

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

А. В. Костарев Т. А. Костарева

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ДИНАМИКА

ТЕОРИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Динамика точки

	Стр
Еще раз о принципах механики	3
Дифференциальные уравнения движения точки.	6
Прямая и обратная задачи динамики точки.	
Динамика относительного движения точки. Основное уравнение динамики относительного движения точки.	7
Невыполнение принципа Галилея. Условие относительного покоя.	9
Условия инерциальности подвижной системы. Принцип относительности Галилея.	10
Некоторые доказательства неинерциальности геоцентрической системы.	

Общие теоремы динамики системы

Материальная система. Центр масс и центр тяжести.	14
Классификация сил.	15
Дифференциальные уравнения движения системы. Теорема об изменении количества движения. Теорема о движении центра масс системы.	16
Кинетический момент точки и системы относительно центра и оси	19
Кинетический момент системы в сложном движении. Теорема об изменении кинетического момента системы.	20
Кинетический момент тела в сферическом движении. Матрица инерции	21
Вращение тела вокруг главной или центральной оси.	23
Преобразование матрицы инерции при переносе системы координат из центра инерции. Формула Штейнера-Гюйгенса.	24
Общие уравнения движения твердого тела. Динамическая эквивалентность систем сил.	25
Уравнения поступательного движения тела. Уравнения вращательного движения тела.	28
Уравновешенность вращающегося тела.	29
Уравнения плоского движения тела.	30
Теорема об изменении кинетической энергии точки и системы.	31
Элементарная работа и мощность силы.	
Теорема Кенига. Кинетическая энергия твердого тела.	32
Мощность силы, приложенной к твердому телу.	35
Конечная работа силы.	36

Начала аналитической механики Лагранжа

Классификация связей.	39
Обобщенные координаты. Число степеней свободы системы	40
Возможная, действительная и виртуальная скорость точки системы.	41
Обобщенные силы и реакции. Идеальные связи	
Статический принцип возможных скоростей.	43
Комплекты контрольных задач на принцип возможных скоростей.	
Пример решения задачи на принцип возможных скоростей	44

Полная система уравнений для системы с идеальными голономными нестационарными связями из теоремы об изменении кинетической энергии

Тождества Лагранжа	46
Уравнения Ньютона в проекциях на обобщенные координаты и на движение связи.	47
Уравнения Лагранжа второго рода	48
Пример решения задачи	49
Комплект контрольных задач	50
Пример вывода дифференциального уравнения движения системы с 1ой степенью свободы методами Ньютона и Лагранжа	
Аналитические уравнения для определения реакций идеальных связей	53

Консервативные системы

Определение и свойства потенциального силового поля.	57
Вычисление потенциальной энергии. Закон сохранения полной механической энергии.	58
Обобщенные силы	60
Статический принцип возможных перемещений для консервативной системы	61
Уравнение Лагранжа для консервативных систем. Циклические координаты и интегралы.	

Полный курс видео лекций на <https://stepik.org/a/71088>

ДИНАМИКА ТОЧКИ.

Динамика является основным разделом механики. В этом разделе изучают законы движения твердого тела под действием приложенных сил. Простейшим объектом динамики является материальная точка, т. е. тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с длиной его траектории. Например, планета Земля может быть принята за материальную точку, если рассматривать её движение вокруг Солнца.

Еще раз о принципах механики.

В статике мы уже сформулировали Принципы механики. Сейчас рассмотрим их трактовку и следствия для динамики.

1. Принцип инерции Галилея (первый закон Ньютона).

Существует такая система отсчёта, в которой изолированная материальная точка сохраняет покой, либо равномерное прямолинейное движение (по инерции).

Изолированная точка — это точка, не взаимодействующая с другими точками. Очевидно, что понятие изолированной точки является абстракцией, найти такую точку

невозможно. Однако это принципиальное понятие позволило Галилею понять, что для движения по инерции не требуется действия сил. Ведь до него люди считали, что для движения нужно прикладывать силу (тележку нужно толкать), забывая о силах сопротивления.

Нет экспериментальных доказательств существования инерциальных систем отсчета. Очевидно, это понятие тоже является абстракцией. Однако найдены системы, очень близкие к инерциальным. “Наиболее” инерциальной системой отсчёта может считаться гелиоцентрическая система отсчёта. Её центр в Солнце, а оси направлены на удалённые звёзды.

Будет показано, что система отсчета, связанная с Землёй, не является инерциальной. Однако погрешность выполнения законов Ньютона на Земле невелика.

2. Основной принцип (второй закон Ньютона).

Ускорение материальной точки пропорционально действующей на нее силе и обратно пропорционально массе точки

$$W = \frac{1}{m} F$$

Здесь m - масса точки, скалярная постоянная величина.

Принцип позволяет отличить инерциальную систему от не инерциальной. Мотоциклист чувствует силу, которая разгоняет его по отношению к стоящему человеку. Человек же не чувствует никакой силы от ускорения по отношению к мотоциклисту. Причина в том, что система отсчета, связанная со стоящим человеком, инерциальна, а система мотоциклиста - нет. Иначе говоря, ускорение мотоциклиста вызвано силой, действующей на колесо, а ускорение стоящего человека вызвано не силой, а только ускорением мотоциклиста.

Следствие 1: *Силу невозможно создать без сопротивления*, а именно массы, которая выражает способность точки сопротивляться изменению ее скорости.

Следствие 2: *При заданной массе сила определяется ускорением.* При малой массе точки величина силы ограничена возможностью создать большое ускорение точки. Невозможно приложить большую силу к пушинке, поскольку это потребует создания очень большого ускорения. Никакая сила не сдвинет тело бесконечной массы. Если ударить палкой по подушке, лежащей на весах, стрелка качнется меньше, чем при ударе без подушки. Причина в ускорении. Подушка уменьшает ускорение палки (большой путь деформирования подушки) — значит, уменьшает силу удара при данной массе палки.

Это единственный количественный закон механики. Он связывает три величины m , W , и F , выражая, таким образом, одну из них через две другие независимые. Ускорение W с размерностью $[W]$ всегда принимают за независимую величину, поскольку оно связывает базовые величины длины и времени.

В зависимости от того, что принимается за вторую независимую величину (m или F), возможны **два типа размерности механических величин**:

- 1) Системы, в которых за вторую независимую величину принята масса m размерности $[m]$. Примером может служить система СИ. В ней $[W] = \text{м/сек}^2$, $[m] = \text{кг}$, а производная единица силы называется Ньютоном:

$$[F] = [m][w] = \text{Н} = \text{кг м/сек}^2$$

- 2) Системы, в которых за вторую независимую величину принята сила. Примером может служить Техническая система. В ней $[W] = \text{м/сек}^2$, $[F] = \text{кГс}$, а производная единица силы называется Технической единицей массы:

$$[m] = [F]/[w] = \text{ТЕМ} = \text{кГс сек}^2/\text{м}$$

При решении задач все вычисления важно проводить в одной системе единиц. Напомним соотношение между единицами сил в двух системах. $1 \text{ кГс} = 9,8 \text{ Н}$

3. Принцип равенства действия и противодействия.

Две точки взаимодействуют с равными по модулю, противоположно направленными силами. Эти силы уравновешены только для точек одного и того же твердого тела.

4. Принцип внешней аддитивности (правило сложения сил)

Воздействие среды на точку можно заменить одной силой F , равной сумме сил, с которыми точки среды действуют на изучаемую точку.

$$F = \sum F_k$$

В отличие от статики, *силы в динамике* могут быть функциями положения точки (ее радиуса - вектора r), скорости V и независимой переменной - времени t .

$$F = F(r, V; t)$$

Рассмотрим, например, силы, действующие на ракету (Рис.1): сила тяжести зависит от расстояния до Земли $P(r)$, сила тяги двигателя есть функция времени $F(t)$, сила сопротивления воздуха зависит от скорости ракеты и плотности атмосферы (расстояния до Земли) $R(r, V)$

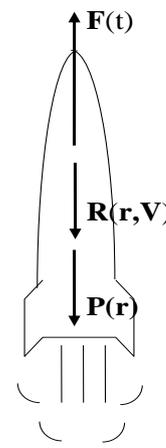


Рис 1

Дифференциальные уравнения движения точки.

Прямая и обратная задачи динамики точки.

Запишем второй закон Ньютона с учетом того, что ускорение точки есть вторая производная от радиуса - вектора по времени

$$m\ddot{r} = \sum F_k(r, \dot{r}; t) \quad (1)$$

Выражение, связывающее обыкновенные производные искомой функции $r(t)$ независимой переменной t называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Порядок высшей производной называется порядком дифференциального уравнения. Уравнение (1) является векторным дифференциальным уравнением второго порядка.

Для решения задач уравнение (1) нужно записать в скалярном виде, то есть в проекциях на оси координат. Проектируя (1) на декартовы оси, находим дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum F_{kx}(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \\ m\ddot{y} &= \sum F_{ky}(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \\ m\ddot{z} &= \sum F_{kz}(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \end{aligned} \quad (2)$$

Эта система дифференциальных уравнений имеет шестой порядок.

Уравнение (1) в проекциях на оси τ , n , b дает три дифференциальных уравнения в естественных осях.

$$m\ddot{\sigma} = \sum F_{k\tau}$$

$$\frac{m\dot{\sigma}^2}{\rho} = \sum F_{kn}$$

$$0 = \sum F_{kb}$$

Здесь учтено, что проекция ускорения на бинормаль b равна нулю.

Прямая и обратная задачи динамики точки.

Дифференциальные уравнения, например в декартовых координатах (4), допускают постановку двух типов задач динамики точки:

- 1) **Прямая задача динамики точки** состоит в определении равнодействующей сил, приложенных к точке, по заданному закону ее движения. Пусть задан закон движения точки в декартовых координатах.

$$x(t), y(t), z(t)$$

Нужно найти равнодействующую $R(t)$.

Решение этой задачи связано с дифференцированием закона движения. Проекции и модуль равнодействующей сил находим по формулам:

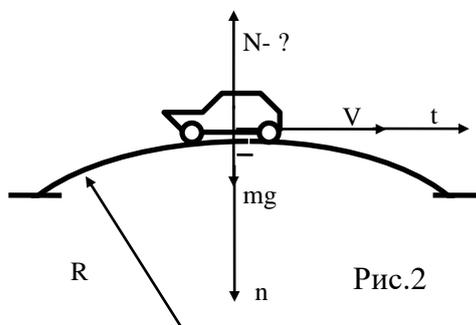
$$R_x = m\ddot{x}$$

$$R_y = m\ddot{y}$$

$$R_z = m\ddot{z}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Пример прямой задачи:



Найти реакцию N моста радиуса R на автомобиль массы m , движущийся со скоростью V в верхней точке моста (Рис.2). Поскольку траектория движения известна, нужно воспользоваться уравнениями в естественных осях:

В проекции на нормаль

$$\frac{mV^2}{R} = mg - N$$

Значит

$$N = m \left(g - \frac{V^2}{R} \right)$$

2) **Обратная задача динамики точки** является основной и состоит в определении закона движения точки по заданным силам.

В этом случае, уравнения (2) являются системой дифференциальных уравнений для нахождения трех неизвестных функций времени t

$$x(t), \quad y(t), \quad z(t)$$

Решение обратной задачи связано с интегрированием системы (4) шестого порядка.

При интегрировании возникают шесть постоянных и решение (второй интеграл уравнений) будет иметь вид:

$$x = x(t; C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6)$$

$$y = y(t; C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6)$$

$$z = z(t; C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6)$$

Наличие постоянных интегрирования указывает на то, что система (4) имеет множество решений. Это значит, что силы не однозначно определяют движение точки. Иначе говоря, одна и та же сила вызывает разные траектории движения точки.



Рис.3

Например, движение камня под действием одной и той же силы тяжести может

происходить по разным траекториям в зависимости от того, как его бросить (Рис.3). Произвольные постоянные интегрирования определяются из начальных условий движения.

$$t = 0: x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 \quad \dot{y} = \dot{y}_0 \quad \dot{z} = \dot{z}_0$$

Чтобы определить постоянные интегрирования нужно подставить эти условия в решение (9) и его производную (первый интеграл уравнений)

$$\dot{x} = \dot{x}(t; C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6)$$

$$\dot{y} = \dot{y}(t; C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6)$$

$$\dot{z} = \dot{z}(t; C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6)$$

Получим алгебраическую систему относительно постоянных C_1, \dots, C_6 которая имеет единственное решение.

ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Основное уравнение динамики относительного движения точки

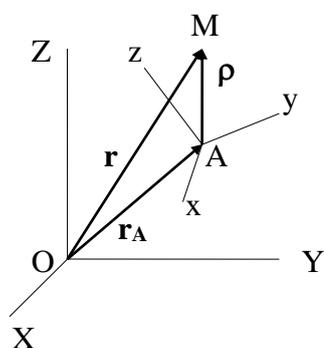
Законы Ньютона справедливы только в инерциальной системе отсчета. Известна только одна система отсчета, близкая к инерциальной. Это гелиоцентрическая система, оси которой имеют начало в Солнце и направлены на удаленные звезды. Установлено, что система отсчета, связанная с Землей, не является вполне инерциальной.

Возникает грустное ощущение: единственная инерциальная система отсчета существует так далеко от нас, что механика Ньютона не пригодна для изучения движения тел вблизи Земли. Покажем, что инерциальных систем бесчисленное множество, и что законы вида законов Ньютона можно применять в неинерциальных системах отсчета, если известно как эти системы движутся.

Сначала выясним, как следует составлять дифференциальные уравнения движения точки М по отношению к неинерциальной системе отсчета. Пусть движение подвижной системы с осями x, y, z по отношению к инерциальной системе с осями X, Y, Z задано функциями координат начала А и углов Эйлера:

$$\begin{aligned} X_A(t), Y_A(t), Z_A(t) \\ \psi(t), \Theta(t), \varphi(t) \quad (3) \end{aligned}$$

По закону (3) можно найти скорость V_A и ускорение W_A начала А, угловую скорость ω и ускорение ε подвижной системы отсчета.



В инерциальной системе X, Y, Z отсчета наблюдатель О запишет основной закон динамики точки М в виде:

$$mW_a = \sum F_k$$

Здесь F_k - физические силы, действующие со стороны других точек.

По теореме Кориолиса:

$$W_a = W_e + W_r + W_c$$

Основной закон приобретает вид:

$$m(W_e + W_r + W_c) = \sum F_k$$

Или:

$$mW_r = \sum F_k - mW_e - mW_c$$

Последние слагаемые называются **переносной и кориолисовой силами инерции** соответственно:

$$\Phi_e \equiv -mW_e; \quad \Phi_c \equiv -mW_c$$

$$\Phi_e \equiv -m[W_A + \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho)]; \quad \Phi_c \equiv -2m(\omega \times V_r)$$

Выражение

$$mW_r = \sum F_k + \Phi_e + \Phi_c$$

называется **основным уравнением динамики относительного движения точки**.

Таким образом,

чтобы составить уравнение движения точки относительно неинерциальной системы отсчета,

нужно к физическим силам $\sum F_k$ добавить силы инерции Φ_e, Φ_c .

Силы инерции Φ_e, Φ_c отличаются от физических сил F_k тем, что они не вызваны действием других точек, а определяются лишь движением подвижной системы отсчета. Поэтому говорят, что силы инерции Φ_e, Φ_c имеют *кинематический* характер.

Спор о реальности или мнимости сил инерции Φ_e, Φ_c имеет, видимо, простое решение: они реальны для наблюдателя А подвижной системы отсчета и мнимы для наблюдателя О абсолютной системы отсчета.

Так, два наблюдателя по-разному объяснят разрыв нити при увеличении скорости вращения шарика по неподвижной плоскости.

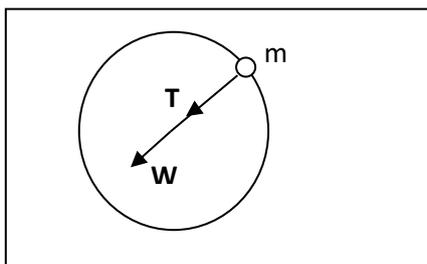


Рис.4

Неподвижный наблюдатель (Рис.4), связанный с плоскостью, говорит: Натяжение T нити создает осеостремительное ускорение W шарика. Нить разрывается потому, что сила ее натяжения T достигает предельного значения.

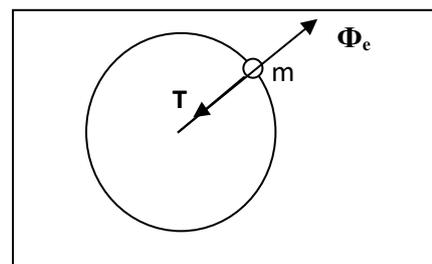


Рис.5

Подвижный наблюдатель (Рис.5), связанный с нитью, говорит: шарик неподвижен, а сила натяжения T уравновешивает центробежную силу инерции Φ_e .

Невыполнение принципа Галилея. Условие относительного покоя

Рассмотрим изолированную точку в неинерциальной системе отсчета.

$$\sum F_k = 0$$

Уравнение относительного движения точки

$$mW_r = \Phi_e + \Phi_c \neq 0$$

показывает, что изолированная точка не сохраняет вектора скорости

$$V \neq Const$$

в неинерциальной системе отсчета.

Этот хорошо видно из анимации движения шарика по вращающейся платформе. Пущенный из центра платформы шарик движется прямолинейно в неподвижной системе отсчета и криволинейно по отношению к вращающейся платформе.



Corioliskraftanimation.gif

Пусть теперь точка находится в состоянии относительного покоя. Тогда $\Phi_c = 0$.

Отпустим точку. Она начнет двигаться, поскольку

$$mW_r = \Phi_e \neq 0; \quad V \neq Const = 0$$

Вывод: Принцип Галилея не выполняется в неинерциальной системе отсчета.

Остановим точку М, находящуюся под действием физических сил

$$\sum F_k \neq 0$$

относительно подвижной системы отсчета. Тогда

$$V_r = 0 \text{ и } \Phi_c \equiv -2m(\omega \times V_r) = 0$$

Чтобы точка осталась в покое, ее относительное ускорение должно отсутствовать.

Согласно основному уравнению динамики относительного движения точки

$$mW_r = \sum F_k + \Phi_e = 0$$

Таким образом, *условием относительного покоя* является:

$$\sum F_k + \Phi_e = 0$$

Оно отличается от известного условия покоя точки в инерциальной системе

$$\sum F_k = 0$$

Условия инерциальности подвижной системы. Принцип относительности Галилея

Покончим с мифом об уникальности гелиоцентрической инерциальной системы отсчета. Выясним, как должна двигаться система отсчета по отношению к инерциальной системе отсчета, чтобы тоже быть инерциальной, т.е., чтобы в ней соблюдались законы Ньютона. Очевидно, что для этого в подвижной системе отсчета силы инерции должны отсутствовать:

$$\Phi_e \equiv -mW_e = 0; \quad \Phi_c \equiv -mW_c = 0$$

Для этого должны обратиться в ноль переносное и Кориолисово ускорения точки.

$$W_e = W_A + \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho) = 0 \quad W_c = 2(\omega \times V_r) = 0$$

Пусть система движется поступательно, тогда

$$\omega = 0; \quad \varepsilon = 0$$

и

$$\Phi_c = 0; \quad \Phi_e \equiv -mW_A \neq 0$$

Чтобы в ноль обратились обе силы инерции, остается потребовать:

$$W_A = 0$$

Таким образом, *условием инерциальности подвижной системы отсчета* является ее поступательное, прямолинейное и равномерное движение относительно исходной инерциальной системы.

$$\omega \equiv 0; \quad W_A = 0$$

Отсюда следует приятный вывод:

если существует хоть одна инерциальная система, то их бесчисленное множество и все они движутся поступательно, прямолинейно и равномерно по отношению друг к другу.

Во всех указанных инерциальных системах одинаково выполняются законы Ньютона.

Поэтому справедлив *принцип относительности Галилея*:

Никаким механическим опытом нельзя отличить одну инерциальную систему от другой.

Некоторые доказательства неинерциальности геоцентрической системы.

Поскольку Земля вращается по отношению к инерциальной гелиоцентрической системе отсчета, то пространство, связанное с Землей, не может быть инерциальным. Об этом свидетельствуют многие явления на Земле.

1. *Сила тяжести не равна силе притяжения и зависит от широты местности.*

Рассмотрим точку массы m , находящуюся в покое вблизи поверхности Земли на геоцентрической широте φ . На нее действует физическая сила притяжения Земли массы M ,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}_0;$$

направленная к центру Земли, и подчиняющаяся закону всемирного тяготения

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2} = mg_0; \quad g_0 = \gamma \frac{M}{R^2} = 9,832 \text{ м/с}^2$$

Здесь g_0 - *ускорение силы притяжения*.

В неинерциальной системе отсчета на покоящуюся точку действует переносная сила инерции Φ_e

$$\Phi_e = m\omega^2 R \cos\varphi$$

Силой тяжести называется сумма

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} + \Phi_e$$

Точка не может оставаться в покое под действием одной силы \mathbf{P} . Подвесим точку к потолочку. Тогда точка обретет долгожданный покой под действием двух равных по модулю и противоположных по направлению сил:

$$\mathbf{T} = -\mathbf{P}; \quad T = P = mg$$

Видим, что нить отвеса, как и сила тяжести \mathbf{P} , не направлена на центр Земли. Она составляет с плоскостью экватора угол ψ , называемый *географической широтой* местности. Ввиду малой угловой скорости вращения Земли максимальная разница $\gamma = \psi - \varphi$ составляет порядка 4 градусов

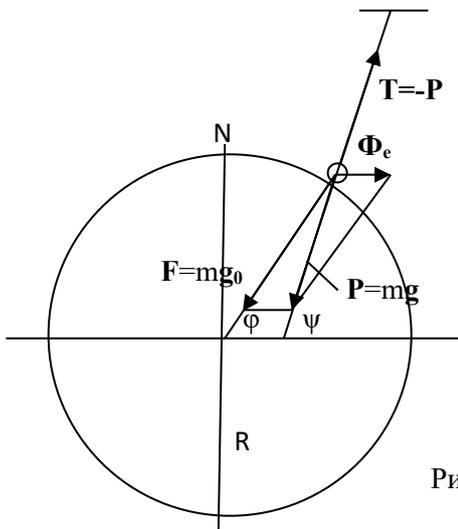


Рис.4

$$\sin \gamma \approx 0; \quad \cos \gamma \approx 1 \quad \cos \psi \approx \cos \varphi;$$

Спроектируем уравнение относительного покоя точки

$$\mathbf{F} + \mathbf{T} + \Phi_e = \mathbf{0}$$

на направление отвеса

$$T - F \cos \gamma + \Phi_e \cos \psi = 0; \quad T = mg$$

Иначе

$$mg = F \cos \gamma - \Phi_e \cos \psi \approx mg_0 - m\omega^2 R \cos^2 \varphi$$

Отсюда находим зависимость ускорения силы тяжести от широты местности

$$g(\varphi) = g_0 \left(1 - \frac{\omega^2}{g_0} R \cos^2 \varphi \right)$$

Видим, что на полюсах $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ускорение силы тяжести равно ускорению силы притяжения

$$g = g_0 = 9,832 \text{ м/с}^2$$

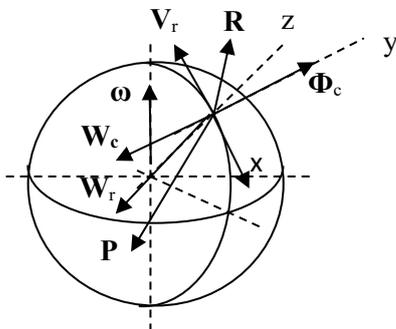
Ускорение силы тяжести достигает минимума на экваторе

$$g_{\min} = g_0 \left(1 - \frac{\omega^2}{g_0} R \right) = 9,780 \text{ м/с}^2$$

Действие центробежных сил инерции со временем превратило Землю в *геоид*, сплюснутый на полюсах.

2. Размыв берегов рек

Пусть река в северном полушарии течет с юга на север с относительной скоростью V_r . Выделим объем воды массы m между двумя сечениями реки, перпендикулярными руслу. С массой m совместим начало координат: x — направим на юг, y — на восток, z — по вертикали.



На массу m действуют: сила тяжести \mathbf{P} включает в себя переносную силу инерции Φ_e и направлена в плоскости xz ,

реакция русла \mathbf{R} и кориолисова сила инерции Φ_c , направленная на восток, противоположно кориолисову ускорению \mathbf{W}_c .

Относительное ускорение \mathbf{W}_r направлено к центру Земли, поскольку масса m движется равномерно по окружности меридиана.

Уравнение относительного движения массы m

$$m\mathbf{W}_r = \mathbf{P} + \mathbf{R} + \Phi_c$$

спроектируем на ось y :

$$0 = R_y + \Phi_c$$

Отсюда

$$R_y = -\Phi_c < 0$$

Это значит, что реакция берега R отклонена на Запад восточным (правым) берегом реки. Давление реки такого же модуля размывает правый берег. Если река течет на юг, то размывается западный (тоже правый) берег. Итак, у всех рек в северном полушарии размываются правые берега. По той же причине в северном полушарии больше изнашиваются правые рельсы железных дорог.

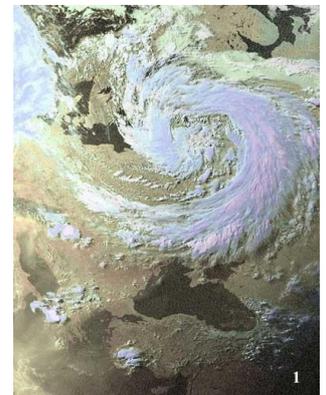
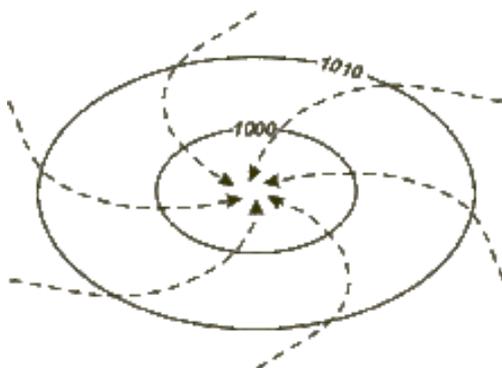
В южном полушарии размываются левые берега рек и изнашиваются больше левые рельсы.

Таким образом, при движении точки в северном полушарии она всегда отклоняется вправо. Если этому отклонению препятствуют связи (берега, рельсы), то связи испытывают дополнительное давление. Если связей нет, то движение приобретает специфический характер, который зависит от направления относительной скорости.

Так, все океанические течения в северном полушарии движутся по часовой стрелке. В южном полушарии течения направлены против часовой стрелки.

В таких явлениях как водоворот воды и атмосферный циклон частицы движутся радиально к центру водоворота или циклона, где находится область низкого давления.

В северном полушарии радиальная относительная скорость частиц вызывает их отклонение направо, образуя циклоны, вращающиеся против часовой стрелки. В южном полушарии циклоны вращаются по часовой стрелке.



При достаточной площади водной поверхности, эффект закручивания можно наблюдать и в домашних условиях. Воронка воды, сливаемой из ванны в Северном полушарии, должна закручиваться против часовой стрелки, а в Южном — по часовой

Однако часто площадь воды, устремляющейся к центру слишком мала, чтобы влияние силы Кориолиса успело проявиться. Большее влияние может оказать форма самой раковины. Поэтому как в Южном, так и в Северном полушарии воронка в раковине может закручиваться как по часовой, так и против часовой стрелки.

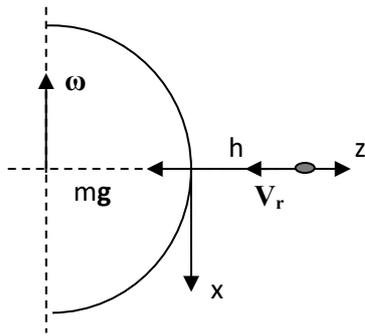
Направление вращения циклонов легко запомнить, если понять, что они вращаются в сторону вращения Земли, как мы его видим из своего полюса: Северного, или Южного.

Страшное землетрясение у берегов Японии 11.03.2011 вызвало цунами и водоворот, который вращался против часовой стрелки.

3. Отклонение падающей точки

Рассмотрим материальную точку, падающую с высоты h на Землю из состояния

относительного покоя. Пусть, для простоты, это происходит на экваторе. Уравнение относительного движения:



$$mW_r = mg + \Phi_c; \quad \Phi_c = -2m\omega \times V_r$$

В силу тяжести mg включена переносная сила инерции Φ_e

Кориолисово ускорение $2\omega \times V_r$ направлено на запад (против оси y).

Проектируем уравнение на подвижные оси: x – юг, y – восток, z – вертикаль

$$\ddot{x} = -2(\omega_y \dot{z} - \omega_z \dot{y}); \quad \ddot{y} = -2(\omega_z \dot{x} - \omega_x \dot{z}) \quad \ddot{z} = -g - 2(\omega_x \dot{y} - \omega_y \dot{x})$$

С учетом того, что $\omega_x = -\omega$; $\omega_y = \omega_z = 0$, находим

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -2\omega \dot{z}; \quad \ddot{z} = -g + 2\omega \dot{y}$$

Поскольку Земля вращается медленно

$$\omega < 0,0001 \text{ c}^{-1}$$

то можно считать, что

$$\ddot{z} \approx -g; \quad z = h - gt^2/2$$

В момент падения T :

$$z = 0; \quad T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Интегрируя уравнение на y , получаем:

$$\dot{y} = -2\omega z + C$$

Из начальных условий

$$C = 2\omega h$$

Теперь

$$\dot{y} = -2\omega(z - h) = \omega gt^2$$

$$y = \omega \frac{gt^3}{3}$$

В момент падения отклонение точки на восток достигает значения

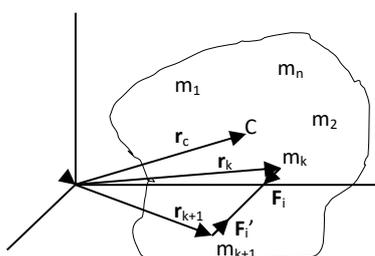
$$y(T) = \frac{\omega g}{3} \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}$$

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

Материальная система. Центр масс и центр тяжести. Классификация сил.

Дифференциальные уравнения движения системы.

Материальной системой назовем множество взаимодействующих материальных точек $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_n$. Пример: солнечная система.



Система материальных точек, взаимодействием которых можно пренебречь по сравнению взаимодействия с внешней средой, не является материальной. Пример: группа самолетов.

Массой системы называется арифметическая величина, равная сумме масс точек системы

$$M = \sum m_k$$

Движение точек рассматривается по отношению к инерциальной системе отсчета. **Система отсчета** – трехмерное пространство, с которым связан наблюдатель, умеющий измерять расстояния и время. Границы системы определяются наблюдателем. Система отсчета инерциальна, если в ней выполняются законы Ньютона.

Центром масс системы называется геометрическая точка C , радиус-вектор которой равен

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M} \sum m_k \mathbf{r}_k$$

Его координаты в декартовых осях

$$x_c = \frac{1}{M} \sum m_k x_k; \quad y_c = \frac{1}{M} \sum m_k y_k; \quad z_c = \frac{1}{M} \sum m_k z_k;$$

Твердое тело – система бесконечного, но счетного числа мат. точек, расстояние между которыми неизменно во времени. Элементарная точка тела объема dV имеет массу $dm = \gamma(r)dV$, где $\gamma(r)$ – плотность тела, зависящая от радиуса вектора точки. Тело называют однородным, если γ не зависит от r .

Объем тела есть интеграл по объему

$$V = \iiint dV$$

Масса тела

$$M = \iiint \gamma(x, y, z) dx dy dz$$

Центр масс тела определяется вектором

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M} \iiint \mathbf{r} \gamma(r) dx dy dz$$

Для однородного тела

$$M = \gamma V \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_c = \frac{1}{V} \iiint \mathbf{r} dx dy dz$$

Поле силы тяжести определяется вектором ускорения силы тяжести $\mathbf{g}(\mathbf{r})$. Силой тяжести элементарного объема называется вектор

$$d\mathbf{P} = \mathbf{g}(\mathbf{r}) dm = \mathbf{g}(\mathbf{r}) \gamma(r) dV$$

Тяжесть тела есть вектор

$$\mathbf{P} = \iiint d\mathbf{P}$$

Для однородного тела

$$d\mathbf{P} = \gamma \mathbf{g}(\mathbf{r}) dV$$

Для небольших тел вблизи Земли ускорения сил тяжести можно считать со направленными и зависящими от координаты z вертикали

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -g(z) \mathbf{k} \quad (\mathbf{k} \text{ — орт вертикали})$$

Тогда для однородного тела

$$d\mathbf{P} = -\gamma g(z) dV \mathbf{k} = -dP \mathbf{k}$$

Центром тяжести тела называется точка с радиусом вектором

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{P} \iiint \mathbf{r} dP$$

Поле однородно, если \mathbf{g} одинаково для всех точек. Тогда тяжесть тела есть вектор

$$\mathbf{P} = M \mathbf{g}$$

и центр тяжести совпадает с центром масс тела

Поле Земли неоднородно, поэтому центр тяжести телевизионных башен не совпадает с их центром масс. Вопрос: что выше?

Классификация сил

Силы, действующие на точки мат. системы естественно разделить на два класса.

Внутренними назовем силы F_k^i взаимодействия между точками системы, **внешними** F_k^e - силы взаимодействия точек системы с точками вне системы. Это деление условно, оно зависит от выбранных нами границ системы. Так, для мела, лежащего на столе, сила взаимодействия со столом может быть внутренней, если в систему включить стол, и внешней, если системой считать только мел.

Свойства внутренних сил

По 3му закон Ньютона внутренние силы являются парными, значит их главный вектор и главный момент относительно любой точки равны нулю.

$$V^i = \sum F_k^i = 0, \quad M_o^i = \sum m_o (F_k^i) = 0$$

Здесь F_k^i - равнодействующая (сумма) внутренних сил, приложенных к точке m_k

Внутренние силы уравновешены только для твердого тела. Так солнечная система движется именно под действием внутренних сил.

Дифференциальные уравнения движения системы

2й закон Ньютона для точек системы

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = F_k^e(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n; \dot{\mathbf{r}}_1 \dots \dot{\mathbf{r}}_n; t) + F_k^i(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n; \dot{\mathbf{r}}_1 \dots \dot{\mathbf{r}}_n; t) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

дает n обыкновенных векторных дифференциальных уравнений 2го порядка относительно законов движения точек $\mathbf{r}_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

Для решения задач требуется скалярная запись уравнений. В декартовой системе координат они эквивалентны 3n скалярных уравнений.

$$m_k \ddot{x}_k = F_{kx}^e(x_1 \dots z_n; \dot{x}_1 \dots \dot{z}_n; t) + F_{kx}^i(x_1 \dots z_n; \dot{x}_1 \dots \dot{z}_n; t) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$m_k \ddot{y}_k = F_{ky}^e(x_1 \dots z_n; \dot{x}_1 \dots \dot{z}_n; t) + F_{ky}^i(x_1 \dots z_n; \dot{x}_1 \dots \dot{z}_n; t)$$

$$m_k \ddot{z}_k = F_{kz}^e(x_1 \dots z_n; \dot{x}_1 \dots \dot{z}_n; t) + F_{kz}^i(x_1 \dots z_n; \dot{x}_1 \dots \dot{z}_n; t)$$

В большинстве случаев проинтегрировать эти уравнения аналитически сложно, потому что внутренние силы являются неизвестными функциями. Даже когда они известны, например, в задаче о трех точках, взаимодействующих по закону всемирного тяготения, аналитического решения нет. Численно они решаются без проблем на компьютере.

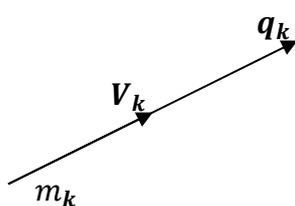
Иногда достаточно исследовать движение системы «в целом». Особенно это верно для твердого тела. Для него достаточно узнать, как движется центр масс тела и как тело вращается вокруг центра масс.

Изучить движение системы в целом позволяют 3 общие теоремы динамики системы:

- теорема об изменении количества движения (теорема о движении центра масс),
- теорема об изменении кинетического момента,
- теорема об изменении кинетической энергии.

Теорема об изменении количества движения. Теорема о движении центра масс
Количество движений точки и системы.

Количеством движения точки m_k системы называется вектор



$$q_k = m_k V_k$$

где V_k – скорость точки в данный момент.

Рассмотрим систему $m_1 \dots m_k \dots m_n$

Количеством движения системы называется главный вектор количеств движения всех точек системы

$$Q = \sum q_k = \sum m_k V_k$$

В проекциях на декартовы оси

$$Q_x = \sum m_k \dot{x}_k \quad Q_y = \sum m_k \dot{y}_k \quad Q_z = \sum m_k \dot{z}_k$$

Поскольку массы точек постоянны, Q можно выразить через скорость центра масс

$$Q = \frac{d}{dt} \sum m_k r_k = \frac{d}{dt} M r_c = M V_c$$

$$Q_x = M \dot{x}_c, \quad Q_y = M \dot{y}_c, \quad Q_z = M \dot{z}_c$$

Примеры.

а) Если центр масс вращающегося тела лежит на оси вращения, то $V_c = 0$, и количество движения тела равно нулю.

б) Количество движения колеса зависит только от скорости его центра V_c и совершенно не зависит от скорости его вращения.

Теорема об изменении количества движения. Теорема о движении центра масс системы

Запишем 2й закон Ньютона для точки m_k системы в виде

$$\dot{q}_k = F_k^i + F_k^e$$

Здесь F_k^i – равнодействующая всех внутренних сил, а F_k^e – внешних сил, приложенных к точке m_k . Суммируя по k , получаем

$$\dot{Q} = V^i + V^e$$

Главный вектор внутренних сил $V^i = \mathbf{0}$, что приводит к теореме об изменении количества движения системы

$$\dot{Q} = V^e \quad (4)$$

В проекциях на декартовы оси

$$\dot{Q}_x = \sum F_{kx}^e, \quad \dot{Q}_y = \sum F_{ky}^e, \quad \dot{Q}_z = \sum F_{kz}^e$$

Поскольку

$$\dot{Q} = M\dot{V}_c = MW_c$$

то эту теорему можно записать в виде **теоремы о движении центра масс**.

$$MW_c = V^e \quad (5)$$

Она имеет вид второго закона Ньютона:

Центр масс системы движется как материальная точка с массой системы M , к которой приложены все внешние силы системы.

Так, если пренебречь сопротивлением воздуха, то после взрыва снаряда фейерверка, центр масс его частей продолжает двигаться по той же траектории (параболе), что и не взорвавшийся снаряд.

В проекциях на декартовы оси

$$M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^e \quad M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^e \quad M\ddot{z}_c = \sum F_{kz}^e \quad (6)$$

Следствия из теорем

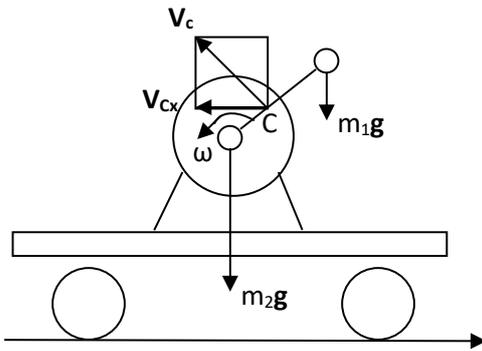
1. Внутренние силы **непосредственно** не влияют на количество движения системы Q и на скорость центра масс V_c . Однако они могут вызвать внешние силы, которые могут изменить количество движения.

Так, внутренние силы в двигателе автомобиля вызывают силу трения между колесами и дорогой, которая и движет автомобиль, изменяя скорость его центра масс.

Другой пример объясняет «чудо». В Южной Америке есть дерево, с которого осенью падают орехи. Через некоторое время твердые орехи начинают прыгать, вызывая ужас у непосвященных. Ведь твердое тело не может прыгать. Объяснение нашли, расколов орех. Там обнаружили жучка, появившегося из личинки, прогрызшей орех и съевшей его содержимое. В образовавшемся пространстве жучок начинает прыгать. С ним прыгает и орех. Так внутренние силы жучка вызывают внешнюю реакцию Земли, которая приводит в движение центр масс системы жучек - орех. Абсолютно аналогично Вы можете встать на стул, накрыться коробкой и прыгать вместе с этой твердой оболочкой.

2. Если $V^e = \mathbf{0}$, то Q и V_c сохраняются. Так, центр масс солнечной системы движется равномерно и прямолинейно во вселенной.
3. Если $V_x^e = 0$, то Q_x и \dot{x}_c сохраняются.

Так, при движении автомобиля с реактивным двигателем, центр масс системы автомобиль-топливо остается на месте: автомобиль и выхлопные газы движутся при этом в разные стороны.



Здесь можно привести, также, пример известной аферы. В 80х годах на научно-популярных телепередачах демонстрировались «инерцоиды». Они, якобы, доказывали существование, кроме общепризнанных опорного и реактивного способа движения, еще и «инерционного» способа.

Демонстрировалась коробочка на тележке со свободно вращающимися колесами. Включался тумблер, и внутри коробочки начинал жужжать механизм. Тележку ставили на пол и отпускали без толчка. Тележка начинала движение, что, якобы, доказывало наличие инерционного способа движения.

Ничего нового этот эксперимент не доказывает. Он просто иллюстрирует следствие 3.

Если открыть коробочку, то под ней обнаружится моторчик с неуравновешенным грузиком. В момент отпускания тележки внешние силы вдоль оси x исчезают, и дальше центр масс сохраняет горизонтальную составляющую своей скорости V_{cx} . При этом сама тележка движется не равномерно, а рывками.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Кинетический момент точки и системы относительно центра и оси

Рассмотрим систему материальных точек с массами m_1, m_2, \dots, m_n , имеющих в данный момент скорости V_1, V_2, \dots, V_n относительно инерциальной системы отсчета.

Кинетическим моментом точки m_j относительно центра O называется векторная величина, равная моменту ее количества движения относительно этого центра.

$$K_{oj} = m_o(q_j) = r_j \times m_j V_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Известно, что векторное умножение можно записать через присоединенную матрицу первого сомножителя R радиуса вектора r .

Опуская индекс j , запишем матричное выражение в осях x, y, z с началом в точке O :

$$K_o = mRv$$

где R - кососимметричная присоединенная матрица столбца r

$$\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{pmatrix} \quad (7)$$

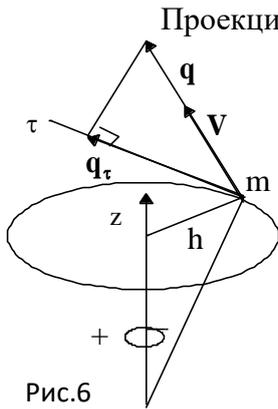


Рис.6

Проекция кинетического момента на ось называется **кинетическим моментом точки относительно оси**. Он вычисляется либо аналитически по формулам (7), либо как момент силы относительно оси. Момент дает только касательная составляющая q_τ вектора q (Рис.6).

$$K_z = \mp q_\tau h$$

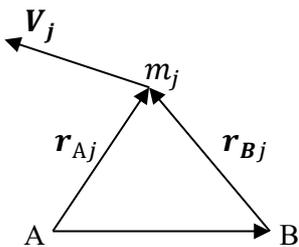
Момент обращается в ноль, если вектор количества движения (скорость точки) лежит в одной плоскости с осью (параллелен или пересекает ось)

Кинетическим моментом системы относительно центра O называется главный момент количеств движений точек системы относительно этого центра.

$$K_o = \sum K_{oj} = \sum m_j r_j \times V_j$$

Аналогично с формулой (7) проекции вектора K_o образуют столбец кинетических моментов относительно осей координат

$$\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix} = \sum m_j \begin{pmatrix} y_j \dot{z}_j - z_j \dot{y}_j \\ z_j \dot{x}_j - x_j \dot{z}_j \\ x_j \dot{y}_j - y_j \dot{x}_j \end{pmatrix}$$



Тогда

Найдем связь между кинетическими моментами системы относительно двух неподвижных центров A и B. Обозначим через r_{Aj}, r_{Bj} радиусы векторы точки m_j системы относительно центров A и B соответственно. Очевидно, что

$$r_{Aj} = AB + r_{Bj}$$

$$K_A = \sum m_j r_{Aj} \times V_j = \sum m_j (AB + r_{Bj}) \times V_j = AB \times \sum m_j V_j + \sum m_j r_{Bj} \times V_j$$

Окончательно

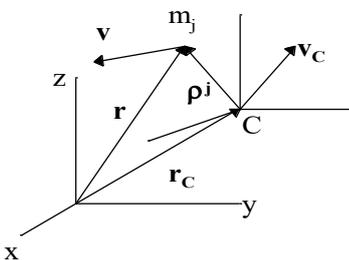
$$K_A = K_B + AB \times MV_c \quad \text{или} \quad K_A = K_B + AB \times Q \quad (8)$$

Формула напоминает зависимость главного момента системы сил от центра. Видим, что при неподвижном центре масс тела (например, сферическое движение вокруг C или вращение тела вокруг центральной оси) кинетический момент не зависит от центра.

$$V_c = 0 : K_A = K_B = K$$

Кинетический момент системы в сложном движении

Наряду с инерциальной системой отсчета с осями x, y, z введем поступательно



движущиеся C- координаты с началом в центре масс C. Теперь движение каждой точки можно представить как сложное. Скорость точки будет складываться из переносной скорости, равной для всех точек скорости V_c центра масс C и относительной скорости V_{jr}

$$V_j = V_c + V_{jr}$$

Кроме того, из рисунка видно, что

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho}_j$$

Теперь

$$\mathbf{K}_o = \sum m_j (\mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho}_j) \times (\mathbf{V}_c + \mathbf{V}_{jr}) = \mathbf{r}_c \times \mathbf{V}_c \sum m_j + \mathbf{r}_c \times \sum m_j \mathbf{V}_{jr} + \left(\sum m_j \boldsymbol{\rho}_j \right) \times \mathbf{V}_c + \sum m_j \boldsymbol{\rho}_j \times \mathbf{V}_{jr}$$

Здесь второе и третье слагаемые равны нулю поскольку по определению центра масс

$$\sum m_j \boldsymbol{\rho}_j = M \boldsymbol{\rho}_c = \mathbf{0} \quad \sum m_j \mathbf{V}_{jr} = \frac{d}{dt} \sum m_j \boldsymbol{\rho}_j = \mathbf{0}$$

Последнее слагаемое логично назвать относительным кинетическим моментом системы

$$\mathbf{K}_c = \sum m_j \boldsymbol{\rho}_j \times \mathbf{V}_{jr}$$

Теперь

$$\mathbf{K}_o = \mathbf{K}_c + \mathbf{r}_c \times M \mathbf{V}_c \quad (9)$$

Заметим, что в отличие от похожей формулы, связывающей кинетические моменты относительно неподвижных центров, здесь С произвольно движется и в \mathbf{K}_c входят относительные скорости точек. Вывод формулы показывает, что такая простая формула (9) справедлива только для центра масс, что подчеркивает значение этого центра в динамике.

Теорема об изменении кинетического момента системы.

Дифференцируя

$$\mathbf{K}_o = \sum \mathbf{K}_{oj} = \sum m_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{V}_j$$

по времени, находим

$$\begin{aligned} d\mathbf{K}_o/dt &= \sum m_j (\mathbf{V}_j \times \mathbf{V}_j + \mathbf{r}_j \times \mathbf{W}_j) = \sum \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{W}_j = \\ &= \sum [\mathbf{r}_j \times (\mathbf{F}_j^e + \mathbf{F}_j^i)] = \sum \mathbf{m}_o (\mathbf{F}_j^e) + \sum \mathbf{m}_o (\mathbf{F}_j^i) = \mathbf{M}_o^e + \mathbf{M}_o^i = \mathbf{M}_o^e \end{aligned}$$

Здесь учтено, что векторное произведение вектора на себя и главный момент внутренних сил равны нулю. Таким образом, приходим к **теореме об изменении кинетического момента**

$$d\mathbf{K}_o/dt = \mathbf{M}_o^e \quad (10)$$

В проекциях на декартовы оси координат

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum m_x (F_k^e), \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum m_y (F_k^e), \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum m_z (F_k^e),$$

Следствия

1. Внутренние силы не изменяют кинетического момента непосредственно. Однако, как и в теореме о движении центра масс, они могут вызвать внешние силы, изменяющие кинетический момент.

2. Если $\mathbf{M}_o^e = 0$, то $\mathbf{K}_o = \mathbf{Const}$ векторно. Так для Солнечной системы, которую можно считать изолированной от внешнего влияния удаленных галактик, вектор кинетического момента сохраняет свое направление и модуль. Перпендикулярная ему плоскость, называемая **плоскостью Лапласа**, тоже сохраняет свое положение по отношению к гелиоцентрической инерциальной системе отсчета.

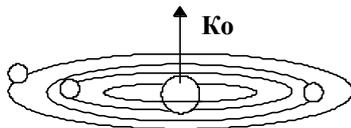


Рис.4

3. Если, в частном случае только $M_z = 0$, то сохраняется соответствующая проекция кинетического момента $K_z = \mathbf{Const}$. Так кинетический момент конического маятника относительно вертикальной оси не будет изменяться с течением времени, поскольку $M_z = 0$.

Подставим выражение (9) в формулу (10). После дифференцирования получим

$$dK_C / dt + V_C \times MV_C + r_C \times Mw_C = M_O^e$$

С учетом того, что $V_C \times MV_C = 0$, $MW_C = Ve$ и теоремы о зависимости главного момента от центра

$$M_O^e - r_C \times V^e = M_C^e$$

Приходим к **теореме об изменении относительного кинетического момента**

$$dK_C / dt = M_C^e \quad (11)$$

Она имеет тот же вид, что и теорема в инерциальной системе.

В проекциях на оси x, y, z с началом в центре масс системы

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum m_x (F_k^e), \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum m_y (F_k^e), \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum m_z (F_k^e),$$

Кинетический момент тела в сферическом движении. Матрица инерции

Рассмотрим твердое тело, совершающее сферическое движение вокруг неподвижной точки O . (Рис.7). Кинетический момент тела вычислим по формуле

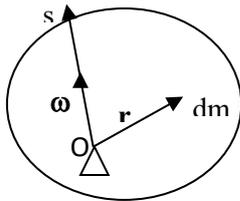


Рис.7

$$K_O = \iiint [r \times (\omega \times r)] dm = - \iiint [r \times (r \times \omega)] dm \quad (12)$$

Здесь dm - масса элементарной точки, $\omega \times r$ – ее скорость.

Представим формулу (12) в матричной форме, записав векторное произведение через присоединенную кососимметричную матрицу R радиус- вектора r в декартовых осях, связанных с телом.

$$r \times (r \times \omega) \rightarrow R (R\Omega) = R^2 \omega, \text{ где}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Получаем

$$K_O = (- \iiint R^2 dm) \omega \quad (13)$$

Величина в скобках в (13) является матрицей 3×3 , и называется **матрицей инерции** J_O в центре O и осях x, y, z .

$$J_O = - \iiint R^2 dm \quad (14)$$

Осевые и центробежные моменты инерции

Вычислим матрицу инерции в соответствии с формулой (14).

$$-R^2 = - \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & z^2 + x^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Интеграл от матрицы представляет собой матрицу интегралов ее элементов, поэтому

$$J_o = \begin{pmatrix} \iiint (y^2 + z^2) dm & - \iiint xy dm & - \iiint xz dm \\ - \iiint yx dm & \iiint (z^2 + x^2) dm & - \iiint yz dm \\ - \iiint zx dm & - \iiint zy dm & \iiint (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix}$$

Видим, что матрица J_o симметрична ($\iiint yx dm = \iiint xy dm$ и т.д.) и, значит, имеет только шесть различных элементов. Диагональные элементы называются **моментами инерции тела относительно осей x , y и z**

$$J_x = \iiint (y^2 + z^2) dm, \quad J_y = \iiint (z^2 + x^2) dm, \quad J_z = \iiint (x^2 + y^2) dm$$

Остальные три интеграла называются- **центробежными моментами инерции**

$$J_{xy} = J_{yx} = \iiint xy dm, \quad J_{yz} = J_{zy} = \iiint yz dm, \quad J_{zx} = J_{xz} = \iiint zx dm,$$

Размерность всех моментов инерции $[J] = \text{кг м}^2$.

В принятых обозначениях матрица инерции приобретает вид

$$J_o = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix} \quad (15)$$

Теперь кинетический момент твердого тела в сферическом движении приобретает вид

$$K_o = \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z \\ -J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z \\ -J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y + J_z \omega_z \end{pmatrix} \quad (16)$$

Рассмотрим основные свойства моментов инерции, (другие свойства будут рассмотрены в специальной главе).

Осевые моменты инерции

Заметим, что под знаками интеграла здесь стоят квадраты расстояний h от точки dm до соответствующей оси. Так $y^2 + z^2 = h_x^2$. Поэтому момент инерции тела относительно произвольной оси L будет равен

$$J_L = \iiint h_L^2 dm$$

где h_L - расстояние текущей точки до оси.

Видим, что осевой момент не может быть отрицательным или равным нулю, и

характеризует удаленность масс тела от оси. Например, момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню, будет больше, чем относительно наклонной оси (Рис.8) поскольку $x > h$ для любой точки стержня.

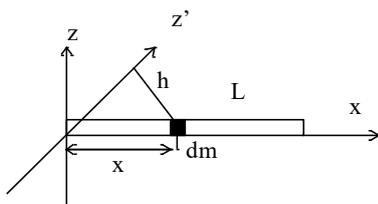


Рис.8

$$J_z > J_{z'}$$

Покажем, как практически вычисляется осевой момент инерции относительно оси z для однородного стержня массы $M = \gamma L$ (γ - погонная плотность, L - длина стержня). инерции стержня.

$$J_z = \int_0^L x^2 dm = \gamma \int_0^L x^2 dx = \gamma \frac{L^3}{3} = M \frac{L^2}{3} \text{ кг м}^2 \quad (17)$$

Выражения моментов инерции тел правильной формы относительно некоторых осей можно найти в справочниках.

Центробежные моменты инерции.

В отличие от осевых моментов инерции, центробежные моменты инерции могут быть отрицательными или равными нулю.

Ось называется **главной осью инерции в точке O**, если оба центробежных момента с ее индексом равны нулю. Так ось z будет главной в O, если

$$J_{zx} = J_{yz} = 0$$

В дальнейшем будет показано, что в любой точке пространства для данного тела существует три взаимно перпендикулярных главных оси инерции XYZ, в которых матрица инерции будет диагональной.

$$J_O = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

Вращение тела вокруг главной или центральной оси

Совместим ось z с осью вращения и выберем на ней начало O (Рис.9). Тогда $\omega_x = \omega_y = 0$

и формула (16) приобретет вид
$$\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J_{xz} \\ -J_{yz} \\ J_z \end{pmatrix} \omega_z$$

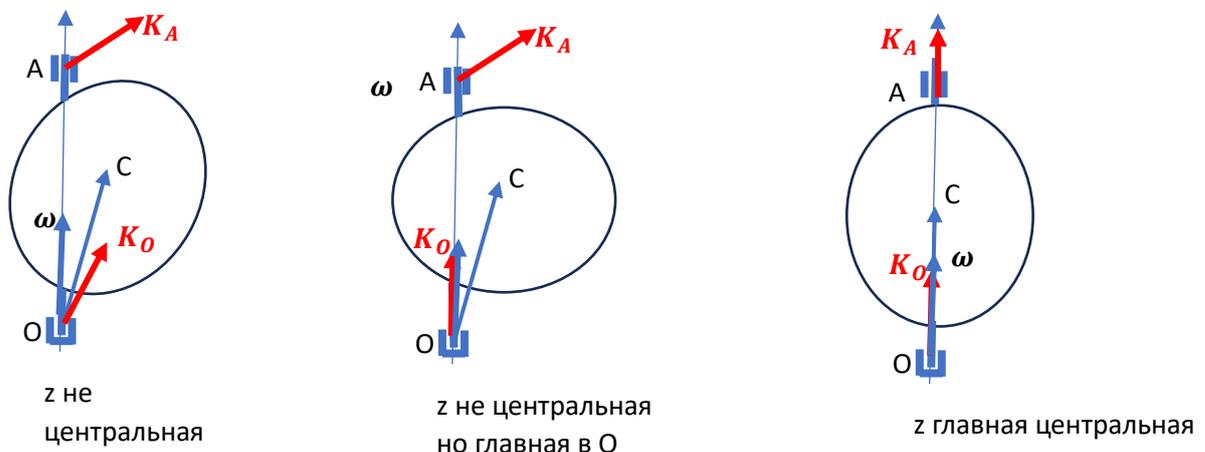


Рис.9

Видим, что в этом случае векторы K_O и ω не коллинеарны.

Согласно формуле

$$K_A = K_O + AO \times M V_C \neq K_O$$

Пусть теперь ось z – не центральная, но главная в O. Тогда K_O направлен вдоль оси вращения (Рис.9).

$$\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_z \end{pmatrix} \omega_z$$

Но по-прежнему $K_A \neq K_O$ поскольку ось не центральная.

Если, наконец, ось z является главной в O и центральной, то кинетический момент не будет зависеть от положения точки на оси вращения. Это значит, что

$$K_A = K_O = K_C$$

И все они лежат на оси вращения. Отсюда следует, что *главная центральная ось является главной в любой своей точке.*

Преобразование матрицы инерции при переносе системы координат из центра инерции. Формула Штейнера-Гюйгенса

Рассмотрим тело в сферическом движении вокруг точки O . Скорость произвольной точки тела, в том числе и центра масс C следует искать по формуле Эйлера.

$$V_C = \omega \times r_C = -r_C \times \omega$$

В матричной форме

$$V_C = -R_C \omega$$

Здесь R_C - присоединенная матрица столбца r_C

Подставив это выражение в формулу

$$K_O = K_C + r_C \times M V_C$$

Получим

$$J_O \omega = (J_C - M R_C^2) \omega$$

Приходим к *обобщенной формуле Штейнера-Гюйгенса*

$$J_O = J_C + M(-R_C^2) \quad -R_C^2 = \begin{pmatrix} Z_c^2 + Y_c^2 & -X_c Y_c & -X_c Z_c \\ -Y_c X_c & Z_c^2 + X_c^2 & -Y_c Z_c \\ -Z_c X_c & -Z_c Y_c & X_c^2 + Y_c^2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Формула (66) позволяет определить компоненты матрицы инерции при параллельном переносе осей координат.

Пусть X, Y, Z и x, y, z - попарно параллельные оси координат с началом в O и в центре масс C соответственно.

Найдем, как изменяется осевой момент инерции при параллельном переносе оси. Сравнивая правые нижние элементы матричного выражения (18),

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & J_z \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & X_c^2 + Y_c^2 \end{pmatrix}$$

находим

$$J_z = J_z + M(X_c^2 + Y_c^2) \quad \text{или} \quad J_z = J_z + M d^2 \quad (19)$$

Здесь d - расстояние между осями Z и z . Это и есть *формула Штейнера-Гюйгенса*, выражающая момент инерции тела относительно произвольной оси через момент инерции относительно параллельной ей центральной оси.

Формула (19) показывает, что момент инерции относительно центральной оси является минимальным среди всех параллельных ей осей.

$$J_{zc} < J_z$$

Сравнивая недиагональные элементы матричного соотношения (66), находим формулу преобразования центробежных моментов инерции при переносе системы координат. Например

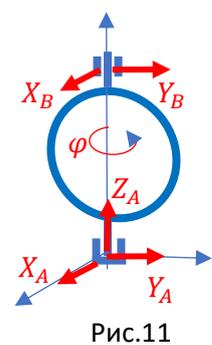
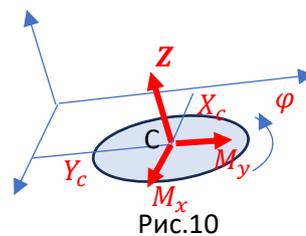
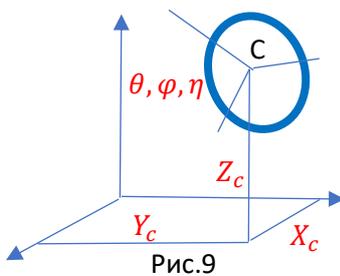
$$J_{xy} = J_{xy} - Mx_c y_c$$

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Динамика твердого тела полностью описывается двумя общими теоремами, которые мы изучили: теоремой о движении центра масс и теоремой об изменении кинетического момента.

Общие уравнения движения твердого тела. Динамическая эквивалентность систем сил

Основной задачей динамики твердого тела является определение его движения под действием заданных сил и реакций связей. Если тело свободно (Рис.9), то следует найти



функции шести координат $x_c(t)$, $y_c(t)$, $z_c(t)$ и $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$.

Если тело несвободно, то, кроме закона движения, следует найти реакции связей. Предположим, что трение отсутствует, и рассмотрим частные случаи движения.

В плоском движении (Рис.10) ищем три координаты $x_c(t)$, $y_c(t)$, $\varphi(t)$ и три реакции плоскости, по которой движется тело: нормальная реакция N и моменты относительно осей x и y . Опять оказывается шесть неизвестных.

Вращающееся тело (Рис.11) имеет одну координату (угол поворота φ) и пять неизвестных реакций X_A , Y_A , Z_A , X_B , Y_B . Здесь опять шесть неизвестных.

Таким образом, при любом движении твердого тела необходимо иметь шесть скалярных уравнений для определения закона движения и реакций связей. Назовем их **общими уравнениями движения тела**.

Общие уравнения движения тела являются следствием двух теорем: о движении центра масс и об изменении относительного кинетического момента.

$$Mw_c = V^e$$

$$dK_c / dt = M_c^e$$

Матрично

$$Mw_c = V^e \quad d \frac{K_c}{dt} = M_c^e \quad (20)$$

Однако использовать теорему (20) трудно т.к. матрица инерции вращающегося тела в поступательно движущихся осях является неизвестной функцией времени $J_C(t)$, и ее невозможно проинтегрировать.

$$K_C(t) = J_C(t)\omega(t)$$

Поэтому необходимо перейти к системе отсчета, связанной с телом. В ней матрица инерции уже не будет зависеть от времени.

$$K_C(t) = J_C\omega(t)$$

Если вектор K_C задан в подвижной системе отсчета, то производную от него следует брать по теореме о связи производных (вспоминаем сложное движение точки).

$$\frac{dK_C}{dt} = \frac{d_r K_C}{dt} + \omega \times K_C$$

Матрично в осях, связанных с телом

$$\frac{dK_C}{dt} = J_C\varepsilon + \Omega J_C\omega$$

Приходим к искомым **общим уравнениям движения** тела в системе отсчета, связанной с телом

$$Mw_C = V^a + V^R \quad (21)$$

$$J_C\varepsilon + \Omega J_C\omega = M_C^a + M_C^R$$

Здесь первое уравнение записано в неподвижных осях, второе в осях, связанных с телом, и внешние силы разделены на активные и реакции связей (индекс R)

В случаях сферического и вращательного движений во второй формуле C можно заменить на неподвижную точку O.

В развернутом виде общие уравнения представляют собой систему шести скалярных уравнений. Эти уравнения определяют как движение тела по начальным условиям, так и реакции связей.

Назовем **эквивалентными** системы сил, порождающие одинаковые дифференциальные уравнения движения тела и реакции связей. В Статике движения не было, и мы называли **статически эквивалентными** системы сил, вызывающие одинаковые реакции. Было показано, что условием статической эквивалентности двух систем сил является равенство их главных векторов и главных моментов.

Для данного тела уравнения (20) одинаковы для нагрузок с одинаковыми главным вектором и главным моментом

Значит **условием динамической эквивалентности** двух нагрузок, приложенных к твердому телу, опять является равенство их главных векторов и главных моментов, ибо при выполнении этих условий уравнения движения не изменяются при замене одной системы сил другой.

Уравнения поступательного движения тела

Поскольку в поступательном движении тело не вращается, то

$$\omega \equiv 0 \quad (\varepsilon = 0) \quad W_c = \begin{pmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ \ddot{z}_c \end{pmatrix}$$

и главный вектор реакций связей равен нулю, то уравнения (20) приобретают вид

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_c &= \sum F_{kx} & 0 &= \sum m_x(F_k) + M_x^R \\ M\ddot{y}_c &= \sum F_{ky} & 0 &= \sum m_y(F_k) + M_y^R \\ M\ddot{z}_c &= \sum F_{kz} & 0 &= \sum m_z(F_k) + M_z^R \end{aligned} \quad (22)$$

Три дифференциальных уравнения определяют закон движения тела $x_c(t), y_c(t), z_c(t)$, а остальные уравнения служат для нахождения главных моментов реакций связей относительно трех осей.

Уравнения вращательного движения тела.

Пусть тело вращается вокруг оси z . Тогда по нагрузке и начальным условиям следует определить закон вращения $\varphi(t)$ и пять неизвестных реакций X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \dot{\varphi}, \quad \varepsilon_z = \ddot{\varphi} \quad W_c = (E + \Omega^2)r$$

Здесь E и Ω - присоединенные матрицы углового ускорения и скорости.

Теперь из (20) вытекают полные уравнения вращательного движения тела

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} -\omega_z^2 & -\varepsilon_z & 0 \\ \varepsilon_z & -\omega_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_A + X_B + \sum F_{kx} \\ Y_A + Y_B + \sum F_{ky} \\ Z_A + \sum F_{kz} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & 0 \\ \omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -J_{xz}\omega_z \\ -J_{yz}\omega_z \\ J_z\omega_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -J_{xz}\varepsilon_z \\ -J_{yz}\varepsilon_z \\ J_z\varepsilon_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} M_x^a + M_x^R \\ M_y^a + M_y^R \\ M_z^a + M_z^R \end{pmatrix} \end{aligned}$$

В развернутом виде

$$-Mx_c\omega^2 - My_c\varepsilon_z = X_A + X_B + \sum F_{kx}$$

$$Mx_c\varepsilon_z - My_c\omega^2 = Y_A + Y_B + \sum F_{ky}$$

$$0 = Z_A + \sum F_{kz} \quad (23)$$

$$J_{yz}\omega_z^2 - J_{xz}\varepsilon_z = \sum m_x(F_k) - Y_B AB$$

$$-J_{xz}\omega_z^2 - J_{yz}\varepsilon_z = \sum m_y(F_k) + X_B AB$$

$$J_z\varepsilon_z = \sum m_z(F_k)$$

В этих шести уравнениях шесть неизвестных: закон вращения $\varphi(t)$ и пять составляющих реакций подшипников. Собственно **дифференциальным уравнением вращения** является последнее уравнение

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum m_z(F_k) \quad (24)$$

Оно определяет закон вращения $\varphi(t)$. Остальные уравнения служат для определения реакций подшипников по найденному закону вращения.

Следует помнить, что силы, приложенные к телу, могут зависеть от угла поворота и угловой скорости тела. С помощью уравнения (23) можно решать прямые и обратные задачи динамики вращения тела. Из него вытекает также **силовое условие равномерного вращения**. Очевидно, что для сохранения углового ускорения постоянным необходимо, чтобы главный момент приложенных сил был постоянным.

$$\sum m_z(F_k) = Const$$

Чтобы тело вращалось равномерно, этот момент должен быть равен нулю

$$\sum m_z(F_k) = 0$$

Уравновешенность вращающегося тела

После того как закон движения найден из дифференциального уравнения вращения, из остальных уравнений можно найти реакции опор X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B . Из уравнений (23) видно, что Z_A не зависит от вращения тела, а остальные реакции могут зависеть.

Опыт показывает, что при больших угловых скоростях вращения эти реакции могут достигать значений, опасных разрушением подшипников. Поэтому актуальным является знание условий, позволяющих избежать такой опасности.

Тело называется **динамически уравновешенным** относительно оси вращения, если реакции подшипников не зависят от скорости вращения тела. Чтобы найти условия уравновешенности, исследуем уравнения для реакций, которые могут зависеть от вращения. Для простоты развернем оси x, y так, чтобы $x_c = 0$.

$$\begin{aligned} -M y_c \varepsilon_z &= X_A + X_B + \sum F_{kx} \\ -M y_c \omega^2 &= Y_A + Y_B + \sum F_{ky} \\ J_{yz} \omega_z^2 - J_{xz} \varepsilon_z &= \sum m_x(F_k) - Y_B AB \\ -J_{xz} \omega_z^2 - J_{yz} \varepsilon_z &= \sum m_y(F_k) + X_B AB \end{aligned} \quad (25)$$

Очевидно, что если бы левые части этих уравнений можно было обратить в ноль, то реакции не зависели бы от вращения, а определялись бы только активными силами.

Первые два уравнения (82) дают условие: реакции не будут зависеть от вращения, если центр тяжести лежит на оси вращения. В этом случае ось называется **центральной**

$$x_c, y_c = 0$$

Это условие обеспечивает уравновешенность, которая называется *статической*, поскольку легко проверяется “статическим” опытом. Достаточно расположить ось вращения тела горизонтально. Если тело будет сохранять покой при любом угле поворота, то ось центральна. Например, взяв велосипедное колесо за ось, легко определить, что его ось не является центральной, т.к. ниппель заставит колесо повернуться в свое нижнее положение.

Вторые два равенства (24) дают однородную систему линейных уравнений относительно моментов инерции. Ее определитель отличен от нуля

$$\begin{vmatrix} \omega_z^2 & -\varepsilon_z \\ \varepsilon_z & \omega_z^2 \end{vmatrix} = \omega_z^4 + \varepsilon_z^2 > 0$$

Это значит, что система имеет только нулевое решение

$$J_{yz} = J_{xz} = 0$$

Таким образом, чтобы тело было *динамически уравновешенным* необходимо и достаточно чтобы ось вращения была *центральной и главной* осью инерции.

$$x_c, y_c = 0, \quad J_{yz} = J_{xz} = 0 \quad (26)$$

Условия уравновешенности вращающегося тела показывают, насколько важной является задача определения главных осей инерции в теле.

Уравнения плоского движения тела

Рассмотрим движение плоской фигуры, полученной сечением тела через центр масс С параллельно плоскости движения тела.

Совместим плоскость осей xu с плоской фигурой тела. Тогда \mathbf{W}_C и главный момент реакций гладкой плоскости будут лежать в плоскости xu , а $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ и нормальная реакция плоскости направлены вдоль оси z . Уравнения движения

$$M \begin{pmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum F_{kx} \\ \sum F_{ky} \\ \sum F_{kz} + R_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & 0 \\ \omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -J_{xz}\omega_z \\ -J_{yz}\omega_z \\ J_z\omega_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -J_{xz}\varepsilon_z \\ -J_{yz}\varepsilon_z \\ J_z\varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x^a + M_x^R \\ M_y^a + M_y^R \\ M_z^a \end{pmatrix}$$

в развернутом виде

$$M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}, \quad M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}, \quad 0 = R_z + \sum F_{kz}$$

$$J_{yz}\omega_z^2 - J_{xz}\varepsilon_z = \sum m_x(F_k) + M_x^R \quad (27)$$

$$-J_{xz}\omega_z^2 - J_{yz}\varepsilon_z = \sum m_y(F_k) + M_y^R$$

$$J_z\ddot{\phi} = \sum m_z(F_k)$$

Первое, второе и последнее уравнения

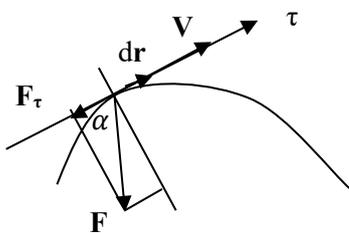
$$M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}, \quad M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}, \quad J_z\ddot{\varphi} = \sum m_z(F_k) \quad (28)$$

являются **дифференциальными уравнениями плоского движения**. Они вместе с начальными условиями определяют закон плоского движения $x(t), y(t), \varphi(t)$. Из остальных трех уравнений, после определения ускорений, можно найти проекцию главного вектора реакций R_z и главные моменты реакций M_x^R и M_y^R . Заметим, что реакции плоскости не будут зависеть от движения, если ось z_c является главной и центральной.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Теорема об изменении кинетической энергии точки и системы.

Элементарная работа и мощность силы.



Второй закон Ньютона для свободной точки

$$m\mathbf{W} = \mathbf{F}$$

связывает ускорение точки \mathbf{W} с силой \mathbf{F} .

Как известно, движение точки (ее скорость и траектория) определяется не только силой, но и начальными условиями. Задав произвольно положение и скорость точки, можно найти соответствующие им начальные условия. Множеству начальных условий соответствует множество **возможных скоростей** \mathbf{V} в данном положении точки. Конкретным начальным условиям соответствует **действительная скорость** \mathbf{V} в каждой точке траектории.

Умножим закон Ньютона скалярно на возможную скорость точки \mathbf{V}

$$m\mathbf{W} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \quad (29)$$

Левую часть выражения можно представить в виде

$$m\mathbf{W} \cdot \mathbf{V} = m\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{V}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{mV^2}{2} \right) = \frac{dT}{dt} = \dot{T}$$

Положительная величина

$$T = \frac{mV^2}{2} > 0$$

называется кинетической энергией точки.

Правая часть (29)

$$N(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \quad (30)$$

называется **мощностью** силы \mathbf{F}

Приходим к **теореме об изменении кинетической энергии**

$$\dot{T} = N \quad (31)$$

Скорость изменения кинетической энергии точки равна мощности силы.

Теорема справедлива как в возможном, так и в действительном движении. Теорема показывает, что скорость изменения кинетической энергии максимальна при силе коллинеарной скорости, и она равна нулю при их взаимной перпендикулярности.

Отсюда вытекает, например, что сила трения сцепления колеса с дорогой не развивает мощности при отсутствии проскальзывания. Также ведущая сила или момент, приложенные к колесу имеют нулевую мощность в момент трогания с места.

Теорему (31) можно записать в виде

$$dT = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d'A \quad d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt \quad (32)$$

Величина

$$d'A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (33)$$

называется *элементарной работой* силы \mathbf{F} . Штрих в обозначении $d'A$ призван подчеркнуть, что в общем случае элементарная работа не является дифференциалом некоторой функции (A). В дальнейшем увидим, что только для «потенциальных» сил это будет полный дифференциал. Раскроем скалярное произведение

$$d'A = \mathbf{F} \circ d\mathbf{r} = F dr \cos\alpha = F_\tau dr_\tau = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Из этого представления вытекает:

1. Знак работы определяется знаком \cos : работа положительна, если направление силы и перемещения совпадает с точностью до $\pi/2$.
2. Работу совершает только касательная составляющая силы.
3. Работа равна нулю если сила перпендикулярна перемещению.

Рассмотрим движение системы материальных точек $\{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_n\}$ в инерциальной системе отсчета. *Кинетической энергией системы* называется положительная величина

$$T = \frac{1}{2} \sum m_k V_k^2 > 0 \quad (34)$$

Равнодействующие внешних и внутренних сил, действующих на точку m_k , обозначим \mathbf{F}_k^e и \mathbf{F}_k^i . Теорему об изменении кинетической энергии системы запишем в виде

$$m_k \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{V}_k = (\mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^i) \cdot \mathbf{V}_k$$

(повторяющийся индекс говорит о суммировании по индексу: k от 1 до n).

Значит, производная от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил.

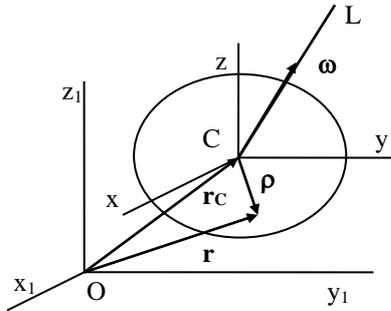
$$\dot{T} = N^e + N^i$$

Теорема Кенига.

Центр масс системы $\{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_n\}$ имеет радиус вектор

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M} \sum m_k \mathbf{r}_k$$

В центре масс C выберем начало осей x y z подвижной системы отсчета, движущейся поступательно. Назовем ее ***C-системой***. Радиус вектор точки системы относительно центра масс обозначим $\boldsymbol{\rho}$. Теперь абсолютную скорость точки m_k представим в виде



$$\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_k^e + \mathbf{V}_k^r$$

Переносная скорость \mathbf{V}_k^e для всех точек системы одинакова

$$\mathbf{V}_k^e = \mathbf{V}_c \quad \mathbf{V}_k = \mathbf{V}_c + \mathbf{V}_k^r$$

Подставляем в формулу кинетической энергии

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum m_k (\mathbf{V}_c + \mathbf{V}_k^r)^2 \\ &= \frac{1}{2} V_c^2 \sum m_k + \mathbf{V}_c \sum m_k \mathbf{V}_k^r + \frac{1}{2} \sum m_k V_k^{r2} \end{aligned}$$

$$\sum m_k \mathbf{V}_k^r = \frac{d}{dt} \sum m_k \boldsymbol{\rho}_k = \frac{d}{dt} M \boldsymbol{\rho}_c = 0$$

Приходим к **теореме Кенига**

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + T^r \quad T^r = \frac{1}{2} \sum m_k V_k^{r2} \quad (35)$$

Кинетическая энергия системы складывается из энергии поступательного движения системы с центром масс и энергии T^r ее движения относительно C -системы .

Кинетическая энергия твердого тела.

Рассмотрим движение **свободного твердого тела** относительно инерциальной системы координат x_1 y_1 z_1 . В формуле Кенига

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_k V_k^{r2}$$

для сплошного твердого тела сумма становится интегральной, масса элементарной dm ,

$$T^r = \frac{1}{2} \iiint V_r^2 dm \quad (36)$$

а относительная скорость точки V_r в сферическом движении вокруг центра масс C должна быть найдена по формуле Эйлера.

$$\mathbf{V}_r = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = -\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\omega}$$

В матричной записи

$$V_r = \Omega \boldsymbol{\rho} = -P \boldsymbol{\omega}$$

Здесь P - присоединенная кососимметричная ($P^T = -P$) матрица радиуса вектора $\boldsymbol{\rho}$

Вычислим квадрат относительной скорости точки как произведения строки на столбец ее координат

$$V_r^2 = V_r^T V_r = (-P \boldsymbol{\omega})^T (-P \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}^T P^T P \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega}^T P^2 \boldsymbol{\omega}$$

Подставив это выражение в формулу (36), получим

$$T^r = \frac{1}{2} \omega^T [- \iiint P^2 dm] \omega$$

В квадратных скобках узнаем выражение матрицы инерции относительно центра масс С.

$$J_C = - \iiint P^2 dm$$

Теперь формула кинетической энергии тела в произвольном движении приобретает вид

$$T = \frac{1}{2} (MV_c^2 + \omega^T J_C \omega) \quad (37)$$

Поступательное движение

В этом случае тело не вращается ($\omega \equiv 0$) скорости всех точек одинаковы и значит

$$T = \frac{1}{2} MV^2 \quad (38)$$

Сферическое движение вокруг центра О

Повторив выкладки для T^r , но для центра О, получим аналогичную формулу

$$1) \quad T = \omega^T J_o \omega \quad (39)$$

С другой стороны, мы знаем, что скорость точки тела в сферическом движении может быть найдена через расстояние h_L до мгновенной оси L

$$V = \omega h_L$$

Тогда

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \iiint h_L^2 dm$$

Интеграл дает момент инерции относительно мгновенной оси

$$J_L = \iiint h_L^2 dm$$

и мы приходим ко второй формуле

$$2) \quad T = \frac{1}{2} J_L \omega^2 \quad (40)$$

Вращательное движение

Оно является частным случаем сферического движения, когда мгновенная ось совпадает с осью вращения z:

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad (41)$$

Плоское движение в плоскости ху

Первую формулу получим из теоремы Кенига

$$1) \quad T = \frac{1}{2} (MV_c^2 + J_{z_c} \omega^2) \quad (42)$$

Еще одну формулу получим, введя в рассмотрение центр скоростей Р. Тогда скорость любой точки выражается через ее расстояние до Р.

$$V = \omega h_p$$

Значит существует вторая формула, через мгновенный центр:

$$2) \quad T = \frac{1}{2} J_{zP} \omega^2 \quad (43)$$

Мощность силы, приложенной к твердому телу.

Свободное движение. Пусть движение тела характеризуется скоростью V_A полюса А и угловой скоростью ω . Найдем мощность силы F , приложенной в некоторой точке М тела.

$$N(F) = F \cdot V = F \cdot (V_A + \omega \times \rho)$$

Здесь учтена теорема о распределении скоростей

$$V = V_A + \omega \times \rho$$

Произведем круговую перестановку в смешанном произведении

$$F \cdot (\omega \times \rho) = \omega \cdot (\rho \times F)$$

В скобках узнаем выражение момента силы F относительно полюса А. Поскольку ω направлен вдоль мгновенной оси S, то

$$\omega \cdot (\rho \times F) = \omega \cdot m_A(F) = \omega_S m_S(F)$$

где ω_S – проекция угловой скорости на S, а $m_S(F)$ – момент силы относительно этой оси. Приходим к выражению мощности силы:

$$N(F) = F \cdot V_A + m_S(F) \omega_S \quad (44)$$

Заметим, что знак второго слагаемого проще определить, сравнивая направления момента и вращения. Поэтому практически часто знак определяют отдельно и работу вычисляют по формуле

$$N(F) = F \cdot V_A \pm |m_S(F)| |\omega_S|$$

Заметим, что в отличие от формулы Кенига для кинетической энергии, здесь полюс А – произвольная точка тела, не обязательно центр масс.

Если к телу приложена система сил $\{F\} = \{F_1, F_2, \dots, F_k, \dots, F_n\}$, то после суммирования по k, получим

$$N\{F\} = V\{F\} \cdot V_A \pm |M_S(F)| |\omega_S| \quad (45)$$

Здесь $V\{F\}$ – главный вектор, а M_S – главный момент относительно оси S системы внешних сил.

Пользуясь общей формулой, получим выражения работы для простейших движений тела.

Поступательное движение

Тело в поступательном движении не вращается ($\omega = 0$) и все его точки имеют одинаковую скорость V

$$N\{F\} = V\{F\} \cdot V \quad (46)$$

Вращательное движение

Здесь есть смысл выбрать полюс А на оси вращения z, которая является осью S. Тогда $V_A = 0$ и:

$$N\{\mathbf{F}\} = \pm |M_S(F)| |\omega_S| \quad (47)$$

Знак плюс, если момент со направлен с угловой скоростью.

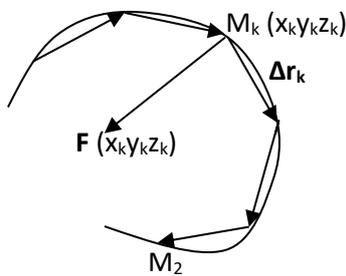
Плоское движение

Вспомним, что в этом движении мгновенная ось проходит через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения. Формула приобретает вид

$$N\{\mathbf{F}\} = M_{zP} \omega_z \quad (48)$$

Конечная работа силы.

Рассмотрим движение точки m под действием силы \mathbf{F} по траектории из положения M_1 в положение M_2 . Разобьем кривую $M_1 M_2$ на n частей.



Проведем векторы перемещений из узла в узел и обозначим работу на этих перемещениях через

$$\Delta A_k = \mathbf{F}(x_k, y_k, z_k) \circ \Delta \mathbf{r}_k$$

Конечной работой силы \mathbf{F} на перемещение из положения M_1 в положение M_2 называется скалярная величина равная пределу

$$A_{12} = \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta r_k \rightarrow 0} \sum \Delta A_k$$

Этот предел является криволинейным интегралом 2го рода

$$A_{12} = \int_{1-2} (\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \circ d\mathbf{r})$$

Что нужно знать, чтобы вычислить этот интеграл?

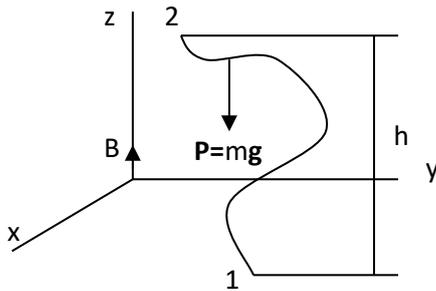
1. Если сила зависит от всех параметров, то нужно знать закон движения точки $\mathbf{r}(t)$. Тогда этот интеграл становится определенным интегралом по времени

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}(t) \circ V(t) dt)$$

2. В случае **силового поля** – пространства, в каждой точке которого задана функция силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, нужно знать траекторию точки:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} (\mathbf{F}(\mathbf{r}) \circ d\mathbf{r})$$

3. Существуют силовые поля, называемые **потенциальными**, в которых для вычисления конечной работы нужно знать только начальное и конечное положение точки. Подробно такие поля будут рассмотрены ниже. Здесь приведем примеры полей силы тяжести и упругой силы.



Работа силы тяжести:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g} = -mg\mathbf{k} \quad P_z = -mg$$

$$d'A = P_z dz = -mg dz,$$

$$A_{12} = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz = mg(z_1 - z_2)$$

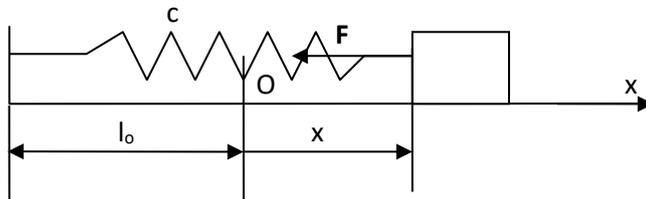
Обычно эту формулу записывают в виде

$$A_{12}(mg) = \pm mgh \quad (49)$$

Работа силы тяжести положительна, если $(z_1 - z_2) > 0$, т.е. точка опускается.

Работа сил упругости линейной пружины:

Деформацией Δ такой пружины называется изменение ее длины l_0 . **Жесткостью**



пружины «с» называется сила, необходимая для ее удлинения на единицу длины. Деформация Δ вызывает упругую силу F .

Пружина линейно упруга, если упругая сила линейно зависит от деформации $F = c \Delta$. Сила

направлена к началу O координаты x , выбранному в положении равновесия груза. Поэтому сила называется **восстанавливающей** (положение равновесия), $|x| = \Delta$ и

$$F_x = -c x$$

Элементарная работа силы $d'A = -c x dx$. При перемещении конца пружины из положения с координатой x_1 в положение x_2 , упругая сила совершает конечную работу

$$A_{12} = -c \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{2} c(x_1^2 - x_2^2)$$

Квадраты координат заменим квадратами деформаций

$$A_{12} = \frac{1}{2} c (\Delta_1^2 - \Delta_2^2) \quad (50)$$

Знак работы определяется соотношением начальной и конечной деформаций пружины.

Работа момента упругости спиральной пружины

Рассмотрим стержень, вращающийся вокруг вертикальной оси под действием спиральной пружины. Жесткость c' такой пружины равна моменту, закручивающему пружину на один радиан. Ее деформация измеряется углом закручивания $\Delta' = \varphi$ в радианах. Деформация вызывает момент упругости $M_z = -c' \varphi$.

Элементарная работа силы

$$d'A = -c' \varphi d\varphi.$$

При повороте стержня из положения с координатой φ_1 в положение φ_2 , упругий момент совершает конечную работу

$$A_{12} = -c' \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} c' (\varphi_1^2 - \varphi_2^2)$$

Квадраты координат заменим квадратами деформаций

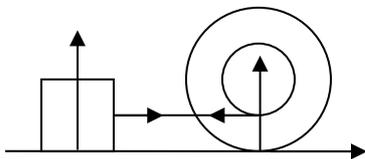
$$A_{12} = \frac{1}{2} c (\Delta_1'^2 - \Delta_2'^2)$$

Знак работы определяется соотношением начальной и конечной деформаций пружины.

НАЧАЛА АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ЛАГРАНЖА.

Механика Ньютона дает полную систему уравнений для решение основной задачи механики: определения закона движения системы и реакций связей по нагрузке и начальным условиям. Как мы видели на примере твердого тела, часть этих уравнений, равная числу степеней свободы тела, является дифференциальными уравнениями движения, остальные определяют реакции связей.

Метод Лагранжа позволяет находить непосредственно дифференциальные уравнения движения системы.



Рассмотрим систему двух тел. Нерастяжимая нить и отсутствие проскальзывания катка оставляют системе одну степень свободы. Три внешние реакции плоскости и одна внутренняя реакция нити войдут в 5 уравнений Ньютона: 2 для тела и 3 для катка.

Из них только одно будет дифференциальным уравнением движения системы, которое чаще всего и является целью.

Метод Лагранжа позволяет сразу составить одно дифференциальное уравнение. При этом реакции идеальных связей будут изначально исключены из рассмотрения. Метод Лагранжа опирается на понятие *возможного перемещения*.

Классификация связей.

Рассмотрим движение системы n точек в инерциальной системе отсчета с координатами x, y, z . Состояние системы определяется значениями $3n$ координат $x_1 \dots x_n$ и $3n$ скоростей $\dot{x}_1 \dots \dot{x}_n$

Связью называется ограничение, наложенное на координаты и скорости точек. В общем случае уравнения с связями имеют вид:

$$\Phi_i(x_1 \dots z_n; \dot{x}_1 \dots \dot{z}_n; t) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

В качестве координат могут выступать и другие параметры, в том числе, угловые.

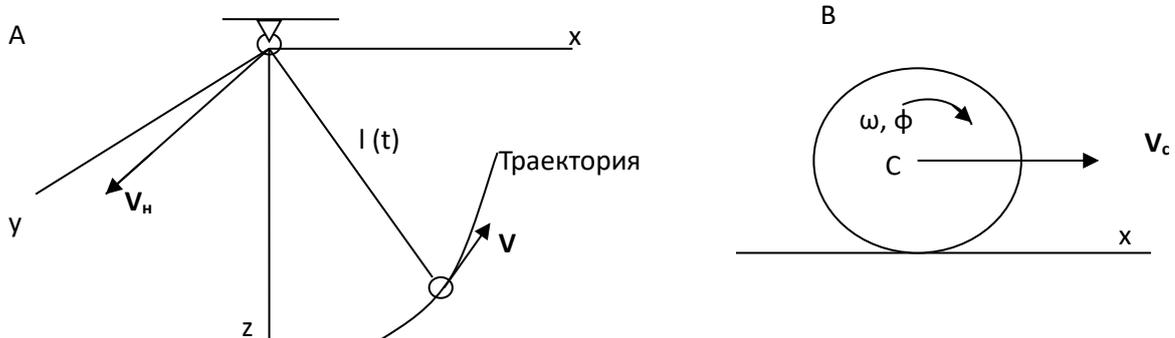
Связи подразделяются на:

1. Геометрические и кинематические

В уравнения геометрических связей не входят скорости. Рассмотрим 2 примера: маятник А переменной длины и колесо В, которое катится без проскальзывания.

Расстояние от маятника А до начала координат не может быть больше переменной длины нити, поэтому уравнение связи имеет вид: $x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2(t)$

Связь геометрическая, поскольку в ее уравнении нет производных координат.



При качении колеса В без скольжения скорость центра и угловая скорость связаны соотношением

$$\dot{x} = r \dot{\phi}$$

Связь кинематическая

2. Стационарные и нестационарные

В уравнениях стационарных связей время t не входит явно

Примеры: А) – нестационарная, т.к. время входит в уравнение

В) – стационарные

3. Удерживающие (двусторонние) и неудерживающие (односторонние)

Уравнения удерживающих связей пишутся через равенство, неудерживающие – через неравенство.

Примеры: А) – неудерживающая связь. Название односторонняя следует из того, что нить не растягивается, но может сминаться. Таким образом, нить действует в одну сторону, от центра.

В) – удерживающие

4. Голономные и неголономные:

Голономные связи — это все геометрические связи, а также те из кинематических, которые интегрированием могут быть приведены к виду геометрических.

Примеры: и А и В – голономные (геометрические). Уравнение связи колеса может быть проинтегрировано и приведено к виду геометрической связи

$$x - r \phi = 0$$

Изучение систем с неголономными связями является сложным разделом аналитической механики и выходит за рамки курса. Следовательно, мы будем рассматривать только системы с голономными связями.

Обобщенные координаты. Число степеней свободы системы.

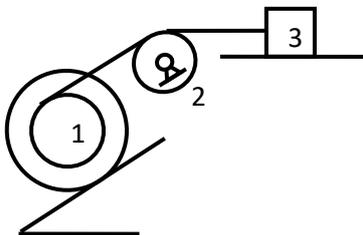
Рассмотрим систему точек $\{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_n\}$ с идеальными голономными нестационарными связями. Положение системы в инерциальной системе отсчета определяется координатами $(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_n, y_n, z_n)$. Эти $3n$ координат подчиняются s уравнениям голономных связей:

$$\Phi_i(x_1 \dots z_n; t) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

Таким образом, из $3n$ координат только $l = 3n - s$ является независимыми. Остальные s выражаются через них с помощью уравнений связи.

Для голономных систем, число l называется **числом степеней свободы**. Число l может быть определено как число координат, которое надо зафиксировать, чтобы система остановилась.

Декартовы координаты не всегда являются удобными. Кроме них используют



угловые координаты и их комбинации с линейными координатами. **Обобщенными координатами q_i** называются параметры любой размерности, определяющие положение системы.

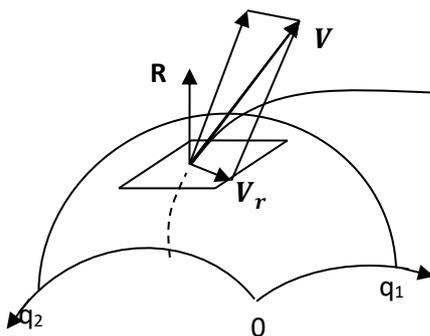
Так, обобщенными координатами системы трех тел можно назвать: координаты центра и угол поворота катка 1, угол поворота блока 2, координаты тела 3. Все они связаны между собой ввиду отсутствия проскальзывания катка, не растяжимости нити, наличия направляющих. Только одна из них является независимой, поскольку при фиксации любого из перечисленных параметров система потеряет подвижность. Значит, система имеет одну степень свободы.

Условимся в дальнейшем под обобщенными координатами понимать только независимые координаты q_i ($i = 1, 2 \dots l$).

Возможная, действительная и виртуальная скорость точки системы.

Рассмотрим движение несвободной точки под действием силы F и нестационарной геометрической связи

$$\Phi(x, y, z; t) = 0 \quad (51)$$



Сила и связь допускают множество **возможных движений** точки, отличающихся начальными условиями. Возможное движение, происходящее в действительности и отвечающее конкретным начальным условиям, является **действительным**.

Уравнение связи (51) удобно трактовать как уравнение движущейся поверхности, по которой движется точка. На рисунке изображена фотография поверхности в момент времени t .

В данный момент материальная точка может оказаться в произвольной точке поверхности связи и иметь произвольно направленную возможную скорость \mathbf{V} , которая соответствует произвольным начальным условиям.

Любая возможная скорость \mathbf{V} является суммой переносной скорости \mathbf{V}_e вместе с поверхностью и относительной скорости \mathbf{V}_r , касательной к поверхности связи.

При нестационарной связи относительная скорость \mathbf{V}_r не может совпасть с действительной скоростью, т.е. осуществимой. Поэтому ее называют воображаемой, или *виртуальной*.

Если поверхность связи гладкая, то ее реакция \mathbf{N} нормальна к поверхности. Метод Лагранжа основан на том, что нормальная реакция \mathbf{N} не создает мощности на виртуальной скорости \mathbf{V}_r .

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{V}_r = 0 \quad \text{но} \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{V} \neq 0$$

Исключив такие реакции из рассмотрения, мы найдем уравнения движения точки по поверхности связи, то есть искомые дифференциальные уравнения движения.

При стационарной связи точка движется по неподвижной поверхности, ее переносная скорость равна нулю, возможные и виртуальные скорости совпадают и касательны к поверхности связи.

Обобщенные силы и реакции. Идеальные связи.

Рассмотрим точку m_k системы. Обозначим равнодействующие активных сил и реакций связей, действующих на точку, \mathbf{F}_k и \mathbf{N}_k . Все возможные законы движения, включая действительный закон движения точки, являются функциями независимых обобщенных координат и времени

$$\mathbf{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_i, t)$$

Они удовлетворяют уравнениям связей и уравнениям Ньютона

$$m_k \mathbf{w}_k = \mathbf{F}_k + \mathbf{N}_k$$

Возможная скорость точки \mathbf{V}_k складывается из переносной \mathbf{V}_{ke} и виртуальной (относительной) \mathbf{V}_{kr} скоростей

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{ke} + \mathbf{V}_{kr}, \quad \mathbf{V}_{ke} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}, \quad \mathbf{V}_{kr} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Здесь и в дальнейшем повторяющийся индекс говорит о суммировании по индексу: k от 1 до n , i от 1 до l .

Вычислим мощность всех сил на виртуальных скоростях \mathbf{V}_{kr}

$$\sum_i \left(\sum_k (\mathbf{F}_k + \mathbf{N}_k) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i = (Q_i + R_i) \dot{q}_i$$

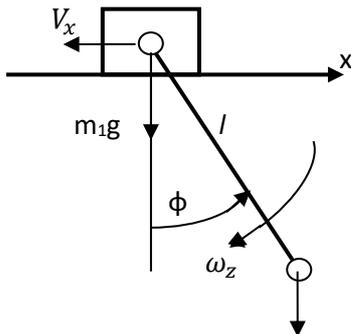
Выражения в скобках (ниже символ суммирования по k подразумевается, поскольку индекс k повторяется)

$$Q_i = \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \quad R_i = \mathbf{N}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}$$

логично назвать обобщенными силами Q_i и обобщенными реакциями R_i , поскольку они являются множителями при обобщенных скоростях \dot{q}_i в выражении мощности. Обычно обобщенные силы Q_i находят как коэффициент при \dot{q}_i в выражении виртуальной мощности активных сил

$$\mathbf{F}_k \mathbf{V}_{kr} = Q_i \dot{q}_i$$

Посмотрим, как это делается на примере *эллиптического маятника*. Маятник состоит из тела массы m_1 , скользящего поступательно без трения вдоль оси x , и шарнирно прикрепленного к нему математического маятника длины l и массы m_2 . Связи стационарны, значит виртуальные скорости являются возможными скоростями.



При вычислении возможной мощности активных сил $m_1 \mathbf{g}$ и $m_2 \mathbf{g}$ воспользуемся независимостью и произвольностью возможных скоростей системы V_x и ω_z . Их независимость означает, что мощность на обеих скоростях равна сумме мощностей на каждой из них. Связи идеальны и допускают каждую из возможных скоростей в двух направлениях. Попробуем дать

отрицательные скорости.

Сначала, для вычисления Q_x дадим возможную скорость $V_x < 0$, положив $\omega_z = 0$. При этом вся система движется поступательно налево со скоростью V_x . На горизонтальном движении вертикальные силы тяжести не имеют мощности, поэтому

$$N_x = 0 \quad \text{и} \quad Q_x = 0$$

Чтобы вычислить обобщенную силу Q_φ , придадим системе возможные скорости $V_x = 0$, $\omega_z < 0$. Тело m_1 остается неподвижным, маятник вращается по часовой стрелке. Мощность создает только момент силы $m_2 \mathbf{g}$ на угловой скорости ω_z .

$$N_\varphi = m_2 g l \sin \varphi |\omega_z| = -m_2 g l \sin \varphi \omega_z = Q_\varphi \omega_z$$

Таким образом

$$Q_\varphi = -m_2 g l \sin \varphi$$

Чтобы не ошибиться в знаке силы, удобно давать положительные обобщенные возможные перемещения.

Связи называются *идеальными*, если все их обобщенные реакции равны нулю.

$$R_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l)$$

Идеальными являются гладкие поверхности, шарниры без трения, нерастяжимые нити и тд.

Лагранж показал, что реакции идеальных связей не влияют на движение системы по нестационарным связям.

Статический принцип возможных скоростей.

Рассмотрим систему с идеальными стационарными связями, находящуюся в покое. Поскольку связи стационарны, то переносные скорости отсутствуют и виртуальные скорости являются возможными.

Принцип: чтобы система оставалась в покое необходимо и достаточно равенство нулю обобщенных сил в положении равновесия.

$$Q_i = 0 \quad (52)$$

Необходимость. Если система находится в покое, то скорости ее точек, а значит и мощность всех сил равны нулю.

$$(Q_i + R_i) \dot{q}_i = 0$$

Ввиду независимости и произвольности обобщенных скоростей \dot{q}_i

$$Q_i + R_i = 0$$

Поскольку связи идеальны, то все их обобщенные реакции R_i равны нулю и равны нулю обобщенные силы

$$Q_i = 0$$

Достаточность: пусть все $Q_i = 0$. Покажем, что система остается в покое. Предположим обратное – система начала двигаться. Тогда кинетическая энергия системы начинает возрастать, для стационарных связей со скоростью

$$\dot{T} = (Q_i + R_i) \dot{q}_i = Q_i \dot{q}_i > 0$$

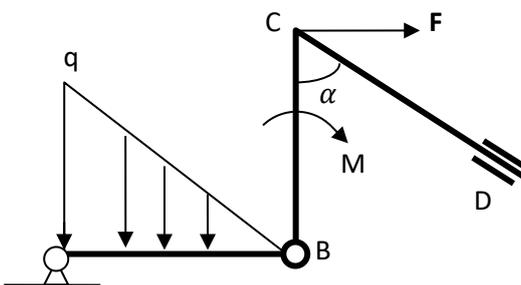
Откуда

$$Q_i > 0$$

что противоречит исходному предположению. Значит, система останется в покое, что и требовалось доказать.

Комплекты контрольных задач на принцип возможных скоростей можно скачать с: <https://disk.yandex.ru/d/itjDbi4afDNMGg>

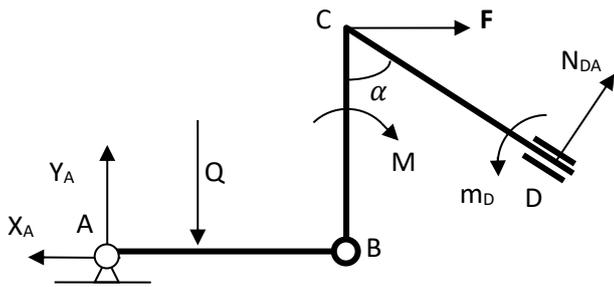
Пример решения задачи на принцип возможных скоростей



На систему 2х стержней действует сила, момент и распределенная нагрузка.

1. Для каждой внешней реакции преобразуйте внешние связи. Запишите принцип возможных мощностей и соотношения скоростей.
2. Вопрос: как нужно направить прямой стержень, чтобы задача стала статически неопределимой, а связи недостаточными?

1. Решение



Связи достаточны, т.е. обеспечивают покой системы двух тел при любой плоской нагрузке.

Связи определимы, поскольку реакция в скользящей заделке, являясь произвольной силой, перпендикулярной направлению скольжения, не может оказаться на линии АВ двух других реакций.

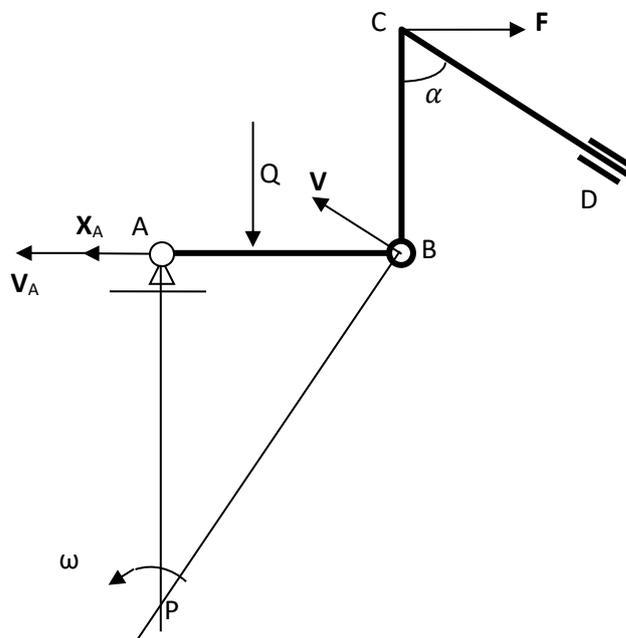
Чтобы применить принцип возможных скоростей нужно для каждой неизвестной реакции преобразовать связи так, чтобы система стала

механизмом с одной степенью свободы вдоль искомой реакции.

Изображать будем только те силы и моменты, которые создают мощность в возможном движении преобразованной системы.

Реакция X_A

Шарнир А заменим катком вдоль оси x . Получим механизм с одной степенью



свободы.

Искомую реакцию X_A воспринимаем как активную силу, уравнивающую остальные силы.

Стержень BCD может двигаться поступательно вдоль направляющей. Дадим ему возможную скорость V , изобразив ее в общей точке B.

При этом точка А стержня АВ приобретет скорость V_A вдоль реакции X_A .

Стержень АВ совершает плоское движение, вращаясь в данный момент вокруг мгновенного центра скоростей (МЦС) P с возможной угловой скоростью ω .

Поскольку механизм находится в покое, то с необходимостью выполняется принцип возможных скоростей.

Возможную мощность сил, приложенных к стержню АВ в плоском движении, вычислим как произведение момента силы относительно P на возможную угловую скорость стержня ω

$$X_A AP \omega - Q \frac{AB}{3} \omega - FV \sin \alpha = 0$$

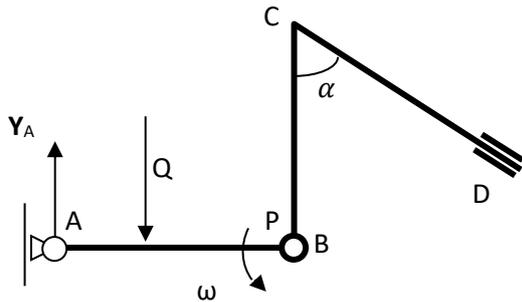
Кинематическая связь всегда находится через общую точку (B в этой задаче):

$$V = \omega BP, \quad BP = \frac{AB}{\cos \alpha}, \quad AP = AB \tan \alpha, \quad Q = \frac{1}{2} q AB$$

Подставив соотношение скоростей в принцип, можно найти реакцию X_A

Реакция Y_A

Шарнир А заменяем катком вдоль оси y .



Возможная скорость шарнира А направлена вдоль оси y . Скорость шарнира В направлена параллельно CD. Поэтому МЦС стержня АВ находится в точке В.

Это значит, что стержень ВСD неподвижен, а стержень АВ вращается вокруг В с возможной угловой скоростью ω .

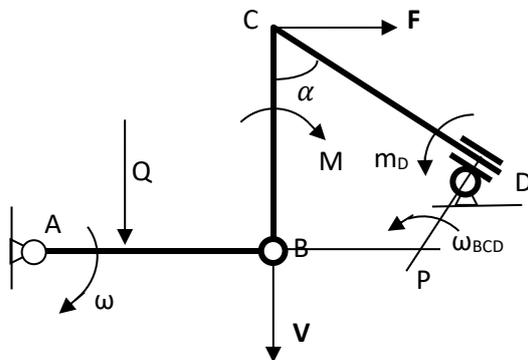
Приравняем нулю возможную мощность всех сил, приложенных к стержню

АВ, вычисленную как произведение момента силы относительно В на угловую скорость стержня ω .

$$-Y_A AB \omega + Q \frac{2AB}{3} \omega = 0$$

Это уравнение определяет реакцию Y_A .

Момент m_D



Скользящую заделку D ставим на шарнир, давая возможность поворота вокруг D.

Даем стержню АВ возможную угловую скорость ω . Общая точка В приобретает возможную скорость V .

Скорость точки D направлена вдоль CD, поэтому стержень в плоском движении совершает вращение вокруг МЦС Р с возможной угловой скоростью ω_{BCD} . Ее направление определено скоростью V .

Мощность сил вычисляем как произведение момента относительно их центров скоростей А и Р соответственно на угловые скорости стержней.

$$Q \frac{AB}{3} \omega + (m_D - FCB - M) \omega_{BCD} = 0$$

Связь скоростей ω и ω_{BCD} находим через скорость V общей точки В:

$$V_B = AB \omega = BP \omega_{BCD}, \quad BP = CD \sin \alpha - (BC - CD \cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha,$$

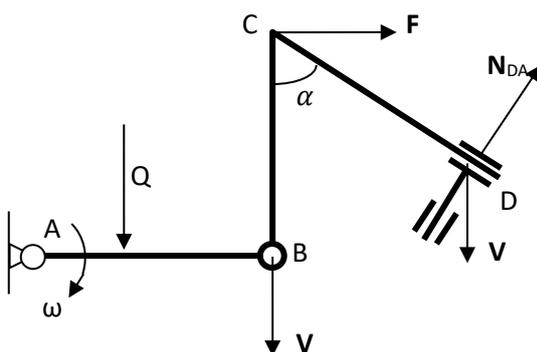
Подстановка связи скоростей в уравнение принципа позволяет найти момент реакции m_D

Реакция N_D

Скользящую заделку D заменяем двойной скользящей заделкой, которая позволяет стержню ВСD двигаться произвольно, но только поступательно. Направление этого поступательного движения задает скорость общего шарнира В.

Даем стержню АВ возможную угловую скорость ω вокруг шарнира А. Возможные скорости всех точек стержня ВСD одинаковы и равны V .

Мощность сил, приложенных к стержню АВ в его вращении вокруг А вычисляем как



произведение момента на угловую скорость стержня ω . Искомая реакция N_D создает мощность на скорости V поступательного движения.

$$-N_D V \sin \alpha + Q \frac{AB}{3} \omega = 0$$

Кинематическая связь:

$$V = AB\omega$$

Подстановка связи скоростей в уравнение мощностей позволяет найти реакцию N_D

2. Ответ на вопрос

Перпендикулярно CD.

Здесь следует исходить из факта, что при правильном числе неизвестных, как только связи становятся избыточными в одном направлении, они становятся недостаточными в другом направлении.

Если стержень AB перпендикулярен CD, то появляется свобода перемещения стержня BCD вдоль CD. Одновременно связи будут избыточными по направлению AB.

Полная система уравнений для системы с идеальными голономными нестационарными связями из теоремы об изменении кинетической энергии

Как известно теорема об изменении кинетической энергии точки является проекцией второго закона Ньютона на направление движения (скорости) точки, и приводит к дифференциальному уравнению ее движения. Лагранж воспользовался тем же приемом для вывода дифференциальных уравнений системы с идеальными голономными нестационарными связями. Мы спроецируем закон Ньютона и на направление движения нестационарной связи, что позволит найти реакции идеальных связей.

Тождества Лагранжа

Рассматривается система материальных точек с массами $\{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_n\}$, движение которой ограничено идеальными голономными нестационарными связями общего вида

$$f_j(\mathbf{r}_k; t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (53)$$

Рассмотрим систему материальных точек $\{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_n\}$ с идеальными голономными нестационарными связями. Все возможные, в том числе и действительный закон движения точки, то есть ее радиус-вектор, являются функциями независимых обобщенных координат и времени

$$\mathbf{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_l; t)$$

Вычислим скорость k -той точки:

$$\mathbf{V}_k = \dot{\mathbf{r}}_k = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \quad (*)$$

Повторяющийся индекс говорит о суммировании по индексу: k от 1 до n , i от 1 до l . При этом

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}(q_1, \dots, q_l; t) \quad (**)$$

Докажем *первое тождество Лагранжа* L_1

$$\frac{\partial V_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \quad (L_1)$$

Поскольку (*) - линейная функция \dot{q}_i с коэффициентами $\partial \mathbf{r}_k / \partial q_i$, то тождество L_1 верно.

Второе тождество Лагранжа L_2

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial V_k}{\partial q_j} \quad (L_2)$$

доказывается прямым вычислением правой и левой частей тождества.

Дифференцируя (***) по времени, получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right) = \sum \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_j \partial t}$$

Дифференцируя (*) по q_j , получаем то же выражение

$$\frac{\partial V_k}{\partial q_j} = \sum \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_j \partial t}$$

Тождество (L_2) доказано.

Уравнения Ньютона в проекциях на обобщенные координаты и на движение связи.

Согласно второму закону Ньютона, равнодействующие активных сил \mathbf{F}_k и реакций идеальных связей \mathbf{N}_k , действующих на точку m_k системы, определяют ее абсолютное ускорение \mathbf{w}_k в инерциальной системе отсчета:

$$m_k \mathbf{w}_k = \mathbf{F}_k + \mathbf{N}_k \quad (54)$$

Проблемы использования уравнений Ньютона (54) для вывода дифференциальных уравнений движения системы состоят в их векторном виде и в зависимости неизвестных реакций \mathbf{N}_k , а значит и ускорений \mathbf{w}_k , от скоростей точек и движения нестационарных связей.

Уравнениям (53, 54) отвечает множество **возможных** положений, законов движения $\mathbf{r}_k(t)$, и скоростей \mathbf{V}_k , порожденных множеством начальных условий.

Возможные положения системы на связях можно задать независимыми обобщенными координатами $\{q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_l\}$, где l - число степеней свободы системы. Тогда, возможный закон движения точки m_k окажется функцией обобщенных координат и времени $\mathbf{r}_k(q_i, t)$.

Представим движение системы из произвольного положения как сумму двух движений: переносного движения вместе со связями и относительного движения по связям. Возможная скорость точки m_k является суммой переносной и относительной скоростей:

$$\mathbf{V}_k = \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i = \mathbf{V}_{ke} + \mathbf{V}_{kr} \quad (55)$$

$$\mathbf{V}_{ke} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}, \quad (56)$$

$$\mathbf{V}_{kr} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (57)$$

Здесь и далее повторяющийся индекс говорит о суммировании по индексу.

В произвольном положении системы на связях переносные скорости \mathbf{V}_{ke} имеют единственное значение, определяемое положением точки в данный момент времени на связи и уравнениями связи (53).

Связям (53), зафиксированным в данный момент времени, отвечает множество относительных скоростей \mathbf{V}_{kr} , порожденных множеством начальных условий. Все

относительные скорости направлены произвольно в касательной плоскости к поверхности связей, и имеют произвольный модуль. Именно относительные скорости создают множество возможных скоростей V_k системы. Относительные скорости точек принято называть *виртуальными* скоростями системы.

Из выражения (55) вытекает, что при стационарных связях множества возможных и виртуальных скоростей совпадают.

В данном положении системы производные $\partial \mathbf{r}_k / \partial q_i$ в формуле (55) имеют единственное значение. Произвольными же в формуле (55) являются обобщенные скорости \dot{q}_i , которые назовем *виртуальными обобщенными скоростями*.

Умножив закон Ньютона для каждой точки на ее возможную скорость, после суммирования по k придем к теореме об изменении кинетической энергии системы для возможных скоростей:

$$\dot{T} = m_k \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{V}_k = (\mathbf{F}_k + \mathbf{N}_k) \cdot \mathbf{V}_k, \quad T = \frac{m_k V_k^2}{2}$$

$$m_k \mathbf{w}_k \cdot (\mathbf{V}_{ke} + \mathbf{V}_{kr}) = (\mathbf{F}_k + \mathbf{N}_k) \cdot (\mathbf{V}_{ke} + \mathbf{V}_{kr})$$

Поскольку на систему наложены идеальные связи, сумма мощностей их реакций на любых виртуальных скоростях \mathbf{V}_{kr} в произвольном положении системы равна нулю

$$\mathbf{N}_k \cdot \mathbf{V}_{kr} = 0$$

Приходим к двум соотношениям

$$m_k \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{V}_{kr} = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{V}_{kr} \quad (58)$$

$$m_k \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{V}_{ke} = (\mathbf{F}_k + \mathbf{N}_k) \cdot \mathbf{V}_{ke} \quad (59)$$

Уравнения Лагранжа второго рода

Покажем, что из соотношений (58) следуют уравнения Лагранжа второго рода, а соотношения (59) позволяют найти реакции связей.

Подставим в (58) выражение относительных скоростей \mathbf{V}_{kr} (57), и просуммируем

$$\sum_i \left[\sum_k m_k \mathbf{w}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right] \dot{q}_i = \sum_i \left[\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right] \dot{q}_i$$

Скалярное произведение

$$m_k \mathbf{w}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}$$

Является проекцией ускорения точки \mathbf{w}_k на касательную к поверхности связи $\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}$

Касательная к поверхности связи составляющая ускорения не зависят от касательных скоростей \dot{q}_i (от них зависят только нормальные реакции идеальных связей), и равна проекции равнодействующей внешних сил \mathbf{F}_k на то же направление.

Действительно, ввиду независимости обобщенных скоростей коэффициенты в скобках при них равны:

$$\sum_k m_k \mathbf{w}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \quad (60)$$

Покажем, эти соотношения в обобщенных координатах приводят к уравнениям Лагранжа.

Здесь правые части являются проекциями сил на обобщенные координаты, поэтому суммы

$$Q_i = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \equiv \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \quad (61)$$

естественно, назвать **обобщенными силами**.

Выразим левые суммы через обобщенные координаты.

$$\begin{aligned} m_k \mathbf{w}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} &= m_k \dot{\mathbf{V}}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(m_k \mathbf{V}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) - m_k \mathbf{V}_k \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(m_k \mathbf{V}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - m_k \mathbf{V}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{m_k V_k^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{m_k V_k^2}{2} = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Здесь использованы тождества Лагранжа

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_i}$$

Таким образом, выражения (1.12) являются уравнениями Лагранжа второго рода.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (62)$$

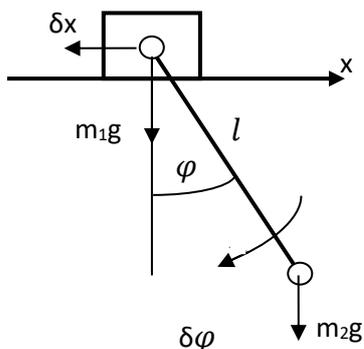
Из уравнений Лагранжа следуют дифференциальные уравнения движения системы по связям. После их интегрирования вопрос о реакциях идеальных связей остается открытым. Обычно для определения реакций прибегают к векторным уравнениям динамики относительного движения.

Уравнение Лагранжа является наиболее универсальным способом вывода дифференциальных уравнений движения голономной системы с идеальными связями, в том числе и не стационарными.

Преимущества и недостатки метода Лагранжа по сравнению с методом Ньютона:

- 1) Формализм метода Лагранжа, состоящий в том, что задача сводится к дифференцированию функции Т, удобен, но не позволяет увидеть физические законы, как в методе Ньютона.
- 2) Метод Лагранжа позволяет изначально исключить из рассмотрения реакции идеальных связей, что позволяет быстро получить дифференциальные уравнения движения системы. Для определения этих реакций после интегрирования уравнений придется, однако, вернуться к методу Ньютона.

Пример решения задачи



Чтобы получить дифференциальные уравнения движения эллиптического маятника **методом Ньютона**, пришлось бы:

- учесть реакцию идеальной связи в виде натяжения нити,
- составить одно уравнение поступательного движения тела m_1 , и два уравнения плоского движения точки m_2 .
- Из трех уравнений- два будут дифференциальными и одно послужит для определения натяжения нити.

Найдем дифференциальные уравнения

методом Лагранжа:

Система имеет две степени свободы, которым соответствуют обобщенные координаты x , φ и уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{d\dot{x}} - \frac{dT}{dx} = Q_x \qquad \frac{d}{dt} \frac{dT}{d\dot{\varphi}} - \frac{dT}{d\varphi} = Q_\varphi$$

Обобщенные силы мы нашли раньше

$$Q_x = 0 \qquad Q_\varphi = -m_2 g l \sin \varphi$$

Кинетическую энергию системы T ищем в момент прохождения системой положения равновесия

$$T = \frac{1}{2} [m_1 \dot{x}^2 + m_2 (\dot{x} + l\dot{\varphi})^2]$$

T не зависит от x : $\frac{dT}{dx} = 0$, и $Q_x = 0$, значит

$$\frac{dT}{d\dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi = \text{Const}$$

Замечаем, что этот интеграл выражает ожидаемое сохранение количества движения системы вдоль оси x .

Первое дифференциальное уравнение движения системы получим после дифференцирования

$$(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = 0$$

Для получения второго уравнения, найдем соответствующие производные.

$$\frac{dT}{d\dot{\varphi}} = m_2 l (l\dot{\varphi} + \dot{x} \cos \varphi)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{d\dot{\varphi}} = m_2 l (l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi - \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi)$$

$$\frac{dT}{d\varphi} = -m_2 l \dot{x} \varphi \sin \varphi$$

При подстановке во второе уравнение Лагранжа подобные выражения сокращаются, и мы находим второе дифференциальное уравнение движения системы

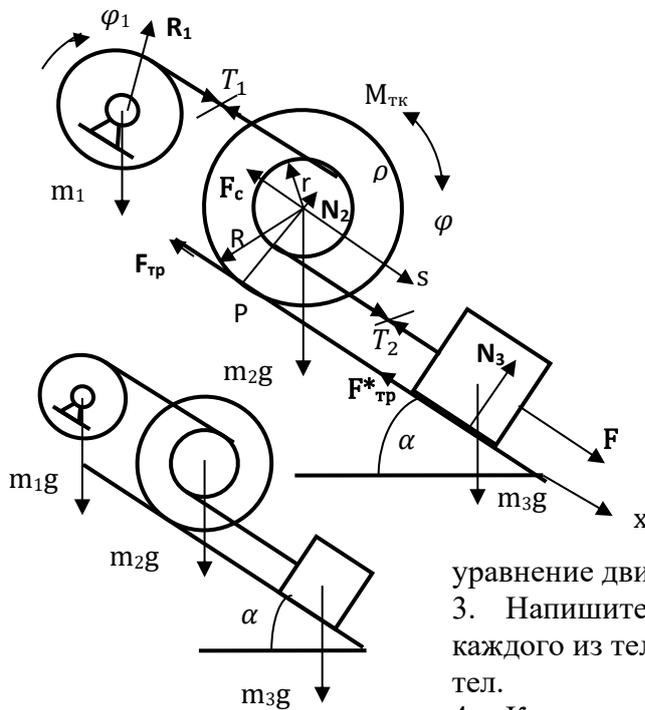
$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi = -g \sin \varphi$$

При фиксации тела m_1 получаем уравнение колебаний математического маятника m_2

$$l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi$$

Комплект контрольных задач, решаемых методами Ньютона и Лагранжа, можно найти здесь: <https://disk.yandex.ru/d/MgeI-bf-5ddnOg>

**Пример вывода
дифференциального уравнения движения системы с 1ой степенью свободы
методами Ньютона и Лагранжа**



Три тела связаны нерастяжимой нитью. Каток массы m_1 движется без проскальзывания, но с сопротивлением качению (коэффициент k), и сопротивлением дороги (k_1). Радиус инерции катка относительно центральной оси ρ . Груз m_3 скользит с трением (коэффициент f)

1. Приложите к одному из тел силу или момент так, чтобы нити были натянуты, и система двигалась из состояния покоя в соответствующем силе (моменту) направлении.

2. Выведите дифференциальное

уравнение движения системы методом Лагранжа.

3. Напишите дифференциальные уравнения движения каждого из тел методом Ньютона и соотношения ускорений тел.

4. К следующему занятию из уравнений Ньютона

получите то же дифференциальное уравнение движения системы, что и методом Лагранжа.

1. К блоку 1 можно приложить момент, направленный против часовой стрелки. К телу 2 нельзя ничего приложить поскольку может ослабнуть одна из нитей. Приложим к телу 3 силу F , направленную вниз вдоль наклонной плоскости. Будем считать, что система движется из состояния покоя в направлении силы F

2. Лагранж

2.1 Положение системы можно задать несколькими обобщенными координатами:

углами поворота φ и φ_1 , координатой s центра катка 2, координатой x тела 3.

Система остановится, если зафиксировать любую из перечисленных координат при натянутых нитях. Значит, система имеет одну степень свободы, и только одна из обобщенных координат является независимой. Выберем угол поворота φ катка 2 за независимую координату, и согласуем направления всех координат так, чтобы они возрастали одновременно.

Запишем единственное уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}$$

2.2 Найдем кинетическую энергию системы, как сумму энергий в действительном движении системы, соответствующих типу движения тел: вращательного для тела 1, плоского для тела 2 и поступательного для тела 3.

$$T = \frac{J_1}{2} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{s}^2 + \frac{J_2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m_3}{2} \dot{x}^2$$

Моменты инерции тел 1 (пусть будет сплошным диском) и 2:

$$J_1 = \frac{m_1}{2} r_1^2; \quad J_2 = m_2 \rho^2$$

Поскольку система имеет одну степень свободы, то все скорости выражаем через обобщенную скорость $\dot{\varphi}$. В катке скорости линейно зависят от расстояния до МЦС (P).

$$\dot{s} = R\dot{\varphi}; \quad \dot{x} = (R - r)\dot{\varphi};$$

Скорость верхней части нити

$$v = (R + r)\dot{\varphi}$$

Угловая скорость блока 1:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{v}{r_1} = \frac{R + r}{r_1} \dot{\varphi}$$

Подставив формулы кинематических связей, получаем выражение кинетической энергии через обобщенную скорость $\dot{\varphi}$.

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{4} r_1^2 \left(\frac{R + r}{r_1} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m_2}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m_2 \rho^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m_3}{2} (R - r)^2 \dot{\varphi}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{m_1}{2} (R + r)^2 + m_2 (R^2 + \rho^2) + m_3 (R - r)^2 \right] \dot{\varphi}^2 \\ T &= \frac{J}{2} \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

Постоянную величину в квадратных скобках можно назвать моментом инерции J системы, приведенным к оси катка.

Левая часть уравнения Лагранжа приобретает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J\ddot{\varphi}$$

2.3 Найдем обобщенную силу Q_φ , как коэффициент при обобщенной скорости $\dot{\varphi}$ в выражении возможной мощности активных сил. Реакции неидеальных связей можно условно рассматривать как неизвестные активные силы. Изобразим все внешние силы системы.

Реакция податливой «дороги» на податливое колесо сводится к нормальной реакции N_2 , силе трения $F_{\text{тр}}$, моменту трения качения $M_{\text{тк}}$,

$$M_{\text{тк}} = N_2 k = k m_2 g \cos \alpha;$$

направленному против вращения колеса, и силе сопротивления F_c

$$F_c = N_2 \frac{k_1}{R} = \frac{k_1}{R} m_2 g \cos \alpha$$

направленной против движения его центра.

Сила трения скольжения $F_{\text{тр}}^*$ связана (в отличие от $F_{\text{тр}}$) с нормальной реакцией N_3 законом Кулона

$$F_{\text{тр}}^* = f N_3 = f m_3 g \cos \alpha$$

Мощность сил во вращательном и плоском движениях будем вычислять как произведение момента сил относительно центра скоростей на угловую скорость тела. Мощность положительна при совпадении направлений сомножителей.

Перечислим силы, не имеющие мощности

$$\begin{aligned} N(R_1, m_2 g) &= 0 && \text{по неподвижности точки приложения} \\ N(F_{\text{тр}}, N_2) &= 0 && \text{по отсутствию момента относительно МЦС Р} \\ N(N_3) &= 0 && \text{по перпендикулярности скорости тела} \\ N(T_1, T_2) &= 0 && \text{как реакции нерастяжимой нити} \end{aligned}$$

Дадим системе возможную обобщенную скорость. Она определяется только связями, не имеет никакого отношения к действительному движению и может иметь произвольный знак и модуль. Чтобы не ошибиться в знаке, даем положительную возможную скорость $\omega_z > 0$.

Поскольку действительные скорости принадлежат множеству возможных, то удобно воспользоваться найденными соотношениями действительных скоростей, считая их положительными.

Вычислим мощность всех сил на положительных скоростях:

$$N = m_2 g \dot{s} \sin \alpha + m_3 g \dot{x} \sin \alpha + F \dot{x} - M_{\text{тк}} \dot{\varphi} - F_c \dot{s} - F_{\text{тр}}^* \dot{x}$$

Подставив сюда соотношения скоростей, находим

$$N = [g\{(m_2 R + m_3(R - r))\} \sin \alpha + F(R - r) - g(k + k_1)m_2 \cos \alpha - g f m_3 \cos \alpha (R - r)] \dot{\varphi} = Q_\varphi \dot{\varphi}$$

Постоянная величина в квадратных скобках является обобщенной силой Q_φ , имеющей размерность момента.

2.4 Из уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

получаем дифференциальное уравнение равноускоренного движения системы:

$$J\ddot{\varphi} = Q_\varphi$$

3. Ньютон

Составим дифференциальные уравнения движения каждого из тел системы. Для этого мысленно разрезаем нити и вводим в рассмотрение их натяжения T_1 и T_2 .

Блок m_1

совершает вращательное движение. Дифференциальное уравнение вращения

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = T_1 r_1$$

Каток m_2

совершает плоское движение. Составляем три уравнения Ньютона

$$m_2 \ddot{s} = m_2 g \sin \alpha + T_2 - T_1 - F_c - F_{\text{тр}}$$

$$0 = N_2 - m_2 g \cos \alpha$$

$$J_2 \ddot{\varphi} = F_{\text{тр}} R - (T_1 + T_2) r - M_{\text{тк}}$$

(моменты относительно центра катка !)

Тело m_3

совершает поступательное движение. Уравнения Ньютона:

$$m_3 \ddot{x} = F + m_3 g \sin \alpha - T_2 - F_{\text{тр}}^*$$

$$0 = N_3 - m_3 g \cos \alpha$$

В полученных бти уравнениях 9 неизвестных: $\dot{\varphi}_1$ T_1 \ddot{s} T_2 N_2 $\ddot{\varphi}$ $F_{\text{тр}}$ \ddot{x} N_3

Недостающие 3 уравнения находятся интегрированием уравнений кинематических связей

$$\ddot{s} = R \ddot{\varphi}; \quad \ddot{x} = (R - r) \ddot{\varphi}; \quad \ddot{\varphi}_1 = \frac{R + r}{r} \ddot{\varphi}$$

Аналитические уравнения для определения реакций идеальных связей

Покажем, что соотношения (59, стр.48) позволяют найти реакции связей аналитически, по функции кинетической энергии T . Запишем (59) в виде:

$$m_k \mathbf{w}_k \cdot (\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_{kr}) = (\mathbf{F}_k + \mathbf{N}_k) \cdot \mathbf{V}_{ke}$$

С учетом уравнений Лагранжа, и того, что $m_k \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{V}_k = \dot{T}$, получаем

$$\begin{aligned} m_k \mathbf{w}_k \cdot (\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_{kr}) &= \dot{T} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i = \dot{T} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i = \\ &= \dot{T} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i = 2\dot{T} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = \\ &= 2\dot{T} - 2\dot{T}_2 - \dot{T}_1 - \frac{\partial T}{\partial t} = 2\dot{T}_2 + 2\dot{T}_1 + 2\dot{T}_0 - 2\dot{T}_2 - \dot{T}_1 - \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{T}_1 + 2\dot{T}_0 - \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned}$$

Здесь учтено, что при нестационарных связях кинетическая энергия является суммой квадратичной, линейной и нулевой форм обобщенных скоростей.

$$T = \sum (T_{k2} + T_{k1} + T_{k0})$$

Таким образом, для каждой из точек системы

$$(\mathbf{F}_k + \mathbf{N}_k) \cdot \mathbf{V}_{ke} = \dot{T}_{k1} + 2\dot{T}_{k0} - \frac{\partial T_k}{\partial t} \quad (63)$$

Из этих соотношений можно определить реакции \mathbf{N}_k внешних и внутренних идеальных связей.

1. Дискретные нестационарные связи

Понятие нестационарных связей применимо только в случаях, когда инертность системы пренебрежимо мала по сравнению с инертностью связей (движение спичечного коробка по волнам, поезда по Земле, человека по поезду, и т.п.). В противном случае связь должна быть включена в систему.

Детали механизмов обладают инертностью одного порядка, поэтому в механизмах чаще всего нестационарные связи отсутствуют. После решения обратной задачи любую деталь механизма можно, однако, формально считать нестационарной связью для сопряженных деталей. Это позволяет находить реакции внутренних связей предлагаемым ниже способом.

Когда нестационарные связи представляют собой механизм с конечным числом степеней свободы, их движение можно задать функциями времени $\{q_{l+1}(t), q_{l+2}(t), \dots, q_m(t)\}$, которые назовем несвободными обобщенными координатами системы.

Таким образом, абсолютное движение системы относительно инерциальной системы отсчета может быть задано системой m обобщенных координат $\{q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_m\}$, среди которых последние $m - l$ несвободных координат являются заданными функциями времени.

Будем сначала считать, что все координаты свободны, а реакции нестационарных связей являются неизвестными активными силами. Связи становятся условно стационарными. Найдем дифференциальные уравнения системы и уравнения, выражающие реакции через все обобщенные координаты. Из полученных соотношений найдем выражения реакций нестационарных связей через закон движения связей и системы по связям.

После освобождения координат связей, кинетическая энергия становится квадратичной формой виртуальных обобщенных скоростей

$$T = T(q_i, \dot{q}_i)$$

а возможные законы движения - функциями только обобщенных координат.

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_i)$$

Их явная зависимость от времени скрыта в координатах $\{q_{l+1}, q_{l+2}, \dots, q_m\}$

Запишем соотношения типа (58)

$$m_k \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{V}_{kr} = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{V}_{kr} \quad (64)$$

Уравнения (64) аналогичны уравнениям (58). Разница только в том, что в число активных сил включены неизвестные реакции нестационарных связей. Как и в случае уравнений (58), приходим к полной системе уравнений движения системы, состоящей из дифференциальных уравнений Лагранжа числом степеней свободы l :

$$L_i(T) = Q_i^a \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (65)$$

и уравнений для определения реакций \mathbf{N}_k , входящих в обобщенные силы

$$L_i(T) = Q_i^R \quad (i = l + 1, \dots, m) \quad (66)$$

Уравнения (65) позволяют по начальным условиям найти закон движения системы по связям. После этого, из уравнений (66) можно найти реакции внешних и внутренних связей.

2. Примеры

2.1. Нестационарные связи общего вида.

Точка массы m движется в плоскости x, y по закону, в котором выделена обобщенная координата q вдоль движущейся плоской кривой

$$x = x(q, t), \quad y = y(q, t)$$

Например, точка движется по эллипсу, полуоси которого изменяются во времени

$$x = a(t)\sin\frac{q}{a(t)}, \quad y = b(t)\cos\frac{q}{b(t)}$$

Кинетическая энергия точки является суммой трех форм обобщенной скорости

$$T(\dot{q}, q, t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = T_2 + T_1 + T_0$$

$$T_2 = A_2(q, t)\dot{q}^2, \quad T_1 = A_1(q, t)\dot{q}, \quad T_0 = A_0(q, t)$$

Производные форм:

$$\dot{T}_1 = A_1\ddot{q} + \frac{\partial A_1}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial A_1}{\partial t}, \quad \dot{T}_0 = \frac{\partial A_0}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial A_0}{\partial t}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial A_2}{\partial t}\dot{q}^2 + \frac{\partial A_1}{\partial t}\dot{q} + \frac{\partial A_0}{\partial t}$$

Из уравнения мощностей

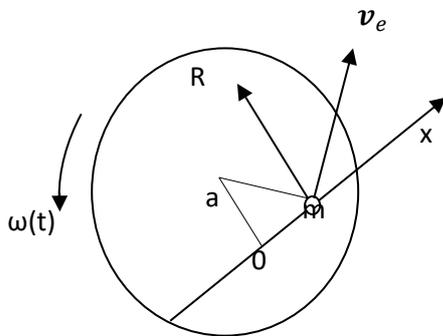
$$\dot{T}_1 + 2\dot{T}_0 - \frac{\partial T}{\partial t} = A_1\ddot{q} - \frac{\partial A_2}{\partial t}\dot{q}^2 + 2\frac{\partial A_0}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial(A_1 + A_0)}{\partial t} = \mathbf{N} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$$

находим реакцию связи

$$N_x \frac{\partial x}{\partial t} + N_y \frac{\partial y}{\partial t} = A_1\ddot{q} - \frac{\partial A_2}{\partial t}\dot{q}^2 + 2\frac{\partial A_0}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial(A_1 + A_0)}{\partial t}$$

3.2 Точка массы m движется без трения по хорде диска, вращающегося в горизонтальной плоскости с переменной угловой скоростью $\omega(t)$. Найдём горизонтальную реакцию \mathbf{R} направляющей.

3.2.1 Общая формула



$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_e = \dot{T}_1 + 2\dot{T}_0 - \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$v_e = \omega\sqrt{a^2 + x^2} \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_e = R\omega x$$

$$T = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \omega^2(a^2 + x^2) + 2\omega\dot{x}a]$$

$$T_1 = m\omega\dot{x}a, \quad T_0 = \frac{m}{2}\omega^2(a^2 + x^2),$$

$$\dot{T}_1 = ma(\omega\dot{x} + \dot{\omega}x) \quad \dot{T}_0 = mx\dot{x}\omega^2 + m\omega\dot{\omega}(a^2 + x^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = m\omega\dot{\omega}(a^2 + x^2) + m\dot{\omega}xa$$

Теперь

$$Rx = 2mx\dot{x}\omega + m\dot{\omega}(a^2 + x^2) + ma\ddot{x}$$

С учетом дифференциального уравнения движения

$$\ddot{x} + \dot{\omega}a - \omega^2x = 0$$

получаем

$$R = m[2\omega\dot{x} + \dot{\omega}x + a\omega^2]$$

3.2.2 . Освободим координату φ

$$T = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2(a^2 + x^2) + 2\dot{\varphi}\dot{x}a]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m[\dot{\varphi}(a^2 + x^2) + 2\dot{\varphi}\dot{x}x + a\ddot{x}], \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

Обобщенная сила реакции (момент) по φ :

$$Q_\varphi = Rx$$

Получаем тот же результат

$$Rx = 2mx\dot{x}\dot{\varphi} + m\dot{\varphi}(a^2 + x^2) + ma\ddot{x}$$

$$R = m[2\dot{\varphi}\dot{x} + \ddot{\varphi}x + a\dot{\varphi}^2]$$

После интегрирования уравнения относительного движения, по функциям $\omega(t)$ и $x(t)$ найдем реакцию R .

Аналогичный результат можно получить с помощью основного уравнения динамики относительного движения точки.

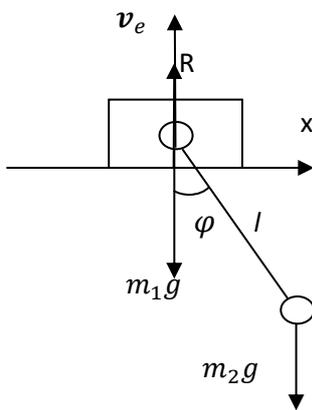
3.3 Внутренние реакции.

Для части системы, остальная ее часть является нестационарной связью. Поэтому реакция отброшенной части может быть найдена указанными ниже способами.

Найдем натяжение нити S , соединяющей тела в эллиптическом маятнике.

3.3.1 Общая формула.

Кинетическая энергия массы m_2



$$T' = \frac{m_2}{2} (\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi)$$

Здесь \dot{x} рассматривается как заданная функция скорости нестационарной связи, поэтому

$$T'_0 = \frac{m_2}{2} \dot{x}^2, \quad T'_1 = m_2 l \dot{\varphi} \dot{x} \cos\varphi$$

$$\dot{T}'_0 = m_2 \dot{x} \ddot{x}, \quad \dot{T}'_1 = m_2 l [(\dot{\varphi} \dot{x} + \dot{x} \dot{\varphi}) \cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \dot{x} \sin\varphi],$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = m_2 (\dot{x} \ddot{x} + l \dot{\varphi} \ddot{x} \cos\varphi)$$

$$2\dot{T}'_0 + \dot{T}'_1 - \frac{\partial T'}{\partial t} = -S \dot{x} \sin\varphi$$

$$SS \sin\varphi = m_2 [l(\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \ddot{\varphi} \cos\varphi) - \ddot{x}]$$

3.3.2 Освободим координату x . Реакцию стержня S считаем неизвестной активной силой. Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{x}} \right) = m_2 [\ddot{x} + l(\dot{\varphi} \cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi)], \quad \frac{\partial T'}{\partial x} = 0, \quad Q_x = -SS \sin\varphi$$

приводит к тому же результату:

$$SS \sin\varphi = m_2 [l(\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \ddot{\varphi} \cos\varphi) - \ddot{x}]$$

Очевидное слагаемое $m_2 g$ входит в правую часть решения через ускорения. Это выражение дает решение при $\varphi \neq 0$. Чтобы найти натяжение нити при $\varphi = 0$, системе следует дать постоянную вертикальную скорость, как это сделано в следующем примере.

3.4 Реакции стационарных связей.

При стационарных связях реакции идеальных связей не создают мощности. Чтобы найти реакции, можно искусственно сделать связи нестационарными, придав им постоянную скорость в направлении связи. При этом система отсчета остается инерциальной, и реакции связей не изменяются.

Найдем нормальную реакцию R , действующую на тело m_1 эллиптического маятника. Дадим основанию вертикальную постоянную скорость v_e . Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m_1}{2} (\dot{x}^2 + v_e^2) + \frac{m_2}{2} [(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (v_e + l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2]$$

3.4.1 Общая формула

$$T_1 = m_2 v_e l \dot{\varphi} \sin\varphi, \quad T_0 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_e^2 = Const$$

$$\dot{T}_1 = m_2 l v_e (\dot{\varphi} \sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \cos\varphi) = [R - (m_1 + m_2)g] v_e$$

$$R = (m_1 + m_2)g + m_2 l (\dot{\varphi} \sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \cos\varphi)$$

3.4.2 Освободим координату y ($\dot{y} = v_e$, $\ddot{y} = 0$).

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m_2}{2}[(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (\dot{y} + l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = (m_1 + m_2)\dot{y} + m_2l(\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi), \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \ddot{y} = 0$$

Обобщенная сила по y : $Q_y = R - (m_1 + m_2)g$

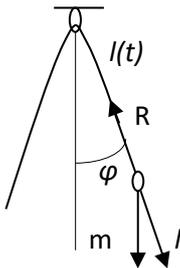
Приходим к тому же результату:

$$R = (m_1 + m_2)g + m_2l(\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)$$

Этот результат можно получить из теоремы о движении центра масс.

3.5 Найдем реакцию нити R маятника массы m и переменной длины $l(t)$.

3.5.1 Общая формула



$$T = \frac{m}{2}(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2)$$

$$T_1 = 0, \quad T_o = \frac{m}{2}\dot{l}^2, \quad \dot{T}_o = m\dot{l}\ddot{l}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = m\dot{l}\ddot{l} + ml\dot{\varphi}^2$$

$$2\dot{T}_o + \dot{T}_1 - \frac{\partial T}{\partial t} = (\mathbf{R} + m\mathbf{g}) \cdot \mathbf{v}_e$$

$$2m\dot{l}\ddot{l} - m\dot{l}\ddot{l} - ml\dot{\varphi}^2 = R_l\dot{l} + mgl\cos\varphi$$

$$R_l = m(\dot{l} - l\dot{\varphi}^2 - g\cos\varphi)$$

3.5.2 Освободим координату l

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{l}}\right) = m\ddot{l}, \quad \frac{\partial T}{\partial l} = m\dot{\varphi}^2 \quad Q_l = R_l + mg\cos\varphi$$

Приходим к тому же результату

$$R_l = m(\dot{l} - l\dot{\varphi}^2 - g\cos\varphi)$$

Этот результат можно получить и с помощью основного уравнения динамики относительного движения точки.

Заметим, что освобождение координат приводит к результату быстрее, чем общая формула. Но этот способ применим только к связям с конечным числом степеней свободы.

Консервативные системы

Определение и свойства потенциального силового поля.

Силовым полем называется трехмерное пространство, в каждой точке которого задана функция силы $\mathbf{F}(\mathbf{r}; t)$. Если время t отсутствует явно, то поле **стационарное**.

Рассмотрим стационарное силовое поле, заданное в декартовых координатах x, y, z функциями:

$$F_x(x, y, z); \quad F_y(x, y, z); \quad F_z(x, y, z) \quad (67)$$

Как было показано, для вычисления конечной работы силы силового поля, необходимо знать траекторию точки. Среди силовых полей существует класс **потенциальных силовых полей**, для которых конечная работа силы определяется только начальным и конечным положением точки и не зависит от траектории.

Силовое поле (67) называется **потенциальным**, если существует функция **потенциальной энергии** $\Pi(x, y, z)$, такая, что

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

Пусть задано поле (67). Как проверить, является ли оно потенциальным? Мы считаем, что потенциальная энергия Π является непрерывной, дважды дифференцируемой функцией координат. Тогда можно воспользоваться свойством: порядок взятия смешанной производной не влияет на результат:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial x},$$

Отсюда **критерии потенциальности силового поля**

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

Свойства работы потенциальных сил.

- 1) Элементарная работа потенциальной силы равна минус дифференциалу потенциальной энергии. Действительно

$$d'A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz\right) = -d\Pi$$

Отсюда вытекают следующие свойства.

- 2) Конечная работа потенциальной силы зависит только от начального и конечного положения точки

$$A_{12} = \int_{1-2} d'A = -\int_1^2 d\Pi = \Pi_1 - \Pi_2$$

- 3) Работа по замкнутому кругу равна нулю:

$$\Pi_1 = \Pi_2, \quad \text{поэтому} \quad A_0 = 0$$

Вычисление потенциальной энергии. Закон сохранения полной механической энергии.

Поверхность, на которой Π сохраняет значение называется *экипотенциальной*:

$$\Pi(x, y, z) = C_1 = \text{const}$$

Выясним направление \mathbf{F} по отношению к потенциальной поверхности. Пусть точка перемещается по экипотенциальной поверхности $\Pi = C_1$. По свойству работы потенциальная сила \mathbf{F} не совершает работы:

$$d'A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Поскольку $d\mathbf{r}$ направлено произвольно в касательной плоскости к поверхности $\Pi = C_1$, то сила направлена перпендикулярно экипотенциальным поверхностям.

С другой стороны

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \mathbf{k}\right) = -\mathbf{grad} \Pi$$

Значит, сила направлена в сторону убывания Π .

По свойствам дифференцирования обе функции $\Pi(x, y, z)$ и $\Pi(x, y, z) + C$, где C - произвольная аддитивная постоянная, определяют одно и то же силовое поле. Говорят, что потенциальная энергия определена с **точностью до аддитивной постоянной**.

Выберем нулевой уровень потенциальной энергии. Переместим точку из произвольного положения $M(x, y, z)$ пространства в любую точку нулевого уровня и сосчитаем работу силы:

$$A_{MM_0} = \Pi(x, y, z)$$

Отсюда **правило вычисления функций потенциальной энергии**:

Функция $\Pi(x, y, z)$ вычисляется как работа потенциальной силы на перемещение из произвольной точки $M(x, y, z)$ на нулевой уровень.

Примеры:

3) **Постоянная сила $F = \text{const}$:**

$$A_{12} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

4) **Сила тяжести.** Это частный пример постоянной силы:

Поле однородно, если

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = \text{const}$$

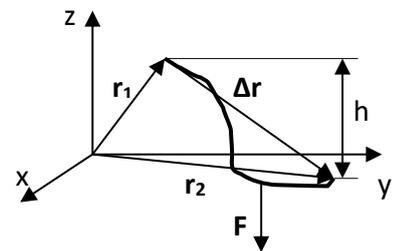
Направим ось вертикально вверх, тогда

$$F_x = F_y = 0 \quad F_z = -mg$$

Все поверхности $z = \text{const}$ эквипотенциальны. Поэтому

$$A_{12} = F_z (z_1 - z_2) = \pm mgh$$

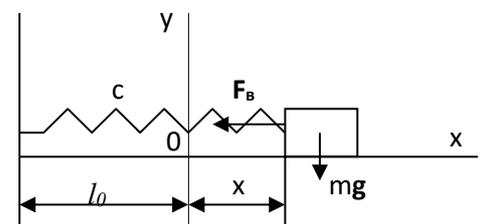
Работа положительна, если точка опускается.



5) **Прямая линейная пружина:**

Естественная длина недеформированной пружины l_0 .

При изменении длины на $\Delta = l - l_0$, называемом деформацией пружины, возникает упругая сила F_B . Она всегда стремится восстановить недеформированное состояние пружины, поэтому она называется **восстанавливающей силой**.



Пружина **линейна**, если сила F_B линейно зависит от деформации:

$$F_B = c \Delta$$

Коэффициент c (н/м) называется жесткостью пружины. Если начало оси x выбрать в положении, где $\Delta = 0$, то

$$F_{Bx} = -c x$$

Элементарная работа силы F_B

$$d'A = F_{Bx} dx = -c x dx$$

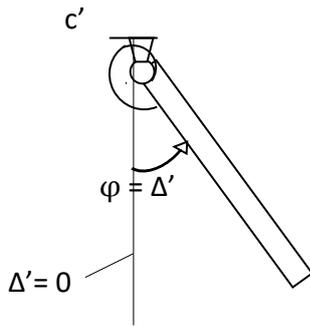
Конечная работа силы F_B

$$A_{12} = -c \int_{x_1}^{x_2} x dx = -\frac{1}{2} c (x_1^2 - x_2^2)$$

Квадраты координат можно заменить их модулями- деформациями:

$$A_{12} = \frac{1}{2} c (\Delta_1^2 - \Delta_2^2)$$

6) **Спиральная линейная пружина:**



При закручивании пружины на угол φ , называемый деформацией пружины Δ' , возникает упругий *восстанавливающий момент* M_B . Пружина *линейна*, если

$$M_{Bz} = -c' \varphi$$

Коэффициент c' (нм) называется жесткостью пружины.

Конечная работа момента M_B

$$A_{12} = -c' \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} c' (\varphi_1^2 - \varphi_2^2)$$

$$A_{12} = \frac{1}{2} c' (\Delta'_1{}^2 - \Delta'_2{}^2)$$

Система называется **консервативной**, если все действующие на неё силы потенциальны. Теорема об изменении кинетической энергии для консервативной системы в интегральной форме:

$$T_2 - T_1 = A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2 \quad \text{или} \quad T_2 + \Pi_2 = T_1 + \Pi_1$$

Полной механической энергией системы называется сумма её кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + \Pi$$

Как видим, полная механическая энергия консервативной системы сохраняется

$$E = \text{const}$$

Предположим, что кроме потенциальных сил, на систему действуют не потенциальные силы, тогда:

$$dT = d'A_{\text{пот}} + d'A_{\text{не пот}} = -d\Pi + d'A_{\text{не пот}}$$

Поделив на dt , найдем, что **скорость изменения полной механической энергии равна мощности непотенциальных сил**.

$$dE/dt = N_{\text{не пот}}$$

Например, при наличии **силы вязкого сопротивления**

$$\mathbf{F}_{\text{сопр}} = -\beta \mathbf{V} \quad \beta = \text{Const}$$

полная механическая энергия убывает со скоростью

$$dE/dt = -\beta \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = -\beta V^2$$

Обобщенные силы.

Статический принцип возможных перемещений для консервативной системы.

Рассмотрим консервативную несвободную систему с потенциальной энергией $\Pi(x, y, z)$, и обобщенными координатами $q_1 \dots q_l$. Найдем обобщенные силы системы по определению

$$Q_i = \sum F_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = - \sum \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$$

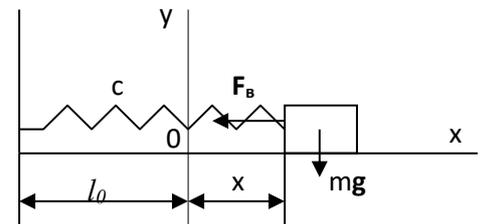
Пример: эллиптический маятник

Примем за нулевой уровень потенциальной энергии положение $x = 0, \varphi = 0$ и вычислим работу при возвращении системы в начало координат

$$\Pi = m_2 g l (1 - \cos \varphi)$$

Π не зависит от x , значит $Q_x = 0$

$$Q_\varphi = -\partial \Pi / \partial \varphi = -m_2 g l \sin \varphi$$



Статический принцип возможных перемещений:

$$\delta A = \sum Q_i \delta q_i = 0$$

Поскольку обобщенные возможные перемещения δq_i независимы, то принцип можно прочесть следующим образом:

В положении равновесия все обобщенные силы обращаются в ноль.

$$Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l)$$

Это значит, что

В положении равновесия потенциальная энергия консервативной системы имеет экстремум

$$\partial \Pi / \partial q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l)$$

Следовательно, нахождение положений равновесия консервативной системы сводится к нахождению экстремумов функции Π .

Уравнение Лагранжа для консервативных систем. Циклические координаты и интегралы.

Рассмотрим консервативную несвободную систему с l степенями свободы. Потенциальная энергия $\Pi(q_1 \dots q_l)$ определяет обобщенные силы

$$Q_i = - \partial \Pi / \partial q_i \quad (i = 1, 2, \dots, l)$$

Уравнения Лагранжа приобретают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{d(T-\Pi)}{dq_i} - \frac{d(T-\Pi)}{dq_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l)$$

Здесь учтено, что потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l)$$

Запишем уравнения Лагранжа через **функцию Лагранжа**

$$L = T - \Pi$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_i} - \frac{dL}{dq_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l)$$

Координата q_σ называется циклической, если от нее не зависит функция Лагранжа

$$\partial L / \partial q_\sigma = 0$$

Уравнение Лагранжа с номером σ приобретает вид

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_\sigma} = 0$$

и имеет **циклический интеграл**

$$\frac{dL}{dq_\sigma} = Const$$

Часто этот интеграл описывает случай сохранения количества движения или кинетического момента.

Пример: эллиптический маятник

Π и T не зависят от x , значит x - циклическая координата, и существует интеграл

$$\frac{dT}{dx} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi = Const$$

Мы уже отмечали, что этот интеграл выражает ожидаемое сохранение количества движения системы вдоль оси x .