

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**

А.В. Костарев Т.А. Костарева

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА**

ТЕОРИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2025

Аннотация

Сформулирован простой вывод формулы Эйлера для угловой скорости твердого тела.

Предложен матричный метод решения задач кинематики составного движения точки и плоского движения твердого тела.

Представлены наборы интерактивных excel заданий по кинематике точки, составного движения точки и плоскому движению тела, позволяющие студенту самостоятельно исправлять ошибки, отмеченные программой на каждом шаге решения, и освобождающие преподавателя от труда проверки задания. Поскольку правильность решения определяет программа, то оценивается срок сдачи задания.

Полный курс видео лекций на <https://stepik.org/a/71088>

ОГЛАВЛЕНИЕ

Кинематика точки

	Стр
Системы отсчета. Способы задания движения точки.	3
Производная вектор - функции по скалярному аргументу.	5
Скорость точки при векторном и координатном и естественном способах задания ее движения	6
Ускорение точки при векторном и координатном и естественном способах задания ее движения	8
Пример решения задачи на кинематику точки	10
Excel задания по кинематике точки	11

Кинематика твердого тела. Теорема о распределении скоростей в твердом теле

Формула Эйлера. Угловая скорость тела.	11
Теорема о распределении скоростей в теле. Метод полюса.	13
Поступательное движение твердого тела.	14
Вращательное движение. Угловая скорость и угловое ускорение тела.	15
Скорость и ускорение точки вращающегося тела	17
Плоское движение тела. Закон движения плоской фигуры.	18
Скорость и ускорение точки плоской фигуры	19
Мгновенный центр скоростей. Распределение скоростей в плоской фигуре.	20
Мгновенный центр ускорений. Распределение ускорений в плоской фигуре.	21
Пример решения задачи о плоском механизме векторным и матричным способами	23
Интерактивные excel задания по кинематике плоского механизма	27
Свободное движение тела. Скорость и ускорение точки свободного тела	27

Составное движение точки

Абсолютное, относительное и переносное движение точки.	28
Связь абсолютной и относительной производных.	30
Теорема о сложении скоростей. Пример решения задачи.	31
Теорема о сложении ускорений. Кориолисово ускорение.	32
Пример решения задачи векторным и матричным способом	34
Интерактивные excel задания по кинематике составного движения точки	35

Сложение вращений и сферическое движение тела

	Стр
Теорема о сложении угловых скоростей твердого тела.	35
Сложение вращений тела вокруг параллельных осей. Пара вращений.	36
Дифференциальный и планетарный механизмы. Метод Виллиса.	38
Сферическое движение тела. Углы Эйлера.	39
Угловая скорость и угловое ускорение тела.	
Скорость и ускорение точки тела.	40
Пример решения задачи	

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Системы отсчета

Кинематика - раздел механики, в котором изучаются способы описания движения точки и твердого тела. Движение изучается во времени и по отношению к определенной системе отсчета- “жесткому” трехмерному ориентированному пространству, с которым связан наблюдатель, умеющий измерять в нем расстояния и время. С системой отсчета можно связать множество систем координат, но все они будут принадлежать одной системе отсчета.

Время t считается скаляром, монотонно возрастающим с момента $t = 0$, называемого **начальным моментом**. В классической механике время считается одинаковым во всех системах отсчета.

Способы задания движения точки

Задать движение, значит указать способ определения положения точки в пространстве в любой момент времени t . Рассматривается три способа задания движения точки: **векторный, координатный и естественный**.

Векторный способ.

Этот способ является основным, поскольку большинство характеристик движения являются векторными величинами.

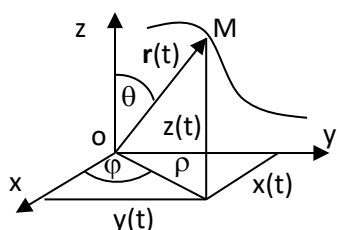


Рис.1

Положение изучаемой точки M по отношению к наблюдателю O в данный момент времени t задается радиусом вектором точки (Рис.1).

$$\mathbf{r}(t)$$

Вектор - функция $\mathbf{r}(t)$ скалярного аргумента t является векторным законом движения точки M . С течением времени

направление и модуль радиуса - вектора $\mathbf{r}(t)$ изменяются, и точка М описывает кривую, называемую **траекторией точки**.

Годографом вектор - функции называется кривая, которую описывает конец вектора при изменении скалярного аргумента, если начало вектора зафиксировано. Очевидно, что годографом радиуса - вектора точки является ее траектория.

Координатный способ

Если с системой отсчета связать систему координат, например, декартову x, y, z , то радиус - вектор $\mathbf{r}(t)$ можно задать его проекциями, как функциями времени

$$x(t), y(t), z(t)$$

которые являются законом движения точки М в декартовых координатах. Закон движения задает в параметрическом виде (параметр - время t) траекторию движения точки. Если из закона исключить время, то получим уравнение кривой, по которой движется точка

$$f_1(x, y, z) = 0; \quad f_2(x, y, z) = 0$$

Траекторией будет та часть кривой, которая соответствует $t > 0$

В *цилиндрических координатах* закон движения точки имеет вид (Рис.1)

$$\rho(t), \quad \varphi(t), \quad z(t)$$

В *сферических координатах*

$$r(t), \quad \varphi(t), \quad \theta(t)$$

Естественный способ

Этот способ применяется, когда заранее известна траектория движения точки (Рис.2). Рельсы, например, определяют траекторию трамвая, поэтому здесь уместен естественный способ.

Чтобы в произвольный момент времени указать положение точки на траектории, достаточно выбрать на ней начало M_0 , направление положительного отсчета (+) и задать функцию

криволинейной координаты $\sigma(t)$ — длину дуги M_0M с соответствующим знаком.

В качестве начала M_0 удобно выбирать начальное положение точки при $t = 0$, а за положительное- направление движения точки в этот момент.

Функция

$$\sigma(t)$$

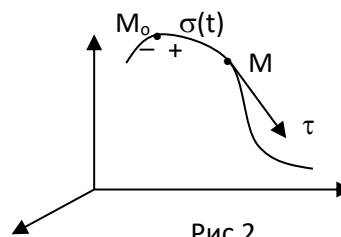


Рис.2

называется **естественным законом движения** точки. Ее не следует путать с пройденным путем $s(t)$, который является монотонно возрастающей функцией. Координата же $\sigma(t)$



Рис.3

может менять знак и обращаться в ноль. Так для трамвая, вернувшегося в депо, координата σ обращается в ноль, в то время как пройденный путь достигает максимального значения (Рис.3).

Производная вектор - функции по скалярному аргументу.

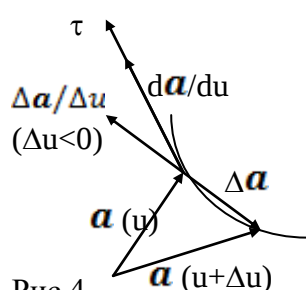


Рис.4

Рассмотрим вектор - функцию $\mathbf{a}(u)$ скалярного аргумента u . При изменении параметра u конец вектора $\mathbf{a}$ описывает годограф (Рис.4). Приращение аргумента Δu вызывает приращение $\Delta \mathbf{a}$ вектор - функции $\mathbf{a}$. Пусть аргумент уменьшился ($\Delta u < 0$). Тогда вектор $\Delta \mathbf{a}/\Delta u$ направлен противоположно приращению $\Delta \mathbf{a}$.

Производной вектор - функции $\mathbf{a}(u)$ по скалярному аргументу u называется вектор

$$\frac{d\mathbf{a}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta u}$$

При стремлении приращения аргумента Δu к нулю секущая $\Delta \mathbf{a}$ займет положение касательной τ . Таким образом, **векторная производная всегда направлена по касательной к годографу вектор - функции.**

Рассмотрим основные свойства векторной производной.

1. Производная постоянной вектор функции равна нулю:

$$\mathbf{a} = \text{Const} \rightarrow \frac{d\mathbf{a}}{du} = \mathbf{0}$$

2. Производная вектор - функции с постоянным модулем не равна нулю. В этом случае годограф функции лежит на сфере радиуса a , поэтому производная, касательная к годографу, будет перпендикулярна самому вектору $\mathbf{a}$.

$$a = \text{Const} \rightarrow \frac{d\mathbf{a}}{du} \perp \mathbf{a}$$

Таковыми векторами являются, например, векторы, соединяющие две точки твердого тела.

Перечислим свойства, вытекающие из линейности оператора дифференцирования

$$3. \frac{d}{du}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{du} + \frac{d\mathbf{b}}{du}$$

$$4. \frac{d\mathbf{a}}{du}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda \frac{d\mathbf{a}}{du}$$

$$5. \frac{d}{du}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{du} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{du} \quad (\text{порядок сомножителей менять можно!})$$

$$6. \frac{d}{du}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{du} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{du} \quad (\text{порядок сомножителей менять нельзя!})$$

Докажем последнее, практически важное свойство:

7. *Проекция производной равна производной от соответствующей проекции*

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{du}\right)_x = \frac{da_x}{du} \quad (1)$$

Запишем вектор $\mathbf{a}$ в проекциях на оси x, y, z с ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

Возьмем производную по времени, учитывая, что орты постоянны:

$$\frac{d\mathbf{a}}{du} = \frac{da_x}{du} \mathbf{i} + \frac{da_y}{du} \mathbf{j} + \frac{da_z}{du} \mathbf{k}$$

С другой стороны, производную тоже можно представить через проекции

$$\frac{d\mathbf{a}}{du} = \left(\frac{d\mathbf{a}}{du}\right)_x \mathbf{i} + \left(\frac{d\mathbf{a}}{du}\right)_y \mathbf{j} + \left(\frac{d\mathbf{a}}{du}\right)_z \mathbf{k}$$

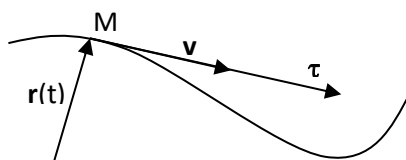
Сравнивая два разложения, приходим к выводу, что свойство 1 справедливо.

В механике принято производную по времени для краткости обозначать точкой над буквой:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{a}}$$

Скорость точки при векторном и координатном способах задания движения точки.

Векторный способ



Скорость и ускорение точки являются векторными величинами, поэтому определим их в векторном способе задания движения.

Скоростью точки называется вектор

$$\mathbf{V} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}}$$

Из определения следует, что скорость направлена по касательной к годографу радиуса - вектора $\mathbf{r}$, т.е. к траектории точки. Скорость направлена в сторону движения точки М по траектории.

Координатный способ

Дифференцируя

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}$$

по времени получим

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}$$

Таким образом, по закону движения $x(t), y(t), z(t)$ можно найти вектор $\mathbf{V}$:

$$V_x = \dot{x}, \quad V_y = \dot{y}, \quad V_z = \dot{z}; \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2};$$

$$\cos(x, \mathbf{V}) = \frac{V_x}{V}; \quad \cos(y, \mathbf{V}) = \frac{V_y}{V}; \quad \cos(z, \mathbf{V}) = \frac{V_z}{V}$$

Естественный способ

Формулы Френе.

Пусть задан закон движения точки по траектории

$$\sigma(t)$$

Очевидно, что радиус-вектор точки является функцией координаты σ : $\mathbf{r}(\sigma)$.

Формулы Френе определяют естественный базис трех ортогональных единичных векторов $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, через производные:

1я формула Френе определяет *орт касательной*

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}$$

Направление.

1. По касательной к траектории, как производная радиуса - вектора.
2. В сторону возрастания σ , независимо от направления движения точки (знака $d\sigma$). Действительно, если $d\mathbf{r}$ направлен по касательной к началу M_0 , то $d\sigma$ отрицательна, и производная все равно направлена в сторону возрастания σ . Модуль равен 1 как предел отношения хорды к дуге $\Delta r / \Delta \sigma$.

2я формула Френе определяет орт *главной нормали* $\mathbf{n}$:

$$k \mathbf{n} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}$$

Направление:

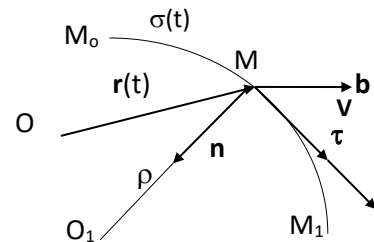


Рис.5

1. $\frac{d\tau}{d\sigma}$ нормальна к τ как производная от вектора постоянного модуля. Указывает направление движения конца орта τ при движении точки М.
2. $\frac{d\tau}{d\sigma}$ направлена в сторону вогнутости траектории. Даже, если точка движется к началу M_0 , $d\sigma < 0$ и $d\tau$ направлено в сторону выпуклости траектории, то производная $\frac{d\tau}{d\sigma}$ будет противоположна по направлению ввиду отрицательности $d\sigma$.

Модуль k производной $\frac{d\tau}{d\sigma}$ называется **кривизной траектории в точке М**, имеет размерность $1/m$, и характеризует скорость конца вектора τ при движении точки.

Обратная величина

$$\rho = \frac{1}{k}$$

- называется **радиусом кривизны траектории** в точке М. Точка O_1 главной нормали на расстоянии ρ от точки М называется **центром кривизны** траектории в точке М.

Орт бинормали определим так чтобы тройка τ, n, b была правой

$$b = \tau \times n$$

Плоскость (τ, n) называется **соприкасающейся плоскостью** к траектории в точке М. Соприкасающуюся плоскость можно получить как предельное положение плоскости окружности, проведенной через три точки M_0 , М и M_1 на траектории при стремлении M_0 и M_1 к М. Предельное значение радиуса такой окружности равно радиусу кривизны ρ , а ее центр стремится к центру кривизны O_1 (Рис.5).

Скорость точки

$$V = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma} \tau$$

Иначе

$$V = V_\tau \tau, \quad V_\tau = \dot{\sigma}$$

Как видим, скорость касательна к траектории, и ее проекция на касательную равна первой производной от закона движения.

Ускорение точки

Векторный способ

Ускорением точки называется вектор

$$W \equiv \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{r}$$

Заметим, что, если скорость точки постоянна по модулю (**равномерное движение**), то **ускорение нормально к скорости** по свойству векторной производной. Это будет подтверждено в естественном способе.

Координатный способ

По заданному закону движения и свойствам векторной производной можно найти проекции ускорения

$$W_x = \dot{V}_x = \ddot{x}, \quad W_y = \ddot{y}, \quad W_z = \ddot{z}$$

модуль и направление вектора ускорения:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2};$$

$$\cos(x, W) = \frac{W_x}{W}; \quad \cos(y, W) = \frac{W_y}{W}; \quad \cos(z, W) = \frac{W_z}{W}$$

Естественный способ

$$W = \frac{dV}{dt} = \ddot{\sigma} \tau + \dot{\sigma} \dot{\tau} = \ddot{\sigma} \tau + \dot{\sigma} \frac{d\tau}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \ddot{\sigma} \tau + \frac{\dot{\sigma}^2}{\rho} n$$

Таким образом, ускорение точки имеет две составляющие (Рис.6)

касательную и нормальную:

$$W = W_\tau + W_n \quad W_\tau = \ddot{\sigma} \tau \quad W_n = \frac{\dot{\sigma}^2}{\rho} n \quad (19)$$

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}$$

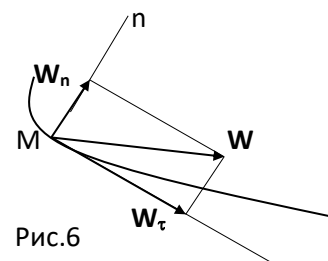


Рис.6

Равномерным называется движение с постоянной по модулю скоростью:

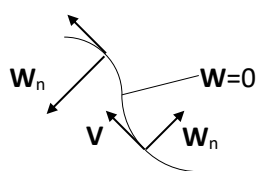


Рис.7

$$V = \text{Const} \quad (\dot{\sigma} = \text{Const}).$$

При равномерном движении (Рис.7) касательное ускорение равно нулю. Значит, касательное ускорение W_τ **характеризует изменение модуля скорости точки**. Полное ускорение точки равно нормальному ускорению. Оно исчезает в точках перегиба траектории и равно нулю при движении точки по прямой. Значит, нормальное ускорение W_n **характеризует изменение направление вектора скорости**.

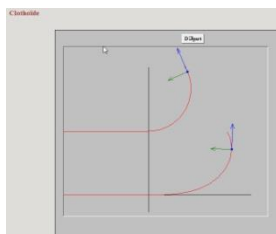


Рис.8

Как известно, ускорение создается силами. Это могут быть активные силы или силы реакции связей. При повороте трамвая нормальное ускорение создается реакцией рельс и зависит от радиуса кривизны траектории. Если на перекрестке прямой участок рельсов состыковать с дугой радиуса R, то нормальное ускорение трамвая (и пассажиров) мгновенно изменится от нуля до конечного значения (верхняя кривая на Рис.8). Так же изменится и сила со стороны рельсов.

Конечное изменение силы за малый промежуток времени называется ударом. Его чувствуют пассажиры. Чтобы избежать удара радиус кривизны рельсов на повороте уменьшают плавно, изгибая рельсы по кривой, которая называется «клотоидой».

Равнопеременным называется движение точки с постоянным касательным ускорением:

$$\ddot{\sigma} = \text{Const} = W_{\tau}$$

Интегрируя, получаем:

$$\dot{\sigma} = W_{\tau}t + C_1$$

где C_1 - постоянная интегрирования, которую следует найти из начальных условий:

$$t = 0: \quad \sigma = \sigma_0 \quad \dot{\sigma} = V_0$$

Находим: $C_1 = V_0$. Повторное интегрирование дает **закон равнопеременного движения** точки по кривой:

$$\sigma = W_{\tau} \frac{t^2}{2} + V_0 t + \sigma_0$$

Пример решения задачи на кинематику точки

Точка движется в плоскости xOy согласно закону

$$x = 4\sin\left(\frac{3\pi t}{4}\right), \quad y = 3\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$$

Найти скорость и ускорение точки, радиус кривизны траектории в момент $t_1 = 1$ с

Решение

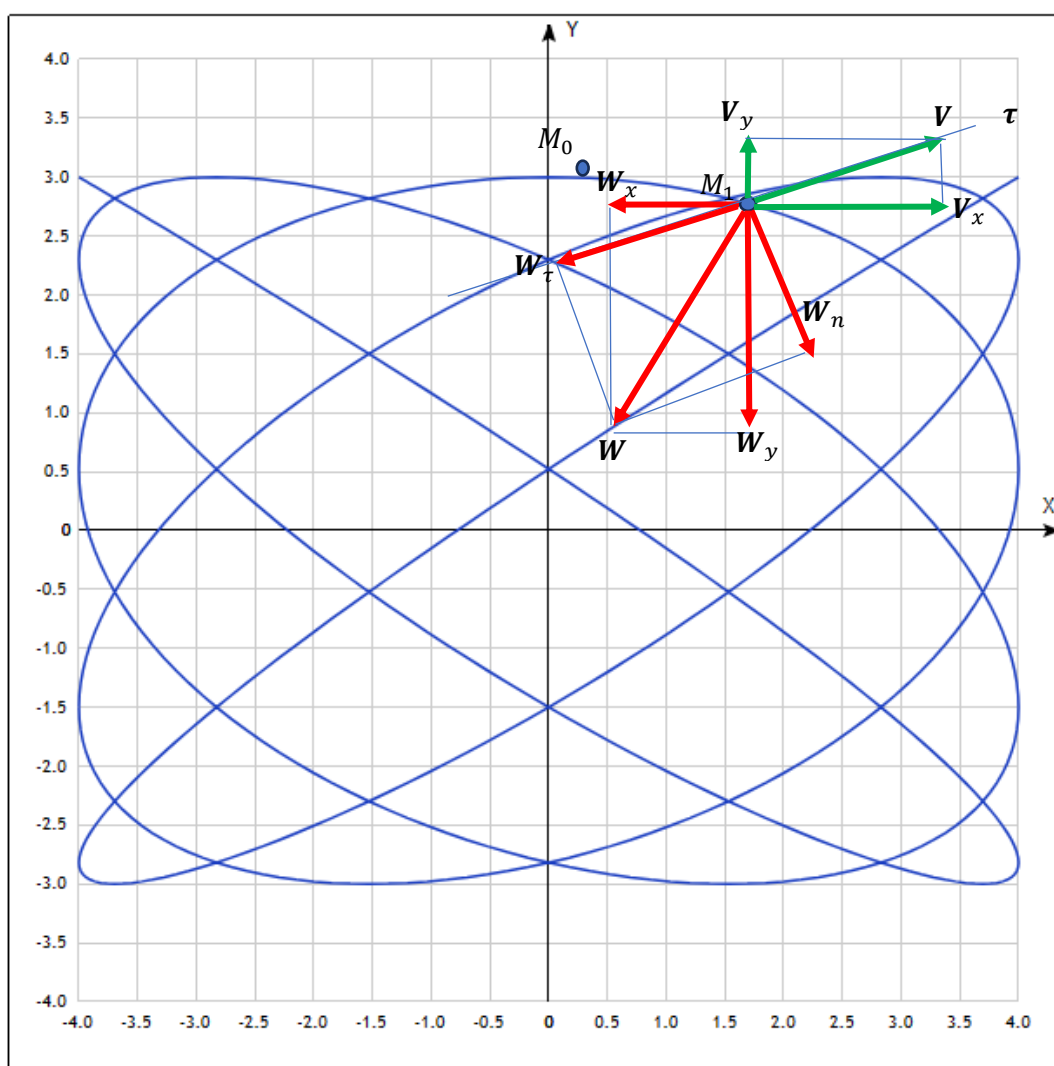
[Построение графиков функций онлайн \(yotx.ru\)](http://yotx.ru)

Начальное положение при $t=0$

$$x(0) = 0 \text{ м}, \quad y(0) = 3 \text{ м}$$

В момент $t_1 = 2,8$ с

$$x(2,8) = 1,24 \text{ м}, \quad y(2,8) = 2,74 \text{ м}$$



$$\blacksquare \quad x(t) = 4\sin\left(\frac{3\pi t}{4}\right) \quad y(t) = 3\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$$

Скорость

$$V_x = \dot{x} = 3\pi \cos\left(\frac{3\pi t}{4}\right)_{t=2,8} = 8,96 \text{ м/с}; \quad V_y = \dot{y} = -2\pi \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)_{t=2,8} = 2,56 \text{ м/с}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 9,3 \text{ м/с} \quad (24)$$

Ускорение

$$W_x = \ddot{x} = -\frac{9\pi^2}{4} \sin\left(\frac{3\pi t}{4}\right)_{t_1} = -6,86 \text{ м/с}^2; \quad W_y = \ddot{y} = -\frac{4\pi^2}{3} \cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)_{t_1} = -12,02 \text{ м/с}^2$$

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \frac{13,8 \text{ м}}{\text{с}^2} \quad (26)$$

$$W_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{V} = -9,9 \text{ м/с}^2 \quad W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = \frac{9,6 \text{ м}}{\text{с}^2}$$

$$\rho = \frac{V^2}{W_n} = 9 \text{ м} \quad (28)$$

Excel задания по кинематике точки можно скачать по ссылке

<https://disk.yandex.ru/d/KCqL8Qh3170FHQ>

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

* в развитие идей Михаила Валентиновича Миронова

Теорема о распределении скоростей в твердом теле

Формула Эйлера. Угловая скорость тела

Вектором в теле назовем любой вектор **a**, соединяющий две точки тела. Все векторы в твердом теле постоянны по модулю и изменяют только свое направление, поворачиваясь вместе с телом.

Понятно, что столбец проекций вектора **a** на оси неподвижной системы

$$a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

можно связать со столбцом проекций его производной

$$\dot{a} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

матрицей Ω 3x3 бесчисленным образом.

$$\dot{a} = \Omega a \quad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix}$$

Нас интересует, существует ли среди этого бесчисленного множества матриц Ω , такая, которая является общей для всех векторов в теле. Иначе говоря, характеризующая движения всего тела как целого. Как известно, производная по времени от постоянного по модулю вектора перпендикулярна самому вектору. Отсюда

$$\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^T \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^T \Omega \mathbf{a} = 0$$

Итак

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= x^2 \omega_{11} + y^2 \omega_{22} + z^2 \omega_{33} + xy(\omega_{12} + \omega_{21}) + yz(\omega_{23} + \omega_{32}) + zx(\omega_{31} + \omega_{13}) = 0$$

Матрица Ω опишет движение любого вектора в теле, если все коэффициенты при проекциях вектора равны нулю.

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= \omega_{22} = \omega_{33} = 0 \\ \omega_{21} &= -\omega_{12} = \omega_z \quad \omega_{32} = -\omega_{23} = \omega_x \quad \omega_{13} = -\omega_{31} = \omega_y \end{aligned}$$

Здесь обозначения трех ненулевых элемента матрицы введены по образцу присоединенной матрицы вектора в право ориентированном пространстве.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Элементам матрицы ω_{mn} можно придать простой геометрический смысл. Это проекции скорости конца орта с первым индексом при его вращении вокруг орта со вторым индексом на третье направление против часовой стрелки (по правилу правого винта). Так

$$\omega_{12} = -\omega_z$$

означает, что конец орта $\mathbf{i}$ движется против оси z при его вращении вокруг оси y . Понятно, почему элементы с повторяющимися индексами равны нулю.

Таким образом, общая для всех векторов в теле матрица Ω существует и она - кососимметричная. Назовем ее **матрицей угловой скорости тела**. Из ее трех элементов можно составить сопутствующий **вектор угловой скорости тела**.

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы пришли к **матричной формуле Эйлера**

$$\dot{\mathbf{a}} = \Omega \mathbf{a}$$

которой соответствует **векторная формула Эйлера**

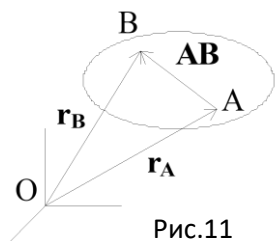
$$\dot{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$$

Формулы показывают, что производные по времени от всех векторов в теле выражаются через единую для тела угловую скорость тела.

Это ожидаемый результат, поскольку твердое тело вращается как единое целое.

Теорема о распределении скоростей в теле. Метод полюса.

Формула Эйлера дает возможность выразить характеристики движения всех точек тела через характеристики движения одной, специально выбранной нами точки тела, называемой **полюсом**. Такой прием называется **методом полюса**. Рассмотрим произвольную точку тела В. Исходным в методе полюса является выражение радиуса - вектора произвольной точки тела через радиус - вектор полюса А:



$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{AB} \quad (2)$$

Дифференцируя (2) по времени, находим

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{AB}}{dt}; \quad \mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \frac{d\mathbf{AB}}{dt}$$

Для вектора в теле **AB** справедлива формула Эйлера.

$$\frac{d\mathbf{AB}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB}$$

Таким образом, приходим к **теореме о распределении скоростей** в твердом теле

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB} \quad (3)$$

Матричная запись этой теоремы в произвольной системе координат имеет вид:

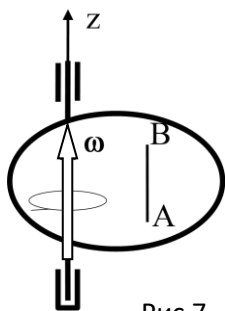
$$V_B = V_A + \Omega(\mathbf{AB})$$

Следствия из теоремы о распределении скоростей

а) Если скорости двух точек тела А и В одинаковы, то угловая скорость параллельна АВ. Например, при вращении тела вокруг неподвижной оси скорости точек этой оси равны нулю. Поэтому вектор угловой скорости параллелен оси вращения Z. Обычно его изображают на оси (Рис.7) и направляют по правилу правого винта.

б) Справедливо и обратное. Скорости точек прямой, параллельной угловой скорости, одинаковы в данный момент

$$\mathbf{AB} \parallel \boldsymbol{\omega} \rightarrow \mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A$$



в) **Теорема о проекциях скоростей** Проекции скоростей двух точек на ось, проходящую через эти точки, равны.

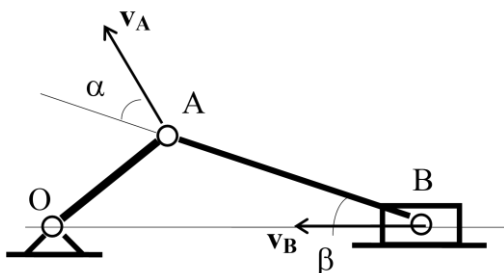
Для доказательства спроектируем теорему (3) на ось z, проходящую через обе точки. С учетом взаимной

перпендикулярности $\mathbf{AB}$ и векторного произведения $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB}$ получаем:

$$\text{пр}_{AB} \mathbf{V}_A = \text{пр}_{AB} \mathbf{V}_B$$

Эта теорема отражает понятное требование неизменности расстояния между точками твердого тела.

Пример: найдем отношение скоростей точек А и В шатуна АВ кривошипно-шатунного механизма. Точка А принадлежит кривошипу ОА, вращающемуся вокруг оси О. Она движется по окружности, значит ее скорость перпендикулярна ОА. Точка В скользит вдоль прямой ОВ и ее скорость направлена вдоль этой прямой. По теореме о проекциях скоростей имеем



$$V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta$$

Простейшие движения твердого тела

Поступательное движение.

Мгновенно-поступательным назовем движение тела в момент, когда угловая скорость тела обратилась в ноль

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$$

В этом случае

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB} = \mathbf{V}_A = \mathbf{V}$$

То есть скорости всех точек в момент мгновенно-поступательного движения оказываются равными.

Например, в момент, когда кривошип $OA \perp OB$, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, скорости точек А и В равны (Рис.8).

Если угловая скорость остается равной нулю в течение некоторого промежутка времени,

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{0}$$

то движение в это время называется **поступательным**.

Например, ползун В (Рис.8) все время движется поступательно

При поступательном движении вектор в теле $\mathbf{AB}$ не поворачивается

$$\frac{d\mathbf{AB}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB} = \mathbf{0}$$

значит

$$\mathbf{AB} = \text{Const}$$

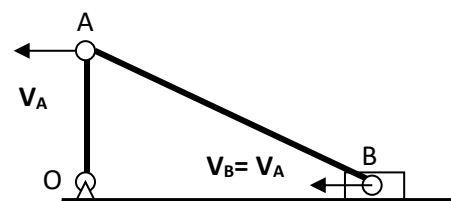


Рис.8

При этом траектории любых двух точек А и В (годографы векторов $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$) одинаковы и сдвинуты на постоянный вектор $\mathbf{AB}$ (Рис.9).

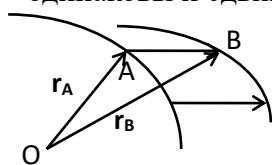


Рис.9

смещены на $\mathbf{AB}$.

На Рис.10 изображено колесо обозрения, кабина которого совершает круговое поступательное движение. При этом все точки кабины, в том числе точки А и В движутся по одинаковым окружностям, центры которых

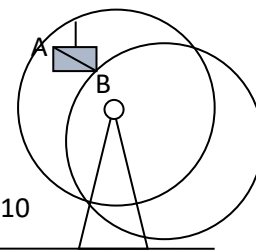


Рис.10

В общем случае движения все точки тела имеют разные скорости, поэтому **термины «скорость» и «ускорение» относятся только к точке** тела, а термины **«угловая скорость» и «угловое ускорение» относятся только к телу**.

Только при поступательном движении скорость $\mathbf{V}$ можно условно назвать скоростью тела.

Дифференцируя (49), найдем, что в каждый момент времени равны и ускорения всех точек

$$\mathbf{W}_B = \mathbf{W}_A = \mathbf{W}$$

Видим, что поступательное движение тела описывается формулами кинематики точки, поскольку все точки движутся одинаково. Как известно, движение точки в пространстве задается тремя скалярными функциями ее координат. Значит, в поступательном движении тело имеет 3 степени свободы.

Вращательное движение. Угловая скорость и угловое ускорение тела.

Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси z . Положение тела удобно задать углом поворота тела (Рис.11)

$$\varphi = \varphi(t)$$

Эта закон вращения тела. Поскольку мы находимся в право ориентированном пространстве, направление оси z должно быть согласовано с положительным направлением отсчета угла φ по правилу правого винта.

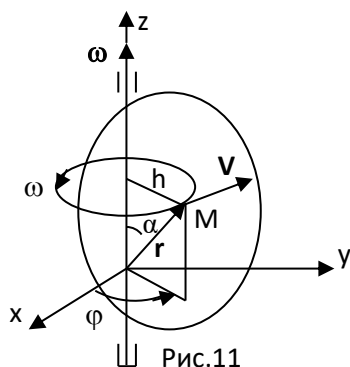


Рис.11

Как было показано, угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ вращающегося тела направлена вдоль оси вращения. Значит $\omega_x = \omega_y = 0$ и матрица угловой скорости имеет вид:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & 0 \\ \omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем проекцию угловой скорости ω_z .

Столбец проекций радиуса вектора $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} h \cos \varphi \\ h \sin \varphi \\ a \end{pmatrix} \quad h = r \sin \alpha \quad a = r \cos \alpha$$

связан с его производной

$$\dot{\mathbf{r}} = h \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

формулой Эйлера

$$\dot{\mathbf{r}} = \Omega \mathbf{r} = h \omega_z \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Получаем

$$\omega_z = \dot{\varphi}$$

Таким образом, во вращательном движении угловая скорость есть скорость изменения угла поворота тела. Отсюда название угловой скорости.

Вектор угловой скорости тела направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта по отношению к направлению вращения

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{k} \quad (3)$$

В свободном движения угловая скорость тела выражается значительно более сложным образом и не через один, а через три угла Эйлера (см. Сферическое движение тела).

Угловым ускорением тела называется вектор

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

Поскольку годографом вектора $\boldsymbol{\omega}$ является сама ось вращения, то угловое ускорение тоже будет направлено вдоль оси вращения. Дифференцируя (3) по времени, находим:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \ddot{\varphi} \mathbf{k} = \varepsilon_z \mathbf{k};$$

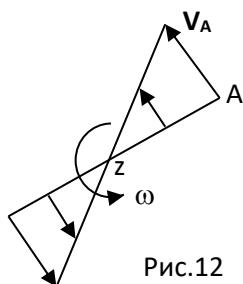
Таким образом, проекция углового ускорения на ось z равна второй производной от закона вращения.

$$\varepsilon_z = \ddot{\varphi}$$

Поскольку угловое ускорение также как и угловая скорость является аксиальным вектором, то его тоже снабжают дуговой стрелкой по правилу правого винта.

Ускоренным следует назвать вращение тела с возрастающей по модулю угловой скоростью. Очевидно, что оно будет иметь место при со направленных векторах угловой скорости и углового ускорения. Таким образом, вращение будет ускоренным при $\ddot{\varphi} > 0$ и замедленным при $\ddot{\varphi} < 0$

Скорость и ускорение точки вращающегося тела



Так как радиус-вектор точки М является вектором в теле, то скорость точки вращающегося тела находится по формуле Эйлера

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (4)$$

Матричная запись этой формулы в любой из систем координат

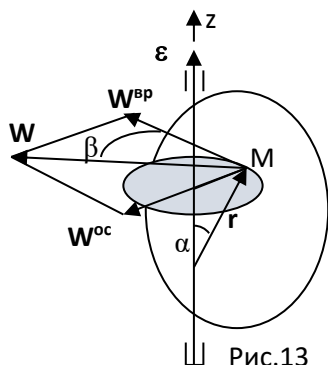
$$V = \Omega r \quad (5)$$

В соответствии с Рис.12 модуль скорости точки V равен:

$$V = \omega r \sin \alpha = \omega h$$

Видим, что скорость точки линейно зависит от расстояния h до оси вращения. Картина распределения скоростей на прямой, перпендикулярной оси представлена на Рис.12

Найдем **ускорение** точки вращающегося тела. Дифференцируя (4) по времени, найдем



$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{V}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) =$$

$$= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$$

Таким образом, ускорение точки вращающегося тела имеет две составляющие (Рис.13).

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^{\text{bp}} + \mathbf{W}^{\text{oc}}$$

Составляющая

$$\mathbf{W}^{\text{bp}} \equiv \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$$

является касательным ускорением, но здесь она называется **вращательным ускорением** точки. Специальное название введено потому, что не во всех движениях тела произведение $\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ направлено по касательной к траектории точки (см сферическое движение тела). Вращательное ускорение точки направлено в сторону дуговой стрелки вектора углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$. По модулю

$$W^{\text{bp}} = \varepsilon r \sin \alpha = \varepsilon h$$

Вторая составляющая

$$\mathbf{W}^{\text{oc}} \equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$$

устремлена к оси вращения, независимо от направления вращения (вектора $\boldsymbol{\omega}$), и поэтому называется **осеостремительным ускорением** точки. Действительно, векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{V}$ изменяют направление одновременно, поэтому их векторное произведение не меняет своего направления при перемене направления вращения тела. По модулю

$$W^{\text{oc}} = \omega V = \omega^2 h$$

Вычислим модуль полного ускорения W и угол β , который оно составляет с направлением на ось:

$$W = \sqrt{W_{\text{вр}}^2 + W_{\text{ос}}^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{W_{\text{вр}}}{W_{\text{ос}}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Видим, что модуль ускорения точки линейно зависит от расстояния h точки до оси вращения, а угол β одинаков для всех точек тела.

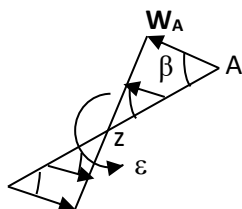


Рис.14

Теперь нетрудно изобразить картину распределения ускорений во вращающемся теле. Поскольку на прямых, параллельных оси вращения скорости все время одинаковы, то одинаковы и ускорения. Значит во всех плоскостях, перпендикулярных оси вращения, картины распределения и скоростей и ускорений одинаковы. Одна из них изображена на Рис.14:

Вычислим проекции ускорения точки M (Рис.13) на подвижные оси матричным способом. Дифференцируя (5) по времени, получим:

$$W = \dot{V} = \dot{\Omega}r + \Omega\dot{r} = \varepsilon r + \Omega\Omega r = (\varepsilon + \Omega^2)r \quad (6)$$

Здесь через ε обозначена кососимметричная матрица углового ускорения

$$\varepsilon = \dot{\Omega} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Формула (6) справедлива как в неподвижной системе координат, так и координатах, связанных с телом, где она чаще всего и применяется.

Плоское движение тела

Закон движения плоской фигуры.

Движение тела **называется плоским**, если скорости всех его точек остаются

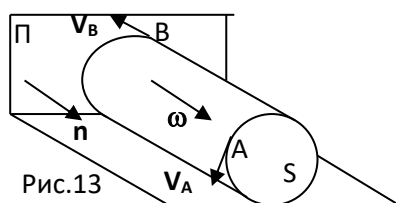


Рис.13

параллельными некоторой неподвижной плоскости. Примером такого движения может служить качение цилиндра по плоскости (Рис.13). Скорости всех точек цилиндра параллельны плоскости Π .

Умножив формулу распределения скоростей для произвольных точек тела A и B (A - полюс)

$$V_B = V_A + \omega \times AB$$

скалярно на орт $\mathbf{n}$ нормали к плоскости Π , получим:

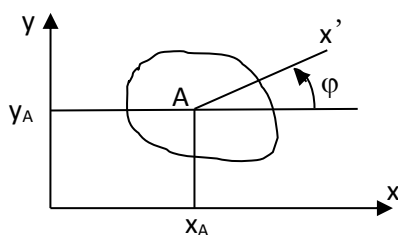
$$0 = \mathbf{n} \cdot (\omega \times AB) = (\mathbf{n} \times \omega) \cdot AB$$

Поскольку AB – произвольный вектор в теле, то

$$\mathbf{n} \times \omega = 0$$

Таким образом, в плоском движении тела вектор угловой скорости ω параллелен орту $\mathbf{n}$ и перпендикулярен плоскости Π .

Из теоремы о распределении скоростей известно, что скорости точек прямой, параллельной ω , одинаковы. Поскольку ω не изменяет своего направления, то скорости одинаковы все время. Значит, одинаковы и ускорения точек на прямых, параллельных ω . Поэтому нет смысла изучать распределение скоростей и ускорений во всем теле. Достаточно понять, как они распределены в каком-нибудь его сечении S , параллельном плоскости движения Π . Такое сечение называется **плоской фигурой**. Во всех параллельных сечениях распределения скоростей и ускорений будет аналогичным.



Обычно плоскую фигуру располагают в плоскости чертежа xu . Положение фигуры на плоскости определяется тремя координатами - функциями времени:

$$x_A(t), y_A(t), \varphi(t)$$

Они являются законом плоского движения тела, которое, таким образом, имеет три степени свободы.

Скорость и ускорение точки плоской фигуры

По заданному закону движения плоской фигуры

$$x_A(t), y_A(t), \varphi(t)$$

можно найти угловую скорость ω и ускорение ε фигуры, скорость V_A и ускорение W_A полюса A . После этого, по теореме о распределении скоростей можно найти скорость произвольной точки B плоской фигуры

$$V_B = V_A + \omega \times AB \quad (8)$$

Последнее слагаемое $\omega \times AB$ лежит в плоскости фигуры, перпендикулярно AB и направлено в сторону вращения фигуры (Рис.14). Поэтому это слагаемое называется здесь **скоростью точки B вокруг полюса A**

$$V_B = V_A + V_{BA}; \quad V_{BA} \equiv \omega \times AB \quad (7)$$

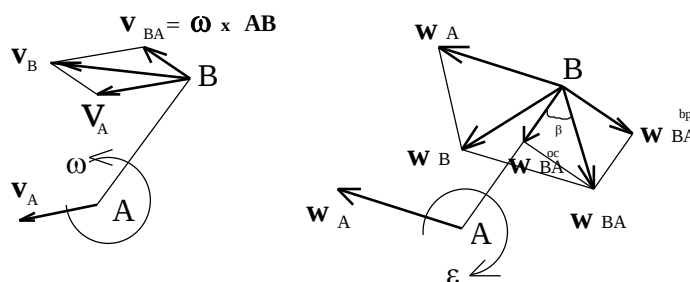


Рис.14

Ускорение точки В найдем, продифференцировав (7) по времени.

$$\dot{V}_B = \dot{V}_A + \dot{\omega} \times AB + \omega \times \dot{AB}$$

Или

$$W_B = W_A + W_{BA}; \quad W_{AB} = W_{AB}^{bp} + W_{AB}^{oc} \quad (9)$$

$$W_{AB}^{bp} = \varepsilon \times AB; \quad W_{AB}^{oc} = \omega \times V_{BA};$$

Видим, что ускорение произвольной точки В плоской фигуры тоже складывается из ускорения полюса W_A и ускорения W_{BA} точки В во вращении вокруг полюса А. Ускорение W_{BA} , как и должно быть, имеет вращательную составляющую W_{AB}^{bp} , направленную перпендикулярно АВ в сторону углового ускорения ε и осеостремительную составляющую W_{AB}^{oc} , всегда направленную к полюсу А (Рис.14).

Учитывая, что векторы ω и ε направлены перпендикулярно плоской фигуре, найдем, что все составляющие лежат в плоскости фигуры и имеют модули:

$$W_{AB}^{bp} = \varepsilon AB \quad W_{AB}^{oc} = \omega^2 AB$$

Ускорение W_{AB} имеет модуль

$$W_{AB} = \sqrt{W_{AB}^{bp^2} + W_{AB}^{oc^2}}$$

Угол β наклона W_{AB} к АВ для всех точек фигуры одинаков

$$tg\beta = \frac{W_{AB}^{bp}}{W_{AB}^{oc}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Матричные аналоги формул (8) и (9) в любой системе координат имеют вид:

$$V_B = V_A + \Omega(AB), \quad W_B = W_A + (\varepsilon + \Omega^2)(AB)$$

Мгновенный центр скоростей. Распределение скоростей в плоской фигуре.

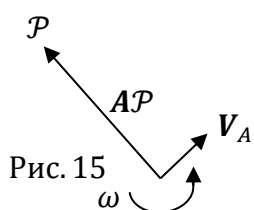
Формула (8) сложна для понимания картины распределения скоростей в плоской фигуре. Картина станет яснее, если ввести понятие *мгновенного центра скоростей (МЦС)*. Свяжем с плоской фигурой бесконечную плоскость П.

МЦС - это точка Р плоскости П, скорость которой в данный момент равна нулю.

$$V_P = 0$$

Покажем, что МЦС существует, если угловая скорость ω не равна нулю в данный момент. Для этого умножим векторно слева на ω формулу скорости МЦС Р

$$V_P = V_A + \omega \times AP = 0$$



Вспомнив формулу двойного векторного произведения

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AP}) = \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{AP}) - \mathbf{AP}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_A - \mathbf{AP}\omega^2; \\ &(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{AP} = 0) \end{aligned}$$

Отсюда (Рис.15):

$$\mathbf{AP} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_A}{\omega^2}; \quad \mathbf{AP} = \frac{V_A}{\omega}$$

Если теперь за полюс принять МЦС $\mathcal{P}$, то формула скорости приобретет вид, знакомый нам по вращательному движению:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_B &= \mathbf{V}_P + \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{PB} = \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{PB} \\ \mathbf{V}_B &= \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{PB} \end{aligned}$$

Таким образом,

в данный момент скорости распределены в плоской фигуре так, как если бы она вращалась вокруг МЦС $\mathcal{P}$.

Это значит, что скорость любой точки плоской фигуры перпендикулярна направлению на точку $\mathcal{P}$ и соблюдаются следующие соотношения:

$$V_A = \omega AP; \quad V_B = \omega BP; \quad \omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}; \quad \frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}$$

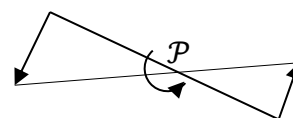
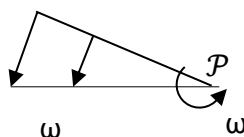
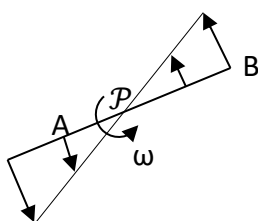


Рис.16

Рис.16 подсказывает способы построения МЦС $\mathcal{P}$ в различных случаях:

а) Если известны параллельные скорости двух точек A и B на одном перпендикуляре к этим скоростям, то МЦС $\mathcal{P}$ лежит на пересечении линии AB и линии, проведенной через концы векторов скоростей.

б) Случай мгновенно-поступательного движения, когда скорости двух точек

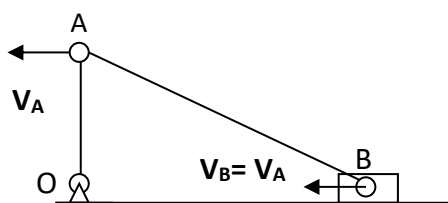


Рис.17

параллельны, но точки не лежат на одном перпендикуляре. Примером может служить шатун АВ в указанном на рисунке положении механизма Рис.17. В этом случае перпендикуляры к скоростям пересекаются в бесконечности и

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = 0$$

в) Известны направления скоростей двух точек: например, скорости точек А и В линейки, скользящей вдоль прямых (Рис.18). МЦС находится на пересечении перпендикуляров к этим скоростям. Кстати, зная положение P , легко определить направление скорости произвольной точки С линейки: перпендикулярно направлению на P и в сторону вращения.

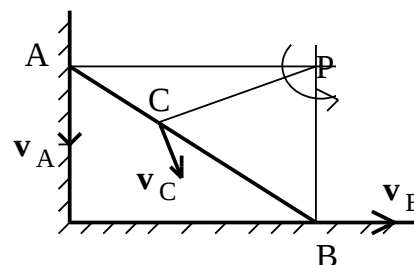
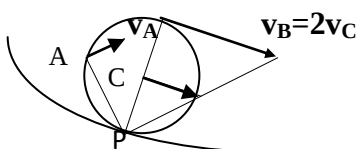


Рис.18

г) Качение без проскальзывания плоской фигуры по кривой, например колеса



по дороге. Точка контакта P является мгновенным центром скоростей. Часто окружность колеса ошибочно принимают за траекторию точки А и ее скорость ошибочно направляют по касательной к ободу колеса, в то время как она перпендикулярна AP .

Как видим, ни одна точка колеса не имеет скорости, направленной против движения колеса. Поэтому камень, отделившись от колеса, всегда летит вперед.

Мгновенный центр ускорений. Распределение ускорений в плоской фигуре

Мгновенным центром ускорений (МЦУ) называется точка Q , ускорение которой равно нулю в данный момент. Покажем, что МЦУ существует, если ω и ε не равны нулю одновременно. Построим МЦУ.

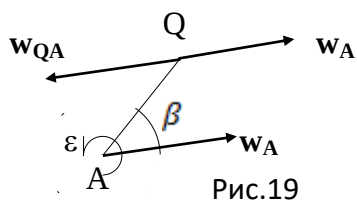


Рис.19

От вектора W_A в сторону ε отложим угол (Рис.19)

$$\beta = \arctg\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right)$$

и проведем отрезок

$$AQ = \frac{W_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}}$$

Найдем ускорение точки Q

$$W_Q = W_A + W_{QA}$$

Очевидно, что W_{QA} отклонен под тем же углом α от AQ, значит противоположно W_A . По модулю они равны:

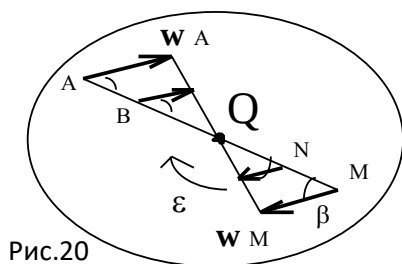


Рис.20

Значит

$$W_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2} = W_A$$

$$W_A = -W_{AQ} \quad \text{и} \quad W_Q = 0$$

т.е. Q является мгновенным центром ускорений.

Если теперь за полюс выбрать МЦУ Q, то формула ускорения произвольной точки приобретет такой же вид, как при вращательном движении:

$$W_A = W_{AQ} = W_{AQ}^{bp} + W_{AQ}^{oc}; \quad W_A = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}$$

Это значит, что ускорения в плоской фигуре распределены так, как если бы она вращалась вокруг МЦУ Q (Рис.20). На прямой AM, проходящей через МЦУ Q, ускорения параллельны и наклонены под углом β к направлению на МЦУ Q. Модуль ускорения линейно зависит от расстояния до МЦУ.

Следует подчеркнуть, что в общем случае МЦС и МЦУ не совпадают.

Так у колеса, движущегося равномерно и без проскальзывания, МЦС находится в точке контакта с дорогой, а МЦУ в центре колеса. При этом $\varepsilon = 0$ и $\beta = 0$, значит, ускорения всех точек направлены к центру колеса (Рис.21).

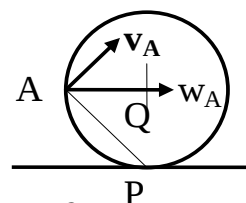


Рис.21

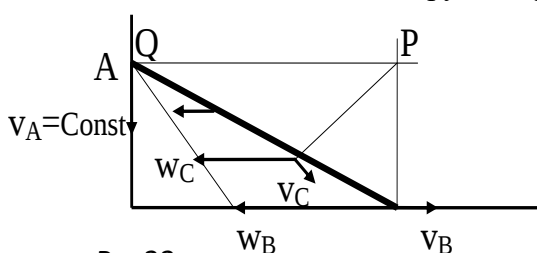


Рис.22

Другим примером может служить стержень, конец A которого равномерно скользит по стене, а конец B по полу. Очевидно, что Q находится в точке A, а ускорения всех точек горизонтальны (как W_B) и линейно зависят от расстояния до Q (Рис.22).

Таким образом формулы распределения скоростей и ускорений

показывают, что плоское движение тела можно представить как результат сложения двух движений: **поступательного** движения с полюсом A и **вращательного** движения вокруг полюса

Пример решения задачи о плоском механизме векторным и матричным способами

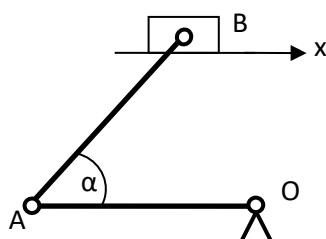


Рис.23

Кривошипно-ползунный механизм (рис. 23), состоящий из кривошипа OA, шатуна AB и ползуна B, совершает движение в плоскости рисунка. Прямая x, по которой движется ползун B, не проходит через ось вращения O кривошипа и в этом случае кривошипно-ползунный механизм называют *нецентральный*. Длины звеньев: $OA = AB = 1$ м,

$$\text{Ползун B движется по закону } x = -\frac{6}{\pi} \sin(\pi t/6)$$

Механизм изображен в момент времени $t_1 = 1$ с когда $\alpha = 60^\circ$

В данном положении механизма определить:

- 1) скорости и ускорения точек В и А,
- 2) угловые скорости и ускорения кривошипа и шатуна.

Векторный способ.

Скорости

Ползун В.

В проекции на ось x

$$V_{Bx} = \dot{x} = -\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right), \quad \text{при } t = t_1: \quad V_{Bx} = -0,87 \text{ м/с}$$

Направление вектора $\mathbf{V}_B$ определяется знаком проекции.

Шатун АВ.

Положение МЦС (точка Р) шатуна АВ найдем по известной скорости $\mathbf{V}_B$, и известному направлению скорости шарнира А.

Для этого проводим через точки А и В перпендикуляры к направлениям скоростей этих двух точек до их пересечения в точке Р. Угловую скорость ω_{AB} шатуна АВ определяем через известную скорость точки В по формуле

$$\omega_{AB} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_B}{AB \sin \alpha} = \frac{0,87}{0,87} = 1 \text{ с}^{-1}$$

и изображаем дуговой стрелкой вокруг МЦС в направлении, согласованном с направлением вектора $\mathbf{V}_B$.

Шарнир А

Зная ω_{AB} и положение МЦС Р, найдем скорость шарнира А

$$V_A = \omega_{AB} AP = \omega_{AB} AB \cos \alpha = 0,5 \text{ м/с}$$

Кривошип ОА

Угловую скорость ω_{OA} кривошипа ОА определяем через известную скорость точки А по формуле

$$\omega_{OA} = \frac{V_A}{OA} = 0,5 \text{ с}^{-1}$$

и изображаем дуговой стрелкой вокруг т.О в направлении, согласованном с направлением вектора $\mathbf{V}_A$.

Ускорения.

Ползун В.

В проекции на ось x

$$W_{Bx} = \ddot{x} = \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right), \quad \text{при } t = t_1: \quad W_{Bx} = 0,26 \text{ м/с}^2$$

Направление вектора $\mathbf{W}_B$ определяется знаком проекции

Шарнир А.

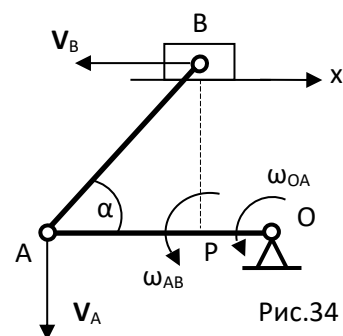


Рис.34

Шарнир А движется по окружности вокруг оси О. Поэтому его ускорение состоит из вращательного $\mathbf{W}_A^{bp}$ и центростремительного $\mathbf{W}_A^{oc}$ ускорений. Последнее всегда направлено к центру О.

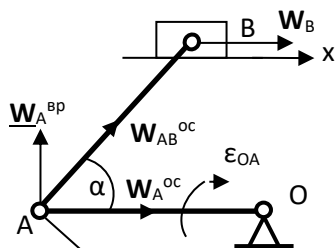


Рис.24

$$W_A^{oc} = \omega_{OA}^2 OA = 0,25 \text{ м/с}^2$$

$\mathbf{W}_A^{bp}$ перпендикулярно ОА. Но его направление неизвестно. Аналогичная ситуация встречалась с реакциями двусторонних связей. Для них известна линия действия, но неизвестно направление. Такой вектор направляем произвольно и выделяем подчеркиванием. Направление такого вектора противоположно изображенному направлению, если его значение в ответе отрицательно.

его значение в ответе отрицательно.

Выразим ускорение шарнира А через ускорение полюса В

$$\mathbf{W}_A^{bp} + \mathbf{W}_A^{oc} = \mathbf{W}_B + \mathbf{W}_{AB}^{bp} + \mathbf{W}_{AB}^{oc} \quad (10)$$

В этом векторном уравнении две скалярные неизвестные: вращательные ускорения $\mathbf{W}_A^{bp}$

и $\mathbf{W}_{AB}^{bp}$. Ведь модуль ускорения $\mathbf{W}_{AB}^{oc}$ можно вычислить

$$W_{AB}^{oc} = \omega_{AB}^2 AB = 1 \text{ м/с}^2$$

Чтобы найти модуль ускорения $\mathbf{W}_A^{bp}$ спроектируем уравнение (10) на направление АВ.

$$W_A^{bp} \sin \alpha + W_A^{oc} \cos \alpha = W_B \cos \alpha + W_{AB}^{oc}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} W_A^{bp} &= (W_B \cos \alpha + W_{AB}^{oc} - W_A^{oc} \cos \alpha) / \sin \alpha \\ &= (0,26 \cdot 0,5 + 1 - 0,25 \cdot 0,5) / 0,87 = 1,16 \text{ м/с}^2 \end{aligned}$$

Положительный ответ означает, что на Рис.24 изображено правильное направление вектора.

Кривошип ОА

Угловое ускорение кривошипа ОА направлено в соответствии с направлением вращательного ускорения $\mathbf{W}_A^{bp}$: по часовой стрелке. Его модуль

$$\epsilon_{OA} = W_A^{bp} / OA = 1,16 \text{ с}^{-2}$$

Шатун АВ

Найти угловое ускорение шатуна АВ можно через вращательное ускорение $\mathbf{W}_{AB}^{bp}$.

Спроектировав уравнение (79) на у, получим:

$$W_A^{bp} = -W_{AB}^{bp} \cos \alpha + W_{AB}^{oc} \sin \alpha$$

Отсюда

$$W_{AB}^{bp} = (-W_A^{bp} + W_{AB}^{oc} \sin \alpha) / \cos \alpha = 2 \cdot (-1,16 + 1 \cdot 0,87) = -0,58 \text{ м/с}^2$$

Отрицательный результат указывает на то, что фактическое направление вектора $\mathbf{W}_{AB}^{bp}$ противоположно направлению, изображенному на Рис.24.

Угловое ускорение шатуна соответствует направлению вектора $\mathbf{W}_{AB}^{bp}$: по часовой стрелке. Его модуль

$$\varepsilon_{AB} = \mathbf{W}_{AB}^{bp} / AB = 0,58 c^{-2}$$

Матричное решение

Скорость

Формула скоростей

$$V_B = V_A + \Omega_{AB}(AB)$$

Подробно

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\phi}_{AB} \\ \dot{\phi}_{AB} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB \cos \alpha \\ AB \sin \alpha \end{pmatrix}$$

В развернутом виде

$$V_{Bx} = \dot{x} = -\dot{\phi}_{AB} AB \sin \alpha$$

$$0 = V_{Ay} + \dot{\phi}_{AB} AB \cos \alpha$$

Отсюда

$$\dot{\phi}_{AB} = -\frac{\dot{x}}{AB \sin \alpha} = \frac{0,87}{0,87} = 1 c^{-1} \text{ против часовой стрелки}$$

Результат совпал с векторным способом

$$V_{Ay} = -\dot{\phi}_{AB} AB \cos \alpha = -0,5 \text{ м/с}$$

Результат совпал с векторным способом

Поскольку

$$V_{Ay} = -\dot{\phi} OA$$

то

$$\dot{\phi} = -\frac{V_{Ay}}{OA} = 0,5 c^{-1} \text{ против часовой стрелки}$$

Результат совпал с векторным способом

Ускорение

Формула ускорений

$$\mathbf{W}_B = (\epsilon + \Omega^2)(OA) + (\epsilon_{AB} + \Omega_{AB}^2)(AB)$$

Матрицы имеют вид

$$\epsilon + \Omega^2 = \begin{pmatrix} -\dot{\phi}^2 & -\ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} & -\dot{\phi}^2 \end{pmatrix} \quad \epsilon_{AB} + \Omega_{AB}^2 = \begin{pmatrix} -\dot{\phi}_{AB}^2 & -\ddot{\phi}_{AB} \\ \ddot{\phi}_{AB} & -\dot{\phi}_{AB}^2 \end{pmatrix}$$

$$(OA) = \begin{pmatrix} -OA \\ 0 \end{pmatrix} \quad (AB) = \begin{pmatrix} AB \cos \alpha \\ AB \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Подставим матрицы

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\phi}^2 & -\ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} & -\dot{\phi}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -OA \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\phi}_{AB}^2 & -\ddot{\phi}_{AB} \\ \ddot{\phi}_{AB} & -\dot{\phi}_{AB}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB \cos \alpha \\ AB \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Раскрыв, получаем два уравнения с двумя неизвестными $\ddot{\phi}$ и $\ddot{\phi}_{AB}$

$$\ddot{x} = OA\dot{\varphi}^2 - AB \cos\alpha \dot{\varphi}_{AB}^2 - AB \sin\alpha \ddot{\varphi}_{AB}$$

$$0 = -OA\ddot{\varphi} + AB \cos\alpha \ddot{\varphi}_{AB} - AB \sin\alpha \dot{\varphi}_{AB}^2$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_{AB} &= \frac{1}{AB \sin\alpha} (OA\dot{\varphi}^2 - \ddot{x} - AB \cos\alpha \dot{\varphi}_{AB}^2) = \\ &= \frac{1}{0,87} (0,25 - 0,26 - 0,5) = -0,58 \text{ с}^{-2} \text{ по часовой стрелке}\end{aligned}$$

Результат совпал с векторным способом

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= \frac{1}{OA} (AB \cos\alpha \ddot{\varphi}_{AB} - AB \sin\alpha \dot{\varphi}_{AB}^2) = \\ &= -0,29 - 0,87 = -1,16 \text{ с}^{-2} \text{ по часовой стрелке}\end{aligned}$$

Результат совпал с векторным способом

Интерактивные excel задания по кинематике плоского механизма

На каждом шаге решения неправильно заполненная ячейка окрашивается в розовый цвет, что позволяет студенту самостоятельно найти ошибку.

Задания выполняются студентом до нахождения правильного решения.

Поэтому оценивается не правильность решения, а количество консультаций и срок выполнения задания.

Задания и пример его решения можно скачать по ссылке

<https://disk.yandex.ru/d/-VD2F0MKgSd31A>

Свободное движение тела

Скорость и ускорение точки тела.

Рассмотрим свободное тело, движущееся относительно системы отсчета с осями $X Y Z$ (Рис.25).

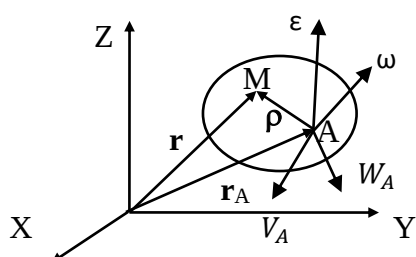


Рис.25

Движение тела задано, если указан способ определения его положения в произвольный момент времени t . Для этого достаточно задать движение полюса A и вращение тела вокруг полюса. Как будет показано ниже (см. сферическое движение тела), вращение можно задать тремя углами Эйлера $\psi(t), \theta(t), \varphi(t)$. Шесть функций

$$X_A(t), Y_A(t), Z_A(t) \quad \psi(t), \theta(t), \varphi(t)$$

являются **законом свободного движения твердого тела**. Это значит, что свободное тело имеет 6 степеней свободы. Вспомним, что при поступательном движении тело имеет три степени свободы, при вращательном - одну и при плоском - три степени свободы.

Заметим, что из первых трех функций по формулам кинематики точки можно найти скорость V_A и ускорение W_A полюса A . При рассмотрении сферического

движения тела будет показано, как по функциям углов Эйлера можно найти угловую скорость ω и угловое ускорение ε тела.

Скорость произвольной точки тела найдем по теореме о распределении скоростей

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_A + \omega \times \rho$$

Продифференцировав теорему, найдем

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{V}}_A + \dot{\omega} \times \rho + \omega \times \dot{\rho}$$

Учитывая, что

$$\dot{\omega} = \varepsilon$$

- **угловое ускорение** тела, а для вектора в теле ρ по формуле Эйлера

$$\dot{\rho} = \omega \times \rho$$

получим формулу **ускорения** произвольной точки тела,

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_A + \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho)$$

Последние два слагаемых уже встречались нам в плоском движении. Как и там, назовем их вращательным и осестремительным ускорениями точки М при ее вращении вокруг полюса А.

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_A + \mathbf{W}_{MA}^{bp} + \mathbf{W}_{MA}^{oc}$$

Таким образом формулы скоростей и ускорений показывают, что свободное движение тела можно представить как результат сложения двух движений: поступательного движения с полюсом А и сферического движения вокруг полюса.

СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Абсолютное, относительное и переносное движение точки

Известно, что законы Механики выполняются только в инерциальной системе

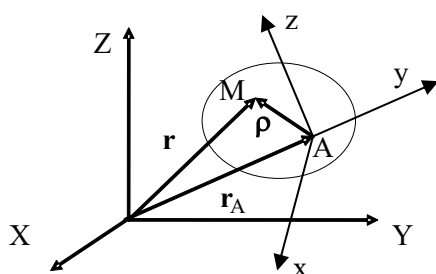


Рис. 26

отсчета. Таковой, как мы знаем, можно считать гелиоцентрическую систему. Назовем ее **абсолютной** и свяжем с ней оси X, Y, Z. Движение точки М по отношению к абсолютной системе описывается радиусом-вектором $\mathbf{r}(t)$ и называется **абсолютным**. Скорость и ускорение точки в абсолютном движении будем отмечать индексом “а”:

$$\mathbf{V}_a, \mathbf{W}_a$$

Иногда движение точки удобнее описывать относительно «**несущего тела**», по которому движется точка (Рис.26).

Например, наше движение на автомобиле естественно описывать по отношению к Земле, а не к Солнцу.

Точно так же, движение пассажира, пробирающегося к выходу в трамвае, естественно описывать по отношению к трамваю (несущему телу), а не к Земле.

Движение точки по отношению к несущему телу, наблюдаемое из абсолютной системы, называется *относительным*. Скорость и ускорение относительного движения точки будем отмечать индексом “r”:

$$V_r, W_r$$

Свяжем с несущим телом оси x, y, z . Относительное движение зададим проекциями относительного радиуса - вектора $\rho(t)$ на подвижные оси

$$x(t), y(t), z(t)$$

Пусть движение несущего тела в «абсолютной» системе отсчета задано координатами полюса А и углами Эйлера (см Сферическое движение),

$$X_A(t), Y_A(t), Z_A(t)$$

$$\psi(t), \Theta(t), \varphi(t)$$

Из этих функций можно найти скорость и ускорение полюса V_A, W_A , угловую скорость ω и ускорение ε несущего тела.

Переносной скоростью и ускорением

$$V_e, W_e$$

точки М называется *скорость и ускорение той точки тела, с которой в данный момент совпадает точка М*. Иначе говоря, точки М, зафиксированной в данный момент на теле (метод остановки).

Найдем абсолютную скорость и ускорение точки М по известным характеристикам переносного и относительного движений.

$$V_a, W_a (V_A, W_A, \rho, \omega, \varepsilon)$$

Из Рис.26 следует

$$r = r_A + \rho \quad (11)$$

Рисунок и формула такие же, как в свободном движении тела, но с одним принципиальным отличием. Здесь вектор ρ не является вектором в теле. Его модуль изменяется, поскольку точка М движется по телу. По этой причине к вектору ρ не применима формула Эйлера. Представим вектор ρ в подвижной системе отсчета через закон относительного движения

$$\rho = x i + y j + z k \quad (12)$$

Здесь i, j, k - орты подвижной системы, вращающиеся вместе с телом.

Дифференцируя (11) по времени, находим

$$V_a = V_A + \dot{\rho} \quad (13)$$

Дифференцируя (12) по времени, находим:

$$\dot{\rho} \equiv \frac{d\rho}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} + x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + z \frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

Орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ являются векторами в несущем теле, поэтому их производные находим по формуле Эйлера

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}; \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}; \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}$$

Таким образом,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d_r\rho}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \rho \quad (14)$$

Здесь введено обозначение относительной *производной*

$$\frac{d_r\rho}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

Она характеризует изменение вектора ρ при остановленном несущем теле.

Формула (14) выражает **теорему о связи производных**:

Абсолютная производная от вектора, заданного в подвижной системе, равна относительной производной плюс векторное произведение угловой скорости системы на вектор

Заметим, что при поступательном движении системы ($\boldsymbol{\omega} = 0$) производные совпадают.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d_r\rho}{dt} \quad \text{при} \quad \boldsymbol{\omega} = 0$$

Формула (13) приобретает вид

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\omega} \times \rho + \frac{d_r\rho}{dt} \quad (15)$$

В подвижной системе столбец проекций относительной производной имеет простой вид

$$\frac{d_r\rho}{dt} \rightarrow \dot{\rho} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

Поэтому формулу (15) запишем в матричном виде в подвижных осях

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\Omega}\rho + \dot{\rho}$$

Если в данный момент зафиксировать точку на теле, то

$$\frac{d_r\rho}{dt} = 0$$

и абсолютная скорость по определению станет переносной.

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\omega} \times \rho$$

Относительную скорость найдем, остановив тело ($\mathbf{V}_A, \boldsymbol{\omega} = 0$)

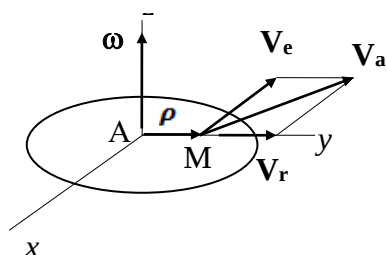
$$V_r = \frac{d_r \rho}{dt}$$

Таким образом, пришли к **теореме о сложении скоростей** в векторной форме

$$V_a = V_e + V_r$$

Абсолютная скорость точки равна векторной сумме ее переносной и относительной скоростей.

Пример решения задачи



Диск равномерно вращается вокруг оси z с угловой скоростью $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$. По радиусу диска движется точка M по закону $y = 3t^2 - 2t$ (м). Найти абсолютную скорость точки в момент времени $t_1 = 1$ сек.

Сначала решим задачу методом **остановки**. Метод заключается в том, что при изучении относительного движения мысленно останавливается переносное движение, и наоборот. Это соответствует определениям этих движений.

Относительное движение ($\omega = 0$)

Мысленно остановим вращение диска и найдем проекцию относительной скорости на подвижную ось y, продифференцировав закон относительного движения:

$$V_{ry} = \dot{y} = (6t - 2)|_{t=1} = 4 \text{ м/сек}$$

Переносное движение ($y = \text{Const}$)

Фиксируя точку M на расстоянии $OM = y|_{t=1} = 1 \text{ м}$, найдем ее переносную скорость во вращении

$$V_e = \omega OM = 2 \text{ м/сек}$$

Теорема о сложении скоростей

$$V_a = V_e + V_r$$

в проекциях на подвижные оси дает

$$V_{ax} = -V_e = -2 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad V_{ay} = V_r = 4 \text{ м/с}, \quad V_{az} = 0$$

Найдем абсолютную скорость **матричным методом**.

$$V_A = 0; \quad \Omega = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dot{\rho} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Находим проекции абсолютной скорости на подвижные оси:

$$\begin{pmatrix} V_{ax} \\ V_{ay} \\ V_{az} \end{pmatrix} = \Omega \rho + \dot{\rho} = 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3t^2 - 2t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6t - 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ м/с}$$

Видим, что результаты совпадают с методом остановки.

Теорема о сложении ускорений

Дифференцируя по времени теорему о сложении скоростей в векторной форме (15),

находим

$$W_a = W_A + \varepsilon \times \rho + \omega \times \dot{\rho} + \dot{V}_r$$

Векторы ρ и V_r заданы в подвижной системе, поэтому их абсолютные производные находятся по теореме о связи производных

$$\dot{\rho} = \omega \times \rho + \frac{d_r \rho}{dt} = \omega \times \rho + V_r$$

$$\omega \times \dot{\rho} = \omega \times V_r + \omega \times (\omega \times \rho); \quad \dot{V}_r = \omega \times V_r + \frac{d_r V_r}{dt}$$

Замечательно, что в этих выражениях совпадают слагаемые $\omega \times V_r$, полученные из двух, совершенно разных формул: $\omega \times \dot{\rho}$ и $\dot{V}_r$. В первом случае произведение $\omega \times V_r$ характеризует изменение переносной вращательной скорости $\omega \times \rho$ ввиду изменения относительного положения точки ρ .

Во втором случае произведение $\omega \times V_r$ характеризует изменение направления вектора относительной скорости V_r при вращении несущего тела с угловой скоростью ω .

Таким образом, произведения $\omega \times V_r$ характеризуют взаимное влияние относительного движения на вращательную переносную скорость и переносного вращения на относительную скорость. Поразительно то, что эти влияния совершенно одинаковы!

Получаем

$$W_a = W_A + \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho + V_r) + \omega \times V_r + \frac{d_r V_r}{dt}$$

Объединяя одинаковые слагаемые, находим

$$W_a = W_A + \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho) + 2(\omega \times V_r) + \frac{d_r V_r}{dt} \quad (16)$$

Формула (16) в матричной форме в подвижной системе, где просто записывается последнее слагаемое:

$$W_a = W_A + (\varepsilon + \Omega^2)\rho + 2\Omega\dot{\rho} + \ddot{\rho}$$

Чтобы найти переносное ускорение, зафиксируем по определению точку на несущем теле.

Тогда $V_r, W_r = 0$ и абсолютное ускорение становится переносным по определению

$$W_e = W_A + \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho)$$

Видим, что формула (98) совпадает с формулой ускорения точки тела, как и должно быть по определению.

Остановив несущее тело ($W_A, \omega, \varepsilon = 0$), найдем относительное ускорение

$$W_r = \frac{d_r V_r}{dt}$$

Слагаемое в (16)

$$W_c = 2(\omega \times V_r)$$

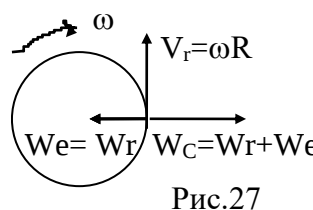
называется *добавочным или Кориолисовым ускорениям*.

Приходим к теореме Кориолиса:

$$W_a = W_e + W_r + W_c \quad (17)$$

Видим, что в отличие от скоростей, сумма переносного и относительного ускорений не равна, в общем случае, абсолютному ускорению. Именно поэтому Кориолисово ускорение называют *добавочным*.

Ускорение названо по имени французского учёного Гюстава Гаспара Кориолиса, впервые её описавшего. Ускорение Кориолиса было получено Кориолисом в 1833 году, Гауссом в 1803 году и Эйлером в 1765 году (!).



Необходимость кориолисова ускорения становится очевидной из следующего простого примера. Платформа радиуса R равномерно вращается с угловой скоростью ω (Рис.27). Человек бежит по краю платформы против ее вращения с относительной скоростью, равной его переносной скорости

$$V_r = \omega R,$$

При этом, по отношению к Земле человек неподвижен, и его абсолютное ускорение равно нулю. Однако сумма переносного и относительного ускорений не равна нулю.

Действительно, относительное ускорение W_r , будучи нормальным ускорением точки, направлено к центру платформы и равно:

$$W_r = \frac{V_r^2}{R} = \omega^2 R$$

Переносное ускорение точки, будучи осестремительным ускорением точки обода, тоже направлено к центру платформы и равно относительному ускорению

$$W_e = \omega^2 R = W_r$$

Сумма ускорений

$$W_e + W_r$$

направлена к центру колеса и не равна нулю.

$$W_e + W_r = 2\omega^2 R$$

Только наличие Кориолисова ускорения W_c обеспечивает отсутствие абсолютного ускорения. Вектор угловой скорости ω направлен за чертеж, значит W_c направлено от центра и по модулю равно

$$W_c = 2\omega V_r = 2\omega^2 R$$

Вот теперь, по теореме о сложении ускорений абсолютное ускорение точки W_a обратится в ноль. В проекции на радиус:

$$W_a = W_c - W_e - W_r = 0$$

Кориолисово ускорение

$$W_c = 2(\omega \times V_r)$$

направлено по правилу правого винта и обращается в ноль в трех случаях:

$$W_c = 0:$$

1. Несущее тело движется поступательно или меняет направление вращения ($\omega = 0$)
2. Относительная скорость точки V_r параллельна угловой скорости тела ω . Так $W_c = 0$ при движении по меридиану в момент пересечения экватора Земли.
3. Точка остановилась на несущем теле ($V_r = 0$)

На основании сказанного делаем вывод, что Кориолисово ускорение характеризует:

1. Влияние переносного вращения несущего тела (ω) на относительную скорость V_r . Зафиксированный в несущем теле вектор V_r изменяется со скоростью: $\omega \times V_r$
2. Влияние относительного движения $\rho(t)$ на переносную вращательную скорость $\omega \times \rho$. При фиксированной угловой скорости ω , относительная производная

$$\frac{d_r}{dt}(\omega \times \rho) = \omega \times \frac{d_r \rho}{dt} = \omega \times V_r$$

дает вторую составляющую Кориолисова ускорения

Пример решения задачи векторным и матричным способом

Рассмотрим тот же пример, что и в теореме о сложении скоростей.

$$\omega = 2c^{-1}. \quad y = 3t^2 - 2t \text{ (м)}.$$

Сначала применим *метод остановки* (Рис.28)

Относительное движение ($\omega=0$)

$$W_{rx} = \ddot{x} = 6 \text{ м/с}^2$$

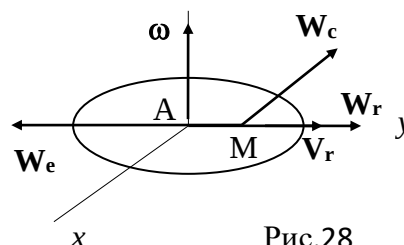
Переносное движение ($V_r = 0$)

$$W_e = \omega^2 x|_{t=1} = 4 \text{ м/с}^2$$

Кориолисово ускорение

$$W_c = 2\omega V_r = 16 \text{ м/с}^2$$

Теорема Кориолиса в проекциях на подвижные оси



$$W_{ax} = -W_c = -16 \text{ м/с}^2; \quad W_{ay} = W_r - W_e = 2 \text{ м/с}^2; \quad W_z = 0$$

Тот же ответ получим **матричным методом**.

$$W_a = W_A + (\varepsilon + \Omega^2)\rho + \ddot{\rho} + 2\Omega\dot{\rho}$$

В подвижных осях:

$$W_A = 0; \quad \varepsilon = \dot{\Omega} = 0$$

$$\Omega^2 = -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dot{\rho} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \ddot{\rho} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_a = (\Omega^2)\rho + \ddot{\rho} + 2\Omega\dot{\rho}$$

$$\begin{pmatrix} W_{ax} \\ W_{ay} \\ W_{az} \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3t^2 - 2t \\ 0 \end{pmatrix} + 2\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6t - 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}_{t=1}$$

$$= \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ м/с}^2$$

Видим, что результаты двух методов совпадают.

Преимуществом матричного метода является возможность вычислять искомые величины в произвольный момент времени без векторных построений.

Интерактивные excel задания

по кинематике составного движения точки

На каждом шаге решения неправильно заполненная ячейка окрашивается в розовый цвет, что позволяет студенту самостоятельно найти ошибку.

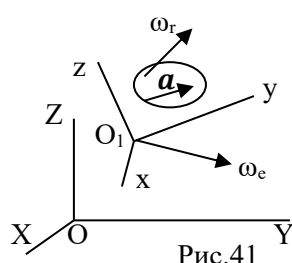
Задания выполняются студентом до подтверждения правильности решения путем подстановки найденного решения в уравнения равновесия всей системы. Поэтому оценивается не правильность решения, а срок выполнения задания.

Задания и пример его решения можно скачать по ссылке
https://disk.yandex.ru/d/KUS3FkBiatmT_A

Сложение вращений и сферическое движение тела

Теорема о сложении угловых скоростей тела.

Пусть тело Т имеет в данный момент угловую скорость ω_r по отношению к подвижной системе координат $x y z$, которая, в свою очередь, вращается с угловой скоростью ω_e по отношению к условно неподвижной системе координат $X Y Z$ (Рис.41).



Рассмотрим вектор в теле **a**. Наблюдатель O_1 в подвижной системе запишет формулу Эйлера для относительной производной вектора

$$\frac{d_r \mathbf{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{a}$$

Наблюдатель О в неподвижной системе запишет формулу Эйлера для абсолютной производной вектора

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{a}$$

Как известно, обе производные связаны теоремой

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d_r \mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{a}$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{a}$$

Поскольку $\mathbf{a}$ – произвольный вектор в теле, то отсюда следует теорема о сложении угловых скоростей:

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r$$

Обобщение. Если рассмотреть последовательность N подвижных систем координат, то формулу (102) можно обобщить:

$$\boldsymbol{\omega}_a = \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k + \boldsymbol{\omega}_r$$

где $\boldsymbol{\omega}_k$ – угловая скорость системы с номером k по отношению к системе с номером $k-1$, а $\boldsymbol{\omega}_r$ – угловая скорость тела по отношению к последней системе с номером N.

Сложение вращений тела вокруг параллельных осей.

Пара вращений

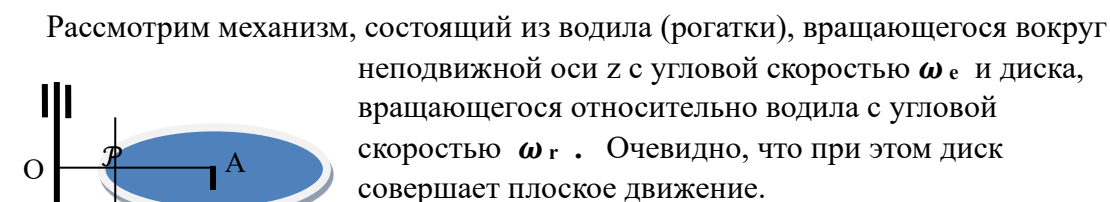


Рис.42

Рассмотрим механизм, состоящий из водила (рогатки), вращающегося вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_e$ и диска, вращающегося относительно водила с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_r$. Очевидно, что при этом диск совершает плоское движение.

Пусть сначала угловые скорости со направлены. В этом случае абсолютная угловая скорость

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r$$

отлична от нуля. Это значит, что существует мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$, скорость которого равна

нулю в данный момент:

$$V_{\mathcal{P}} = 0$$

Точка $\mathcal{P}$ совершает составное движение, поэтому ее скорость равна сумме переносной и относительной скоростей

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_P^e + \mathbf{V}_P^r = \mathbf{0}$$

Значит,

$$\mathbf{V}_P^e = -\mathbf{V}_P^r$$

Переносная и относительная скорости направлены противоположно только у точек на линии ОА. Среди них есть точка $\mathcal{P}$, для которой:

$$V_P^e = V_P^r; \quad \omega_e OP = \omega_r AP$$

Мы нашли положение мгновенного центра скоростей

$$\frac{OP}{AP} = \frac{\omega_r}{\omega_e}$$

Таким образом, в данном случае тело совершает плоское движение, при котором мгновенный центр скоростей делит расстояние между осями обратно пропорционально угловым скоростям «внутренним образом».

Пусть теперь направления вращений **противоположны**. В этом случае модуль

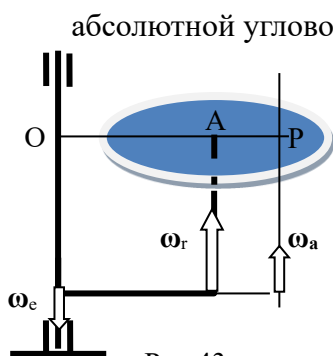


Рис.43

абсолютной угловой скорости равен разности

$$\omega_a = \omega_r - \omega_e \quad (\omega_r > \omega_e)$$

Сначала положим, что $\omega_a \neq 0$.

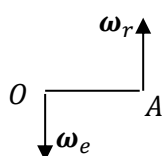
Тогда опять существует МЦС $\mathcal{P}$. Но теперь он вне отрезка ОА, со стороны большей угловой скорости ω_r . Попрежнему

$$\frac{OP}{AP} = \frac{\omega_r}{\omega_e}$$

Но на этот раз мгновенный центр скоростей делит расстояние между осями обратно пропорционально угловым скоростям «внешним образом».

Случай равенства модулей скоростей

$$\omega_r = \omega_e$$



называется «**парой вращений**». При этом тело не вращается

$$\omega_a = 0$$

а совершает **поступательное движение**. Точно такое, как кабина колеса обозрения. Скорости всех точек диска одинаковы и равны

$$V = V_A = \omega OA$$

то есть «моменту» пары вращений.

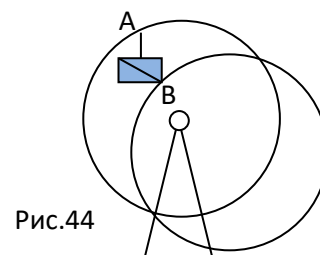


Рис.44

Дифференциальный и планетарный механизмы. Метод Виллиса.

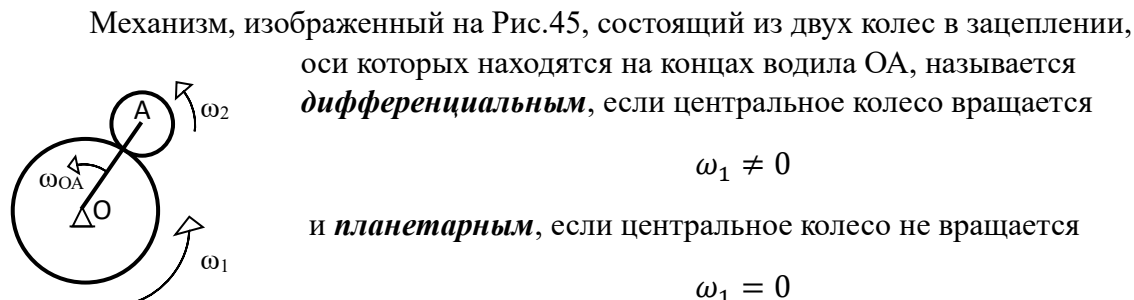


Рис.45

Механизм, изображенный на Рис.45, состоящий из двух колес в зацеплении, оси которых находятся на концах водила ОА, называется **дифференциальным**, если центральное колесо вращается

$$\omega_1 \neq 0$$

и **планетарным**, если центральное колесо не вращается

$$\omega_1 = 0$$

Методом Виллиса найдем угловую скорость ω_2 колеса 2 по угловым скоростям ω_{OA} и ω_1

Метод состоит в придании всему механизму скорости $-\omega_{OA}$. При этом, согласно теореме о сложении угловых скоростей, водило ОА останавливается. Механизм превращается в обычное внешнее зацепление двух колес с новыми угловыми скоростями

$$\tilde{\omega}_1 = \omega_1 - \omega_{OA}; \quad \tilde{\omega}_2 = \omega_2 - \omega_{OA}$$

Новые угловые скорости противоположны по направлению и обратно пропорциональны радиусам колес.

$$\frac{\tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1} = -\frac{r_1}{r_2}$$

Таким образом,

$$\frac{\omega_2 - \omega_{OA}}{\omega_1 - \omega_{OA}} = -\frac{r_1}{r_2}$$

Или

$$\omega_2 = \omega_{OA} - \frac{r_1}{r_2}(\omega_1 - \omega_{OA})$$

Для **планетарного** механизма

$$\omega_1 = 0; \quad OA = r_1 + r_2$$

Получаем очевидный результат

$$\omega_2 = \omega_{OA} \frac{OA}{r_2}$$

Сферическое движение тела.

Углы Эйлера. Закон движения.

Сферическим называется движение тела, при котором одна точка А тела остается неподвижной. Название отражает тот факт, что при таком движении точки

тела движутся по сферам. Более полно это движение называется **вращением вокруг неподвижной точки**.

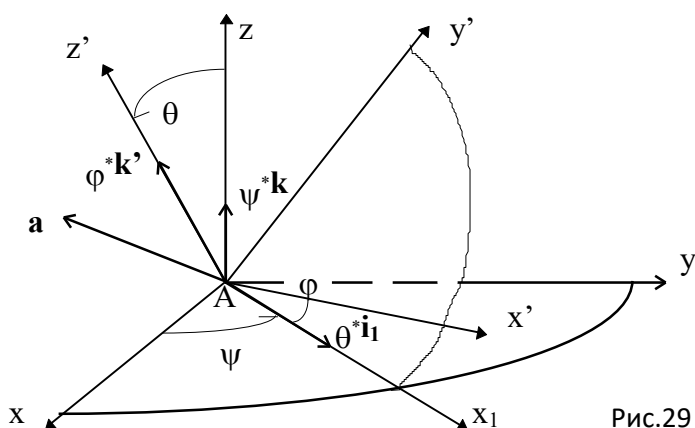


Рис.29

Покажем, что положение тела можно задать тремя угловыми координатами. В теоретической механике чаще всего рассматривают углы Эйлера: ψ - **угол прецессии**, θ - **угол нутации**, ϕ - **угол собственного вращения** (Рис.29).

По значениям углов Эйлера построим положение тела в пространстве. Иначе говоря, совместим оси (x, y, z) с осями (x', y', z') .

Сначала поворотом на угол ψ вокруг оси z перейдем к осям (x_1, y_1, z) (y_1 не изображена на Рис.29). Ось x_1 называется **линией узлов**.

Далее поворотом на угол θ вокруг оси x_1 перейдем к осям (x_1, y_2, z') (y_2 не изображена).

Третьим и последним осуществим поворот на угол ϕ вокруг оси z' . При этом оси (x_1, y_2, z') совместятся с осями (x', y', z') :

Мы показали, что углы Эйлера определяют положение тела. Таким образом, три функции $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\phi(t)$ являются **законом сферического движения** тела. Поэтому говорят, что такое тело имеет 3 степени свободы.

Угловая скорость и угловое ускорение тела

Найдем угловую скорость тела, воспользовавшись теоремой о сложении угловых скоростей.

Ее можно применить, поскольку углы Эйлера задают положение каждой системы координат по отношению к предыдущей системе координат.

Тело совершает три вращения с угловыми скоростями: $\dot{\psi} \mathbf{k}$ вокруг оси z , $\dot{\theta} \mathbf{i}_1$ вокруг оси x_1 и $\dot{\phi} \mathbf{k}'$ вокруг оси z' . По теореме о сложении угловых скоростей:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{i}_1 + \dot{\phi} \mathbf{k}'$$

Проектируя это выражение на неподвижные оси, находим

$$\omega_x = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta; \quad \omega_y = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta; \quad \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta;$$

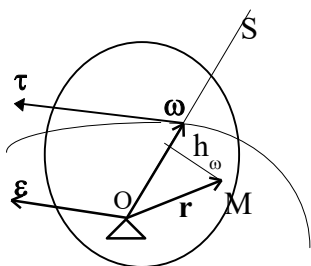


Рис.30

В отличие от вращательного движения тела, где вектор угловой скорости ω все время направлен вдоль неподвижной оси вращения, здесь вектор ω изменяет как модуль, так и направление. Поэтому вектор углового ускорения

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

направленный по касательной к годографу вектора ω , не совпадает с ω по направлению.

Скорость и ускорение точки тела

Выберем за полюс неподвижную точку O. Тогда скорость произвольной точки M тела можно найти по формуле

$$V = \frac{dr}{dt} = \omega \times r$$

Отсюда следует, что в данный момент скорости распределены в теле так, как если бы тело вращалось вокруг мгновенной **оси** S (Рис.30). Это значит, что скорости точек на оси S равны нулю.

Скорости других точек тела линейно зависят от расстояния h от точки до оси S.

$$V = \omega h$$

Ускорение произвольной точки M

$$W = \varepsilon \times r + \omega \times (\omega \times r)$$

состоит из вращательной и осеостремительной составляющих:

$$W = W^{BP} + W^{OC}; \quad W^{BP} = \varepsilon \times r; \quad W^{OC} = \omega \times (\omega \times r)$$

Будет показано, что в сферическом движении W^{BP} и W^{OC} не ортогональны. Осеостремительное ускорение W^{OC} направлено к мгновенной оси S, а вращательное перпендикулярно плоскости (εr).

Векторным формулам соответствуют матричные выражения скорости и ускорения, удобные для их вычисления в произвольный момент времени.

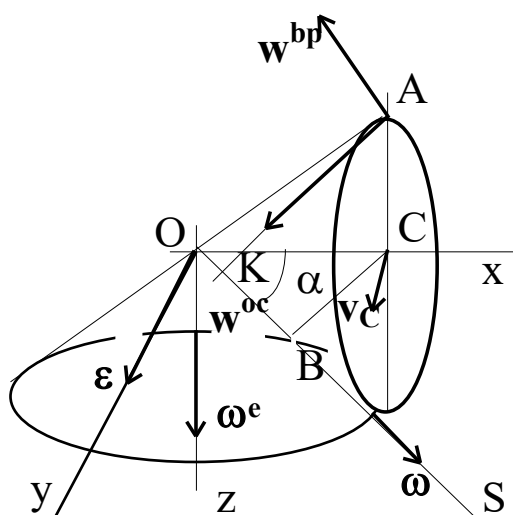
$$V = \Omega r; \quad W = (\varepsilon + \Omega^2)r$$

Пример решения задачи

Подвижный конус обкатывается по неподвижному конусу без проскальзывания. Заданы: угол α , длина OA и скорость V_C центра основания подвижного конуса.

Определить скорость и ускорение верхней точки A подвижного конуса.

Ввиду отсутствия проскальзывания скорости точек образующей контакта в данный момент равны нулю. Мгновенная ось S и угловая скорость ω направлены вдоль этой образующей.



$$V_c = \omega CB = \omega OA \sin \alpha \cos \alpha$$

Отсюда

$$\omega = \frac{2V_c}{OA \sin 2\alpha}; \quad V_A = \omega AK = 2V_c$$

Осесимметричное ускорение W^{oc} точки A направлено по AK и равно

$$W^{oc} = \omega^2 AK = \frac{4V_c^2}{OA \sin 2\alpha}$$

Постоянная по модулю угловая скорость ω вращается вместе с мгновенной осью S вокруг вертикальной оси. Скорость вращения равна

$$\omega_e = \frac{V_c}{OC} = \frac{V_c}{AC \cos \alpha}$$

Угловое ускорение ϵ направлено по касательной к годографу вектора ω параллельно V_c .

Таким образом, действительно в сферическом движении угловое ускорение и скорость не коллинеарны. Найдем ϵ по формуле Эйлера

$$\epsilon = \omega_e \times \omega$$

Таким образом

$$\epsilon = \omega_e \omega \cos \alpha = \frac{2V_c^2}{OA^2 \sin 2\alpha}$$

Вращательное ускорение $W^{вр}$ точки A направлено как векторное произведение

$$W^{вр} = \epsilon \times OA$$

перпендикулярно OA в плоскости xz.

$$W^{вр} = \epsilon OA = \frac{2V_c^2}{OA \sin 2\alpha}$$

Видим, что в сферическом движении вращательное и осесимметричное ускорения не ортогональны.

Окончательно

$$W^2 = W^{вр2} + W^{oc2} - 2W^{вр}W^{oc} \cos 2\alpha$$