



Санкт-Петербургский
Политехнический университет Петра Великого



Г.А. Голин, П.И. Карпухина, А.С. Шигарова,
Е.А. Цыбулько, В.В. Полуэктова, А.М. Мелентьева,
Д.В. Бутусов

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Физико-Механический институт

2025 год

Оглавление

<i>Введение</i>	<i>3</i>
<i>I. Множества.....</i>	<i>4</i>
§1 Операции над множествами	4
§2 Биекция.....	6
§3 Счетное множество.....	7
§4 Мощность континуума.....	8
<i>II. Вариационное исчисление</i>	<i>9</i>
Предисловие	9
§1 Функционалы	9
§2 Уравнение Эйлера	11
§3 Обобщение на случай производных высших порядков	13
§4 Случай двух переменных	15
<i>III. Математический аппарат квантовой теории.....</i>	<i>17</i>
§1 Основные определения	17
§2 Свойства «бра-» и «кет-» векторов	18
§3 Функции операторов.....	20
§4 Координатное представление	21
§5 Представления Гейзенберга и Шредингера.....	22
§6 Уравнение Гейзенберга	23
§7 Эволюция операторов	24
<i>IV. Группы</i>	<i>25</i>
§1 Понятие группы	25
§2 Примеры групп.....	29
§3 Группы Ли	34
§4 Представления групп и алгебр Ли	36
<i>V. Элементы теории точечных групп и симметрий</i>	<i>38</i>
Предисловие	38
§1 Преобразования симметрии.....	38
§2 Конечные группы.....	41
§3 Точечные группы	43

<i>VI. Тензорная алгебра</i>	<i>48</i>
§1 Понятие тензора	48
§2 Простейшие свойства	50
§3 Покомпонентное разложение.....	51
§4 Операции над тензорами второго ранга	52
§5 Единичный тензор.....	54
§6 Тензор Леви-Чивиты.....	55
§7 Симметричный и антисимметричный тензоры.....	56
<i>VII. Введение в Риманову геометрию</i>	<i>57</i>
Предисловие	57
§1 Формы над векторами	57
§2 Векторы, скаляры и тензоры в криволинейных координатах.....	58
§3 Метрический тензор.....	60
§4 Ковариантное дифференцирование	62
§5 Закон преобразования связности	65
§6 Тензор Римана-Кристоффеля	68
§7 Тождество Риччи	70
§8 Дифференциальное тождество Бианки	71
§9 Свойства тензора Римана-Кристоффеля	73
§10 Тензор Эйнштейна.....	74
<i>Литература</i>	<i>75</i>

Введение

Изучение современной физики требует владения математическим аппаратом, который, как правило, не входит в стандартные курсы анализа и алгебры. Это обстоятельство затрудняет изучение физики, так как порой существенную часть университетского курса (например, по общей теории относительности) требуется тратить на ознакомление с соответствующим математическим формализмом. Для качественного же и более глубокого изучения того или иного раздела физики предпочтительнее предварительное знание его математических основ.

Курс предполагает освоение самых основных элементов нескольких математических разделов, наиболее часто использующихся в современной физике. Литература, на основе которой была написана та или иная глава, ставится в список на первое место и выделяется жирным шрифтом.

Данное пособие рассчитано на студентов первого и второго курсов физико-математических и технических специальностей. Предполагается, что читатель владеет основными инструментами линейной алгебры и математического анализа.

Д.В. Бутусов

I. Множества

§1 Операции над множествами

Множество – это совокупность некоторых объектов, порой объединенных по определенным признакам.

Принадлежность элемента x множеству A записывается как:

$$x \in A.$$

Если x не входит в A , то пишут:

$$x \notin A.$$

Пустое множество обозначают $\emptyset$.

Если множество A состоит из элементов x , то пишут:

$$A = \{x\}.$$

Например, если этих элементов конечное число, то можно их перечислить:

$$A = \{a, b, c, d\}.$$

Если всякий элемент множества A является элементом множества B , то A есть подмножество B :

$$A \subset B \text{ или } B \supset A.$$

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества A и B равны:

$$A = B.$$

Сумма n множеств $A_1, \dots, A_n$ есть множество S , состоящее из всех элементов, входящих в множества $A_1, \dots, A_n$:

$$S = A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

Множество P , состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно множествам A и B , называется *пересечением множеств* A и B :

$$P = AB$$

Аналогично вводится пересечение n множеств:

$$P = A_1 A_2 \dots A_n.$$

Пусть A – некоторое множество и $\{P_i\}$ – набор множеств. Тогда:

$$A \sum_i P_i = \sum_i AP_i$$

Действительно, пусть $x \in A \sum P_i$, тогда $x \in \sum P_i$, то есть найдется такое множество P_j , что $x \in P_j$, но тогда $x \in AP_j$ и, соответственно, $x \in \sum AP_i$. Получаем $A \sum P_i \subset \sum AP_i$.

Пусть теперь $x \in \sum AP_i$, откуда $x \in AP_k$, но тогда $x \in \sum P_i$ и $x \in A \sum P_i$. Получаем $A \sum P_i \supset \sum AP_i$ и $A \sum P_i = \sum AP_i$.

Множество R , состоящее из всех элементов множества A , не входящих в B , называется *разностью множеств A и B* :

$$R = A - B \text{ или } R = A \setminus B.$$

§2 Биекция

Если мы каждому элементу множества A можем сопоставить по некоторому правилу один и только один элемент множества B , то говорят, что между A и B существует *биективное* или *взаимно-однозначное соответствие*.

Если между множествами A и B можно установить биекцию, эти множества *эквивалентны* (имеют одинаковую *мощность*):

$$A \sim B.$$

Два *конечных* множества оказываются эквивалентны лишь тогда, когда количество элементов в них одинаково. Для бесконечных же множеств дело обстоит сложнее. Рассмотрим известный пример: пусть A – множество точек гипотенузы, а B – множество точек катета прямоугольного треугольника. Как видно из рис.1, $A \sim B$, хотя катет короче гипотенузы. Если мы наложим катет на гипотенузу, то множество B окажется частью множества A , отличной от самого A .

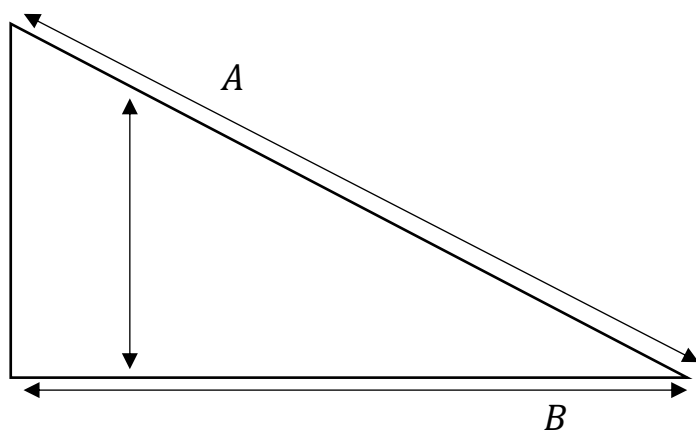


Рис. 1

Сформулируем ряд простейших свойств биекции, доказательства которых предоставляются читателю в качестве упражнения:

- 1) Всегда $A \sim A$.
- 2) Если $A \sim B$, то $B \sim A$.
- 3) Если $A \sim B$, а $B \sim C$, то $A \sim C$.

§3 Счетное множество.

Пусть N – множество всех натуральных чисел

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Всякое множество A , эквивалентное множеству N , называется *счетным*.

Сделаем полезное замечание: сумма счетного множества попарно не пересекающихся счетных множеств есть счетное множество. Действительно, пусть счетные множества A_i попарно не пересекаются. Запишем эти множества так:

$$A_1 = \{a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots, a_{n_1}^1\},$$

$$A_2 = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_{n_2}^2\},$$

$$A_3 = \{a_1^3, a_2^3, a_3^3, \dots, a_{n_3}^3\},$$

... ..

Если мы выпишем элемент a_1^1 , затем оба элемента a_2^1, a_1^2 , у которых сумма верхнего и нижнего индексов равна 3, затем те элементы, у которых эта сумма равна 4, и так далее, то сумма $S = \sum A_i$ окажется представленной в форме последовательности

$$S = \{a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_3^1, a_2^2, a_1^3, a_4^1, \dots\},$$

откуда следует ее счетность. Очевидно, что множество целых чисел счетно.

Принимая во внимание этот факт, нетрудно догадаться, что множество всех рациональных чисел счетно, так как каждое рациональное число r представляется с помощью двух целых чисел a и b в виде несократимой дроби:

$$r = \frac{a}{b},$$

Но $\frac{a}{b}$ есть сумма счетного числа счетных множеств $\frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \dots$

§4 Мощность континуума.

Сегмент $[0, 1]$ несчетен, действительно, пусть сегмент U есть счетное множество, тогда все его точки можно расположить в виде последовательности

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \dots$$

Разделим сегмент на три равные части точками $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$.

Хоть один из сегментов не содержит точку x_1 (одна точка может принадлежать не более, чем двум сегментам). Разделим этот сегмент еще на три равные части и возьмем ту, что не содержит x_2 . Продолжая эту операцию, получим последовательность уменьшающихся сегментов и, соответственно, предельную точку, принадлежащую каждому из них. Но мы выбирали сегменты таким образом, чтобы в них не содержались точки из счетной последовательности, то есть мы получили противоречие. Таким образом, множество точек отрезка $[0, 1]$ нельзя исчерпать счетным набором точек.

Если множество A эквивалентно сегменту $[0, 1]$, то говорят, что A имеет *мощность континуума*. Очевидно, что любой сегмент эквивалентен $[0, 1]$

Заметим теперь, что сумма счетного множества попарно не пересекающихся континуальных множеств Q_k имеет мощность континуума. Действительно, возьмем на полусегменте $[0, 1)$ монотонно возрастающую последовательность точек

$$a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \dots,$$

для которой $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 1$. Установим взаимно-однозначное соответствие между множествами Q_k и $[a_{k-1}, a_k)$, что очевидно, можно сделать. Отсюда немедленно следует и биекция между суммой Q_k и $[0, 1]$.

Нетрудно теперь увидеть, что множество всех иррациональных чисел имеет мощность континуума.

II. Вариационное исчисление

Предисловие

Вариационное исчисление является чрезвычайно важным для физики разделом математики. Его методы широко применяются в теоретической физике и механике. Данный раздел оперирует понятиями функционала и его вариации, которые, как мы увидим, очень похожи на хорошо известные читателю понятия функции и ее дифференциала. Здесь мы рассмотрим лишь основные вопросы данной области, делая акцент на важные для физики формулы и методы.

§1 Функционалы

Переменная величина $v = v[y(x)]$, зависящая от функции $y(x)$, называется *функционалом*, если каждой функции $y(x)$ из некоторого набора функций $y(x)$ соответствует значение v (аналогично тому, как каждому значению переменной из некоторой области ставится в соответствие значение функции от этой переменной).

Аналогично определяются и функционалы, зависящие от нескольких функций, и функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.

Вариацией δy аргумента $y(x)$ функционала v называется разность между двумя функциями $\delta y = y(x) - \tilde{y}(x)$ (аналогично приращению аргумента функции, с тем отличием, что здесь δy – тоже является функцией). Из определения очевидно, что производная вариации равна вариации производной. Это утверждение связано с коммутацией операций варьирования и дифференцирования.

Функционал $v[y(x)]$ называется *непрерывным*, если малому изменению $y(x)$ соответствует малое изменение функционала $v[y(x)]$.

Здесь следует пояснить, какие изменения функции $y(x)$, называются малыми или, что то же самое, какие кривые $y = y(x)$ и $y = \tilde{y}(x)$ считаются мало отличающимися или близкими:

Функции $y = y(x)$ и $y = \tilde{y}(x)$ можно считать близкими, если модуль их разности $y(x) - \tilde{y}(x)$ мал для всех значений x , для которых задаются функции $y = y(x)$ и $y = \tilde{y}(x)$.

Функционал v *непрерывен* при $y = y_0(x)$ в смысле близости k -го порядка, если малые его изменения соответствуют не только малым изменениям функции $y(x)$, но и малым изменениям ее производных до k -го порядка включительно.

Линейным функционалом называется функционал $L[y(x)]$, удовлетворяющий следующим условиям: $L[cy(x)] = cL[y(x)]$, где c – произвольная постоянная и $L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$.

Если приращение функционала Δv можно представить в виде $\Delta v = L[y(x), \delta y] + \beta |\delta y|_{max}$, где $L[y(x), \delta y]$ – линейный по отношению к δy функционал $|\delta y|_{max}$ – максимальное значение $|\delta y|$ и $\beta \rightarrow 0$ при $|\delta y|_{max} \rightarrow 0$, то $L[y(x), \delta y]$ называется *вариацией функционала* и обозначается δv .

Рассмотрим теперь другой, более полезный подход. Возьмем значение функции $f(x + \alpha \Delta x)$ при изменяющихся значениях параметра α . При $\alpha = 1$ получим $f(x + \Delta x)$. При $\alpha = 0$ получим исходное значение функции $f(x)$. Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x)|_{\alpha=0} = f'(x + \alpha \Delta x) \Delta x|_{\alpha=0} = f'(x) \Delta x = df(x).$$

Для функции нескольких переменных $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_1 + \alpha \Delta x_1, x_2 + \alpha \Delta x_2, \dots, x_n + \alpha \Delta x_n)|_{\alpha=0} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = df.$$

По повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до n .

Вариацию же функционала введем так: $\delta v = \frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x) + \alpha \delta y]|_{\alpha=0}$.

Функционал v достигает на кривой $y_0(x)$ максимума, если на любой близкой к $y = y_0(x)$ кривой: $\Delta v = v[y(x)] - v[y_0(x)] \leq 0$.

Аналогично определяется кривая, на которой реализуется *минимум*. В этом случае $\Delta v \geq 0$.

Если функционал $v[y(x)]$, имеющий вариацию, достигает экстремума, то $\delta v = 0$. Действительно, при фиксированных $y_0(x)$ и δy : $v[y_0(x) + \alpha \delta y] = \varphi(\alpha)$. Причем при $\alpha = 0$ достигается экстремум. Следовательно, $\varphi'(0) = 0$ или $\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y_0(x) + \alpha \delta y]|_{\alpha=0} = 0$, т.е. $\delta v = 0$.

§2 Уравнение Эйлера

Рассмотрим функционал вида $v = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$, где $F(x, y, y')$ - заданная функция, непрерывная вместе со своими частными производными.

Исследуем на экстремум этот функционал в случае фиксированных граничных точек $y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = y_1$.

Предположим, что экстремум достигается на дважды дифференцируемой кривой y . Возьмем какую-нибудь близкую к ней допустимую кривую $\bar{y}$ и включим обе кривые в однопараметрическое семейство $\tilde{y}(x, \alpha) = y(x) + \alpha(\bar{y}(x) - y(x))$, заметим, что $\bar{y}(x) - y(x) = \delta y$.

Если рассматривать значения функционала $v = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$ только на кривых семейства $y = y(x, \alpha)$, то функционал превращается в функцию α . Эта функция достигает своего экстремума при $\alpha = 0$, причем $\varphi'(0) = 0$.

Получим:

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y, y') \delta y + F_{y'}(x, y, y') \delta y'] dx.$$

Необходимое условие экстремума функционала имеет вид

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y'] dx = 0.$$

Интегрируя второе слагаемое по частям, получаем:

$$\delta v = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \delta y dx.$$

Но $\delta y|_{x=x_0} = \delta y|_{x=x_1} = 0$, так как граничные точки фиксированы.

Необходимое условие экстремума принимает вид

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \delta y \, dx = 0.$$

Учитывая, что вариация δy произвольна, получаем уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

§3 Обобщение на случай производных высших порядков

Исследуем на экстремум функционал

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx,$$

где функцию F будем считать дифференцируемой $n + 2$ раза по всем аргументам.

Пусть граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}; \\ y(x_1) = y_1, y'(x_1) = y'_1, \dots, y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}, \end{aligned}$$

Предположим, что экстремум достигается на кривой y и пусть $\bar{y}$ – некоторая другая допустимая кривая.

Снова рассматриваем однопараметрическое семейство функций $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha[\bar{y}(x) - y(x)]$ или $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \delta y$.

Тогда, как и в прошлый раз получаем для этого семейства

$$\delta v = \frac{d}{d\alpha} v[y(x, \alpha)]|_{\alpha=0} = 0.$$

$$\begin{aligned} \delta v &= \left[\frac{d}{d\alpha} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx \right]_{\alpha=0} = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'' + \dots + F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}) dx. \end{aligned}$$

Интегрируем по частям все слагаемые, кроме первого, принимая во внимание, что при $x = x_0$ и при $x = x_1$ вариации $\delta y = \delta y' = \delta y'' = \dots = \delta y^{(n-1)} = 0$:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y' dx = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'} \delta y dx = - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'} \delta y dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y''} \delta y'' dx = [F_{y''} \delta y']_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx} F_{y''} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \delta y dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \delta y dx.$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)} dx = (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \delta y dx.$$

Окончательно:

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right) \delta y dx.$$

Таким образом, получим уравнение Эйлера-Пуассона:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \equiv 0.$$

§4 Случай двух переменных

Рассмотрим функционал вида

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy,$$

причём на границе C области D значения функции $z(x, y)$ заданы, т. е. задан пространственный контур $\tilde{C}$, через который должны проходить все допустимые поверхности.

Обозначим $\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство поверхностей $z = z(x, y, \alpha) = z(x, y) + \alpha \delta z$, где $\delta z = \bar{z}(x, y) - z(x, y)$.

Тогда снова:

$$\delta v = \frac{\partial}{\partial \alpha} v[z(x, y, \alpha)] \Big|_{\alpha=0} = 0.$$

Имеем:

$$\delta v = \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \iint_D F(x, y, z, p, q) dx dy \right\}_{\alpha=0} = \iint_D [F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q] dx dy,$$

где

$$m(x, y, \alpha) = \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial x} = p(x, y) + \alpha \delta p;$$

$$n(x, y, \alpha) = \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial y} = q(x, y) + \alpha \delta q.$$

Так как $\frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} = \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} \delta z + F_p \delta p$ и $\frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} = \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \delta z + F_q \delta q$, то

$$\iint_D (F_p \delta p + F_q \delta q) dx dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} \right] dx dy - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z dx dy.$$

Используя формулу Грина

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (N dy - M dx)$$

получаем:

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} \right] dx dy = \int_C (F_p dy - F_q dx) \delta z = 0.$$

Интеграл выше равен нулю, т.к. на контуре C вариация $\delta z = 0$.

Следовательно,

$$\iint_D (F_p \delta p + F_q \delta q) dx dy = - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z dx dy.$$

И необходимое условие экстремума принимает вид

$$\iint_D \left[F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z dx dy$$

Вариация δz произвольна, следовательно,

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных носит название *уравнения Остроградского*.

III. Математический аппарат квантовой теории

§1 Основные определения

Состояние частицы может быть представлено неким абстрактным вектором, который мы условимся называть «кет-вектором» и обозначает:

$$|\psi\rangle$$

Такое название происходит от английского слова «bracket» (скобка), так как в рамках математического формализма квантовой теории нам приходится иметь дело с левыми (бра) и правыми (кет) скобками, соединение которых дает скалярное произведение векторов и записывается как полная скобка (обозначения Дирака).

Рассматриваемые векторы принадлежат абстрактному линейному пространству (линейность необходима для удовлетворения принципа суперпозиции состояний). В этом пространстве действуют линейные операторы:

$$\hat{A} |a\rangle = |b\rangle$$

Для вектора $|a\rangle$ существует сопряженный вектор «бра»:

$$\langle a|$$

Если осуществить отображение из абстрактного векторного пространства в пространство строк и столбцов, то кет-вектор будет представлен как вектор-столбец, а бра-вектор - как строка:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix};$$

$$\langle a| = (a_1^* \cdots a_n^*),$$

где * - знак комплексного сопряжения.

§2 Свойства «бра-» и «кет-» векторов

Из соображений, приведенных в конце предыдущего параграфа нетрудно догадаться, как в дираковских обозначениях должно записываться скалярное произведение

$$\langle a|a\rangle = a_1^* a_1 + a_2^* a_2 \geq 0, \in \mathcal{R}; \quad \langle b|a\rangle = b_1^* a_1 + b_2^* a_2;$$

$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*,$$

где для удобства и наглядности рассматривается двумерный случай. Однако, возможен и бесконечномерный случай. Наделенное скалярным произведением, полное (то есть такое, что каждая сходящаяся последовательность сходится к элементу этого же пространства) линейное векторное пространство называется *гильбертовым*. Нам понадобится также в дальнейшем выделить в нашем векторном пространстве счетный базис, то есть необходимо, чтобы оно было *сепарабельным*. Таким образом, бра и кет векторы принадлежат сепарабельному пространству Гильберта.

Эрмитово-сопряженным оператору $\hat{A}$ называется оператор $\hat{A}^+$ такой, что

$$\langle a|\hat{A}|b\rangle = \langle b|\hat{A}^+|a\rangle^*$$

Оператор называется *эрмитовым*, если выполняется равенство

$$\hat{A} = \hat{A}^+$$

Собственным вектором оператора $\hat{A}$ называется такой вектор $|A\rangle$, что

$$\hat{A}|A\rangle = A|A\rangle,$$

Где A – собственное число данного оператора (для удобства обозначаем оператор, его СЧ и СВ одной буквой, различая их по наличию шляпки и скобки).

Для эрмитово сопряженного оператора получим:

$$\langle A|\hat{A}|A\rangle = A\langle A|A\rangle = \langle A|\hat{A}^+|A\rangle^*.$$

Тогда

$$\langle A | \hat{A}^+ | A \rangle = A^* \langle A | A \rangle^* = A^* \langle A | A \rangle,$$

Откуда получим $\hat{A}^+ | A \rangle = A^*$.

Принимая во внимание вышеприведенное рассуждение, нетрудно догадаться, что собственные значения эрмитовых операторов – вещественные. В квантовой механике именно эрмитовы операторы соответствуют наблюдаемым (экспериментально) величинам, так как комплексные величины измерению не подлежат.

Прямое или *тензорное* произведение векторов $|a\rangle\langle b|$ в «столбцово-строчном» представлении является собой матрицу $n \times n$:

$$|a\rangle\langle b| = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1^* \cdots b_n^*) = \begin{pmatrix} a_1 b_1^* & \cdots & a_1 b_n^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1^* & \cdots & a_n b_n^* \end{pmatrix}.$$

«Кет-бра» произведение базисного вектора (ортонормированного) на самого себя $|n\rangle\langle n|$ образует квадратную матрицу с единственным равным 1 диагональным элементом, положение которого по строке и столбцу определяется номером n базисного вектора, и остальными нулями. Сумма таких произведений по всем n даст единичную матрицу с размерностью рассматриваемого пространства:

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = I$$

Если же вернуться к абстрактному представлению, то можно сказать, что $\sum |n\rangle\langle n|$ есть единичный оператор $\hat{1}$ (не меняющий вектор). Действительно, мы можем разложить вектор по ортонормированному базису:

$$|A\rangle = \sum a_n |n\rangle,$$

где $a_n = \langle n | A \rangle$ – проекция на данный орт.

Тогда $|A\rangle = \sum |n\rangle\langle n | A \rangle$, откуда очевидно, что $\sum |n\rangle\langle n| = \hat{1}$.

§3 Функции операторов

Введем понятие функции от оператора следующим образом: при действии функции $f(\hat{A})$ на собственный вектор $|A\rangle$ результат эквивалентен замене оператора $\hat{A}$ в аргументе функции на его собственное значение A :

$$\hat{A}|A\rangle = A|A\rangle$$

$$f(\hat{A})|A\rangle = f(A)|A\rangle$$

Если функция аналитическая, ее можно формально представить в виде ряда Тейлора по степеням оператора:

$$f(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (\hat{A})^n$$

Это разложение особенно полезно в квантовой механике, например, для экспоненты оператора:

$$e^{\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\hat{A})^n}{n!}$$

Для умножения экспонент операторов используется формула Хаусдорфа:

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{Z}}$$

$$\hat{Z} = \hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12}([\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] - [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]]) + \dots$$

Эта формула проверяется непосредственно и явно показывает, что не все свойства функций от вещественных аргументов автоматически переносятся на функции от операторов. В данном случае $\hat{Z} = \hat{A} + \hat{B}$, если операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ коммутируют.

Заметим, что функция от оператора коммутирует с самим оператором.

§4 Координатное представление

Пусть $\{|n\rangle\}$ – полный ортонормированный базис векторного пространства (такой, что $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$). Тогда любой вектор $|\psi\rangle$ можно разложить по этому базису:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \text{ где } c_n = \langle n|\psi\rangle.$$

Для непрерывного базиса разложение кет-вектора осуществляется аналогично дискретному случаю, но вместо суммы используется интеграл. Пусть $\{|x\rangle\}$ — полный ортонормированный непрерывный базис (например, базис собственных состояний оператора координаты в квантовой механике). Тогда любой кет-вектор $|\psi\rangle$ можно разложить в этом базисе:

$$|\psi\rangle = \int \psi(x) |x\rangle dx.$$

Коэффициенты разложения $\psi(x)$ определяются как скалярное произведение:

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle,$$

где $\psi(x)$ – волновая функция в координатном представлении

В непрерывном базисе дельта-функция Дирака играет роль, аналогичную роли символа Кронекера в дискретном:

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'); \quad \delta = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases};$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Пусть $f(x)$ – некоторая функция. Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x') dx = f(x')$$

Используя введенные обозначения, запишем окончательно:

$$\psi(x') = \int \psi(x) \langle x'|x\rangle dx.$$

§5 Представления Гейзенберга и Шредингера

Представление Шредингера — это основной способ описания эволюции квантовых систем, в котором состояния (волновые функции) изменяются во времени, а операторы остаются неизменными, то есть вся информация о состоянии системы содержится в волновой функции $|\psi(t)\rangle$. Основными принципами такого представления являются:

1. Состояния $|\psi(t)\rangle$ зависят от времени
2. Операторы $\hat{A}$ соответствуют физическим измерениям и не изменяются со временем, если явно от него не зависят
3. Эволюция во времени системы определяется уравнением Шредингера:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}} |\psi(t)\rangle,$$

где $\hat{\mathcal{H}}$ - гамильтониан системы, постоянную Планка считаем равной единице. Если гамильтониан не зависит от времени, то общее решение:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{\mathcal{H}}t} |\psi(0)\rangle.$$

И соответственно:

$$\langle\psi(t)| = \langle\psi(0)| e^{i\hat{\mathcal{H}}t},$$

так как $\hat{\mathcal{H}}^+ = \hat{\mathcal{H}}$.

Здесь оператор эволюции:

$$\hat{U}(t - t_0) = e^{-i\hat{\mathcal{H}}(t-t_0)}$$

описывает изменение системы во времени.

В представлении Гейзенберга для описания состояния вместо $|\psi(t)\rangle$ берется вектор $|\psi(0)\rangle$, в то время как эволюция во времени осуществляется с помощью оператора $\hat{U}(t - t_0)$.

Так как среднее значение $\langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle$ не зависит от представления, получим, что оператор $\hat{F}$ в представлении Гейзенберга $\hat{F}_H$ связан с этим же оператором в представлении Шредингера $\hat{F}_S$ соотношением $\hat{F}_H = e^{i\hat{\mathcal{H}}t} \hat{F}_S e^{-i\hat{\mathcal{H}}t}$.

§6 Уравнение Гейзенберга

Запишем выражение для среднего значения физической величины, соответствующей оператору $\hat{F}$:

$$\langle \hat{F} \rangle = \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle.$$

Возьмем полную производную по времени:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{F} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle.$$

Теперь:

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right| \hat{F} | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{F} \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle.$$

Воспользуемся уравнением Шредингера:

$$i \frac{\partial}{\partial t} | \psi \rangle = \hat{\mathcal{H}} | \psi \rangle.$$

Сопряжем его:

$$-i \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi | = \langle \psi | \hat{\mathcal{H}}.$$

Подставив эти выражения в производную, получим:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{F} \rangle = \left\langle \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \right\rangle + i \langle [\hat{\mathcal{H}}, \hat{F}] \rangle.$$

В представлении же Гейзенберга получим просто:

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + i [\hat{\mathcal{H}}, \hat{F}].$$

§7 Эволюция операторов

Как уже отмечалось, унитарный оператор $\hat{U}(t, t_0)$ описывает изменение системы со временем. Полезно будет вывести последнее уравнение предыдущего параграфа еще раз, используя несколько иной подход.

Оператор $\hat{F}_H(t)$ определяется через:

$$\hat{F}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{F}_S \hat{U}(t), \text{ где } \hat{U}^\dagger(t) = e^{i\hat{\mathcal{H}}t}$$

Возьмем производную от $\hat{F}_H(t)$:

$$\frac{d\hat{F}_H}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{U}^\dagger \hat{F}_S \hat{U}) = \hat{U}^\dagger \frac{\partial \hat{F}_S}{\partial t} \hat{U} + \frac{d\hat{U}^\dagger}{dt} \hat{F}_S \hat{U} + \hat{U}^\dagger \hat{F}_S \frac{d\hat{U}}{dt}$$

Так как:

$$\frac{d\hat{U}}{dt} = -i\hat{\mathcal{H}}\hat{U}; \quad \frac{d\hat{U}^\dagger}{dt} = i\hat{U}^\dagger\hat{\mathcal{H}},$$

здесь использован тот факт, что $\hat{\mathcal{H}}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{\mathcal{H}}$.

Получаем:

$$\frac{d\hat{F}_H}{dt} = \hat{U}^\dagger \frac{\partial \hat{F}_S}{\partial t} \hat{U} + i\hat{U}^\dagger [\hat{\mathcal{H}}, \hat{F}_S] \hat{U}$$

Поскольку $\hat{F}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{F}_S \hat{U}(t)$, можно записать:

$$\frac{d\hat{F}_H}{dt} = \frac{\partial \hat{F}_H}{\partial t} + i[\hat{\mathcal{H}}_H, \hat{F}_H].$$

IV. Группы

§1 Понятие группы

Группой называется множество G , в котором определена операция умножения (не следует путать ее с обычным умножением чисел), обладающая следующими свойствами (аксиомы групп):

1. Ассоциативность: для всех $a, b, c \in G$ справедливо $(ab)c = a(bc)$.
2. Существование единичного элемента $e \in G$, такого, что для всех $a \in G$ справедливо $ae = ea = a$.
3. Существование обратного элемента $a^{-1} \in G$ для каждого $a \in G$, так что $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

Если операция умножения коммутативна, то группу называют *абелевой*, в противном случае - *неабелевой*.

Группы G_1 и G_2 *изоморфны* если имеется взаимно однозначное отображение $f: G_1 \rightarrow G_2$, согласованное с операцией умножения:

$$f(g_1, g_2) = f(g_1)f(g_2); \quad f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}$$

Наличие изоморфизма между группами позволяет считать их в некотором смысле одинаковыми, что порой чрезвычайно важно. Например, в таком случае можно считать изоморфными всевозможные матрицы 2×2 и матрицы 3×3 , у которых третий элемент по диагонали – единица, а все остальные элементы третьей строки и третьего столбца – нули. Согласованность с матричным умножением здесь проверяется непосредственно, а наличие изоморфизма видно уже из того, что матрицы обеих групп имеют по четыре независимых элемента.

Подгруппой H группы G называют подмножество H в G , которое само является группой по отношению к операции умножения в G .

Прямым произведением $G_1 \times G_2$ групп называют множество пар $\{g, h\}$ (пары могут быть составлены по-разному), где $g \in G_1, h \in G_2$, в котором операции умножения и взятия обратного имеют вид

$$\{g, h\}\{g', h'\} = \{gg', hh'\}, \quad \{g, h\}^{-1} = \{g^{-1}, h^{-1}\},$$

единица – это пара $\{e_1, e_2\}$, где e_1 и e_2 – единицы в G_1 и G_2 . Таким образом, $G_1 \times G_2$ – это группа. Отметим, G_1 – подгруппа группы $G_1 \times G_2$, точнее, G_1 изоморфна подгруппе группы $G_1 \times G_2$ состоящей из элементов вида $\{g, e_2\}$ (что есть обобщенный пример из определения изоморфных групп).

То есть, прямое произведение есть не что иное, как множество пар, составленных из элементов этих групп (как, например, произведение вектора-столбца на вектор-строку дает матрицу, составленную из всевозможных произведений элементов этих векторов) с наложенными на умножение и взятие обратного элемента условиями, обеспечивающими выполнение групповых аксиом для прямого произведения.

Гомоморфизмом группы называют отображение группы в группу, согласованное с операциями умножения:

$$f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$$

$$f(e) = e'$$

$$f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}$$

Отличие гомоморфизма от изоморфизма является отсутствие требования взаимной однозначности отображения.

Определим соотношение эквивалентности в G : $g_1 \sim g_2$, если $g_1 = g_2h$ для некоторого $h \in H$. Напомним, что для соотношения эквивалентности выполняются следующие свойства:

1. Если $g_1 \sim g_2$, то $g_2 \sim g_1$, так как если $g_1 = g_2h$, то $g_2 = g_1h^{-1}$, а $h^{-1} \in H$.
2. Если $g_1 \sim g_2$, а $g_2 \sim g_3$, то $g_1 \sim g_3$, проверим $g_1 = g_2h_{12}$, $g_2 = g_3h_{23}$, то $g_1 = g_3(h_{23}h_{12})$, а $h_{23}h_{12} \in H$.

Например, если в группе вещественных чисел относительно умножения без нуля (об это см. следующий параграф) выделить подгруппу, состоящую из всевозможных степеней двойки, то, очевидно, соотношением эквивалентности для 6 и 3 будет $6 = 3 * 2$ и $3 = 6 * 2^{-1}$.

Эти соотношения эквивалентности позволяют разбить множество G на так называемые смежные классы (подробнее о них в §2 главы 5): в каждый из них входят все элементы G , эквивалентные между собой. Очевидно, что смежный класс единицы $e_1 \in G$ – сама подгруппа H . Множество смежных классов называют *фактор-пространством* $K = G/H$.

Подгруппу H группы G называют *нормальным делителем* группы G , если для любых $h \in H$ и любых $g \in G$ справедливо

$$ghg^{-1} \in H.$$

Например, если взять изоморфную группе вещественных чисел без нуля группу скалярных матриц (то есть вещественных чисел, умноженных на единичную матрицу), то вся группа таких матриц будет являться своим же нормальным делителем.

Если H – нормальный делитель, то $K = G/H$ – группа. Действительно, построим операцию умножения в K следующим образом. Пусть $k_1, k_2 \in K$. k_1 и k_2 – смежные классы; выберем из них представителей $g_1 \in k_1$, $g_2 \in k_2$. Тогда $k_1 k_2$ – это смежный класс, которому принадлежит элемент $g_1 g_2$ группы. Единица $e_k \in K$ – это класс эквивалентности, которому принадлежит единичный элемент группы G , а k^{-1} – это класс эквивалентности, которому принадлежит g^{-1} , если g элемент класса k .

Проверим операцию умножения. Пусть $g_1, g'_1 \in k_1$; $g_2, g'_2 \in k_2$ – два набора представителей, так что

$$g'_1 = g_1 h_1, \quad g'_2 = g_2 h_2, \quad \text{где } h_1, h_2 \in H.$$

Проверим, что $g'_1 g'_2 = g_1 g_2 h$ для некоторого $h \in H$. Имеем

$$g'_1 g'_2 = g_1 h_1 g_2 h_2 = g_1 g_2 g_2^{-1} h_1 g_2 h_2$$

Но $g_2^{-1} h_1 g_2 \in H$, поэтому $(g_2^{-1} h_1 g_2) h_2$ также принадлежит H .

Проверим единичный элемент ($ke_k = k$). Пусть $g \in k, g' \in e_k$, тогда

$$g' = eh' = h'$$

$$gg' = gh',$$

то есть gg' эквивалентно g .

Проверим обратный элемент ($kk^{-1} = e_k$). Пусть $g_1 \in k, g_2 \in k^{-1}$, тогда

$$g_1 = gh_1; \quad g_2 = g^{-1}h_2$$

$$g_1g_2 = gh_1g^{-1}h_2 = h,$$

то есть g_1g_2 эквивалентно e .

§2 Примеры групп

Рассмотрим множества вещественных и комплексных чисел $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Являются ли они группой относительно операций сложения или умножения?

Замкнутость относительно сложения:

$$\begin{aligned}\forall a, b \in \mathbb{R}: a + b &= b + a \in \mathbb{R}, \\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

Ассоциативность:

$$\begin{aligned}\forall a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow (a + b) + c &= a + (b + c), \\ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \rightarrow (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3)\end{aligned}$$

Нейтральный элемент:

$$\begin{aligned}0 &\in \mathbb{R}, \\ 0 &= 0 + 0i \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

Обратный элемент:

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R}: \exists (-a) &\in \mathbb{R}, \\ \forall z = a + bi \in \mathbb{C}: \exists (-z = -a - bi)\end{aligned}$$

Вывод: $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ – абелевы группы.

Относительно же умножения эти множества являются абелевыми группами $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$ лишь в том случае, если исключить из них нуль, так как для него не существует обратного элемента. Проверка выполнения аксиом группы для этого случая предоставляется читателю.

Рассмотрим Группу Галилея, описывающую преобразования координат в классической механике. В нее входят:

1. Трансляции времени, соответствующие изменению начала отсчёта времени:
 $P_0: t \rightarrow t' = t + \tau, x \rightarrow x' = x.$
2. Трансляции пространства, соответствующие изменению начала отсчёта координат: $P_3: t \rightarrow t' = t, x \rightarrow x' = x + a.$
3. Преобразования Галилея, связывающие системы отсчёта, движущиеся с постоянной относительной скоростью v : $K: t \rightarrow t' = t, x_k \rightarrow x'_k = v_k t + x_k.$
4. Повороты декартовых осей с помощью матрицы $R: t \rightarrow t' = t, x_k \rightarrow x'_k = R_{kl}x_l$, образующие ортогональную группу трёхмерного пространства $SO(3)$, причем $R \in SO(3)$ – ортогональная матрица: $R^T R = E$ и $\det R = 1$.

Приведем, к примеру, явный вид матрицы поворота вокруг оси z на угол θ :

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Также можно рассмотреть отражения, описываемые ортогональными матрицами с определителем -1 , которые, однако, сами по себе группу они не образуют, так как суперпозиция отражений описывается произведением матриц с отрицательными определителями, то есть матрицей с положительным определителем, уже не входящей в данное множество. Впрочем, можно объединить отражения и вращения в группу $O(3)$.

Для доказательства того факта, что множество вышеперечисленных преобразований образует группу, проверим выполнение трёх аксиом относительно композиций преобразований. Прежде, для удобства, напомним явный вид преобразований $g_1 = (R_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_1, \tau_1)$ четырех координат (время считаем четвертой координатой, что удобно, но непривычно в рамках классической механики):

$$t_1 = t + \tau_1; \quad \mathbf{r}_1 = R_1 \mathbf{r} + \mathbf{v}_1 t + \mathbf{a}_1,$$

где $R_1 \mathbf{r}$ – обычное произведение матрицы на вектор.

Если еще раз перейти к другой системе отсчета с помощью преобразования $g_2 = (R_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_2, \tau_2)$, то получим:

$$t_2 = t + \tau_1 + \tau_2; \quad \mathbf{r}_1 = R_2 R_1 \mathbf{r} + R_2 \mathbf{v}_1 t + R_2 \mathbf{a}_1 + \mathbf{v}_2(t + \tau_1) + \mathbf{a}_2.$$

То есть получим формулу для композиции преобразований:

$$g_2 \circ g_1 = (R_2 R_1, R_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, R_2 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{v}_2 \tau_1, \tau_1 + \tau_2).$$

Теперь, в более формальном виде проверим выполнение групповых аксиом:

Ассоциативность:

$$g_1 = (R_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_1, \tau_1), \quad g_2 = (R_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_2, \tau_2), \quad g_3 = (R_3, \mathbf{v}_3, \mathbf{a}_3, \tau_3).$$

Вычислим $(g_3 \circ g_2) \circ g_1$:

$$g_3 \circ g_2 = (R_3 R_2, R_3 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, R_3 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{v}_3 \tau_2, \tau_2 + \tau_3);$$

$$\begin{aligned} (g_3 \circ g_2) \circ g_1 &= \\ &= (R_3 R_2 R_1, (R_3 R_2) \mathbf{v}_1 + (R_3 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3), (R_3 R_2) \mathbf{a}_1 + (R_3 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{v}_3 \tau_2) \\ &\quad + (R_3 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \tau_1, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3). \end{aligned}$$

Вычисление $g_3 \circ (g_2 \circ g_1)$:

$$g_2 \circ g_1 = (R_2 R_1, R_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, R_2 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{v}_2 \tau_1, \tau_1 + \tau_2);$$

$$\begin{aligned} g_3 \circ (g_2 \circ g_1) &= \\ &= (R_3 R_2 R_1, (R_3 R_2) \mathbf{v}_1 + (R_3 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3), (R_3 R_2) \mathbf{a}_1 + (R_3 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{v}_3 \tau_2) \\ &\quad + (R_3 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \tau_1, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3); \end{aligned}$$

Сравним результаты:

Повороты: $R_3 R_2 R_1 = R_3 R_2 R_1$ (ассоциативность умножения матриц).

Бусты: $R_3 R_2 \mathbf{v}_1 + R_3 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = R_3 R_2 \mathbf{v}_1 + R_3 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

Сдвиги в обоих случаях: $R_3 R_2 \mathbf{a}_1 + R_3 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{v}_3 \tau_2 + R_3 \mathbf{v}_2 \tau_1 + \mathbf{v}_3 \tau_1$.

Временные сдвиги $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ в обоих случаях.

Таким образом, группа Галилея ассоциативна, так как для любых трёх преобразований выполняется: $(g_3 \circ g_2) \circ g_1 = g_3 \circ (g_2 \circ g_1)$.

Теперь докажем, что группа Галилея обладает единичным элементом:

Очевидно, таким единичным элементом будет тождественное преобразование (то есть сохранение исходной СО): $R = E, v = 0, a = 0, \tau = 0$.

Таким образом, единичное преобразование имеет вид: $e = (E, 0, 0, 0)$.

Действительно, можем проверить

$$e \circ g = (I \cdot R, I \cdot v + 0, I \cdot a + 0 + 0 \cdot \tau, \tau + 0) = (R, v, a, \tau) = g.$$

Доказательство для $g \circ e$ предоставляется читателю.

Докажем теперь наличие для каждого преобразования g обратного преобразования g^{-1} , такого что:

$$g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$$

То есть, должно быть:

$$g \circ g^{-1} = (RR', Rv' + v, Ra' + a + v\tau', \tau + \tau') = (E, 0, 0, 0)$$

Очевидно, что $R' = R^T$.

$$Rv' + v = 0 \Rightarrow v' = -R^T v;$$

$$Ra' + a + v\tau' = 0 \Rightarrow a' = -R^T(a + v\tau');$$

$$\tau + \tau' = 0 \Rightarrow \tau' = -\tau.$$

$$g^{-1} = (R^T, -R^T v, -R^T a + R^T v\tau, -\tau)$$

$$g \circ g^{-1} = (RR^T, R(-R^T v) + v, R(-R^T a + R^T v\tau) + a + v(-\tau), \tau - \tau) = (E, 0, 0, 0) = e$$

Доказательство для $g^{-1} \circ g$ снова предоставляется читателю.

Нетрудно догадаться, что обратным будет переход к исходной системе отсчета. Действительно, рассуждая в рамках механики, перейдем к новой системе с помощью преобразования $(R, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, \tau)$. Обратным для него будет преобразование, которое вернет нас в исходную СО. Сначала избавимся от сдвига времени с помощью $(E, 0, 0, -\tau)$, затем уничтожим буст преобразованием $(E, -\boldsymbol{v}, 0, 0)$ и трансляцию преобразованием $(E, 0, -\boldsymbol{a}, 0)$. В результате получим

$(E, -\boldsymbol{v}, -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}\tau, -\tau)$. Осуществив обратный поворот R^T , очевидно, получим уже выведенную ранее формулу для g^{-1} .

Таким образом, все аксиомы для группы Галилея выполняются.

§3 Группы Ли

Если рассмотреть группу, элементы которой гладко задаются с помощью некоторого набора параметров, то можно сказать, что эта группа представляет собой гладкое многообразие в некотором пространстве. Например, группа комплексных чисел $U(1)$, по модулю равных единице представляет собой окружность единичного радиуса на комплексной плоскости (пространство R^2), заданную через параметр φ с помощью формулы $z = e^{i\varphi}$. Группа квадратных вещественных матриц $n \times n$ определенного семейства (например, скалярных или ортогональных) представляется гладким многообразием размерности, равной числу независимых элементов каждой матрицы семейства, в пространстве R^{n^2} , а комплексных – в пространстве R^{2n^2} . Теперь мы можем дать определение.

Гладкие группы или *группы Ли* — это такие группы, которые представляют собой гладкие многообразия в описанном выше пространстве R^m .

Такое многообразие либо само будет кривой, либо в нем можно будет выделить некоторую кривую $g(t)$. Выберем параметр t так, чтобы $g(t) = e$, где e – единичный элемент рассматриваемой группы. Такую кривую, очевидно, вблизи единицы можно представить выражением

$$g(t) = e + At + o(t)$$

Здесь A принадлежит так называемой *алгебре Ли* группы G (AG).

Объекты A , определяются вышеприведенным соотношением (например, в случае группы некоторых матриц они, очевидно, тоже будут матрицами). Иными словами, что алгебра Ли AG является действительным векторным пространством, касательным к рассматриваемому многообразию в единице. Действительно, если $A \in AG$ и соответствует кривой $g(t)$, то кривой $g'(t) = g(ct)$, где c – действительное число, соответствует элемент cA (действительно, $g'(t) = e + (cA)t + o(t)$).

Если $A_1, A_2 \in AG$ соответствуют кривым $g_1(t)$, $g_2(t)$, то кривой

$g''(t) = g_1(t) g_2(t)$ соответствует сумма $(A_1 + A_2)$, поскольку

$$g''(t) = (e + A_1 t + \dots)(e + A_2 t + \dots) = e + (A_1 + A_2)t + o(t).$$

Таким образом, произведение элемента из AG на действительное число и сумма двух элементов из AG — тоже элементы алгебры Ли AG , т. е. AG — действительное векторное пространство.

Рассмотрим теперь элемент группы $g(t)$ и обратный ему $g^{-1}(t)$:

$$g(t)g^{-1}(t) = e = (e + At + \dots)(e + A^{-1}t + \dots) = e + (A + A^{-1})t + o(t)$$

Таким образом, $A^{-1} = -A$.

В алгебре Ли определен коммутатор $[A_1, A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1$, который тоже принадлежит алгебре AG . Действительно, если

$$g_1(t) = e + A_1(t) + \dots, \quad g_2(t) = e + A_2(t) + \dots,$$

то кривой

$$g(t) = g_1(\xi)g_2(\xi)g_1^{-1}(\xi)g_2^{-1}(\xi),$$

где $\xi = \sqrt{t}$, соответствует элемент алгебры $[A_1, A_2]$. Чтобы проверить это с необходимой точностью до $t \equiv \xi^2$, запишем

$$g(t) = (e + A_1 \xi + a_1 \xi^2)(e + A_2 \xi + a_2 \xi^2)(e - A_1 \xi - \beta_1 \xi^2)(e - A_2 \xi - \beta_2 \xi^2),$$

где $\beta_i = a_i - A_i^2$, так что элемент $(e - A_i \xi - \beta_i \xi^2)$ — обратная к $(e + A_i \xi + a_i \xi^2)$ с точностью до ξ^2 включительно (проверьте самостоятельно).

Тогда

$$g(t) = e + [A_1, A_2]\xi^2 + O(\xi^2) = e + [A_1, A_2]t + o(t).$$

§4 Представления групп и алгебр Ли

Представление T группы G в линейном пространстве V — это гомоморфное отображение, при котором каждому элементу $g \in G$ ставится в соответствие линейный оператор $T(g)$, действующий в V , то есть выполняются равенства

$$T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2), \quad T(e) = E, \quad T(g^{-1}) = [T(g)]^{-1},$$

Где E — единичный оператор.

Аналогично, представлением T алгебры Ли AG в пространстве V называется отображение, при котором каждому элементу $A \in AG$ ставится в соответствие линейный оператор $T(A)$, причём это отображение согласовано с операциями в алгебре AG , т. е.

$$T(A + B) = T(A) + T(B),$$

$$T(\alpha A) = \alpha T(A),$$

$$T([A, B]) = [T(A), T(B)]$$

Частным случаем являются матричные представления, где пространство V является конечномерным ($V = \mathbb{F}^n$), а линейные операторы задаются матрицами. В этом случае представление T группы G является гомоморфизмом в группу обратимых матриц:

$$T: G \rightarrow GL(n, \mathbb{F})$$

где $GL(n, \mathbb{F})$ — группа всех обратимых $n \times n$ матриц над полем $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

При этом групповым операциям соответствуют матричные операции:

$$T(e) = E, \quad T(g^{-1}) = [T(g)]^{-1},$$

$$T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2), \quad \text{— умножение матриц,}$$

Приведем примеры некоторых важных представлений, которые часто встречаются при работе с матричными группами:

1. Фундаментальное представление

Для матричной группы $G \subset GL(n, \mathbb{F})$ определяющее представление есть:

$$T: G \rightarrow GL(n, \mathbb{F}), T(g) = g.$$

2. Сопряжённое представление:

$$T: G \rightarrow GL(n, \mathbb{C}), T(g) = g^*$$

Где g^* — комплексно-сопряжённая матрица.

3. Контраградиентное представление:

$$T: G \rightarrow GL(n, \mathbb{F}), T(g) = (g^{-1})^T$$

Т. е. каждому элементу g сопоставляет транспонированную обратную матрицу: $(g^{-1})^T$.

4. Двойственное (сопряжённо-контраградиентное) представление:

Для $G \leq GL(n, \mathbb{C})$:

$$T: G \rightarrow GL(n, \mathbb{C}), T(g) = (g^{-1})^{T*}$$

Доказательство того факта, что отображение $T(g) = (g^{-1})^T$ не будет представлением, предоставляется читателю в качестве упражнения.

Пусть W — линейное подпространство в V . Оно называется инвариантным подпространством представления $T(G)$, действующего в V , если для всех $\varphi \in W$ и $g \in G$ справедливо:

$$T(g)\varphi \in W,$$

Т. е. действие любого оператора $T(g)$ не выводит из подпространства W .

V. Элементы теории точечных групп и симметрий

Предисловие

В физических приложениях точечные группы используются для описания симметрии молекул и кристаллов. Такой математический формализм позволяет классифицировать их по свойствам симметрии и наложить дополнительные условия инвариантности на соответствующие уравнения.

§1 Преобразования симметрии

Симметрия тела определяется совокупностью тех перемещений, которые совмещают тело с самим собой; об этих перемещениях говорят, как о *преобразованиях симметрии*.

Каждое из возможных преобразований симметрии можно представить в виде комбинации из трех основных типов преобразований:

- 1) *поворот* тела на определенный угол вокруг некоторой оси;
- 2) *зеркальное отражение* в некоторой плоскости;
- 3) *параллельный перенос* тела на некоторое расстояние.

Если тело совмещается само с собой при повороте вокруг некоторой оси на угол $2\pi/n$, то такая ось называется *осью симметрии n -го порядка*. Число n может иметь любое целое значение. В частности, значение $n = 1$ соответствует повороту на угол 2π . Операцию поворота вокруг данной оси на угол $2\pi/n$ мы будем обозначать символом C_n . Повторяя эту операцию два, три раза, мы получим повороты на углы $2\left(\frac{2\pi}{n}\right), 3\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, которые тоже, очевидно, совмещают тело с самим собой; эти повороты обозначим как C_n^2, C_n^3 . Очевидно, что если n кратно p , то

$$C_n^p = C_{n/p},$$

так как C_n^p соответствует повороту на $p\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, а $C_{n/p}$ – повороту на $\left(\frac{2\pi}{n/p}\right) = p\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Произведя поворот n раз, мы вернемся в исходное положение, т. е. осуществим *тождественное преобразование E* :

$$C_n^n = E$$

Если тело совмещается с самим собой при зеркальном отражении σ в некоторой плоскости, то такая плоскость называется *плоскостью симметрии*. Двукратное отражение в одной плоскости есть тождественное преобразование

$$\sigma^2 = E.$$

Одновременное применение обоих преобразований — поворота и отражения — приводит к так называемым *зеркально-поворотным осям*. Тело обладает зеркально-поворотной осью n -го порядка, если оно совмещается с самим собой при повороте вокруг этой оси на угол $2\pi/n$ и последующем отражении в плоскости, перпендикулярной к оси (рис.1). Если n — нечетное число, то n -кратное повторение зеркально-поворотного преобразования S_n будет равносильно простому отражению в плоскости, перпендикулярной к оси. Если же n — четное число, то n -кратное повторение зеркально-поворотного преобразования возвращает тело в исходное положение. Обозначая отражение в плоскости, перпендикулярной к данной оси, через σ_h , можем написать

$$S_n = C_n \sigma_h.$$

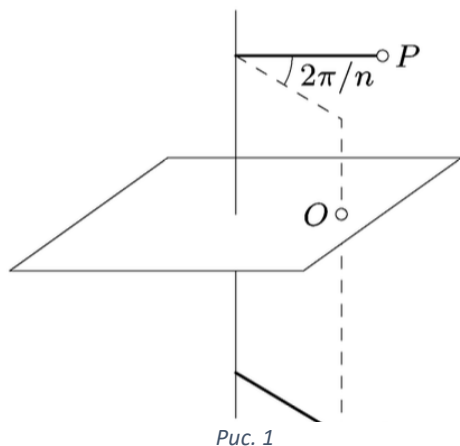


Рис. 1

Поворот на угол π с последующим отражением в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, представляет собой преобразование *инверсии* i , при котором точка P тела переводится в другую точку P' , лежащую на продолжении прямой, соединяющей P с точкой O пересечения оси с плоскостью, так что расстояния OP и OP' , одинаковы. Тело, симметричное относительно этого преобразования, обладает

центром симметрии:

$$i \equiv S_2 = C_2 \sigma_h.$$

Преобразование инверсии переводит каждый вектор $\mathbf{r}$ в вектор $-\mathbf{r}$. Матрица этого преобразования кратна единичной матрице, следовательно, преобразование коммутирует с любым другим ортогональным преобразованием.

Приведем ряд геометрических свойств, присущих поворотам и отражениям:

- 1) произведение двух поворотов вокруг осей, пересекающихся в некоторой точке, есть поворот вокруг некоторой третьей оси, проходящей через ту же точку;
- 2) произведение двух отражений в пересекающихся друг с другом плоскостях эквивалентно повороту; ось этого поворота совпадает с линией пересечения плоскостей, а угол поворота равен удвоенному углу между обеими плоскостями. Если обозначить поворот вокруг оси на угол φ через $C(\varphi)$, а отражения в двух плоскостях, проходящих через ось, символами σ_v и σ'_v , то можно записать в виде

$$\sigma_v \sigma'_v = C(2\varphi)$$

Индексом v обычно отличают отражение в плоскости, проходящей через данную ось («вертикальная» плоскость), а индексом h — в плоскости, перпендикулярной к оси («горизонтальная» плоскость).

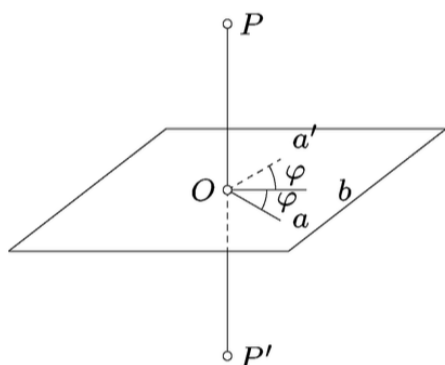


Рис. 2

Покажем, в качестве примера, что произведение поворотов на угол π вокруг двух пересекающихся под углом φ осей (Oa и Ob на рис. 2) есть поворот на угол 2φ вокруг оси, перпендикулярной к первым двум (PP' на рис. 2). После первого поворота (вокруг Oa) точка P переходит в P' , а после второго (вокруг Ob) она возвращается в исходное положение. Это значит, что линия PP' остается неподвижной и, следовательно, является осью поворота. Для определения угла поворота достаточно заметить, что при первом повороте ось Oa остается на месте, а после второго

переходит в положение Oa' , образующее с Oa угол 2φ . Таким же способом можно убедиться в том, что при перемене порядка обоих преобразований мы получим поворот в противоположном направлении.

Хотя результат двух последовательных преобразований зависит, вообще говоря, от порядка, в котором они производятся, однако в ряде случаев порядок операций несуществен — преобразования *коммутируют*. Приведем примеры таких преобразований:

- 1) два поворота вокруг одной оси;
- 2) два отражения во взаимно перпендикулярных плоскостях (они эквивалентны повороту на угол π вокруг линии пересечения плоскостей);
- 3) два поворота на угол π вокруг взаимно перпендикулярных осей (они эквивалентны повороту на тот же угол вокруг третьей перпендикулярной оси);
- 4) поворот и отражение в плоскости, перпендикулярной к оси поворота;
- 5) любой поворот (или отражение) и инверсия в точке, лежащей на оси вращения (или в плоскости отражения); это следует из 1) и 4).

§2 Конечные группы

В главе 3 мы сделали акцент на «общегрупповых» понятиях, а затем рассмотрели непрерывные бесконечные группы. Теперь мы рассмотрим конечные и, соответственно, дискретные группы.

Пусть группа G состоит из m элементов $g_1, g_2, \dots, g_m$. Умножим справа каждый из элементов группы на один и тот же элемент g_i , или, как говорят, произведем правый сдвиг по группе. Тогда мы получим последовательность

$$g_1 g_i, g_2 g_i, \dots, g_m g_i$$

В этой последовательности каждый элемент группы встречается один и только один раз. Действительно, пусть g_l — произвольный элемент группы. Очевидно, что $g_l = (g_l g_i^{-1}) g_i$, и, следовательно, элемент g_l содержится в последовательности (2.1). Так как число элементов в нашей последовательности равно порядку группы, то каждый из элементов может содержаться в ней только по одному разу. Таким же свойством обладает последовательность элементов

$$g_i g_1, g_i g_2, \dots, g_i g_m,$$

получаемая с помощью левого сдвига.

Возьмем произвольный элемент g_i группы G и образуем различные степени этого элемента $g_i, g_i^2, g_i^3, \dots$. Так как мы рассматриваем конечную группу, то члены в этой последовательности обязательно должны повторяться. Наименьший показатель степени h , для которого имеет место равенство

$$g_i^h = E$$

называют *порядком элемента g_i* .

Периодом или циклом элемента g_i называется совокупность элементов $g_i, g_i^2, \dots, g_i^h = E$. Период элемента образует подгруппу группы G . Все элементы этой подгруппы коммутируют друг с другом, следовательно, эта подгруппа абелева.

Если h — порядок элемента g_i , то $g_i^{h-1} = g_i^{-1}$. Поэтому для конечных групп существование обратных элементов является следствием трех других групповых свойств.

Пусть H — подгруппа группы G с элементами $h_1, h_2, \dots, h_m$; m — порядок группы H . Составим следующую последовательность совокупностей элементов группы G . Сначала возьмем элементы подгруппы H , затем выберем из группы G какой-нибудь элемент g_i , не содержащийся в H , и составим совокупность элементов $g_i h_1, g_i h_2, \dots, g_i h_m$, которую будем обозначать через $g_i H$. Совокупности элементов $g_i H$ называют *смежными классами* слева по подгруппе H . Аналогично вводится правый смежный класс.

Как уже отмечалось в главе 2, группу можно разбить на непересекающиеся смежные классы. Действительно, смежные классы $g_i H$ и $g_k H$ (g_i и g_k — два любых элемента группы G) либо совпадают, либо не имеют ни одного общего элемента. Если эти классы имеют хотя бы один общий элемент $g_i h_\alpha = g_k h_\beta$, то $g_k = g_i h_\alpha h_\beta^{-1}$, и, следовательно, $g_k \in g_i H$. Но тогда любой элемент $g_k H$ представим в виде $g_k h_\gamma = g_i h_\alpha h_\beta^{-1} h_\gamma = g_i h_\delta$ и также принадлежит $g_i H$.

§3 Точечные группы

Точечными группами называют конечные подгруппы группы ортогональных преобразований в трехмерном пространстве $O(3)$. *Элементами* точечных групп являются некоторые вращения трехмерного пространства, а также вращения, сопровождаемые инверсией.

Известно, что любой элемент группы вращений можно представить как поворот на некоторый угол φ вокруг определенной оси. Если группе принадлежит поворот на угол φ , то ей принадлежит и поворот на угол $k\varphi$, где k — произвольное целое положительное или отрицательное число. Поэтому в конечной группе угол φ кратен 2π .

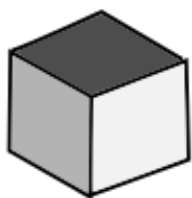
Каждой точечной группе можно сопоставить некоторое геометрическое тело, обладающее соответствующей симметрией. К таким телам, в частности, относятся правильные многогранники, т. е. многогранники, все грани которых представляют собой одинаковые правильные многоугольники. Из всего множества правильных n -угольников только треугольник, квадрат и пятиугольник могут служить гранями правильного многогранника (доказательство этого факта выходит за рамки нашего курса и может быть изучено читателем с помощью литературы по теории многогранников).

Существует пять правильных многогранников:

- 1) тетраэдр (образован четырьмя треугольниками);
- 2) куб (образован шестью квадратами);
- 3) октаэдр (образован восемью треугольниками);
- 4) додекаэдр (образован двенадцатью пятиугольниками);
- 5) икосаэдр (образован двадцатью треугольниками).



Тетраэдр



Куб



Октаэдр



Додекаэдр



Икосаэдр

Этим фигурам соответствуют, однако, не пять точечных групп, а лишь три, так как куб и октаэдр, а также додекаэдр и икосаэдр, взаимно сопряжены, т.е. могут быть получены друг из друга соединением середин смежных граней. Каждой такой паре сопряженных многогранников будет соответствовать одна и та же группа.

Исследуем группу вращений (конечную), каждый элемент которой характеризуется осью и углом поворота. Рассмотрим сферу, центр которой совпадает с центром вращения. Для любого вращения две точки этой сферы, через которые проходит ось вращения, будут оставаться на месте. Назовем эти точки полюсами, соответствующими данному вращению. Если ось вращения является осью n -го порядка, то ее полюсы – полюсами n -го порядка.

Пусть точечная группа G имеет полюс P порядка n . Обозначим циклическую подгруппу группы G , состоящую из вращений вокруг оси, проходящей через этот полюс, через H .

Разложим группу G на смежные классы по подгруппе H

$$G = \{H, g_1H, g_2H, \dots, g_{m-1}H\}$$

Любой из элементов группы G либо оставляет полюс P на месте, либо переводит в некоторый другой полюс. Каждый из элементов сопряженной совокупности g_iH переводит полюс P в один и тот же полюс P_i , причем все полюсы P_i различны. Подгруппа $g_iHg_i^{-1}$, оставляющая на месте полюс P_i , подобна подгруппе H . Будем говорить, что полюсы $P, P_1, \dots, P_{m-1}$, образуют звезду эквивалентных полюсов, порожденную полюсом P . Все полюсы, составляющие звезду, имеют одинаковый порядок. Получаем связь между числом m полюсов в звезде и их порядком n :

$$mn = N,$$

где N — порядок группы G .

Рассмотрим пары (P, g) , первый элемент которых обозначает полюс, второй — преобразование, отличное от тождественного, оставляющее этот полюс на месте. Подсчитаем число таких пар: так как каждое преобразование g имеет только два полюса, искомое число равно $2(N - 1)$ в силу того, что число отличных от единичного элементов есть $N - 1$. С другой стороны, для каждой звезды эквивалентных полюсов число таких пар будет равно $(n_k - 1)m_k$, где значок k нумерует различные звезды полюсов, принадлежащие группе G . Поэтому имеет место равенство

$$2(N - 1) = \sum_k (n_k - 1)m_k.$$

Принимая во внимание

$$m_k n_k = N,$$

получим

$$2 - \frac{2}{N} = \sum_k \left(1 - \frac{1}{n_k}\right).$$

Так как числа N и n не могут быть меньше 2 (рассматриваем нетривиальную группу, состоящую не только из тождественного преобразования), то сумма в правой части равенства может содержать только два или три слагаемых. Таким образом, точечная группа вращений может иметь только две или три звезды полюсов.

Если группа имеет две звезды, то получаем:

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}.$$

Единственным решением этого уравнения будет $n_1 = n_2 = N$. Число полюсов m в каждой из двух звезд равно 1, и, следовательно, всего имеем два полюса. Соответствующая группа C_n состоит из поворотов вокруг одной оси на углы, кратные $2\pi/N$, так как в каждой звезде лишь по одному полюсу, что говорит об отсутствии поворотов вокруг других осей.

Если группа имеет три звезды полюсов, то получаем

$$1 + \frac{2}{N} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}.$$

Одно из чисел n должно быть равно 2. Действительно, если все n , были бы больше или равны 3, то сумма в правой части не могла бы быть больше 1. Не умоляя общности, будем считать, что $n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Следовательно, $n_1 = 2$. Таким образом, имеем

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{N} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}.$$

Из этого равенства следует, что $n_2 \leq 3$ (так как иначе $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \leq 2$). Теперь нетрудно перечислить все решения уравнения:

- 1) $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = N/2, N - \text{четное};$
- 2) $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 3, N = 12;$
- 3) $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 4, N = 24;$
- 4) $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 5, N = 60;$

Если взять $n_2 = 3, n_3 = 6$, то получим $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$, чего не может быть, так как N конечно.

- 1) Первому решению соответствует группа симметрии правильной n -угольной призмы. Она имеет два полюса, через которые проходит ось порядка $n = N/2$ и две звезды полюсов по $N/2$ полюса в каждой, через которые проходят оси второго порядка, перпендикулярные к оси призмы (группа D_n);
- 2) Второе решение соответствует группе вращений тетраэдра (группа T): четыре оси третьего порядка и три оси второго порядка (одна звезда второго порядка, содержащая шесть полюсов, то есть три оси, и две звезды третьего порядка, содержащие по две оси);
- 3) Третье решение дает нам группу вращений куба или октаэдра (группа O): шесть осей второго порядка, четыре оси третьего порядка и три оси четвертого порядка;
- 4) Последнее решение соответствует группе додекаэдра или икосаэдра (группа Y): пятнадцать осей второго порядка, соединяющих середины противоположных ребер, десять осей третьего порядка, соединяющих противоположные вершины, и шесть осей пятого порядка, соединяющих середины противоположных граней додекаэдра;

Проведем теперь классификацию всех несобственных точечных групп.

Собственные (на языке матриц – имеющие единичный детерминант) преобразования некоторой точечной группы $A_1, A_2, \dots, A_q$, образуют одну из рассмотренных выше собственных групп. Теперь пусть $B_1, B_2, \dots, B_p$, – совокупность всех несобственных (детерминант -1) преобразований данной точечной группы. Число элементов в совокупностях A и B должно совпадать, т. е. $p = q$. Действительно произведем, очевидно, несобственное преобразование $B_j^{-1}A_i = B_k$, то есть $A_i = B_jB_k$, то есть любое собственное преобразование может быть представлено как композиция фиксированного несобственного преобразования B_j и некоторого другого несобственного преобразования данной точечной группы. Таким образом, умножением всех элементов совокупностей A и B на любой из несобственных элементов мы меняем эти совокупности местами.

Если среди элементов B имеется инверсия i , то вся группа может быть представлена в виде прямого произведения:

$$A \times i$$

где i — группа инверсии, которая состоит из двух элементов: E и i .

Если же среди элементов B инверсии нет, то элементы B могут быть представлены в виде

$$B = iM,$$

где M – совокупность некоторых не содержащихся в A собственных преобразований другой группы G , содержащей A . Действительно, если, например, $M_j = A_i$, то $B_j = iA_i$, но тогда $B_k = A_i^{-1}B_j = i$ (инверсия коммутирует с поворотами и отражениями), чего не может быть, ведь среди B нет инверсии. Заметим, что если $A_j = B_i^2$, то $A_j = M_i^2$. Теперь разобьем G на смежные классы по A . Первым будет просто A , для второго возьмем некоторый элемент M_j . Если же попытаться составить другие классы, например M_kA , то получим, например $B_j^{-1}B_kA_i = M_j^{-1}M_kA_i = A_r$, то есть $M_k = M_jA_l$, а значит $M_k \in M_jA$. Таким образом, группа A является подгруппой G индекса 2, то есть делит G на два смежных класса. Примером подобной ситуации может быть фигура, составленная из двух тетраэдров наподобие песочных часов (то есть полученная добавлением к тетраэдру другого, полученного путем отражения первого относительно плоскости, проходящей через одну из вершин и параллельной противоположной этой вершине грани). Среди собственных преобразований есть ось третьего порядка, проходящая через противоположные грани тетраэдров (и перпендикулярная им) и их точку пересечения. В то же время, нетрудно убедиться, что к несобственным преобразованиям симметрии данной фигуры будет принадлежать поворот вокруг той же оси на 60 градусов (то есть принадлежащее поворотам шестого порядка) с последующей инверсией, в то время как инверсия сама по себе не совмещает фигуру саму с собой.

Таким образом, наряду с собственными точечными группами C_n, D_n, T, O, Y , мы имеем несобственные точечные группы следующих типов:

$$C_n \times I, \quad D_n \times I, \quad T \times I, \quad O \times I, \quad Y \times I,$$

$$(C_{2n}, C_n), \quad (D_n, C_n), \quad (D_{2n}, D_n), \quad (O, T).$$

Поскольку инверсия коммутирует с любым преобразованием, то группа (G, A) изоморфна группе G . Подводя итоги, сказать, что любая точечная группа (собственная или несобственная) изоморфна либо одной из собственных точечных групп (C_n, D_n, T, O, Y) , либо прямому произведению одной из указанных групп на группу инверсии.

VI. Тензорная алгебра

§1 Понятие тензора

Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \dots$ – векторы в n -мерном пространстве (мы будем обозначать векторы $\mathbf{a}$, а тензоры $\mathbf{A}$)

Тогда тензором *второго ранга* называется формальная сумма формальных произведений двух векторов:

$$\mathbf{T} = \mathbf{ab} + \mathbf{cd} + \mathbf{ef} + \dots,$$

для которых выполняются следующие соотношения эквивалентности:

- 1) $\mathbf{ab} + \mathbf{cd} = \mathbf{cd} + \mathbf{ab}$;
- 2) $(\mathbf{ab} + \mathbf{cd}) + \mathbf{ef} = \mathbf{ab} + (\mathbf{cd} + \mathbf{ef})$;
- 3) $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$;
- 4) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$;

Легко это определение обобщить на случай тензора произвольного ранга.
Тензором ранга n называется формальная сумма формальных произведений n векторов (*полиад*):

$$\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{abcd} \dots \mathbf{n} + \dots$$

Величина “ $\mathbf{ab}$ ” называется *диадой*, (“ $\mathbf{abc}$ ” – *триадой*, “ $\mathbf{abcd}$ ” – *тетрадой*).
Операция, ставящая в соответствие двум векторам диаду (3 векторам триаду, четырем векторам тетраду и т.д.), называется *тензорным произведением*.

В рамках использования тензоров второго ранга в механике и физике им можно поставить в соответствие матрицу так же, как векторам в соответствие ставятся столбцы:

Пусть

$$\mathbf{a} \sim \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}; \mathbf{b} \sim \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}; \mathbf{A} = \mathbf{ab}.$$

Тогда:

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}.$$

Введем *транспонированный* тензор $\mathbf{A}^T$ следующим образом:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{ba},$$

нетрудно убедиться, что ему будет соответствовать транспонированная матрица тензора $\mathbf{A}$.

Заметим, что, вообще говоря, тензорное произведение не коммутативно:

$$\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba} (\mathbf{A} \neq \mathbf{A}^T).$$

Проиллюстрируем этот факт на простейшем примере. Положим:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}; \mathbf{b} = \mathbf{j},$$

где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ – единичные орты ($\mathbf{i} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Тогда:

$$\mathbf{A} = \mathbf{ab} = \mathbf{ij};$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{ba} = \mathbf{ji}.$$

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{B} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Из чего наглядно видно, что $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ и $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$.

§2 Простейшие свойства

Пусть $A = ab + cd$; $B = ef + gh$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$1) A + B = ab + cd + ef + gh;$$

$$2) \lambda A = \lambda ab + \lambda cd;$$

$$3) \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B;$$

$$4) (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A;$$

Пусть $O^2 = 00$ – Нулевой тензор 2 ранга ($O^{(n)} = 000 \dots 0$), а $-A = -1 \cdot A$ – Противоположный тензор, тогда:

$$O + A = A; \quad A + (-A) = O.$$

§3 Покомпонентное разложение

Разложим тензор по базисным векторам:

$$\mathbf{a} = a_k \mathbf{e}_k, \mathbf{b} = b_n \mathbf{e}_n \rightarrow \mathbf{ab} = a_k \mathbf{e}_k b_n \mathbf{e}_n$$

Где m – размерность пространства, a_k, b_n – проекции векторов,

$\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n$ – базисы в m -мерном пространстве, а по повторяющимся индексам (немым) производится суммирование от 1 до m .

Тогда:

$$\mathbf{A} = \mathbf{ab} + \mathbf{cd} + \dots = (a_k b_n + c_k d_n) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_n = A_{kn} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_n.$$

Диады $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_n$ образуют базис в пространстве тензоров 2 ранга ($\mathbf{e}_k$ в пространстве векторов)

Для ортонормированного базиса:

$$\mathbf{e}_k \mathbf{e}_n = \delta_{kn},$$

Где δ_{kn} – символ Кронекера:

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 0, n \neq k \\ 1, n = k \end{cases}$$

Если мы представим тензор в виде матрицы, то каждый элемент этой матрицы A_{kn} будет компонентой тензора в данном базисе.

§4 Операции над тензорами второго ранга

Рассмотрим:

$$A \circ B = ab \circ cd = a(b \circ c)d ,$$

где $\circ - \cdot / \times / \otimes$ (скалярное / векторное / тензорное произведения)

Тогда:

$$1) (A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C;$$

$$2) A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C;$$

$$3) Ac = (ab)c = abc;$$

$$4) A \times B = ab \times cd = a(b \times c)d;$$

$$5) A \otimes B = (ab)(cd) = abcd;$$

$$6) A \cdot B = a(b \cdot c)d;$$

$$7) A \cdot \cdot B = (b \cdot c)(a \cdot d) = \lambda \text{ (скаляр)};$$

$$8) A \cdot \times B = (b \cdot c)(a \times d) = p \text{ (вектор)};$$

$$9) A \times \times B = (b \times c)(a \times d) \text{ (по определению двойного векторного произведения).}$$

Приведем, к тому же, некоторые свойства операций с тензорами, доказательство которых предоставляется читателю в качестве упражнения:

- 1) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{A}^T$;
- 2) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$;
- 3) $(\mathbf{A} \times \mathbf{c})^T = -\mathbf{c} \times \mathbf{A}^T$;
- 4) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$;
- 5) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$;
- 6) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{ca} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{ca} \neq \mathbf{ac} \cdot \mathbf{B}$;
- 7) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \times \mathbf{B}^T = -\mathbf{B}^T \times \mathbf{A}^T$;
- 8) $\mathbf{a} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{ca} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \cdot \times \mathbf{ac} = -\mathbf{B}^T \times \mathbf{ca}$.

Представим также покомпонентное представление некоторых операций:

- 1) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} \sim A_{kn} \cdot c_n$;
- 2) $\mathbf{Ac} \sim T_{ijk} = A_{ij}c_k$;
- 3) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \sim A_{kn} B_{nm}$;
- 4) $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \sim A_{ij} B_{kl}$;
- 5) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \Rightarrow A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$.

§5 Единичный тензор

Единичным тензором $\mathbf{E}$ называется такой тензор, что для любого вектора $\mathbf{a}$ выполняется:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a}.$$

Найдем компоненты $\mathbf{E}$ в ОНБ:

$$E_{kn} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_n = \delta_{kn}$$

Тогда получим:

$$\mathbf{E} = \delta_{kn} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k.$$

Приведем важнейшие свойства единичного тензора:

1) Симметрия:

$$\mathbf{E}^T = \mathbf{E}.$$

2) Компоненты единичного тензора не зависят от выбора базиса

3) Единичный тензор можно представить в виде единичной матрицы

$$\mathbf{E} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

§6 Тензор Леви-Чивиты

Введем символ Леви-Чивиты:

$$\varepsilon_{kns} = \mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_s) = \begin{cases} +1, & kns = \text{четные перестановки } 123 \\ -1, & kns = \text{нечетные перестановки } 123, \\ 0, & \text{хотя бы 2 индекса совпадают} \end{cases}$$

где $\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_s$ – векторы ОНБ.

Нетрудно видеть (докажите самостоятельно), что

$$\varepsilon_{kns} = -\varepsilon_{nks} = \varepsilon_{nsk},$$

$$\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_n = \varepsilon_{kns} \mathbf{e}_s.$$

Теперь:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{E} = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n = \varepsilon_{kns} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s \mathbf{e}_n = -\varepsilon_{ksn} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s \mathbf{e}_n = -\boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – Тензор Леви-Чивиты.

Заметим теперь, что

$$\mathbf{A} \times \mathbf{c} \sim A_{kn} \times c_m = \varepsilon_{nms} A_{kn} c_m.$$

§7 Симметричный и антисимметричный тензоры

Симметричным называется тензор, удовлетворяющий условию

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T.$$

Антисимметричным тензором, соответственно, удовлетворяющий условию

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T.$$

Любой тензор второго ранга можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора, причём это представление единственно. Действительно, определим симметричную $\mathbf{S}$ и антисимметричную $\mathbf{A}$ части тензора $\mathbf{T}$ следующим образом:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T), \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T),$$

причем $\mathbf{S} + \mathbf{A} = \mathbf{T}$.

Доказательство единственности предоставляется читателю в качестве упражнения.

VII. Введение в Риманову геометрию

Предисловие

Общая теория относительности использует в качестве математического аппарата риманову геометрию. Этот чрезвычайно важный раздел математики находит применение в различных разделах механики и физики, использующих геометрический подход (теория дислокаций, теория оболочек и т. д.). Изучение данной дисциплины приносит не только огромную пользу, но и удовольствие в силу эlegантности ее построения. При написании данной главы были использованы идеи, почерпнутые Даниилом Бутусовым на прослушанных им на кафедре физики высоких энергий Физического факультета СПбГУ лекциях по теории гравитации. В частности, введение антисимметризатора, существенно облегчающее выкладки, было предложено профессором С.А. Пастоном, читающим эти лекции.

§1 Формы над векторами

Пусть $\mathbf{a}$ – вектор, σ – форма, т. е. линейный функционал такой, что каждому вектору $\mathbf{a}$ он ставит в соответствие скаляр c :

$$(\sigma, \mathbf{a}) = c.$$

В Евклидовом пространстве формами над векторами являются те же векторы, а получаемый скаляр есть скалярное произведение векторов:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = c,$$

где $\mathbf{a}$ – форма, а $\mathbf{b}$ – вектор (или наоборот).

Однако, в общем случае форма над вектором не является таким же вектором.

§2 Векторы, скаляры и тензоры в криволинейных координатах

Мы будем рассматривать переход от одной системы координат к другой, где новые координаты x' – функции предыдущих («старых») координат:

$$x'^{\mu} = f^{\mu}(x^{\nu}); \mu, \nu = \overline{0, n};$$

где $n + 1$ – размерность пространства, причем $x'^{\mu} = f^{\mu}(x^{\nu})$ имеет ненулевой Якобиан, непрерывно дифференцируема столько раз, сколько нам нужно (обычно не менее 2 раз). Преобразование координат с такими свойствами называется *диффеоморфизмом*.

Введем теперь более конкретные определения важнейших геометрических объектов.

Скаляр (скалярное поле) – некая функция координат, значение которой остается неизменным при переходе от одной системы координат к другой:

$$\varphi(x) = \varphi'(x'); \quad x' = x'(x).$$

Контравариантный вектор (векторное поле) – это объект с числом компонент, равным размерности пространства, преобразующийся при переходе к новой системе координат по закону

$$a'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} a^{\nu}(x).$$

Такая форма записи может показаться непривычной, однако, читатель может убедиться, что любые линейные преобразования компонент векторов (например, преобразования Галилея для евклидова пространства и преобразования Лоренца – для пространства Минковского) удовлетворяют этому соотношению.

Заметим, что скалярное произведение контравариантных векторов $a^{\nu}b^{\nu}$ в криволинейных координатах скаляром, очевидно, являться не будет. Поэтому мы не можем ввести контравариантный вектор как форму над другим контравариантным вектором. Для обобщения понятия скалярного произведения на случай криволинейной системы координат введем понятие *ковариантного вектора*:

$$a'_{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} a_{\nu}(x).$$

Тогда скалярное произведение $a^{\mu}b_{\mu}$ будет неизменно при смене системы координат:

$$a'^{\mu}b'_{\mu}(x') = a^{\mu}b_{\mu}(x).$$

Действительно, заметим, что

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} = \delta_{\alpha}^{\mu}$$

Тогда скалярное произведение будет выглядеть следующим образом:

$$a'^{\mu} b'_{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} a^{\nu} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} b_{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} a^{\nu} b_{\alpha} = a^{\mu} b_{\mu}.$$

Тензор – сумма тензорных произведений векторов (см §1 главы 6).

Соответственно, каждая компонента тензора представляет собой произведение компонент векторов. Следовательно, преобразуется она, как произведение компонент векторов, а точнее, по контравариантным (верхним) индексам тензор преобразуется, как контрвектор, а по ковариантным (нижним) – как ковектор. Для тензора 2 ранга имеем:

$$T'^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} T^{\alpha}_{\beta} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}};$$

$$T^{\mu}_{\nu} = a^{\mu} b_{\nu} + c^{\mu} d_{\nu} + \dots$$

Для тензора ранга n:

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\alpha_n}} T^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_n} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_m}}{\partial x'^{\nu_m}}.$$

§3 Метрический тензор

Введем объект (метрику) $g_{\nu\mu}$, который нужен для «поднимания» и «опускания» индексов:

$$a_\nu = g_{\nu\mu} a^\mu.$$

Тогда скалярное произведение можно записать следующим образом:

$$a^\mu b_\mu = a^\mu b^\nu g_{\mu\nu} = a'^\mu b'_\mu = a'^\mu b'^\nu g'_{\mu\nu} = a^\alpha b^\beta \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g'_{\mu\nu}.$$

Отсюда очевидно, что метрика должна преобразовываться как произведение ковекторов, то есть быть тензором:

$$g'_{\mu\nu} = g_{\gamma\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\nu},$$

Тогда скалярное произведение действительно не будет изменяться.

Заметим, что теперь набор координат (привычно называемый радиус-вектором), вообще говоря, не вектор (что очевидно), однако, дифференциалы координат по прежнему преобразуются, как компоненты контрвектора:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha.$$

Если дифференциал координаты – это вектор, то квадрат дифференциала – это скалярное произведение, то есть $dx^\nu dx^\mu g_{\nu\mu}$ – квадрат дифференциала длины.

В Евклидовом пространстве имеем:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Пусть $x = x^0, y = x^1, z = x^2$. Тогда $dl^2 = dx^i dx^k g_{ik}$, где

$$g_{ik} = \delta_{kn} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому, в евклидовом пространстве нет необходимости различать верхние и нижние индексы, что в общем случае делать приходится.

В пространстве Минковского имеем (полагаем скорость света равной единице):

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Пусть $x = x^0, y = x^1, z = x^2, t = x^3$. Тогда $ds^2 = dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu}$, где

$$\eta_{\mu\nu} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \text{метрика Минковского}$$

Метрику можно считать симметричной: $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$ (это ясно из выражений для квадрата длины).

§4 Ковариантное дифференцирование

Введем понятия дифференциала вектора в криволинейном пространстве. Как мы увидим, в криволинейном пространстве при «параллельном переносе» вектор меняет направление и модуль. Компоненты ковариантного вектора преобразуются согласно формулам:

$$a_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} a'_\nu.$$

Поэтому

$$da_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} da'_\nu + a'_\nu d\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} da'_\nu + a'_\nu \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} dx^\alpha.$$

Таким образом, da_μ преобразуется вовсе не как вектор. Нужно ввести понятие производной в искривленном пространстве так, чтобы эта производная являлась тензором, тогда da_μ станет вектором.

Дело в том, что в привычном определении дифференциала мы делаем недопустимую в криволинейных координатах вещь – вычитаем из значения вектора в точке $x = x_0 + \xi$ ($\xi \rightarrow 0$) в близкой точке x_0 , в то время как векторы в разных, пусть и близких точках, преобразуются по-разному ($\frac{\partial x'}{\partial x}$, вообще говоря, зависит от координат). Поэтому, в результате мы получаем не вектор, а некоторый «неудобный» объект. Для того, чтобы величины da_μ были компонентами вектора, необходимо вычитать два вектора в одной и той же точке, например x . Но для этого необходимо «перенести» $a_\mu(x_0)$ из точки x_0 в точку $x_0 + \xi$. Иными словами, в искривленном пространстве векторы могут изменять при параллельном переносе (слово «параллельный» здесь уже не имеет наглядного значения, а вводится по аналогии с евклидовым пространством). Таким образом, нам необходимо ввести правило параллельного переноса. Аналогичная проблема возникает и при работе с контрвариантными векторами.

Построим правило параллельного переноса для контрвектора. Во-первых, при переносе вектор должен изменяться на линейную по своим компонентам величину, так как правило переноса не зависит от данного вектора, а определяется лишь системой координат и спецификой пространства (в противном случае сумма векторов будет преобразовываться по-другому, в то время как для любого вектора правило параллельного переноса должно быть одним и тем же). Во-вторых, добавка к вектору должна быть линейной по вектору $\xi = dx$, так как мы работаем в первом приближении (как и полагается в случае дифференциалов). Таким образом, получим следующее соотношение для $a^\mu|_{x_0+\xi}$ (вектор $a^\mu(x_0)$, перенесенный в точку $x_0 + \xi$):

$$a^\mu|_{x_0+\xi} = a^\mu(x_0) - \xi^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\mu(x_0) a^\nu(x_0),$$

где $\Gamma_{\alpha\nu}^\mu$ – коэффициент связности. Заметим, что в вышестоящей формуле несущественно, в какой точке (x_0 или $x_0 + \xi$) берутся величины $\Gamma_{\alpha\nu}^\mu$, так как их можно разложить в ряд Тейлора по ξ , в результате чего, из-за последующего умножения на ξ^α , останется лишь член нулевого порядка (работаем в первом порядке малости).

Теперь, в первом порядке по ξ :

$$a^\mu(x_0 + \xi) = a^\mu(x_0) + \xi^\alpha \partial_\alpha a^\mu(x_0),$$

где $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$.

Тогда

$$da^\mu(x_0) = a^\mu(x_0 + \xi) - a^\mu(x_0)|_{x_0+\xi} = \xi^\alpha \left(\partial_\alpha a^\mu(x_0) + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu(x_0) a^\nu(x_0) \right) = \xi^\alpha D_\alpha a^\mu(x_0)$$

Величина $D_\alpha a^\mu = \partial_\alpha a^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu a^\nu$ называется *ковариантной производной* вектора a^μ .

Используя аналогичные рассуждения, для ковектора получим

$$b_\nu|_{x_0+\xi} = b_\nu(x_0) + \xi^\alpha \tilde{\Gamma}_{\alpha\nu}^\mu b_\mu.$$

Скалярное произведение векторов оно не должно меняться при параллельном переносе (как любой скаляр), поэтому

$$b_\nu|_{x_0+\xi} a^\nu|_{x_0+\xi} = b_\nu a^\nu.$$

Отсюда имеем (в первом порядке по ξ):

$$\xi^\alpha b_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\nu a^\mu = \xi^\alpha a^\nu \tilde{\Gamma}_{\alpha\nu}^\mu b_\mu = \xi^\alpha a^\mu \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu}^\nu b_\nu.$$

Но тогда, в силу произвольности ξ (ξ мало, но произвольно):

$$\Gamma_{\alpha\mu}^\nu b_\nu a^\mu = \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu}^\nu b_\nu a^\mu.$$

Наконец, в силу произвольности a^μ и b_ν , получим

$$\Gamma_{\alpha\mu}^\nu = \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu}^\nu.$$

Таким образом, мы получили выражения ковариантных производных (которые, по самому своему смыслу, являются тензорами) контр- и ко- векторов:

$$D_\alpha a^\mu = \partial_\alpha a^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu a^\nu;$$

$$D_\alpha b_\mu = \partial_\alpha b_\mu - \Gamma_{\alpha\mu}^\nu b_\nu.$$

Заметим, что сами компоненты связности, при этом, тензорами не являются.

Для скаляра φ ковариантная производная совпадает с обычной частной производной, так как скаляр не зависит от системы координат и при параллельном переносе не требует учета геометрии пространства:

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi$$

Несложно теперь записать закон преобразования произвольного тензора:

$$T_{\dots}(x + \xi) - T_{\dots}(x)|_{x+\xi} \equiv \xi^\alpha D_\alpha T_{\dots};$$

$$D_\gamma T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \partial_\gamma T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} + \Gamma_{\gamma\delta}^{\mu_1} T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\delta \mu_2 \dots \mu_n} + \dots + \Gamma_{\gamma\delta}^{\mu_n} T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_{n-1} \delta} -$$

$$- \Gamma_{\gamma\nu_1}^\delta T_{\delta \nu_2 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} - \dots - \Gamma_{\gamma\nu_m}^\delta T_{\nu_1 \dots \nu_{m-1} \delta}^{\mu_1 \dots \mu_n}$$

Легко проверить, что для ковариантной производной тензорного произведения векторов выполняется правило Лейбница:

$$D_\alpha (a^\mu b^\nu) = (D_\alpha a^\mu) b^\nu + a^\mu (D_\alpha b^\nu).$$

§5 Закон преобразования связности

Перепишем формулу параллельного переноса контрвектора следующим образом:

$$a^\mu(x)|_{x+\xi} = A_\nu^\mu(x, \xi) a^\nu(x),$$

$$\text{где } A_\nu^\mu(x, \xi) = \delta_\nu^\mu - \xi^\delta \Gamma_{\delta\nu}^\mu(x).$$

Заметим, что слева в выражении стоит вектор, определенный в точке $x + \xi$, следовательно, и вектор, стоящий справа, должен преобразовываться по индексу μ с помощью матрицы Якоби $\frac{\partial x'}{\partial x}$ в точке $x + \xi$. В то же время по индексу ν контрвектор $a^\nu(x)$ преобразуется в точке x , а значит и объект A_ν^μ должен по этому индексу преобразовываться в точке x , но уже как ковектор. То есть имеем:

$$A_\nu'^\mu(x', \xi') = \frac{\partial x'^\mu(x + \xi)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta(x)}{\partial x'^\nu} A_\beta^\alpha(x, \xi).$$

Тогда:

$$\delta_\nu^\mu - \xi'^\gamma \Gamma_{\gamma\nu}'^\mu(x') = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} \xi^\sigma \right) \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} A_\beta^\alpha(x, \xi).$$

Замечая, что

$$\xi'^\gamma = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\omega} \xi^\omega$$

и подставляя $A_\beta^\alpha(x, \xi) = \delta_\beta^\alpha - \xi^\delta \Gamma_{\delta\beta}^\alpha(x)$, при том сохраняя первый порядок малости по ξ , получим

$$-\xi^\omega \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\omega} \Gamma_{\gamma\nu}'^\mu(x') = -\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \xi^\delta \Gamma_{\delta\beta}^\alpha(x) + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} \xi^\sigma \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}.$$

Переписываем, переобозначая немые индексы:

$$-\xi^\omega \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\omega} \Gamma_{\gamma\nu}'^\mu(x') = -\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \xi^\omega \Gamma_{\omega\beta}^\alpha(x) + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\omega} \xi^\omega \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}.$$

В силу произвольности ξ

$$\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\omega} \Gamma_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\omega\beta}^\alpha - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\omega} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}.$$

Домножим на $\frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\sigma}$ и окончательно получим закон преобразования связности:

$$\Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\omega\beta}^\alpha - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\omega} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\sigma},$$

Откуда видно, что Γ – не тензор из-за второго слагаемого.

Заметим, что второе слагаемое симметрично по ν и σ . Составим так называемый *тензор кручения*:

$$S_{\sigma\nu}^\mu = \Gamma_{\sigma\nu}^\mu - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu.$$

В рамках римановой геометрии и ОТО постулируется, что кручение отсутствует ($S_{\sigma\nu}^\mu = 0$), в таком случае $\Gamma_{\sigma\nu}^\mu = \Gamma_{\nu\sigma}^\mu$. В таком случае величины $\Gamma_{\sigma\nu}^\mu$ называются *символами Кристоффеля первого рода*.

Рассмотрим скалярное произведение $a^\mu(x)b^\nu(x)g_{\mu\nu}(x)$, при параллельном переносе оно не должно меняться:

$$a^\mu(x)b^\nu(x)g_{\mu\nu}(x) = a^\mu(x)|_{x+\xi}b^\nu(x)|_{x+\xi}g_{\mu\nu}(x)|_{x+\xi}.$$

Но в то же время скалярное произведение векторов $a^\mu(x)|_{x+\xi}$ и $b^\nu(x)|_{x+\xi}$ может быть записано через метрику в точке $x + \xi$:

$$a^\mu(x)b^\nu(x)g_{\mu\nu}(x) = a^\mu(x)|_{x+\xi}b^\nu(x)|_{x+\xi}g_{\mu\nu}(x + \xi).$$

Тогда

$$a^\mu(x)|_{x+\xi}b^\nu(x)|_{x+\xi}g_{\mu\nu}(x + \xi) = a^\mu(x)|_{x+\xi}b^\nu(x)|_{x+\xi}g_{\mu\nu}(x)|_{x+\xi}.$$

И, в силу произвольности a^μ и b^ν :

$$\xi^\alpha D_\alpha g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x + \xi) - g_{\mu\nu}(x)|_{x+\xi} = 0,$$

то есть $D_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Напишем это выражение в явном виде:

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma g_{\mu\sigma} = 0$$

или

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu,\alpha\mu} + \Gamma_{\mu,\alpha\nu},$$

где $\Gamma_{\nu,\alpha\mu} = \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma g_{\sigma\nu}$ – символы Кристоффеля второго рода.

Тогда

$$\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} = \Gamma_{\alpha,\mu\nu} + \Gamma_{\nu,\mu\alpha} + \Gamma_{\alpha,\nu\mu} + \Gamma_{\mu,\nu\alpha} - \Gamma_{\nu,\alpha\mu} - \Gamma_{\mu,\alpha\nu} = 2\Gamma_{\alpha,\mu\nu}.$$

Отсюда

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} (\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu})$$

$\{+K_{\mu\nu}^\beta\}$, если $S \neq 0$, где $K_{\mu\nu}^\beta$ – тензор кривизны (явное выражение для него мы выписывать не будем).

§6 Тензор Римана-Кристоффеля

Для удобства введем новое понятие – антисимметризатор:

$$[a_\mu b_\nu]_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu$$

со свойствами:

1) $[A_{\mu\nu} B^\nu]_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} B^\nu{}_\alpha - A_{\nu\mu} B^\nu{}_\alpha;$

2) $[A_{\mu\nu\alpha}]_{\mu\nu\alpha} = A_{\mu\nu\alpha} - A_{\nu\mu\alpha} + \dots$, где суммирование производится по всем перестановкам по индексам $\mu\nu\alpha$, при том нечетные перестановки берутся со знаком минус;

3) Если $A_{\mu\nu}$ – антисимметричный тензор, то

$$[A_{\mu\nu}]_{\mu\nu} = 2A_{\mu\nu};$$

4) Если $B_{\mu\nu}$ – симметричный тензор, то

$$[B_{\mu\nu}]_{\mu\nu} = 0.$$

Рассмотрим антисимметризатор от двух ковариантных производных скалярного поля:

$$[D_\mu D_\nu]_{\mu\nu} \varphi = D_\mu \partial_\nu \varphi - D_\nu \partial_\mu \varphi,$$

так как $D_\mu \varphi \equiv \partial_\mu \varphi$.

Тогда

$$D_\mu \partial_\nu \varphi = \partial_\mu \partial_\nu \varphi - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha \varphi$$

Получим ($\Gamma_{\nu\mu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$):

$$D_\mu \partial_\nu \varphi - D_\nu \partial_\mu \varphi = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \partial_\alpha \varphi - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha \varphi = 0.$$

То есть

$$[D_\mu D_\nu]_{\mu\nu} \varphi = 0.$$

Рассмотрим теперь другую конструкцию:

$$[D_\mu D_\nu]_{\mu\nu} a^\alpha = [D_\mu D_\nu a^\alpha]_{\mu\nu} = \left[\partial_\mu D_\nu a^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha D_\nu a^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\beta D_\beta a^\alpha \right]_{\mu\nu}.$$

Заметим, что $\left[\Gamma_{\mu\nu}^\beta D_\beta a^\alpha \right]_{\mu\nu} = 0$, так как $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ симметрично по $\mu\nu$. Поэтому

$$[D_\mu D_\nu]_{\mu\nu} a^\alpha = \left[\partial_\mu (\partial_\nu a^\alpha + \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha a^\gamma) + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha (\partial_\nu a^\beta + \Gamma_{\nu\gamma}^\beta a^\gamma) \right]_{\mu\nu}.$$

Так как $[\partial_\mu \partial_\nu a^\alpha]_{\mu\nu} = 0$:

$$[D_\mu D_\nu]_{\mu\nu} a^\alpha = \left[(\partial_\mu \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha) a^\gamma + \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha (\partial_\mu a^\gamma) + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha (\partial_\nu a^\beta) + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\gamma}^\beta a^\gamma \right]_{\mu\nu}.$$

Но $[\Gamma_{\nu\gamma}^\alpha (\partial_\mu a^\gamma) + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha (\partial_\nu a^\beta)]_{\mu\nu} = 0$, значит:

$$[D_\mu D_\nu]_{\mu\nu} a^\alpha = \left[\partial_\mu \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\gamma}^\beta \right]_{\mu\nu} a^\gamma = R^\alpha_{\gamma\mu\nu} a^\gamma,$$

где $R^\alpha_{\gamma\mu\nu} = \left[\partial_\mu \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\gamma}^\beta \right]_{\mu\nu}$ – тензор Римана-Кристоффеля или тензор кривизны.

Заметим сразу одно из свойств этого важнейшего тензора, непосредственно следующее из определения:

$$R^\alpha_{\gamma\mu\nu} = -R^\alpha_{\gamma\nu\mu}.$$

Читателю могло показаться странным введение такого, на первый взгляд, «искусственного» объекта. Однако, именно с помощью тензора кривизны в рамках общей теории относительности конструируется действие Эйнштейна-Гильберта, откуда впоследствии выводятся уравнения эйнштейна. У тензора кривизны есть и чисто геометрические свойства, которые связаны с параллельным переносом векторов по бесконечно малым замкнутым контурам (см. [1], §91), на которых мы останавливаться не будем, так как они несущественны в рамках нашего курса.

§7 Тожество Риччи

Докажем следующее тождество (тождество Риччи):

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} + R^{\mu}_{\alpha\beta\nu} + R^{\mu}_{\beta\nu\alpha} = 0.$$

Для начала заметим, что если $A_{\alpha\beta\gamma}$ симметричен по последним двум индексам ($A_{\alpha\beta\gamma} = A_{\alpha\gamma\beta}$), то $[A_{\alpha\beta\gamma}]_{\alpha\beta\gamma} = 0$ (это легко проверяется непосредственно).

Так как тензор Римана-Кристоффеля антисимметричен по последним 2 индексам, имеем:

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} - R^{\mu}_{\nu\beta\alpha})$$

Тогда тождество Риччи можно переписать в виде

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} + R^{\mu}_{\alpha\beta\nu} + R^{\mu}_{\beta\nu\alpha} = \frac{1}{2} [R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}]_{\nu\alpha\beta}$$

или

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} + R^{\mu}_{\alpha\beta\nu} + R^{\mu}_{\beta\nu\alpha} = \frac{1}{2} \left[[\partial_{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\beta\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}]_{\alpha\beta} \right]_{\nu\alpha\beta}.$$

Но конструкция под антисимметризатором по $\nu\alpha\beta$ симметрична по β и ν , откуда ясно, что

$$[\partial_{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\beta\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}]_{\nu\alpha\beta} = 0,$$

а значит, и

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} + R^{\mu}_{\alpha\beta\nu} + R^{\mu}_{\beta\nu\alpha} = 0.$$

§8 Дифференциальное тождество Бианки

Докажем теперь другое важное тождество:

$$D_\gamma R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} + D_\alpha R^\mu{}_{\nu\beta\gamma} + D_\beta R^\mu{}_{\nu\gamma\alpha} = 0$$

Как и в прошлом параграфе, переписываем выражение через антисимметризатор:

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \left[\partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} \right]_{\alpha\beta}$$

$$D_\gamma R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} + D_\alpha R^\mu{}_{\nu\beta\gamma} + D_\beta R^\mu{}_{\nu\gamma\alpha} = \frac{1}{2} \left[D_\gamma R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} \right]_{\gamma\alpha\beta}.$$

Под знаком антисимметризатора стоит выражение

$$\begin{aligned} D_\gamma R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} &= \partial_\gamma \left[\partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} \right]_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu_{\gamma\rho} \left[\partial_\alpha \Gamma^\rho_{\beta\nu} + \Gamma^\rho_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} \right]_{\alpha\beta} - \\ &- \Gamma^\rho_{\gamma\nu} \left[\partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\rho} + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\rho} \right]_{\alpha\beta} - \Gamma^\rho_{\gamma\alpha} R^\mu{}_{\nu\rho\beta} - \Gamma^\rho_{\gamma\beta} R^\mu{}_{\nu\alpha\rho}. \end{aligned}$$

Заметим сразу, что $\left[-\Gamma^\rho_{\gamma\alpha} R^\mu{}_{\nu\rho\beta} - \Gamma^\rho_{\gamma\beta} R^\mu{}_{\nu\alpha\rho} \right]_{\gamma\alpha\beta} = 0$. Поэтому можно написать:

$$\begin{aligned} &\left[D_\gamma R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} \right]_{\gamma\alpha\beta} = \\ &= \left[\partial_\gamma \left[\partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} \right]_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu_{\gamma\rho} \left[\partial_\alpha \Gamma^\rho_{\beta\nu} + \Gamma^\rho_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} \right]_{\alpha\beta} - \Gamma^\rho_{\gamma\nu} \left[\partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\rho} + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\rho} \right]_{\alpha\beta} \right]_{\gamma\alpha\beta} = \\ &= 2 \left[\partial_\gamma \left(\partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} \right) + \Gamma^\mu_{\gamma\rho} \left(\partial_\alpha \Gamma^\rho_{\beta\nu} + \Gamma^\rho_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} \right) - \Gamma^\rho_{\gamma\nu} \left(\partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\rho} + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\rho} \right) \right]_{\gamma\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Видим, что $\left[\partial_\gamma \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\nu} \right]_{\gamma\alpha\beta} = 0$ и $\left[\Gamma^\mu_{\gamma\rho} \Gamma^\rho_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\sigma_{\gamma\nu} \Gamma^\mu_{\alpha\rho} \Gamma^\rho_{\beta\sigma} \right]_{\gamma\alpha\beta} = 0$, так как при всевозможных перестановках оба слагаемых сократятся (в обоих слагаемых присутствуют перестановки $\gamma\alpha\beta$ одинаковой четности).

Поэтому

$$\begin{aligned} & \left[D_\gamma R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} \right]_{\gamma\alpha\beta} = \\ & = 2 \left[(\partial_\gamma \Gamma^\mu_{\alpha\sigma}) \Gamma^\sigma_{\beta\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} (\partial_\gamma \Gamma^\sigma_{\beta\nu}) + \Gamma^\mu_{\gamma\rho} (\partial_\alpha \Gamma^\rho_{\beta\nu}) - \Gamma^\rho_{\gamma\nu} (\partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\rho}) \right]_{\gamma\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Но и $\left[\Gamma^\mu_{\alpha\sigma} (\partial_\gamma \Gamma^\sigma_{\beta\nu}) + \Gamma^\mu_{\gamma\rho} (\partial_\alpha \Gamma^\rho_{\beta\nu}) \right]_{\gamma\alpha\beta} = 0$, так как в обоих слагаемых присутствуют перестановки $\gamma\alpha\beta$ разной четности.

Наконец, $\left[(\partial_\gamma \Gamma^\mu_{\alpha\sigma}) \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\rho_{\gamma\nu} (\partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\rho}) \right]_{\gamma\alpha\beta} = \left[(\partial_\gamma \Gamma^\mu_{\alpha\sigma}) \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - (\partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\rho}) \Gamma^\rho_{\gamma\nu} \right]_{\gamma\alpha\beta} = 0$ по тем же причинам.

§9 Свойства тензора Римана-Кристоффеля

Опустим верхний индекс тензора кривизны для удобства изучения его свойств:

$$\begin{aligned} g_{\gamma\mu} R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} &= R_{\gamma\nu\alpha\beta} = g_{\gamma\mu} \left[\partial_{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\beta\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} \right]_{\alpha\beta} = \left[g_{\gamma\mu} \left(\partial_{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\beta\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} \right) \right]_{\alpha\beta} = \\ &= \left[D_{\alpha} \left(g_{\gamma\mu} \Gamma^{\mu}_{\beta\nu} \right) + g_{\gamma\mu} (\dots) \right]_{\alpha\beta} = \left[\partial_{\alpha} \left(g_{\gamma\mu} \Gamma^{\mu}_{\beta\nu} \right) - \Gamma^{\rho}_{\alpha\gamma} g_{\rho\mu} \Gamma^{\mu}_{\beta\nu} - (\dots) + (\dots) \right]_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Где (...) – слагаемые, получающиеся при составлении ковариантной производной $D_{\alpha} (g_{\gamma\mu} \Gamma^{\mu}_{\beta\nu})$, а затем при ее раскрытии, упражнение – убедиться, что в последнем выражении эти слагаемые сокращаются.

И тогда

$$R_{\gamma\nu\alpha\beta} = \left[\frac{1}{2} \partial_{\alpha} (\partial_{\beta} g_{\nu\gamma} + \partial_{\nu} g_{\beta\gamma} - \partial_{\gamma} g_{\beta\nu}) - \Gamma^{\rho}_{\alpha\gamma} g_{\rho\mu} \Gamma^{\mu}_{\beta\nu} \right]_{\alpha\beta}$$

Заметим, что $[\partial_{\alpha} \partial_{\beta} g_{\nu\gamma}]_{\alpha\beta} = 0$. Тогда, по определению антисимметризатора получим:

$$R_{\gamma\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} \partial_{\nu} g_{\beta\gamma} - \partial_{\beta} \partial_{\nu} g_{\alpha\gamma} - \partial_{\alpha} \partial_{\gamma} g_{\beta\nu} + \partial_{\beta} \partial_{\gamma} g_{\alpha\nu}) - \Gamma^{\rho}_{\alpha\gamma} g_{\rho\mu} \Gamma^{\mu}_{\beta\nu} + \Gamma^{\rho}_{\beta\gamma} g_{\rho\mu} \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu},$$

откуда очевидны следующие свойства тензора кривизны:

- 1) $R^{\alpha}{}_{\gamma\mu\nu} = -R^{\alpha}{}_{\gamma\nu\mu}$;
- 2) $R_{\gamma\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\gamma\nu}$;
- 3) $R_{\alpha\beta\gamma\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\gamma} = -R_{\nu\gamma\alpha\beta}$.

§10 Тензор Эйнштейна

Свернем $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$ по первому и третьему индексу, чтобы получить так называемый *тензор Риччи*:

$$R_{\nu\beta} = R^{\mu}_{\nu\mu\beta}.$$

Свертка тензора Риччи с метрикой по оставшимся индексам даст *скалярную кривизну* R :

$$R = R_{\nu\beta} g^{\nu\beta}.$$

Наконец, введем тензор Эйнштейна:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu},$$

именно он входит в знаменитые уравнения гравитационного поля.

Напоследок, запишем тождество Бианки:

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (D_{\gamma} R_{\mu\nu\alpha\beta} + D_{\alpha} R_{\mu\nu\beta\gamma} + D_{\beta} R_{\mu\nu\gamma\alpha}) = D_{\gamma} R - D_{\alpha} R^{\alpha}_{\gamma} - D_{\alpha} R^{\alpha}_{\gamma} = \\ &= D_{\alpha} (\delta^{\alpha}_{\gamma} R - 2 R^{\alpha}_{\gamma}). \end{aligned}$$

Тогда

$$D_{\alpha} (g^{\alpha\gamma} R - 2 R^{\alpha\gamma}) = 0,$$

Откуда следует, что ковариантная 4-дивергенция тензора Эйнштейна равна нулю:

$$D_{\alpha} G^{\alpha\gamma} \equiv 0.$$

Литература

К главе I:

1. *Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной.* М.: Наука, 1974. – 480 с.

К главе II:

1. *Эльсгольц Л. Э., Вариационное исчисление.* М.: ЛЕНАНД, 2023. – 208 с.

К главе III:

1. *Альберт Мессиа, Квантовая механика, том I.* М.: Наука, 1978, 480 с.
2. *Леонард Сасскинд, Арт Фридман. Квантовая механика. Теоретический минимум.* СПб.: Питер, 2017. – 400 с.

К главе IV:

1. *Рубаков В. А., Классические калибровочные поля. Ч. 1: Бозонные теории.* М.: ЛЕНАНД, 2024. – 344 с.
2. *М. Хамермеш, Теория групп и ее применение к физическим проблемам.* М.: МИР, 1966. – 587 с.
3. *Исаев А. П., Рубаков В. А., Теория групп и симметрий: Конечные группы. Группы и алгебры Ли.* М.: ЛЕНАНД, 2022. – 504 с.

К главе V:

1. *Петрашень М. И., Трифонов Е. Д., Применение теории групп в квантовой механике.* М.: ЛЕНАНД, 2019. – 304с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика (нерелятивистская теория).* М.: Физматгиз, 1963. – 704 с.

К главе VI:

1. *Лурье А. И., Теория упругости.* М.: Наука, 1970. – 940 с.

К главе VII:

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля.* М.: Наука, 1973. – 504 с.
2. *Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения.* М.: ЛЕНАНД, 2015. – 576 с.
3. *Лурье А. И., Теория упругости.* М.: Наука, 1970. – 940 с.