

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

А.В. Костарев Т.А.Костарева

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПА

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2025

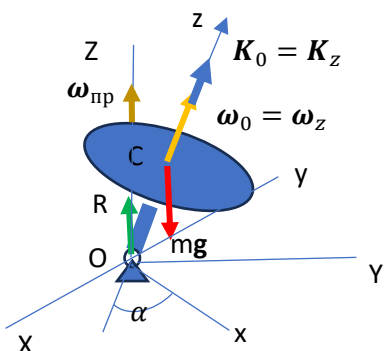
ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр
Гирископ, опирающийся на шарнир	2
Роль кориолисовых сил инерции	3
Роль переносных сил инерции	4
Угловое ускорение гироскопа	6
Гироскопические эффекты	
Свободный гироскоп на плоскости. Яйцо Колумба	7

Аннотация

Рассмотрено влияние кориолисовых и переносных сил инерции на стационарное движение гироскопа. Кориолисовы силы сохраняют постоянным угол нутации. Рассмотрены простейшие гироскопические эффекты. Показано как силы трение поднимают центр тяжести свободного гироскопа на шероховатой поверхности.

Полный курс видео лекций на <https://stepik.org/a/71088>

**Гироскоп, опирающийся на шарнир**

Гироскопом называется осесимметричное тело, совершающее сферическое движение под действием силы тяжести и реакции опоры, которому сообщена большая начальная угловая скорость ω_z вокруг оси симметрии z .

Термин гироскоп предложил Фуко в 1852 г. Гироскопом является, например, обычный волчок – диск на оси, перпендикулярной диску (Рис) и опирающейся на шарнир O .

Пусть в начальный момент ось гироскопа направлена в плоскости неподвижных осей YZ под углом α к оси Z . Ось y направим в плоскости XY , которую она не покидает.

Подвижные оси x, y, z являются главными осями инерции гироскопа. Поэтому матрица тензора инерции гироскопа в точке O будет диагональной

$$J_o = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

Столбец проекций кинетического момента тела относительно опоры O на подвижные оси

$$K_o = J_o \omega = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x \omega_x \\ J_y \omega_y \\ J_z \omega_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

Раскрутив волчок вокруг его оси z до угловой скорости ω_0 мы сообщаем ему начальный кинетический момент K_0 , направленный вдоль оси z .

Поведение вектора K_0 описывается теоремой об изменении кинетического момента

$$\frac{dK_0}{dt} = M_0^e \quad (2)$$

Главный момент внешних сил M_0^e создает сила тяжести mg . Он направлен против оси X , за чертеж. Согласно теореме туда же направлена и скорость конца вектора K_0 . Ее модуль равен величине момента $mg \cdot OC \sin \alpha$.

Ось z начинает вращаться вокруг оси Z с угловой скоростью $\omega_{\text{пр}}$, называемой угловой скоростью прецессии. Ось y вращается с этой скоростью в плоскости XY .

Вектора K_0 , M_0^e и $\omega_{\text{пр}}$ оказываются связанными соотношением:

$$\omega_{\text{пр}} \times K_0 = M_0^e$$

Абсолютная угловая скорость становится векторной суммой

$$\omega = \omega_z + \omega_{\text{пр}}$$

Из формулы (1) вытекает, что K_0 теперь не будет направлен по оси z гироскопа, как и вектор абсолютной угловой скорости ω .

Однако при большой скорости собственного вращения ω_z (до 30000 об/мин) можно пренебречь этим различием, и считать, что K_0 направлен по собственной оси z гироскопа (*приближенная теория гироскопа*).

Найдем угловую скорость прецессии. Она равна модулю скорости конца вектора K_0 (модулю момента силы тяжести), деленному на его расстояние до оси Z

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{mg \cdot OC \sin \alpha}{J_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{OC}{\rho^2 \omega_0} g$$

Видим, что угловая скорость прецессии $\omega_{\text{пр}}$ постоянна, не зависит от угла α наклона оси гироскопа. Она обратно пропорциональна квадрату радиуса инерции ρ гироскопа и его собственной угловой скорости ω_0 и пропорциональна расстоянию OC .

Чтобы уменьшить скорость прецессии гироскопы делают в виде массивных колец, и придают им большую собственную угловую скорость. Тогда

$$\omega_z \gg \omega_{\text{пр}}$$

Ось z гироскопа движется по конической поверхности с центральным углом 2α с постоянной угловой скоростью прецессии $\omega_{\text{пр}}$.

Роль кориолисовых сил инерции

Видим, что момент силы тяжести $m_0(mg)$ не создает ожидаемого вращения. Выясним какие силы его уравнивают.

Сделаем это в системе отсчета $хуz$, связанной с осью гироскопа. Поскольку она вращается с угловой скоростью $\omega_{\text{пр}}$ то является неинерциальной. В неинерциальной системе отсчета на точки тела действуют кориолисовы и переносные силы инерции. Последними можно пренебречь ввиду их малой величины.

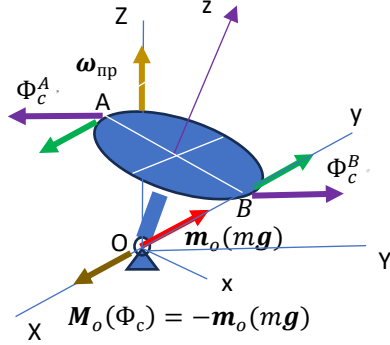
Рассмотрим точки А и В гироскопа на его диаметре, параллельном оси х. Их скорости V_A и V_B (зеленые стрелки) направлены параллельно оси у, велики и мало отличаются по величине, поскольку

$$\omega_z \gg \omega_{\text{пр}}$$

Силы инерции Кориолиса, действующие на массы dm этих точек

$$\Phi_c^A = -\Phi_c^B = -2dm(\omega_{\text{пр}} \times V_A)$$

направлены противоположно и в данный момент параллельно оси Y.



Видим, что силы инерции Кориолиса точек выше и ниже белого диаметра, параллельного оси у создают момент сил инерции, направленный против оси у и момента силы тяжести.

Покажем, что суммарный момент сил инерции Кориолиса по модулю равен моменту силы тяжести, а по направлению противоположен. Таким образом оба момента уравновешены.

Гироскоп находится в покое по отношению к подвижным координатам хуу, равномерно вращающимся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью прецессии $\omega_{\text{пр}}$.

Это значит, что сила тяжести и силы инерции находятся в равновесии. Нас интересует условие неизменности угла α , то есть равенство нулю момента этих сил относительно точки опоры О.

Радиус вектор точки dm $\rho = OC + r$. Его присоединенная матрица

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -OC & -r\sin\varphi \\ OC & 0 & r\cos\varphi \\ r\sin\varphi & -r\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Кориолисова сила инерции точки dm

$$d\Phi_c = -2dm(\omega_{\text{пр}} \times \omega \times r), \quad dm = \gamma h r dr d\varphi$$

Момент этой силы относительно опоры О

$$m_o(d\Phi_c) = -2dm(\rho \times \omega_{\text{пр}} \times \omega \times r)$$

В матричном виде

$$\begin{pmatrix} m_x(d\Phi_c) \\ m_y(d\Phi_c) \\ m_z(d\Phi_c) \end{pmatrix} = -2dm \begin{pmatrix} 0 & -OC & -r\sin\varphi \\ OC & 0 & r\cos\varphi \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{\text{пр}}\cos\alpha & -\omega_{\text{пр}}\sin\alpha \\ \omega_{\text{пр}}\cos\alpha & 0 & 0 \\ \omega_{\text{пр}}\sin\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -2\gamma h r dr d\varphi \omega_{\text{пр}} r \omega \begin{pmatrix} -OC\sin\varphi\cos\alpha - r\sin^2\varphi\sin\alpha \\ OCCos\varphi\cos\alpha + r\cos\varphi\sin\varphi\sin\alpha \\ 2r\sin\varphi\cos\varphi\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{2OC}{R^2\omega} g$$

$$M_x(\Phi_c) = \frac{4OC\gamma h}{R^2} g \left[OCCos\alpha \int_0^R (r^2) dr \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi + \sin\alpha \int_0^R (r^3) dr \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi \right] =$$

$$= \frac{4OC\gamma h}{R^2} g \left[\left(-OC \cos \alpha \frac{R^3}{3} \cos \varphi \right)_0^{2\pi} + \sin \alpha \frac{R^4}{4} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} \right] =$$

$$= \gamma h \pi R^2 g OC \sin \alpha = mg OC \sin \alpha \quad M_y(\Phi_c) = 0, \quad M_z(\Phi_c) = 0$$

Видим, что момент сил инерции Кориолиса по модулю равен моменту силы тяжести, а по направлению противоположен. Значит сила тяжести уравновешена кориолисовыми силами инерции, поэтому угол $\propto$ неизменен

Роль переносных сил инерции

Найдем переносное ускорения точки гироскопа.

Радиус вектор точки гироскопа массы

$$dm = \gamma h r dr d\varphi$$

где h – толщина диска, γ – плотность материала диска

$$\rho = OC + r$$

Абсолютная скорость точки

$$V_a = \dot{\rho} = \dot{OC} + \dot{r} = \omega_{np} \times OC + (\omega_{np} + \omega) \times r = \omega_{np}(OC + r) + \omega \times r$$

Абсолютное ускорение точки

$$W_a = \ddot{\rho} = \omega_{np} \times (\dot{OC} + \dot{r}) + \dot{\omega} \times r + \omega \times \dot{r} =$$

$$= \omega_{np} \times [\omega_{np} \times OC + (\omega_{np} + \omega) \times r] + \omega_{np} \times \omega \times r + \omega \times (\omega_{np} + \omega) \times r =$$

$$= W_e + W_r + W_c$$

Здесь

$$W_e = \omega_{np} \times \omega_{np} \times \rho + \omega \times \omega_{np} \times r$$

$$W_r = \omega \times \omega \times r$$

$$W_c = 2\omega_{np} \times \omega \times r$$

Переносная сила инерции точки dm

$$d\Phi_e = -dm(\omega_{np} \times \omega_{np} \times \rho + \omega \times \omega_{np} \times r), \quad dm = \gamma h r dr d\varphi$$

Момент этой силы относительно опоры О

$$m_o(d\Phi_e) = -dm\rho \times (\omega_{np} \times \omega_{np} \times \rho + \omega \times \omega_{np} \times r)$$

Запишем это соотношение в матричном виде в координатах $x y z$

$$\begin{pmatrix} m_x(d\Phi_e) \\ m_y(d\Phi_e) \\ m_z(d\Phi_e) \end{pmatrix} = -dm \begin{pmatrix} 0 & -OC & -r \sin \varphi \\ OC & 0 & r \cos \varphi \\ r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{np} \cos \alpha & -\omega_{np} \sin \alpha \\ \omega_{np} \cos \alpha & 0 & 0 \\ \omega_{np} \sin \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{np} \cos \alpha & -\omega_{np} \sin \alpha \\ \omega_{np} \cos \alpha & 0 & 0 \\ \omega_{np} \sin \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \\ OC \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{np} \cos \alpha & -\omega_{np} \sin \alpha \\ \omega_{np} \cos \alpha & 0 & 0 \\ \omega_{np} \sin \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= dm \left[r \omega_{np}^2 \begin{pmatrix} -OC \cos^2 \alpha \sin \varphi - r \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \varphi \\ OC(\cos^2 \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \cos \varphi) + r \sin \alpha \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi \\ r \sin \varphi(\cos^2 \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \cos \varphi) + r \sin \alpha \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} + \omega \omega_{np} \begin{pmatrix} -OC \cos \alpha \sin \varphi \\ OC \cos \alpha \cos \varphi \\ r \cos \alpha \cos \varphi \sin \varphi + r \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} \right]$$

Оставляем только $\sin^2 \varphi$ поскольку

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi = 0$$

$$\begin{pmatrix} m_x(d\Phi_e) \\ m_y(d\Phi_e) \\ m_z(d\Phi_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_{\text{пр}}^2 \sin\alpha \cos\alpha r^2 \sin^2\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \gamma h r dr d\varphi$$

Главный момент переносных сил инерции относительно оси x

$$\begin{aligned} M(\Phi_e) &= -\omega_{\text{пр}}^2 \gamma h \sin\alpha \cos\alpha \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi = -\frac{4OC^2}{R^4\omega^2} g^2 \gamma h \frac{R^4}{4} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{\gamma h \pi R^2 OC^2}{R^2 \omega^2} g^2 = -m \left(\frac{OCg}{R\omega} \right)^2 \end{aligned}$$

Видим, что этот момент стремится увеличить угол α , но он мал ввиду большой скорости собственного вращения гироскопа, и не может быть учтен приближенной теорией

Угловое ускорение гироскопа

Изменение направления вектора угловой скорости ω во время регулярной прецессии является ускорением. Поскольку модуль угловой скорости $\omega = \text{Const}$ постоянен, то

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \omega_{\text{пр}} \times \omega$$

Вектор ε направлен в сторону прецессии и момента силы тяжести, ее порождающий, и его модуль в рамках приближенной теории равен

$$\varepsilon = \omega_{\text{пр}} \omega \sin \alpha = \frac{OC}{\rho^2 \omega} g \omega \sin \alpha = \frac{OC \sin \alpha}{\rho^2} g$$

Убеждаемся, что выполняется соотношение

$$J_z \varepsilon = m \rho^2 \frac{OC \sin \alpha}{\rho^2} g = mg OC \sin \alpha = m_o(mg)$$

Интересно, что ε направлено не по z, а как и момент $m_o(mg)$ за чертеж.

Гироскоп с опорой в центре масс (OC=0) не будет совершать регулярной прецессии поскольку нет момента внешних сил. Таким является гироскоп в подвесе Кардана:



Ось такого гироскопа сохраняет свое направление в инерциальной системе отсчета (геоцентрическая система отсчета не инерциальная), что широко используется в навигационных приборах, таких как гирокомпас, «искусственный горизонт» в самолетах, гироскопический успокоитель качки корабля, гироскопический стабилизатор.

Как и маятник Фуко такой гироскоп позволяет измерить скорость вращения Земли.

Гироскопические эффекты

Гироскопическим эффектом называют неожиданный поворот оси гироскопа, причина которого была показана выше.

Гироскопический эффект легко наблюдать, держа двумя руками ось быстро вращающегося велосипедного колеса. Если попытаться повернуть ось колеса в вертикальной плоскости, то ось повернется в горизонтальной плоскости.

Гироскопический эффект помогает ездить на велосипеде "без рук". Кинетический момент колес велосипеда направлен налево.

Когда вы теряете равновесие, то наклоняетесь вместе с осью переднего колеса, например, налево. При этом прикладываете к оси колеса момент направленный назад.

Конец вектора кинетического момента переднего колеса, направленного налево, получает скорость, направленную тоже назад. Колесо поворачивает налево, что помогает вам восстановить равновесие.

Если же при нормальной езде резко повернуть руль **направо** без наклона велосипеда, то гироскопический эффект наклонит велосипед налево, что опасно.

Однако этот маневр полезен при желании резко повернуть налево потому, что моментально создает необходимый наклон вас с велосипедом налево.

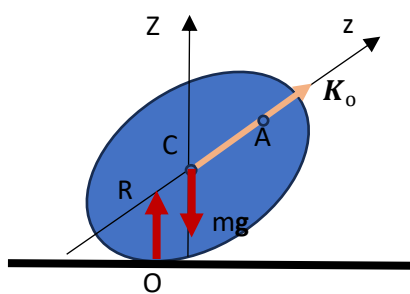
Он также полезен для объезда препятствия размером с люк. Ваше тело продолжает двигаться прямо по инерции, а велосипед под вами объезжает люк.

Свободный гироскоп на плоскости

Предположим, что опорная плоскость абсолютно гладкая (трение отсутствует). На гироскоп действуют силы mg и R , равные по модулю и противоположные по направлению. Поскольку главный вектор этих сил равен нулю, то центр масс C гироскопа остается неподвижным на оси Z .

Будем считать, что скорость собственного вращения позволяет применить упрощенную теорию гироскопа и кинетический момент гироскопа направлен по оси z .

Момент реакции R относительно центра масс C создает регулярную прецессию оси гироскопа z вокруг оси Z . Глядя с конца оси Z видим направление прецессии оси гироскопа против часовой стрелки.



Попытаемся ускорить прецессию, приложив в точке A оси гироскопа силу, направленную за чертеж в направлении скорости прецессии точки A .

Момент такой силы относительно центра масс C направлен в плоскости чертежа перпендикулярно оси z к оси Z .

В соответствии с теоремой (2) ось z гироскопа будет поворачиваться к вертикальной оси прецессии Z , и максимально поднимет центр масс C .

Вывод: любая сила, стремящаяся ускорить прецессию, поднимает центр масс гироскопа. Справедливо и обратное.

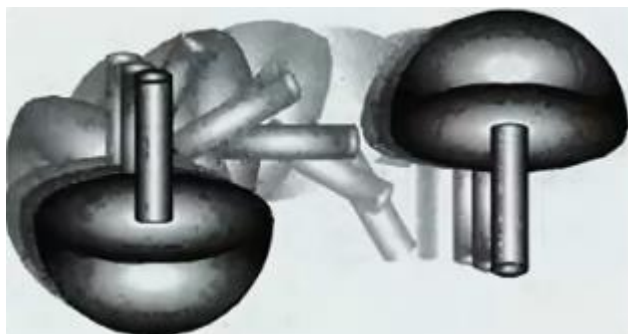
Яйцо Колумба

Теперь предположим, что в точке контакта O появилось трение. Сила трения направлена против скорости скольжения точки контакта O . Эта скорость складывается из скорости от собственного вращения и от скорости прецессии. Первая направлена за чертеж, и она значительно больше второй, направленной к нам. Суммарная скорость скольжения направлена за чертеж, а сила трения к нам, в сторону прецессии.

Было показано, что такая сила поднимает центр тяжести гироскопа, совмещая ось z гироскопа с вертикальной осью прецессии Z . Центр масс гироскопа займет максимально высокое положение на оси Z .

Сила тяжести, как и сила трения совершат отрицательную работу, уменьшив кинетическую энергию (угловую скорость) гироскопа.

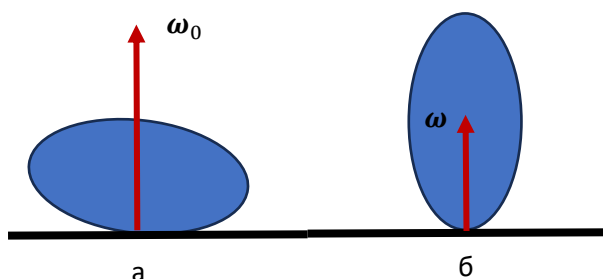
Этот эффект объясняет поведение так называемого яйца Колумба и китайского волчка.



Раскрученный китайский волчок встает со сферы на ножку.

Название Яйцо Колумба происходит из легенды о том, как Колумб во время плавания якобы выиграл пари что поставит яйцо «на попу». Он просто разбил яйцо с одного конца и поставил яйцо.

Если тело в форме яйца в положении (Рис а) сильно раскрутить, то сила трения поднимет яйцо в вертикальное положение (Рис б).



Видео <https://www.youtube.com/watch?v=6ePNKMrPMU4> демонстрирует этот эффект. Здесь яйцевидное тело приводится во вращение магнитным полем.

<https://disk.yandex.ru/d/OT-d6pQQ6DLVvg>