Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

А.В. Костарев Т.А. Костарева

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ТЕОРИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2025

Аннотация

Вывод условий сохранения покоя опирается не на излишние аксиомы статики, а на аксиоматику Ньютона и теорему об эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу.
Сформулированы условия построения определимых связей.
Создан комплект интерактивных excel задач, позволяющих студенту самостоятельно готовится к контрольной, а преподавателю проводить контрольные, результаты которых определяет программа.
Введено понятие силы и коэффициента сопротивления мягкой дороги движению центра твердого колеса. Объяснено явление буксования такого колеса.

Полный курс видео лекций на https://stepik.org/a/71088

ОГЛАВЛЕНИЕ

Векторная алгебра сил

Стр

Предмет и модели механики. 3
Модуль, проекция и составляющая силы. 4
Главный вектор системы сил. 6
Момент силы относительно точки. Теоремы о моменте.
Матричное вычисление векторного произведения. Присоединенная матрица. 8
Аналитическое выражение момента
Момент силы относительно оси. 9
Алгебраический момент силы относительно центра для плоской системы сил.
Главный момент системы сил. Зависимость главного момента от центра. 10
Вращательная система сил. Пара сил. 11

Условия сохранения покоя твердого тела

Принципы (аксиомы) механики. Условия сохранения покоя точки. 11
Условия сохранения покоя произвольной дискретной системы. 13
Необходимые условия равновесия внешних сил.
Нагрузка и реакции определимых связей. Прямая задача статики. 14
Достаточность условий равновесия внешних сил для сохранения покоя твердого тела. 15
Обратная задача статики.
Скалярные условия равновесия частных систем сил. 16
Пример постановки определимых связей в виде стержней на шарнирах 18
Пример постановки определимых связей и решения задачи на статику в пространстве векторным и матричным способами 20
Интерактивные excel задания по определению реакций опор плоской системы двух тел 22
Пример выполнения задания о системе двух тел
Интерактивные excel задачи на статику в пространстве 25
Комплект равносложных задач по статике в пространстве
Вопросы коллоквиума по статике 28

Эквивалентные преобразования сил, приложенных к твердому телу

Стр

Теорема о статической эквивалентности нагрузок. Эквивалентные преобразования силы и пары. 29
Теорема о статической эквивалентности двух систем сил.
Условия существования равнодействующей. Теорема Вариньона. 30
Теорема Пуансо 31
Приведенные контактные реакции. Приведение распределенных реакций и нагрузок. 32

Предельные состояния равновесия

Внешнее трение

Закон Кулона. Угол трения. 33
Конус трения. Самоторможение. 34
Трение нити о цилиндрическую поверхность (задача Эйлера). 35
Опрокидывание.
Перекатывание. Колесо

Внутреннее трение.

Момент сопротивления вращению мягкого колеса. 37
Момент и коэффициент трения качения.
Сила и коэффициент сопротивления мягкой дороги. 39

Векторная алгебра сил

Предмет и модели механики.

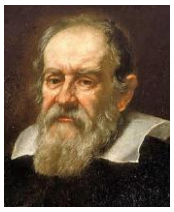
Классическая или Ньютонова механика является разделом физики, в котором изучаются основные законы механического взаимодействия и движения твердых тел.

История развития механики насчитывает тысячелетия. Практически человек стал интересоваться механикой и интуитивно использовать ее законы, когда старался точнее бросить камень на охоте. С тех пор механика прошла огромный путь. Опыт первых исследователей смогли обобщить, заложив основы классической механики, такие мыслители древности, как Архимед (3 век до нашей эры), Леонардо Да Винчи (15в), Галилей и Декарт (16в). Современный вид механика приобрела благодаря гениям Гюйгенса и Ньютона (17в), Эйлера и Лагранжа (18в).

Архимед прославился многими механическими конструкциями. Рычаг был известен и до Архимеда, но лишь Архимед изложил его полную теорию и успешно её применял на практике. Изобретённый им архимедов винт (шнек) для вычерпывания воды до сих пор применяется в Египте.

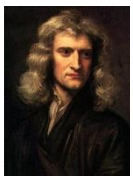
Archimedes-screw.gif

Леонардо да Винчи интересовали проблемы полёта. Список изобретений, как реальных, так и приписываемых ему: Парашют — 1483, Велосипед, Танк, Лёгкие переносные мосты для армии, Прожектор, Катапульта, Робот, Двухлинзовый телескоп.



Галиле́о Галиле́й (1564-1642) первым использовал телескоп для наблюдения небесных тел. Галилей — основатель экспериментальной физики. Своими экспериментами он убедительно опроверг умозрительную метафизику Аристотеля и заложил фундамент классической механики. При жизни был известен как активный сторонник гелиоцентрической системы мира, что привело Галилея к серьёзному конфликту с католической церковью.

Рене́ Дека́рт (1596-1650) — французский математик, философ, физик и физиолог, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики, автор метода радикального сомнения в философии, механицизма в физике.



Сэр Иса́ак Ньюто́н (1642 —1727) — английский физик, математик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисление, теорию цвета и многие другие математические и физические теории. На фотографии справа –страница «Начал» с аксиомами механики.

Леона́рд Э́йлер (1707 - 1783) — швейцарский, немецкий и российский математик, внёсший значительный вклад в развитие математики, физики, астрономии и ряда прикладных наук. Он предложил современный подход к динамике твердого тела.

Курс механики принято делить на три основные части: СТАТИКА, КИНЕМАТИКА и ДИНАМИКА. В СТАТИКЕ изучаются условия покоя тел, КИНЕМАТИКА является языком описания их движения, а в ДИНАМИКЕ, собственно и являющейся механикой, выводятся законы движения тел под действием сил. Поскольку покой есть частный случай движения, то уравнения статики было бы легче получить из законов движения тела. Однако они необходимы вам уже сейчас для изучения других механических дисциплин, поэтому мы начинаем со статики.

Модели механики

Как любая точная наука механика рассматривает не реальные, бесконечно сложные физические объекты, а их модели, отражающие лишь главные в данных условиях свойства.

Объектом классической механики является система взаимодействующих материальных точек, называемая *механической системой*.

Частным случаем механической системы, является ***твердое тело*** - модель реального тела, представляющая собой систему материальных точек, расстояние между которыми не изменяется со временем. Деформации большинства инженерных сооружений пренебрежимо малы, поэтому модель твердого тела оправдана. Тем более что она значительно упрощает изучение движения и покоя тела и эти результаты применимы к реальному телу.

Сила. Модуль, проекция и составляющая силы.

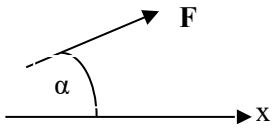
Все тела находятся во взаимодействии. Например, маленький шарик, висящий на нити, взаимодействует с Землей и нитью. Оба воздействия имеют точку приложения (сам шарик), линию действия (вертикаль), направление (противоположные) и величину (одинаковый модуль).

Величины, характеризуемые линией действия, направлением и модулем в математике называются векторами. Поэтому за меру воздействия одной точки на другую принят вектор ***F***

который называют ***силой.***

Формальные математические операции с векторами изложены в Приложении.

При решении задач оперируют числами, а не векторами. Поэтому пользуются скалярным представлением вектора, например, тремя его проекциями на декартовы оси x,y,z. Они образуют вектор-столбец.



$$F = \begin{pmatrix} Fx \\ Fy \\ Fz \end{pmatrix}$$

Напомним, что проекцией вектора на ось x называется скалярная величина, равная

$$F_x = FCos\alpha$$

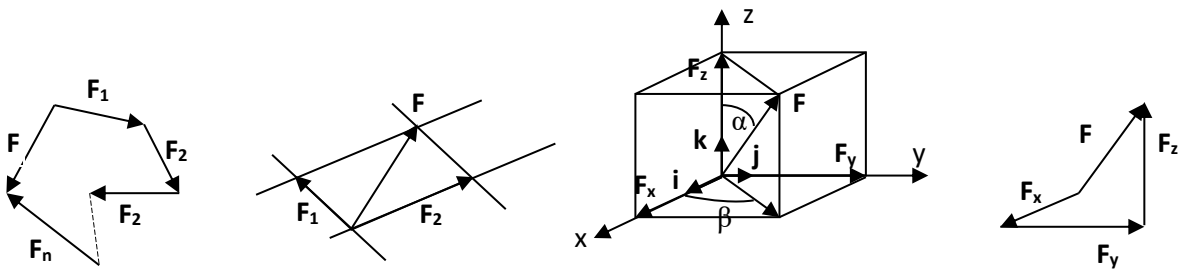
Знак проекции определяется знаком косинуса угла между направлениями силы и оси. Если угол острый, то проекция положительна, если тупой- то она отрицательна. Проще говоря, проекция положительна, если направление силы совпадает с точностью до π/2 с направлением оси.

Важно помнить, что ***проекция силы на перпендикулярную ей ось РАВНА НУЛЮ***.

В письме вектор условимся начёркивать $\vec{F}$, в печати выделять жирным шрифтом ***F***.

Модуль вектора будем обозначать той же буквой, но без черты в письме или нежирно в печати: F. Модуль силы измеряется в ньютонах Н (Международная система СИ) или килограммах кГ (Техническая система единиц)

Известно, что в математике векторы складываются по правилу параллелограмма (Рис 1 b).



a) b) c) d)

Рис.1

Из правила параллелограмма вытекает правило разложения вектора на составляющие вдоль двух направлений. Для этого через концы вектора ***F*** проводятся линии, параллельные заданным направлениям. ***Составляющей*** вектора называется любое из слагаемых в векторной сумме

$$\boldsymbol{F = F_1 + F_2 + \cdots + F_n}$$

На Рис.1a составляющие вектора ***F*** образуют ***векторный многоугольник***, в котором начало последующей силы совпадает с концом предыдущей. Вектор ***F*** замыкает векторный многоугольник.

Представим вектор силы **F** его проекциями на декартовы оси с ортами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} \quad (3)$$

Слагаемые в этом выражении являются взаимно ортогональными ***составляющими*** вектора **F** вдоль декартовых осей (Рис.1 c,d).

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_{xy}} + \boldsymbol{F_z}; \quad \boldsymbol{F_{xy}} = \boldsymbol{F_x} + \boldsymbol{F_y}; \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_x} + \boldsymbol{F_y} + \boldsymbol{F_z}$$

$$\boldsymbol{F_x} = F_x\boldsymbol{i}; \qquad \boldsymbol{F_y} = F_y\boldsymbol{j}; \qquad \boldsymbol{F_z} = F_z\boldsymbol{k};$$

$$F_{xy} = FSin\alpha; \quad F_x = F_{xy}Cos\beta = FSin\alpha Cos\beta; \quad F_y = F_{xy}Sin\beta = FSin\alpha Sin\beta; \quad F_z = FCos\alpha$$

Проекции определяют модуль вектора по теореме Пифагора:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$$

Таким образом, будем различать следующие обозначения

вектор: в печати $\boldsymbol{F}$, в письме $\vec{F}$ или $\bar{F}$
составляющая вдоль оси x: $\boldsymbol{F_x}$, в письме $\overrightarrow{F_x}$ или $\bar{F}_x$
составляющая-проекция на плоскость xy: $\boldsymbol{F_{xy}}$, в письме $\overrightarrow{F_{xy}}$ или $\overline{F_{xy}}$
модуль вектора: F,
проекция вектора: F_x

В письменных работах обозначение вектора буквой F без стрелки или черты недопустимо!

Система сил. Главный вектор системы сил.

Системой сил $\{\boldsymbol{F}\} = \{\boldsymbol{F_1}\ \boldsymbol{F_2}\ \ldots \boldsymbol{F_n}\}$ называется множество сил, приложенных к точкам механической системы. ***Главным вектором*** системы сил называется векторная сумма всех сил системы:

$$\boldsymbol{V} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F_k} \qquad (1)$$

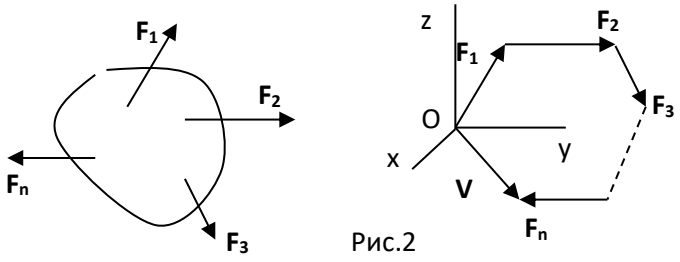


Рис.2

Главный вектор **V** можно найти, построив в произвольном центре О векторный многоугольник (рис.2).

Для пространственной системы сил построить многоугольник практически трудно. Проще найти главный вектор аналитически. Проектируя слагаемые формулу (1) на оси координат, определим проекции главного вектора, его модуль и направляющие косинусы:

$$V_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \qquad V_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}; \qquad V_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}; \quad Cos(\boldsymbol{V}; x) = \frac{V_x}{V}; \quad Cos(\boldsymbol{V}; y) = \frac{V_y}{V}; \quad Cos(\boldsymbol{V}; z) = \frac{V_z}{V}$$

Момент силы относительно точки. Теоремы о моменте.

Понятие момента силы возникает при рассмотрении твердого тела. Опыт показывает, что, если зафиксировать некоторый центр О в теле, то сила **F,** приложенная в другой точке А тела может повернуть тело вокруг О. Эту способность силы поворачивать тело и характеризует ее момент относительно О.

Обозначим через **r** радиус-вектор точки А приложения силы относительно центра О. ***Моментом силы F относительно центра О*** называется вектор $\mathbf{m_o(F)}$ (Рис.3), равный векторному произведению радиуса-вектора точки приложения силы на вектор силы

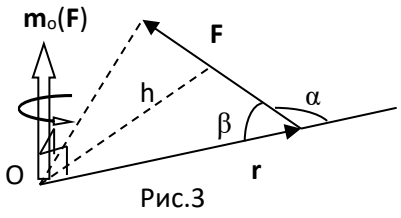
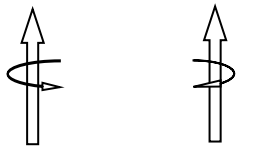


Рис.3

$$\boldsymbol{m_o(F) = r \times F}$$

Направление векторного произведения условно, и зависит от ориентации пространства. *Ориентация пространства-* это принятое нами правило правого или левого винта, по которому дуговой стрелке, имеющей основной смысл направления вращения, условно ставится в соответствие прямая стрелка вектора, перпендикулярная плоскости дуговой стрелки (Рис.4). Вектора, направление которых зависит от ориентированности пространства, называются ***аксиальными.***


Правый винт Левый винт
Рис.4

Мы будем рассматривать только право ориентированное пространство, то есть направление векторного произведения будем определять по правилу ***правого винта:*** с конца $\mathbf{m_o}$ видно, что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки.

Модуль момента равен произведению модуля силы на плечо h -длину перпендикуляра, опущенного из центра О на линию действия силы.

$$m_o(F) = FrSin\alpha = FrSin\beta = Fh$$

Видим, что момент силы тем меньше, чем меньше ее плечо, и он обращается в ноль для любого центра на линии действия силы. Этот результат является ожидаемым, поскольку опыт показывает, что такой силой повернуть покоящееся тело вокруг опоры О невозможно.

Роль опоры в свободном теле играет его центр тяжести. Сила не может повернуть свободное покоящееся тело, если линия действия силы проходит через центр тяжести тела.

Теорема 1. О зависимости момента от центра.

Найдем связь между моментами силы **F** относительно центров А и В. Из Рис.5видно, что

$$\boldsymbol{r_A = AB + r_B;} \quad \boldsymbol{m_A(F) = r_A \times F = (AB + r_B) \times F = \ r_B \times F + AB \times F}$$

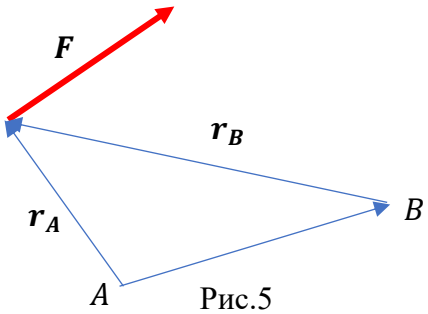


Рис.5

Таким образом

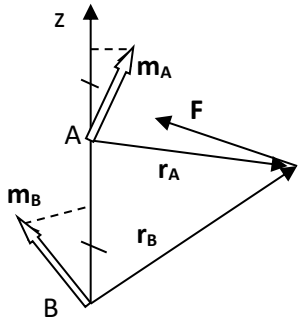
$$\boldsymbol{m_A(F) = m_B(F) + AB \times F} \quad (2)$$

Формула (2) показывает, что:

а) в общем случае момент силы зависит от центра

б) перенос центра параллельно линии действия силы не изменяет момента (в этом случае второе слагаемое в (2) обращается в ноль.

Теорема 2. О проекциях моментов.



Проектируя (2) на ось z, проходящую через A и B, находим

$$\text{пр}_z\boldsymbol{m_A(F)} = \text{пр}_z\boldsymbol{m_B(F)} = m_z(\boldsymbol{F}) \quad (3)_-$$

поскольку произведение **AB** x **F** перпендикулярно AB и его проекция на z равна нулю. Таким образом, приходим к теореме:

Проекции моментов силы относительно всех точек одной оси на эту ось равны между собой.

Матричное вычисление векторного произведения. Присоединенная матрица. Аналитическое выражение момента.

Известно, что в координатах x,y,z с ортами **i, j, k** векторное произведение

$$\boldsymbol{c = a \times b}$$

векторов

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

можно представить в виде определителя матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{c = a \times b} = \big(a_yb_z - a_zb_y\big)\boldsymbol{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\boldsymbol{j} + \big(a_xb_y - a_yb_x\big)\boldsymbol{k}$$

Или

$$c_x = a_yb_z - a_zb_y; \quad c_y = a_zb_x - a_xb_z; \quad c_z = a_xb_y - a_yb_x$$

Векторам **a, b** и **c** соответствуют столбцы их проекций.

$$a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что столбец *c* можно получить, умножив кососимметричную матрицу *A*, состоящую из проекций вектора **a**

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$$

на столбец *b*. Матрицу *A* называют ***присоединенной матрицей вектора a***

Приходим к выводу, что векторной записи произведения

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

соответствует матричная формула

$$c = Ab \qquad (4)$$

Верно и обратное. Выражению вида (4), где *A* - кососимметричная матрица, соответствует векторное произведение $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Аналитическое выражение момента

Пусть вектора **r** и **F** заданы аналитически, т.е. своими проекциями на оси x, y, z

Векторной формуле момента $\boldsymbol{m_o(F)} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ соответствует матричная запись

$$m_0(F) = Rf$$

где *R*- присоединенная матрица радиуса вектора **r** (x, y, z)

$$R=\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, получаем аналитические выражения проекций момента силы на оси

$$m_x(F) = yF_z - zF_y; \qquad m_y(F) = zF_x - xF_z; \quad m_z(F) = xF_y - yF_x;$$

которые позволяют найти модуль и направление вектора $\boldsymbol{m_o(F)}$

Момент силы относительно оси

Теорема о проекциях (3) позволяет ввести в рассмотрение новую характеристику силы по отношению к оси.

Моментом силы F относительно оси z называется алгебраическая величина, равная проекции на эту ось момента силы относительно произвольной точки указанной оси.

$$m_z(\boldsymbol{F}) = \text{пр}_z\boldsymbol{m_A}(\boldsymbol{F}) \qquad (A \in z) \qquad (5)$$

Рассмотрим способ вычисления и свойства момента относительно оси. Пользуясь произволом выбора центра моментов на оси, выберем в качестве такового т. О- проекцию точки

А приложения силы на ось z. Обозначив через **k** орт оси z, и применив круговую перестановку в смешанном произведении, запишем

$$m_z(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{OA}) \cdot \boldsymbol{F} = hFCos\alpha \qquad (6)$$

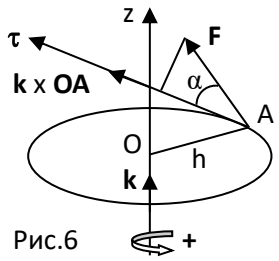


Рис.6

Здесь учтено, что произведение $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{OA}$ направленно вдоль τ по правилу правого винта. Его модуль равен расстоянию OA = h от точки приложения сил до оси.

Формула (6) показывает, что:

1. Момент силы относительно оси дает только составляющая силы, направленная по касательной **τ** к окружности радиуса h.
2. Знак момента определяется знаком Cosα.

Из Рис.6 вытекает следующее правило знаков:

Момент силы относительно оси положителен, если с конца оси видно, что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки.

Из формулы (19) понимаем, что момент силы относительно оси равен нулю в случае, если сила и ось лежат в одной плоскости ($\alpha = \pi/2$). Это происходит, когда

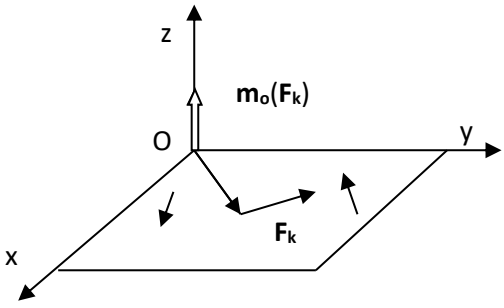
1. Сила параллельна оси
2. Линия действия силы пересекает ось

Вы это ощущаете, поднимая воротом ведро из колодца, и поэтому стараетесь приложить силу руки так, чтобы создать большее плечо.

Алгебраический момент силы относительно центра для плоской системы сил.

Система сил, расположенных в одной плоскости, называется ***плоской***. Совместим плоскость xy с плоскостью действия сил. В этом случае силы создают момент только относительно оси оси z, перпендикулярной плоскости действия сил

Совмещая плоскость сил с плоскостью листа, читатель видит направленную к нему ось z как точку O и называет момент относительно оси z ***алгебраическим моментом силы относительно точки O***



$$mo(F) \equiv mz(F) = +Fh$$

Правило знаков:

Момент положителен, если видно, что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки.

Главный момент системы сил. Зависимость главного момента от центра.

Главным моментом системы сил {**F**} относительно центра A называется вектор $\boldsymbol{M_A}$, равный векторной сумме моментов всех сил системы относительно этого центра.

$$\boldsymbol{M_A} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{m_A(F_k)}$$

Аналитически главный момент находят по его проекциям на декартовы оси

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_x(F_k)\,; \qquad M_y = \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k)\,; \qquad M_z = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k)$$

которые логично назвать ***главными моментами системы сил относительно осей x, y, z.*** По ним легко найти модуль и направление главного момента:

$$M_A = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}; \quad Cos(\boldsymbol{M_A}; x) = \frac{M_x}{M_A}; \; Cos(\boldsymbol{M_A}; y) = \frac{M_y}{M_A}; \; Cos(\boldsymbol{M_A}; z) = \frac{M_z}{M_A}$$

Найдем зависимость главного момента относительно от центра. Суммируя полученную ранее зависимость момента одной силы от центра (10) по всем силам системы, получим:

$$\sum \boldsymbol{m_A}(\boldsymbol{F}) = \sum \boldsymbol{m_B}(\boldsymbol{F}) + \boldsymbol{AB} \times \sum \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{M_B} + \boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{V}$$

Здесь учтено определение главного вектора

$$\boldsymbol{V} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F_k}$$

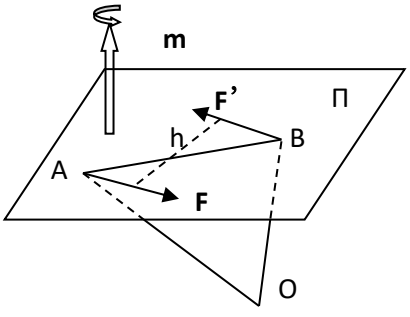
Видим, что в отличие от момента одной силы, главный момент системы сил может не зависеть от центра в случае, если главный вектор системы окажется равным нулю.

$$\boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{M_B} = \boldsymbol{M} \quad \text{если} \quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{0} \qquad (7)$$

Вращательная система сил. Пара сил.

Назовем систему сил с нулевым главным вектором ***вращательной системой.*** Название можно объяснить тем, что такая система придает вращение свободному покоящемуся телу, оставляя его центр тяжести в покое.

Формула (7) показывает, что главный момент вращательной системы не зависит от центра.



Простейшей вращательной системой является ***пара*** сил: ***система двух равных по модулю противоположно направленных сил, не лежащих на одной прямой***. Расстояние h между линиями действия сил пары называется ***плечом пары***. Главный момент пары не зависит от центра О и называется ***моментом пары m***. Он может быть найден как момент одной из сил пары относительно точки приложения второй силы.

$$\boldsymbol{M_O}\{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F'}\} = \boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{m}_B(\boldsymbol{F'}) = \boldsymbol{m}$$

Момент пары перпендикулярен плоскости пары и направлен в сторону, откуда видно, что пара стремится повернуть тело против часовой стрелки.

Условия сохранения покоя твердого тела.

Дискретной механической системой называется счетное множество взаимодействующих между собой и с миром материальных точек с массами $\{\boldsymbol{m_1 m_2} \ldots . \boldsymbol{m_k} \ldots . \boldsymbol{m_n}\}$. Движение системы рассматривается по отношению к некоторой системе отсчета. Системой отсчета называется пространство, с которым связан наблюдатель, умеющий измерять расстояния и время.

Покой есть равенство нулю скоростей точек системы по отношению к данной системе отсчета. В статике нас интересуют условия сохранения покоя механической системы, иначе говоря отсутствия ускорений точек. Логично сначала изучить условия покоя одной из точек системы. Они вытекают из принципов (аксиом) механики Ньютона.

Принципы (аксиомы) механики. Условия сохранения покоя точки.

Как все точные науки, механика базируется на недоказуемых постулатах, вытекающих из опыта и называемых ***аксиомами***. Являющиеся плодом размышлений многих поколений исследователей, аксиомы механики были окончательно сформулированы ***Исааком Ньютоном*** в 17 веке и поэтому носят его имя.

1. **Принцип инерции Галилея**

Существует система отсчета, называемая «инерциальной», в которой изолированная точка сохраняет состояние покоя или прямолинейного равномерного движения.

Изолированной называется абстрактная точка, не взаимодействующая с другими точками.

До Галилея считалось, что для равномерного движения (телеги) нужна сила.

Все законы механики формулируются и справедливы только в инерциальной системе отсчета.

2. **Основной принцип** (второй закон Ньютона)

Ускорение материальной точки пропорционально действующей на нее силе и обратно пропорционально массе точки

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}$$

Следствие 1: *В инерциальной системе отсчета покой точки может быть нарушен только действием силы* ***F****.*

Следствие 2*: Задать одновременно силу и ускорение точки невозможно.*

3. **Принцип внутренней аддитивности** (третий закон Ньютона). **Свойства внутренних сил.**

Воздействие среды на материальную систему равно векторной сумме ее воздействий на части системы.

Для простоты рассмотрим материальную систему всего двух точек M_1 и M_2. Обозначим равнодействующие внешнего воздействия на M_1 через $\mathbf{F_1}$ а на M_2 через $\mathbf{F_2}$. Кроме внешнего воздействия, точки взаимодействуют между. Обозначим воздействие точки M_1 на M_2 через $\mathbf{F_i}$ а M_2 на M_1 через $\mathbf{F_i'}$

Внешнее воздействие на систему равно $\boldsymbol{F_1 + F_2}$. Воздействие на точку M_1 равно $\boldsymbol{F_1 + F_i'}$. Воздействие на точку M_2 равно $\boldsymbol{F_2 + F_i}$. Согласно принципу

$$\boldsymbol{F_1 + F_i' + F_2 + F_i = F_1 + F_2}$$

Отсюда вытекает $\boldsymbol{F_i' + F_i = 0}$, или

$$\boldsymbol{F_i' = -F_i}$$

- известный «***принцип равенства действия и противодействия***»:

Силы взаимодействия двух точек равны по модулю, противоположны по направлению и лежат на прямой, проходящей через точки.

Силы взаимодействия точек материальной системы называются внутренними (индекс **i**).

Следствие- Свойства внутренних сил Внутренние силы парны, значит их главный вектор и главный момент равны нулю.

$$\boldsymbol{V^i = 0}, \qquad \boldsymbol{M_O^i = 0}$$

4 **Принцип внешней аддитивности** (правило сложения сил)

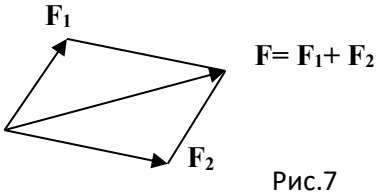


Рис.7

Действие среды на точку равно сумме действий частей среды.

Пусть среда из n материальных точек действует на изучаемую точку M силами $\mathbf{F_k}\,(k = 1,2 \ldots n)$.

Принцип утверждает, что воздействие среды на точку можно заменить одной силой **F**, равной сумме сил, с которыми точки среды действуют на изучаемую точку.

$$\boldsymbol{F = \sum F_k}$$

Системы сил, вызывающие одинаковые ускорения, назовем ***эквивалентными***. Сила, эквивалентная системе сил, называется ***равнодействующей.*** Значит любая система сил $\{\mathbf{F_k}\}$, приложенных к точке, имеет равнодействующую

$$\boldsymbol{F \sim \{F_k\}}, \qquad \boldsymbol{F = \sum F_k}$$

Для двух сил принцип дает ***правило параллелограмма*** (Рис.7):

$$\{\mathbf{F_1\, F_2}\} \sim \mathbf{F = F_1 + F_2}$$

Следствие 1: Второй закон Ньютона можно обобщить на случай действия нескольких сил

$$\boldsymbol{mW = \sum F_k}$$

Следствие 2: Необходимое и достаточное условие сохранения покоя точки есть равновесие сил, приложенных к точке

$$\boldsymbol{\sum F_k = 0} \qquad (8)$$

Таким образом, в покое остается не только изолированная точка, но и точка под действием системы сил, сумма которых равна нулю. Многоугольник сил будет замкнутым.

Необходимость условия (8) означает, что если точка находится в покое, то условие (8) выполнено. При этом среди сил должны быть неизвестные, которые следует найти из уравнения (8). Так, силы, действующие на люстру, удовлетворяют условию (8), поскольку люстра находится в покое. Из двух сил, действующих на люстру нам известна только сила тяжести люстры. Из соотношения (8) мы находим, что натяжение троса равно по модулю и противоположно по направлению силе тяжести люстры.

Достаточность означает, что если все силы заданы, то с помощью условия (8) можно проверить останется ли точка в покое. Скажем, мы знаем, что к точке приложены две силы. Составив их сумму (8), мы поймем, что равновесие возможно только при парности сил.

Следствие 3: Сила может возникнуть не только как следствия инертности тела, но и как реакция на другую силу. Так натяжение троса, на котором висит люстра, определяется только силой тяжести люстры.

Условия сохранения покоя произвольной дискретной системы. Необходимые условия равновесия внешних сил.

Рассмотрим дискретную систему n материальных точек. Система находится в покое, если все ее точки находятся в покое. Значит силы, действующие на каждую точку, находятся в равновесии.

Обозначим через F_k^e равнодействующую внешних сил, приложенных к точке с номером к, а через F_k^i- равнодействующую внутренних сил этой точки. Из аксиом вытекает, что условия

$$\boldsymbol{F_k^e + F_k^i = 0} \qquad \boldsymbol{(k = 1, 2, \dots, n)} \qquad (9)$$

обеспечивают покой системы и являются *необходимыми и достаточными условиями* равновесия сил, приложенных к произвольной дискретной механической системе.

Любая часть или комбинация условий (9) будет не достаточным, но необходимым условием покоя системы. Например, одно из условий (9) для точки с номером $\boldsymbol{k = 2}$ является необходимым и достаточным для этой точки, и только необходимым, но не достаточным для всей системы.

Свойства неизвестных внутренних сил позволяют составить *необходимые условия покоя только для внешних сил.*

Суммируя (9) по k, и учитывая, что главный вектор внутренних сил равен нулю, получаем

$$\boldsymbol{V^e = 0}$$

Векторно умножив слева (9) на радиус-вектор точки $\mathbf{r}_k$, после суммирования получим второе условие

$$\boldsymbol{M_O^e = 0}$$

Условия для внешних сил системы

$$\boldsymbol{V^e = 0}, \qquad \boldsymbol{M_O^e = 0} \qquad (10)$$

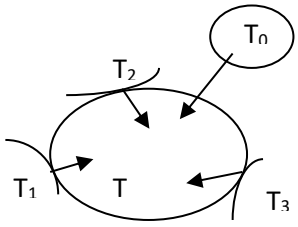
с необходимостью выполнены для любой покоящейся системы. Систему внешних сил, удовлетворяющую условиям (10), назовем ***уравновешенной системой***.

Факт неподвижности системы превращает выражения (10) в уравнения для определения неизвестных сил. Таковыми в статике чаще всего являются реакции связей.

Далее будет показано, что ***только для твердого тела*** условия (10) являются также и ***достаточными*** условиями сохранения покоя.

Нагрузка и реакции определимых связей. Прямая задача статики

Рассмотрим тело Т, находящееся в покое под действием удаленных тел, например, T_0 (дальнодействие), и неподвижных тел T_1, T_2, T_3, находящихся с ним в контакте, и называемых ***связями***.



Силы дальнодействия определяется законами физики, поэтому обычно считаются известными. Все известные силы, действующие на тело, назовем ***нагрузкой***. Неизвестные силы, с которыми связи действуют на тело, называются ***реакциями связи***. Пусть на тело наложены ***достаточные*** связи, то есть такие, которые обеспечивают его покой при произвольной нагрузке.

Прямой задачей статики является определение реакций связей по заданной нагрузке. Поскольку тело остается в покое при любой нагрузке, то с необходимостью выполнены условия равновесия внешних сил:

$$\boldsymbol{V^e = V^R + V^a = 0}; \qquad \boldsymbol{M_o^e = M_o^R + M_o^a = 0}$$

Откуда

$$\boldsymbol{V^R = -V^a}; \qquad \boldsymbol{M_o^R = -M_o^a} \qquad (11)$$

Где индексом R обозначены искомые реакции связей, а индексом а – нагрузка.

В проекциях на оси x,y,z два векторных условия (11) дают шесть алгебраических уравнений для реакций связей, которые можно представить в матричном виде

$$Ax = y$$

Здесь *A* - матрица системы, зависящая только от устройства связей, *x*- столбец искомых реакций связей, *y* – столбец заданной нагрузки.

Как известно, алгебраическая система имеет единственное решение только если матрица A - квадратная (6 х 6), т.е. уравнения имеют шесть неизвестных и определитель матрицы отличен от нуля.

$$|A| \neq 0 \qquad (12)$$

Связи с такой матрицей А назовем статически ***определимыми*** (или коротко определимыми) потому, что реакции только таких связей могут быть определены из уравнений статики.

Заметим, что условие (12) обеспечивает и тривиальность решения однородной системы

$$Ax = 0$$

при отсутствии нагрузки. Это значит, что реакции определимых связей исчезают при снятии нагрузки. Иначе говоря, если

$$\boldsymbol{V^R = 0} \qquad \boldsymbol{M_o^R = 0} \qquad)$$

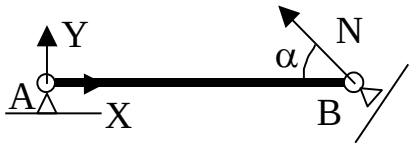
то все реакции определимых связей равны нулю.

Условие (12) означает, что в матрице А не должно быть линейно зависимых строк или столбцов. Строки независимы по ортогональности осей координат и независимости проекций на оси и моментов относительно осей. Зависимые столбцы могут появиться только в случае, если две силы реакции окажутся на одной прямой или два момента связей параллельны. Отсюда правило построения определимых связей

Ставя новую связь, нужно позаботиться о том, чтобы силы реакций не оказались на одной прямой, а их моменты параллельны.

При невыполнении условия (12), связи называются ***избыточными***. Наличие избыточных связей можно выявить двумя мысленными экспериментами: нагревая тело или немного смещая опоры. Если при этом реакции изменяются, то связи избыточны.

При числе неизвестных, равном числу уравнений, избыточность связей в одном направлении всегда сопровождается их недостаточностью в другом направлении. Так для балки на двух опорах при «правильном» числе неизвестных, равном 3, при α = 0 связи становятся избыточными вдоль балки и недостаточными в отношении поворота вокруг опоры А.



Достаточность условий равновесия внешних сил для сохранения покоя твердого тела.

Обратная задача статики

Абсолютно твердое тело — это модель тела, в которой расстояния между точками неизменны во времени. Такая модель значительно упрощает изучение покоя и движения тела. Она практически важна, поскольку деформации большинства деталей машин малы по сравнению с размерами деталей.

Теорема: Условия $\boldsymbol{V^e = 0}$; $\boldsymbol{M_o^e = 0}$ являются достаточными для сохранения покоя твердого тела.

Рассмотрим ненагруженное свободное покоящееся твердое тело. Свободное тело – это тело, движение которого не ограничено связями. Приложим к телу нагрузку $\{\boldsymbol{F}\}$, удовлетворяющую условиям

$$\boldsymbol{V\{F\} = 0}; \qquad \boldsymbol{Mo\{F\} = 0} \quad (13)$$

Докажем, что тело останется в покое.

Предположим противное, т.е. что после приложения нагрузки $\{\boldsymbol{F}\}$, тело все-таки начнет двигаться. Чтобы остановить движение, наложим на тело определимые связи. Тогда возникнут реакции связей $\{\boldsymbol{R}\}$, и покой будет обеспечен. Значит, объединенная система сил нагрузки {F} и реакций связей {R} будет уравновешенной и с необходимостью будут выполнены условия:

$$\boldsymbol{V\{F\} + V^R = 0},$$

$$\boldsymbol{Mo\{F\} + M_o^R = 0}.$$

Но ввиду (13) главный вектор и момент реакций окажутся равными нулю

$$\boldsymbol{V^R = 0}; \qquad \boldsymbol{M_o^R = 0}$$

Поскольку связи статически определимы, то отсюда вытекает, что все реакции равны нулю. Таким образом, связи не нужны, и тело остается в покое после приложения системы $\{\boldsymbol{F}\}$. Значит условия (13) являются ***достаточными*** для равновесия системы сил $\{\boldsymbol{F}\}$ и сохранения покоя твердого тела. Теорема доказана.

В случае деформируемого тела условия (13) не достаточны. Это значит, что для равновесия деформируемого тела кроме условий (13), нужно выполнить и некоторые другие.

Однако, если деформируемое тело фактически находится в покое, то уравнения (13) выполнены.

Пример: если к покоящемуся мячу приложить две силы $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F'}$, мяч не останется в покое, он начнет деформироваться, система сил не будет уравновешенной, хотя условия (13) и будут выполнены. Однако, после того как мяч примет окончательную деформированную форму (Рис. б), система этих двух сил станет уравновешенной.

Условия (13) позволяют решить ***обратную задачу статики***: проверить уравновешенность системы сил $\{\boldsymbol{F}\}$, приложенной к свободному твердому телу.

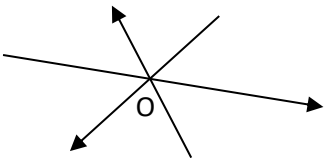
Скалярные условия равновесия частных систем сил.

а) ***Произвольная пространственная система сил***

Хотя соотношения механики имеют векторный характер, все вычисления обычно ведутся в скалярной форме. Переход к скалярной форме осуществляется проектированием векторных соотношений на оси координат. Векторные условия равновесия $\boldsymbol{V}=0$, $\boldsymbol{Mo}=0$ в проекциях на декартовы оси координат дают шесть скалярных условий:

$$\begin{aligned} V_x &= \sum F_{kx} = 0; & M_x &= \sum m_x(F_k) = 0; \\ V_y &= \sum F_{ky} = 0; & M_y &= \sum m_y(F_k) = 0; \\ V_z &= \sum F_{kz} = 0; & M_z &= \sum m_z(F_k) = 0; \end{aligned} \qquad (14)$$

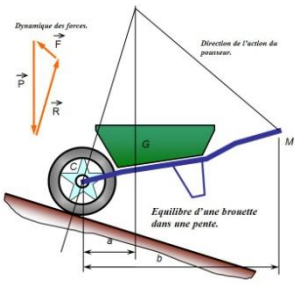
б) Пространственная система сходящихся сил.



Сходящейся называется система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке. Главный момент такой системы относительно точки пересечения сил О равен нулю $\boldsymbol{M}o=0$. Поэтому уравнения моментов в (14) тождественно удовлетворены и остается три условия в проекциях:

$$V_x = 0; \quad V_y = 0; \quad V_z = 0;$$

Теорема о 3х силах: если тело находится в покое под действием 3х сил, линии действия двух из которых пересекаются, то система сходящаяся.



Действительно, главный момент системы относительно точки пересечения двух сил равен моменту третьей силы и нулю. Значит и третья сила проходит через указанную точку.

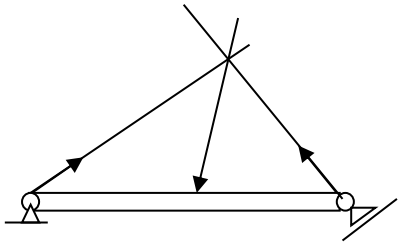
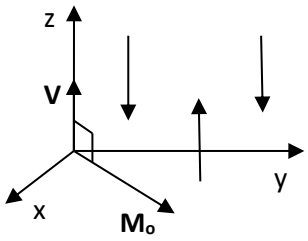


Рис.7

Теорема позволяет графически решить, например, задачу (Рис.7) и найти треугольник сил, приложенных к тачке.

в) Пространственная система параллельных сил



Направим ось z параллельно силам. Тогда главный вектор ***V*** будет параллелен z, а главный момент ***Mo***, будет принадлежать плоскости x y. То есть ***V*⊥*Mo***. Условия равенства нулю проекций на оси x, y и моментов относительно оси z тождественно удовлетворены, и остается 3 условия равновесия:

$$V_z = \sum F_{kz} = 0; \quad M_x = \sum m_x(F_k) = 0; \quad M_y = \sum m_y(F_k) = 0$$

г) Плоская система сил. В произвольной точке О плоскости сил (Рис.8) построим систему координат xOy так, чтобы плоскость xy совпала с плоскостью сил. Главный вектор системы ***V*** лежит в плоскости xOy, а главный момент ***Mo*** ей перпендикулярен. Следовательно, для равновесия

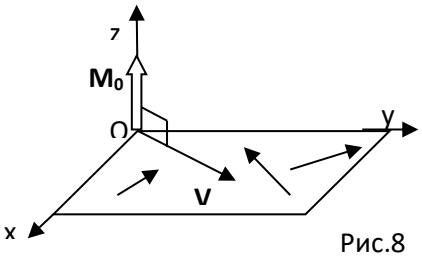


Рис.8

системы достаточно потребовать

$$V_x = 0; \quad V_y = 0; \quad M_O = 0;$$

Можно показать, что справедливы еще две формы уравнений равновесия для плоской системы сил:

II) $V_x = 0; \quad M_A = 0; \; M_B = 0$ ($AB \nparallel x$) не перпендикулярно

III) $M_A = 0; \; M_B = 0; \; M_C = 0$ (ABC- не на одной прямой)

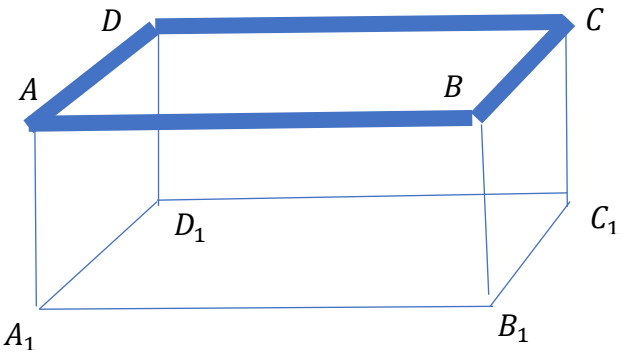
Пример постановки определимых связей в виде стержней на шарнирах

Требуется опереть прямоугольную раму по ее углам A, B, C, D на невесомые стержни с шарнирами на их концах так, чтобы связи оказались статически определимыми, то есть их реакции отсутствовали бы при отсутствии нагрузки (определитель матрицы уравнений был бы не равен нулю).

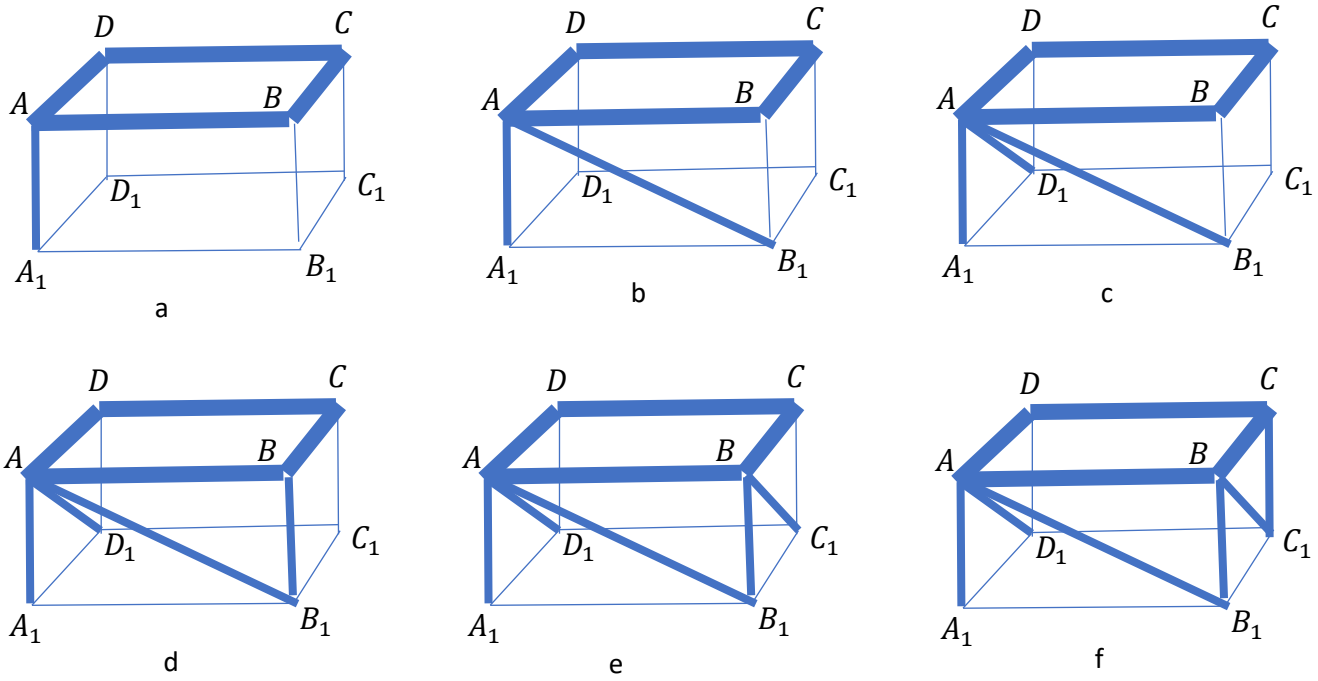
Как известно реакция такого стержня направлена вдоль стержня. Отсюда следует, что в каждом стержне возникает одна неизвестная, и стержней должно быть 6.

Ставя стержни будем постепенно лишать раму всех степеней свободы, следя за тем, чтобы каждая новая реакция не могла оказаться на одно прямой с равнодействующей уже построенных реакций связей.

Начнем с точки A. Если в ней поставить вертикальный стержень AA_1, то точка A сможет вращаться вокруг шарнира A_1 (a). Поставим в точке A второй стержень AB_1. После этого точка A все еще сможет вращаться вокруг оси A_1B_1 (b). Чтобы остановить это движение поставим в точке A третий стержень. Его реакция должна создавать момент относительно оси A_1B_1, значит не может лежать в одной плоскости с этой осью.



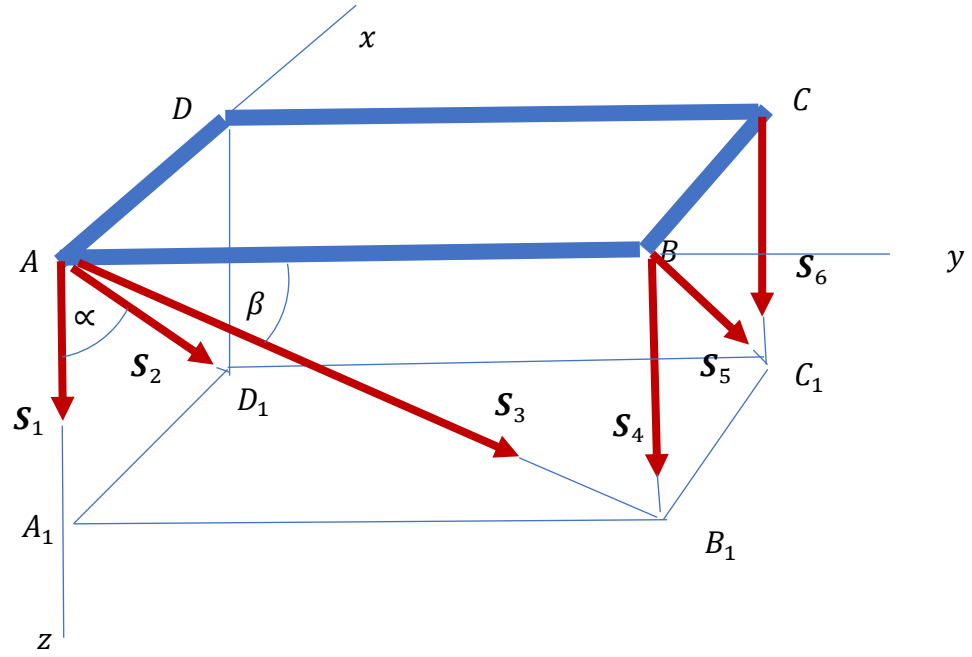
Поставим стержень AD_1 (c). Теперь точка A зафиксирована в пространстве. Осталось



поставить еще 3 стержня.

Возникает вопрос: нельзя ли их всех поставить в точке B? Ответ очевиден – нельзя. С одной стороны связи станут избыточными в направлении AB, поскольку 3 стрежня в одной точке могут создавать реакцию, произвольно направленную в пространстве, значит реакции в точках A и B смогут оказаться на одной прямой AB, что запрещено. С другой стороны связи танут недостаточными, поскольку рама сможет вращаться вокруг оси AB. В точке B поставим вертикальный стержень BB_1 (d). Его реакция не может пройти через точку A, что требуется. Теперь точка B может перемещаться в направлении BC. Чтобы остановить это движение поставим стержень BC_1 (e). Равнодействующая реакций двух стержней в точке B не может пройти через точку A, что требуется.

Теперь прямая AB зафиксирована, но рама может вращаться вокруг AB. Чтобы остановить это вращение достаточно поставить стержень CC_1 (f).



Покажем, что определитель матрицы уравнений равновесия не равен нулю. То есть что при отсутствии нагрузки реакции равны нулю, значит связи являются определимыми.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
$\sum F_{kx}$	0	$Sin \propto$	0	0	$Sin \propto$	0
$\sum F_{ky}$	0	0	$Cos\beta$	0	0	0
$\sum F_{kz}$	1	$Cos \propto$	$Sin\beta$	1	$Cos \propto$	1
$\sum m_x(F_k)$	0	0	0	AB	$ABCos \propto$	AB
$\sum m_y(F_k)$	0	0	0	0	0	$-BC$
$\sum m_z(F_k)$	0	0	0	0	$-ABSin \propto$	0

После вычитания первого столбца из четвертого и шестого, затем четвертого из шестого, находим, что определитель отличен от нуля, то есть связи определимы:

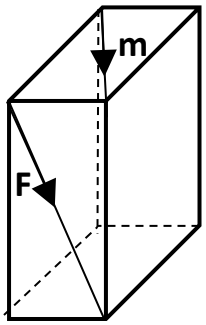
$$\Delta = 1 * \boldsymbol{Sin} \propto * \boldsymbol{Cos}\beta * AB * AB * BC * Sin \propto \neq 0$$

Пример постановки определимых связей и решения задачи на статику в пространстве векторным и матричным способами

Условия задачи

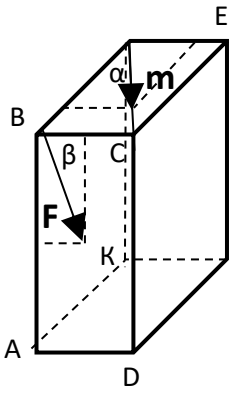
Параллелепипед нагружен силой ***F*** и моментом ***m***

.

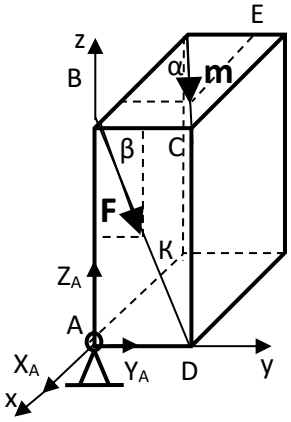


1. Доказать, что они не уравновешены.
2. Обозначить вершины, углы и оси.
3. Поставить определимые связи: сферический и цилиндрический шарниры, стержень на двух шарнирах.
4. Записать уравнения равновесия тела
   а) геометрическим и б) матричным способом.

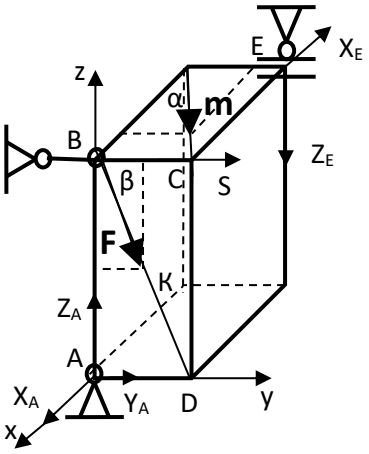
Решение.



1. Сила и момент не могут быть уравновешенными, поскольку в точке приложения силы главный вектор системы равен силе F, а главный момент - моменту m и оба не равны нулю.
2. Обозначим углы α и β и вершины A, B, E, в которых будем ставить связи. Добавим обозначения вершин C и D для обозначения размеров тела.
3. Поставим определимые связи. Начнем с сферического шарнира в вершине A. Поскольку в нем возникает наибольшее число неизвестных (3), то разумно здесь выбрать начало координат. Реакция шарнира направлена произвольно и может проходить через точки B и E остальных связей.



В точке E поставим цилиндрический шарнир. Чтобы связи остались определимыми, нужно направить его ось так, чтобы его реакция не могла пройти через вершину A. Реакция цилиндрического шарнира направлена произвольно в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Поэтому его ось не может быть перпендикулярной прямой AE. Иначе связи станут избыточными в направлении AB и недостаточными для поворота вокруг оси, перпендикулярной AE. Направим ось цилиндрического шарнира вдоль оси y.



Осталось поставить стержень на шарнирах в вершине B. Его нельзя направить в плоскости ABE. Иначе он будет избыточным в своем направлении и не удержит тело от поворота вокруг AE. Направим стержень вдоль оси y.

Решение

а) ***Геометрический способ***

Уравнения проекций не вызывают затруднений

$$\mathrm{V_x}: \; X_A - X_E = 0$$
$$\mathrm{V_y}: \; Y_A + S + F\,Cos\beta = 0$$
$$\mathrm{V_z}: \; Z_A - Z_E - F\,Sin\beta = 0$$

При вычислении моментов сил пользуемся простым алгоритмом.

- Сначала интересуемся, не равен ли момент силы нулю (сила параллельна или пересекает ось). Например, F пересекает ось y.
- Если ответ отрицательный, то смотрим, не перпендикулярна ли сила оси. Тогда момент ищется по формуле, например

$$m_x(F) = \pm F_y h_z$$

Знак лучше выбирать, представив, куда движется винт под действием силы. Если винт движется по оси, то плюс, иначе минус. Для поиска плеча пользуемся правилом трех индексов. h_z должно быть перпендикулярно и F_y и x.

- Если сила направлена по отношению к оси произвольно, то следует разложить ее на составляющие вдоль осей. Для составляющих пользуемся вторым случаем.

$$M_x:\ m\,Cos\alpha\ - F\,Cos\beta\,AB - S\,AB - Z_E\,BC = 0$$
$$M_y:\ m\,Sin\alpha - X_E\,CD - Z_E\,CE = 0 \qquad (15)$$
$$M_z:\ X_E\ BC = 0$$

б) Матричный способ

Уравнения равновесия в матричной форме

$$R_A + R_B + R_E + F = 0$$
$$AR_A + BR_B + ER_E + BF + M = 0 \qquad (16)$$

Столбцы проекций сил и моментов:

$$R_A = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix},\quad R_B = \begin{pmatrix} 0 \\ S \\ 0 \end{pmatrix},\quad R_E = \begin{pmatrix} -X_E \\ 0 \\ -Z_E \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ FCos\beta \\ -FSin\beta \end{pmatrix},\quad M = \begin{pmatrix} mCos\alpha \\ mSin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Присоединенные матрицы координат точек приложения сил

$$A = 0,\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -AB & 0 \\ AB & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad E = \begin{pmatrix} 0 & -AB & AD \\ AB & 0 & -CE \\ -AD & CE & 0 \end{pmatrix}$$

Подставив матрицы в выражения (16), придем к уравнениям (15)

Интерактивные excel задания по определению реакций опор плоской системы двух тел

На каждом шаге решения неправильно заполненная ячейка окрашивается в розовый цвет, что позволяет студенту самостоятельно найти ошибку.

Задания выполняются студентом до подтверждения правильности решения путем подстановки найденного решения в уравнения равновесия всей системы. Поэтому оценивается не правильность решения, а срок выполнения задания.

Задания и пример его решения можно скачать по ссылке
https://disk.yandex.ru/d/CjdfFXuXTHvPnw

Пример выполнения задания о системе двух тел

Механическая система состоит из 2-х балок BC и AC, соединённых между собой цилиндрическим шарниром C. В точке A балка CA закрепляется в вертикальной стенке с помощью жёсткой заделки, в точке B – с помощью невесомого стержня BD. Система нагружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью q, парой сил с моментом M и силой P1.

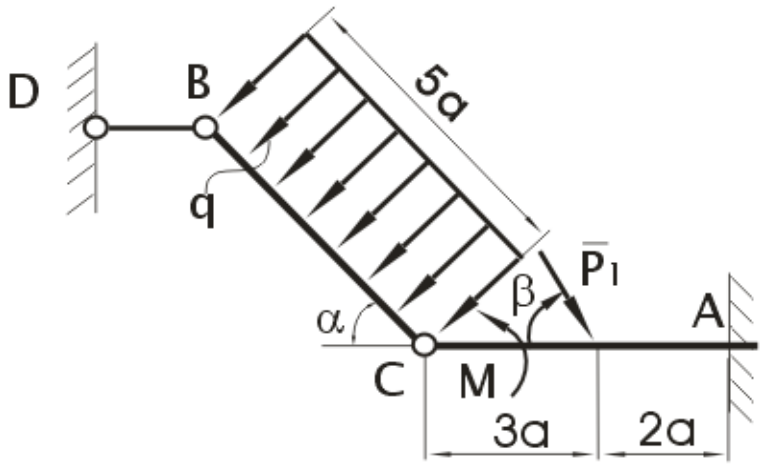
Определить реакции в точках A, B, C. Весом балок и трением в шарнирах пренебречь.

Дано:

a	α	β	q	P1	M
м	град	град	н/м	н	нм
1,2	60	30	4,8	1,5	1

Составить уравнения

BC			CA			ABC		
V_x=0	V_y=0	M_c=0	V_x=0	V_y=0	M_c=0	V_x=0	V_y=0	M_c=0



Расчётные схемы и уравнения равновесия

Рассмотрим равновесие каждого из тел системы.

Балка BC (рис. 9)

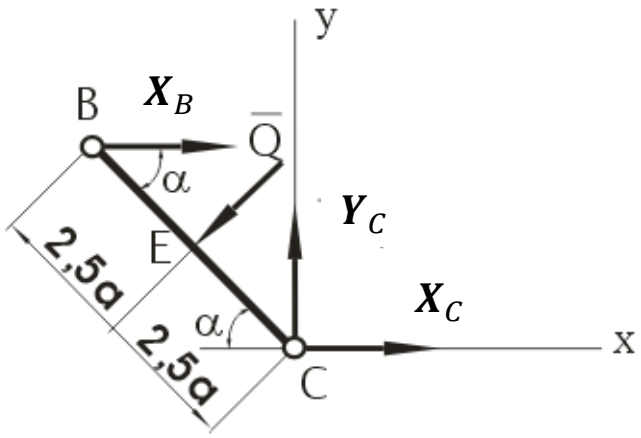


Рис. 9

На балку действуют:

- равнодействующая Q равномерно распределённой нагрузки в очке E;
- модуль силы равен $Q = 5q \cdot a = 5 \cdot 4{,}8 \cdot 1{,}2 = 28{,}80$; (Н)

Реакцию невесомого стержня XB и составляющие XC, YC реакции цилиндрического шарнира направим положительно.

Поскольку балка BC находится в покое, то выполняются следующие условия:

1) $V_X = X_B + X_C - Q \cdot \sin\alpha = 0,$
2) $V_Y = Y_C - Q \cdot \cos\alpha = 0,$
3) $M_C = Q \cdot 2{,}5a - X_B \cdot 5a \cdot \sin\alpha = 0.$

Балка CA (рис. 10)

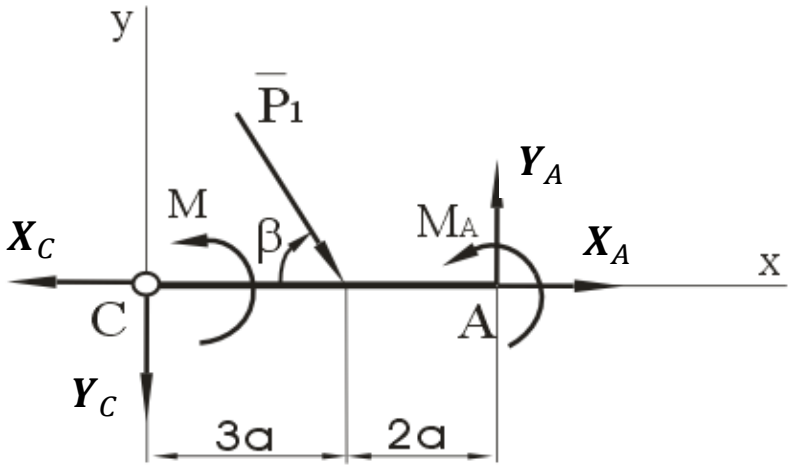


Рис. 10

На балку действуют:

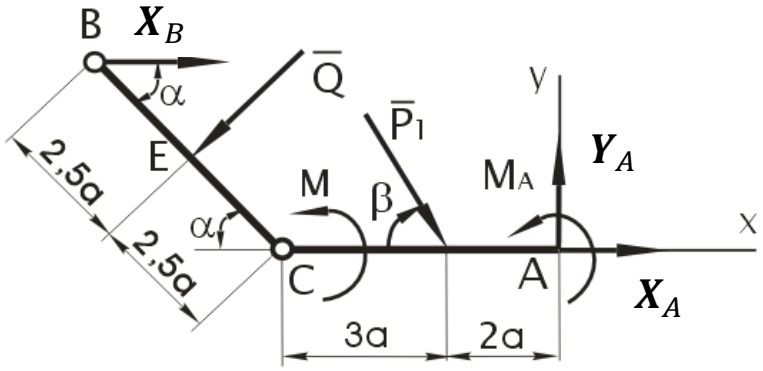
- сила P1 и момент M;
- в точке A – реакции XA, YA и момент MA жёсткой заделки направим положительно.
  в точке C – реакции XC, YC цилиндрического шарнира, согласно третьему закону Ньютона, направим противоположно соответствующим реакциям балки BC.

Поскольку балка BC находится в покое, то выполняются следующие условия:

4) $V_X = X_A - X_C + P_1 \cdot \cos\beta = 0,$
5) $V_Y = Y_A - Y_C - P_1 \cdot \sin\beta = 0,$
6) $M_C = M + M_A - (P_1 \cdot \sin\beta) \cdot 3a + Y_A \cdot 5a = 0.$

Проверка

Для проверки полученных результатов необходимо составить уравнения равновесия всей системы и подставить туда решения. Если суммы обратятся в ноль, то решение верно.



7) $V_X = X_B - Q \cdot \sin\alpha + X_A + P_1 \cdot \cos\beta = 0?$
8) $V_Y = Y_A - Q \cdot \cos\alpha - P_1 \cdot \sin\beta = 0?$
9) $M_C = Q \cdot 2{,}5a - X_B \cdot 5a \cdot \sin\alpha + M + M_A - (P_1 \cdot \sin\beta) \cdot 3a + Y_A \cdot 5a = 0?$

Интерактивные excel задачи на статику в пространстве

Задачи предназначены для самостоятельной подготовки к контрольной работе и для проведения контрольных работ в классе на индивидуальных компьютерах студентов.

В режиме подготовки студенту сообщается код для проверки решения. Если студент ввел код до начала решения, то он видит совершаемые ошибки на каждом шаге решения, и пытается их исправить.

В режиме самоконтроля студент вводит код после окончания решения, и видит все свои ошибки и итоговую оценку, которая позволяет ему понять готов ли он к написанию контрольной.

При проведении контрольной работы в классе, код знает только преподаватель, который посылает студентам случайные задачи. Студент возвращает преподавателю решение, в которое преподаватель при студенте вводит секретный код. Студент видит свои ошибки и итоговую оценку.

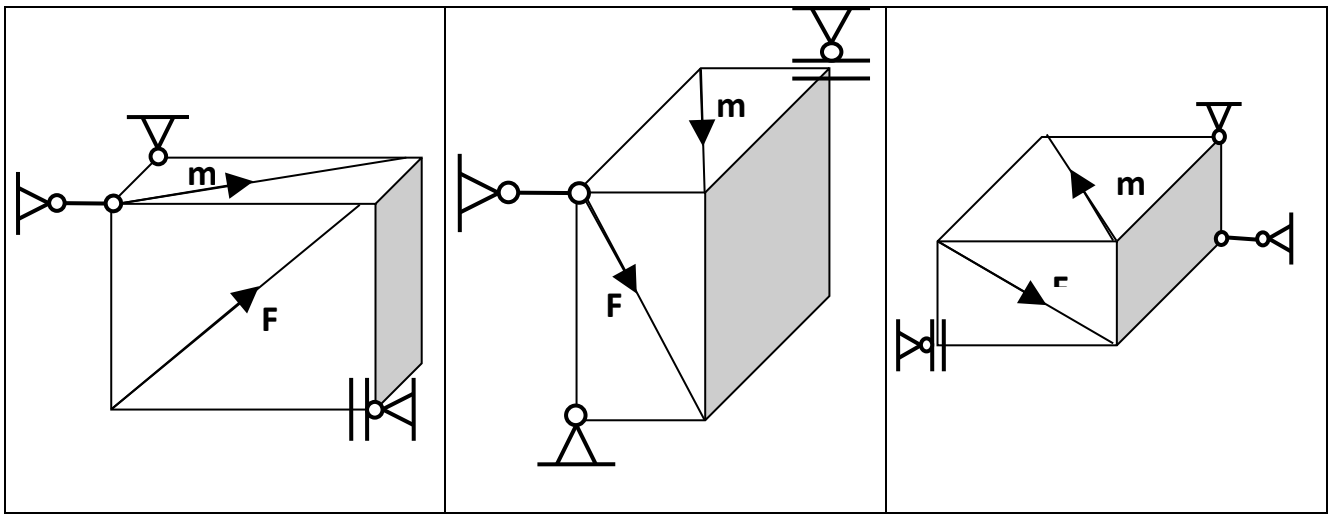
Скан экрана преподаватель посылает студенту для работы над ошибками. Студент дома записывает правильные уравнения, которые сдает преподавателю перед переписыванием контрольной.

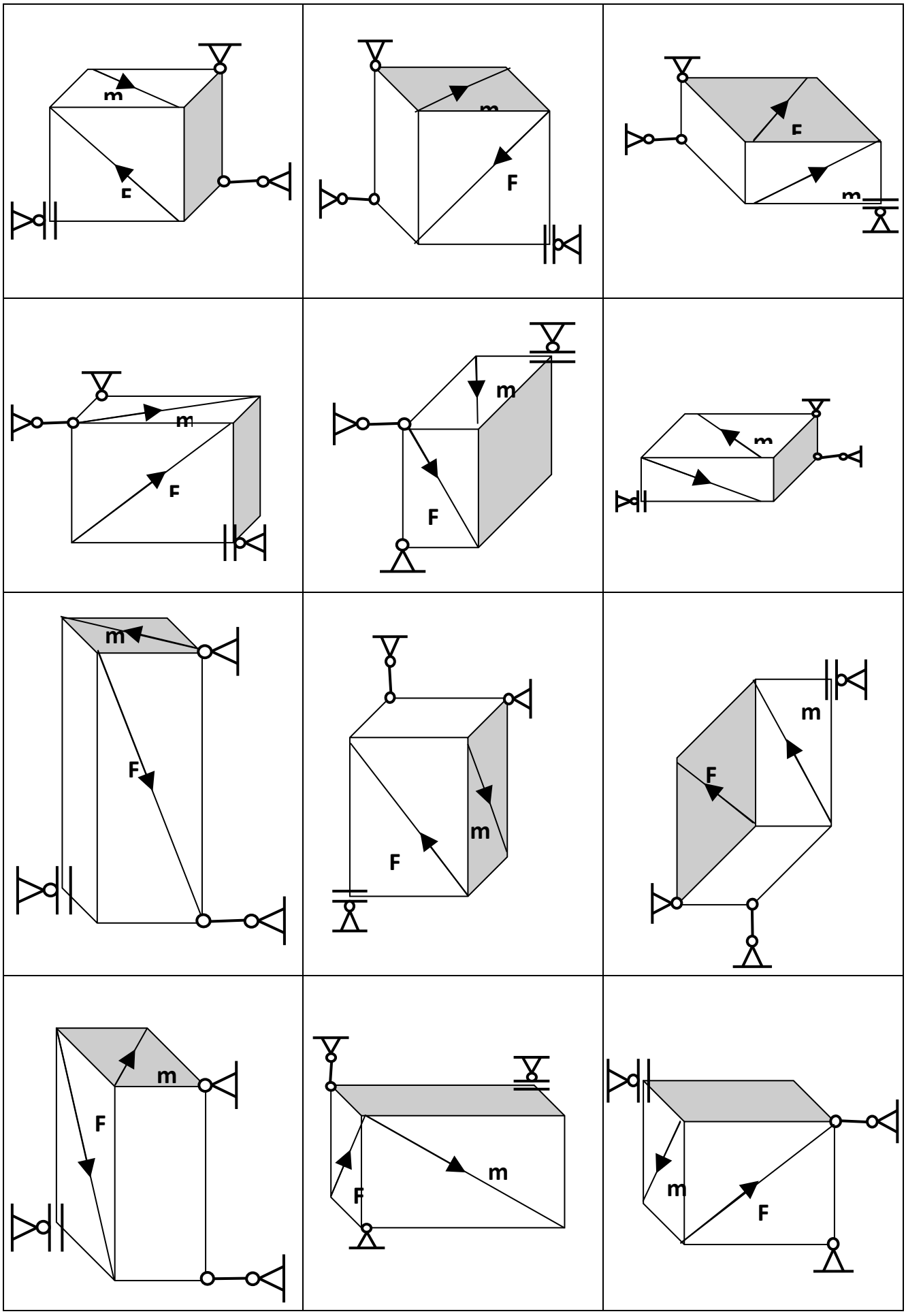
Задачи и видео примера решения можно скачать по ссылке
https://disk.yandex.ru/d/1BEvxfJJMTK-IA

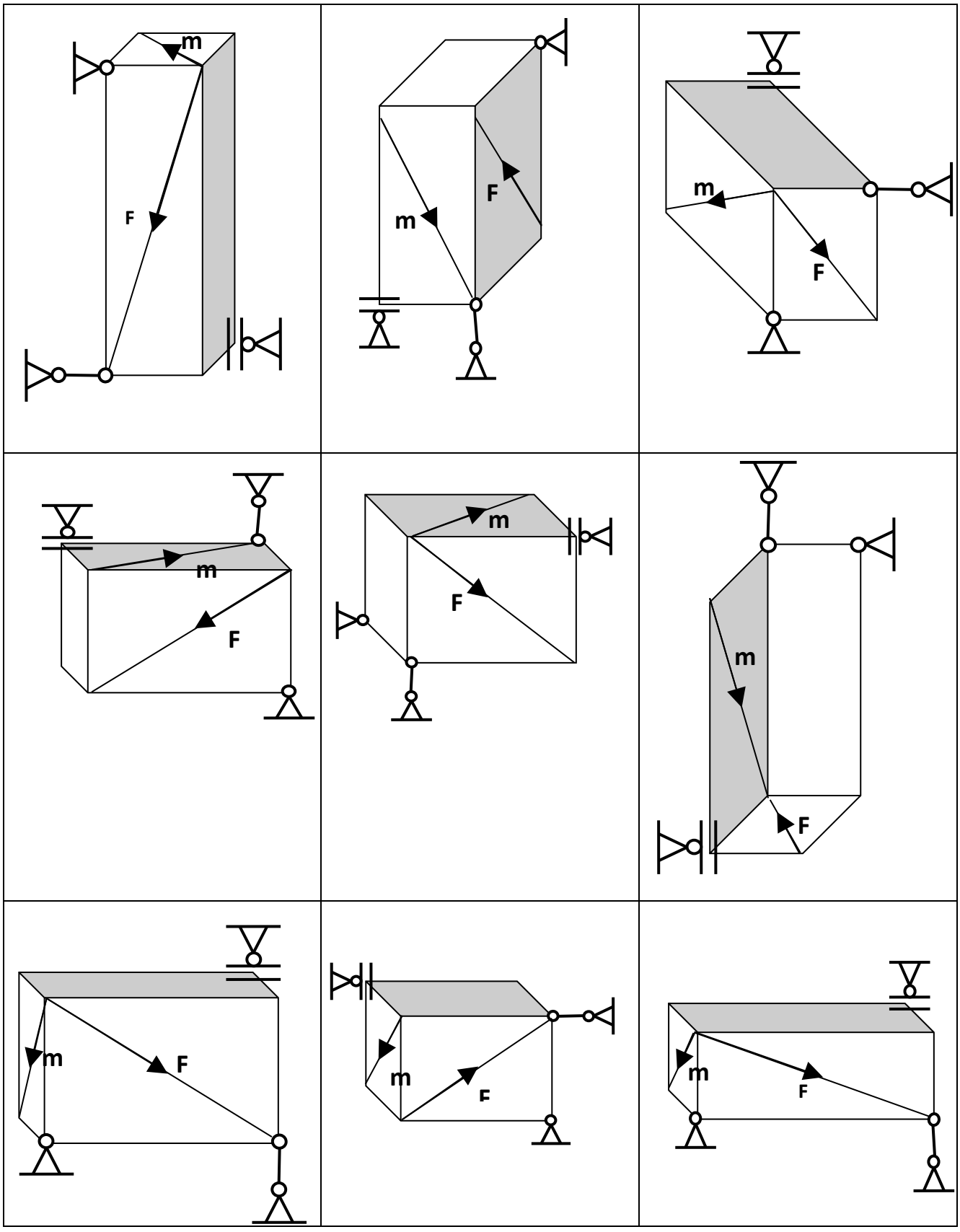
Комплект равносложных задач по статике в пространстве

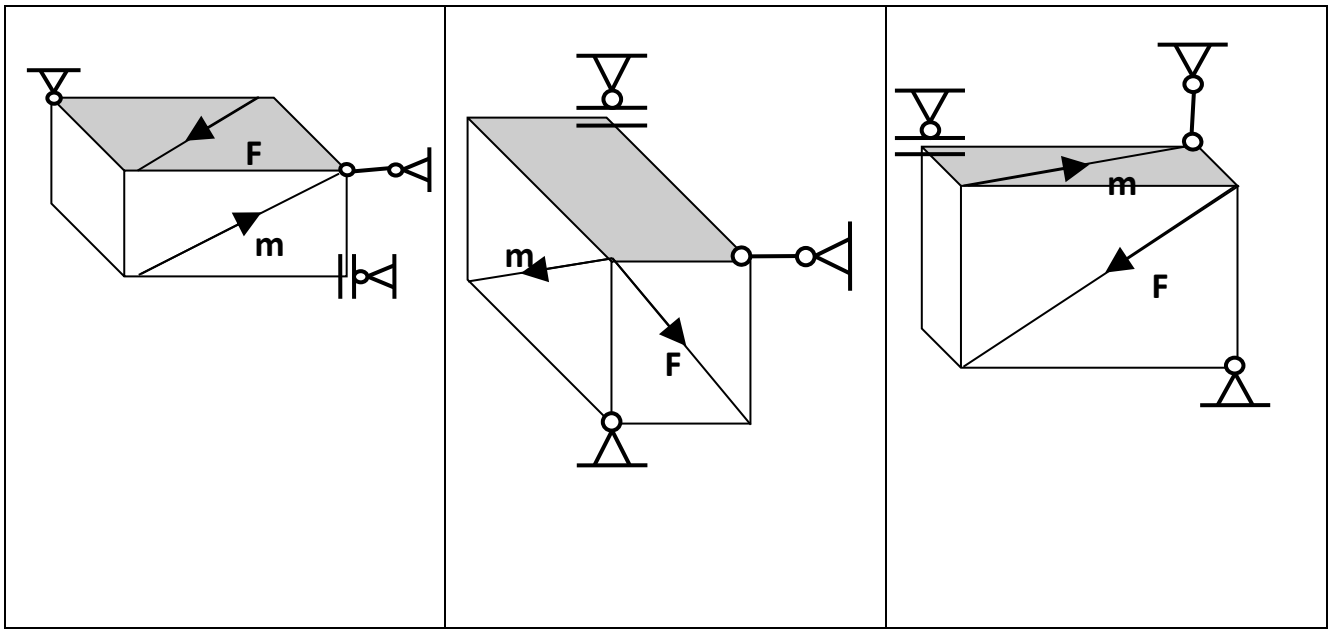
На прямоугольный параллелепипед действует сила ***F*** и момент ***m***.
Обозначьте вершины и углы. Изобразите оси координат. Запишите уравнения равновесия. Укажите направления оси цилиндрического шарнира и стержня, при которых связи станут избыточными в одном направлении, и недостаточными в другом.

1. Чему равен главный вектор реакций и их главный момент относительно точки приложения силы?
2. Имеют ли реакции равнодействующую?




m
F
m
F
F
m
m
F
m
F
m
m
F
m
F
m
F
m
F
m
m
F


m
F
m
F
m
F
m
F
m
F
m
F
m
F
m
F
m
F



Вопросы коллоквиума по статике

Момент силы относительно точки. Аксиальные векторы. Теорема о зависимости и теорема о проекциях моментов.
Матричное вычисление векторного произведения.

Момент силы относительно оси. Вычисление. Обращение в ноль.
Алгебраический момент силы относительно центра для плоской системы сил.

Главный вектор и главный момент системы относительно центра.
Зависимость главного момента от центра.
Вращательная система сил. Пара сил.

Четыре принципа (аксиомы) механики. Следствия.
Условия сохранения покоя точки.

Условия сохранения покоя произвольной дискретной системы.
Необходимые условия равновесия внешних сил произвольной системы.

Нагрузка и реакции связи. Прямая и обратная задачи статики.
Статически определимые связи. Условия определимости для матрицы системы.
Правило построения определимых связей

Доказательство достаточности условий равновесия внешних сил
для сохранения покоя твердого тела. Обратная задача статики.

Скалярные условия равновесия частных систем сил.
Прямая и обратная задача статики.

Теорема о статической эквивалентности 2х нагрузок.
Эквивалентные преобразования силы и пары сил в твердом теле

Теорема Пуансо. Условия существования равнодействующей. Теорема Вариньона Приведение реакций связей к силе и моменту.

Эквивалентные преобразования сил, приложенных к твердому телу

Теорема о статической эквивалентности нагрузок. Эквивалентные преобразования силы и пары.

Как известно, силы, приложенные к одной точке, можно заменять одной ***равнодействующей*** силой, равной сумме сил.

$$\boldsymbol{R}\sim\{\boldsymbol{F}\} \qquad\qquad \boldsymbol{R}=\sum \boldsymbol{F_k}$$

Для произвольной механической системы возможны только точечные преобразования сил- их замена равнодействующей в точке.

Для твердого тела класс преобразований гораздо шире. Мы показали, что тело останется в покое под действием любой уравновешенной системы сил. Таким образом, все уравновешенные системы ***статически эквивалентны*** между собой и эквивалентны нулю (пустой системе).

В статике в основном изучаются тела, зафиксированные достаточными связями (опорами). Поскольку тела покоятся под действием любой нагрузки, то всегда выполняются условия равновесия.

$$\boldsymbol{V^R}+\boldsymbol{V^a}=\mathbf{0}; \qquad\qquad \boldsymbol{M_o^R}+\boldsymbol{M_o^a}=\mathbf{0}$$

Это значит, что при изменении нагрузки изменяются реакции связей. При этом полная система сил остается уравновешенной, претерпевая ***эквивалентные преобразования***.

Например, при движении автомобиля по мосту нагрузка (вес автомобиля) перемещается, и изменяются реакции опор. При этом полная система трех сил, приложенных к мосту, остается уравновешенной и претерпевает эквивалентное преобразование.

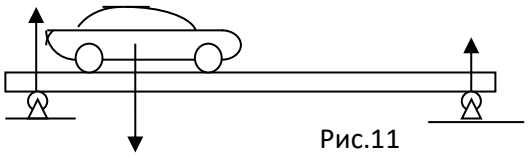


Рис.11

Нагрузки {**F**} и {**Q**} зафиксированного тела назовем ***статически эквивалентными***, если они вызывают одинаковые реакции связей.

$$\{\boldsymbol{F}\}\sim\{\boldsymbol{Q}\} \text{ если } \{\boldsymbol{R}\}_F=\{\boldsymbol{R}\}_Q$$

Замена {**F**} на {**Q**} называется ***статически эквивалентным преобразованием*** нагрузки {**F**}.

При движении автомобиля (Рис.1) (параллельном переносе силы тяжести) реакции моста изменяются, значит, ***параллельный перенос силы не является статически эквивалентным преобразованием силы.***

Теорема о статической эквивалентности двух систем сил.

Реакции статически определимых связей однозначно определяются из уравнений равновесия.

Поскольку в правых частях этих уравнения стоят проекции главного вектора и главного момента нагрузки, то очевидна справедливость ***теоремы об эквивалентности нагрузок :***

Необходимым и достаточным условием статической эквивалентности нагрузок {F} и {Q} является равенство их главных векторов и главных моментов.

$$\{\boldsymbol{F}\}\sim\{\boldsymbol{Q}\} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{V}\{\boldsymbol{F}\}=\boldsymbol{V}\{\boldsymbol{Q}\};\ \ \boldsymbol{M_o}\{\boldsymbol{F}\}=\boldsymbol{M_o}\{\boldsymbol{Q}\}$$

Эквивалентные преобразования силы и пары сил в твердом теле.

Сила.

По теореме об эквивалентности две эквивалентные силы должны быть векторно равны и давать одинаковый момент относительно произвольного центра. Очевидно, что для этого они должны иметь общую линию действия. ***Таким образом, силу в теле можно переносить только вдоль ее линии действия.*** Пример (Рис.11) показывает, что параллельный перенос силы изменяет реакции, значит, не является эквивалентным.

Пара сил

Главный вектор пары равен нулю, поэтому ее главный момент не зависит от центра. Таким образом, эквивалентны все пары с векторно-одинаковыми моментами. Значит, реакции связей не изменятся, если пару преобразовать, ***не изменяя вектора ее момента.*** Таким образом, можно:

1. изменять силу и плечо пары, не изменяя их произведения;
2. поворачивать пару в ее плоскости и
3. переносить пару в параллельную плоскость.

Условия существования равнодействующей. Теорема Вариньона

Если существует одна сила **R**, эквивалентная системе сил **{F}**, то **R** называется ***равнодействующей*** системы **{F}**.

$$\boldsymbol{R}\sim\{\boldsymbol{F}\}.$$

Было показано, что силы, приложенные к точке, всегда имеют равнодействующую. Для твердого тела это не так.

Предположим, что система **{F}**, приложенная к твердому телу, имеет равнодействующую **R**. Тогда по теореме об эквивалентности она должна быть равна главному вектору системы

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{V}\{\boldsymbol{F}\}.$$

Поэтому первым условием существования равнодействующей является существование главного вектора системы:

$$\boldsymbol{V}\neq\boldsymbol{0}.$$

Отсюда ясно, что пара не имеет равнодействующей.

Кроме того, по теореме об эквивалентности:

Момент равнодействующей относительно произвольной точки

равен главному моменту системы сил относительно той же точки.

Это свойство равнодействующей называется ***теоремой Вариньона.***

Найдем из теоремы Вариньона второе условие существования равнодействующей. Поскольку момент равнодействующей (а значит и главный момент системы) перпендикулярен самой равнодействующей (главному вектору) то вторым условием существования равнодействующей будет перпендикулярность главного момента $\mathbf{M_o}$ главному вектору **V** системы .

$$\boldsymbol{M_o} \perp \boldsymbol{V}$$

Итак, построив в точке О главный вектор и главный момент, можно утверждать, что система сил имеет равнодействующую, если

$$\boldsymbol{V} \neq \mathbf{0}; \qquad \boldsymbol{M_o} \cdot \boldsymbol{V} = \mathbf{0} \qquad (M_x V_x + M_y V_y + M_z V_z = 0)$$

Отметим, что равнодействующая имеет практический смысл, когда она реализуема, то есть ее можно приложить к телу. Это так, если линия действия равнодействующей как минимум пересекает тело. Равнодействующую, например, сил тяжести бублика, расположенного в горизонтальной плоскости, легко нарисовать, но трудно приложить к бублику.

Как было показано, главный момент плоской системы сил, как и системы параллельных сил перпендикулярен главному вектору. Значит, такие системы имеют равнодействующую, если $\mathbf{V \neq 0}$. Пара сил не имеет равнодействующей. Однако минимальное изменение одной из сил пары приведет к малой по величине и нереализуемой равнодействующей, поскольку она будет удалена от тела.

Очевидной и реализуемой равнодействующей системы реакций связей (даже избыточных) для тела, нагруженного одной силой **F,** является сила **-F** на той же линии.

Теорема Пуансо.

Произвольная система сил {F}, приложенных к твердому телу, эквивалентна «винту» {Po;m}, состоящему из:

одной силы $\boldsymbol{P_o = V\{F\}}$***, приложенной в произвольной точке О тела,***

и пары {Q, Q'} с моментом $\boldsymbol{m = M_o\{F\}}$

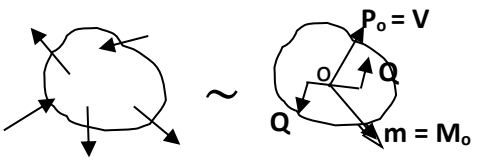


Рис.2

$$\{\boldsymbol{F}\} \sim (\boldsymbol{P_o}; \boldsymbol{m})$$

$$\boldsymbol{P_o = V\{F\}}; \quad \boldsymbol{m = M_o\{F\}}$$

Для доказательства теоремы вычислим главный вектор и главный момент «винта»:

$$\boldsymbol{V\{P_o; Q, Q'\} = P_o + Q + Q' = P_o = V\{F\}} \qquad \boldsymbol{(Q + Q' = 0)}$$

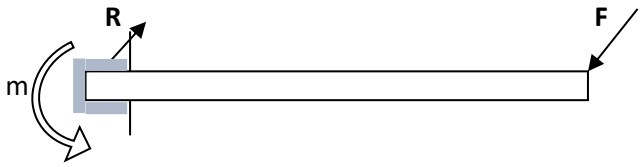
$$\boldsymbol{M_o\{P_o; Q, Q'\} = m_o(P_o) + m = m = M_o\{F\}} \qquad \boldsymbol{(m_o(Po) = 0)}$$

Видим, что они соответственно равны главному вектору и главному моменту исходной системы $\{\mathbf{F}\}$, значит, теорема доказана. Операция эквивалентного преобразования системы сил к силе и паре называется ***приведением системы сил к точке*** (приложения силы).

Теорема Пуансо справедлива только для твердого тела. Перемещая, например, силу вдоль вертикально подвешенной резинки, мы не меняем реакцию в точке закрепления, но изменяем длину самой резинки. Чем ниже сила, тем длиннее станет резинка.

Приведенные контактные реакции.

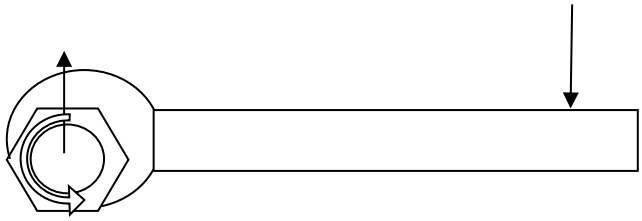
Реальные тела контактируют по некоторой, чаще небольшой, поверхности. Например, если конец стержня забетонировать в стене, то получим связь, называемую «глухая заделка»



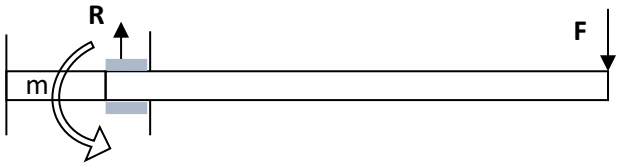
Аналогичные реакции возникают в гаечном ключе (Рис.4).

Силы контактных реакций распределены неизвестным образом по закрашенной поверхности. Найти их распределение невозможно без учета деформаций тела.

Уравнения статики, позволяют найти не распределение реакций, а их статические характеристики: силу R и момент m винта, к которому по теореме Пуансо можно привести реакции в некоторой точке поверхности контакта.



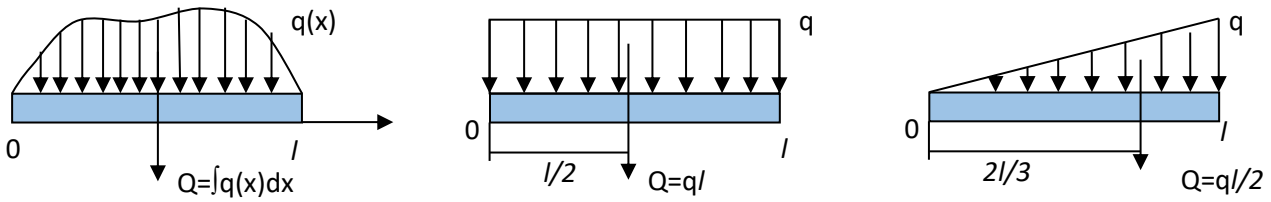
Очевидно, что «глухая заделка» достаточна для фиксации тела. Любая добавочная связь будет избыточной.



Другие, более «слабые» связи, можно получить из «глухой заделки» , снимая ограничения на перемещения или поворот в определенном направлении. При этом исчезает соответствующая составляющая силы или момента реакции.

Если, например, отверстие в стене сделать сквозным, то стержень получит возможность горизонтального перемещения, и горизонтальная составляющая реакции исчезнет. Получим связь, называемую «скользящей заделкой».

Распределенная нагрузка тоже может быть по теореме Пуансо приведена к силе и моменту. Если нагрузка q(x) односторонняя, то у нее есть равнодействующая, равная площади «эпюры», и приложенная в «центре тяжести» эпюры. На Рис. приведены примеры равномерной и треугольной нагрузок.



Предельные состояния равновесия

Существуют связи, реакции которых на тело ограничены по модулю. К ним относятся связи с трением. В рамках статики нас будут интересовать предельные состояния покоя тела, когда реакция связи достигает предельного значения и тело вот-вот начнет двигаться**.**

Внешнее трение.

Закон Кулона.

Внешним назовем трение между поверхностями тела связи и изучаемого тела при опирании. Трение является сложным физическим явлением, которое имеет как вредные, так и полезные свойства. Трению посвящена наука трибология. В инженерных расчетах обычно пользуются установленными опытным путем моделями, которые с некоторой степенью точности отражают физическое явление.

Рассмотрим тело, покоящееся на горизонтальной шероховатой плоскости (рис.12). На него действут сила тяжести $\boldsymbol{P}$ и нормальная реакция $\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{P}$. Если к телу приложить небольшую горизонтальную силу $\boldsymbol{F}$ тело останется в покое. Это значит, что сила $\boldsymbol{F}$ вызывает противодействие: горизонтальную составляющую реакции плоскости $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$, называемую силой трения.

Пока тело остается в покое, выполняются условия равновесия

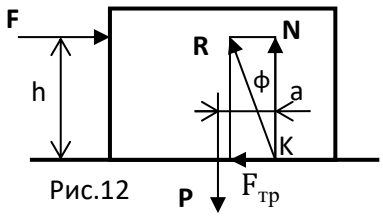


Рис.12

$$V_x:\ F + \mathrm{F}_{\text{трх}} = 0; \quad \mathrm{F}_{\text{трх}} = -\mathrm{F}$$
$$V_y:\ N - \mathrm{P} = 0; \quad N = \mathrm{P} \qquad (17)$$
$$M_k = Pa - Fh = 0 \quad a = Fh/P$$

Из первого соотношения (17) видим, что в состоянии покоя сила трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$направлена противоположно активной силе $\boldsymbol{F}$ и равна ей по модулю.

Последнее соотношение (17) показывает, что сила $\boldsymbol{F}$ вызывает смещение точки К приложения реакции R в сторону действия силы $\boldsymbol{F}$. Таким образом, в покое на тело действуют две пары $\{\mathbf{F, F_{тр}}\}$ и $\{\mathbf{P, N}\}$ с моментами, равными по модулю и противоположными по направлению (рис.12).

С другой стороны, тело находится в равновесии под действием трех сил: $\boldsymbol{F, R, P}$. Значит, по теореме о трех силах, они всегда пересекаются в одной точке (рис.13).

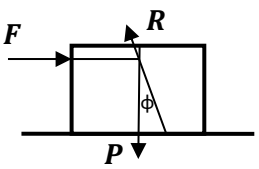


Рис13

При увеличении движущей силы $\boldsymbol{F}$ увеличивается и сила трения. При некотором значении движущей силы **F** равновесие нарушается, и тело начинает скользить по поверхности. Это значит, что в предельном состоянии равновесия модуль силы трения достигает предельного значения $\mathrm{F}^*_{\text{тр}}$.

Угол трения.

Опыт показывает, что, в первом приближении, предельный модуль силы трения $F^*_{тр}$связан только с модулем нормальной реакции N ***законом Кулона***

$$F^*_{тр} = fN$$

Таким образом, модуль силы трения может изменяться в пределах

$$0 < F_{тр} < F^*_{тр} = fN$$

Полная реакция поверхности

$$R = N + F_{тр}$$

отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол φ . На рис.13 видно, что

$$tg\varphi = \frac{F_{тр}}{N}$$

При $F_{тр} = F^*_{тр}$ угол φ принимает максимальное значение $\propto$, называемое углом ***трения***

$$tg \propto = \frac{F^*_{тр}}{N} = f$$

Тангенс угла трения $\propto$ равен ***коэффициенту*** трения f.

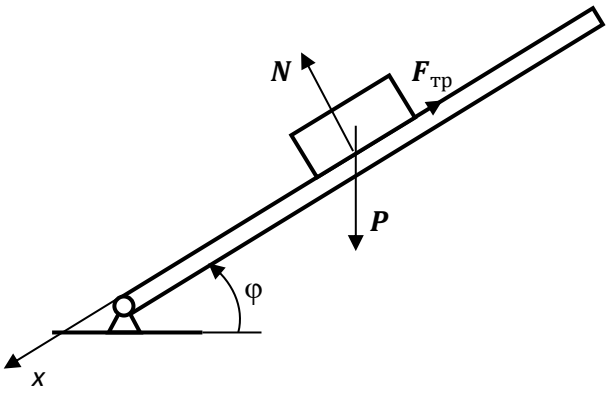
В покое угол φ находится в пределах

$$0 \le \varphi \le \propto$$

Коэффициент трения f — безразмерная величина, зависящая от материалов и состояния поверхностей соприкасающихся тел (шероховатость, температура, влажность и т. п.). Коэффициент трения f определяют опытным путем. Он в довольно широких пределах не зависит от площади соприкасающихся поверхностей.

В справочниках приводятся следующие значения коэффициентов трения для пар трения: дерево по дереву 0,4-0,7; металл по металлу 0,15-0,25; сталь по льду 0,027.

Рассмотрим простой опыт, позволяющий практически измерить угол трения. Положим тело на поворотный стол. Будем увеличивать угол φ наклона стола до значения φ_{max}, при котором тело начнет скользить вниз. Покажем, что φ_{max} и есть угол трения.



Проецируя все силы, которые действуют на тело, на ось *x*, получим

$$P Sin\varphi_{max} - fP Cos\varphi_{max} = 0$$

Отсюда

$$tg\varphi_{max} = f = tg \propto; \quad \varphi_{max} \equiv \propto$$

Конус трения. Самоторможение.

Рассмотрим невесомое тело на горизонтальной шероховатой плоскости с коэффициентом трения f. (рис.14). Построим конус с вертикальной осью и углом при вершине, равным двум углам трения $\propto$, и назовем его ***конусом трения.***

Покажем, что никакая сила Q, приложенная к телу внутри конуса трения $\varphi < \propto$, не сдвинет тело. Сдвигающая сила всегда меньше силы трения

$$F = Q Sin\varphi < Q Sin \propto = Qtg \propto Cos \propto < QfCos\varphi = Nf = F^*_{тр}$$

или

$$F < F^*_{тр}$$

при любом значении силы Q.

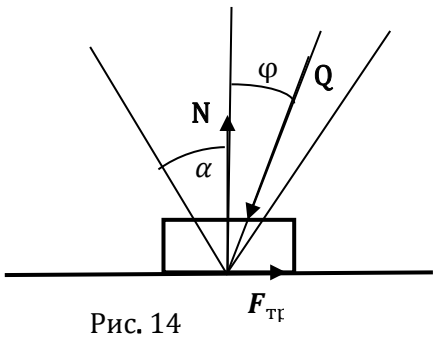
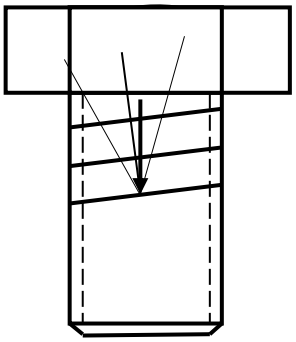


Рис. 14



Это означает, что, если сила приложена внутри конуса трения, то тело остается в покое. Это свойство называется ***явлением самоторможения.*** Оно является одним из многих полезных свойств трения. Без трения мы не смогли бы ходить, автомобили не смогли бы двигаться. Когда мы вбегаем на ледяную горку, то интуитивно стараемся отталкиваться ото льда под углом, меньшим угла трения.

Все винты имеют угол наклона резьбы меньше угла трения винта о гайку, что предотвращает отвинчивание при вибрации. Винты с мелкой резьбой имеют минимальный угол наклона резьбы, и обладают максимальным самоторможением.

Трение нити о цилиндрическую поверхность (задача Эйлера)

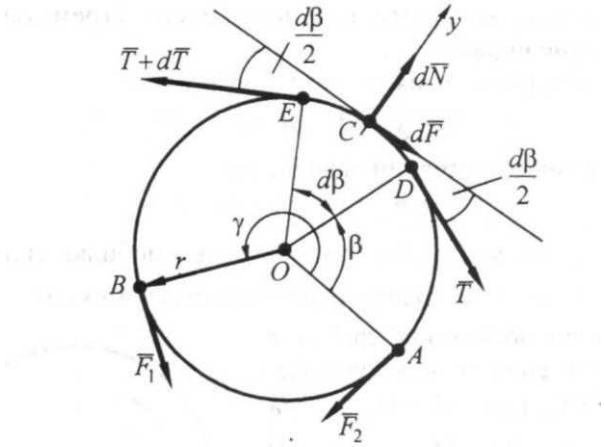


Рис.15

Пусть круглый столб обмотан канатом, к одному концу которого приложена сила $\boldsymbol{F}_1$ (рис.15). Определим наименьшую силу $\boldsymbol{F}_2$, которую надо приложить к другому концу нити, чтобы уравновесить силу F_1, если угол охвата каната γ, а коэффициент трения каната о столб f.

Рассмотрим равновесие элементарного участка нити DE длиной $ds = rd\beta$, где r — радиус столба. В точках D и E натяжение каната будет соответственно $\boldsymbol{T}$ и $(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{dT})$. На нить действуют также силы нормального давления столба $\boldsymbol{dN}$ и сила трения $\boldsymbol{dF}$, приложенные в точке C.

Сумма проекций всех сил на касательную к сечению столба в точке C равна нулю.

$$dT = dF$$

Наименьшее значение силы F_2 будет соответствовать предельному случаю равновесия, при выполнении закона Кулона $dT = fdN$.

Проецируя все силы на *y*, находим

$$dN = (T + T + dT)sin\frac{d\beta}{2} = 2T\frac{d\beta}{2} = Td\beta$$

Теперь*:*

$$\mathrm{dT} = \mathrm{fdN} = \mathrm{f}Td\beta$$

Разделим переменные и проинтегрируем полученное уравнение в пределах от $\boldsymbol{F_2}$ до $\boldsymbol{F}_1$ и от 0 до γ:

$$\int_{F_2}^{F_1}\frac{dT}{T} = f\int_0^{\gamma}d\beta$$

Отсюда находим

$$ln\frac{F_1}{F_2} = f\gamma$$

или

$$F_2 = F_1e^{-f\gamma}$$

При $f = 0$, как и следовало ожидать, $F_2 = F_1$**.** Увеличивая угол охвата γ, можно значительно уменьшить силу $\boldsymbol{F_2}$**.** Например, при $f = 0{,}5$ и $\gamma = 4\pi$ $\mathrm{F}_2 = 0{,}002\mathrm{F}_1$.

Рассмотренное свойство значительного снижения натяжения конца каната, намотанного на столб, используют при швартовке кораблей к причалу.

Опрокидывание

Предположим, что нужно переместить шкаф веса P, толкая его горизонтальной силой F по полу с коэффициентом трения f (рис.16). Опыт подсказывает, что, если шкаф толкать за ножки, то он начнет скользить по полу. Если же толкать шкаф высоко, да еще по линолеуму с большим коэффициентом трения, то шкаф не поедет, а начнет опрокидываться. Выясним, когда и почему это происходит.

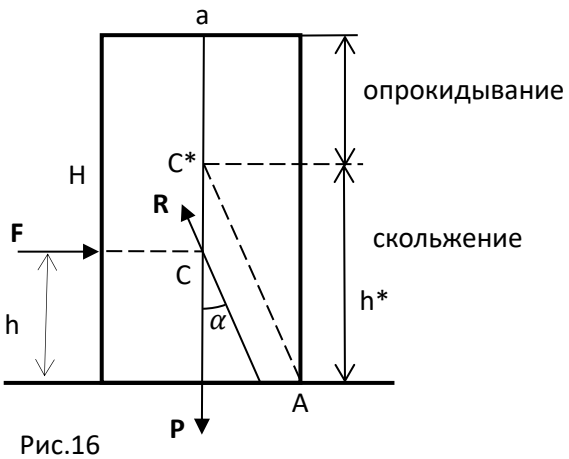


Рис.16

В предельном состоянии, перед началом движения шкафа реакция пола R отклонена от вертикали на угол трения $\alpha = arctgf$. Как известно, три силы **P, F, R** в покое пересекаются в одной точке C. Поднимая точку приложения силы F , мы сдвигаем точку приложения реакции R к углу A, куда она придет при

$$h^* = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{2f}$$

Таким образом, характер движения шкафа при нарушении предельного состояния равновесия зависит от соотношения высоты шкафа H и расстояния h^*:

1. Если коэффициент трения f, а значит и угол трения α настолько малы, что

$$f < \frac{a}{2H}; \qquad (h^* = \frac{a}{2f} > H)$$

то шкаф начнет двигаться поступательно при любом значении h.

2. При достаточном трении ($f > \frac{a}{2H}$ и $H > h^*$) возникают два участка:

Если силу F приложить на участке $h < h^*$ шкаф начнет двигаться поступательно.

Предельное состояние равновесия перед опрокидыванием наступит, когда $h = h^*$ и моменты сил F и P относительно точки A будут равны:

$$Fh^* = P\frac{a}{2}; \qquad \mu_{max} = \frac{F}{P} = \frac{a}{2h^*} = f$$

Возникает еще один практический способ определения коэффициента трения f путем измерения расстояний a и h^*.

Опрокидывание произойдет при $h > h^*$, когда сила F создает неуравновешенный момент $F(h - h^*)$ относительно точки C*, и шкаф начнет поворачиваться (опрокидываться) вокруг точки A.

Таким образом, при $f > \frac{a}{2H}$ опрокидывать (перекатывать) тело тем проще, чем оно выше, т.е. чем меньше коэффициент μ. Сила F будет иметь минимальное значение, если ее приложить на высоте H. При этом:

$$\mu_{min} = \frac{F}{P} = \frac{a}{2H}; \quad \frac{a}{2H} < \mu < f$$

Перекатывание. Колесо

Рассмотрим, как изменяется коэффициент μ с увеличением числа граней n равнобедренного сечения тела. Обозначим длину стороны сечения через, a (Рис.17). Положим, что трение тела о поверхность достаточно для перекатывания горизонтальной силой F

$$f > \frac{a}{2H}$$

Из Рис.29 вытекает:

$$\frac{a}{H} = tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \text{tg}\frac{\pi}{n}$$

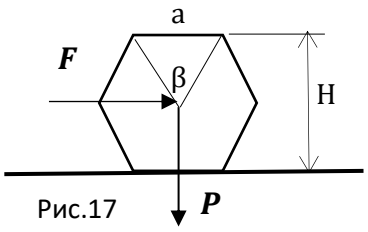


Рис.17

Отсюда

$$\mu_{min} = \frac{1}{2}\text{tg}\frac{\pi}{n}$$

Очевидно, что при стремлении $n \to \infty$, то есть при превращении сечения в окружность μ_{min} и сила F стремятся к нулю. Приходим к очевидному выводу, что проще всего катить тело с круглым сечением.

Зависимость $\mu_{min}(n)$ показана на Рис.18

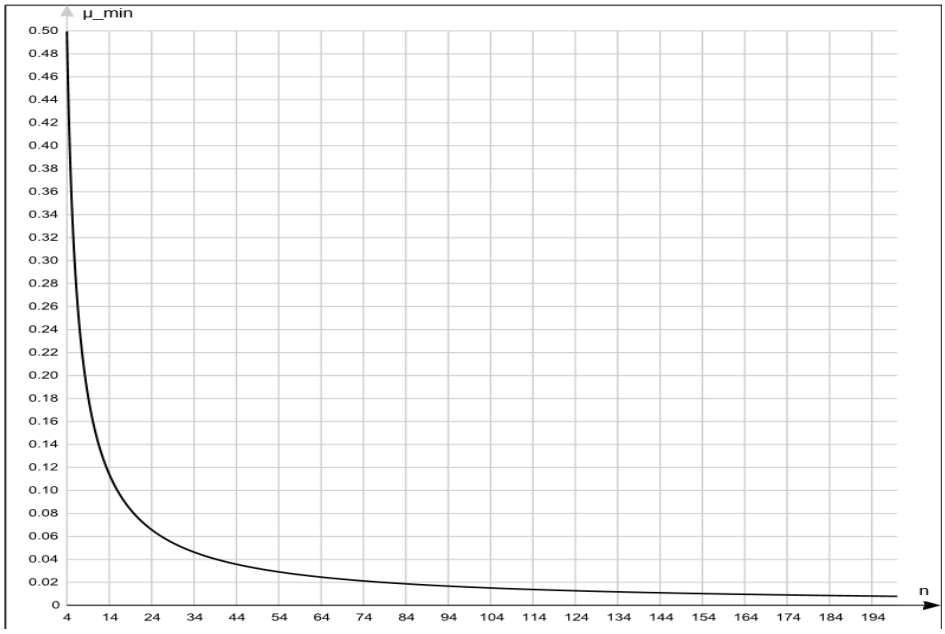


Рис.18

Внутреннее трение.

Реальные тела не являются абсолютно твердыми. При качении колеса по дороге, и колесо и дорога деформируются. Эта деформация является вязкоупругой, то есть сопровождается внутренним трением с выделением тепла. В результате возникает сопротивление движению колеса. Его природу можно понять, если рассмотреть предельные состояния покоя колеса перед началом движения под действием момента (ведущее колесо) и центральной силы (ведомое колесо).

Момент сопротивления вращению мягкого колеса.
Момент и коэффициент трения качения.

Сначала рассмотрим сопротивление внутреннего трения материала вращению мягкого ведущего

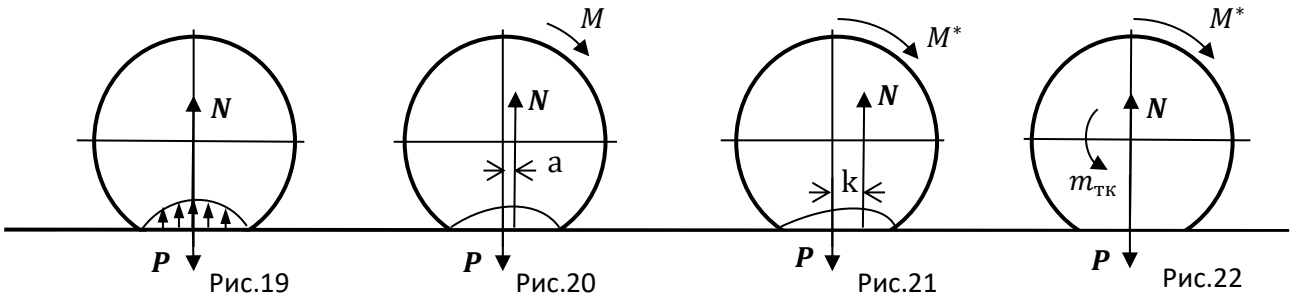


Рис.19 Рис.20 Рис.21 Рис.22

колеса на абсолютно твердой горизонтальной дороге потому что ведущий момент способен преодолеть любое сопротивление вращению. ***Ведущим*** называется колесо, которое приводится в движение моментом М. Это может быть спущенное ведущее колесо автомобиля на асфальте (рис.19).

Распределенные нормальные реакции дороги на колесо и их равнодействующая $\boldsymbol{N}$ перпендикулярны дороге.

При отсутствии ведущего момента М эпюра нормальных реакций дороги симметрична, и равнодействующая $\boldsymbol{N}$ проходит через центр колеса (рис.19).

Если к колесу приложить небольшой момент М, то эпюра и ее равнодействующая $\boldsymbol{N}$, оставаясь вертикальной, сместится в сторону действия момента на некоторую величину а (рис.20). Аналогично тому, как это происходит при опрокидывании.

При увеличении момента М до значения М*, соответствующего предельному состоянию покоя колеса перед началом вращения, смещение a достигнет максимального значения k, которое называется ***коэффициентом трения качения*** (рис.21)**.**

При этом сила тяжести $\boldsymbol{P}$ и реакция $\boldsymbol{N}$ образуют пару с моментом

$$m_{тк} = Nk$$

называемым ***моментом трения качения*.** Поэтому вместо рисунка (21) иногда используют рисунок (22).

Следует заметить, что центр ведущего колеса придет в движение только при появлении силы трения после превышения ведущим моментом его предельного значения М*.

Заметим, что такая ***традиционная модель сопротивления качению колеса не позволяет объяснить явление буксования ведущего колеса***, поскольку сколь угодно малое трение заставит двигаться цент масс колеса.

Ведомым называется колесо, приводимое в движение силой, приложенной к центру колеса. Картина действующих сил в предельном состоянии покоя ведомого колеса перед началом вращения представлена на рис.35. Отличие от ведущего колеса состоит в том, что возникает сила трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$, которая вместе с ведущей силой $\boldsymbol{F}^*$ создает ведущий момент пары $\{\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{F}_{\text{тр}}\}$**.**

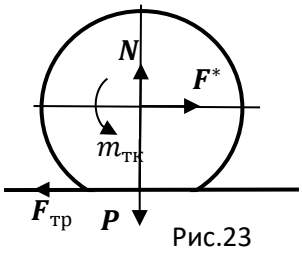


Рис.23

Следует заметить, что колесо может не начать вращаться, если его сцепление с дорогой будет недостаточно ввиду малого трения. В этом случае сила трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ достигнет предельного значения $F_{\text{тр}}^* = fN$ раньше, чем момент трения качения.

$$fNr < Nk \quad \text{или} \quad fr < k$$

Колесо начнет перемещаться поступательно, не вращаясь. Так, спущенное ведомое колесо автомобиля на скользкой дороге идет юзом, увлекаемое ведущими колесами. Рассмотренное сопротивление никак не связано с поступательным перемещением колеса, а только с его вращением.

Сила и коэффициент сопротивления мягкой дороги.

Рассмотрим сопротивление внутреннего трения материала мягкой дороги началу движения центра абсолютно твердого колеса. Сначала рассмотрим ведомое колесо, поскольку центральная ведущая сила $\boldsymbol{F}$ способна преодолеть любое сопротивление дороги.

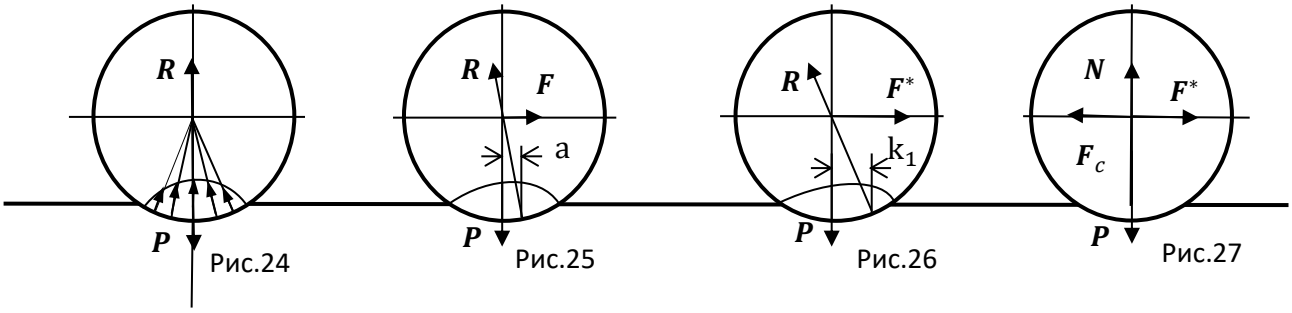


Рис.24 Рис.25 Рис.26 Рис.27

Распределенные нормальные реакции дороги, и их равнодействующая $\boldsymbol{R}$ проходят через центр колеса.

При отсутствии ведущей силы $\boldsymbol{F}$ эпюра нормальных реакций дороги симметрична, и равнодействующая $\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{P}$ вертикальна (рис.24).

Если к колесу приложить небольшую центральную движущую силу $\boldsymbol{F}$, то колесо останется в покое, а точка приложения реакции $\boldsymbol{R}$ сместится на величину a в сторону $\boldsymbol{F}$ (рис.25)**.**

При увеличении силы $\boldsymbol{F}$ до предельного значения $\boldsymbol{F}^*$, соответствующего покою колеса перед началом перемещения его центра, смещение a достигнет максимального значения k_1 (рис.38), которое называется ***коэффициентом сопротивления дороги*.**

При этом вертикальная составляющая $\boldsymbol{N}$ реакции $\boldsymbol{R}$ уравновешивает силу тяжести колеса $\boldsymbol{P}$. Горизонтальная составляющая $\boldsymbol{F}_c$ реакции $\boldsymbol{R}$ называемая ***силой сопротивления дороги*,** имеет модуль

$$F_c \cong N\frac{k_1}{r} \quad (18)$$

и уравновешивает предельную ведущую силу $\boldsymbol{F}^*$. Поэтому вместо рисунка (26) можно использовать рисунок (27).

Примечательно, что сила сопротивления обратно пропорциональна радиусу колеса. Это подтверждается повышенной проходимостью автомобилей на больших колесах.

Кроме того, не зная этой зависимости (18), народы Севера всегда делали максимально большим радиус закругления полозьев саней собачьих упряжек. Ведь точно такая же сила сопротивления (18) возникает и при движении саней, поскольку такое сопротивление никак не связано с вращением тела, а связано только с его поступательным движением.

Следует заметить, что ведомое колесо начнет вращаться только при появлении силы трения после превышения ведущей силой ее предельного значения $\boldsymbol{F}^*$.

В предельном состоянии перед началом движения центра **ведущего колеса** картина будет выглядеть как на рис.28. Отличие от ведомого колеса состоит в том, что при любом значении движущего момента М в состоянии покоя сразу возникает сила трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$, которая вместе с силой сопротивления $\boldsymbol{F}_{\text{с}}$ создает момент пары сопротивления $\{\boldsymbol{F}_{\text{с}}\boldsymbol{F}_{\text{тр}}\}$, уравновешивающий ведущий момент M.

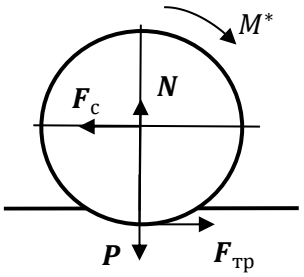


Рис.28

Эта модель сопротивления дороги движению центра масс колеса позволяет объяснить явление буксования ведущего колеса.

Центр ведущего колеса может остаться в покое, если сцепление колеса с дорогой будет недостаточно из-за малого трения. В этом случае сила трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ достигнет предельного значения $F_{\text{тр}}^* = fN$ раньше, чем сила сопротивления $\boldsymbol{F}_{\text{с}}$. Колесо начнет буксовать, оставаясь на месте. Так ведет себя ведущее колесо автомобиля в глубоком снегу.

$$fN < N\frac{k_1}{r}$$

Или

$$fr < k_1$$

В общем случае, когда деформируются и колесо, и дорога, возникает как момент сопротивления качению колеса $m_{\text{тк}}$, так и сила сопротивления дороги $\boldsymbol{F}_{\text{с}}$. Картина приложенных сил в предельном состоянии покоя колеса перед началом качения без проскальзывания представлена на рис. 29. Ее упрощенный эквивалент - на рис. 30.

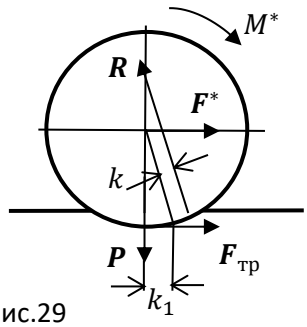


Рис.29

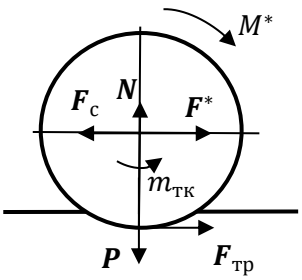


Рис.30