Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

А.В. Костарев Т.А. Костарева

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОЛЕБАНИЙ

ТЕОРИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Все вокруг нас, даже с виду находящееся в покое, совершает периодическое движение, называемое колебаниями. Характерными условиями возникновения колебаний является наличие:

1. Равновесного положения (состояния или процесса), около которого совершаются колебания.
2. Сил, которые стремятся вернуть систему в положение равновесия и поэтому называются *восстанавливающими силами*.

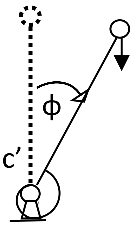
Определение положения равновесия системы.

Рассматривается система с идеальными голономными стационарными связями. Пусть число степеней свободы системы $l = 1$ и система консервативна с потенциалом П(q)

Чтобы определить имеет ли система положения равновесия, воспользуемся принципом возможных перемещений, который гласит, что если такое положение есть, то в нем потенциальная энергия имеет экстремум.

$$\partial \Pi / \partial q = 0$$

Мы получили уравнение для нахождения положения равновесия. Если оно имеет решения, то система имеет положения равновесия.



Пример: Обращенный математический маятник.

Так называется математический маятник длины l и массы m, удерживаемый в вертикальном равновесном положении спиральной пружиной жесткости c’ Выберем положение равновесия за нулевой уровень потенциальной энергии: $\Pi(0) = 0$. Функцию $\Pi(\varphi)$ вычислим как работу силы тяжести и пружины при возвращении маятника в положение равновесия.

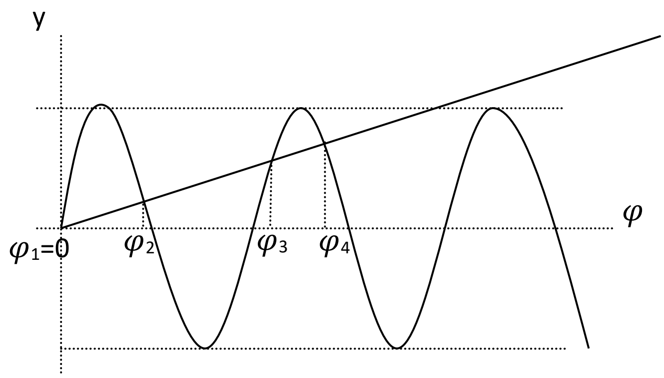
$$\Pi(\varphi) = -mgl(1 - Cos\varphi) + \frac{1}{2}c'\varphi^2$$

Статический принцип возможных перемещений дает условие равновесия:

$$\Pi' = 0 \text{ или } \quad c'\varphi = mglSin\varphi$$

Решения этого уравнения находятся в точках пересечения прямой $y = c'\varphi$ и синусоиды $y = mglSin\varphi$.

Чем меньше жесткость пружины, тем больше положений равновесия будет иметь система. График показывает, что система имеет 4 положения равновесия. При отсутствии пружины их бесчисленное количество, но физически это два вертикальных положения.

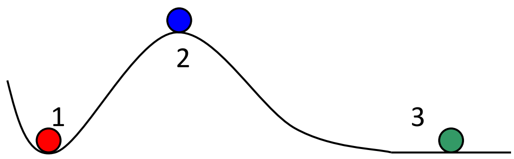


Если пружина жесткая

$$c' > mgl$$

то маятник имеет только одно положение равновесия

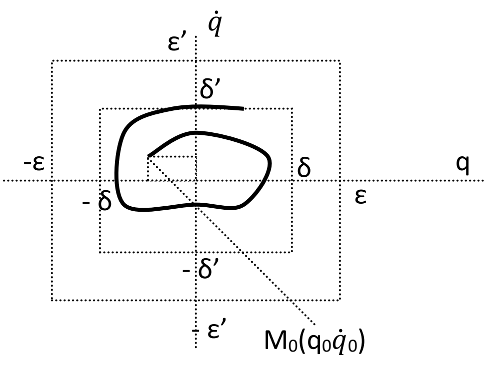
Различают три типа положения равновесия: устойчивое, неустойчивое, безразличное. Для шарика это положения (1), (2) и (3). При отклонении от устойчивого положения шарик стремится в него вернуться. При малейшем отклонении от неустойчивого положения шарик туда не вернется. Положения безразличного равновесия составляют континуум - рядом с любым из них существует такое же.



Опыт показывает, что колебания возникают только около устойчивого положения равновесия.

Устойчивость положения равновесия по Ляпунову.

Рассмотрим систему с одной степенью свободы и положением равновесия, в котором выберем начало обобщенной координаты q. ***Состояние системы*** определим значениями ее координаты $q(t)$ и скорости $\dot{q}$ (t). Эти параметры примем за координаты ***фазовой плоскости*** $q\ \dot{q}$. Начало фазовых координат соответствует равновесному положению покоя системы.



Посмотрим, как будет двигаться система, если ее вывести из состояния покоя. В момент $t = 0$ дадим системе ***возмущение***: $q_o\ \dot{q}_0$. . Далее система будет совершать ***возмущенное движение,*** и изображающая точка опишет ***фазовую траекторию***.

Рассматриваемое положение равновесия называется ***устойчивым по Ляпунову***, если по любым двум сколь угодно малым числам ε, ε' можно задать такие два сколь угодно малые числа δ, δ', что фазовая траектория с началом в области δ никогда не выйдет из области ε.

Линейные и нелинейные системы. Линеаризация.

Рассмотрим консервативную систему с потенциальной энергией $\Pi(q)$ и положением равновесия, в котором выберем начало q и нулевой уровень потенциальной энергии:

$$\Pi(0) = 0 \qquad\qquad \Pi'(0) = 0 \text{ – условие равновесия}$$

Разложим $\Pi(q)$ в ряд Макларена, учтя условие равновесия:

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \Pi'(0)q + \frac{1}{2}\Pi''(0)q^2 + \cdots. = \frac{1}{2}\Pi''(0)q^2 + \cdots.$$

Первое оставшееся слагаемое в ряду называется ***квадратичной формой***, поскольку содержит квадрат q.

Система называется ***линейной по П***, если П является квадратичной формой q, т.е. все остальные члены разложения равны нулю.

Кинетическая энергия системы.

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k V_k^2 \qquad\qquad \boldsymbol{V}_\text{k} = \frac{\partial \mathbf{r}_\text{k}}{\partial q}\dot{q}$$

$$T = \frac{1}{2}\left[\sum \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\text{k}}{\partial q}\right)^2\right]\dot{q}^2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2$$

Функцию $a(q)$ разложим в ряд Макларена.

$$a(q) = a(0) + a'(0)q + \ldots$$

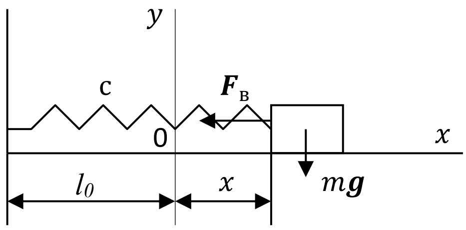
Система называется ***линейной по Т***, если Т является квадратичной формой $\dot{q}^2$ с постоянным коэффициентом, т.е. $a(q) = Const.$ Система ***линейна***, если она линейна и по Т, и по П.

Если система не линейна, то приходится её линеаризовать. ***Линеаризацией*** системы называется введение ограничений, позволяющих считать систему почти линейной. Если рассмотреть малые движения системы $q, \dot{q} << 1$, то в разложении функции $\Pi(q)$ останется только первый член

$$\Pi \approx \frac{1}{2}cq^2, \qquad c = \Pi''(0) \text{ – } \textbf{\textit{жесткость системы}}$$

После линеаризации в разложении $a(q)$ в ряд Макларена, остается только $a(0) \equiv a$

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2$$



Следствие: получить квадратичную форму для нелинейной по Т системы можно, вычислив Т в положении равновесия системы.

Примеры:

а) Линейная пружина: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$; $\Pi = \frac{1}{2}\, cx^2$ - линейна и по Т, и по П:

б) Обращенный маятник: $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$; $\Pi = -mgl(1 - Cos\varphi) + \frac{1}{2}\, c'\varphi^2$

– нелинеен по П, но линеен по Т.

Теорема Лагранжа – Дирихле (об устойчивом положении равновесия консервативной системы). Критерий Сильвестра.

Теорема: для того, чтобы данное положение системы было устойчивым по Ляпунову необходимо (но недостаточно) чтобы функция П имела в этом положении минимум.

Выберем начало координат и нулевой уровень потенциальной энергии в положении равновесия. После линеаризации (если требуется), получим:

Для системы с ***одной степенью свободы***

$$\Pi = \frac{1}{2}\, cq^2, \qquad c = \Pi''(0) > 0$$ – условие минимума и устойчивости

Для системы с ***l степеней свободы***:

$$\Pi = \Pi_0 + \sum\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j + \cdots \approx \frac{1}{2}\sum c_{ij} q_i q_j$$

<u>*Коэффициенты жесткости*</u> системы

$$c_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \qquad i, j = 1,2\ldots l$$

образуют матрицу жесткости системы

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & \cdots & c_{ll} \end{pmatrix}$$

Согласно теореме Лагранжа – Дирихле для устойчивости положения равновесия необходимо чтобы функция П в начале координат имела минимум. Поскольку П равна там нулю, то следует потребовать, чтобы в окрестности нуля функция П была положительно определенной.

Из математики известно, что условием положительной определенности квадратичной формы в нуле является ***критерий Сильвестра***:

положительность всех главных диагональных миноров матрицы жёсткости.

$$\Delta_1 = c_{11} > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22} - {c_{12}}^2 > 0$$

……....

$$\Delta_l = |\mathrm{C}| > 0$$

Если он выполняется, то данное положение равновесия является устойчивым по Ляпунову. Если критерий не выполняется, то требуются более тонкие методы исследования устойчивости.

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Свободные колебания с одной степенью свободы без сопротивления.

Рассматривается движение консервативной системы с одной степенью свободы около устойчивого положения равновесия, где выбрано начало координаты q и нулевой уровень потенциальной энергии. После линеаризации (если система не линейна), кинетическая и потенциальная энергии системы приобретут вид квадратичных форм с постоянными коэффициентами.

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2}cq^2$$

$a > 0$ ввиду положительности кинетической энергии, $c > 0$ ввиду устойчивости положения равновесия

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}$$

приводит к ***дифференциальному уравнению свободных колебаний без сопротивления***

$$a\ddot{q} = -cq \quad \text{или} \quad \ddot{q} + k^2 q = 0 \qquad \left(k^2 = \frac{c}{a} \ \text{сек}^{-1}\right)$$

Попробуем найти решение уравнения в виде экспоненты. Подставив

$$q = e^{\lambda t}$$

в уравнение, после сокращения на $e^{\lambda t}$ получим *характеристическое уравнение* для определения неизвестного параметра λ

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

Уравнение имеет два мнимых корня

$$\lambda = \pm ki$$

Значит, уравнение имеет два независимых решения. Общее решение (второй интеграл) уравнения

$$q = C_1 Coskt + C_2 Sinkt$$

содержит две произвольные постоянные интегрирования C_1 и C_2, которые могут быть найдены из начальных условий:

$$t = 0, \qquad q = q_0, \qquad \dot{q} = \dot{q}_0$$

Чтобы их использовать, находим закон скорости (первый интеграл уравнения)

$$\dot{q} = -C_1 k Sinkt + C_2 k Coskt$$

Подставляя начальные условия, находим при $t = 0$

$$q_0 = C_1, \quad \dot{q}_0 = C_2\, k \quad \text{откуда}$$

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k}$$

Окончательно

$$q = q_0 Coskt + \frac{\dot{q}_0}{k} Sinkt$$

Убеждаемся, что при устойчивом положении равновесия

$$c > 0$$

система совершает периодическое движение с *круговой собственной частотой*

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}}\ \text{сек}^{-1}$$

Удобнее представить закон движения в виде одной функции синуса. Для этого перейдем к новым постоянным А и α так, чтобы получить синус суммы

$$C_1 = ASin\,\alpha, \;\; C_2 = ACos\,\alpha$$

Получим

$$q = Asin(kt + \alpha)$$

Здесь А – амплитуда, $(kt + \alpha)$ – фаза, α- начальная фаза колебаний. Через период колебаний Т фаза синуса изменится на 2π радиан

$$k(t + T) + \alpha = kt + \alpha + 2\pi$$

следовательно, период колебаний

$$T = 2\pi/k \text{ сек}$$

Диссипативная функция Релея сил вязкого сопротивления.
Её связь с полной механической энергией.

Практически любая система совершает колебания в некоторой среде. При движении системы возникают силы сопротивления среды. Например, силы ***вязкого сопротивления***, пропорциональные первой степени скорости движения точек системы:

$$\boldsymbol{F}_k = -\beta_k \boldsymbol{v}_k (k = 1,2, \ldots, n)$$

Найдем обобщенную силу сопротивления, учтя тождество Лагранжа:

$$Q_{\text{сопр}} = \sum \boldsymbol{F}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r_k}}{\partial q} = -\sum \beta_k \, \boldsymbol{v}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v_k}}{\partial \dot{q}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}$$

Здесь введена ***диссипативная функция Релея*** сил вязкого сопротивления:

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \beta_k \boldsymbol{v}_k^{\boldsymbol{2}}$$

Видим, что выражение Ф имеет вид кинетической энергии Т, если в последнем массы точек заменить коэффициентами сопротивления в них. Чтобы найти $Q_{\text{сопр}}$ надо записать функцию Релея в обобщенных координатах:

$$\boldsymbol{v}_k = \frac{\partial \boldsymbol{r_k}}{\partial q}\dot{q}, \qquad \Phi = \frac{1}{2}\left[\sum \left(\frac{\partial \boldsymbol{r_k}}{\partial q}\right)^2\right]\dot{q}^2 = \frac{1}{2}b(q)\dot{q}^2$$

Система линейна по Ф, если $b(q) = Const$ (аналогия с Т).

Если нет, тогда рассматриваются малые движения: $q << 1$ – система линеаризуется: $b(q) \approx b(0)$. Значит, как и Т, функцию Релея следует вычислять в положении равновесия системы $q = 0$, что всегда упрощает вычисления.

Вязкое сопротивление осуществляется с помощью линейных и угловых демпферов. Функция Релея вычисляется по формуле

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum \alpha_i \, V_i^{\,2} + \frac{1}{2}\sum \beta_j \, \omega_j^{\,2}$$

Где α_i- коэффициенты сопротивления линейных демпферов (амортизаторов), V_i −скорости их поршней, β_j − коэффициенты сопротивления вращению, ω_j − угловые скорости вращающихся тел.

Связь функции Релея с полной механической энергией.

Рассмотрим систему с одной степенью свободы и вязким сопротивлением.

Потенциальная и кинетическая энергии, функция Релея для нелинейной системы

$$\Pi(q) = \frac{1}{2}cq^2 \quad (c = Const > 0), \quad T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2, \quad \Phi = \frac{1}{2}b(q)\dot{q}^2$$

Имеют свойства

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = 2T, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = 2\Phi, \quad \dot{\Pi} = \frac{\partial \Pi}{\partial q}\dot{q}, \quad \dot{T} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial T}{\partial q}\dot{q}$$

Умножим уравнение Лагранжа для этой системы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}$$

на $\dot{q}$

$$\dot{q}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}\dot{q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}\dot{q}$$

По формуле производной от произведения получаем

$$\dot{q}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\ddot{q} = 2\dot{T} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\ddot{q}$$

С учетом свойств функций Т, П, Ф получаем

$$2\dot{T} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\ddot{q} - \frac{\partial T}{\partial q}\dot{q} = -\dot{\Pi} - 2\Phi \qquad \text{или} \qquad \dot{T} + \dot{\Pi} = -2\Phi$$

$$\dot{\mathrm{E}} = -2\Phi$$

Этот результат можно сформулировать так:

Полная механическая энергия $\mathrm{E} = \mathrm{T} + \Pi$ ***убывает со скоростью*** 2Φ

Влияние сил вязкого сопротивления на движение системы.

Дифференциальное уравнение системы с одной степенью свободы и вязким сопротивлением получим из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}$$

После линеаризации (если требуется) получаем квадратичные формы

$$\Pi(q) = \frac{1}{2}cq^2\,, \qquad T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2, \qquad \Phi = \frac{1}{2}b\dot{q}^2$$

После подстановки в уравнение Лагранжа получаем ***дифференциальное уравнение колебаний с сопротивлением***

$$a\ddot{q} = -cq - b\dot{q} \qquad \text{или}$$

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0$$

Здесь введены обозначения: коэффициент сопротивления $2n = b/a$ и квадрат собственной частоты $k^2 = c/a$

Найдем решение уравнения в виде экспоненты:

$$q = e^{\lambda t}$$

Подставив это решение в уравнение, после сокращения на $e^{\lambda t}$, получим ***характеристическое уравнение*** рассматриваемого дифференциального уравнения

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$$

Это уравнение имеет 2 корня

$$\lambda = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$$

которым соответствуют 2 независимых решения, сколько и должно быть у уравнения второго порядка.

Вид решений зависит от знака подкоренного выражения

1. Случай малого сопротивления $\boldsymbol{n < k}$

В этом случае корни комплексные и решение имеет вид

$$q = e^{-nt}(C_1 Cos\tilde{k}t + C_2 Sin\tilde{k}t), \qquad \tilde{k} = \sqrt{k^2 - n^2} < k$$

Это «второй интеграл» интеграл рассматриваемого дифференциального уравнения

Первый интеграл есть обобщенная скорость

$$\dot{q} = -ne^{-nt}(C_1 Cos\tilde{k}t + C_2 Sin\tilde{k}t) + e^{-nt}(-C_1\tilde{k}Sin\tilde{k}t + C_2\tilde{k}Cos\tilde{k}t)$$

Как всегда, постоянные C_1, C_2 находятся из начальных условий:

$$t = 0{:}\ \ q = q_0, \quad \dot{q} = \dot{q}_0$$

откуда

$$C_1 = q_0 \qquad\qquad C_2 = \frac{1}{\tilde{k}}(\dot{q}_0 + nq_0)$$

Исследуем это решение, перейдя к новым постоянным интегрирования

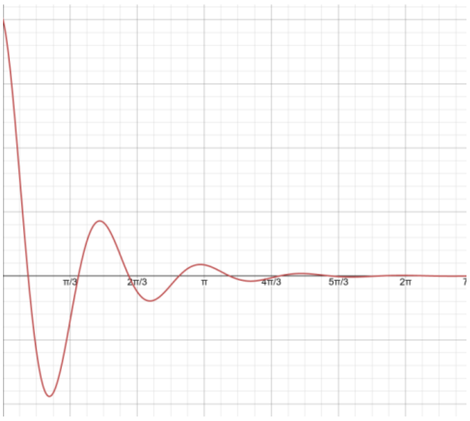
$$C_1 = ASin\alpha, \quad C_2 = ACos\alpha$$

Теперь $\qquad q = Ae^{-nt}Sin\tilde{k}t$

Обозначим

$$\tilde{A} = Ae^{-nt}$$

– амплитуда, которая уменьшается с течением времени.



Видим, что система совершает затухающие колебания. Они являются квазипериодическими, т.к. только положение равновесия система проходит через равные промежутки времени. Квази период вычисляем, как и для колебаний без сопротивления

$$\tilde{T} = \frac{2\pi}{\tilde{k}} > T = \frac{2\pi}{k}$$

Видим, что с увеличением сопротивления n, квази период увеличивается и становится бесконечным при

$$n \to k$$

т.е. при $n = k$ колебания вообще прекращаются.

Быстрота затуханий колебаний характеризуется отношением соседних размахов (максимальных отклонений от положения равновесия)

$$\mu = \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{e^{-nt}}{e^{-n(t+\tilde{T}/2)}} = e^{n\tilde{T}/2}$$

называемым ***декрементом*** (затуханием). Часто используют логарифмический декремент

$$\gamma = ln\mu = n\tilde{T}/2$$

Измерив два соседних размаха и время $\tilde{T}/2$ можно, вычислить коэффициент сопротивления n

$$n = \frac{2}{\tilde{T}} ln \frac{a_i}{a_{i+1}}$$

2. *Случай большого сопротивления* $n > k$

В этом случае корни характеристического уравнения – вещественные числа,

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$$

следовательно,

$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

C_1 и C_2 находятся из начальных условий.

Видим, что движение не колебательное (апериодическое). Пусть начальное отклонение положительно. График движения может иметь один из трех видов.

a) $\dot{q}_0 > 0$ Система после отклонения асимптотически возвращается в положение равновесия.

$b)$ $\dot{q}_0 > 0,$ $|\dot{q}_0| < q_0(n + \sqrt{n^2 - k^2})$ Система сразу асимптотически возвращается в положение равновесия.

c) $\dot{q}_0 > 0, |\dot{q}_0| > q_0(n + \sqrt{n^2 - k^2})$ Система один раз пройдет через положение равновесия и вернется в положение равновесия с другой стороны.

3. *Случай* $n = k$

Практически, маловероятное совпадение. Корни кратные. Апериодическое решение принимает вид.

$$q = e^{-nt}(C_1 + C_2 t)$$

Движения такие же, как и в случае $n > k$

Вынужденные колебания без сопротивления.

Как мы выяснили, консервативная система без сопротивления сохраняет полную энергию и совершает незатухающие колебания. Если учесть влияние среды (вязкое сопротивления), то колебания либо отсутствуют, либо затухают, а полная энергия системы убывает, переходя в среду.

Энергия может и поступать в систему из среды. Пусть действие среды на систему выражается периодической обобщенной силой. Как известно, любую периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$Q = \sum H_i Sin(p_i t + \delta_i)$$

Здесь H_i –амплитуда i-ой гармоники, p_i – вынуждающая частота этой гармоники, δ_i – начальная фаза этой гармоники.

Уравнение Лагранжа такой системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q$$

Подставив квадратичные формы Т и П

$$T = \frac{1}{2} a\dot{q}^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2} cq^2,$$

получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$a\ddot{q} + cq = \sum H_i Sin(p_i t + \delta_i)$$

Его решение складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения.

Частное решение будет иметь вид правой част, т.е представлять из себя сумму одинаковых по виду решений (гармоник). Поэтому, нам достаточно рассмотреть обобщенную силу в виде только одной из гармоник

$$Q = HSin(pt + \delta)$$

Получим дифференциальное ***уравнение вынужденных колебаний без сопротивления***

$$\ddot{q} + k^2 q = hSin(pt + \delta), \qquad h = \frac{H}{a}$$

Решение складывается из общего решения однородного уравнения

$$q_{oo} = C_1 Coskt + C_2 Sinkt$$

и частного решения, которое будем искать в виде правой части

$$q_{\text{ч}} = ASin(pt + \delta)$$

А – амплитуда частного решения, Найдем А и ε.

$$\ddot{q}_{\text{ч}} = -p^2 ASin(pt + \delta)$$

Подставляя в уравнение, после сокращения на Sin, получаем

$$(k^2 - p^2)A = h \qquad\qquad A = \frac{h}{k^2 - p^2}$$

Частное решение имеет вид

$$q_ч = \frac{h}{k^2 - p^2} Sin(pt + \delta)$$

Теперь полное решение приобретает вид

$$q = C_1 Coskt + C_2 Sinkt + \frac{h}{k^2 - p^2}\ Sin(pt + \delta)$$

$$\dot{q} = -kC_1 Sinkt + kC_2 Coskt + \frac{ph}{k^2 - p^2}\ Cos(pt + \delta)$$

Найдем C_1, C_2 из начальных условий:

$$t = 0: \qquad q = q_0; \qquad \dot{q} = \dot{q}_0$$

$$q_0 = \ C_1 + \frac{h}{k^2 - p^2} Sin\delta \qquad \dot{q}_0 = kC_2 + \frac{ph}{k^2 - p^2} Cos\delta$$

Откуда

$$C_1 = \ q_0 - \frac{h}{k^2 - p^2} Sin\delta \qquad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k} + \frac{p}{k}\frac{h}{k^2 - p^2} Cos\delta$$

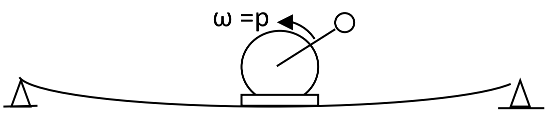
Подставив C_1и C_2 в решение, найдем закон движения

$$q = (q_0 Coskt + \frac{\dot{q}_0}{k} Sinkt) - \frac{h}{k^2 - p^2}\left(Sin\delta\ Coskt + \frac{p}{k}\ Cos\delta\ Sinkt\right) + \frac{h}{k^2 - p^2}\ Sin(pt + \delta)$$

Видим, что движение системы состоит из трех колебаний. Первым стоит колебание с собственной частотой k и амплитудой, зависящей от начальных условий, вторым – колебание с собственной частотой k и амплитудой, не зависящей от начальных условий, и третьим –вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы p и амплитудой, не зависящей от начальных условий.

Биения и резонанс при отсутствии сопротивления.

Как возникает вынуждающая сила? Ее можно создать, поставив электромотор с неуравновешенной массой на упругую балку.



Вынуждающей частотой $p = \omega$ будет угловая скорость вращения электромотора. При $\omega\ = \ 0$ мотор колеблется на балке с собственной частотой k. Если включить мотор, то при $\omega\ \ \to\ \ k$ амплитуда А возрастает, стремясь к бесконечности.

Выясним, как ведет себя при этом система. Для простоты положим начальные условия нулевыми. Тогда $p/k \sim 1$ и решение приобретет вид:

$$q_ч = \frac{h}{k^2 - p^2}[Sin(pt + \delta) - Sin(kt + \delta)] =$$

$$= \frac{2h}{k^2 - p^2} Sin\frac{(p - k)t}{2}\ Cos(pt +\ \delta) = A(t)\ Cos(pt +\ \delta)$$

Видим, что при $p \to k$ амплитуда вынужденных колебаний $A(t)$ становится периодической функцией малой частоты $\frac{(p-k)}{2}$. Такое движение называется ***биениями***. Биения можно слышать в моторном самолете, когда частота вращения мотора приближается к собственной частоте какой-то детали фюзеляжа.

Резонанс

Найденное ранее частное решение теряет смысл при $p = k$, поскольку его амплитуда

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}$$

стремится к бесконечности. Явление увеличения амплитуды вынужденных колебаний А при определенных значениях вынуждающей частоты р называется ***резонансом.*** Выясним, как изменяется амплитуда во времени при $p = k$.

Попробуем найти частное решение в виде

$$q_ч = BtCos(pt + \delta)$$

$$\dot{q}_ч = BCos(pt + \delta) - BptSin(pt + \delta)$$

$$\ddot{q}_ч = -BpSin(pt + \delta) - BpSin(pt + \delta) - Bp^2tCos(pt + \delta)$$

Подставив эти выражения в дифференциальное уравнение, с учетом $p = k$ получим

$$B = -\frac{h}{2p}$$

и частное решение

$$q_ч = -\frac{h}{2p}tCos(pt + \delta) = A(t)\,Cos(pt + \delta)$$

Итак, если двигатель на балке сразу запустить с угловой скоростью $p = k$, то амплитуда вынужденных колебаний (и деформация балки) будет линейно возрастать во времени. При достижении деформаций предельных значений, балка сломается.

Построим зависимость амплитуды А собственно вынужденных колебаний от вынуждающей частоты р. Для построения качественных зависимостей принято переходить к безразмерным величинам. Вместо амплитуды А рассмотрим ее отношение к «статическому отклонению»

$$A_{ст} = \frac{H}{c} = \frac{H}{a}\frac{a}{c} = \frac{h}{k^2},$$

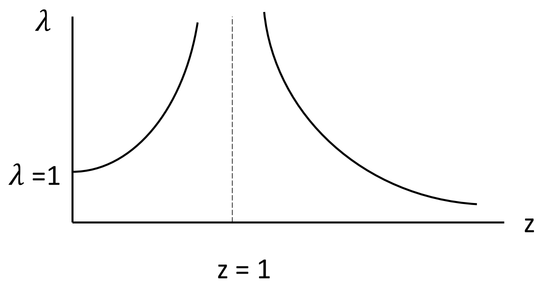
которое называется ***коэффициентом динамичности.***

$$\lambda = \frac{A}{A_{ст}} = \frac{1}{1 - z^2}$$

Здесь

$z = \frac{p}{k}$ – безразмерная вынуждающая частота, называемая ***коэффициентом настройки*** (вынуждающей частоты на собственную частоту).

При $z = 0 \quad \lambda = 1$, при $z \to \infty \quad \lambda \to 0$. График $\lambda(z)$ приобретает вид



Чтобы избежать опасности разрушения системы, следует избегать работы вблизи резонанса

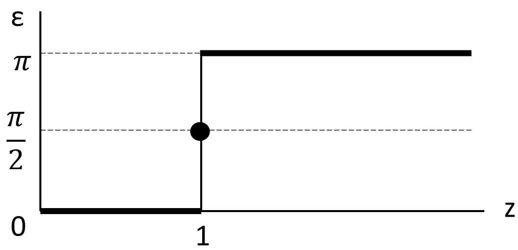
z = 1.

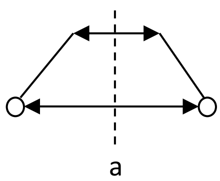
Зависимость сдвига фазы ε (z)

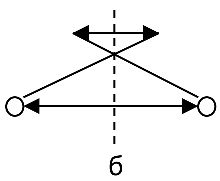
Сдвигом фазы ε называют разность между фазой вынуждающей силы (pt+δ) и фазой частного решения. Найдем ε при различных значениях z.

	Частное решение	Сдвиг фаз
При $z < 1$ $(p < k)$:	$q_ч = \frac{h}{\lvert k^2-p^2\rvert} Sin(pt+\delta)$	$\varepsilon = 0$
При $z = 1$ $(p = k)$:	$q_ч = -\frac{h}{2p} tCos(pt+\delta) = \frac{h}{2p} tSin\left(pt+\delta-\frac{\pi}{2}\right)$	$\varepsilon = \frac{\pi}{2}$
При $z > 1$ $(p > k)$:	$q_ч = -\frac{h}{\lvert k^2-p^2\rvert} Sin(pt+\delta) = \frac{h}{\lvert k^2-p^2\rvert} Sin(pt+\delta-\pi)$	$\varepsilon = \pi$

Теперь можем изобразить график зависимости ε (z).







Сдвиг фаз можно наблюдать, раскачивая «раскидай»- мячик на резинке. Если частота движений руки меньше собственной частоты колебаний раскидая, то шарик движется в одной фазе (синфазно) с рукой (а). При большой частоте движений руки шарик движется «в противофазе» с рукой (б).

Вынужденные колебания с вязким сопротивлением. Закон движения.

Рассматривается все та же система, на которую наряду с потенциальными силами действуют силы сопротивления и возмущающие силы.

Потенциальные силы определяются функцией потенциальной энергии $\Pi(q)$: $\Pi(0) = 0$ – нулевой уровень выбран в положении устойчивого равновесия, где $\Pi'(0) = 0$ и $\Pi''(0) = c > 0$.

Силы вязкого сопротивления характеризуются функцией Релея Ф, вынуждающие силы представлены обобщенной силой Q. После линеаризации имеем квадратичные формы:

$$\Pi = \frac{1}{2}cq^2 \ (c > 0) \qquad T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 \ \ (a > 0) \qquad \Phi = \frac{1}{2}b\dot{q}^2 \ \ (b > 0)$$

И вынуждающую силу

$$Q = HSin(pt + \delta)$$

Записываем уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + Q$$

Подставляем выражения для T, П, Ф, Q и получаем уравнение

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = hSin(pt + \delta)$$

$$2n = \frac{b}{a}; \quad k^2 = \frac{c}{a}; \quad h = \frac{H}{a}$$

Решение этого неоднородного уравнения состоит из общего решения однородного уравнения q_{oo} и частного решения неоднородного уравнения $q_{ч}$.

Решение q_{oo} при малом сопротивлении $n < k$ затухает со временем

$$q_{oo} = e^{-nt}\left(C_1 Cos\tilde{k}t + C_2 Sin\tilde{k}t\right), \qquad \tilde{k} = \sqrt{k^2 - n^2} < k$$

Частное решение ищем в виде:

$q_{ч} = ASin(pt + \delta - \varepsilon),$ А- амплитуда, $\varepsilon -$ сдвиг фазы.

$$\dot{q}_{ч} = Ap\,Cos(pt + \delta - \varepsilon) \qquad \ddot{q}_{ч} = -Ap^2 Sin(pt + \delta - \varepsilon)$$

Правую часть уравнения представляем в виде

$$hSin(pt + \delta) = hSin[(pt + \delta - \varepsilon) + \varepsilon] = h\,Sin\varepsilon\,Cos(pt + \delta - \varepsilon) + h\,Cos\varepsilon\,Sin(pt + \delta - \varepsilon)$$

После подстановки в уравнение, находим

$$A(k^2 - p^2)Sin(pt + \delta - \varepsilon) + 2n\,Ap\,Cos(pt + \delta - \varepsilon) =$$

$$= h\,Sin\varepsilon\,Cos(pt + \delta - \varepsilon) + h\,Cos\varepsilon\,Sin(pt + \delta - \varepsilon)$$

Собираем коэффициенты при $Sin(pt + \delta - \varepsilon)$ и $Cos(pt + \delta - \varepsilon)$

$Sin(pt + \delta - \varepsilon)$: $\quad A(k^2 - p^2) = h\,Cos\varepsilon$

$Cos(pt + \delta - \varepsilon)$: $\quad 2n\,Ap = h\,Sin\varepsilon$

Возведя в квадрат и сложив, найдем амплитуду вынужденных колебаний:

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}$$

Поделив второе на первое, найдем тангенс сдвига фазы:

$$tg\varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}$$

Окончательное частное решение

$$q_ч = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} Sin(pt + \delta - \varepsilon)$$

Общее решение дифференциального уравнения колебаний ($n < k$):

$$q = e^{-nt}\left(C_1 Cos\tilde{k}t + C_2 Sin\tilde{k}t\right) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} Sin(pt + \delta - \varepsilon)$$

$$\dot{q} = -ne^{-nt}\left(C_1 Cos\tilde{k} + C_2 Sin\tilde{k}t\right) + e^{-nt}\left(-C_1\tilde{k}Sin\tilde{k}t + C_2\tilde{k}Cos\tilde{k}t\right) + \frac{hp}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} Cos(pt + \delta - \varepsilon)$$

Как всегда, постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из начальных условий

$$t = 0: \quad q = q_0; \quad \dot{q} = \dot{q}_0$$

$$q_0 = C_1 + ASin(\delta - \varepsilon) \qquad \dot{q}_0 = -nC_1 + C_2\tilde{k} + ACos(\delta - \varepsilon)$$

Откуда

$$C_1 = q_0 - ASin(\delta - \varepsilon) \qquad C_2 = \frac{1}{\tilde{k}}(\dot{q}_0 + nC_1 - ACos(\delta - \varepsilon))$$

Видим, что C_1 и C_2 состоят из начальных условий и слагаемых, зависящих от вынуждающей силы. Подставив C_1 и C_2 в решение, увидим, что, как и в вынужденных колебаниях без сопротивления, движения системы состоит из трёх колебаний ($n < k$):

2) с квази частотой $\tilde{k}$ и амплитудой, зависящей от начальных условий,
3) с квази частотой $\tilde{k}$ и амплитудой, не зависящей от начальных условий
4) собственно вынужденные колебания с частотой p.

Независимо от величины сопротивления n, первые два колебания со временем исчезает и остается собственно вынужденные колебания (частное решение). Поэтому оно представляет особый интерес.

Зависимости $\lambda(z)$ **и** $\varepsilon(z)$

Качественные характеристики построим в безразмерных величинах коэффициентов динамичности λ и настройки z

$$\lambda = \frac{A}{A_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\nu^2z^2}} \qquad tg\varepsilon = \frac{2\nu z}{1 - z^2}$$

Где $\nu = \frac{n}{k}$ – безразмерный коэффициент сопротивления.

Исследуем зависимость $\lambda(z)$ на экстремумы.

Очевидно, что при $z = 0,\ \lambda = 1$, а при $z \to \infty \quad \lambda \to 0$

Рассмотрим подкоренное выражение

$$y = (1 - z^2)^2 + 4\nu^2z^2$$

Найдем точки подозрительные на экстремум.

$$y' = -4z(1 - z^2) + 8\nu^2 z = 0$$

Корень $z_1 = 0$ существует при любом сопротивлении ν

Второй корень найдем из

$$1 - z^2 - 2\nu^2 = 0 \qquad\qquad z_2 = \sqrt{1 - 2\nu^2} < 1$$

Этот корень уменьшается с увеличением сопротивления и исчезает при сопротивлении

$$\nu > \nu^* = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

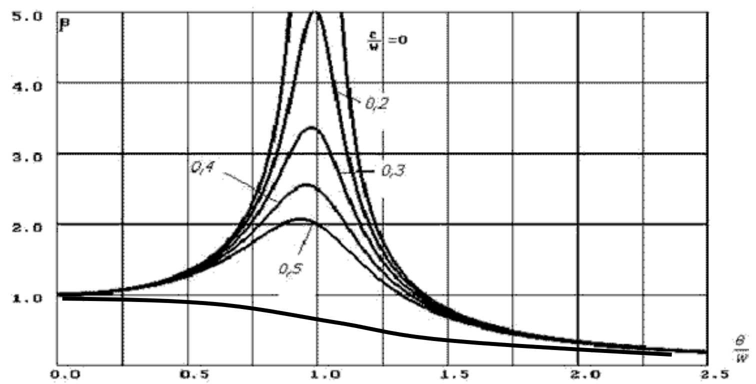
Выясним вид экстремума в нуле.

$$y'' = -4(1 - z^2) + 8z^2 + 8\nu^2|_{z=0} = -4(1 - 2\nu^2)$$

При $\nu < \nu^*$ производная в нуле отрицательна, значит y имеет max, а λ −минимум в нуле.

Именно при $\nu < \nu^*$, существует и второй корень z_2, в котором λ имеет максимум, поскольку за минимумом следует максимум.

Итак, график функции $\lambda(z)$ зависит от величины сопротивления ν: при $\nu < \nu^*$ функция имеет минимум в нуле и максимум (***резонанс***) при z_2. Значение z_2 и величина резонансной амплитуды уменьшаются с увеличением сопротивления ν. При большом сопротивлении $\nu > \nu^*$ функция имеет только максимум в нуле.

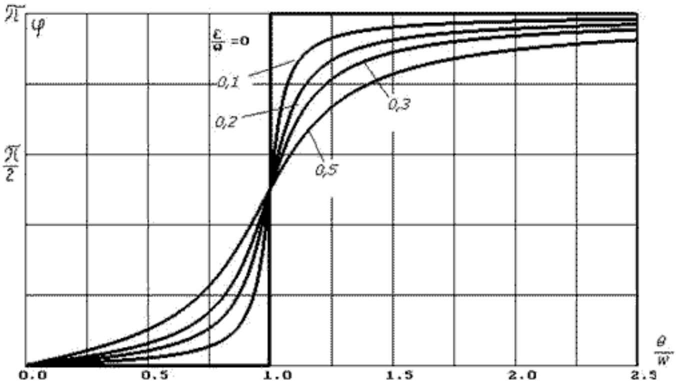


Видим, что при $\nu < \nu^*$, коэффициент динамичности λ (амплитуда) вынужденных колебаний достигает максимального значения при z_2. Как известно, увеличение амплитуды при некоторых значениях вынуждающей частоты (z) называется ***резонансом***. Таким образом, при наличии сопротивления резонанс происходит при z_2.

При увеличении сопротивления значение z_2 уменьшается, и резонанс достигается все раньше. Можно показать, что при этом амплитуда резонансная будет уменьшаться. При $\nu \geq \nu^*$ резонанс исчезает. Как известно, при отсутствии сопротивления резонанс наступает при $z = 1$.

Исследуем *ε (z)*

При $z = 1$ Все графики проходят через $\pi/2$.



Выводы:

1) Консервативная система (все силы потенциальны) совершает незатухающие колебания около положения устойчивого равновесия ($c > 0$).
2) Среда (сила вязкого сопротивления) отнимает у системы полную механическую энергию, поэтому даже при малом сопротивления колебания будут затухающими, а при большом сопротивления вообще отсутствуют.
3) Если в систему без сопротивления поступает энергия в виде периодической вынуждающей силы, то появляются вынужденные колебания с частотой вынужденной силы. Их амплитуда достигает бесконечного значения при $p = k$ (явление резонанса), если система не разрушится раньше.
4) Наиболее общей моделью является модель вынужденных колебаний с сопротивления, при которых увеличение сопротивления уменьшает резонансную амплитуду и сводит явление резонанса к нулю при достижении сопротивления ν^* (резонанс исчезает).
5) Опасного явления резонанса можно избежать если:

   а) работать вдали от зоны резонанса

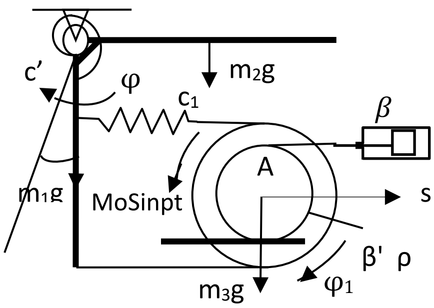
   б) исключить резонанс с помощью демпферов.

Есть механизмы, в которых колебания полезны, например, трамбовка, отбойный молоток, транспортер (колеблется).

Комплект контрольных задач на колебания системы с одной степенью свободы находится на https://disk.yandex.ru/d/sE-Djnx26knu9w

Пример решения задачи
на колебания системы с одной степенью свободы.

Система трех тел движется под действием переменного момента и испытывает действие двух пружин, вязкое сопротивление вращению катка, движущегося без проскальзывания, и линейного демпфера. Стержни имеют разную длину и массу.



Найти:

1. Соотношение статических деформаций пружин
2. Условие устойчивости изображенного положения равновесия.
3. Дифференциальное уравнение малых движений системы

Решение:

Обозначим массы, жесткости и коэффициенты сопротивления. Система имеет одну степень свободы, поскольку нить нерастяжима и натянута пружиной, а каток катится без проскальзывания.

1. Составим квадратичную форму кинетической энергии. Как известно, T приобретает вид формы в момент прохождения системой положения равновесия, изображенного на рисунке.

$$T = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{s}^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\varphi_1}^2$$

$$J_1 = \frac{1}{3}m_1{l_1}^2, \qquad J_2 = \frac{1}{3}m_2{l_2}^2 \qquad J_3 = m_3\rho^2$$

Кинематические связи:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{l_1}{R-r}\dot{\varphi}, \qquad \dot{s} = \dot{\varphi}_1 r = \frac{l_1 r}{R-r}\dot{\varphi}$$

Получаем квадратичную форму

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(m_1{l_1}^2 + m_2{l_2}^2\right) + m_3{l_1}^2\frac{r^2+\rho^2}{(R-r)^2}\right]\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}a\dot{\varphi}^2$$

Здесь, a- коэффициент инертности системы

2. Составим квадратичную форму функции Рэлея Φ. Как известно, Φ приобретает вид формы в момент прохождения системой положения равновесия, изображенного на рисунке.

$$\Phi = \frac{1}{2}\beta {v_A}^2 + \frac{1}{2}\beta'\dot{\varphi_1}^2$$

Кинематическая связь

$$v_A = \frac{2l_1 r}{R-r}\dot{\varphi}$$

Квадратичная форма Φ

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[\beta\frac{4{l_1}^2 r^2}{(R-r)^2} + \beta'\frac{{l_1}^2}{(R-r)^2}\right]\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}b\dot{\varphi}^2$$

Здесь b – приведенный коэффициент сопротивления системы

3. Найдем квадратичную форму потенциальной энергии. Как известно, потенциальная энергия равна работе потенциальных сил при возвращении системы в положение равновесия. Сила тяжести m_3g не совершает работы, поскольку она перпендикулярна перемещению центра катка. Деформация линейной пружины в отклоненном положении складывается из статической деформации и суммы перемещений концов пружины при повороте φ (концы пружины при этом движутся в противоположные стороны).

$$\Pi = m_1 g\frac{l_1}{2}(1 - Cos\varphi) - m_2 g\frac{l_2}{2}Sin\varphi +$$

$$+\frac{c_1}{2}\left[\left(\Delta_{\text{ст}} + \frac{R+r}{R-r}l_1\varphi + (l_1 - 2R)\varphi\right)^2 - {\Delta_{\text{ст}}}^2\right] + \frac{c'}{2}\left[(\Delta'_{\text{ст}} + \varphi)^2 - {\Delta'_{\text{ст}}}^2\right]$$

Система нелинейная, поскольку тригонометрические функции являются рядами по φ

$$Cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \cdots \qquad Sin\varphi = \varphi - \cdots$$

Приходится рассматривать малые колебания: $\varphi,\ \dot{\varphi} \ll 1$ и отбросить в разложениях слагаемые более высоких порядков, обозначенные многоточием.

Покажем, что потенциальная энергия является квадратичной формой обобщенной координаты

$$\Pi = \frac{1}{2}\text{c}\varphi^2$$

Слагаемые $\Delta_{\text{ст}}$ с нулевой степенью φ сокращаются. Так и должно быть, поскольку в положении равновесия потенциальная энергия равна нулю.

Слагаемые с первой степенью φ тоже должны отсутствовать по условию равновесия.

$$\Pi'_0 = 0$$

Приравняем нулю коэффициент при первой степени φ. Его можно вычислить как значение первой производной Π'_0 в положении равновесия. Но проще собрать коэффициенты при первой степени φ

$$-m_2 g \frac{l_2}{2} + c_1\left(\frac{R+r}{R-r} l_1 + l_1 - 2R\right)\Delta_{\text{ст}} + c'\Delta'_{\text{ст}} = 0$$

Это выражение можно назвать «соотношением статических деформаций». Оно показывает, что в положении равновесия можно задать только одну статическую деформацию. Вторая должна быть определена из соотношения.

Таким образом, потенциальная энергия действительно является квадратичной формой φ. Найдем коэффициент жесткости системы с. Он равен

$$\text{c} = \Pi''_0$$

Но проще найти его, как коэффициент при $\frac{\varphi^2}{2}$ в выражении потенциальной энергии

$$\text{c} = m_1 g \frac{l_1}{2} + c_1\left(\frac{R+r}{R-r} l_1 + l_1 - 2R\right)^2 + c'$$

Условием устойчивости положения равновесия является

$$\text{c} > 0$$

Видим, что условие выполняется при любых значениях параметров.

4. Найдем обобщенную вынуждающую силу, возникающую от переменного момента, приложенного к катку

$$M = M_0 Sinpt$$

вычислив мощность момента при положительной возможной обобщенной скорости $\dot{\varphi} > 0$. Направления момента и угловой скорости противоположны, поэтому

$$N = -\dot{\varphi}_1 M_0 Sinpt = \left(-\frac{M_0 l_1}{R-r} Sinpt\right)\dot{\varphi} = Q_{\text{в}}\dot{\varphi}$$

$$Q_{\text{в}} = -\frac{M_0 l_1}{R-r} Sinpt = \text{H} Sinpt$$

Составим дифференциальное уравнение малых колебаний системы. Подставив квадратичные формы Т, П и Ф в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} + Q_{\text{в}}$$

получим

$$a\ddot{\varphi} = -c\varphi - b\dot{\varphi} + \text{H} Sinpt$$

Поделив на а

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = hSinpt$$

Здесь

$$2n = \frac{b}{a}; \quad k^2 = \frac{b}{a}; \quad h = \frac{H}{a}$$

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОЮОДЫ

Квадратичная форма потенциальной энергии. Условие устойчивости положения равновесия.

Рассматриваем систему с 2-мя степенями свободы и обобщенными координатами q_1, q_2. Все силы потенциальны, значит существует функция П (q_1, q_2). Система имеет положение равновесия, в котором выбираем начало координат и нулевой уровень потенциальной энергии П $(0,0) \ = \ 0$. По условиям равновесия:

$$\frac{\partial П}{\partial q_1}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial П}{\partial q_2}(0,0) = 0$$

Разложим П в ряд Макларена в нуле:

$$П(q_1 q_2) = П(0,0) + \frac{\partial П}{\partial q_1}(0,0)q_1 + \frac{\partial П}{\partial q_2}(0,0)q_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 П}{\partial {q_1}^2}(0,0){q_1}^2 + 2\frac{\partial^2 П}{\partial q_1 \ \partial q_2}(0,0)q_1 q_2 + \frac{\partial^2 П}{\partial {q_2}^2}(0,0){q_2}^2\right) + \cdots$$

Ввиду выбора нулевого уровня П и условий равновесия первым ненулевым слагаемым окажется квадратичная форма

$$П(q_1 q_2) = \frac{1}{2}(с_{11}{q_1}^2 + 2с_{12}q_1 q_2 + с_{22}{q_2}^2)$$

Здесь обозначены коэффициенты жесткости системы:

$$с_{11} = \frac{\partial^2 П}{\partial {q_1}^2}(0,0) \qquad с_{12} = \frac{\partial^2 П}{\partial q_1 \partial q_2}(0,0) \qquad с_{22} = \frac{\partial^2 П}{\partial {q_2}^2}(0,0)$$

Система называется ***линейной по П***, если члены разложения, следующие за квадратичной формой, отсутствуют. Если система не линейна, то ее «линеаризуют», рассматривая малые движения системы около положения равновесия. После линеаризации потенциальная энергия практически является квадратичной формой.

Коэффициенты жесткости образуют симметричную матрицу жесткости:

$$C = \begin{pmatrix} с_{11} & с_{12} \\ с_{12} & с_{22} \end{pmatrix}$$

при этом $с_{12} \ = \ с_{21}$, т.к. порядок взятия смешанной производной не имеет значения.

Колебания возникают только около положения устойчивого равновесия. Условием устойчивости положения равновесия по Ляпунову является наличие min П в положении равновесия (в нуле). Поскольку П (0,0) = 0, то это значит, что в окрестности нуля П должно быть положительно определенной функцией.

Из математики известно, что условием положительной определенности квадратичной формы в окрестности нуля является критерий Сильвестра: ***главные диагональные миноры матрицы жесткости должны быть положительны***:

$$с_{11} > 0|C| = с_{11}с_{22} - c_{12}^2 \ > \ 0$$

Квадратичная форма кинетической энергии.

$$T=\frac{1}{2}\sum m_k {V_k}^2$$

$$\boldsymbol{V}_k=\dot{\boldsymbol{r}}_k=\frac{\partial r_k}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial r_k}{\partial q_2}\dot{q}_2; \qquad \frac{\partial r_k}{\partial q_1}(q_1q_2); \quad \frac{\partial r_k}{\partial q_2}(q_1q_2)$$

Возводим $\boldsymbol{V}_k$ в квадрат

$$T=\frac{1}{2}\left({\dot{q}_1}^2\sum m_k\left(\frac{\partial r_k}{\partial q_1}\right)^2+2\dot{q}_1\dot{q}_2\sum m_k\left(\frac{\partial r_k}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial r_k}{\partial q_2}\right)+{\dot{q}_2}^2\sum m_k\left(\frac{\partial r_k}{\partial q_2}\right)^2\right)$$

Таким образом, Т является квадратичной формой обобщенных скоростей с коэффициентами – в общем случае функциями координат:

$$a_{11}=\sum m_k\left(\frac{\partial r_k}{\partial q_1}\right)^2; \qquad a_{12}=\sum m_k\left(\frac{\partial r_k}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial r_k}{\partial q_2}\right) \qquad a_{22}=\sum m_k\left(\frac{\partial r_k}{\partial q_2}\right)^2$$

$$T=\frac{1}{2}\left(a_{11}{\dot{q}_1}^2+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+a_{22}{\dot{q}_2}^2\right)$$

Система называется ***линейной по Т***, если коэффициенты при обобщенных скоростях постоянны. Если система не линейна, то ее линеаризуют, рассматривая малые движения системы. Функции раскладывают в ряд Макларена и оставляют только первый член разложения

$a_{11}=a_{11}(0,0)$ $\quad a_{121}=a_{12}(0,0)$ $\quad a_{22}=a_{22}(0,0)$

Это значит, что получить искомую форму Т можно, вычислив Т в нуле.
Поскольку кинетическая энергия положительна, то для ее коэффициентов всегда выполняется критерий Сильвестра:

$a_{11}>0$ $\quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$

Дифференциальные уравнения движения системы. Главные колебания.

Подставив в уравнения Лагранжа системы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}$$

формы Т и П, получим ***дифференциальные уравнения колебаний системы***:

$$a_{11}\ddot{q}_1+a_{12}\ddot{q}_2+c_{11}q_1+c_{12}q_2=0$$

$$a_{21}\ddot{q}_1+a_{22}\ddot{q}_2+c_{21}q_1+c_{22}q_2=0$$

Решение уравнений ищем в виде периодических синфазных функций с разными амплитудами:

$$q_1=ASin(kt{+}\propto) \qquad q_2=BSin(kt{+}\propto)$$

Подставив эти решения в дифференциальные уравнения, после сокращения на $Sin(kt{+}\propto)$, получим однородные алгебраические уравнения относительно амплитуд А и В, с неизвестным параметром k – собственной частотой.

$$A(c_{11}-a_{11}k^2)+B(c_{12}-a_{12}k^2)=0$$

$$A(c_{12}-a_{12}k^2)+B(c_{22}-a_{22}k^2)=0$$

Как известно, нетривиальное (ненулевое) решение таких уравнений существует, если определитель матрицы системы равен нулю:

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0$$

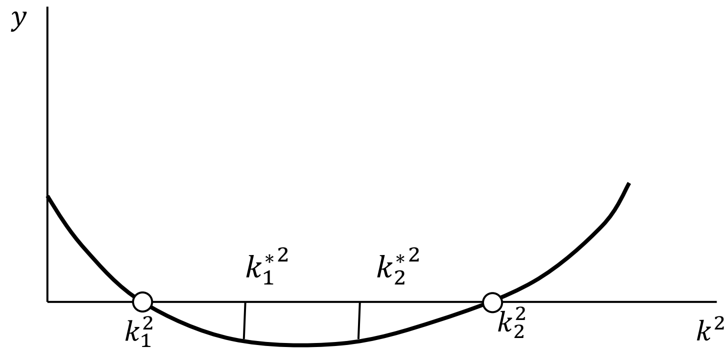
Это дает биквадратное «частотное уравнение» относительно собственной частоты k

$$y(k^2) = 0$$

левая часть которого имеет вид:

$$y(k^2) = k^4(a_{11}a_{22} - {a_{22}}^2) + k^2(2c_{12}a_{12} - a_{11}c_{22} - a_{22}c_{11}) + (\, c_{11}c_{22} - {c_{12}}^2)$$

Оно имеет два корня. Нас устраивает только положительное вещественное решение, иначе решение не будет колебательным. Покажем, что при устойчивом положении равновесия они таковыми и являются.



Построим график $y(k^2)$

$y(0) > 0$ ввиду выполнения условия устойчивости положения равновесия $c_{11}c_{22} - {c_{12}}^2 > 0$. $y(\infty) > 0$ ввиду того, что $a_{11}a_{22} - {a_{22}}^2 > 0$

В то же время, при значениях частоты, называемых ***парциальными частотами***

$$k_1^{*2} = \frac{c_{11}}{a_{11}} \qquad k_2^{*2} = \frac{c_{22}}{a_{22}}$$

$$y\left(k_1^{*2}\right) < 0 \qquad y\left(k_2^{*2}\right) < 0$$

что вытекает непосредственно из частотного уравнения, поскольку

$$c_{11} - a_{11}k_1^{*2} = 0 \qquad c_{22} - a_{22}k_2^{*2} = 0$$

Таким образом, частотное уравнение имеет два вещественных положительных корня k_1^2 и k_1^2, если положение равновесия устойчиво.

Частоты k_1и k_2называются ***собственными частотами системы.***

Вернемся к уравнениям амплитуд. Они становятся зависимыми для собственных частот, поэтому найти из них амплитуды А и В невозможно. Можно найти только их отношения – ***коэффициенты формы*** для каждой частоты из любого из уравнений.

Например, из первого уравнения

$$A(c_{11} - a_{11}k^2) + B(c_{12} - a_{12}k^2) = 0$$

для каждой из собственных частот находим

$$\mu_1 = \frac{B_1}{A_1} = -\frac{c_{11} - a_{11}{k_1}^2}{c_{12} - a_{12}{k_1}^2} \qquad \mu_2 = \frac{B_2}{A_2} = -\frac{c_{11} - a_{11}{k_2}^2}{c_{12} - a_{12}{k_2}^2}$$

Теперь закон движения системы получает вид:

$$q_1 = A_1Sin(k_1t + \propto_1) + A_2Sin(k_2t + \propto_2)$$

$$q_2 = \mu_1 A_1 Sin(k_2 t + \propto_1) + \mu_2 A_2 Sin(k_2 t + \propto_2)$$

Видим, что система совершает 2 ***главных колебания*** с частотами k_1 и k_2. В решении есть четыре произвольных постоянных

$$A_1; \ A_2; \ \propto_1; \ \ \propto_2$$

которые следует найти из начальных условий

$$t = 0: \ \ q_1 = q_{10}; \quad q_2 = q_{20} \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_{10} \quad \dot{q}_2 = \dot{q}_{20}$$

Замечание о нормальных координатах:

Можно показать, что для любой системы существуют обобщенные координаты, называемые ***нормальными***, в которых отсутствуют эти коэффициенты квадратичных форм

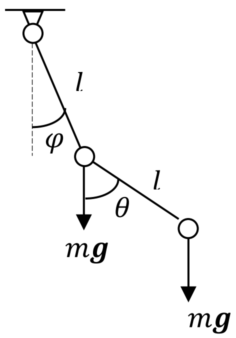
$$a_{12} = 0 \qquad\qquad c_{12} = 0$$

В нормальных координатах уравнения «разделяются»:

$$a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 = 0$$

$$a_{22}\ddot{q}_2 + c_{22}q_2 = 0$$

Колебания двойного математического маятника



Рассмотрим движение двойного математического маятника. Для простоты, положим, что их массы m и длины l одинаковы. Уравнения Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \qquad\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta}$$

Квадратичную форму кинетической энергии найдем, вычислив T в момент прохождения системой положения равновесия. В положении равновесия ($\varphi, \theta = 0$) скорость нижней массы равна $l\dot{\varphi} + l\dot{\vartheta}$

$$T = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}(l\dot{\varphi} + l\dot{\vartheta})^2 = ml^2\dot{\varphi}^2 + ml^2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} + \frac{m}{2} l^2 \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}(a_{11}{\dot{q}_1}^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}{\dot{q}_2}^2)$$

Таким образом система линейна по T

$$a_{11} = 2ml^2 \qquad a_{12} = a_{22} = ml^2$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = mgl(1 - Cos\varphi) + mgl[(1 - Cos\varphi) + (1 - Cos\theta)]$$

Система не линейна по П, поэтому нужно рассматривать малые движения около положения равновесия. Теперь

$$\Pi = mgl\varphi^2 + mgl\frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2}(c_{11}\varphi^2 + 2c_{12}\varphi\theta + c_{22}\theta^2)$$

Отсюда

$$c_{11} = 2mgl \qquad\qquad c_{12} = 0 \qquad c_{22} = mgl$$

Частотное уравнение:

$$k^4(2m^2l^4 - m^2l^4) + k^2(-2m^2l^3g - 2m^2l^3g) + 2(mgl)^2$$
$$= m^2l^4k^4 - 4m^2l^3gk^2 + 2(mgl)^2 = 0$$

Сократив на m^2l^4, получим

$$k^4 - 4\frac{g}{l}k^2 + 2\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0$$

Решениями этого уравнения являются собственные частоты

$$k^2{}_{1,2} = 2\frac{g}{l} \pm \sqrt{\left(2\frac{g}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{g}{l}\right)^2} = \frac{g}{l}(2 \pm \sqrt{2})$$

Находим коэффициенты формы. Для $k^2{}_1 = \frac{g}{l}(2+\sqrt{2})$

$$\mu_1 = -\frac{c_{11} - a_{11}{k_1}^2}{c_{12} - a_{12}{k_1}^2} = -\frac{2mgl - 2ml^2\frac{g}{l}(2+\sqrt{2})}{-ml^2\frac{g}{l}(2+\sqrt{2})} = -\frac{2\sqrt{2}+2}{2+\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Для второй частоты получим

$$\mu_2 = \sqrt{2}$$

Положительный коэффициент формы означает, что маятники будут колебаться синфазно (а). Отрицательный коэффициент формы означает, что маятники будут колебаться в противофазе (б). Характерно, что бóльшая частота соответствует отрицательному коэффициенту формы.

Система будет колебаться по одной из форм, если маятники отклонить в пропорции μ_1 или μ_2 ,как на рисунке и отпустить без начальной скорости. При произвольных начальных условиях будут иметь место обе формы колебаний.

Вынужденные колебания без сопротивления системы с двумя степенями свободы

Пусть, к консервативной системе приложены вынуждающие силы, которые приводятся к двум обобщенным вынуждающим силам $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$. Тогда дифференциальные уравнения движения системы станут неоднородными

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = Q_1(t)$$
$$a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = Q_2(t)$$

Решение этих уравнений складывается из общего решения однородного уравнения (незатухающие колебания с собственными частотами k_1 и k_2) и вынужденных колебаний.

Как было сказано, от координат q_1 q_2 можно перейти к нормальным координатам θ_1 θ_2, в которых дифференциальные уравнения разделяются. Пусть вынуждающие силы гармонические, тогда

$$a_{11}\ddot{\theta}_1 + c_{11}\theta_1 = H_1Sin(pt + \delta)$$

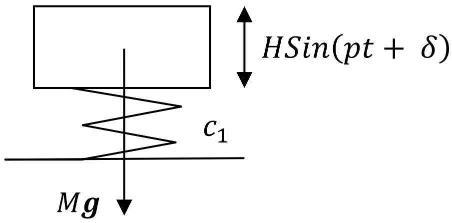
$$a_{22}\ddot{\theta}_2 + c_{22}\theta_2 = H_2 Sin(pt + \delta)$$

Из этих уравнений видно, что система имеет два резонанса при совпадении каждой из собственных частот с вынуждающей частотой р.

Динамический гаситель колебаний

На рисунке схема машины массы M на упругом основании жесткости c_1.

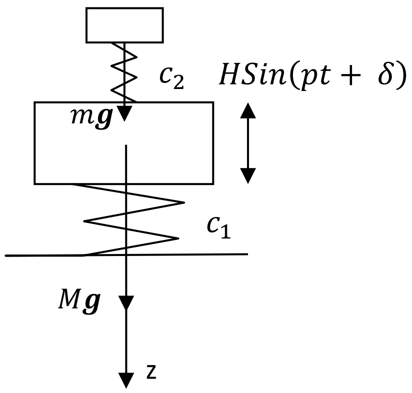
К машине приложена периодическая вынуждающая сила $HSin(pt + \delta)$, которая может возникнуть, например, от неуравновешенности двигателя машины, вращающегося с угловой скоростью $\omega = p$.



Очевидно, что машина будет совершать нежелательные вынужденные колебания, особенно опасные вблизи резонанса $\omega \to k$.

Покажем, как с помощью динамического гасителя колебаний избавить машину от вынужденных колебаний. Динамический гаситель колебаний представляет собой тело массы m, установленное на пружине жесткости c_2 на машине.

Найдем квадратичные формы кинетической и потенциальной энергий такой конструкции. За обобщенные координаты выберем абсолютные координаты z_1 z_2, начало которых выбрано в положении равновесия масс.



$$\Pi = -mz_2 - Mz_1 + \frac{c_1}{2}\left[(\Delta_{ст1} + z_1)^2 - {\Delta_{ст1}}^2\right] + \frac{c_2}{2}\left[(\Delta_{ст2} + z_2 - z_1)^2 - {\Delta_{ст2}}^2\right] = \frac{1}{2}(c_{11}{z_1}^2 + 2c_{12}z_1z_2 + c_{22}{z_2}^2)$$

Отсюда

$$c_{11} = c_1 + c_2 \qquad c_{12} = -c_2 \qquad c_{22} = c_2$$

$$T = \frac{1}{2}M{\dot{z}_1}^2 + \frac{1}{2}m{\dot{z}_2}^2 == \frac{1}{2}(a_{11}{\dot{z}_1}^2 + 2a_{12}\dot{z}_1\dot{z}_2 + a_{22}{\dot{z}_2}^2)$$

Отсюда

$$a_{11} = M \quad a_{12} = 0 \qquad a_{22} = m$$

Подставив формы T и Π в уравнения Лагранжа, получим дифференциальные уравнения движения

$$M\ddot{z}_1 + (c_1 + c_2)z_1 - c_2z_2 = \mathrm{H}\,\mathrm{Sin}(\omega t + \delta)$$

$$m\ddot{z}_2 - c_2z_1 + c_2z_2 = 0$$

Решение ищем в виде правой части.

$$z_1 = A\mathrm{Sin}(\omega t + \delta) \qquad z_2 = B\mathrm{Sin}(\omega t + \delta)$$

Подставив решения в уравнения, после сокращения на $\mathrm{Sin}(\omega t + \delta)$получим алгебраическую систему для определения амплитуд вынужденных колебаний А и В.

$$(c_1 + c_2 - \omega^2 M)A - c_2B = H$$

$$-c_2A + (c_2 - \omega^2 m)B = 0$$

Определитель матрицы системы

$$\Delta = (c_1 + c_2 - \omega^2 M)(c_2 - \omega^2 m) - {c_2}^2$$

Решения системы

$$A = \frac{H(c_2 - \omega^2 m)}{\Delta} \qquad B = \frac{Hc_2}{\Delta}$$

Отсюда вытекает, что можно подобрать массу m динамического гасителяи жесткость его пружины таким образом, что

$$c_2 = \omega^2 m$$

то амплитуда вынужденных колебаний машины А будет равно нулю.

$$\Delta = -{c_2}^2$$

$$A = 0 \qquad B = -\frac{H}{c_2}$$

Видно, что гаситель действует на машину с силой $Bc_2\mathrm{Sin}(\omega\mathrm{t} + \delta) = -H\mathrm{Sin}(\omega\mathrm{t} + \delta)$, уравновешивающую в каждый момент вынуждающую силу, вся энергия которой идет на раскачивание гасителя.

Массу гасителя естественно выбрать небольшой $m \ll M$, но тогда и жесткость его пружины должна быть маленькой. Это, однако, приведет к большой амплитуде колебаний самого гасителя. Поэтому выбор конкретных параметров гасителя является результатом компромисса между весом и амплитудой гасителя.