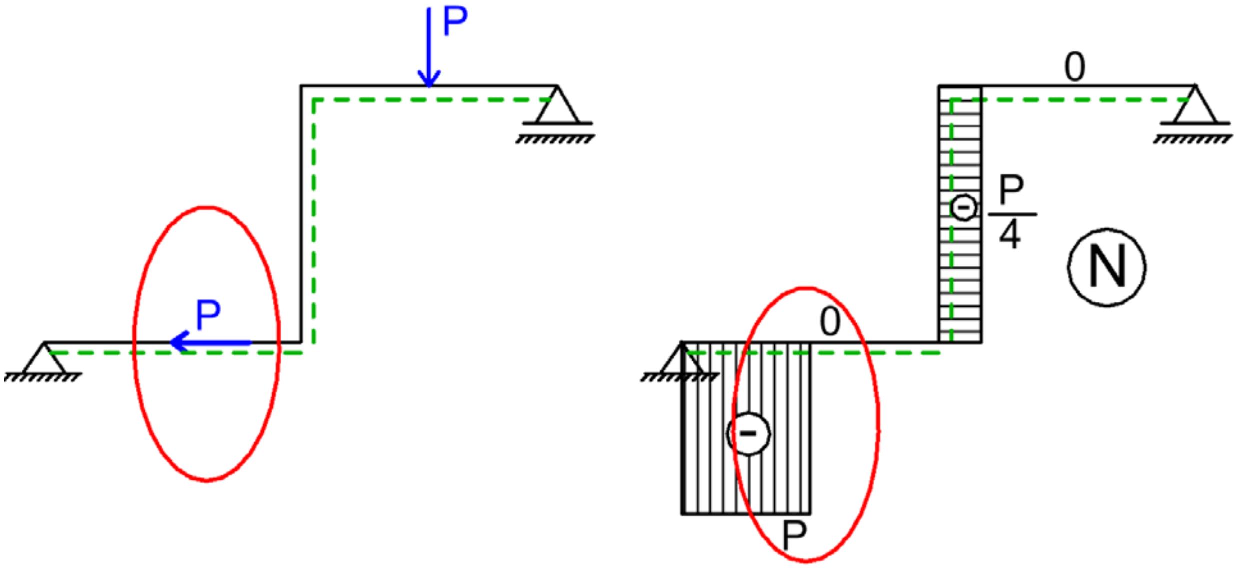


Рис. 7.13. Пример свойства

4. На границе между незагруженным участком и участком действия распределенной нагрузки вдоль оси стержня на эпюре N – излом. Пример: рисунок 7.14.

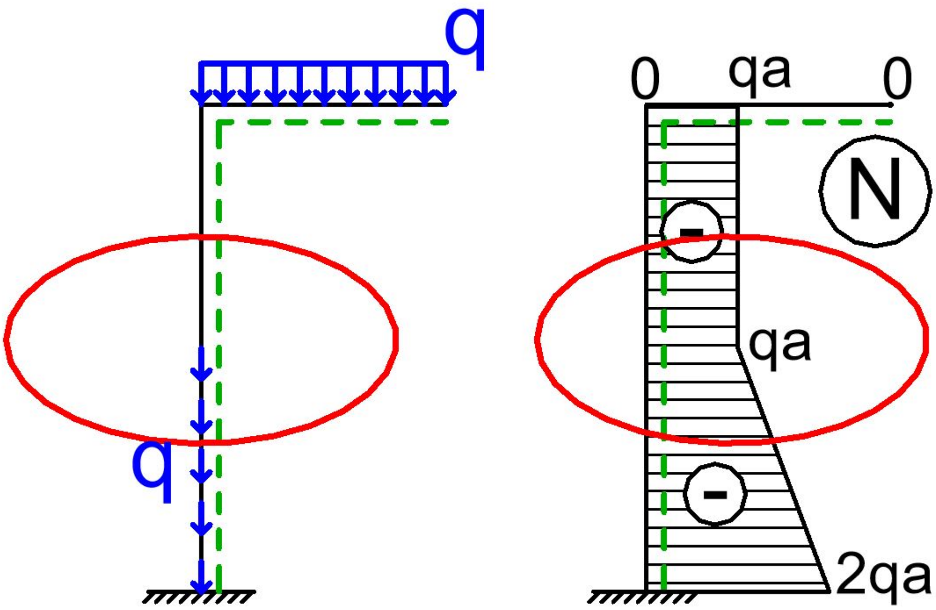


Рис. 7.14. Пример свойства

5. В сечении, где приложен сосредоточенный изгибающий момент, на эпюре N нет ни излома, ни скачка. Пример: рисунок 7.15.

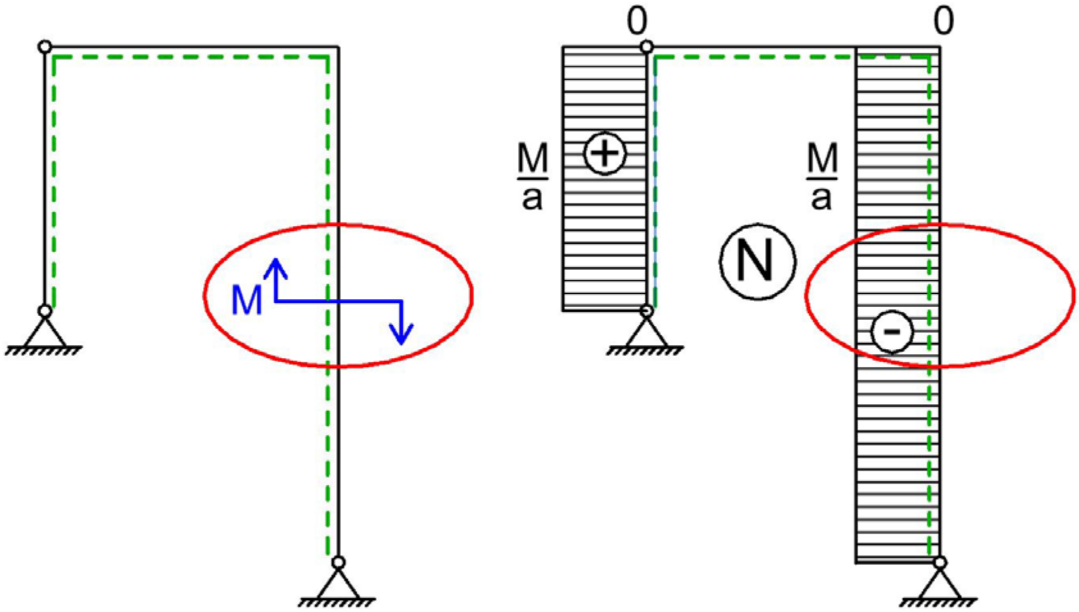


Рис. 7.15. Пример свойства

Пользуясь данными свойствами эпюр внутренних усилий можно, во-первых, визуально проверять решение задачи, а во-вторых, решать задачу с минимальной вычислительной трудоемкостью. Пример будет приведен в 9 разделе учебного пособия.

8. Графоаналитический способ построения эпюр M и Q

Рассмотрим какой-либо участок стержневой системы длиной l, расположенный между двумя сечениями. На участке действует равномерно-распределенная нагрузка q, перпендикулярная оси стержня. В сечениях начальном и конечном действуют M^i, Q^i и N^i, передающиеся от отброшенной части системы, рисунок 8.1

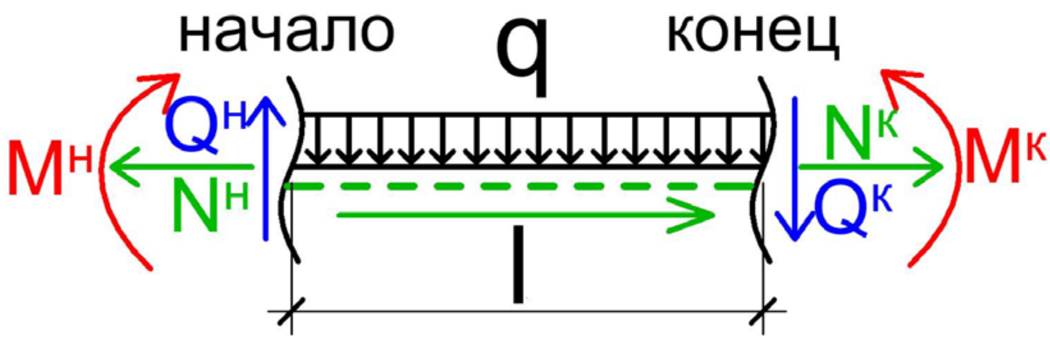


Рис. 8.1. Участок стержневой системы

Поскольку вся система в равновесии, то в равновесии и выделенный нами участок. Наложим условные связи (показаны черным на рисунке 8.2).

Используем принцип суперпозиции, разделим воздействие на 3 части:

– нагрузка q;

– опорные моменты M^H и M^K;

– силы N^H, N^K, Q^H, Q^K.

Построим эпюры M и Q от каждого из воздействий в отдельности, рисунок 8.2.

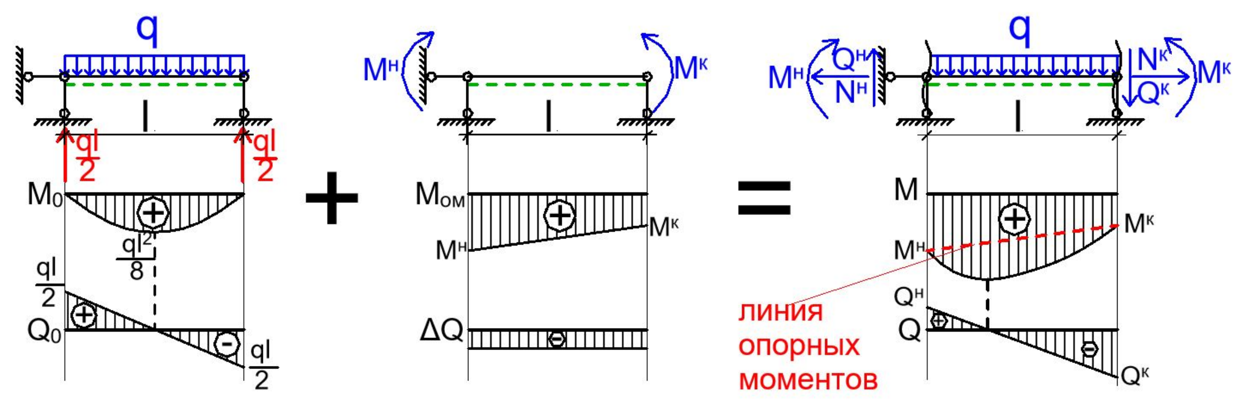


Рис. 8.2. Построение M и Q

Из полученного построения следует, что окончательная эпюра изгибающих моментов М может быть получена простым наложением эпюры M_0 и ординат линии опорных моментов.

Окончательная эпюра поперечных сил Q может быть получена простым наложением ΔQ с учетом знака на эпюру Q_0, где Q_0 – эпюра поперечных сил для данного участка стержневой системы, построенная считая его простой шарнирной балкой, ΔQ – изменение изгибающего момента на данном участке: $\Delta Q = \frac{M^{К}-M^{Н}}{l_{уч}}$, где $M^{К}$ – значение изгибающего момента в конце участка с учетом знака, $M^{Н}$ – значение изгибающего момента в начале участка, с учетом знака, $l_{уч}$ – длина участка. Конец и начало участка определяются в соответствии с выбранным при построении эпюры М правилом знаков: при движении по стрежню от начала к концу пунктир должен быть справа. Окончательно получены формулы:

$$\mathrm{M} = M_0 + M_{\text{опорных моментов}}$$

$$Q = Q_0 + \Delta Q = Q_0 + \frac{M^{К} - M^{Н}}{l_{уч}}$$

Наиболее часто данный метод используется для построения эпюры Q. Особенно данный метод будет полезен при расчете статически-неопределимых систем.

Приведем примеры из ранее решенных задач с построением эпюры Q данным способом.

На рисунке 8.3 представлен первый пример. Эпюра М уже построена, требуется построить эпюру Q по эпюре М. Разделим систему на 2 участка: на первом отсутствует нагрузка, на втором действует равномерно распределенная нагрузка перпендикулярно оси стержня, рисунок 8.3. Эпюру Q на каждом участке построим по формуле:

$$Q = Q_0 + \Delta Q = Q_0 + \frac{M^{К} - M^{Н}}{l_{уч}}$$

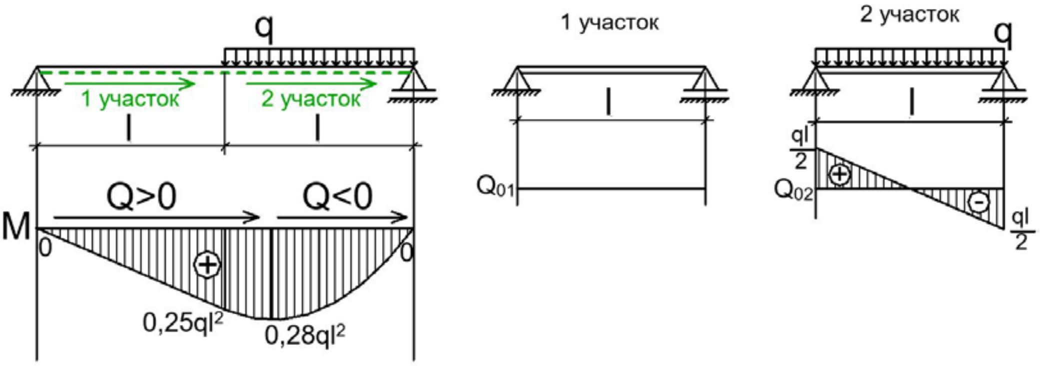


Рис. 8.3. Пример №1 (задача)

На первом участке в связи с отсутствием нагрузка $Q_{01} = 0$, на втором участке Q_{02} имеет вид, представленный на рисунке 8.3.

$$\Delta Q_1 = \frac{M_1^К - M_1^Н}{l_1} = \frac{0{,}25ql^2 - 0}{l} = +0{,}25ql$$

Значит нулевую Q_{01} нужно сдвинуть вверх на 0,25q, т.к. знак «+».

$$\Delta Q_2 = \frac{M_2^К - M_2^Н}{l_2} = \frac{0 - 0{,}25ql^2}{l} = -0{,}25ql$$

Значит эпюру Q_{02} нужно сдвинуть вниз на 0,25ql, т.к. знак «–».

Окончательная эпюра Q и сдвижки показаны на рисунке 8.4.

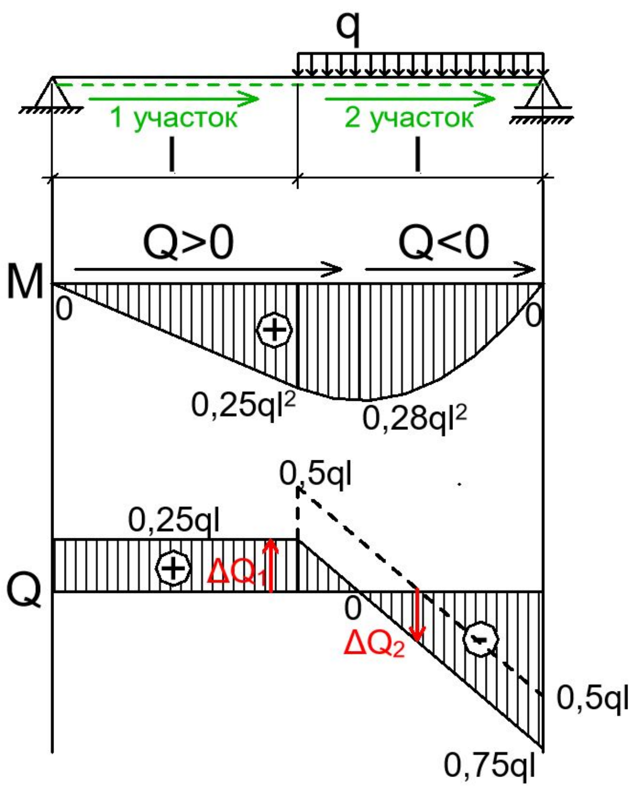


Рис. 8.4. Пример №1 (решение)

В качестве следующего примера рассмотрим Г-образную раму, рисунок 8.5. Эпюра М уже построена, требуется построить эпюру Q по эпюре М. Разделим систему на 2 участка: на первом отсутствует нагрузка, перпендикулярная оси стержня, на втором действует равномерно распределенная нагрузка перпендикулярно оси стержня, рисунок 8.5. Эпюру Q на каждом участке построим по формуле:

$$Q = Q_0 + \Delta \mathrm{Q} = Q_0 + \frac{M^{\text{К}} - M^{\text{Н}}}{l_{\text{уч}}}$$

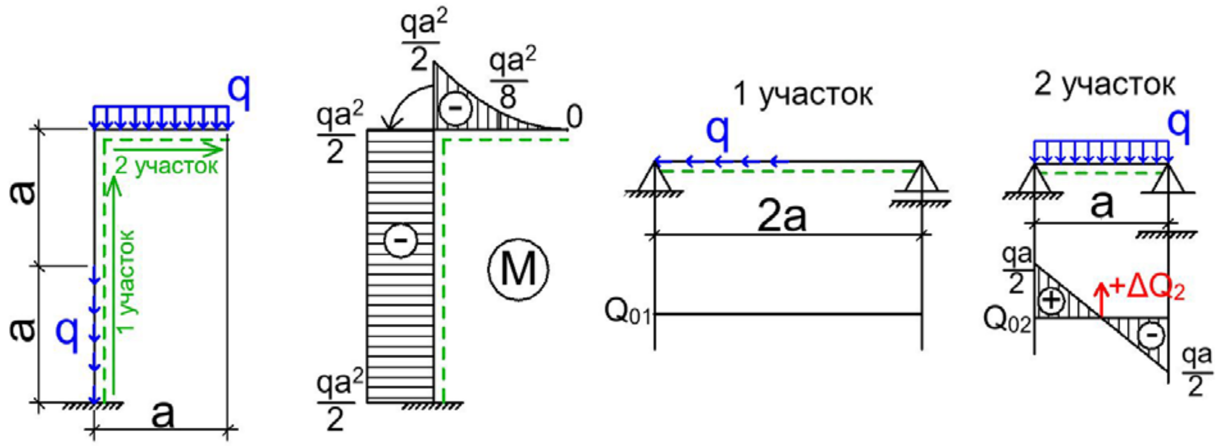


Рис. 8.5. Пример №2 (задача)

На первом участке в связи с отсутствием нагрузка $Q_{01} = 0$, на втором участке Q_{02} имеет вид, представленный на рисунке 8.5.

$$\Delta \mathrm{Q}_1 = \frac{M_1^{\text{К}} - M_1^{\text{Н}}}{l_1} = \frac{0{,}5qa^2 - 0{,}5qa^2}{2a} = 0$$

Значит нулевую Q_{01} нужно оставить без сдвижки.

$$\Delta \mathrm{Q}_2 = \frac{M_2^{\text{К}} - M_2^{\text{Н}}}{l_2} = \frac{0 - (-0{,}5qa^2)}{a} = +0{,}5qa$$

Значит эпюру Q_{02} нужно сдвинуть вверх на 0,5qa, т.к. знак «+».

Окончательная эпюра Q и сдвижки показаны на рисунке 8.6.

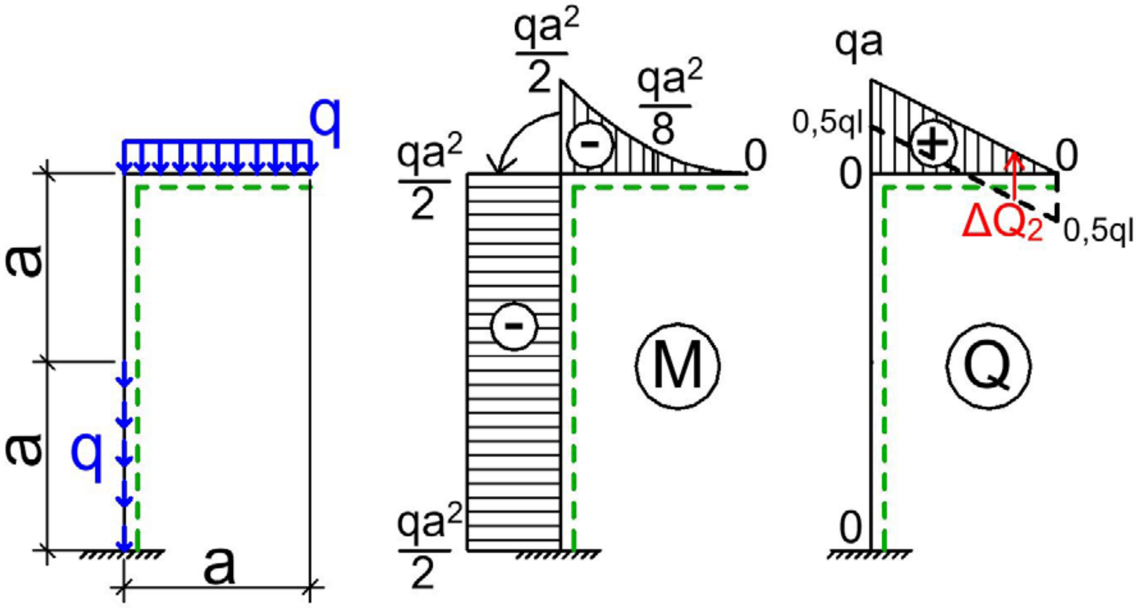


Рис. 8.6. Пример №2 (решение)

Рассмотрим пример, в котором участок стержня загружен не распределенной нагрузкой, а сосредоточенной силой. В данном случае есть 2 способа использования данного метода построения: либо рассматривать стержень, на который приложена сосредоточенная сила P как один участок, тогда эпюра Q_0 будет ненулевая и ее придется строить. Либо можно разделить стержень, на который приложена сосредоточенная сила P, на 2 участка: до силы и после силы. В этом случае будет 2 незагруженных участка с нулевыми Q_0. Выполним построение и первым, и вторым способом.

Задача представлена на рисунке 8.7. Эпюра M уже построена, требуется построить эпюру Q по эпюре M. Разделим систему на 3 или на 4 участка, как показано на рисунке 8.7. Эпюру Q на каждом участке построим по формуле:

$$Q = Q_0 + \Delta\mathrm{Q} = Q_0 + \frac{M^{\text{К}} - M^{\text{Н}}}{l_{\text{уч}}}$$

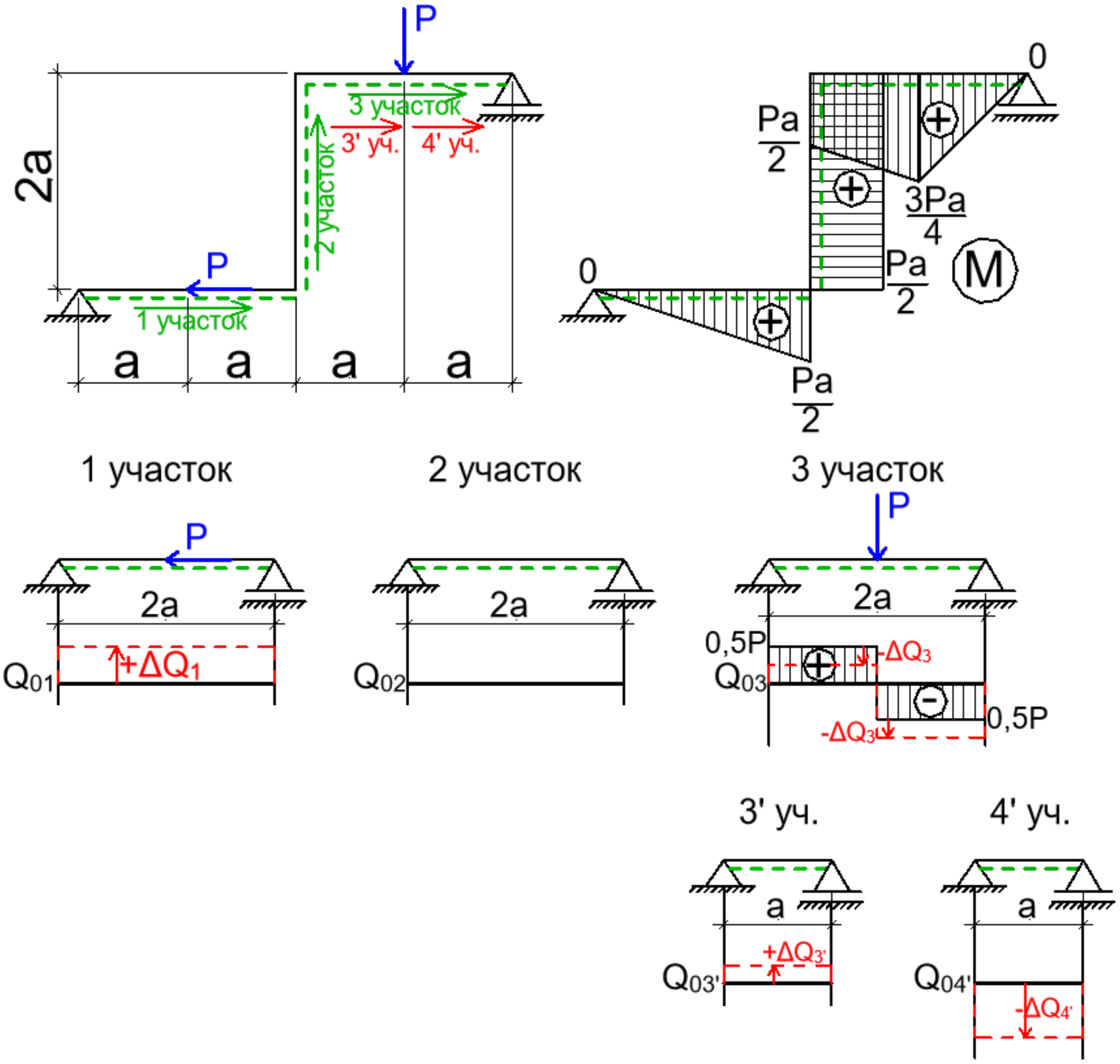


Рис. 8.7. Пример №3 (задача)

На первом и втором участках в связи с отсутствием сил, перпендикулярных оси стержня $Q_{01} = 0$, $Q_{02} = 0$. Если рассматривать третий участок как единый, то Q_{03} имеет вид, представленный на рисунке 8.7. Если разделить третий участок на два участка: 3’ и 4’, то на участках будет отсутствовать нагрузка и $Q_{03'} = 0$, $Q_{04'} = 0$.

$$\Delta Q_1 = \frac{M_1^{К} - M_1^{Н}}{l_1} = \frac{0{,}5Pa - 0}{2a} = +\frac{P}{4}$$

Значит нулевую Q_{01} нужно сдвинуть в положительную сторону (вверх) на $+\frac{P}{4}$, так как у ΔQ получен знак «+», рисунок 8.7.

$$\Delta Q_2 = \frac{M_2^{К} - M_2^{Н}}{l_2} = \frac{0{,}5Pa - 0{,}5Pa}{2a} = 0$$

Значит эпюру Q_{02} нужно оставить без сдвижки.

Эпюра Q_{03} была построена в разделе 5, задача 1, рисунок 5.4.

$$\Delta Q_3 = \frac{M_3^{К} - M_3^{Н}}{l_3} = \frac{0 - 0{,}5Pa}{2a} = -\frac{P}{4}$$

Значит нулевую Q_{03} нужно сдвинуть в отрицательную сторону (вниз) на $-\frac{P}{4}$, так как у ΔQ получен знак «–», рисунок 8.7.

Разделив третий участок на два: 3’ и 4’ вычислим

$$\Delta Q_{3'} = \frac{M_{3'}^{К} - M_{3'}^{Н}}{l_{3'}} = \frac{0{,}75Pa - 0{,}5Pa}{a} = +\frac{P}{4}$$

$$\Delta Q_{4'} = \frac{M_{4'}^{К} - M_{4'}^{Н}}{l_{4'}} = \frac{0 - 0{,}75Pa}{a} = -\frac{3P}{4}$$

Значит нулевую $Q_{03'}$ нужно сдвинуть в положительную сторону (вверх) на $+\frac{P}{4}$, так как у ΔQ получен знак «+», а нулевую $Q_{04'}$ нужно сдвинуть в отрицательную сторону (вниз) на $-\frac{3P}{4}$, так как у ΔQ получен знак «–», рисунок 8.7. Получена та же эпюра, что и при рассмотрении единого третьего участка. Окончательная эпюра Q и сдвижки показаны на рисунке 8.8.

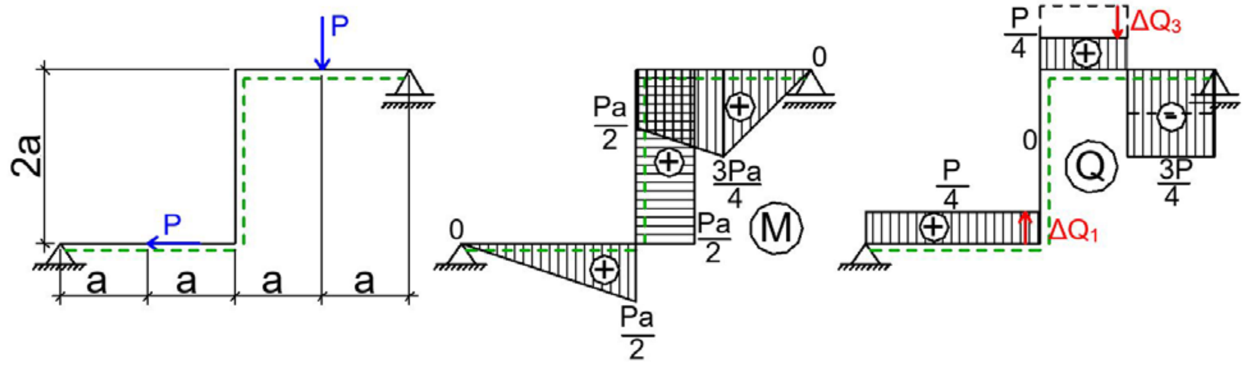


Рис. 8.8. Пример №3 (решение)

В следующем разделе будет также использован данный метод построения эпюры поперечных сил Q.

9. Построение в рамах эпюр Q и N по эпюре M. Правило тупого угла

На рисунке 9.1 представлена расчетная схема с обозначенными неизвестными реакциями.

Проведем пунктир, закрепив тем самым правило знаков, рисунок 9.1: М со стороны пунктира будет иметь знак «+», не со стороны пунктира будет иметь знак «–». Эпюры Q и N будут иметь со стороны пунктира знак «–», не со стороны пунктира будет иметь знак «+». Чтобы пунктир был справа при движении по стержню, движение осуществляется в соответствии с зелеными стрелками, указанными на рисунке 9.1.

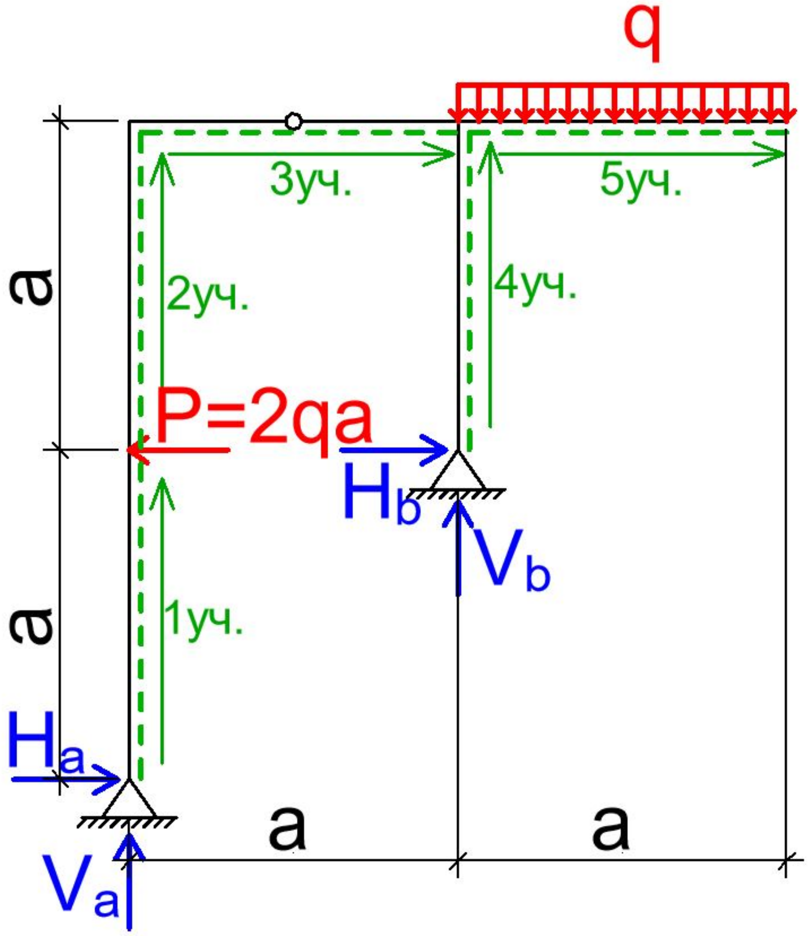


Рис. 9.1. Расчетная схема

Определяем тип системы по формуле

$$n_{ст.н.} = С_{оп} + 3 \cdot К - 3 - Ш, \text{ где}$$

$С_{оп} = 4$, т.к. четыре связи возникают в опорных закреплениях;

$К = 0$, т.к. замкнутых контуров нет;

Ш = 1, т.к. есть один простой шарнир, в которых соединяются два стержня.

$$n_{\text{ст.н.}} = 4 + 3 \cdot 0 - 3 - 1 = 0$$

С учетом геометрической неизменяемости, система является статически определимой.

В данной задаче составить уравнения равновесия с полным разделением неизвестных достаточно сложно, поэтому составим уравнения так, чтобы вместо решения системы из 4 уравнений с 4 неизвестными, решать 2 системы по 2 уравнений в каждой с двумя неизвестными.

Рассмотрим сумму моментов относительно шарнира справа и сумму моментов относительно точки А: в обоих уравнениях будут присутствовать лишь 2 неизвестные: H_b и V_b, рисунок 9.2.

$$\begin{cases} \sum \mathrm{M}_{(\text{Ш})}^{\text{справа}} = 0 \to \mathrm{H_b} \cdot \mathrm{a} + \mathrm{V_b} \cdot \dfrac{\mathrm{a}}{2} - (\mathrm{qa}) \cdot \mathrm{a} = 0 \\ \sum \mathrm{M}_{(\cdot\mathrm{A})} = 0 \to -\mathrm{P} \cdot \mathrm{a} + \mathrm{H_b} \cdot \mathrm{a} - \mathrm{V_b} \cdot \mathrm{a} + (\mathrm{qa}) \cdot 1{,}5\mathrm{a} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{H_b} \cdot \mathrm{a} + \mathrm{V_b} \cdot \dfrac{\mathrm{a}}{2} - (\mathrm{qa}) \cdot \mathrm{a} = 0 \\ -(\mathbf{2qa}) \cdot \mathbf{a} + \mathrm{H_b} \cdot \mathrm{a} - \mathrm{V_b} \cdot \mathrm{a} + (\mathbf{qa}) \cdot \mathbf{1{,}5a} = 0 \end{cases}$$

Разделим правую и левую части уравнений на a:

$$\begin{cases} \mathrm{H_b} + \dfrac{\mathrm{V_b}}{2} - \mathrm{qa} = 0 \\ \mathrm{H_b} - \mathrm{V_b} - 0{,}5\mathrm{qa} = 0 \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение из первого:

$$\left.\begin{cases} \mathrm{H_b} + \dfrac{\mathrm{V_b}}{2} - \mathrm{qa} = 0 \\ \mathrm{H_b} - \mathrm{V_b} - 0{,}5\mathrm{qa} = 0 \end{cases}\right\} - \to \frac{3\mathrm{V_b}}{2} - 0{,}5\mathrm{qa} = 0 \to \mathrm{V_b} = \frac{\mathrm{qa}}{3}$$

Умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым:

$$\left.\begin{cases} 2\mathrm{H_b} + \mathrm{V_b} - 2\mathrm{qa} = 0 \\ \mathrm{H_b} - \mathrm{V_b} - 0{,}5\mathrm{qa} = 0 \end{cases}\right\} + \to 3\mathrm{H_b} - 2{,}5\mathrm{qa} = 0 \to H_b = \frac{2{,}5\mathrm{qa}}{3}$$

$$\begin{cases} \mathrm{H_b} = \dfrac{2{,}5\mathrm{qa}}{3} \\ \mathrm{V_b} = \dfrac{\mathrm{qa}}{3} \end{cases}$$

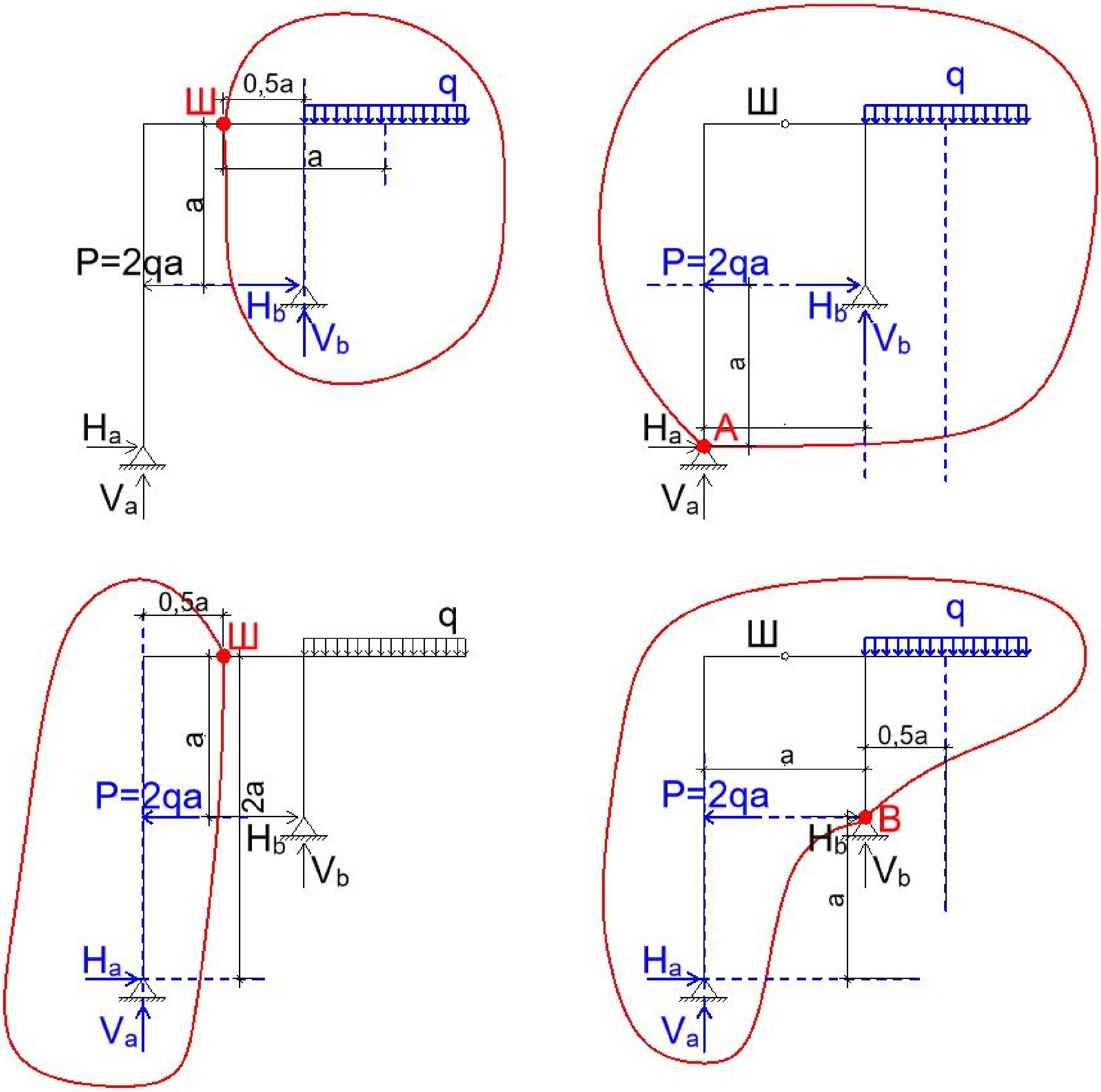


Рис. 9.2. Пояснения к составлению уравнений равновесия

Далее рассмотрим сумму моментов относительно шарнира слева и сумму моментов относительно точки B: в обоих уравнениях будут присутствовать лишь 2 неизвестные: $H_а$ и $V_а$, рисунок 9.2.

$$\begin{cases} \sum M_{(Ш)}^{слева} = 0 \rightarrow V_а \cdot \dfrac{а}{2} - H_а \cdot 2а + P \cdot а = 0 \\ \sum M_{(\cdot B)} = 0 \rightarrow V_а \cdot а - H_а \cdot а + (qа) \cdot 0{,}5а = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_а \cdot \dfrac{а}{2} - H_а \cdot 2а + (2qа) \cdot а = 0 \\ V_а \cdot а - H_а \cdot а + (qа) \cdot 0{,}5а = 0 \end{cases}$$

Разделим правую и левую части уравнений на а:

$$\begin{cases} \dfrac{V_a}{2} - 2H_a + 2qa = 0 \\ V_a - H_a + 0{,}5qa = 0 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение (–2) и сложим со вторым:

$$\left.\begin{cases} -V_a + 4H_a - 4qa = 0 \\ V_a - H_a + 0{,}5qa = 0 \end{cases}\right\} + \rightarrow 3H_a - 3{,}5qa = 0 \rightarrow H_a = \frac{3{,}5qa}{3}$$

Умножим второе уравнение (–2) и сложим с первым:

$$\left.\begin{cases} \dfrac{V_a}{2} - 2H_a + 2qa = 0 \\ -2V_a + 2H_a - qa = 0 \end{cases}\right\} + \rightarrow -\frac{3V_a}{2} + qa = 0 \rightarrow V_a = \frac{2qa}{3}$$

$$\begin{cases} H_a = \dfrac{3{,}5qa}{3} \\ V_a = \dfrac{2qa}{3} \end{cases}$$

Проверка:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \rightarrow \ H_a + H_b - P = \dfrac{3{,}5qa}{3} + \dfrac{2{,}5qa}{3} - 2qa = 0 \text{ верно} \\ \sum F_Y = 0 \rightarrow \ V_a + V_b - qa = \dfrac{2qa}{3} + \dfrac{qa}{3} - qa = 0 \text{ верно} \end{cases}$$

Так как у всех найденных реакций получены значения со знаком «+», то изначально выбранное направление верно. Переходим к построению эпюры М.

Система разделена на 5 участков, в пределах которых характер эпюр внутренних усилий не меняется, рисунок 9.3.

При построении эпюры изгибающих моментов М воспользуемся свойствами эпюры М. На 1, 2, 3 и 4 участках эпюра М линейна, так как отсутствует распределенная нагрузка, перпендикулярная оси стержня, а значит на каждом из этих участков достаточно двух значений для построения эпюры М. На 5 участке действует равномерно распределенная нагрузка перпендикулярная оси стержня, значит эпюра М на этом участке является квадратной параболой с выпуклостью вниз, построим ее по трем точкам.

Итого имеем 8 сечений, рисунок 9.3. В сечениях 1-1, 7-7 и 9-9 значения изгибающего момента равны 0, так как это концы стержней (свободные или с шарнирными опорами), где не приложено сосредоточенного момента. На третьем участке достаточно вычислить значение М в одном из сечений 3-3 или 4-4, так как значение по середине третьего участка известно заранее: в шарнире М=0. Также рассмотрим равновесия узлов (узла с сечением 3-3, где сходятся 2 стержня и узла, где сходится 3 стержня). На рисунке 9.3 представлены сечения, а также точки в которых известно значение изгибающего момента М без расчета.

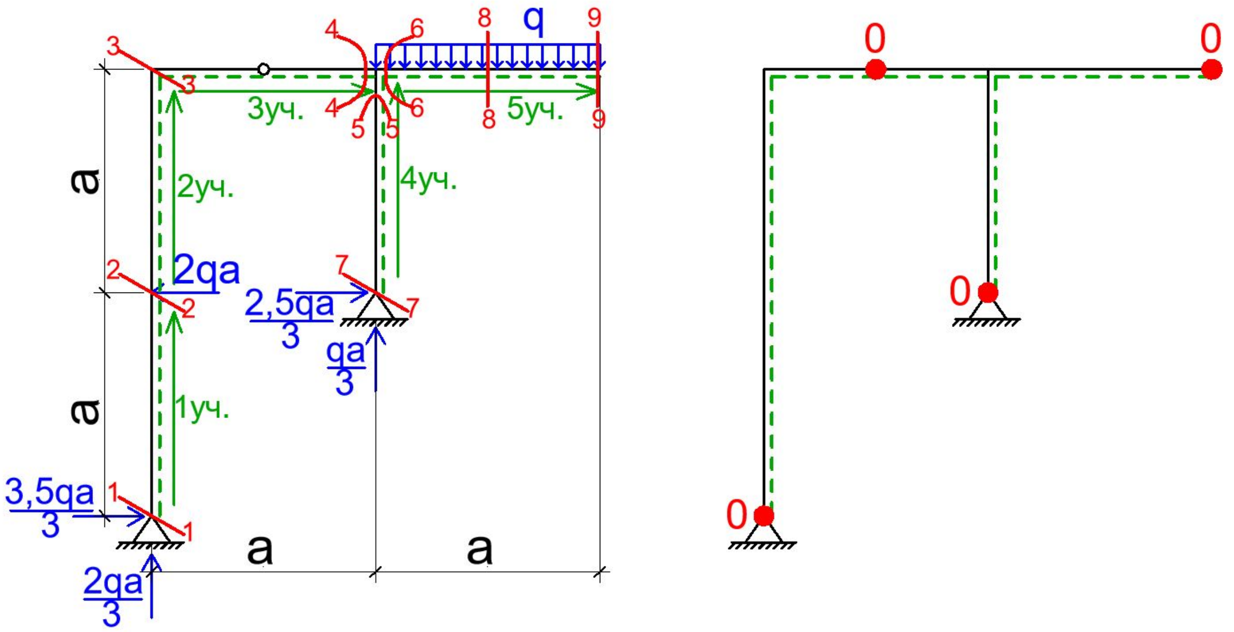


Рис. 9.3. Построение эпюры М, сечения

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 8-8 справа. Относительно сечения 8-8 стержень изгибается только распределенной нагрузкой, а значит однозначно определяем, что растягиваются верхние волокна, значит наверх откладывается значение $М_8 = (q \cdot 0{,}5a) \cdot 0{,}25a = 0{,}125qa^2$, рисунок 9.6.

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 6-6 справа. Относительно сечения 6-6 стержень изгибается только распределенной нагрузкой, а значит однозначно определяем, что растягиваются верхние волокна, значит наверх откладывается значение $М_6 = (q \cdot a) \cdot 0{,}5a = 0{,}5qa^2$, рисунок 9.6.

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 5-5 снизу. Относительно сечения 5-5 стержень изгибается единственной силой $\frac{2{,}5qa}{3}$ (сила $\frac{qa}{3}$ сжимает, но не изгибает стержень), а значит однозначно определяем, что растягиваются левые волокна, значит налево откладывается значение $М_5 = \frac{2{,}5qa}{3} \cdot a = 0{,}83qa^2$, рисунок 9.6.

Теперь рассмотрим равновесие узла, в котором сходятся 3 стержня, рисунок 9.4. Направления и значения уже найденных изгибающих моментов в сечениях 5-5 и 6-6 показаны синим цветом на рисунке 9.4.

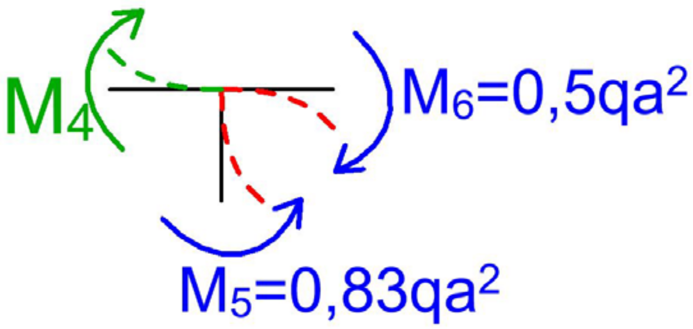


Рис. 9.4. Равновесия узла с тремя стержнями

Узел должен находиться в равновесии, а значит момент в сечении 4-4 должен быть направлен как показано зеленым цветом на рисунке 9.4 и его значение равно $М_4 = 0{,}83\text{qa}^2 - 0{,}5\text{qa}^2 = 0{,}33\text{qa}^2$. Откладывается значение снизу, так как растягиваются нижние волокна.

Для третьего участка определено 2 значения: в сечении 4-4 $М_4 = 0{,}33\text{qa}^2$ и в шарнире изгибающий момент равен 0: $М_{Ш}$=0. Проводим через эти две точки прямую линию на весь третий участок. Из геометрии находим значение в начале третьего участка (сечение 3-3): $М_3 = 0{,}33\text{qa}^2$, отложено сверху, рисунок 9.6.

Теперь рассмотрим равновесие узла, в котором сходятся 2 стержня, рисунок 9.5. Направление и значение уже найденного изгибающего момента в сечении 3-3 показан синим цветом на рисунке 9.5.

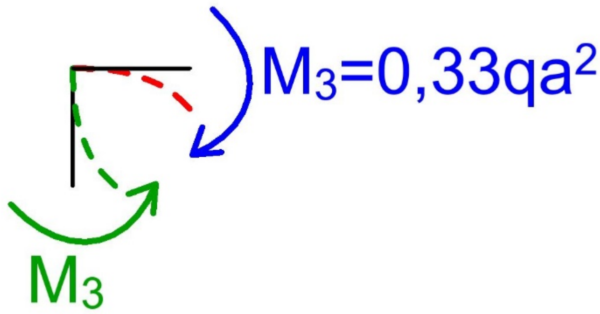


Рис. 9.5. Равновесия узла с двумя стержнями

Узел должен находиться в равновесии, а значит неизвестный момент, показанный зеленым цветом должен быть направлен как показано на рисунке 9.5 и его значение равно $M_3 = 0{,}33qa^2$. Откладывается значение слева, так как растягиваются левые волокна.

Рассмотрим часть, отсеченную сечением 2-2 снизу. Относительно сечения 2-2 стержень изгибается единственной силой $\frac{3{,}5qa}{3}$ (сила $\frac{2qa}{3}$ сжимает, но не изгибает стержень), а значит однозначно определяем, что растягиваются левые волокна, значит налево откладывается значение $M_2 = \frac{3{,}5qa}{3} \cdot a = 1{,}17qa^2$, рисунок 9.6.

Соединяем все отложенные значения линиями, рисунок 9.6.

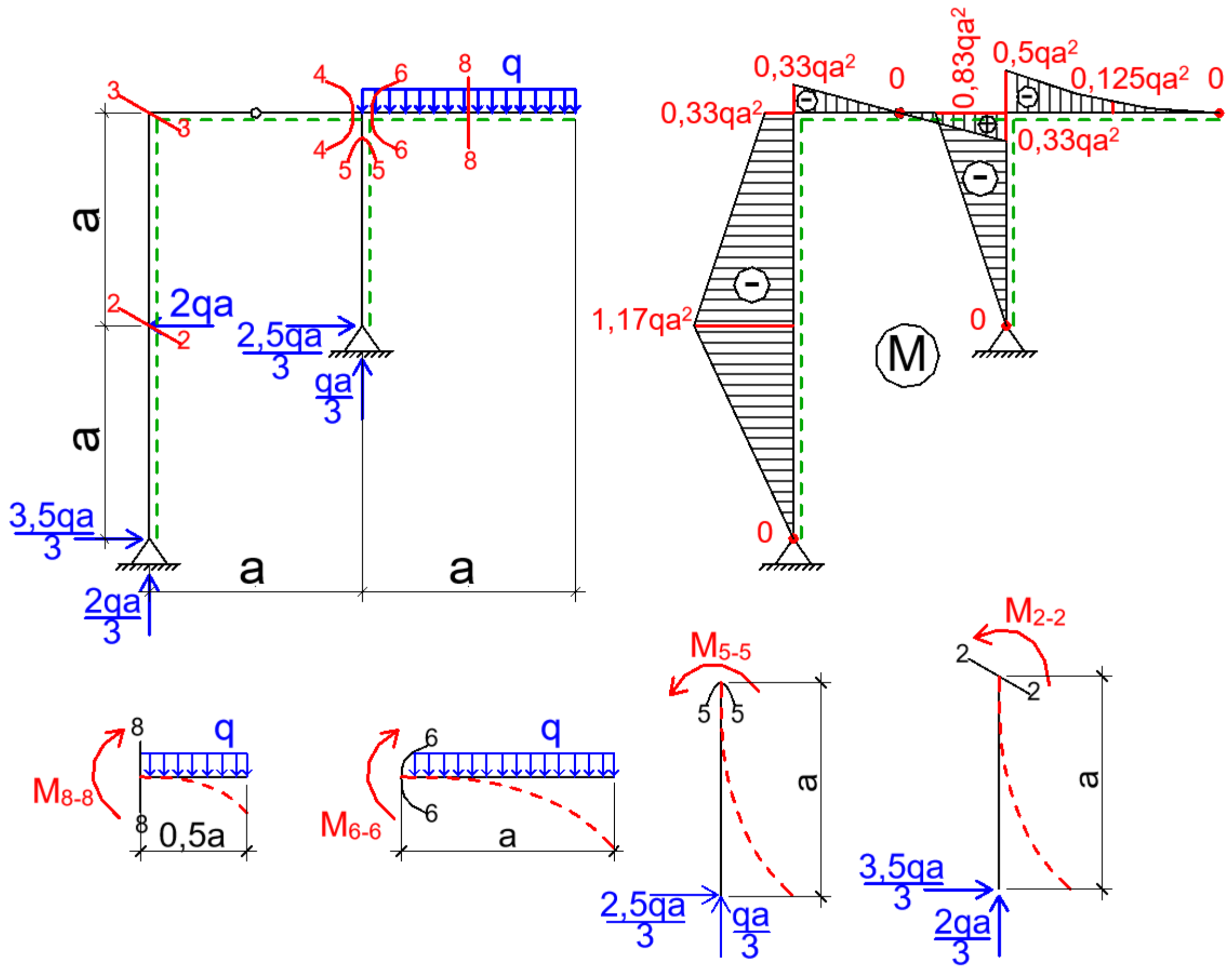


Рис. 9.6. Построение эпюры М

Перейдем к построению эпюр Q и N. Определим знаки для эпюры Q, рисунок 9.7.

На первом участке M убывает от 0 до –1,17qa², значит Q < 0.

На втором участке M возрастает от –1,17qa² до –0,33qa², значит Q > 0.

На третьем участке M возрастает от –0,33qa² до +0,33qa², значит Q > 0.

На четвертом участке M убывает от 0 до –0,83qa², значит Q<0.

На пятом участке M возрастает от –0,5qa² до 0, значит Q > 0.

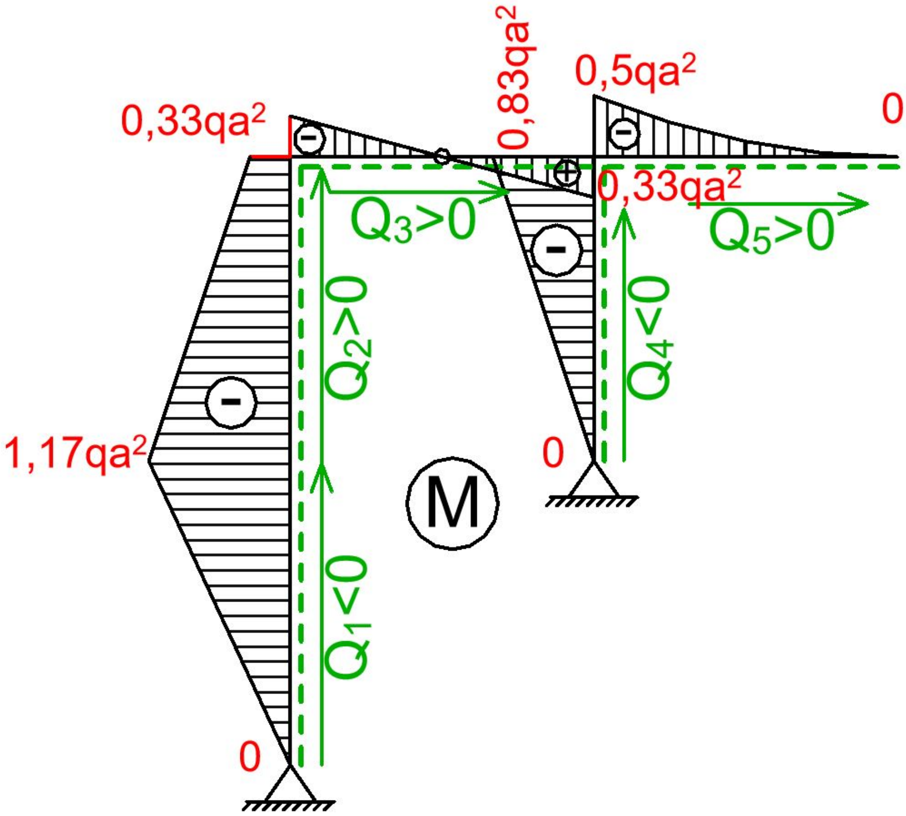


Рис. 9.7. Знаки для эпюры Q

Построим эпюру поперечных сил Q используя формулу:

$$Q = Q_0 + \Delta \mathrm{Q} = Q_0 + \frac{M^{\text{К}} - M^{\text{Н}}}{l_{\text{уч}}}$$

На участках с первого по четвертый, эпюра M линейна, внутри участков отсутствует нагрузка, а значит Q_0 на этих участках равны 0.

$$Q_1 = \Delta \mathrm{Q}_1 = \frac{M_1^{\text{К}} - M_1^{\text{Н}}}{l_1} = \frac{-1{,}17qa^2 - 0}{a} = -1{,}17qa$$

$$Q_2 = \Delta \mathrm{Q}_2 = \frac{M_2^{\text{К}} - M_2^{\text{Н}}}{l_2} = \frac{-0{,}33qa^2 - (-1{,}17qa^2)}{a} = +0{,}83qa$$

$$Q_3 = \Delta Q_3 = \frac{M_3^К - M_3^Н}{l_3} = \frac{0{,}33qa^2 - (-0{,}33qa^2)}{a} = +0{,}66qa$$

$$Q_4 = \Delta Q_4 = \frac{M_4^К - M_4^Н}{l_4} = \frac{-0{,}83qa^2 - 0}{a} = -0{,}83qa$$

Значения со знаком «+» откладываются не со стороны пунктира, значения со знаком «–» откладываются со стороны пунктира, рисунок 9.8.

Обратим внимание, что в ΔQ_2 получено 0,83qa, а не 0,84qa в связи с тем, что вычисления произведены с большей точностью, нежели показано на рисунках.

Для пятого участка Q_{05} представлена на рисунке 9.8

$$Q = Q_{05} + \Delta Q_5 = Q_{05} + \frac{M_5^К - M_5^Н}{l_5} = Q_{05} + \frac{0 - (-0{,}5qa^2)}{a} = Q_{05} + 0{,}5qa$$

Так как ΔQ_5 получилось со знаком «+», то поднимаем Q_{05} на 0,5qa вверх, рисунок 9.8.

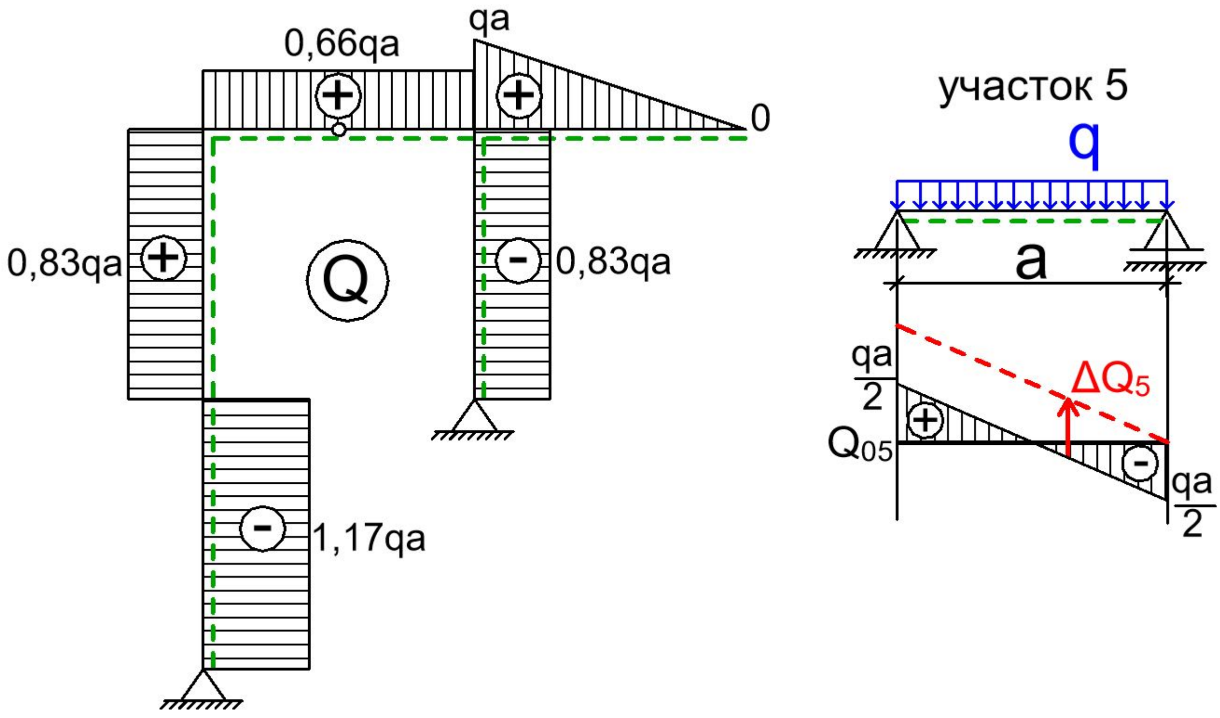


Рис. 9.8. Построение эпюры Q

Построим эпюру N по построенным ранее эпюрам M и Q. Для этого вырежем 2 узла и рассмотрим их равновесия по горизонтали и вертикали. В сечении каждого из стержней около узла в общем случае действует поперечная сила Q и продольная сила N. Неизвестные продольные усилия N обозначаем как растягивающие для автоматического получения верного знака при вычислении. Правильные направления поперечной силы Q определяются по правилу тупого угла.

Правило тупого угла

Вектор $\vec{Q}$ всегда образует тупой угол с подходящим моментом М.

На рисунке 9.9 представлены 2 вырезанных узла. Чтобы рисунок был читаемым условно показаны «кусочки» стержней, на самом деле их длинна равна 0 и вырезан именно узел (точка).

Поперечные силы показаны красными линиями, перпендикулярными стержням. Чтобы определить направление поперечной силы нужно начиная от узла двигаться по эпюре моментов (на рисунке 9.9 двигаться от узла по синим линиям в соответствии с синими стрелками). При пересечении с красной линией Q нужно повернуть в ту сторону, в которую будет тупой угол (на рисунке 9.9 показан красным).

Например, для левого на рисунке 9.9 узла, для определения направления Q_2 двигаемся влево, потом вниз и далее тупой угол будет если двигаться налево, поэтому Q_2 направлена влево. Для определения направления Q_3 двигаемся от узла вверх, потом направо и далее, чтобы получился тупой угол нужно повернуть вниз, поэтому Q_3 направлена вниз.

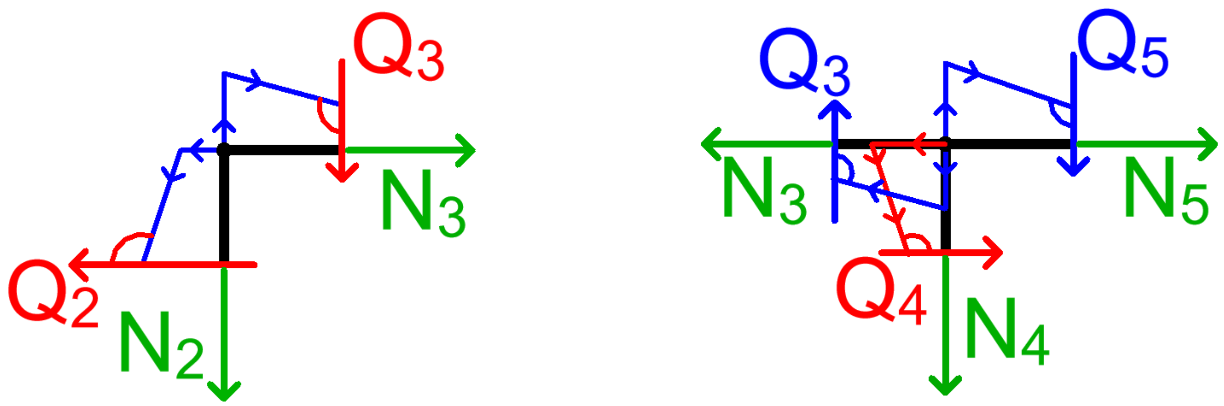


Рис. 9.9. Пояснение к правилу тупого угла

Значения Q_i берется с эпюры Q, причем без учета знаков, так как все Q_i нарисованы с правильными направлениями:

$$Q_2 = 0{,}83qa;\ Q_3 = 0{,}66qa;\ Q_4 = 0{,}83qa;\ Q_5 = qa.$$

Рассмотрим равновесия левого узла:

$$\begin{cases} \sum \mathrm{F_X} = 0:\ -\mathrm{Q_2} + \mathrm{N_3} = 0\ \rightarrow -0{,}83qa + \mathrm{N_3} = 0 \rightarrow \mathrm{N_3} = 0{,}83qa \\ \sum \mathrm{F_Y} = 0:\ -\mathrm{Q_3} - \mathrm{N_2} = 0\ \rightarrow\ -0{,}66qa - \mathrm{N_2} = 0 \rightarrow \mathrm{N_2} = -0{,}66qa \end{cases}$$

Рассмотрим равновесия правого узла:

$$\begin{cases} \sum \mathrm{F_X} = 0:\ -\mathrm{N_3} + \mathrm{N_5} + \mathrm{Q_4} = 0\ \rightarrow -0{,}83qa + \mathrm{N_5} + 0{,}83qa = 0 \rightarrow \mathrm{N_5} = 0 \\ \sum \mathrm{F_Y} = 0: \mathrm{Q_3} - \mathrm{Q_5} - \mathrm{N_4} = 0\ \rightarrow\ 0{,}66qa - qa - \mathrm{N_4} = 0 \rightarrow \mathrm{N_4} = -0{,}34qa \end{cases}$$

Значения N со знаком «+» откладываем не со стороны пунктира, значения N со знаком «–» откладываем со стороны пунктира.

На рисунке 9.10 представлена построенная эпюра N. Обратим внимание на то, что пятый участок является консолью. С учетом того, что нагрузка вдоль оси стержня отсутствует, то рассмотрев равновесие по горизонтали отсеченной части справа, приходим к выводу: $N_5 = 0$. Поняв это заранее, равновесие по горизонтали для правого узла выше можно было не рассматривать.

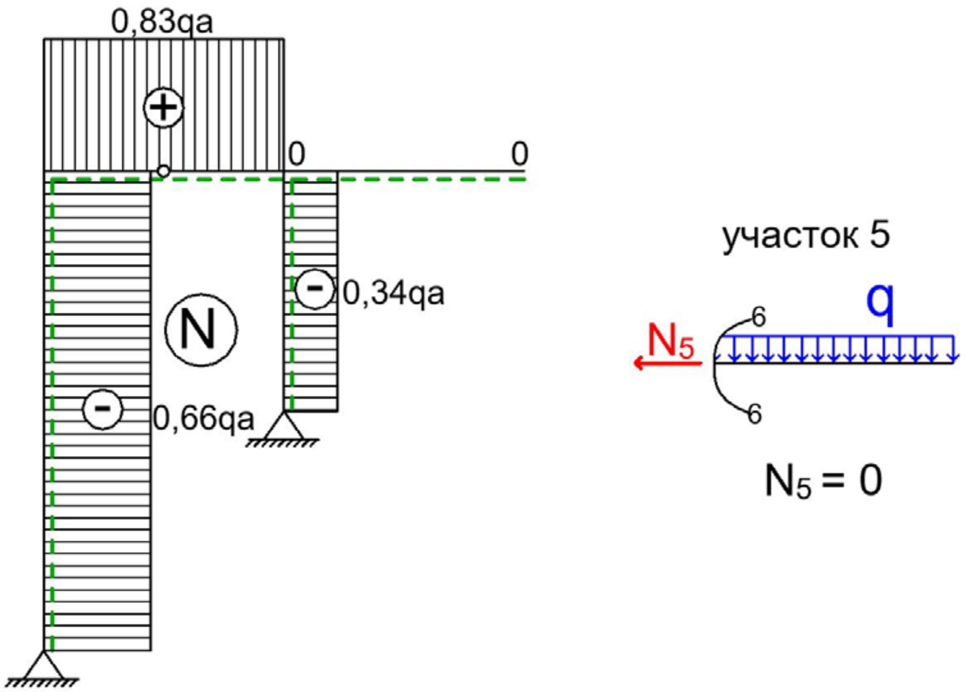


Рис. 9.10. Построение эпюры N

Итоговое решение задачи, построенные эпюры M, Q и N представлены на рисунке 9.11.

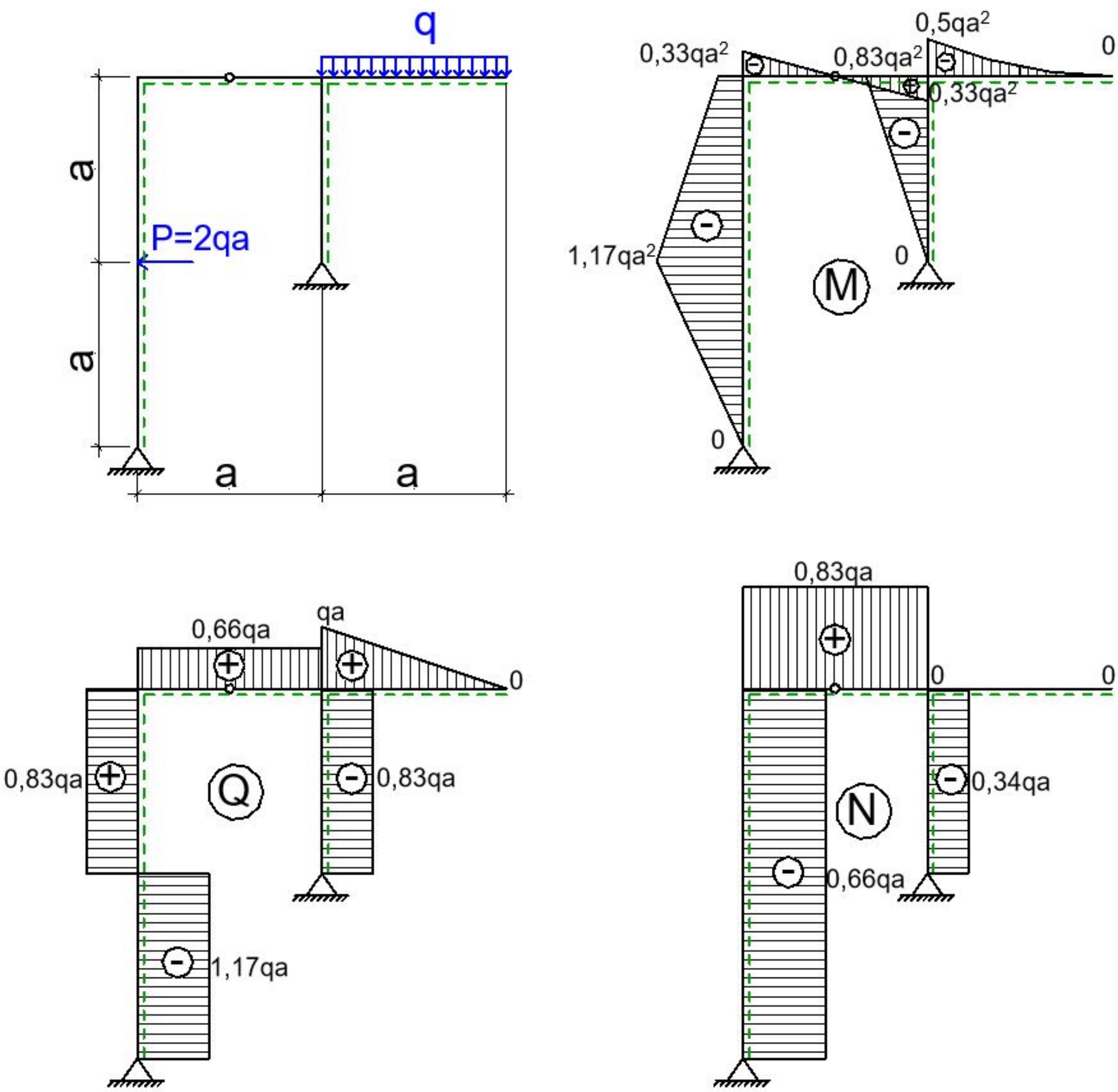


Рис. 9.11. Эпюры M, Q, N

Обратим внимание на особенности использования правила тупого угла для задач с распределенной нагрузкой, действующей перпендикулярно оси стержней. Иногда для правильного решения задачи требуется уточнить вид эпюры M, имеет ли она локальный максимум (или минимум) в пределах участка или нет. На рисунке 9.12 приведен пример различных вариаций вида эпюры M на участке стержневой системы, загруженном распределенной нагрузкой.

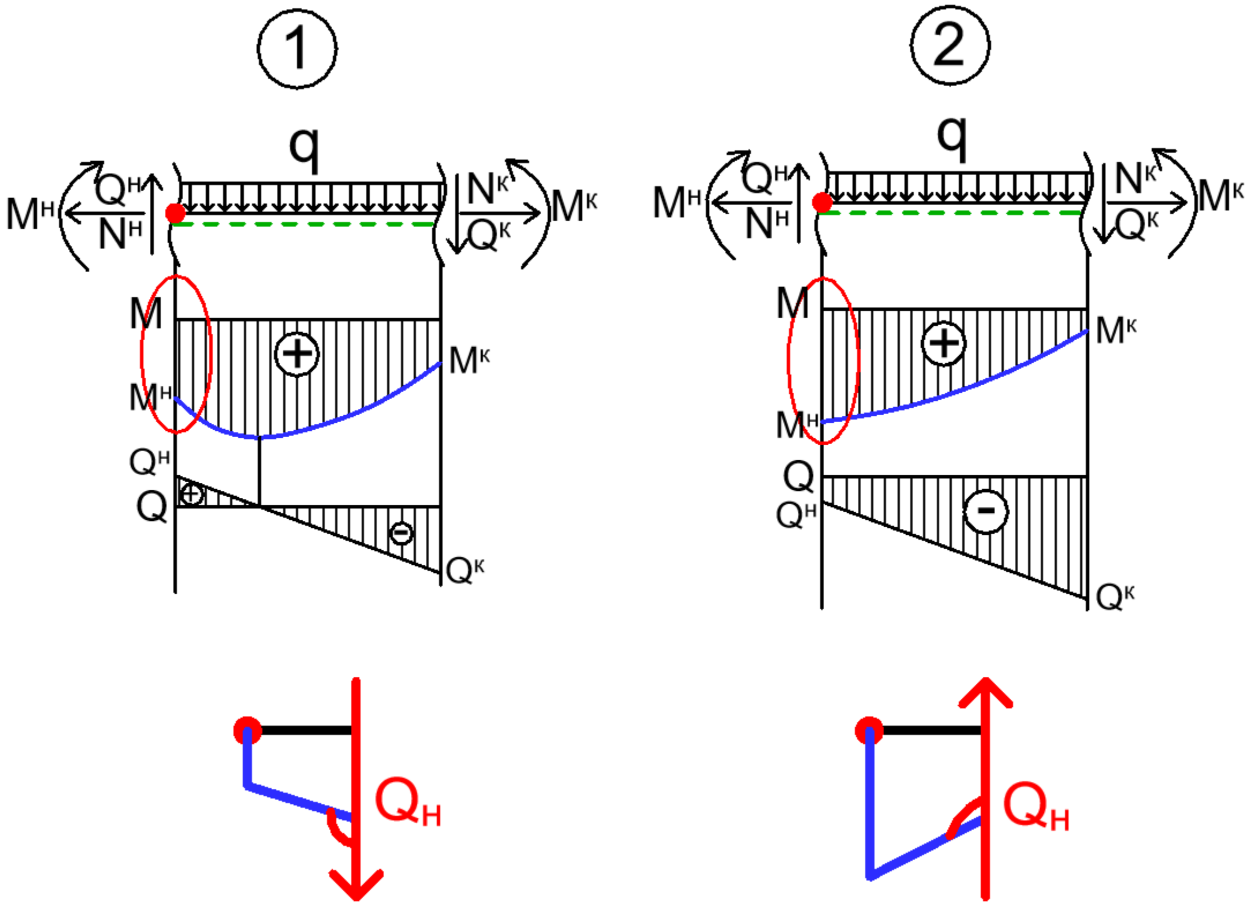


Рис. 9.12. Вид эпюры М на участке с распределенной нагрузкой

В первом варианте при наличии локального максимума к левому (начальному) сечению стержня эпюра моментов М подходит таким образом, что по правилу тупого угла Q направлена вниз.

Во втором варианте к левому (начальному) сечению стержня эпюра моментов М подходит таким образом, что по правилу тупого угла Q направлена вверх.

В подобных ситуациях прежде чем пользоваться правилом тупого угла и строить эпюру N необходимо обязательно уточнить вид эпюры М, так как различный вид приводит к противоположным направлениям Q, что может привести к ошибке в решении задачи.

Эпюра М уточняется по виду эпюры Q: если эпюра Q пересекает ось абсцисс в пределах стержня, то на эпюре М должен быть максимум (или минимум) в пределах стержня (вариант 1, рисунок 9.12). Если эпюра Q не равна 0 ни в одном из сечений, то и локального максимума (или минимума) на эпюре M нет (вариант 2, рисунок 9.12).

Приведем ниже без решения пример задачи, где встречается подобная ситуация. На рисунке 9.13 представлены 2 одинаковые расчетные схемы с различными нагрузками.

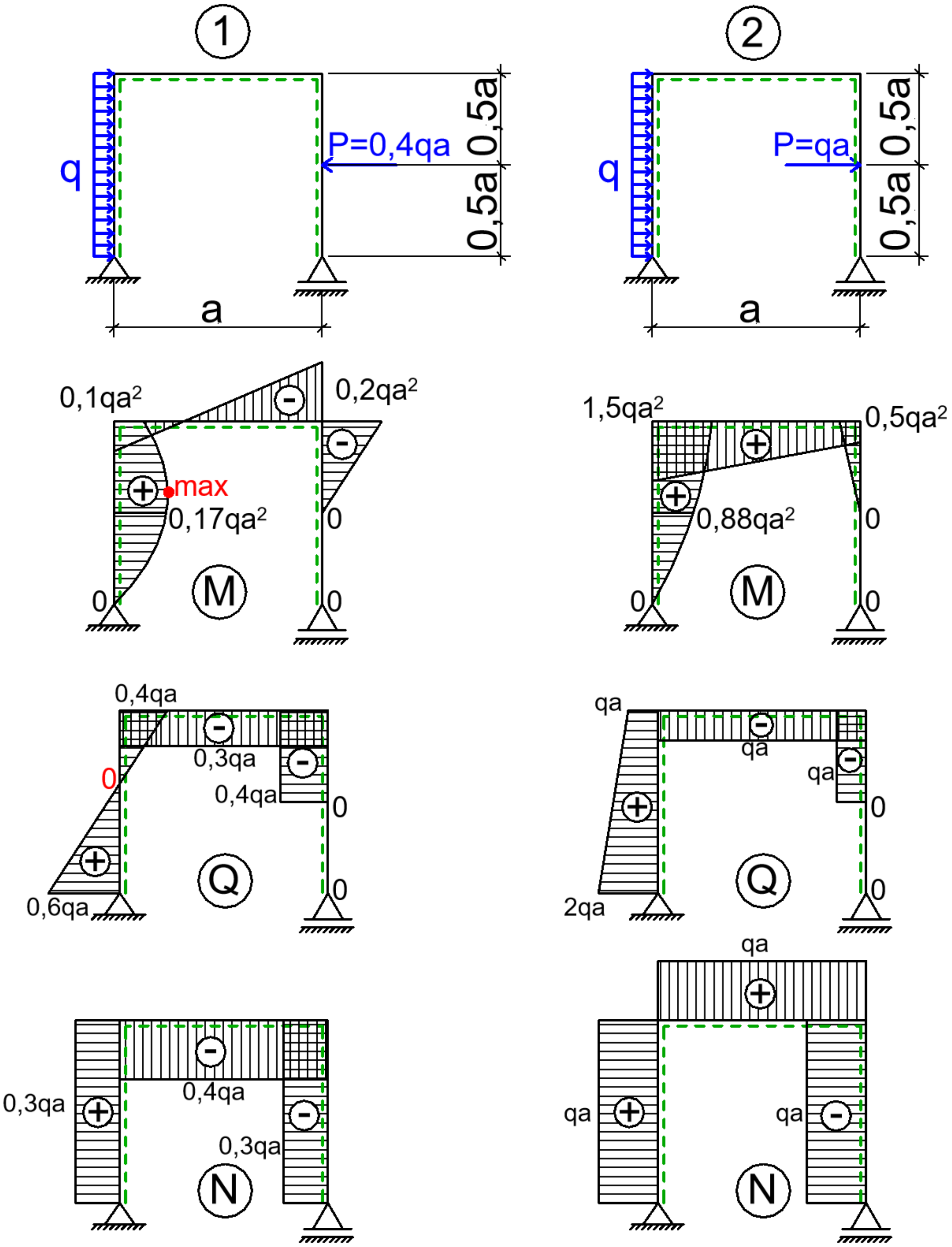


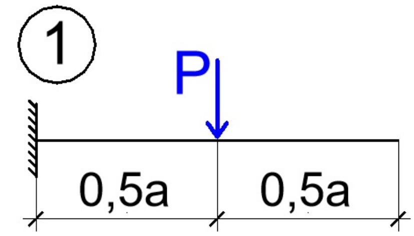
Рис. 9.13. Пример задачи требующей уточнения вида эпюры M

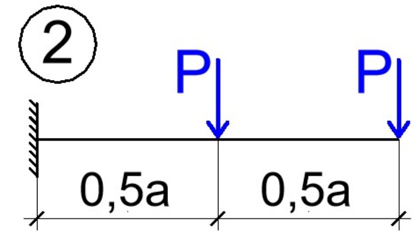
В первом и втором варианте сверху левой стойки эпюра моментов подходит к верхнему сечению с разным наклоном. Уточнения вида эпюры М производится именно для определения этого наклона, так как от него напрямую через правило тупого угла зависит направления поперечной силы в сечении.

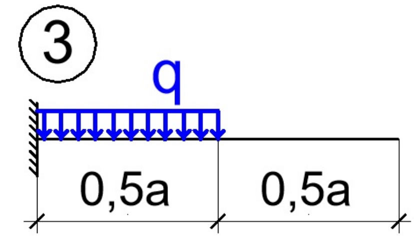
В первом варианте в верхнем сечении левой стойки поперечная сила по правилу тупого угла направлена вправо, в результате чего горизонтальный стержень оказывается сжат.

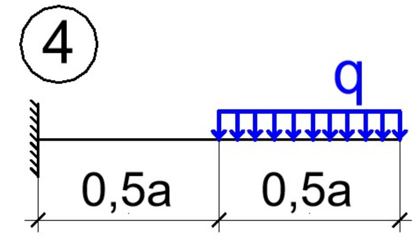
Во втором варианте в том же верхнем сечении левой стойки поперечная сила по правилу тупого угла направлена влево, в результате чего горизонтальный стержень оказывается растянут.

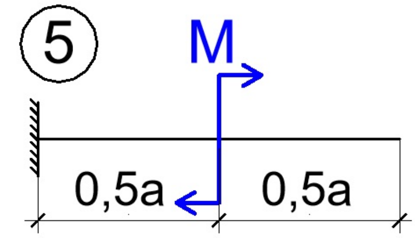
10. Контрольные задачи

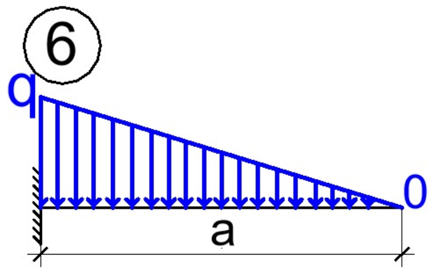


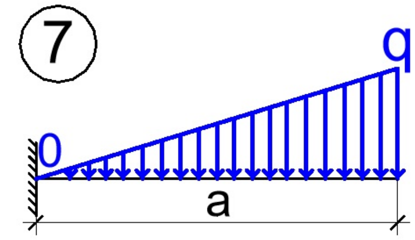


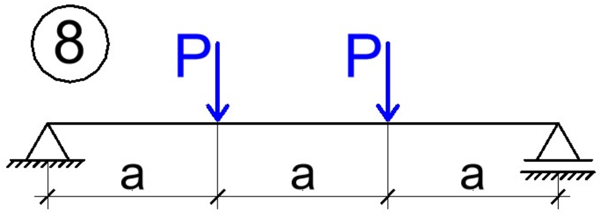


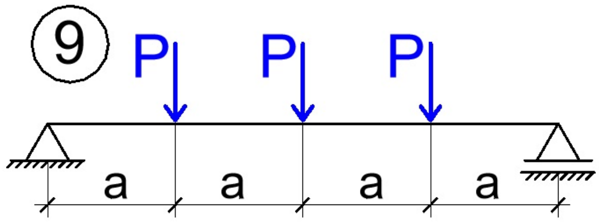


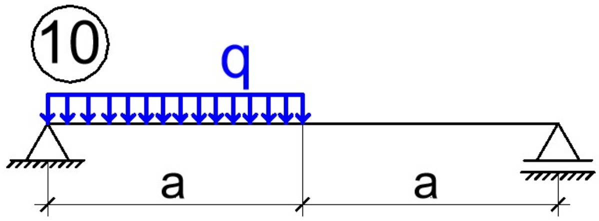


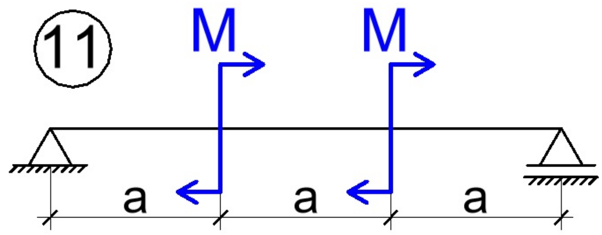


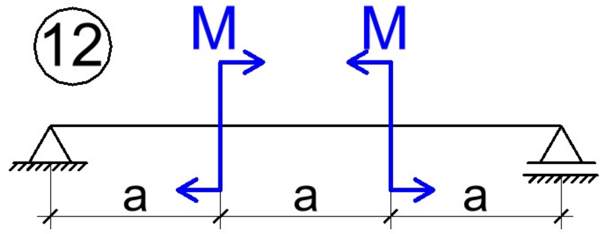


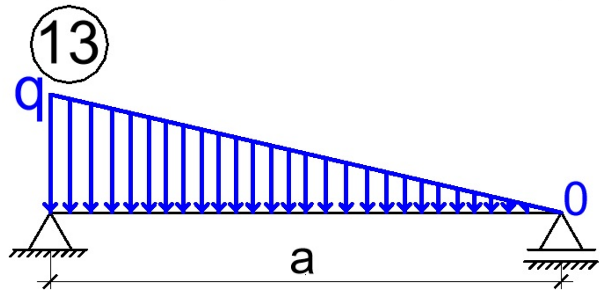


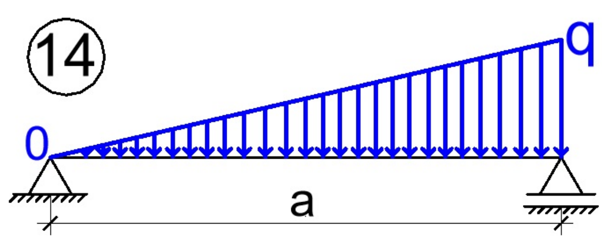


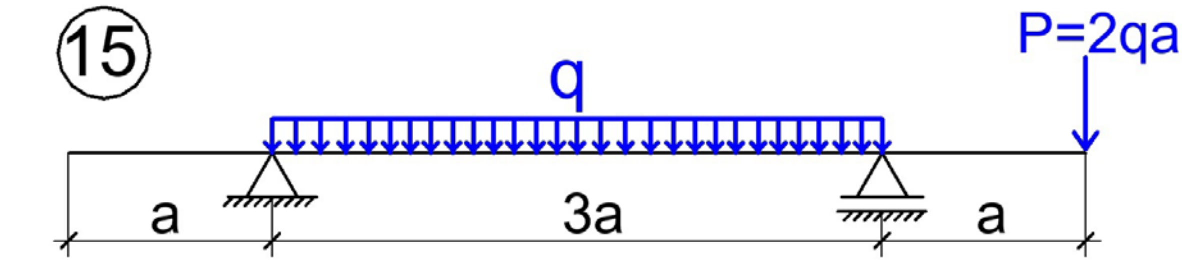


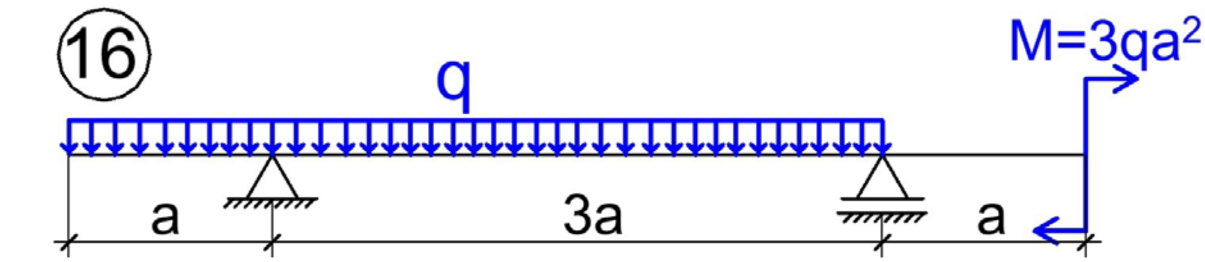


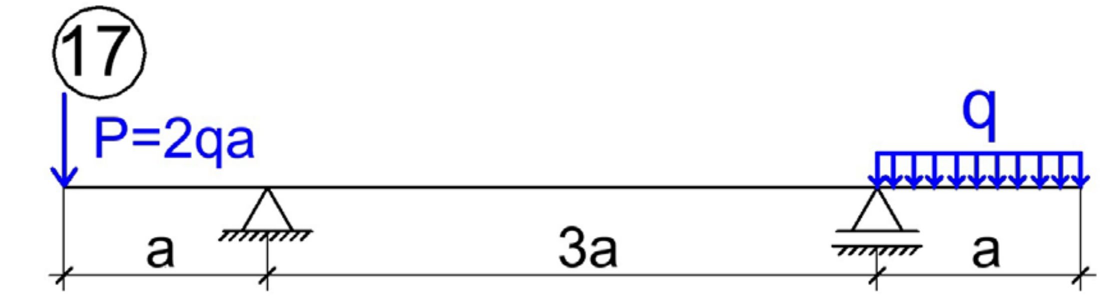


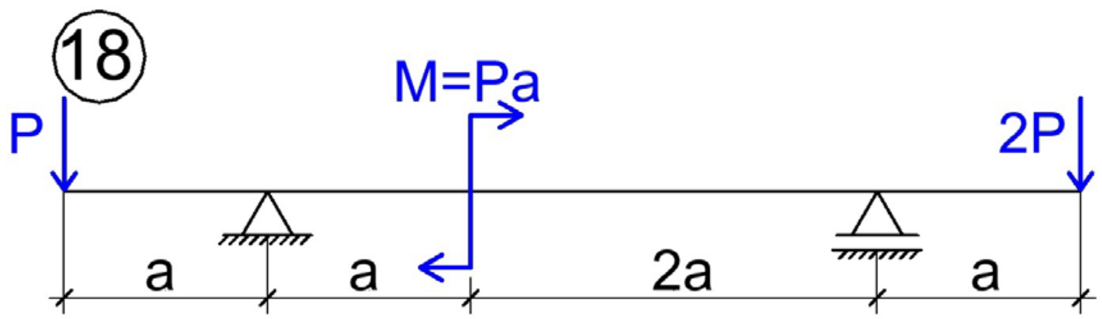


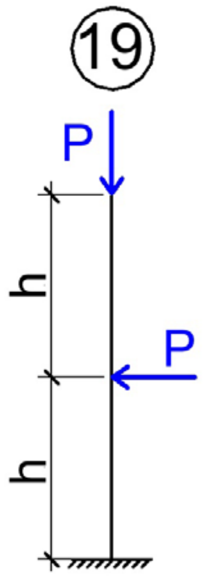


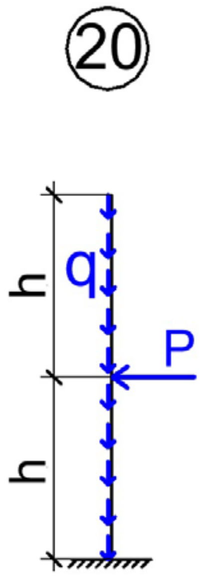

15
q
P=2qa
a
3a
a

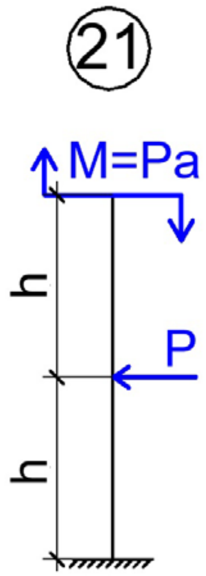

16
q
M=3qa²
a
3a
a

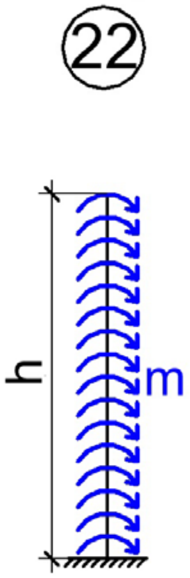

17
P=2qa
q
a
3a
a

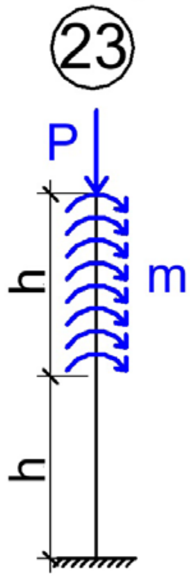

18
P
M=Pa
2P
a
a
2a
a


19
P
P
h
h

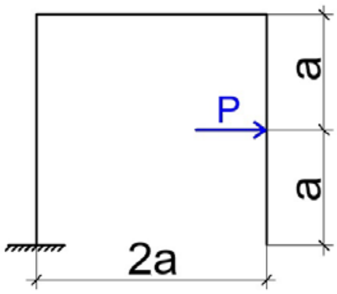

20
q
P
h
h


21
M=Pa
P
h
h

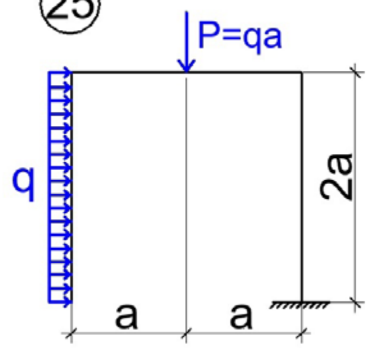

22
h
m


23
P
m
h
h

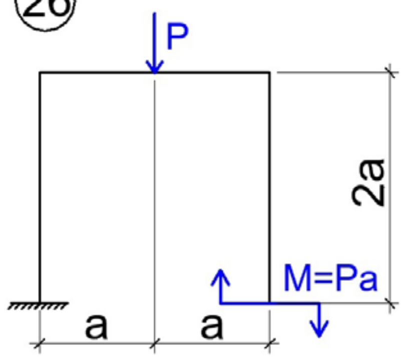
24



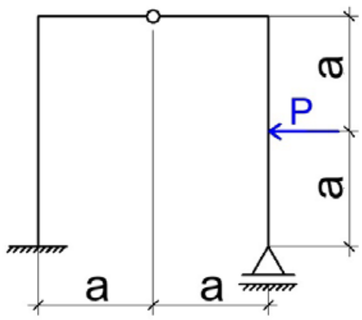
25



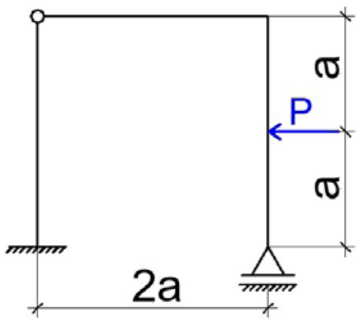
26



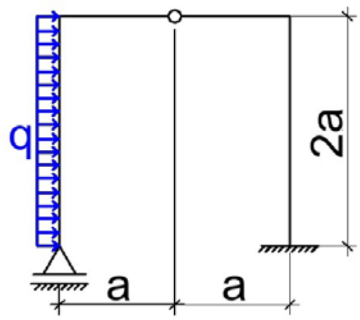
27



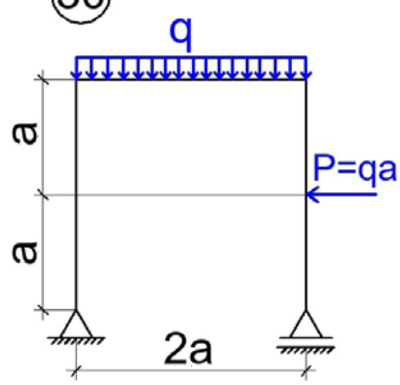
28



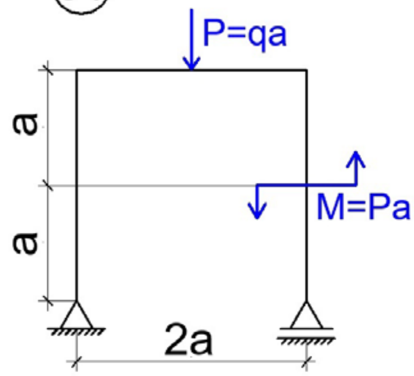
29



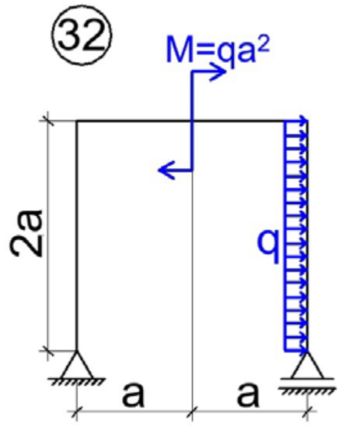
30



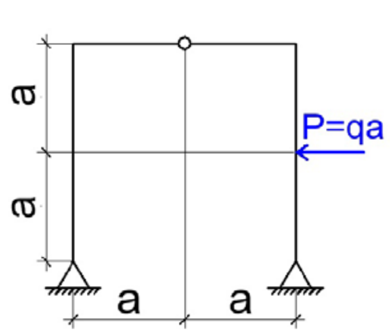
31



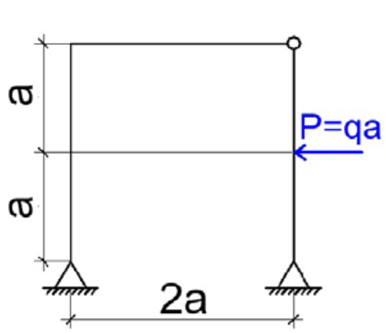
32



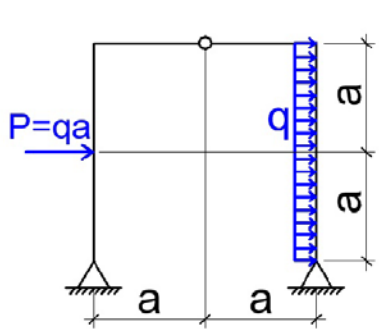
33



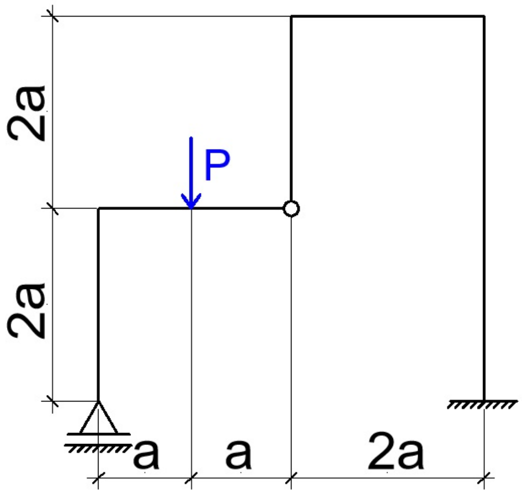
34



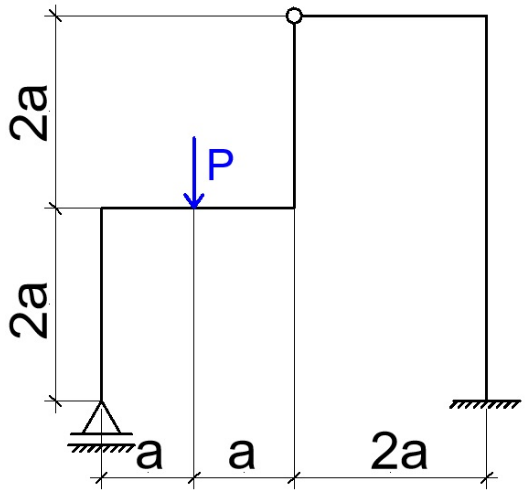
35



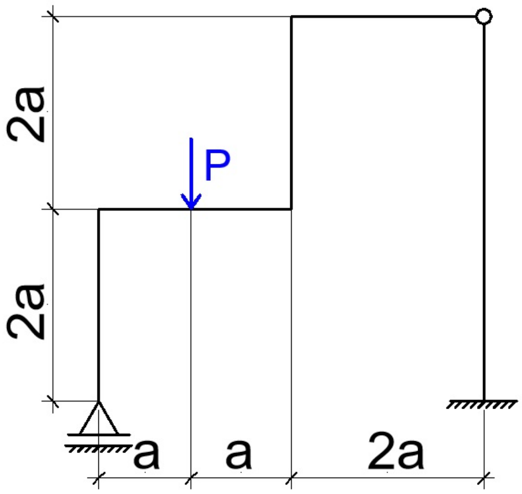
36



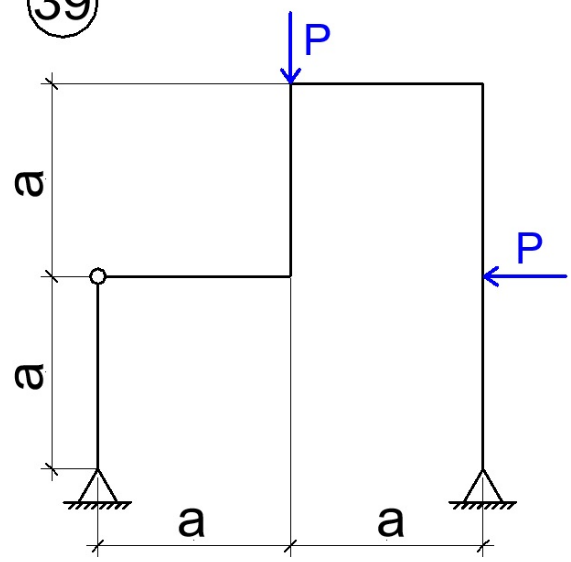
37



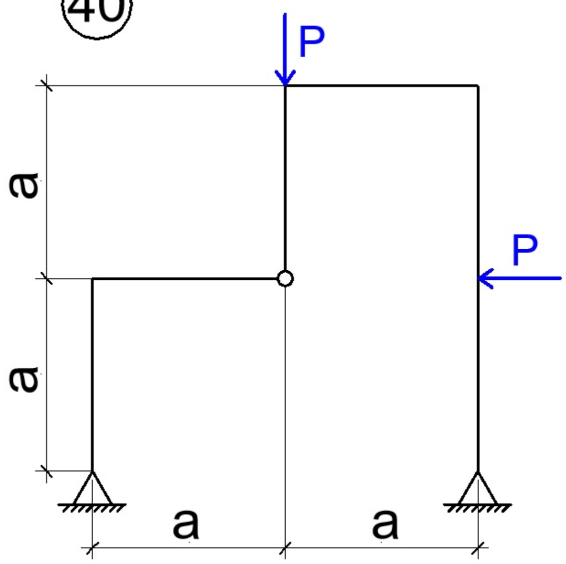
38



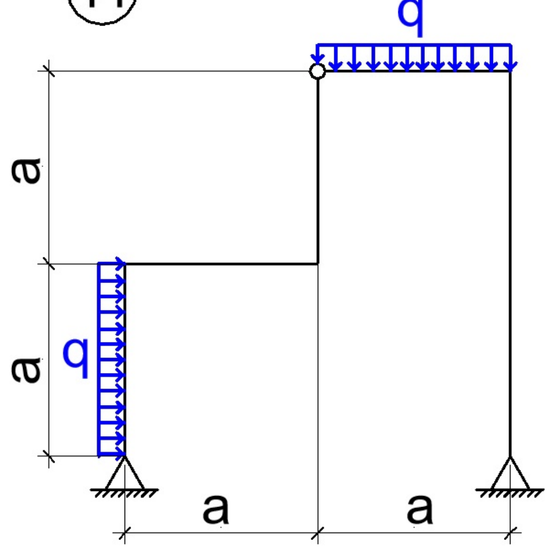
39



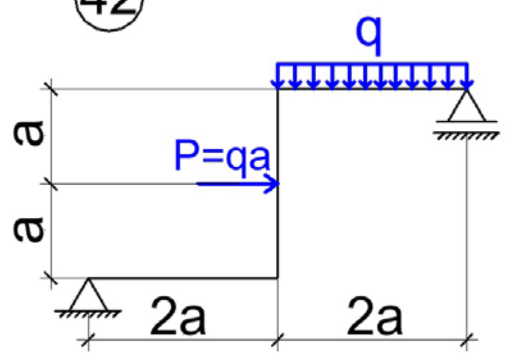
40



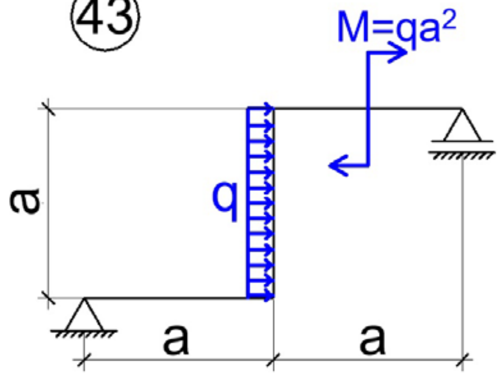
41



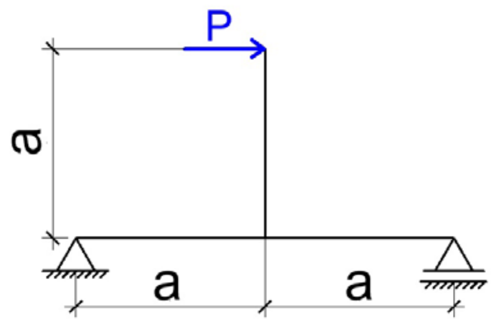
42



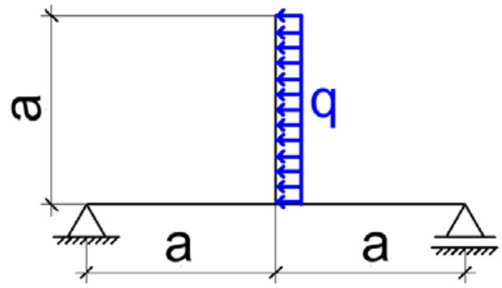
43



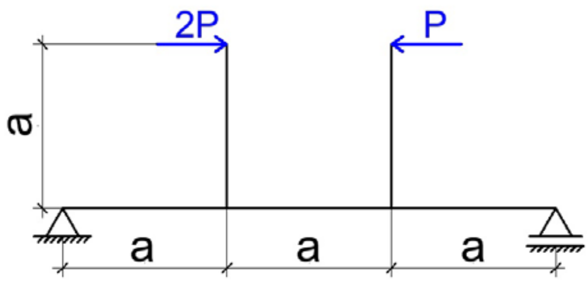
44



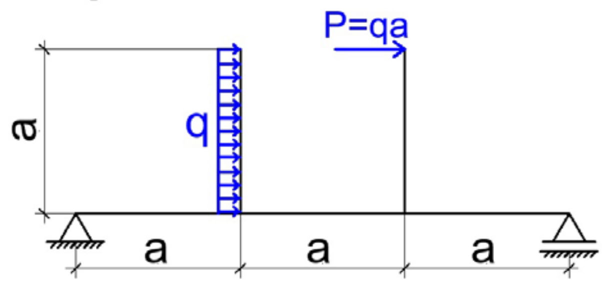
45



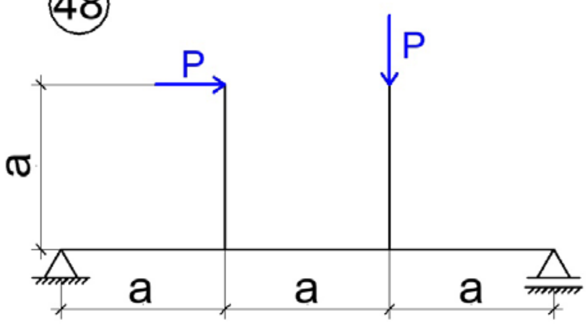
46



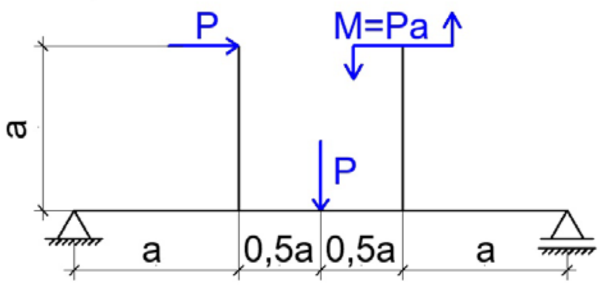
47



48



49



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии произведено обобщение и детализация информации о схематизации опор и нагрузок, о типах стержневых систем, дана информация о внутренних усилиях, правилах построения их эпюр и о правилах знаков, используемых в строительной механике. Детально разобраны решения простейших балок и рам.

В отдельный раздел выделены свойства эпюр внутренних усилий, каждое из которых проиллюстрировано примером из ранее решенных задач, что облегчает визуальное понимание и усвоение материала.

Автор рекомендует всем обучающимся, после решения любой из задач строительной механики плоских стержневых систем проводить визуальный контроль эпюр внутренних усилий на соответствие свойствам эпюр внутренних усилий.

Приведены подробные примеры решения задач, в том числе с использованием свойств эпюр внутренних усилий.

В задачах сознательно повторяется общая информация с одной стороны для ее лучшего запоминания, с другой стороны для возможности понимания хода решения задачи вне зависимости от предыдущих задач.

Автор считает вышеуказанную информацию основополагающей для курса строительной механики, и надеется, что данное учебное пособие поможет студентам достичь наилучшего понимания данных вопросов. А это, несомненно, приведет к улучшению усвоения основного материала курса строительной механики, и как следствие, к повышению уровня и качества технической подготовки инженеров-строителей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Изображение из сети Интернет. URL: https://capiton-mebel.ru/obzory/sharnir-na-podvizhnoj-opore-96-foto.html (дата обращения: 01.02.2024).
2. Изображение из сети Интернет. URL: https://engineering.stackexchange.com/questions/11922/how-to-simulate-the-simply-supported-boundary-condition-in-experiments?rq=1 (дата обращения: 01.02.2024).
3. Изображение из сети Интернет. URL: https://2gis.ru/spb/gallery/firm/70000001039180472/photoId/30258560054378342 (дата обращения: 01.02.2024).
4. Изображение из сети Интернет. URL: https://blogdom.ru/pivotally-movable-support-at-an-angle-connecting-bodies-with-hinges/ (дата обращения: 01.02.2024).
5. Изображение из сети Интернет. URL: https://stroyelit-st.ru/stroitelstvo-domov/dom-iz-monolitnogo-karkasa-v-marfino.html (дата обращения: 01.02.2024).
6. Изображение из сети Интернет. URL: https://kazan.pulscen.ru/products/khomut_svarnoy_872kh1301kh820_mm_isp_4_ost_24_125_117_01_238156987 (дата обращения: 01.02.2024).
7. Изображение из сети Интернет. URL: https://lesprominform.ru/jarticles.html?id=5914 (дата обращения: 01.02.2024).
8. Изображение из сети Интернет. URL: https://1svoimi-rukami.ru/strojka/kolonny-i-perekrytiya-iz-monolitnogo-zhelezobetona-95-foto.html (дата обращения: 01.02.2024).
9. Изображение из сети Интернет. URL: https://metallfors.ru/proizvodstvo/metallokarkasy-zdaniy/ (дата обращения: 01.02.2024).
10. Изображение из сети Интернет. URL: https://alterv.ru/catalog/elementy_dlya_podvizhnogo_soedineniya_profiley/k1051_sharniry_dlya_konstruktsionnykh_profiley/ (дата обращения: 01.02.2024).
11. Изображение из сети Интернет. URL: https://avatars.mds.yandex.net/i?id=5962b0a3abb11a16d7358332a0d684eb_l-5296782-images-thumbs&n=13 (дата обращения: 01.02.2024).
12. Розин Л.А., Константинов И.А., Смелов В.А. Расчет статически определимых стержневых систем: Учебное пособие / Л.А.Розин, И.А.Константинов, В.А.Смелов. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1983 – 228 с.
13. Дарков А.В., Г.К. Клейн, В.И Кузнецов и др. Строительная механика: Учебник для вузов./ А.В Дарков, Клейн Г.К., Кузнецов В.И Дарков, О.В. Лужин. В. Г Рекач, В.В

Синельников, Г.С. Шпиро, - 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа. 1975 – 600 с.

14. SCAD Office. Версия 21. Вычислительный комплекс SCAD++. В. С. Карпиловский, Э. З. Криксунов, А. А. Маляренко, С. Ю. Фиалко, А. В. Перельмутер, М. А. Перельмутер. 2015 – 850 с.
15. Сайт Лира Софт URL: https://lira-soft.com/ (дата обращения: 01.02.2024).