ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Учебно-методические материалы

(Лекции №№1-13)

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Разработали:

доцент кафедры физики Васильев А. Э.

доцент кафедры физики Леонова Н. А.

Санкт- Петербург

2025

Аннотация

Учебно-методическое пособие подготовлено в соответствии с Рабочей Программой Дисциплины “ФИЗИКА” для студентов высших учебных заведений. Материал изложен в виде девяти лекций из двух семестрового курса общей физики для инженерно-технических специальностей. В каждой лекции приводятся необходимый теоретический материал- рассмотрены основные вопросы механики. Изложены наиболее важные достижения в физике и даны разъяснения основных законов, явлений и понятий.

ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Лекция 1

Математика для физики: ключевые понятия

Математический аппарат является не вспомогательной дисциплиной, а обязательным и основополагающим компонентом формирования компетенций будущего специалиста. Необходимость углублённого изучения математических дисциплин обусловлена следующими объективными факторами:

Математика предоставляет универсальный формализованный язык для точной формулировки физических законов, теорий и моделей, исключающий двусмысленность и субъективность трактовок.

Решение прикладных задач в области физики, от квантовой механики до динамики сплошных сред, напрямую зависит от владения методами математического анализа, линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений и теории вероятностей.

Математическое моделирование является основным инструментом для анализа физических процессов, их симуляции и получения количественных прогнозов, что составляет суть практической деятельности исследователя и инженера.

Рассмотрим основные математические понятия.

Скалярные и векторные величины

Почти все физические величины имеют единицы измерения и их можно разделить на два типа:

1) скалярные:

путь – S, [м]; время - t, [с]; масса - m, [кг]; момент инерции - J, [$кг \cdot м^2$]; работа - A, [Дж]; мощность - N, [Вт]; энергия – W [Дж]; потенциал электрического поля- φ, [В].

2) векторные:

радиус-вектор - $\vec{r}$, [м]; перемещение - $\vec{s}$, [м]; скорость - $\vec{\upsilon}$, [$\frac{м}{с}$]; ускорение - $\vec{a}$,[$\frac{м}{с^2}$]; импульс - $\vec{p}$,[$кг \cdot \frac{м}{с}$]; сила - $\vec{F}$, [Н]; момент сил - $\vec{M}$, [$Н \cdot м$]; момент импульса$\vec{L}$ $[\text{кг} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}}]$; напряженность электрического поля - $\vec{E}, \left[\frac{\text{В}}{\text{м}}\right]$; вектор магнитной индукции - $\vec{B}$, [Тл].

Коэффициент трения, коэффициент полезного действия – скалярные величины, не обладающие единицами измерения. Все скалярные или векторные величины в курсе физики можно складывать и вычитать при условии одинаковых единиц измерения, используя правила арифметики.

Пример 1а

Лодка движется перпендикулярно течению реки с собственной скоростью $4\frac{км}{ч}$. Скорость течения реки $1\frac{км}{ч}$. Определите скорость лодки относительно берега.

Пример 1б.

Скорость лодки, движущейся перпендикулярно течению реки, $5\frac{км}{ч}$. Определите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки $2\frac{км}{ч}$.

Для решения обоих задач необходимо сделать чертеж, изобразив векторами скорости течения реки и движения лодки.

Пример1а.

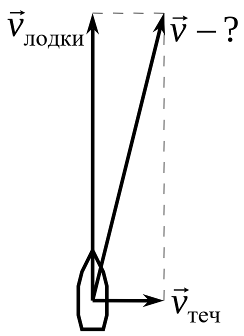


Рис 1а.

Пример 1б.

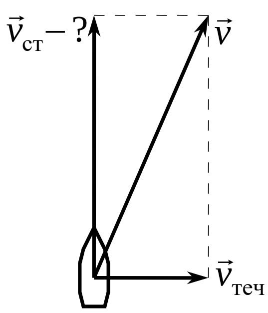


Рис. 2б.

Производная

Производная имеет физический смысл — это скорость. Однако скоростью характеризуется не только быстрота движения, но и быстрота протекания любого процесса. Производная позволяет определить:

- скорость при неравномерном движении;
- ускорение;
- силу, действующую на тело,
- силу электрического тока,
- электродвижущую силу электромагнитной индукции.

Интегралы

Использование интегралов имеет важное значение как в высшей математике, так и в физике. В курсе математики определенный интеграл используется для нахождения площади фигуры, длины дуги, объема тела по площадям параллельных сечений, объема тела вращения.

В курсе физики с помощью интеграла определяется работа переменной силы, путь (перемещение), масса тела, момент инерции цилиндра, диска, шара, координаты центра тяжести.

Пример 2.

Ракета, масса которой *M,* в начальный момент времени равна 300 г, начинает выбрасывать продукты сгорания с относительной скоростью $u = 200\frac{м}{c}$. Расход горючего $\mu = 100\frac{г}{c}$. Пренебрегая сопротивлением воздуха и внешним силовым полем, определите:

1) за какой промежуток времени скорость ракеты станет равной $\upsilon_1 = 50\frac{м}{c}$

2) скорость υ_2, которую достигнет ракета, если масса заряда $m_0 = 0{,}2$ кг.

Решение.

Уравнение движения ракеты можно записать $m \cdot a = F_p$. Учитываем изменение массы в результате сгорания топлива $m = M - \mu \cdot t$. Реактивную силу можно определить $F_p = \mu \cdot u$. Выразим ускорение движения $a = \frac{dv}{dt}$**.** Получим уравнение движения в виде $(M - \mu \cdot t) \cdot \frac{dv}{dt} = \mu \cdot u$. Решим полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, и запишем его решение, удовлетворяющее начальным данным $t = 0$, $\upsilon(0) = 0$, в виде $v(t) = \mu \cdot u \int_0^t \frac{dt}{M - \mu \cdot t} = u \cdot \ln \frac{M}{M - \mu \cdot t}$.Произведем математические преобразования и выразим скорость движения $v_1 = u \cdot \ln \frac{M}{M - \mu \cdot t_1}$, $\ln \frac{M}{M - \mu \cdot t_1} = \frac{v_1}{u}$,

$\frac{M}{M - \mu \cdot t_1} = e^{\frac{v_1}{u}}$. Тогда, промежуток времени t_1, за который скорость ракеты станет равной $v_1 = 50 \frac{м}{с}$, можно подсчитать как $t_1 = \frac{M}{\mu}\left(1 - e^{-\frac{v_1}{u}}\right)$. Скорость v_2, которой достигнет ракета, если масса заряда $m_0 = 0{,}2$ кг, будет равна

$$v_2 = u \cdot \ln \frac{M}{M - m_0}.$$

Ответ: $t_1 = 0{,}66 \frac{м}{с}$**,** $\upsilon_2 = 220 \frac{м}{с}$**.**

Пример 3.

Некоторый газ массой 1 кг при температуре $T = 300$ К находится под давлением $p_1 = 0{,}5$ МПа. В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в два раза. Работа сил давления газа против сжатия $A = -432$ кДж. Определите молярную массу газа, установите его название.

Решение.

Элементарная работа, затраченная на сжатие, определяется следующим образом: $dA = p \cdot dV$, где давление можно выразить из уравнения Менделеева – Клапейрона: $p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$. Разделяя переменные, получим

$dA = \frac{m}{M \cdot V} \cdot R \cdot T \cdot dV$. Найдем величину работы: $A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m \cdot R \cdot T}{M} \cdot \frac{dV}{V} = \frac{m \cdot R \cdot T}{M} \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$. Выразим отношение объемов из закона Бойля – Мариотта: $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$. Тогда формула для вычисления работы газа будет иметь вид $A = \frac{m \cdot R \cdot T}{M} \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$. Получим расчетную формулу для определения молярной массы газа $M = \frac{m \cdot R \cdot T}{A} \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$. Подставим исходные данные и проведем вычисления $M = \frac{1кг \cdot 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К} \cdot 300К}{-4{,}32 \cdot 10^5 \, Дж} \cdot ln \frac{1}{2} = 4 \cdot 10^{-3} \, \frac{кг}{моль}$.

Ответ: $M = 4 \cdot 10^{-3} \, \frac{кг}{моль}$, гелий.

Дифференциальные уравнения

Многие физические законы описываются дифференциальными уравнениями, то есть такими уравнениями, в которых присутствуют производные искомых функций. Например, часто в задачах по физике встречаем дифференциальные уравнения следующих типов.

1) дифференциальное уравнение первого порядка:

- уравнение переноса энергии в форме теплоты – закон Фурье

$j_E = -\lambda \frac{dT}{dx}$, где j_E - плотность теплового потока, λ - теплопроводность, T - термодинамическая температура, x - перемещение;

- уравнение переноса массы – закон Фика

$j_m = -D \frac{d\rho}{dx}$, где j_m - плотность потока массы, D - коэффициент диффузии, ρ - плотность вещества, x - перемещение;

-уравнение вязкости (внутреннего трения)

$j_p = -\eta \dfrac{d\upsilon}{dx}$, где j_p - плотность потока импульса, η - динамическая вязкость, υ - скорость, x - перемещение

- закон изменения тока в электрической цепи, содержащей катушку при выключении источника

$I \cdot R = -L \cdot \dfrac{dI}{dt}$, где I - электрический ток, R - электрическое сопротивление, L - индуктивность катушки;

- закон изменения тока в электрической цепи, содержащей катушку при включении источника,

$I \cdot R = \varepsilon - L \cdot \dfrac{dI}{dt}$, где ε - электродвижущая сила, I - электрический ток, R - электрическое сопротивление, L - индуктивность катушки;

- закон радиоактивного распада

$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$, где N - число ядер, λ - постоянная радиоактивного распада, t - время;

2) однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

- уравнение свободных затухающих механических колебаний пружинного маятника

$x'' + \dfrac{r}{m} \cdot x' + \dfrac{k}{m} \cdot x = 0$, где m - масса, r - коэффициент сопротивления, k - коэффициент жесткости, x - смещение;

- уравнение свободных затухающих колебаний в электрическом колебательном контуре

$Q'' + \dfrac{R}{L} \cdot Q' + \dfrac{1}{LC} \cdot Q = 0$, где L - индуктивность катушки, R - электрическое сопротивление, C - емкость конденсатора;

3) неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

- для вынужденных механических колебаний пружинного маятника

$x'' + \dfrac{r}{m} \cdot x' + \dfrac{k}{m} \cdot x = \dfrac{F_0}{m} \cdot cos\,\omega t$, где F_0 - внешняя вынуждающая сила,

- для вынужденных колебаний в электрическом колебательном контуре

$Q'' + \frac{R}{L} \cdot Q' + \frac{1}{LC} \cdot Q = \frac{U_m}{L} \cdot \cos \omega t$, где U_m - максимальное электрическое напряжение в цепи.

Матрицы

Матрицы широко применяются в математике и физике для компактной записи систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений.

Пример 4

В установке (рис.2) угол наклонной плоскости с горизонтом равен 20^0, массы тел $m_1 = 200г$ (тело на наклонной плоскости) и $m_2 = 150г$ (тело подвешено на нити). Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая силами трения, определите ускорение, с которым будут двигаться тела, если второе тело опускается.

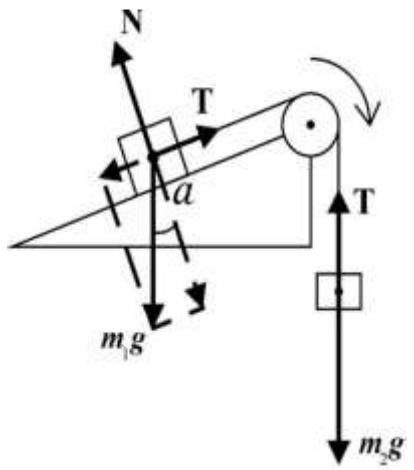


Рис. 2.

Решение:

На рисунке изобразим силы, действующие на тела, и составим систему уравнений относительно неизвестных: ускорения a и силы натяжения нити T.

$$\begin{cases} m_1 \cdot a = T - m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha, \\ m_2 \cdot a = m_2 \cdot g - T. \end{cases}$$

Найдем матрицу коэффициентов и столбец правых частей данной системы уравнений. Для этого сделаем следующие преобразования

$\begin{cases} m_1 \cdot a - T = A, \\ m_2 \cdot a + T = B. \end{cases}$ где $A = -m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha = 0.68$ и $B = m_2 \cdot g = 0{,}15$. Применим теорему Крамера. Находим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} m_1 & -1 \\ m_2 & 1 \end{vmatrix} = m_1 + m_2 \neq 0$, тогда искомое ускорение равно. $a = \dfrac{\begin{vmatrix} A & -1 \\ B & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \dfrac{A+B}{m_1+m_2} = 2.7\,\dfrac{м}{с^2}$.

Ответ: $a = 2{,}7\,\dfrac{м}{с^2}$.

Пример 5.

Элементы ε_1 и ε_2 включены в цепь, как показано на рисунке 37. Определить силы токов, текущих в сопротивлениях R_2 и R_3, если $\varepsilon_1 = 10 В$, $\varepsilon_2 = 4 В$, $R_1 = R_4 = 2$ *Ом*, $R_2 = R_3 = 4$ *Ом*. Сопротивлением элементов пренебречь (рис.3).

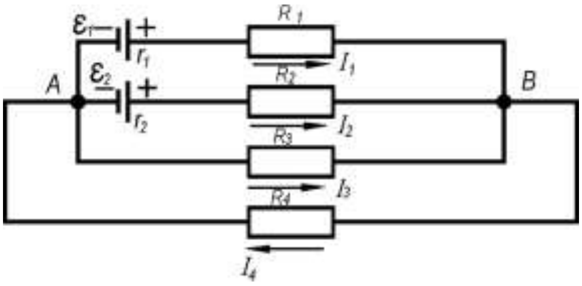


Рис. 3.

Решение:

Силы токов в разветвленной цепи можно определить по правилам Кирхгофа. Для этого выполним следующий алгоритм действий:

1) на электрической схеме произвольно расставим направление токов.

2) при составлении уравнений будем обходить контуры по часовой стрелке.

3) составим уравнения для контуров по II правилу Кирхгофа:

для контура AR_1BR_2A: $I_1R_1 - I_2R_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ (1)

для контура AR_1BR_3A: $I_1R_1 - I_3R_3 = \varepsilon_1$ (2)

для контура AR_3BR_4A: $I_3R_3 + I_4R_4 = 0$ (3)

4) составим уравнение по I правилу Кирхгофа для узла *B*:

$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$ (4)

Подставим в уравнения (1) – (4) числовые значения сопротивлений и ЭДС, получим систему уравнений.

$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$,

$2 \cdot I_1 - 4 \cdot I_2 = 6$,

$2 \cdot I_2 - 4 \cdot I_3 = 10$,

$4 \cdot I_3 + 2 \cdot I_4 = 0$.

Система имеет 4 неизвестных (I_1, I_2, I_3, I_4). Поскольку в задаче требуется найти только два тока I_2 и I_3, то удобнее решить эту систему уравнений с помощью определителей. С этой целью перепишем систему уравнений в виде, удобном для составления определителей:

$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$,

$2 \cdot I_1 - 4 \cdot I_2 + 0 + 0 = 6$,

$2 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 - 4 \cdot I_3 + 0 = 10$,

$0 + 0 + 4 \cdot I_3 + 2 \cdot I_4 = 0$.

Искомое значение токов найдем из выражений по правилу Крамера:

$I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta}$; $I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta}$, где Δ - главный определитель системы;

Δt_0, ΔI_2, ΔI_3 – побочные определители, полученные заменой соответствующих столбцов главного определителя, столбцом свободных членов системы уравнений. Составим главный определитель системы и вычислим путем разложения по элементам 4 строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 96$$

Побочные определители тоже вычислим аналогично:

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 10 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -96$$

Откуда получим:

$$I_2 = \frac{0}{96} = 0; \quad I_3 = \frac{-96}{96} = -1A.$$

Знак «минус» у числового значения тока I_3 свидетельствует о том, что фактическое направление тока I_3 противоположно выбранному, т. е., ток I_3 течет от узла B к узлу A.

Таким образом, математика представляет собой неотъемлемый инструментарий для осуществления профессиональной деятельности. Качество её освоения напрямую определяет успешность освоению специальных дисциплин, выполнению курсовых и выпускных квалификационных работ, а в дальнейшем – к решению комплексных задач на производстве и в научно-исследовательской деятельности.

Литература

1. Бортковская, М.Р.. Математика в задачах по физике: учебное пособие / М. Р. Бортковская, Н. А. Леонова; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Физико-механический институт, Кафедра высшей математики, Кафедра физики. — Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023

Лекция 2. Кинематика (часть1)

1.Введение

2. Системы отсчета.

3. Кинематика материальной точки

1.Введение

Механика представляет собой фундаментальный раздел физики, изучающий механическое движение материальных тел и происходящие при этом взаимодействия между ними, а также условия равновесия тел под действием сил. Это одна из древнейших и наиболее разработанных наук, составляющая основу для понимания широкого круга явлений – от движения планет и космических аппаратов до деформаций конструкций и течения жидкостей.

Механика является основой для многих инженерных дисциплин (сопротивление материалов, теория механизмов и машин, гидродинамика, аэромеханика), баллистики, небесной механики, теории упругости и пластичности. Понимание ее принципов и владение ее математическим аппаратом абсолютно необходимо для решения широкого спектра задач в науке и технике. Последующее изучение физики (термодинамики, электродинамики, квантовой механики) опирается на фундаментальные понятия и законы, введенные в механике.

Классическая механика, которой будет посвящена половина этого семестра, справедлива не всегда и имеет границы применимости.

Механика

классическая	**релятивистская**
время абсолютно, $V \ll c$	**(теория относительности)** время относительно

c — скорость электромагнитных волн в вакууме.

«Абсолютно» означает, что данная физическая величина не изменяется при переходе от одной системы отсчёта к другой, а «относительно» — означает, изменяется. В пределе $V \ll c$ все уравнения теории относительности переходят в соответствующие уравнения классической механики.

В масштабах микромира применяется другая механика — квантовая. Для микрочастицы невозможно точно задать все величины, характеризующие её движение, поэтому движение микрочастицы характеризуется не детерминировано, а вероятностно.

Механика

макромира	**микромира**
(классическая физика)	**(квантовая механика)**
движение частицы описывается законом движения $\vec{r}(t)$	линейные параметры $d \lesssim 1$ Å плотность вероятности обнаружения частицы $\lvert\Psi(\vec{r}, t)\rvert^2$

2. Системы отсчета. Кинематика материальной точки

Кинематика описывает общие законы движения точки (без учета сил). Именно в кинематике вводятся понятия вектора скорости, вектора ускорения, вектора перемещения.

При описании движения необходимо определить систему отсчета – это совокупность системы координат и часов, связанных с телом, по отношению к которому изучается движение – это тело называется началом отсчета. Выбор системы отсчета определяется целью и удобством описания движения точек или тел. В качестве системы координат применяют, например, декартову (правую) систему (рис. 1.1), полярную (рис. 1.2) и сферическую. (1.3)

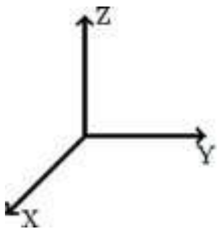


Рис. 1.1.

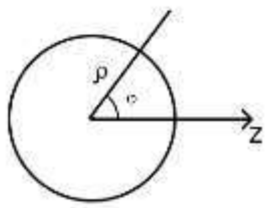


Рис. 1.2.

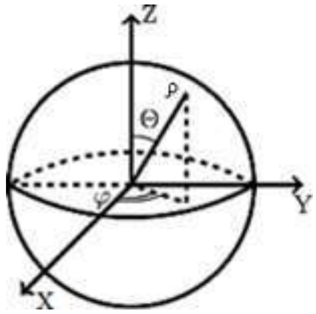


Рис. 1.3.

Таблица1.1

Системы отсчета

Система координат	Основные величины	Формулы перехода в ДСК	Модуль радиус –вектора
Декартова (ДСК)	x,y,z		$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Полярная (ПСК)	ρ, φ	$X = \rho \cdot \cos\varphi$, $Y = \rho \cdot \sin\varphi$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
Сферическая (ССК)	ρ, φ, θ	$X = \rho \cdot \sin\theta\cos\varphi$, $Y = \rho \cdot \sin\theta\sin\varphi$ $Z = \rho\cos\theta$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Существует три способа описания движения точки: векторный, координатный и естественный. Рассмотрим их последовательно.

Векторный способ

В этом способе положение интересующей нас точки А задают радиусом-вектором$\vec{r}$, проведенным из некоторой неподвижной точки O выбранной системы отсчета в точку A. При движении точки A ее радиус-вектор меняется в общем случае как по модулю, так и по направлению, то есть радиус-вектор $\vec{r}$ зависит от времени *t.* Геометрическое место концов радиуса-вектора $\vec{r}$ называют траекторией точки A (рис.1.6) $\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r}_1$ – вектор перемещения.

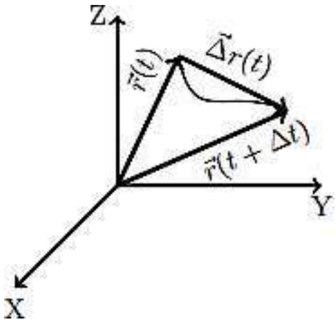


Рис.1.6.

Характеристикой движения тела является скорость:

средняя скорость $\vec{V} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$; (1.1)

мгновенная скорость $\vec{V} = \lim\limits_{\Delta t - 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. (1.2)

Движение точки характеризуется также ускорением. Вектор ускорения $\vec{a}$ определяет скорость изменения вектора скорости точки со временем:

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ (1.3), т. е. равен производной от вектора скорости по времени. Направление вектора $\overrightarrow{a}$ совпадает с направлением вектора $d\vec{V}$— приращением вектора $\vec{V}$ за время *dt*. Модуль вектора $\overrightarrow{a}$ определяется аналогично модулю вектора $\vec{V}$. Зная зависимость $\overrightarrow{r}$, можно найти скорость и ускорение точки в каждый момент времени. Возникает и обратная задача: найти $\vec{V}(t)$ и $\overrightarrow{r}$(t), зная зависимость ускорения от времени $\overrightarrow{a}\,(t)$. Зная начальные условия, то есть величину скорости и ускорения при *t=0* при условии, что ускорение движения точки неизменно, $\overrightarrow{a}$=0 можно опередить скорость и радиус-вектор точки в любой момент времени.

Опередим скорость, используя формулу (1.1), найдем приращение вектора скорости: $\Delta\vec{V} = \int_0^t \overrightarrow{a}dt = \overrightarrow{a}t$ (1.3).

Искомая скорость точки: $\vec{V} = \overrightarrow{V_0} + \Delta\vec{V} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{a}t$ (1.4).

Приращение радиуса-вектора: $\Delta\vec{r} = \int_0^t \overrightarrow{V(t)}\,dt = \overrightarrow{V_0} + \frac{\overrightarrow{a}t^2}{2}$ (1.5),

$\vec{r} = r_0 + \overrightarrow{V_0} + \Delta\vec{V} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{a}t$ (1.6).

Для определения скорости и положения точки в зависимости от времени, необходимо знать зависимость $\vec{a}\,(t)$ и начальные условия: скорость и положение в начальный момент времени.

Координатный способ

Координатный способ требует задания фиксированной системы координат, выбор которой определяется условием задачи (симметрия, стремление к упрощению математических выкладок и т.д.). Записываются законы движения материальной точки для каждой из координатных осей, после чего определяются значения скорости и ускорения частицы. Уравнение траектории находится путем параметризации времени из законов движения: *x=x(t), y=y(t), z=z(t)*. Спроецируем выражения (1.1) и (1.2):

$V_x = \frac{dx}{dt}$ *(1.7),* где dx – проекция вектора $d\vec{r}$(t) на ось x;

$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$(1.8), где dV_x– проекция вектора скорости на ось *x.*

Аналогичные соотношения получаем для других величин. Вектор скорости определяем: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ (1.9).

Используя данный способ, можно найти траекторию точки, пройденный путь и зависимость скорости от ускорения.

Естественный способ.

Естественный способ требует того, чтобы траектория материальной точки была известна заранее. Задавая начало отсчета на траектории, а также положительное направление отсчета, положение частицы определяется дуговой координатой на линии траектории (рис1.7). Вектора скорости и ускорения определяются через касательный и нормальный вектора к траектории в каждый момент времени.

Скорость точки. Введем единичный вектор τ, связанный с движущейся точкой А и направленный по касательной к траектории в сторону возрастания дуговой координаты (1.8)

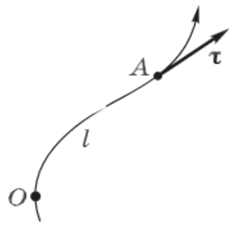


Рис.1.7

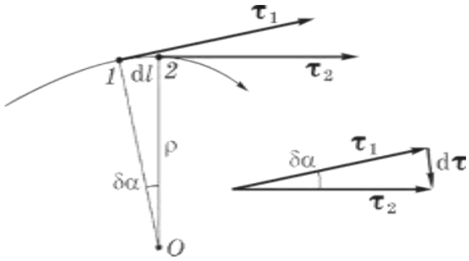


Рис. 1.8

Переменный вектор τ зависит от l. Вектор скорости $\vec{V}$ точки А направлен по касательной к траектории, поэтому его можно представить так: $\vec{V} = V_\tau \vec{\tau}$ (1.10), где $V_\tau = \frac{dl}{dt}$ – проекция вектора $\vec{V}$ на направление вектора.

Ускорение точки. Продифференцируем (1.10) по времени: $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau} + V_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}$ (1.11). Затем преобразуем второе слагаемое выражения (1.11):

$V_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt} = V_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dl}\frac{dl}{dt} = V^2 \frac{d\vec{\tau}}{dl}$. (1.12).

Определим приращение вектора τ на участке dl (рис1.8). Можно строго показать, что при стремлении точки 2 к точке 1 отрезок траектории между ними стремится к дуге окружности с центром в некоторой точке О. Эту точку, называют центром кривизны траектории в данной точке, а радиус ρ соответствующей окружности — **радиусом кривизны** траектории в той же точке. Как видно из рис. 1.4, угол

$\delta\alpha = \frac{dl}{\rho} = |d\tau|$, следовательно, $\left|\frac{d\vec{\tau}}{dl}\right| = \frac{1}{\rho}$ (1.13).

Введя единичный вектор $\vec{n}$ нормали к траектории в точке l, направленный к центру кривизны, запишем последнее: $\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{\vec{n}}{\rho}$. Подставим (1.12) и (1.13) в выражение (1.11) получим:

$\vec{a} = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n}$ (1.14). Первое слагаемое называют тангенциальным ускорением, второе — нормальным ускорением. Полное ускорение $\vec{a}$ точки может быть представлено как векторная сумма тангенциального и нормального ускорений. Проекции вектора ускорения на орты $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ равны: $a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau}$ (1.15),

$a_n = \frac{V^2}{\rho}$ (1.16). Модуль полного ускорения $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ (1.17)

Подведем итог, для описания движения материальной точки можно использовать несколько способов (таблица 1.1).

Таблица 1.2

Способ описания	Прямая задача		Обратная	
	Дано	Найти	Дано	Найти
Векторный способ	$\vec{r} = \vec{r}(t)$	$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	$\vec{a} = \vec{a}(t)$, *t=0,* $\vec{r} = \vec{r}_0$, $\vec{V} = \vec{V}_0$,	$\vec{V} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt$, $\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{V}(t)dt$
Координатный способ	*x=x(t), y=y(t), z=z(t)*	$V_x = \frac{dx}{dt}$, $a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $V_y = \frac{dy}{dt}$, $a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$, $V_z = \frac{dy}{dt}$, $a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$	$a_x = a_x(t)$, x_0, V_{x_0}, $a_y = a_y(t)$, y_0, V_{y_0}, $a_z = a_z(t)$, z_0, V_{z_0},	$V_x = \int_{t_1}^{t_2} a_x(t)dt$ $V_y = \int_{t_1}^{t_2} a_y(t)dt$ $V_z = \int_{t_1}^{t_2} a_z(t)dt$
Естественный способ	Известна траектория материальной точки $l = l(t)$ Начало отсчета и положительное направление отсчета дуговой координаты	$\vec{a} = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n}$		

Таким образом, для определения движения точки используют три способа описания.

Теория движения твердого тела помимо самостоятельного значения играет важную роль еще и в другом отношении. С твердым телом, как известно, может быть связана система отсчета, служащая для пространственно-временного описания различных движений. Поэтому изучение характера движения твердых тел равносильно, по существу, изучению движений соответствующих систем отсчета.

Различают пять видов движения твердого тела:

1. Поступательное движение — движение, при котором любая прямая, соединяющая две точки движущегося тела, перемещается параллельно самой себе.

2. Вращение вокруг неподвижной оси (вращательное движение) — движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, лежащим в параллельных плоскостях, таким, что центры этих окружностей лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

3. Плоское движение — движение, при котором все точки тела движутся в параллельных плоскостях.

4. Движение вокруг неподвижной точки.

5. Свободное движение.

Первые два движения (поступательное и вращение вокруг неподвижной оси) являются основными движениями твердого тела. Остальные виды движения твердого тела, оказывается, можно свести к одному из основных движений или к их совокупности (это будет показано на примере плоского движения).

Литература

1.Иванов, В. К. Физика. Механика, молекулярная физика и термодинамика: учебное пособие для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки бакалавров 16.03.01 "Техническая физика" / В. К. Иванов, А. Н. Ипатов; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, [Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций] Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. 162 с.

2. Иродов И.Е Механика. Основные законы [Электронный ресурс] / И. Е. Иродов. —12-е изд. (эл.). —М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.—309 с.: ил.

3. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1986.− 400с.

4. Савельев И. В. Курс физики: учебное пособие для вузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям: [в Т. 1: Механика; Молекулярная физика Изд. 5-е, стер. 2016. 350 с. 5. 3 т.].

5. Сивухин Д. В. Общий курс физики: учебное пособие для физических специальностей вузов: [в 5 томах] Т. 2: Термодинамика и молекулярная физика/ Д. В. Сивухин. Изд. 6-е, стер. Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2014. 543 с.

6. Трофимова Т. И. Курс физики: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1999.− 542 с.

7. Физические величины: Справочник/ А.П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А.М. Братковский и др. Под.ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991.− 1232 с.

Разработал доцент кафедры физика

Леонова Н. А.

Лекция 3. Кинематика (часть2)

1.Вращение вокруг неподвижной оси

2. Плоское движение твердого тела

3.Сложение угловых скоростей

1.Вращение вокруг неподвижной оси

Рассмотрим твердое тело, которое вращаясь вокруг неподвижной в данной системе отсчета оси OO^{1}, совершило за время dt бесконечно малый поворот. Соответствующий угол поворота будем характеризовать вектором $d\vec{\varphi}$, модуль которого равен углу поворота, направление совпадает с осью OO^{1}, причем так, что направление поворота отвечает правилу правого винта по отношению к направлению вектора $d\varphi$ (рис. 2.1).

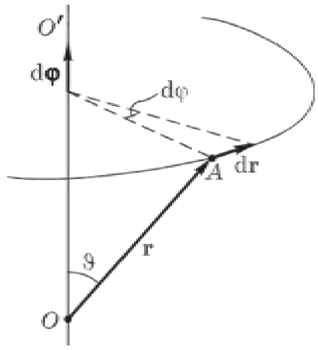


Рис.2.1

Элементарное перемещение любой точки A твердого тела при таком повороте. Положение точки A зададим радиусом-вектором r, проведенным из некоторой точки О на оси вращения. Тогда линейное перемещение конца радиуса-вектора: $|dr| = r\sin\theta d\varphi$ или $dr = [d\vec{\varphi}, r]$ (2.1). Следует отметить, что (2.1) справедливо для бесконечно малых угла поворота.

Векторы угловой скорости и углового ускорения.

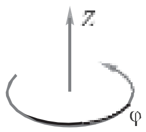
Вектор угловой скорости: $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ (2.2), где dt — промежуток времени, за который тело совершает поворот $d\vec{\varphi}$. Вектор совпадает $\vec{\omega}$ по направлению с вектором $d\vec{\varphi}$ и представляет собой аксиальный вектор.

Изменение вектора $\vec{\omega}$ со временем характеризуют вектором углового ускорения $\varepsilon = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ (2.3) Направление вектора ε совпадает с направлением $d\vec{\omega}$ —

приращения вектора $\vec{\omega}$. Вектор ε как и $\vec{\omega}$.

Единицей угловой скорости в СИ является радиан в секунду (рад/с), а единицей углового ускорения — радиан на секунду в квадрате (рад/с2).

Запишем выражения для угловой скорости и углового ускорения и проекциях на ось вращения Z, положительное направление которой свяжем с положительным направлением отсчета координаты φ — угла поворота — правилом правого винта (рис.2.2).



Тогда проекции ω_z и ε_z векторов на ось Z определяются формулами:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.4);$$

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega}{dt} \quad (2.5).$$

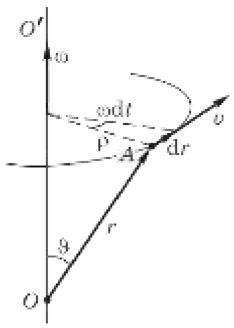
Рис. 2.2.

Здесь ω_z и ε_z — величины алгебраические. Их знак характеризует направление соответствующего вектора. Например, если $\omega_z > 0$, то направление вектора $\vec{\omega}$ совпадает с положительным направлением оси Z; если же $\omega_z < 0$, то направление вектора противоположно. Аналогично и для углового ускорения.

Таким образом, зная зависимость — закон вращения тела, по формулам можно найти угловую скорость и угловое ускорение в каждый момент времени. И наоборот, если известны зависимость углового ускорения от времени и начальные условия.

Связь между линейными и угловыми величинами

Найдем скорость произвольной точки А твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси OO^l, с угловой скоростью ω. Пусть положение точки А относительно некоторой точки O оси вращения характеризуется радиусомвектором r (рис. 2.3).



$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt};\ \vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$$\vec{V} = |\vec{\omega}\ \vec{r}\,| \quad (2.5)$$

Скорость $\vec{V}$ любой точки А твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$, равна векторному произведению $\vec{\omega}$ на радиус-вектор $\vec{r}$ точки А относительно произвольной

Рис 2.3 точки O оси вращения (рис.2.3)

Найдем перемещение точки A:

$\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ (2.6), $dS = \rho \cdot d\varphi$ (2.7).

Связь линейных величин с угловыми

Таблица 2.1

Линейные величины	Угловые величины	Формулы
dS	$d\varphi$	$dS = \rho \cdot d\varphi$
$\vec{V}$	$\vec{\omega}$	$\vec{V} = \lvert\vec{\omega}\ r\rvert$
a	ε	$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n}$, $a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\rho\omega)}{dt} = \rho\frac{d\omega}{dt} = \rho\varepsilon$ $a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(\rho\omega)^2}{\rho} = \rho\omega^2$

2. **Плоское движение твердого тела**

Это такое движение, при котором каждая точка твердого тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной (в данной системе отсчета) плоскости. При этом плоская фигура *Ф*, образованная сечением тела этой неподвижной плоскостью P (рис. 2.2), в процессе движения все время остается в этой плоскости, например цилиндр, катящийся по плоскости без скольжения (но конус в подобном случае совершает уже более сложное движение).

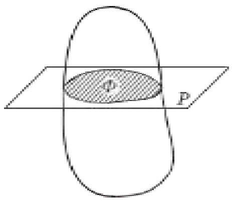


Рис. 2.2

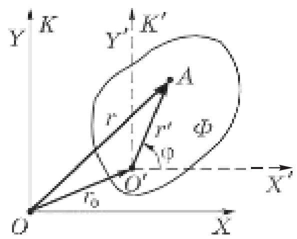


Рис. 2.3

Положение твердого тела при плоском движении определяется положением плоской фигуры $Ф$ в неподвижной плоскости P. Это позволяет свести изучение плоского движения твердого тела к изучению движения плоской фигуры в ее плоскости.

Пусть плоская фигура Ф движется в своей плоскости Р, неподвижной в K-системе отсчета (рис. 2.3). Положение фигуры Ф на плоскости можно определить, задав радиус-вектор r_0 произвольной точки O^1 фигуры и угол φмежду радиусом-вектором $\vec{r}^{\,1}$, жестко связанным с фигурой, и некоторым фиксированным направлением в K-системе отсчета. Тогда плоское движение твердого тела будет описываться двумя уравнениями:

$\vec{r}_0 = \vec{r}_0\,(t)$ (2.8), $\varphi = \varphi(t)$ (2.9).

За промежуток времени dt радиус-вектор $\vec{r}$ точки А повернется на угол $d\vec{\varphi}$, то на такой же угол повернется и любой отрезок, связанный с фигурой. Поворот фигуры на угол $d\vec{\varphi}$ и угловая скорость $\vec{\omega}$ не зависит от выбора точки O^l. Следовательно, $\vec{\omega}$ - угловой скоростью твердого тела.

Введем вспомогательную K-систему отсчета, которая жестко связана с точкой O^l тела и перемещается поступательно относительно K-системы (рис. 2.3). Тогда элементарное перемещение dr точки A в K-системе можно записать в виде: $dr = d\vec{r}_0 + d\vec{r}^{\,l}$ (2.10), где $d\vec{r}_0$ - перемещение K^l-системы, $d\vec{r}^{\,i}$ - перемещение точки А в K^l -системы. Согласно (2.1), $d\vec{r}^{\,i} = [d\vec{\varphi}, r']$ подставим в (2.10) и разделим на dt получим: $\vec{V} = \vec{V}_0 + [\vec{\omega}\ r]$ (2.11), где $\vec{V}_0$ – скорость произвольной точки данного тела, $V^l = [\vec{\omega}\ r]$ – скорость обусловленная вращением тела вокруг оси, проходящей через точку O^l. Иначе говоря, плоское движение твердого тела можно представить как совокупность двух основных видов движения — поступательного (вместе с произвольной точкой O^l. тела) и вращательного (вокруг оси, проходящей через точку O^l.).

Любое движение твердого тела можно представить как сумму поступательного и вращательного движений. Например, движение колеса автомобиля или вращение тела вокруг оси положение, которой остается неизменным, а сама ось вращается вокруг другой оси, неподвижной относительно выбранной системы отсчета.

3.Сложение угловых скоростей

Рассмотрим движение твердого тела, вращающегося одновременно вокруг двух пересекающихся осей. Сообщим некоторому телу вращение с угловой скоростью ω^l вокруг оси OA (рис. 2.3) и затем эту ось приведем во вращение с угловой скоростью ω_0вокруг оси *OB,* неподвижной в *K*-системе отсчета. Найдем результирующее движение тела в *K*-системе.

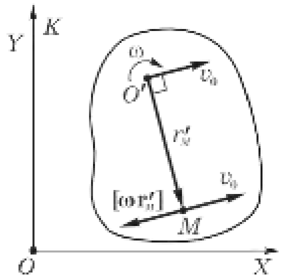


Рис 2.3

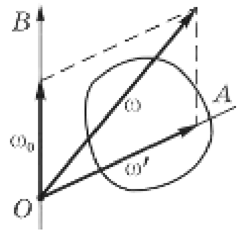


Рис 2.4

Введем вспомогательную *K* -систему отсчета, жестко связанную с осями *OA* и *OB*. Ясно, что эта система вращается с угловой скоростью ω_0, и тело вращается относительно нее с угловой скоростью ω^1.

За промежуток времени *dt* тело совершит поворот $d\vec{\varphi}'$ вокруг оси *AO* в *K* -системе и одновременно поворот $d\vec{\varphi}_0$ вокруг оси *OB* вместе с K^1 системой.

Определим суммарный поворот $d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_0 + d\vec{\varphi}^1$ (2.12). Разделив обе части

этого равенства на *dt*, получим: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}^1$(2.13)

Таким образом, результирующее движение твердого тела в *K*-системе представляет собой чистое вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси, совпадающей в каждый момент с вектором $\vec{\omega}$ и проходящей через точку *O* (рис. 2.4). Эта ось перемещается относительно *K*-системы — она поворачивается с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ вместе с осью *OA* вокруг оси *OB*.

Если угловые скорости $\vec{\omega}^1$ и $\vec{\omega}_0$ не меняются по модулю, тело будет обладать в *K*-системе угловым ускорением ε , направленным, согласно формуле (2.5), за плоскость (рис. 2.4).

Поскольку вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ удовлетворяет основному свойству векторов — векторному сложению, его можно представить:

$\vec{\omega} = \overrightarrow{\omega_1} + \overrightarrow{\omega_2} + \cdots + \vec{\omega}_n$, где все векторы относятся в одной и той же системе отсчета.

Данным приемом пользуются при анализе сложного движения твердого тела.

Литература

1.Иванов, В. К. Физика. Механика, молекулярная физика и термодинамика: учебное пособие для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки бакалавров 16.03.01 "Техническая физика" / В. К. Иванов, А. Н. Ипатов; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, [Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций] Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. 162 с.

2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы [Электронный ресурс] / И.
Е. Иродов. —12-е изд. (эл.). —М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.—309 с.: ил.

3. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1986.– 400с.

4. Савельев И. В. Курс физики: учебное пособие для вузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям: [в Т. 1: Механика; Молекулярная физика Изд. 5-е, стер. 2016. 350 с. 5. 3 т.].

5. Сивухин Д. В. Общий курс физики: учебное пособие для физических специальностей вузов: [в 5 томах] Т. 2: Термодинамика и молекулярная физика/ Д. В. Сивухин. Изд. 6-е, стер. Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2014. 543 с.

6. Трофимова Т. И. Курс физики: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1999.– 542 с.

7. Физические величины: Справочник/ А.П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А.М. Братковский и др. Под.ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. – М.:
Энергоатомиздат, 1991.– 1232 с.

Лекция 4 Динамика

1. Инерциальные системы отсчета и законы Ньютона

2. Центр инерции

3. Движение тела с переменной массой

4. Силы природы.

1. Инерциальные системы отсчета и законы Ньютона

Существуют системы отсчета, в которых свободная материальная точка (тело) движется равномерно и прямолинейно или покоится. Такие системы отсчета называют инерциальными. Инерциальной является гелиоцентрическая система отсчета, связанная с Солнцем и тремя звездами, направления на которые взаимно перпендикулярны (это можно установить опытным путем). Всякая другая система, которая движется равномерно и прямолинейно или покоится относительно гелиоцентрической, тоже инерциальна. Система отсчета, связанная с Землей, не является инерциальной, потому что Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца, но при изучении законов динамики неинерциальностью земной (геоцентрической) системы можно пренебречь.

Важной особенностью инерциальных систем отсчета является то, что по отношению к ним пространство и время обладают определенными свойствами симметрии. А именно: опыт убеждает, что в этих системах отсчета пространство однородно и изотропно, а время однородно.

Однородность и изотропность пространства заключаются в том, что свойства пространства одинаковы в различных точках (однородность), а в каждой точке одинаковы во всех направлениях (изотропность). Законы классической механики не зависят от выбора инерциальной системы отсчета. Время является абсолютным параметром, оно не зависит от систем отсчета, везде течет вперед с одинаковой скоростью. Может меняться только начальный момент времени.

Если в двух замкнутых лабораториях (рис. 3.1), одна из которых движется равномерно прямолинейно (и поступательно) относительно другой, провести одинаковый механический эксперимент в одинаковых условиях, то результат будет одинаковым. Это приводит к требованию инвариантности уравнений классической механики относительно преобразований Галилея.

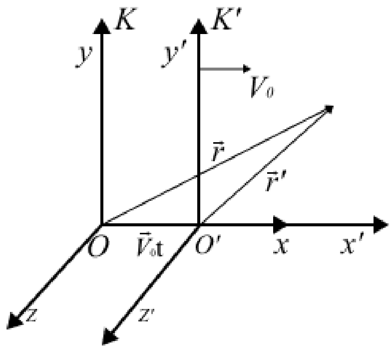


Рис. 3.1

Преобразования величин

Таблица 3.1

Системы отсчета	Переход от K'к K	Переход от K к K'
Координаты, радиус-вектор	$\begin{cases} x = x' + V_0 t \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$ $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}_0 t$	$\begin{cases} x' = x - V_0 t \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$ $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{V}_0 t$
время	$t = t'$	$t = t'$
скорость	$\vec{V} = \vec{V}' + V_0 t$	$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_0 t$
ускорение	$\vec{a} = \vec{a}'$	$\vec{a} = \overrightarrow{a'}$
сила	$\vec{F} = \overrightarrow{F'}$	$\vec{F} = \vec{F}'$

Помимо ускорения существуют и другие физические величины, которые остаются неизменными в различных ИСО, т. е., являются инвариантами:

1) расстояние между двумя точками – инвариант:$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{r_2}' - \overrightarrow{r_1}''$;

2) относительная скорость двух тел– инвариант: $\overrightarrow{\Delta V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \overrightarrow{V_2'} - \overrightarrow{V_1'}$;

3) сила – инвариант: $\vec{F} = \vec{F}'$;

4) масса – инвариант: $m = m'$ при переходе от одной ИСО к другой.

Отсюда получаем важный результат: законы механики инвариантны относительно преобразований Галилея. Так, второй закон Ньютона – основное уравнение динамики - инвариантен в любой ИСО.

Законы Ньютона

Первый закон Ньютона: существуют такие системы отсчёта, в которых материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие других объектов не выведет её из этого состояния.

Второй закон Ньютона: ускорение тела пропорционально приложенной к телу силе: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ (3.1), $m\vec{a} = \vec{F}$ (3.2) или $m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$ (3.3), где $\vec{F}$- равнодействующая всех сил, действующих на тело, m – коэффициент пропорциональности, который определяет меру инертности тела.

Уравнение второго закона Ньютона называют уравнением движения материальной точки. В проекции на оси декартовой системы координат это уравнение представляется в виде трёх дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}, \\ F_y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad (3.4) \\ F_z = m\frac{d^2z}{dt^2}. \end{cases}$$

Сразу же подчеркнем, что второй закон Ньютона и уравнение (3.1) получают конкретное содержание только после того, как установлен вид функции F — зависимость от определяющих ее величин, или, как говорят, закон силы. Установление вида этой зависимости в каждом конкретном случае является одной из основных задач физической механики.

Третий закон Ньютона: две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю, противоположными по направлению и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки: $\overrightarrow{F_{12}} = \overrightarrow{F_{21}}$ (3.5). Это значит, что силы взаимодействия всегда появляются парами. Обе силы приложены к разным материальным точкам и, кроме того, являются силами одной природы.

Законы Ньютона позволяют описывать основные явления и решать задачи динамики в классической механике. Для описания движения системы частиц используют понятие «центр масс» или «центр инерции».

2. Центр инерции

Центр инерции (центр масс) — это точка в пространстве, в которой можно считать сосредоточенной всю массу тела или системы тел для анализа их движения и поведения под воздействием внешних сил. Центр масс играет ключевую роль в механике, позволяя упрощать сложные системы до анализа движения одной точки (рис. 3.2).

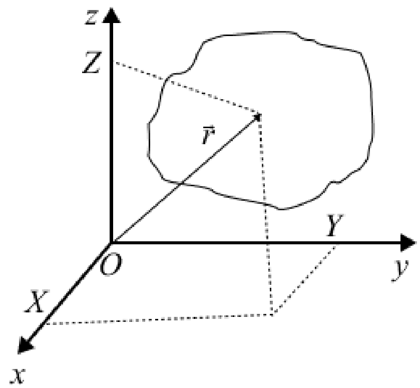


Рис. 3.2

Координаты центра инерции определяется следующим образом:

$x = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_1 \cdot x_2 + \cdots m_N \cdot x_N}{m_1 + m_2 + \cdots m_N}$, $y = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_1 \cdot y_2 + \cdots m_N \cdot y_N}{m_1 + m_2 + \cdots m_N}$,

$z = \frac{m_1 \cdot z_1 + m_1 \cdot z_2 + \cdots m_N \cdot z_N}{m_1 + m_2 + \cdots m_N}$ (3.6).

Тогда в векторной форме радиус-вектор, определяющий положение центра инерции: $\vec{r}_c = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k}$ (3.7). Учитывая радиусы-вектора точек системы выражение радиус-вектор центра инерции можно записать:

$\overrightarrow{r_c} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_1 \cdot \vec{r}_2 + \cdots m_N \cdot \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i}}{m}$ (3.8), где m - полная масса системы, N - количество частиц.

Если система материальных точек имеет непрерывное распределение, то тело разбивается на маленькие кусочки с элементарной массой: $\Delta m_i =$

$\lim\limits_{\Delta m_{i\to 0}} \frac{\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i \vec{r_i}}{M} = \frac{1}{M}\int_{V_0} \vec{r}\, dm = \frac{1}{M}\int_{V_0} \vec{r}\, \rho d\mathrm{v}$, (3.9), где M – масса тела, v –объем тела.

Найдем скорость движения центра инерции, для этого продифференцируем обе части уравнений (3.10):

$V_{cx} = \frac{dx}{dt} = \frac{m_1 \cdot V_{1x} + m_1 \cdot V_{2x} + \cdots m_N \cdot V_{Nx}}{m_1 + m_2 + \cdots m_N} = \frac{1}{M}\sum_i^N m_i\, V_{ix}$ (3.10),

$V_{cy} = \frac{dy}{dt} = \frac{m_1 \cdot V_{1y} + m_1 \cdot V_{2y} + \cdots m_N \cdot V_{Ny}}{m_1 + m_2 + \cdots m_N} = \frac{1}{M}\sum_i^N m_i\, V_{iy}$ (3.11),

$V_{cz} = \frac{dz}{dt} = \frac{m_1 \cdot V_{1z} + m_1 \cdot V_{2z} + \cdots m_N \cdot V_{Nz}}{m_1 + m_2 + \cdots m_N} = \frac{1}{M}\sum_i^N m_i\, V_{iz}$ (3.12).

Продифференцируем по времени формулы (3.10) – (3.12) получим проекции ускорения: $\overrightarrow{a_c} = \frac{1}{M}\sum_i^N m_i \vec{a}_i$ (3.13). $\vec{F} = M \cdot \vec{a}_c$ (3.14) -теорема о движении центра масс.

Произведение массы системы на ускорение центра масс есть равнодействующая внешних сил, приложенных к системе.

Центр масс системы движется так же, как двигалась бы точка с массой, равной массе системы, под действием суммы всех внешних сил, действующих на систему (внутренние силы системы не оказывают влияния на движение центра масс).

3. Движение тела с переменной массой

Получим уравнение для движения тела с переменной массой, пользуясь инвариантностью законов в различных ИСО. В качестве примера рассмотрим движение ракеты. Пусть:

а) в момент времени t ракета имеет массу m;

б) присоединяемая (отделяемая) масса имеет скорость $\vec{u}$ относительно массы m;

в) рассмотрим ИСО, скорость которой совпадает со скоростью ракеты в момент времени t, такая система отсчета называется сопутствующей системой отсчета;

г) за время от t до $t + dt$ материальная точка приобретает импульс $md\vec{V}$

как за счет внешних сил, так и за счет присоединяемой (отделяемой) массой:

$m d\vec{V} = \vec{F} dt + \vec{u} dm$ (3.15)

Разделив обе части на dt, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{u}$ (3.16) - уравнение И.В. Мещерского.

Оно описывает движение тела, к которому присоединяется масса со скоростью u (это определяется знаком "+" в уравнении (3.16)). В силу принципа относительности Галилея это уравнение справедливо в любой ИСО, а не только в сопутствующей ИСО, где оно было получено. Рассмотрим частные случаи уравнения Мещерского:

1.Величину $\overrightarrow{F_P} = \vec{u}\frac{dm}{dt}$ (3.17), где $\overrightarrow{F_P}$ реактивная сила. Пусть движущееся тело теряет массу, то есть $\frac{dm}{dt} < 0$, скорость выброса массы $\vec{u}$ направлена в противоположную сторону скорости тела $\vec{V}$. Тогда реактивная сила – сила ускорения движения ракеты $\overrightarrow{F_P} > 0$. Если внешняя сила равна нулю $\vec{F}$=0, тогда уравнение Мещерского для замкнутой системы «ракета-газ»: $m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dm}{dt}\overrightarrow{u}$ (3.18), где $\vec{u}$ – относительная скорость массы dm. Запишем уравнение в проекции на направление движения, разделив на dt: $mdV = -udm$ (3.19). Если скорость истечения газов постоянна $\vec{u}$, то скорость: $V = -u \cdot \ln m + C$ (3.20) Если в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а масса равна $m = m_0$, то имеем: $V = -u \ln\frac{m}{m_0} = u \ln\frac{m_0}{m}$ (3.21) – уравнение К. Э. Циолковского.

1. Если скорость $\vec{u} = 0$, то $m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$ (3.22).

Примером такого движения является – движение цистерны, из которой выливается вода.

2. Рассматривая случай, когда $\vec{u} = -\vec{V}$, то есть, присоединяемая масса неподвижна в выбранной системе отсчета или отделяемая масса становится

неподвижной в этой системе отсчета, имеем:

$m\frac{d\vec{V}}{dt}+\frac{dm}{dt}\vec{V}= \frac{d(m\,\vec{V})}{dt}=\vec{F}$ (3.23), $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$ – основное уравнение динамики для тела с переменной массой. Примером такого движения будет движущаяся платформа, на которую сыплется песок из неподвижного бункера.

Импульс (количество движения)

Импульс тела — это векторная величина, равная произведению массы тела на его скорость: $\vec{p}=m\vec{V}$, где $\vec{V}$ — это скорость частицы. Импульс системы материальных точек равен сумме импульсов каждой из точек:

$\vec{p}= m_1\overrightarrow{V_1}+m_2\overrightarrow{V_2}+\cdots+m_N\overrightarrow{V_N}=\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{p_i}$ (3.24).

4. Силы природы

В современной физике известно четыре вида фундаментальных взаимодействий: гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое. В рамках классической механики рассматриваются гравитационные и электромагнитные взаимодействия, а также упругие силы и силы трения.

Гравитационные взаимодействия подчиняются закону Всемирного тяготения: две материальные точки массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой прямо пропорциональной массам этих точек и обратно пропорциональной квадрату расстояния *r* между ними:

$F=G\frac{m_1\cdot m_2}{r^2}$ (3.25) где $G=6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$ - гравитационная постоянная.

Различают гравитационную и инертную массы.

Инертная масса m^i выступает как коэффициент пропорциональности между импульсом и скоростью или между силой и ускорением:

Масса в (3.25) m^g – гравитационная масса, коэффициент G введен для согласования системы единиц, чтобы инертная и гравитационная массы измерялись в одних единицах. Важно подчеркнуть, что инерция тел и их способность возбуждать гравитационные поля не должны рассматриваться как взаимосвязанные или, тем более, тождественные свойства. В принципе, задавая расстояние r и силу F известными единицами, можно при любом G выбрать единицы гравитационных масс m^g.

Итак, физический закон, установленный Ньютоном: сила гравитационного взаимодействия тел пропорциональна их инертным массам, то есть инертная масса тела пропорциональна его гравитационной массе. Единицы гравитационной массы m^g можно выбрать такими же, как и для инертной массы m^i.

Это фундаментальный физический закон – закон эквивалентности инертной и гравитационной массам. Таким образом, можно сформулировать обобщенный закон Галилея: все тела при свободном падении в одном и том же гравитационном поле приобретают одинаковое ускорение. Обобщенный закон Галилея соответствует принципу эквивалентности инертной и гравитационной масс.

Электромагнитные взаимодействия

Основным законом сил, создаваемых электростатическими взаимодействиями, является закон Кулона: сила взаимодействия F двух неподвижных точечных зарядов в вакууме прямо пропорционально произведению зарядов q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними

$F = G\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$(3.26), k -коэффициент пропорциональности, зависящей от выбора системы единиц.

Если заряды движутся, то кроме кулоновской силы, на них действуют магнитные силы. Магнитная сила (сила Лоренца), действующая на точечный заряд q движущийся со скоростью V в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, определяется формулой $\vec{F} = q[\vec{V}\vec{B}]$ (3.27).

Если на движущийся электрический заряд помимо магнитного поля с $\vec{B}$ действует и электрическое поля с напряженностью $\vec{E}$, то результирующая сила $\vec{F}$, приложенная к заряду, равна векторной сумме сил:

$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{V}\vec{B}]$ (3.28)– формула Лоренца

Частными случаями проявления электромагнитных взаимодействий являются силы упругости и силы трения.

Упругие силы. Под действием внешних сил возникают деформации. Если после прекращения действия сил восстанавливаются прежняя форма и размеры тела, то деформация называется упругой. Для других деформаций справедлив закон Гука: сила упругости пропорциональна абсолютному удлинению:$F_x = -k \cdot x$ (3.29), где x – абсолютное удлинение. Для однородных стрежней также справедлив закон Гука, который принято формулировать следующим образом: для малых деформаций механическое напряжение σ прямо пропорционально относительному удлинению ε

$\sigma = E\varepsilon$ *(3.30),* где Е- модуль Юнга.

Модуль Юнга – физическая величина, характеризующая упругие свойства материала. Зависит только от свойств материала и не зависит от размеров и формы тела.

Сила трения. Силы трения проявляются при перемещении соприкасающихся тел или частей тел относительно друг друга. Различают внешнее(сухое) и внутреннее трение.

а) Внешним трением называется трение, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении.

Закон сухого трения: сила трения скольжения пропорциональна модулю силы нормальной реакции опоры и не зависит от площади соприкосновения тел. $F = \mu N$ (3.31), μ- коэффициент трения.

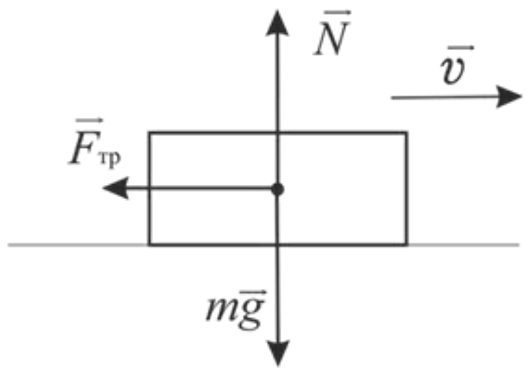


Рис. 3.3

б) Внутренним трением называется трение между частями одного и того же тела, например, между различными слоями жидкости или газа, скорости которых меняются от слоя к слою.

Закон вязкого трения. На тело, движущееся в вязкой (*жидкой* или *газообразной*) среде, действует сила – сила вязкого трения $\vec{F}$, тормозящая его движение. При небольших скоростях растет сила трения линейно со скоростью: $\vec{F} = -r\vec{V}$ (3.32), где $\vec{V}$ – вектор скорости движения тела; r – коэффициент сопротивления, зависящий от формы и размеров тела, характера его поверхности, а также от свойств среды. Знак «–» указывает на то, что сила направлена противоположно вектору скорости.

При больших скоростях в окружающей тело среде возникают завихрения, а силы сопротивления становятся пропорциональными квадрату скорости: $\vec{F} = -r\overrightarrow{V^2}$(3.33).

Подведём итог. Движение тел определяется вторым законом Ньютона, при этом существует два основных типа задач динамики:

1. Известна зависимость координат от времени (траектория частицы) $\vec{r}$ находим силу $\vec{F}$.

2. Известна сила $\vec{F}(\vec{r}, \vec{V})$, тогда находим траекторию частицы $\vec{r}(t)$.

Литература

1.Иванов, В. К. Физика. Механика, молекулярная физика и термодинамика: учебное пособие для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки бакалавров 16.03.01 "Техническая физика" / В. К. Иванов, А. Н. Ипатов; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, [Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций] Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. 162 с.

2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы [Электронный ресурс] / И. Е. Иродов. —12-е изд. (эл.). —М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.—309 с.: ил.

3. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1986.− 400с.

4. Савельев И. В. Курс физики: учебное пособие для вузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям: [в Т. 1: Механика; Молекулярная физика Изд. 5-е, стер. 2016. 350 с. 5. 3 т.].

5. Сивухин Д. В. Общий курс физики: учебное пособие для физических специальностей вузов: [в 5 томах] Т. 2: Термодинамика и молекулярная физика/ Д. В. Сивухин. Изд. 6-е, стер. Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2014. 543 с.

6. Трофимова Т. И. Курс физики: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1999.− 542 с.

7. Физические величины: Справочник/ А.П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А.М. Братковский и др. Под.ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991.− 1232 с.

Лекция 5. Закон сохранения импульса. Работа. Мощность

1. Закон сохранения импульса

2. Работа и мощность

1.Закон сохранения импульса

Закон сохранения импульса — это один из фундаментальных законов природы. Его фундаментальность заключается в его всеобщности, т. е., он применим во всех областях физики. Такая универсальность обусловлена фундаментальными свойствами пространства – однородностью пространства.

Перейдем к рассмотрению более сложного случая. Рассмотрим произвольную систему частиц. Введем понятие импульса системы, как векторной суммы импульсов ее отдельных частиц:

$$\overrightarrow{p_c} = \sum_i \vec{p}_i \ , \qquad (5.1)$$

где $\vec{p}_i$ импульс i - частицы. Заметим, что импульс системы $\overrightarrow{p_c}$ - величина аддитивная, т. е., импульс системы равен сумме импульсов ее отдельных частей независимо от того, взаимодействуют они между собой или нет.

Найдем физическую величину, которая определяет изменение импульса системы. Для этого продифференцируем соотношение (5.1) по времени:

$$\frac{d\overrightarrow{p_c}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \qquad (5.2).$$

Согласно второму закону Ньютона выражение (5.2) запишем:

$$\frac{d\overrightarrow{p_\iota}}{dt} = \sum_K \overrightarrow{F_{\iota k}} + \vec{F_\iota} \qquad (5.3),$$

где $\overrightarrow{F_{\iota k}}$ - силы, действующие на i частицу со стороны других частиц системы, которые обычно называют внутренние силы;

$\vec{F_\iota}$ - сила, действующая на эту же частицу со стороны других тел, не входящих в рассматриваемую систему, т. е., равнодействующая внешних сил. Подставив последнее выражение в предыдущее, получим

$$\frac{d\overrightarrow{p_c}}{dt} = \sum_i \sum_k \overrightarrow{F_{\iota k}} + \sum_i \vec{F_\iota} \qquad (5.4)$$

В этом равенстве двойная сумма справа — это сумма всех внутренних сил. В соответствии с третьим законом Ньютона, силы взаимодействия между частицами системы попарно одинаковы по модулю и противоположны по направлению. Поэтому результирующая сила в каждой паре взаимодействия равна нулю, а значит, равна нулю и векторная сумма всех внутренних сил. В результате последнее уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{d\overrightarrow{p_c}}{dt} = \vec{F} \qquad (5.5),$$

где $\vec{F} -$ результирующая всех внешних сил $\vec{F} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$.

Уравнение (5.5) означает: производная импульса системы по времени равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на частицы системы.

Как и в случае одной частицы, из уравнения (5.5) следует, что приращение импульса системы за конечный промежуток времени есть

$$\overrightarrow{p_{2c}} - \overrightarrow{p_{1c}} = \int_0^t \vec{F} dt \qquad (5.6)$$

т. е., приращение импульса системы равно импульсу результирующей всех внешних сил за соответствующий промежуток времени. В соотношении (5.6), конечно, $\overrightarrow{F}$ - результирующая всех внешних сил, действующих на тела системы.

Уравнения (5.5) и (5.6) справедливы как в инерциальной, так и в неинерциальной системах отсчета, если в неинерциальной системе отсчета учесть и действие сил инерции, играющих роль внешних сил, т. е. под $\overrightarrow{F}$ в этих уравнениях надо понимать сумму $\overrightarrow{F_{вз}} + \overrightarrow{F_{ин}}$, где результирующая всех внешних сил взаимодействия – это $\overrightarrow{F_{вз}}$, а результирующая всех сил инерции обозначена $\overrightarrow{F_{ин}}$.

Из уравнения (5.5) можно сделать важный вывод - *импульс системы может изменяться под действием только внешних сил.* Внутренние силы не могут изменить импульс системы независимо от их конкретного вида. *Система, на которую не действуют внешние силы, называется замкнутой.* Отсюда непосредственно вытекает и другой важный вывод - закон сохранения импульса: **в инерциальной системе отсчета импульс замкнутой системы частиц остается постоянным, т. е. не меняется со временем**:

$$\overrightarrow{p_c} = \sum_i \overrightarrow{p_\iota}(t) = const \tag{5.7}$$

При этом импульсы отдельных частиц или частей замкнутой системы могут меняться со временем, что и подчеркнуто в последнем выражении. Однако эти изменения всегда происходят так, что приращение импульса одной части системы равно убыли импульса оставшейся части системы. Другими словами, отдельные части замкнутой системы могут только обмениваться импульсами. Обнаружив в некоторой системе приращение импульса, можно утверждать, что это. приращение произошло за счет убыли импульса в окружающих телах.

В этом смысле уравнения (5.5) и (5.6) следует рассматривать как более общую формулировку закона изменения импульса, формулировку, в которой указана причина изменения импульса у незамкнутой системы - действие других тел, то есть внешних сил. Сказанное справедливо, разумеется, только по отношению к инерциальным системам отсчета.

Импульс может сохраняться и у незамкнутой системы при условии, что результирующая всех внешних сил равна нулю. Это непосредственно вытекает из уравнений (5.5) и (5.6). В практическом отношении сохранение импульса в этих случаях представляет особый интерес, ибо дает возможность получать достаточно простым путем ряд заключений о поведении системы, не вникая в детальное рассмотрение процесса.

Кроме того, у незамкнутой системы может сохраняться не сам импульс, а его проекция на некоторое направление. Это бывает тогда, когда проекция результирующей внешней силы $\vec{F}$ на направление x равна нулю, т. е., вектор $\vec{F}$ перпендикулярен ему. Действительно, спроектировав уравнение (5.5), получим:

$\frac{d\overrightarrow{p_x}}{dt} = \overrightarrow{F_x},$	(5.8)

откуда следует, что если $\overrightarrow{F_x} = 0$, то $d\overrightarrow{p_x} = const$. Например, при движении системы в однородном поле сил тяжести сохраняется проекция ее импульса на любое горизонтальное направление при любых внутренних процессах в системе.

Подчеркнем еще раз: закон сохранения импульса выполняется только в инерциальных системах. Это, однако, не исключает случаев, когда импульс системы сохранялся бы и в неинерциальных системах отсчета. Для этого достаточно, чтобы в уравнении (5.5), справедливом и в неинерциальных системах отсчета, внешняя сила $\vec{F}$, которая включает в себя и силы инерции, была равна нулю. Ясно, что такое положение может осуществляться лишь при специальных условиях, которые встречаются довольно редко и имеют частный характер.

Докажем, что если импульс системы сохраняется в одной инерциальной системе отсчета *K*, то он сохраняется и в любой другой инерциальной системе *K'*. Пусть в системе $\sum m_i \cdot \vec{V_i} = const$.

Если система *K'* движется относительно системы *K* со скоростью $\overrightarrow{V_0}$, то скорость i частицы в системе можно представить как $\vec{V_i} = \vec{V_i'} + \overrightarrow{V_0}$, где скорость $\vec{V_i'}$ этой частицы в системе *K'*.

Тогда выражение для импульса системы можно преобразовать к следующему виду

$$\sum m_i \vec{V_i'} + \sum m_i \overrightarrow{V_0} = const \qquad (5.9)$$

Вторая сумма в этом равенстве не зависит от времени. А это значит, что и первая сумма - импульс системы в системе отсчета *K'* - тоже не зависит от времени, т. е. $\sum m_i \vec{V_i'} = const$.

Полученный результат полностью соответствует принципу относительности Галилея, согласно которому законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Приведенный вывод закона сохранения импульса опирался только на справедливость законов Ньютона. В частности, предполагалось, что частицы замкнутой системы взаимодействуют между собой попарно и это взаимодействие подчиняется третьему закону Ньютона. А как обстоит дело в случае систем, не подчиняющихся законам Ньютона, например, в системах с электромагнитным излучением.

Ответ на этот вопрос дает опыт, который со всей убедительностью показывает, что закон сохранения импульса оказывается справедливым и для таких систем. Однако в этих случаях в общем балансе импульса необходимо учитывать не только импульсы частиц, но и импульс, которым обладает, как выясняется в электродинамике, само поле излучения. Примером экспериментального проявления существования импульса у электромагнитного излучения служит давление, оказываемое светом на твердые тела и газы, что впервые было показано в опытах П.Н. Лебедева, выполненных в первое десятилетие XX века.

Таким образом, опыт показывает, что закон сохранения импульса, надлежащим образом обобщенный, представляет собой фундаментальный закон природы, не знающий никаких исключений. Но в таком широком понимании он уже не является следствием законов Ньютона, а должен рассматриваться как самостоятельный общий принцип, являющийся обобщением опытных фактов. О связи закона сохранения импульса со свойством однородности пространства будет сказано далее.

2.Работа и мощность

Пусть частица под действием силы совершает перемещение по некоторой траектории 1–2 (рис. 5.1). В общем случае сила в процессе

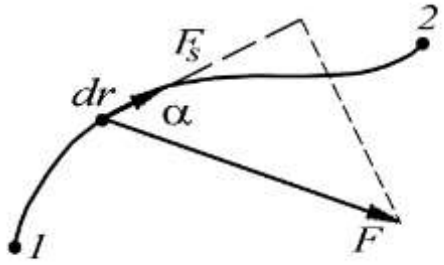


Рис. 5.1.

движения частицы может изменяться как по модулю, так и по направлению. Рассмотрим, как показано на рис.5.1, элементарное перемещение $d\vec{r}$, в пределах которого силу можно считать постоянной.

Действие силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$, характеризуют величиной, равной скалярному произведению $\vec{F} \cdot d\vec{r}$, которую называют элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$. Ее можно представить и в другом виде:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot \cos\alpha \, dS = F_s ds \quad (5.10)$$

Где α - угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$, $dS = |d\vec{r}|$ - элементарный путь, проекция вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$ обозначена F_s (рис. 5.1).

Итак, элементарная работа силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$, определяется

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot \cos\alpha \, dS = F_s ds \quad (5.11)$$

Величина dA - алгебраическая: в зависимости от угла между векторами силы $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ или от знака проекции вектора силы на вектор перемещения она может быть как положительной, так и отрицательной и, в частности, равной нулю, если $\vec{F} \perp d\vec{r}$.

Единицей измерения работы в системе СИ служит Джоуль, сокращенное обозначение Дж.

Суммируя (интегрируя) выражение (5.11) по всем элементарным участкам пути от точки 1 до точки 2, найдем работу силы на данном перемещении:

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F_s ds \tag{5.12}$$

Выражению (5.12) можно придать наглядный геометрический смысл. Изобразим график силы как функцию положения частицы на траектории. Пусть, например, этот график имеет вид, показанный на рис. 5.2. Из этого рисунка

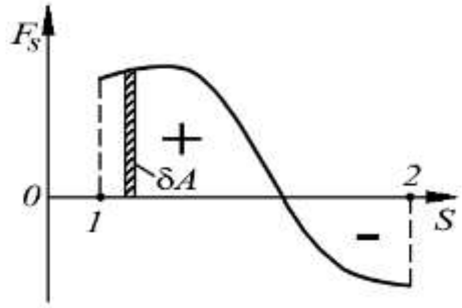


Рис.5.2

видно, что элементарная работа A численно равна площади заштрихованной полоски, а работа А на пути от точки 1 до точки 2 - площади фигуры, ограниченной кривой, ординатами 1 и 2 и осью s. При этом площадь фигуры над осью s берется со знаком плюс (она соответствует положительной работе), а площадь фигуры под осью s - со знаком минус (она соответствует отрицательной работе).

Рассмотрим примеры на вычисление работы. Работа упругой силы

$\vec{F} = -k \cdot \vec{r}$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор частицы A относительно точки O (рис. 5.3).

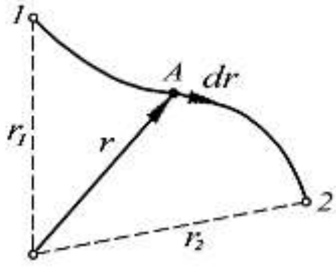


Рис. 5.3

Переместим частицу *A,* на которую действует эта сила, по произвольному пути из точки 1 в точку 2. Найдем сначала элементарную работу силы на элементарном перемещении: $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -k \cdot \vec{r} \cdot d\vec{r}$. Скалярное произведение $\vec{r} \cdot d\vec{r} = r(d\vec{r})_r$, где $(d\vec{r})_r$ проекция вектора перемещения $d\vec{r}$ на вектор $\vec{r}$. Эта проекция равна приращению модуля вектора $\vec{r}$. Поэтому $\vec{r} \cdot d\vec{r} = r \cdot dr$, $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -d\left(\frac{kr^2}{2}\right)$. Теперь вычислим работу данной силы на всем пути, т. е. проинтегрируем последнее выражение от точки 1 до точки 2:

$$A = -\int_1^2 d\left(\frac{kr^2}{2}\right) = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}. \tag{5.13}$$

Вычислим работу гравитационной силы. Пусть в начале вектора $\vec{r}$ (рис. 5.3) находится неподвижная точечная масса (точечный заряд). Определим работу гравитационной (кулоновской) силы при перемещении частицы *A* из точки *1* в точку *2* по произвольному пути. Сила, действующая на частицу *A*, может быть представлена так $\vec{F} = \left(\frac{\alpha}{r^3}\right)\vec{r}$, где α - параметр для гравитационного взаимодействия равен $\alpha = -Gm_1m_2$. Вычислим с начала элементарную работу этой силы на перемещении· $d\vec{r}$.

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\alpha}{r^3}\right)\vec{r} \cdot d\vec{r} \tag{5.14}$$

Как и в предыдущем случае, скалярное произведение $\vec{r} \cdot d\vec{r} = r \cdot dr$ поэтому $dA = \left(\frac{\alpha}{r^2}\right)d\vec{r} = -d\left(\frac{\alpha}{r}\right)$.

Работа же этой силы на всем пути от точки *1* до точки *2*

$$A = -\int_1^2 d\left(\frac{\alpha}{r}\right) = \frac{\alpha}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2}. \tag{5.15}$$

Рассмотрим теперь работу однородной силы тяжести. Запишем эту силу в виде $\vec{F} = -mg\vec{k}$, где $\vec{k}$ орт вертикальной оси *z* с положительным направлением обозначен $\vec{k}$ (рис.5.4). Элементарная работа силы тяжести на перемещении$d\vec{r}$ равна $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -mg \cdot \vec{k} \cdot d\vec{r}$.

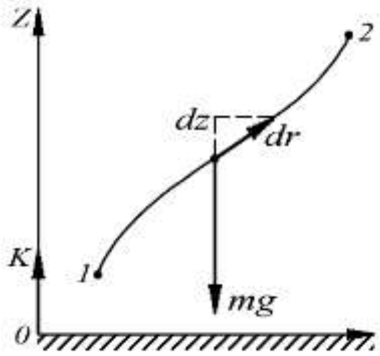


Рис. 5.4

Работа же данной силы на всем пути от точки *1* до точки *2*

$$A = -\int_1^2 d(mgz) = mg(z_1 - z_2) \tag{5.15}$$

Рассмотренные силы интересны в том отношении, что их работа, как видно из формул (5.13) –(5.15), не зависит от формы пути между точками 1 и 2, а зависит только от положения этих точек. Эта весьма важная особенность данных сил присуща, однако, не всем силам. Например, сила трения этим свойством не обладает: работа этой силы зависит не только от положения начальной и конечной точек, но и от формы пути между ними.

До сих пор речь шла о работе одной силы. Если же на частицу в процессе движения действуют несколько сил, результирующая которых$\vec{F} = \sum \vec{F_i}$, то нетрудно показать, что работа результирующей силы на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой из сил в отдельности на том же перемещении. Действительно,

$$A = \int \left(\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \cdots\right) d\vec{r} =$$

$$\int \overrightarrow{F_1}\, d\vec{r} + \int \overrightarrow{F_2}\, d\vec{r} + \int \overrightarrow{F_3}\, d\vec{r} + \cdots = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots. \qquad (5.16)$$

Введем в рассмотрение новую величину - мощность. Она используется для характеристики скорости, с которой совершается работа. Мощность, по определению, — это работа, совершаемая силой за единицу времени. Если за промежуток времени dt сила $\vec{F}$совершает работу, то мощность, развиваемая этой силой в данный момент времени, есть $N = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt}$. Учитывая, что $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$, получим

$$N=\vec{F}\cdot\vec{V} \qquad (5.17)$$

Единица мощности в системе СИ - Ватт, сокращенное обозначение Вт.

Таким образом, мощность, развиваемая силой, равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения данной силы. Как и работа, мощность - величина алгебраическая.

Зная мощность силы, можно найти и работу, которую совершает эта сила за промежуток времени t. В самом деле, представив подынтегральное выражение в (5.11) в виде $\vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\vec{V}dt = Ndt$ получим

$$A=\int_0^t Ndt \qquad (5.18)$$

Следует также обратить внимание на одно весьма существенное обстоятельство. Когда говорят о работе (или мощности), то необходимо в каждом конкретном случае четко указывать или представлять себе, работа какой именно силы (или сил) имеется в виду. В ином случае, как правило, неизбежны недоразумения.

Литература

1. Иванов, В. К. Физика. Механика, молекулярная физика и термодинамика: учебное пособие для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки бакалавров 16.03.01 "Техническая физика" / В. К. Иванов, А. Н. Ипатов; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, [Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций] Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. 162 с.

2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы [Электронный ресурс] / И. Е. Иродов. —12-е изд. (эл.). —М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.— 309 с.: ил.

3. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1986.− 400с.

4. Савельев И. В. Курс физики: учебное пособие для вузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям: [в Т. 1: Механика; Молекулярная физика Изд. 5-е, стер. 2016. 350 с. 5. 3 т.].

5. Сивухин Д. В. Общий курс физики: учебное пособие для физических специальностей вузов: [в 5 томах] Т. 2: Термодинамика и молекулярная физика/ Д. В. Сивухин. Изд. 6-е, стер. Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2014. 543 с.

6. Трофимова Т. И. Курс физики: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1999.− 542 с.

7. Физические величины: Справочник/ А.П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А.М. Братковский и др. Под.ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991.− 1232 с.

Разработал доцент кафедры физика Леонова Н. А.

ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Лекция 6. Энергия. Связь силы и потенциальной энергии.

1. Кинетическая энергия.
2. Потенциальная энергия.
3. Закон сохранения энергии.

1.Кинетическая энергия

Рассмотрим понятия энергия и кинетической энергии частицы. Пусть частица массы m движется под действием некоторой силы $\vec{F}$ (в общем случае эта сила может быть результирующей нескольких сил). Найдем элементарную работу, которую совершает эта сила на элементарном перемещении $d\vec{r}$ используя второй закон Ньютона:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt}, d\vec{r} = \vec{V}dt$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m\vec{V}d\vec{V},$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = d\left(\frac{mV^2}{2}\right). \qquad (6.1)$$

Отсюда видно, что работа результирующей силы идет на приращение некоторой величины, стоящей в скобках, которую называют кинетической энергией частицы.

$$E_k = \frac{mV^2}{2} \qquad (6.2)$$

Таким образом, приращение кинетической энергии частицы при элементарном перемещении равно:

$$dE_{\text{кин}} = dA,$$

$$E_{\text{кин}2} - E_{\text{кин}1} = dA, \qquad (6.3)$$

Приращение кинетической энергии частицы на некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на частицу на том же перемещении.

Уравнение (6.3) можно представить и в другой форме, поделив обе части его на соответствующий промежуток времени dt:

$$\frac{dE_{\text{кин}}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V} = N \qquad (6.4)$$

Это значит, что производная кинетической энергии частицы по времени равна мощности результирующей силы, действующей на частицу.

Уравнения (6.3) и (6.4) справедливы в инерциальных и неинерциальных системах отсчета. В последних кроме сил, действующих на рассматриваемую частицу со стороны каких-то тел (сил взаимодействия), необходимо учитывать и силы инерции. Поэтому под работой (мощностью) в этих уравнениях надо понимать алгебраическую сумму работ (мощностей) как сил взаимодействия, так и сил инерции.

2.Потенциальная энергия

Полем сил называют область пространства, в каждой точке которого на помещенную туда частицу действует сила, закономерно меняющаяся от точки к точке. Примером может служить поле силы тяжести Земли или поле сил сопротивления в потоке жидкости (газа). Если сила в каждой точке силового поля не зависит от времени, то такое поле называют стационарным. Ясно, что силовое поле, стационарное в одной системе отсчета, в другой системе может оказаться и нестационарным. В стационарном силовом поле сила зависит только от положения частицы.

Работа, которую совершают силы поля при перемещении частицы из точки *1* в точку *2*, зависит, вообще говоря, от пути. Однако среди стационарных силовых полей имеются такие, в которых эта работа не зависит от пути между точками 1 и 2. Этот класс полей, обладая рядом важнейших свойств, занимает особое место в физике. Рассмотрим свойства таких полей.

Введем определение: стационарное силовое поле, в котором работа силы поля на пути между двумя любыми точками не зависит от формы пути, а зависит только от положения этих точек, называется потенциальным, а сами силы - *консервативными.*

Если это условие не выполняется, то силовое поле не является потенциальным, а силы поля называют неконсервативными. К числу таких сил принадлежит, например, сила трения, так как работа этой силы зависит в общем случае от пути.

Покажем, что в потенциальном поле работа сил поля на любом замкнутом пути равна нулю. Действительно, любой замкнутый путь (рис. 6.1) можно разбить произвольно на две части: $1a2$ и $2b1$. Так как поле

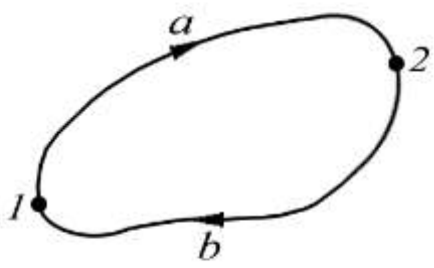


Рис. 6.1

потенциально, то, по условию $A_{12}^{(a)} = A_{12}^{(b)}$. С другой стороны, очевидно, что $A_{12}^{(a)} = -A_{21}^{(b)}$. Поэтому $A_{12}^{(a)} + A_{21}^{(b)} = A_{12}^{(a)} - A_{21}^{(b)} = 0$, что и требовалось доказать.

Наоборот, если работа сил поля на любом замкнутом пути равна нулю, то и работа этих сил на пути между произвольными точками 1 и 2 от формы пути не зависит, т. е., поле потенциально. Для доказательства выберем два произвольных пути: *1a2* и *1b2* (рис. 6.1). Составим из них замкнутый путь *1a2b1.* Работа на этом замкнутом пути по условию равна нулю

Таким образом, равенство нулю работы сил поля на любом замкнутом пути есть необходимое и достаточное условие независимости работы от формы пути, и может считаться отличительным признаком любого потенциального поля сил.

Рассмотрим важный случай поля центральных сил. Всякое силовое поле вызывается действием определенных тел. Сила, действующая на частицу А в таком поле, обусловлена взаимодействием этой частицы с данными телами. Если силы, зависят только от расстояния между взаимодействующими частицами и направлены по прямой, соединяющей эти частицы, от их называют центральными. Такими примерами служат силы гравитационные, кулоновские и упругие.

Центральную силу, действующую на частицу A со стороны частицы B, можно представить в общем виде:

$$\vec{F} = f(r)\overrightarrow{e_r} \quad (6.5)$$

где $f(r)$ - функция, зависящая при данном характере взаимодействия только от r - расстояния между частицами;

$\overrightarrow{e_r}$ — единичный вектор, задающий направление радиус-вектора частицы А относительно частицы В (рис.6.2).

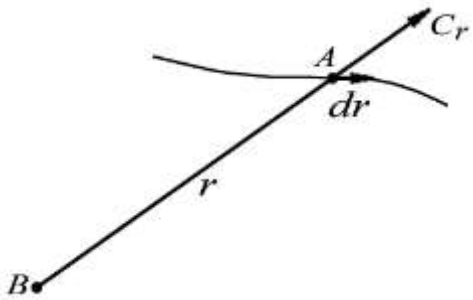


Рис. 6.2

Докажем, что всякое стационарное поле центральных сил потенциально. Для этого найдем работу центральных сил в случае, когда силовое поле вызвано наличием одной неподвижной частицы В, а затем обобщим результат на произвольный случай. Элементарная работа силы (6.5) на перемещении $d\vec{r}$ есть

$$dA = \overrightarrow{Fd\vec{r}} = f(r)\overrightarrow{e_r}d\vec{r} \quad (6.6)$$

Работа же этой силы на произвольном пути от точки 1 до точки 2

$$A_{12} = \int_1^2 f(r)dr \quad (6.7)$$

Полученное выражение зависит, очевидно, только от вида функции $f(r)$, т. е,. от характера взаимодействия и от значений начального и конечного расстояний между частицами А и В. От формы пути оно никак не зависит. Это и означает, что данное силовое поле потенциально.

Обобщим полученный результат на стационарное силовое поле, вызванное наличием совокупности неподвижных частиц, действующих на частицу А с силами $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$, каждая из которых является центральной. В этом случае работа результирующей силы при перемещении частицы А из одной точки в другую равна алгебраической сумме работ отдельных сил. А так как работа каждой из этих сил не зависит от формы пути, то и работа результирующей силы от нее также не зависит. Таким образом, действительно, любое стационарное поле центральных сил потенциально.

Введем понятие потенциальной энергии частицы в поле. То, что работа сил потенциального поля зависит только от начального и конечного положений частицы, дает возможность ввести чрезвычайно важное понятие потенциальной энергии.

Частица перемещается в потенциальном поле сил из разных точек P в фиксированную точку O. Так как работа сил поля не зависит от формы пути, то остается зависимость ее только от положения точки P (при фиксированной точке O). А это значит, что данная работа будет некоторой функцией радиус-вектора $d\vec{r}$nточки *P*. Обозначив эту функцию $U(\overrightarrow{r})$, запишем

$$A_{\text{po}} = \int_{\text{P}}^{\text{O}} \vec{F} d\vec{r} = U(\vec{r}) \tag{6.8}$$

Функцию $U(\vec{r})$ называют потенциальной энергией частицы в данном поле.

Теперь найдем работу сил поля при перемещении частицы из точки *1* в точку *2*(рис. 6.3). Так как работа не зависит от пути, выберем путь,

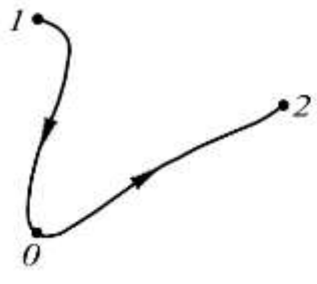


Рис. 6.3

проходящий через точку *O*. Тогда работа на пути *1O2* может быть представлена в виде $A_{12} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O}$, или учитывая (6.8)

$$A_{\text{ро}} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = U_1 - U_2 \tag{6.9}$$

Выражение, стоящее справа, есть убыль потенциальной энергии, т. е. разность значений потенциальной энергии частицы в начальной и конечной точках пути. Таким образом, работа сил поля на пути *1-2* равна убыли потенциальной энергии частицы в данном поле.

Очевидно, частице, находящейся в точке *O* поля, всегда можно приписать любое заранее выбранное значение потенциальной энергии. Это соответствует тому обстоятельству, что путем измерения работы может быть определена лишь разность потенциальных энергий в двух точках поля, но не ее абсолютное значение. Однако, как только фиксирована потенциальная энергия в какой-либо точке, значения ее во всех остальных точках поля однозначно определяются формулой (6.10).

Данная формула дает возможность найти выражение для любого потенциального ноля сил. Для этого достаточно вычислить работу, совершаемую силами поля на любом пути между двумя точками, и представить ее в виде убыли некоторой функции, которая и есть потенциальная энергия.

Именно так и было сделано при вычислении работы в полях упругой и гравитационной (кулоновской) сил, а также в однородном поле тяжести.

Виды потенциальной энергии

Таблица 1

в поле упругой силы	$U(r) = \frac{kr^2}{2}$
в поле точечной массы	$U(r) = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$
в поле заряда	$U(r) = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$
в однородном поле сил тяжести	$U(r) = mgZ$

Потенциальная энергия — это функция, которая определяется с точностью до прибавления некоторой произвольной постоянной. Это обстоятельство, однако, совершенно несущественно, ибо во все формулы входит только разность значений в двух положениях частицы. Поэтому произвольная постоянная, одинаковая для всех точек поля, выпадает. В связи с этим ее обычно опускают, что и сделано в трех предыдущих выражениях.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Потенциальную энергию следует относить не к частице, а к системе взаимодействующих между собой частицы и тел, вызывающих силовое поле. При данном характере взаимодействия потенциальная энергия взаимодействия частицы с данными телами зависит только от положения частицы относительно этих тел.

Определим связь потенциальной энергии и силы поля. Взаимодействие частицы с окружающими телами можно описывать двумя способами: с помощью сил или с помощью потенциальной энергии. В классической механике оба способа используют одинаково широко. Однако первый способ обладает несколько большей общностью, ибо он применим и к таким силам, для которых нельзя ввести потенциальную энергию (например, к силам трения). Второй же способ применим только в случае консервативных сил.

При перемещении частицы из одной точки потенциального поля в другую, работа, которую производят силы поля, может быть представлена как убыль потенциальной энергии частицы. Можно показать связь между силой и потенциальной энергии.

$$F_S dS = -dU,$$

$$F_S = -\frac{\partial U}{\partial S} \qquad (6.10)$$

Перемещение можно взять в любом направлении, в частности вдоль координатных осей x, y, z. Если перемещение, например, параллельно оси x, то его можно представить так: $d\vec{r} = \vec{\imath} dx$. Тогда работа силы на перемещении, параллельном оси x, $\vec{F}d\vec{r} = F_x dx$. Подставив последнее выражение в уравнение (6.10), получим

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (6.11)$$

где символ частной производной означает, что потенциальная энергия *U(x, y, z)* при дифференцировании должна рассматриваться как функция одного аргумента x, остальные же аргументы должны оставаться при этом постоянными.

Итак, взяв с обратными знаками частные производные функции U по x, *y* и *z,* мы найдем проекции $F_x, F_y, \ F_z$ вектора силы на орты. Отсюда легко найти и сам вектор: $\vec{F} = F_x\,\vec{\imath} + F_y\,\vec{\jmath} + F_z\,\vec{k}$, или $\vec{F} = (\frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial x}\,\vec{k})$

Величину, стоящую в скобках, называют градиентом скалярной функции *U* и обозначают *gradU* или ∇U.

Таким образом, связь между силой поля и потенциальной энергией как функцией координат можно представить в следующем компактном виде:

$$\vec{F} = -\nabla U \quad (6.11)$$

Сила поля равна со знаком минус градиенту потенциальной энергии частицы в данной точке поля.

Смысл градиента станет нагляднее и яснее, если ввести понятие эквипотенциальной поверхности - поверхности, во всех точках которой потенциальная энергия *U* имеет одно и то же значение. Ясно, что каждому значению *U* соответствует своя эквипотенциальная поверхность.

3. Закон сохранения энергии

Приращение кинетической энергии частицы равно элементарной работе результирующей всех сил, действующих на частицу. Если частица находится в интересующем нас потенциальном поле, то на нее действует консервативная сила F_x со стороны этого потенциального поля. Кроме того, на частицу могут действовать и другие силы, имеющие иное происхождение. Назовем их сторонними силами $F_{ст}$. Результирующая всех сил, действующих на частицу, может быть представлена в виде $F = F_x + F_{ст}$. Работа всех этих сил идет на приращение кинетической энергии частицы, работа сил поля равна убыли потенциальной энергии частицы.

$$dE_{кин} + dU = d(E_{кин} + U) \quad (6.12)$$

Отсюда видно, что работа сторонних сил идет на приращение величины $E_{кин} + U$. Эту величину - сумму кинетической и потенциальной энергии - называют полной механической энергией частицы в поле:

$$E_{кин} + U \quad (6.13)$$

Полная механическая энергия E, как и потенциальная, определяется с точностью до прибавления несущественной произвольной постоянной.

Полная механическая энергия частицы может измениться под действием только сторонних сил. Отсюда непосредственно вытекает закон сохранения полной механической энергии частицы во внешнем поле: если сторонние силы отсутствуют или таковы, что алгебраическая сумма их мощностей равна нулю в течение интересующего нас времени, то полная механическая энергия частицы остается постоянной за это время: $E_{кин} + U = const$.

Закон сохранения позволяет достаточно легко получать ответы на ряд важных вопросов без привлечения уравнений движения, что, как мы знаем, часто сопряжено с проведением громоздких и утомительных расчетов. Именно это обстоятельство и превращает законы сохранения в весьма действенный инструмент исследования.

Литература

1.Иванов, В. К. Физика. Механика, молекулярная физика и термодинамика: учебное пособие для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки бакалавров 16.03.01 "Техническая физика" / В. К. Иванов, А. Н. Ипатов; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, [Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций] Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. 162 с.

2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы [Электронный ресурс] / И. Е. Иродов. —12-е изд. (эл.). —М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.—309 с.: ил.

3. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1986.− 400с.

4. Савельев И. В. Курс физики: учебное пособие для вузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям: [в Т. 1: Механика; Молекулярная физика Изд. 5-е, стер. 2016. 350 с. 5. 3 т.].

5. Сивухин Д. В. Общий курс физики: учебное пособие для физических специальностей вузов: [в 5 томах] Т. 2: Термодинамика и молекулярная физика/ Д. В. Сивухин. Изд. 6-е, стер. Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2014. 543 с.

6. Трофимова Т. И. Курс физики: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1999.− 542 с.

7. Физические величины: Справочник/ А.П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А.М. Братковский и др. Под.ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991.− 1232 с.

Разработал доцент кафедры физика Леонова Н. А.

Лекция 7. Динамика вращательного движения (часть 1)

1. Момент силы.

2. Момент импульса.

3.Закон изменения момента импульса частицы.

4. Закон сохранения момента импульса.

5. Основное уравнение динамики вращательного движения.

1. Момент силы.

Ясно, что закручивать гайку ключом с длинной ручкой легче, чем с короткой (рис. 7.1). Из этого следует, что кроме модуля силы и ее направления, есть и другая величина − точка приложения силы, характеризующая движение (в данном случае это вращательное движение). Для обозначения этой величины используется момент силы.

Рис.7.1

Момент силы относительно точки О − это вектор $\vec{M}$, модуль которого равен

$$M = Fl = Fr\sin\alpha, \tag{7.1}$$

а направление его перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора $\vec{r}$ и $\vec{F}$ (рис. 7.2).

Получается, что момент силы можно представить в виде векторного произведения радиус-вектора (проведенного в точку приложения силы из точки *O*, выбранной в данном случае за начало координат) и силы $\vec{F}$

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \tag{7.2}$$

Зная свойства векторного произведения, можно заметить, что направление момента силы связано с направлениями векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$ правилом правого винта. Приложен момент силы к точке *O* (изображено на рисунке 7.2).

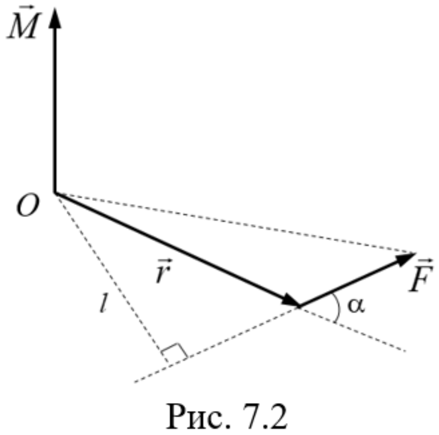


Рис. 7.2

2. Момент импульса.

По тем же правилам можно ввести и другую физическую величину, которую называют *моментом импульса*. Момент импульса обозначается буквой $\vec{L}$ и равен

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{\upsilon}]. \qquad (7.3)$$

Его модуль

$$L = m\upsilon r \sin\alpha, \qquad (7.4)$$

а направление определяется так же, как и момента силы. Приложен момент импульса так же к точке O (рис.7.3).

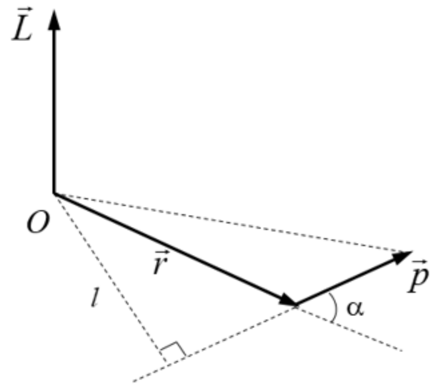


Рис. 7.3

Частица обладает моментом импульса, независимо от формы траектории, по которой она движется. Рассмотрим в качестве примера расчета момента импульса два частных случая:

1) Частица движется равномерно по прямолинейной траектории (рис. 7.4). Независимо от того, где находится частица, модуль и направление момента импульса $\vec{L}$ останется неизменным. Модуль момента импульса в этом случае равен

$$L = m\upsilon r \sin\alpha = m\upsilon l.$$

Величина l называется плечом импульса.

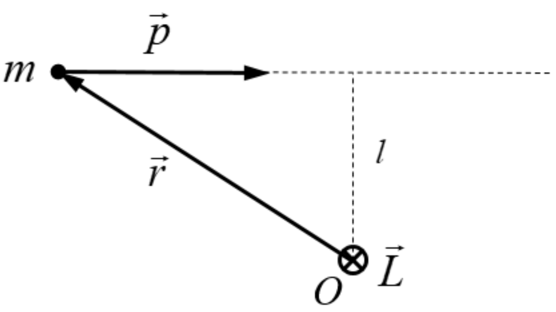


Рис. 7.4

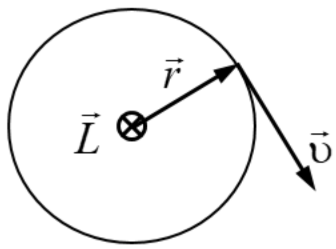


Рис. 7.5

2) Частица движется по окружности радиуса r (рис.7.5). Модуль момента импульса относительно центра окружности

$$L = m\upsilon r .$$

Направление вектора $\vec{L}$ при движении частицы остается неизменным − перпендикулярно плоскости рисунка «от нас».

3. Закон изменения момента импульса частицы.

Выясним, какая механическая величина ответственна за изменение вектора $\vec{L}$ в данной системе отсчета. Для этого продифференцируем выражение для момента импульса (7.3) по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right]. \quad (7.5)$$

Так как точка O неподвижна (материальная точка движется так, как изображено на рисунке 7.3), то вектор $\frac{d\vec{r}}{dt}$ равен скорости $\vec{\upsilon}$ частицы, то есть совпадает по направлению с вектором импульса, поэтому первая скобка в (7.5) равна нулю. Далее, согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

где $\vec{F}$ − равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке. Следовательно, уравнение приобретает вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \quad (7.6)$$

Величина, стоящая в правой части уравнения (7.6), − это момент сил, определенный относительно точки O.

Итак, производная по времени от момента импульса $\vec{L}$ частицы относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета равна моменту $\vec{M}$ равнодействующей силы $\vec{F}$ относительно той же точки

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (7.7)$$

Это закон изменения момента импульса одной частицы. Этот закон представляет собой три независимых уравнения для каждой из проекций момента импульса. Если какая-нибудь из проекций момента силы равна нулю, то говорят, что соответствующая проекция момента импульса сохраняется.

4. Закон сохранения момента импульса.

Теперь рассмотрим систему, состоящую из N частиц, которые взаимодействуют между собой и с окружающей средой. Назовем моментом импульса системы частиц сумму моментов импульса отдельных частиц. Вычислим производную по времени от момента импульса системы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} \vec{M}_{ij}^{\,внутр} + \vec{M}_i^{\,внешн} \right) \qquad (7.8)$$

Так как все взаимодействия внутри системы подчиняются III закону Ньютона, то $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ и

$$\vec{M}_{ij}^{*} = \vec{M}_{ij} + \vec{M}_{ji} = \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}\right] + \left[\vec{r}_j, \vec{F}_{ji}\right] = \left[\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{F}_{ij}\right] = -\left[\vec{r}_{ij}, \vec{F}_{ij}\right] = 0,$$

так как эти вектора направлены по одной прямой. Тогда уравнение для изменения момента импульса приобретает вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\,внешн} = \vec{M}^{\,внешн} \qquad (7.9)$$

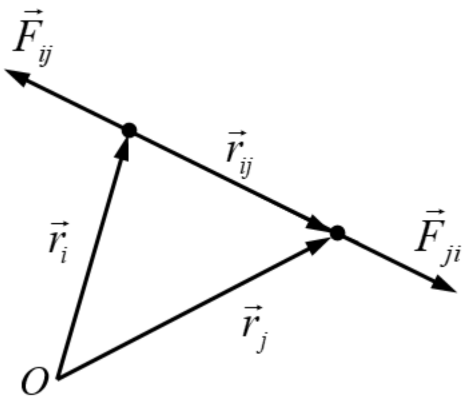


Рис. 7.6

Таким образом, момент импульса системы взаимодействующих частиц может изменяться только под действием моментов внешних сил − это утверждение составляет закон изменения момента импульса системы. Если же на систему моменты внешних сил не действуют (система замкнута с точки зрения момента импульса), то момент импульса такой системы сохраняется с течением времени. Это утверждение составляет *закон сохранения момента импульса системы частиц.*

Демонстрации закона сохранения момента импульса можно посмотреть здесь: https://youtu.be/zjY9PqvuluM и веселая https://youtu.be/ywFcukXHjPE. Наряду с законами сохранения импульса и энергии, закон сохранения момента импульса является фундаментальным законом природы и играет определяющую роль при рассмотрении любых природных явлений.

5. Основное уравнение динамики вращательного движения.

Переходим к изучению движения абсолютно твердого тела (АТТ). В отличие от материальной точки, АТТ имеет размеры и может двигаться не только поступательно, но и вращаться относительно некоторой оси. Определим понятия поступательного и вращательного движения.

Поступательное движение − это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, перемещается параллельно самой себе. При этом все точки тела движутся с одинаковыми линейными скоростями и ускорениями, а их траектории имеют одинаковый вид. Для поступательного движения справедлив II закон Ньютона для материальной точки, в качестве которой удобно выбрать центр масс. Таким образом, теорема о движении центра масс полностью описывает поступательное движение абсолютно твердого тела.

Вращательное движение − это движение, при котором хотя бы одна точка тела остается неподвижной. Если АТТ вращается вокруг неподвижной оси, то все точки тела имеют одинаковые угловые скорости и угловые ускорения, а их траекториями являются различные окружности. В этом смысле вращательное движение удобно описывать угловыми переменными: φ, ω, β.

Таким образом, движение АТТ всегда можно разделить на поступательное движение центра масс и вращение относительно него и изучать их отдельно. Поэтому нашей задачей теперь является получение уравнения для вращательного движения АТТ вокруг неподвижной оси.

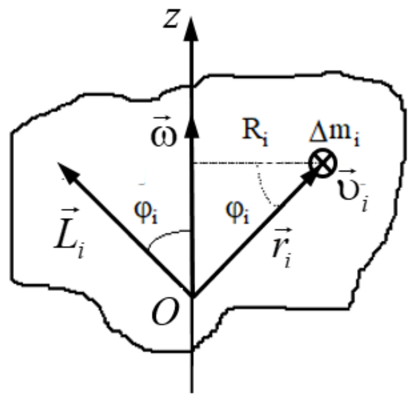


Рис. 7.7

Мысленно разобьем тело, вращающееся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$, на элементарные массы Δm_i. На рисунке 7.7

изображено положение тела относительно оси вращения. Ось вращения и элементарная масса лежат в плоскости чертежа. Скорость $\vec{\upsilon}_i$ направлена за чертеж. Момент импульса $\vec{L}_i$ массы Δm_i перпендикулярен к векторам $\vec{\upsilon}_i$ и $\vec{r}_i$. Расстояние массы Δm_i от оси вращения равно

$$R_i = r_i \cos\varphi_i.$$

По определению момента импульса материальной точки

$$\vec{L}_i = \Delta m_i \; [\vec{r}_i, \vec{\upsilon}_i].$$

Здесь $\vec{r}_i$ - радиус-вектор, определяющий положение массы Δm_i относительно точки O, $\vec{\upsilon}_i$ − скорость i - той элементарной массы.

Момент импульса тела $\vec{L}$ равен сумме моментов импульса элементарных масс:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \Delta m_i [\vec{r}_i, \vec{\upsilon}_i]. \tag{7.10}$$

Из рисунка 7.7 следует, что в случае несимметричного тела векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{L}$ неколлинеарные. Поэтому при равномерном вращении момент импульса описывает конус вокруг оси вращения.

Для твердого тела, как и для системы материальных точек, справедлив закон изменения момента импульса. Запишем его в проекции на ось вращения, которую обозначим за ось z:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \tag{7.11}$$

Найдем момент импульса АТТ относительно оси вращения z, то есть проекцию вектора $\vec{L}$ на ось z. Из рисунка 7.7 можно сделать вывод, что

$$L_{zi} = L_i \cos\varphi_i.$$

Поскольку угол между векторами $\vec{r}_i$ и $\vec{\upsilon}_i$ прямой,

$$L_i = \Delta m_i r_i \upsilon_i.$$

Следовательно,

$$L_{zi} = \Delta m_i r_i \upsilon_i \cos\varphi_i = \Delta m_i R_i \; \upsilon_i, \tag{7.12}$$

где R_i − расстояние массы Δm_i от оси вращения.

Зная, что $\upsilon_i = \omega R_i$, получим

$$L_{zi} = \omega R_i^2 \Delta m_i.$$

Проекция момента импульса тела L_z равна сумме проекций L_{zi}:

$$L_z = \sum L_{zi} = \sum \omega R_i^2 \Delta m_i = \omega \sum R_i^2 \Delta m_i. \tag{7.13}$$

Полученное выражение не зависит от положения на оси вращения точки О, относительно которой определяется момент импульса $\vec{L}$.

Величина же

$$I_z = \sum R_i^2 \Delta m_i, \tag{7.14}$$

равная сумме произведений элементарных масс на квадрат их расстояний от некоторой оси, называется *моментом инерции тела* относительно этой оси. Всякое тело, независимо от того, вращается оно или покоится, обладает моментом инерции относительно любой оси, подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется оно или покоится.

Теперь проекцию на ось z момента импульса АТТ (7.14) можно представить в виде

$$L_z = I_z \omega. \tag{7.15}$$

Принимая во внимание то, что для АТТ момент инерции относительно оси есть величина неизменная, получаем основное уравнение вращательного движения АТТ:

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z \tag{7.16}$$

или

$$I_z \beta_z = M_z. \tag{7.17}$$

Это уравнение заменяет второй закон Ньютона в случае вращательного движения. Роль массы в нем играет момент инерции, а роль силы − момент силы.

Литература

1. Иванов, В. К. Физика. Механика, молекулярная физика и термодинамика : учебное пособие для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки бакалавров 16.03.01 "Техническая физика" / В. К. Иванов, А. Н. Ипатов ; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, [Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций]Санкт-Петербург : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. 162 с.
2. Иродов И. Е. Физика макросистем : основные законы : учебное пособие / И. Е. Иродов. 8-е изд. Москва : Лаборатория знаний, 2020. 210 с.
3. Савельев И.В. Курс физики : учебное пособие для вузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям : [в 3 т.]. Т. 1: Механика; Молекулярная физика Изд. 5-е, стер. 2016. 350 с.

Разработал доцент кафедры физики
Васильев А.Э.

Лекция 8. Динамика вращательного движения (часть 2)

1. Тензор инерции.
2. Вычисление осевых моментов инерции.
3. Теорема Штейнера.

1. Тензор инерции.

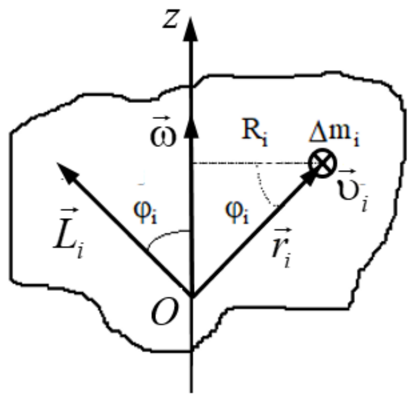


Рис. 8.1

Итак, мы получили новую величину – момент инерции относительно оси. Но если движение происходит относительно нескольких осей, то одного осевого момента инерции для описания недостаточно. Необходимо получить общие уравнения, связывающие момент импульса АТТ и угловую скорость. Для упрощения расчетов воспользуемся представлением о теле как о совокупности материальных точек массы Δm_i (рис.8.1). Запишем общее выражение для вектора момента импульса

$$\vec{L} = \sum \Delta m_i [\vec{r}_i, \vec{\upsilon}_i].$$

Так как $\vec{\upsilon}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$, то

$$\vec{L} = \sum \Delta m_i [\vec{r}_i [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] = \sum \Delta m_i r_i^2 \vec{\omega} - \sum \Delta m_i \vec{r}_i (\vec{\omega}\, \vec{r}_i). \qquad (8.1)$$

При получении этого результата использовалась знаменитая формула «бац минус цаб» $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B}\left(\vec{A}\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}\vec{B}\right)$. Тогда

$$\vec{L} = \vec{\omega} \sum \Delta m_i r_i^2 - \sum \Delta m_i \vec{r}_i (\vec{\omega}, \vec{r}_i). \qquad (8.2)$$

Уже в этой формуле заложена зависимость между $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ сложнее, чем $\vec{L} = I\, \vec{\omega}$. Теперь учтем, что

$$\vec{r}_i\, \vec{\omega} = \omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i$$

и $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$.

Тогда проекция момента импульса (8.2) на ось (например, x) будет выглядеть так:

$$L_x = \omega_x \sum \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_i^2) - \sum \Delta m_i x_i y_i \omega_y - \sum \Delta m_i x_i z_i \omega_z.$$

В общем случае это можно записать так:

$$L_x = I_{xx}\, \omega_x + I_{xy}\, \omega_y + I_{xz}\, \omega_z,$$

$$L_y = I_{yx}\, \omega_x + I_{yy}\, \omega_y + I_{yz}\, \omega_z, \qquad (8.3)$$

$$L_z = I_{zx}\, \omega_x + I_{zy}\, \omega_y + I_{zz}\, \omega_z,$$

где $I_{xx} = \sum\Delta m_i(y_i^2 + z_i^2)$, $I_{xy} = -\sum\Delta m_i x_i y_i$ и так далее.

Из этих формул ясно, что $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$, поэтому из девяти величин I_{xx}, I_{xy} ... различны лишь шесть. Величины I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} называются *осевыми моментами инерции*, а $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, $I_{yz} = I_{zy}$ называются *центробежными моментами инерции.* Совокупность величин, изображенных ниже, называется **тензором инерции**.

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Величины I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} являются диагональными элементами тензора, а остальные − недиагональными. В данном случае величины, расположенные симметрично относительно диагонали, равны. Такой тензор называется симметричным. Приведенный тензор осуществляет связь между двумя векторами − это тензор второго ранга. Скаляр в этом ряду является тензором нулевого ранга, а вектор − тензором первого ранга. Значения компонент любого тензора зависят от выбора системы координат. Для каждого тензора существует такая система координат, в которой недиагональные компоненты обращаются в ноль. Такой тензор называется диагональным, а оси координат − *главными осями тензора*. Соответственно, величины $I_x = I_{xx}$, $I_y = I_{yy}$, $I_z = I_{zz}$ называются *главными моментами инерции.* Из всех компонент тензора наиболее важное значение имеет осевой момент инерции

$$I_{zz} = \sum\Delta m_i(r_i^2 - z_i^2) = \sum\Delta m_i R_i^2, \tag{8.4}$$

который был получен ранее. В большинстве случаев с помощью его удается решить поставленную задачу.

2. Вычисление осевых моментов инерции.

Полученная формула (8.4) для осевого момента АТТ соответствует приближению набора МТ. Если же переходить к континуальному пределу (сплошному телу), то сумму необходимо заменить интегралом следующего вида

$$I_{zz} = \int_m R^2 dm = \int_V \rho R^2 dV\,, \tag{8.5}$$

где ρ − плотность тела, а R − расстояние от элементарного объема dV до оси вращения. Если тело однородное, то плотность его одинакова во всех точках и

$$I_{zz} = \rho \int_V R^2 dV\,. \tag{8.6}$$

Вычисление такого интеграла в общем случае достаточно сложно.

Рассмотрим несколько простых случаев.

1). Момент инерции материальной точки (масса m, расстояние от оси − R).
В этом случае интегрирование тривиально и в результате

$$I_{\text{МТ}} = mR^2. \tag{8.7}$$

2). Момент инерции однородного стержня (масса m, длина l, ось проходит через центр масс (рис. 8.2)). Стержень однородный, поэтому

$$dV = Sdx,\ R = x,\ \rho = m/V = m/(Sl),$$

тогда

$$I_z^{cm} = 2\frac{m}{l}\int_0^{l/2} x^2 dx = 2\frac{m}{l}\cdot\frac{l}{3}\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{ml^2}{12}\,. \tag{8.8}$$

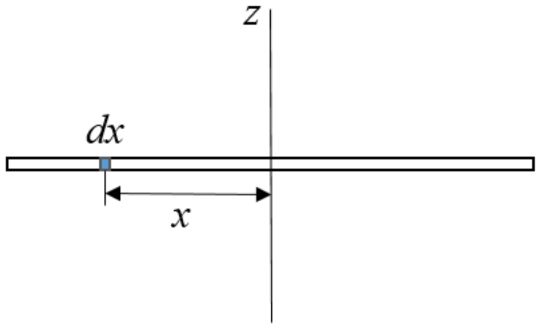


Рис. 8.2

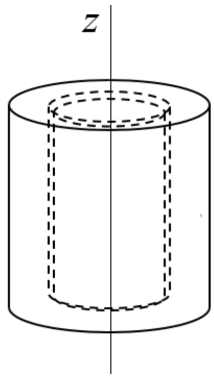


Рис. 8.3

3). Момент инерции цилиндра (масса m, радиус r, относительно оси симметрии).

Из всего объема цилиндра выделим тонкий цилиндрический слой толщиной dR (отмечен на рисунке 8.3 пунктиром), площадью $2\pi Rh$, где h − высота цилиндра, а R – расстояние от выделенного объема до оси вращения. Тогда масса этой части равна $dm = 2\pi\rho Rh\, dR$ и

$$dI_z = R^2\, dm = 2\pi\rho h R^3\, dR.$$

Зная, что $m = \rho V = \rho\pi r^2 h$, получаем для всего цилиндра

$$I_z^{цил} = 2\pi\rho h\int_0^r R^3 dR = \frac{mr^2}{2}. \tag{8.9}$$

4). Момент инерции шара (масса m, радиус $R_ш$, ось проходит через центр шара).

Начало отсчета снова выберем на оси и в качестве dV выберем ту часть объема тела, которая находится на расстоянии R от оси вращения и видна под углом θ к оси (рис.8.4):

$$dV = 2\pi r^2 \sin\theta dr d\theta.$$

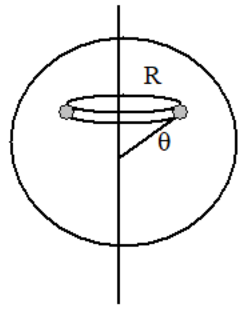


Рис.8.4

Это объем бублика радиусом $r\sin\theta$ и сечением $rd\theta\times dr$. Теперь подставим этот объем в формулу для осевого момента

$$dI_z = \rho R^2 dV = 2\pi\rho r^4 \sin^3\theta\, dr\, d\theta.$$

Это момент инерции бублика, а для шара получаем

$$I_z^{шар} = 2\pi\rho\int_0^{R_ш} r^4 dr\int_0^{\pi} sin^3\vartheta d\vartheta = \frac{4\pi R_ш^3}{3}\cdot\rho\cdot\frac{2R_ш^2}{5} = \frac{2}{5}mR_ш^2. \tag{8.10}$$

Все эти моменты инерции определены относительно осей симметрии тел (то есть проходят через центр масс симметричных фигур).

3. Теорема Штейнера.

Получим формулу, связывающую моменты инерции тел при их вращении вокруг оси, параллельной оси, проведенной через центр масс, и отстоящей от нее на расстояние a. Итак, рассмотрим две параллельные оси: одна проходит через центр масс перпендикулярно рисунку, а

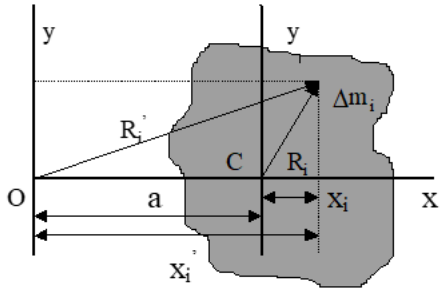


Рис.8.5

вторая − на расстоянии a от первой оси и тоже перпендикулярно рисунку. Момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку О, будет равен

$I = \sum R_i'^2 \Delta m_\mathrm{i} = \sum(x_i'^2+y_i'^2)\Delta m_i = \sum[(x_i+a)^2+y_i^2]\Delta m_i = \sum(x_i^2+2x_i a+\mathrm{a}^2+\mathrm{y_i}^2)\Delta m_\mathrm{i} = \sum R_i^2 \Delta m_i+2a \sum x_i \Delta m_i+a^2 \sum\Delta m_i = I_c+ma^2+2amx_c = I_c+ma^2$.

Так как одна из наших осей проходит через центр масс, то $x_c = 0$, поэтому теорема Штейнера звучит так:

Момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$I = I_c + ma^2. \qquad (8.11)$$

Литература

1. Иванов, В. К. Физика. Механика, молекулярная физика и термодинамика : учебное пособие для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки бакалавров 16.03.01 "Техническая физика" / В. К. Иванов, А. Н. Ипатов ; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, [Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций]Санкт-Петербург : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. 162 с.
2. Иродов И. Е. Физика макросистем : основные законы : учебное пособие / И. Е. Иродов. 8-е изд. Москва : Лаборатория знаний, 2020. 210 с.
3. Савельев И.В. Курс физики : учебное пособие для вузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям : [в 3 т.]. Т. 1: Механика; Молекулярная физика Изд. 5-е, стер. 2016. 350 с.

Разработал доцент кафедры физики
Васильев А.Э.

ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Лекция 9. Динамика вращательного движения (часть 3)

1. Кинетическая энергия вращающегося и катящегося тела.
2. Статика. Условия равновесия АТТ. Виды равновесия.
3. Гироскопы. Гироскопический эффект.

1. Кинетическая энергия вращающегося и катящегося тела.

Если АТТ вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, с угловой скоростью $\vec{\omega}$, то элементарная масса Δm_i, отстоящая от оси вращения на расстояние R_i (рис. 9.1) , обладает скоростью $\upsilon_i = \omega R_i$. Следовательно, ее кинетическая энергия равна

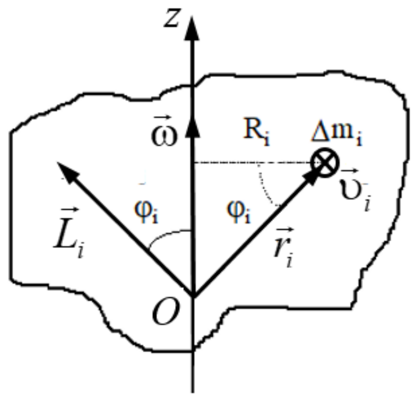


Рис. 9.1

$$\Delta E_{ki} = \frac{1}{2}\Delta m_i \upsilon_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i \omega^2 R_i^2 .$$

Сумма всех таких энергий дает полную кинетическую энергию тела при его вращении

$$E_k^{вр} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum \Delta m_i R_i^2 = \frac{1}{2} I_c \omega^2 . \tag{9.1}$$

Это выражение аналогично выражению для кинетической энергии поступательного движения, но роль массы здесь выполняет момент инерции, а роль линейной скорости − угловая.

Теперь выясним, что может изменить кинетическую энергию вращающегося тела. Найдем работу, совершаемую внешней силой при вращении АТТ. Рассмотрим частный случай, когда сила направлена по касательной к окружности, по которой движется точка приложения силы (рис. 9.2). В этом случае $\vec{F} \,||\, d\vec{s}$, то есть сила и перемещение параллельны и

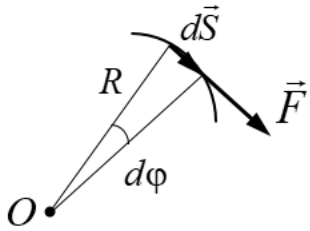


Рис. 9.2

$$dA = F_s ds = F_s R d\varphi = M_z d\varphi.$$

Если же сила направлена произвольно по отношению к движению, то ее можно разложить на три составляющие: параллельно оси вращения $\vec{F}_{||}$ (ее момент относительно оси равен нулю), параллельно радиусу вращения $\vec{F}_{\perp}$ (ее момент тоже равен нулю) и по касательной к окружности $\vec{F}_\tau$ (это и есть рассмотренная выше сила). Таким образом, общая формула такова

$$dA = M_\omega d\varphi. \tag{9.2}$$

Для мощности получаем такую формулу

$$P = M_\omega\,\omega = \vec{M}\,\vec{\omega}. \tag{9.3}$$

Если же тело и вращается, и движется поступательно, то удобно представлять его кинетическую энергию в виде суммы поступательной части и энергии вращения, определенной относительно оси, проходящей через центр масс. Тогда по теореме Кенига получаем:

$$E_k = E_k^{пост} + E_k^{вр} = \frac{m\upsilon_{цм}^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}. \tag{9.4}$$

В качестве примера можно определить кинетическую энергию обруча, катящегося без скольжения по горизонтальной поверхности. В этом случае $\omega = \upsilon / R$ и

$$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{mR^2\left(\upsilon / R\right)^2}{2} = m\upsilon^2.$$

2. Статика. Условия равновесия АТТ.

Если тело, к которому приложены силы, покоится, то говорят, что это тело находится в равновесии. Выяснить условия равновесия реальных тел непросто, так как все реальные тела под влиянием приложенных к ним сил изменяют свою форму и размеры, или, как говорят, деформируются. А деформации существенно влияют на равновесие тел. Во многих случаях, которые встречаются ни практике, деформациями можно пренебречь и вести расчет так, как если бы тела были недеформируемыми, то есть абсолютно твердыми. Изучив условия равновесия АТТ, мы найдем условия равновесия реальных тел в тех случаях, когда их деформациями можно пренебречь. Таким образом, раздел механики, в котором изучается равновесие АТТ, называется статикой. Отметим, что деформации тел и их роль в равновесии изучаются в других курсах, например, в курсе сопротивления материалов.

Мы уже изучили два вида механического движения: поступательное и вращательное. Следовательно, чтобы тело находилось в состоянии механического равновесия необходимо выполнение двух условий:

А) отсутствие поступательного движения;

Б) отсутствие вращательного движения.

Поступательное движение АТТ определяется теоремой о движении центра масс:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \vec{F}_{внешн}\,. \tag{9.5}$$

Поэтому первое условие равновесия будет выглядеть так:

$$\sum_{i=1}^{N_{пост}} \vec{F}_i^{\,пост} = 0\,. \tag{9.6}$$

Векторная сумма всех внешних сил (в количестве $N_{пост}$), действующих на тело, должна равняться нулю.

Вращательное движение АТТ определяется основным уравнением вращательного движения:

$$I_z\frac{d\omega_z}{dt} = M_z\,. \tag{9.7}$$

Тогда второе условие равновесия будет выглядеть так:

$$\sum_{i=1}^{N_{вращ}} \vec{M}_i = 0\,. \tag{9.8}$$

Векторная сумма всех моментов внешних сил (в количестве $N_{вращ}$), действующих на тело, должна равняться нулю.

Оказывается, что даже выполнение этих двух условий равновесия не гарантирует стабильности и устойчивости тела или конструкции. В подавляющем числе случаев необходимо иметь конструкцию, которая бы не падала и не разрушалась. В таком случае говорят об *устойчивом равновесии* – это такое состояние тела, при котором при отклонении тела из положения равновесия оно возвращается в исходное положение. Пример такого равновесия приведен на рисунке 9.3.

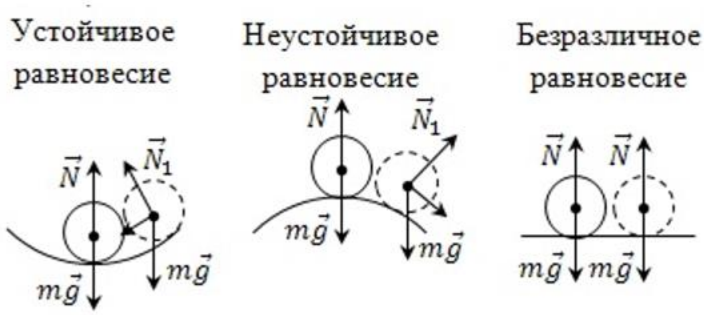


Рис.9.3

Из рисунка видно, что сумма сил, действующих на смещенное тело будет направлена к положению равновесия. Такая сила называется *возвращающей*.

В положении неустойчивого равновесия ситуация другая. Сумма сил, действующих на смещенное тело в этом случае будет направлена от положения равновесия и тело в исходное положение не возвращается. А в случае безразличного равновесия никакой дополнительной силы не возникает и перемещаться смещенное тело никуда не будет.

Важно отметить, что в положении устойчивого равновесия тело имеет минимальную потенциальную энергию по отношению к соседним точкам, в положении неустойчивого равновесия тело имеет максимальную потенциальную энергию по отношению к соседним точкам, а в положении безразличного равновесия тело имеет одинаковую потенциальную энергию во всех соседних точках.

3. Гироскопы. Гироскопический эффект.

Гироскопом называется массивное симметричное тело, вращающееся вокруг оси симметрии с большой скоростью. Для симметричного гироскопа направления векторов $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ совпадают, тогда $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$. Так как гироскоп массивен, то I очень велик, так же велика и ω. Изобразим свободный гироскоп, то есть такой, что сумма моментов всех сил, действующих на него равна нулю $\vec{M} = 0$ (рис.9.4) . Ось гироскопа закреплена в точке О, момент импульса равен $\vec{L}$. Трения нет. Попытаемся повернуть гироскоп силой $\vec{F}$, действующей горизонтально в течение времени Δt. Оказывается, что гироскоп будет поворачиваться в направлении DD'. Это явление называется *гироскопическим эффектом.* Такое поведение гироскопа связано с тем, что изменение момента импульса равно

$$d\vec{L} = \vec{M}dt,$$

новое значение момента импульса будет равно

$$\vec{L}(t + dt) = \vec{L}(t) + \vec{M}dt,$$

и ось гироскопа повернется в направлении, перпендикулярном силе. Отметим тот факт, что $|\vec{L}| >> |\vec{M}\,dt|$.

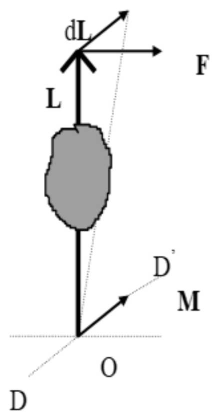


Рис.9.4

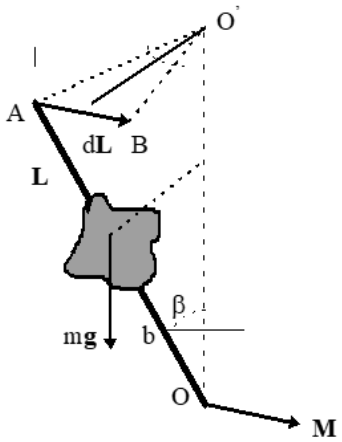


Рис.9.5

Таким образом, если на свободный гироскоп подействовать силой $\vec{F}$, то он будет совершать вращательное движение вокруг исходной оси вращения. Это явление названо *прецессией.*

Рассмотрим прецессию гироскопа под действием силы тяжести (рис.9.5). Исследовать будем тот же гироскоп, но пусть в этом случае он будет наклонен к вертикальной оси под углом β. На гироскоп будет действовать момент силы mg, равный

$$\vec{M} = [\vec{r}, \mathrm{m}\vec{g}].$$

Модуль этого момента равен

$$M = mgb\sin\beta,$$

где b – расстояние от точки О до центра масс гироскопа.

Действие момента силы тяжести выразится в изменении момента импульса гироскопа

$$d\vec{L} = \vec{M}\, dt,$$

и ось вращения гироскопа повернется на угол $d\varphi$. Модуль этого изменения равен

$$\left|d\vec{L}\right| = L\sin\beta d\varphi.$$

Выразим отсюда угол поворота и получим частоту прецессии:

$$d\varphi = \frac{mgb\mathrm{Sin}\,\beta dt}{L\mathrm{Sin}\,\beta},$$

$$\omega_{пр} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgb}{L} = \frac{mgb}{I\omega}.$$

В результате за каждые dt гироскоп повернется на малый угол по окружности, при этом повернется и момент силы тяжести. Это и есть прецессия с угловой скоростью $\omega_{пр} << \omega$.

Полученные формулы верны, если $mgb << I\omega^2$. Первая часть этого соотношения по порядку величины равна потенциальной энергии гироскопа в поле силы тяжести, а вторая − кинетической энергии гироскопа. Итак, полученные формулы верны, если $E_p << E_k$.

Демонстрацию работы гироскопа можно посмотреть здесь: www.youtube.com/watch?v=y1zyEPK5bQM

Литература

1. Иванов, В. К. Физика. Механика, молекулярная физика и термодинамика : учебное пособие для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки бакалавров 16.03.01 "Техническая физика" / В. К. Иванов, А. Н. Ипатов ; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, [Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций]Санкт-Петербург : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. 162 с.
2. Иродов И. Е. Физика макросистем : основные законы : учебное пособие / И. Е. Иродов. 8-е изд. Москва : Лаборатория знаний, 2020. 210 с.
3. Савельев И.В. Курс физики : учебное пособие для вузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям : [в 3 т.]. Т. 1: Механика; Молекулярная физика Изд. 5-е, стер. 2016. 350 с.

Разработал доцент кафедры физики
Васильев А.Э.

ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Лекция 10. Механические колебания (часть 1)

1. Гармонические колебания.

2. Свободные колебания (математический маятник, груз на пружине, физический маятник).

1. Гармонические колебания.

Как уже обсуждалось в лекции 9, у некоторых механических систем может существовать точка устойчивого равновесия. Вблизи таких точек возможно возникновение ещё одного вида механического движения – колебательного движения.

Под *колебательным движением* понимают движение с той или иной степенью повторяемости по времени. Рассмотрим подробнее такое движение на простом примере. Пусть на дне бокала находится небольшой шарик (рис. 10.1). Если его вывести из положения равновесия (1) в положение (2), то сумма всех сил, действующих на него, не будет равна нулю, а будет направлена к положению равновесия.

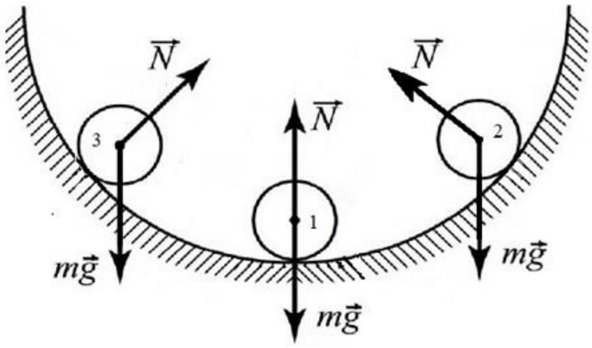


Рис. 10.1

Такая же ситуация возникнет и в положении шарика (3). Сила, возникающая в этих случаях, всегда направлена к положению равновесия и называется возвращающей. Таким образом, шарик будет периодически отклоняться от положения равновесия.

Обозначим его отклонение от положения равновесия (1) через x. Отметим, что в этом курсе рассматриваются только малые отклонения колеблющегося тела от равновесного положения. Следовательно, зависимость от времени $x(t)$ будет описываться периодической функцией времени. В данном случае *периодом* T движения шарика будет называться минимальный промежуток времени, через который шарик вернется в начальное положение. Величина, обратная периоду, называется *частотой колебаний* $\nu = 1/T$.

Периодических функций много. Выберем простейшую из них – синус (или косинус). Тогда зависимость $x(t)$ можно записать в виде:

$$x(t) = A \cdot \sin\left(at + b\right). \qquad (10.1)$$

Это простейшее уравнение, способное описать колебательное движение. Колебания, происходящие по такому закону, называются **гармоническими**.

Выясним физический смысл постоянных A, a, b. Синус – функция ограниченная:

$$\left|\sin(at + b)\right| \le 1.$$

В случае, когда он равен единице, отклонение от положения равновесия шарика будет максимальным. Следовательно, $A = x_m$ называется *амплитудой* колебаний.

Величина $(at + b)$, стоящая под знаком синуса, называется *фазой* колебаний. Запишем условие периодичности синуса:

$$\sin(at_1 + b + 2\pi) = \sin(at_2 + b).$$

Следовательно, $a\left(t_2 - t_1\right) = 2\pi$. Так как $(t_2 - t_1) = T$, то $a = \dfrac{2\pi}{T} = \omega$ есть круговая частота колебаний. Ясно, что $\omega = 2\pi\nu$.

На рисунке 10.2 показана зависимость $x(t) = x_m \cdot \sin(\omega t + b)$. В начальный момент ($t$ = 0) наш шарик может находиться на любом расстоянии от положения равновесия. За это отвечает $b = \varphi_0$, которая называется *начальной фазой колебаний*.

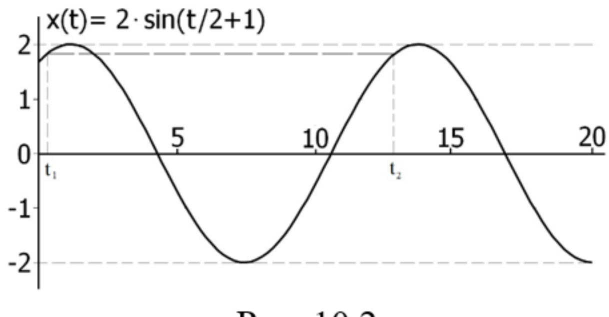


Рис. 10.2

Скорость движения шарика можно определить, вычислив производную от x:

$$\upsilon_x(t) = \frac{dx}{dt} = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi_0)\,, \tag{10.2}$$

а ускорение –

$$a_x(t) = -\omega^2 x_m \sin(\omega t + \varphi_0)\,. \tag{10.3}$$

Тогда

$$a_x = -\omega^2 x$$

или

$$\underline{\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0}\,. \tag{10.4}$$

Формулу (10.4), так же, как и зависимость $x(t)$ (10.1), можно считать определением гармонических колебаний: колебания, происходящие по такому закону, называются гармоническими.

Уравнению (10.4) можно придать другой вид. Умножим его на массу колеблющегося тела и получим:

$$ma_x = -m\omega^2 x\,.$$

Обозначим

$$m\omega^2 = k\,. \tag{10.5}$$

Получим уравнение колебаний в виде:

$$ma_x = -kx = F_x\,. \tag{10.6}$$

Эта сила является возвращающей и называется *квазиупругой* (так как соответствует закону Гука). Колебательных систем много, они разные, но гармонические колебания в них всегда происходят под действием такой квазиупругой силы.

Запишем кинетическую, потенциальную и полную энергии тела при колебаниях:

$$E_{кин} = \frac{m\upsilon_x^2}{2} = \frac{m\omega^2 x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2}\,, \tag{10.7}$$

$$E_{пот} = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}\,, \tag{10.8}$$

$$E_{полн} = E_{кин} + E_{пот} = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}\,. \tag{10.9}$$

Суммируя написанное, сформулируем 2 условия возникновения гармонических колебаний:

1) Наличие у системы положения устойчивого равновесия.
2) Отсутствие трения в колебательной системе (или очень малое трение).

2. Свободные колебания (математический маятник, груз на пружине, физический маятник).

Свободными называются колебания системы под действием только внутренних сил в системе без влияния всяких внешних воздействий. Для всех колебательных систем будем рассматривать малые колебания, то есть такие, для которых $x \ll 1$.

В качестве первой замкнутой системы рассмотрим математический маятник (материальную точку на невесомой нити длины l) в поле силы тяжести (трения нет). Запишем общее выражение для II закона Ньютона колеблющегося маятника, а затем спроектируем его на касательную к траектории (дуга окружности на рисунке 10.3):

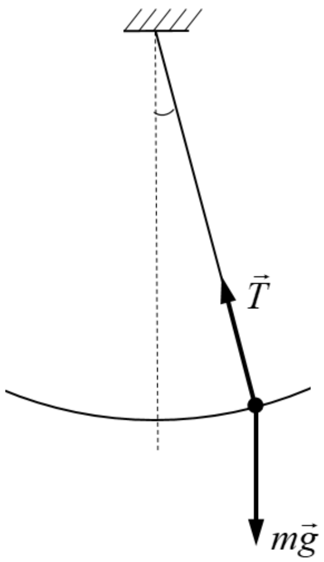


Рис. 10.3

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

$$\text{OX:} \quad ma = -mg\sin\alpha.$$

Так как $x \ll l$, то и угол отклонения маятника от вертикали мал и $\sin\alpha \cong \alpha = x/l$. Тогда

$$a = -\frac{g}{l}x.$$

Учитывая, что $a = x''$, получаем уравнение гармонических колебаний

$$x'' + \frac{g}{l}x = 0. \qquad (10.10)$$

Величина $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ называется частотой свободных колебаний математического маятника. С ней связана величина периода колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (10.11)$$

И, наконец, общее уравнение движения для этого случая

$$x(t) = A\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Для полного определения колебаний необходимо задать значения амплитуды и начальной фазы колебаний. Это можно сделать, например, двумя способами, задавая кинетическую или потенциальную энергию:

1) в начальный момент материальную точку отвели на расстояние x_0 от вертикали и свободно отпустили. Тогда

$x|_{t=0} = x_0$ В этом случае уравнение колебаний выглядит так

$\upsilon|_{t=0} = 0$ $x(t) = x_0\cos\omega_0 t$;

2) в начальный момент материальной точке в положении равновесия толчком сообщают скорость υ_0. Тогда

$x|_{t=0} = 0$ В этом случае $\varphi_0 = 0$ и

$\upsilon|_{t=0} = \upsilon_0$ $x(t) = (\upsilon_0/\omega_0)\sin\omega_0 t.$

Вторым примером будет система «груз на пружине». Рассмотрим сначала случай, изображенный на рисунке 10.4. При изменении длины пружины на груз будет действовать сила упругости, которая для малых колебаний подчиняется закону Гука $F_{упр} = -kx$ (k − жесткость пружины), то есть является возвращающей.

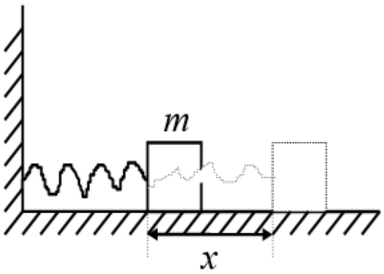


Рис. 10.4

Тогда II закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}_{упр} + m\vec{g} + \vec{N}$$

в проекции на ось x будет иметь вид:

$$ma = -kx.$$

Снова получаем уравнение гармонических колебаний с частотой собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (10.12)$$

Рассмотрение вертикальных колебаний груза на пружине проводится аналогично и дает те же результаты.

В заключении приведем вывод формулы для колебательной системы «физический маятник». *Физическим маятником* называется абсолютно твёрдое тело (АТТ), которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Если отклонить такое тело на угол α, то момент силы тяжести будет возвращать его в положение равновесия. Следовательно, в этом случае нужно для описания колебаний использовать основное уравнение динамики вращательного движения. Относительно оси *z*, проходящей через точку подвеса перпендикулярно рисунку (рис. 10.5), уравнение будет выглядеть так:

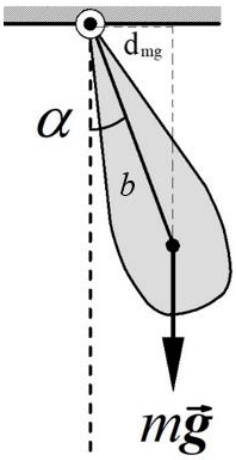


Рис. 10.5

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_z = -mgb \cdot \sin\alpha .$$

Рассматриваются малые колебания, следовательно, $\sin\alpha \approx \alpha$, и тогда получаем уравнение гармонических колебаний следующего вида:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgb}{I} \cdot \alpha = 0 . \qquad (10.13)$$

В формуле (10.13) $\ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$, *b* – расстояние от точки подвеса до центра тяжести тела; *I* – момент инерции тела относительно оси z. Тогда частота колебаний такой системы

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgb}{I}} ,$$

период

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}} , \qquad (10.14)$$

где *m* – масса АТТ.

Литература

1. Иванов, В. К. Физика. Механика, молекулярная физика и термодинамика : учебное пособие для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки бакалавров 16.03.01 "Техническая физика" / В. К. Иванов, А. Н. Ипатов ; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, [Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций]Санкт-Петербург : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. 162 с.
2. Иродов И. Е. Физика макросистем : основные законы : учебное пособие / И. Е. Иродов. 8-е изд. Москва : Лаборатория знаний, 2020. 210 с.
3. Савельев И.В. Курс физики : учебное пособие для вузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям : [в 3 т.]. Т. 1: Механика; Молекулярная физика Изд. 5-е, стер. 2016. 350 с.

Разработал доцент кафедры физики
Васильев А.Э.

Лекция 11. Механические колебания (часть 2)

1. Затухающие механические колебания.
2. Вынужденные механические колебания.
3. Сложение колебаний. Биения.

1. Затухающие механические колебания.

В реальной природе всегда действуют силы трения, поэтому реальные свободные колебания при этом будут затухающими. Со временем уменьшается их энергия и амплитуда. Кроме того, так как сила трения действует против возвращающей силы, то и частота затухающих колебаний должна быть меньше, чем у таких же свободных. В качестве сил трения рассмотрим так называемое «жидкое трение», то есть трение, величина которого зависит от скорости относительного движения трущихся объектов

$$F = -\beta\upsilon = -\beta x'.$$

Запишем II закон Ньютона в этом случае

$$ma = -kx - \beta\upsilon$$

или

$$x'' = -\frac{k}{m}\cdot x - \frac{\beta}{m}\cdot x'$$

Введем обозначения $\gamma = \frac{\beta}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, тогда уравнение движения будет иметь вид:

$$x'' + 2\gamma\cdot x' + \omega_0^2\cdot x = 0. \qquad (11.1)$$

Решение этого уравнения по-прежнему будет иметь периодический характер, но ясно, что амплитуда колебаний будет убывать. Ищем решение в виде

$$x(t) = x_0\cdot e^{-\alpha t}\cdot\cos\omega t. \qquad (11.2)$$

В формуле (11.2) неизвестными величинами являются ω и α. Для их определения вычислим первую и вторую производные по времени от x и подставим полученные выражения в уравнение движения (11.1):

$$\left(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\alpha\gamma\right)\cdot x_0\cdot e^{-\alpha t}\cdot\cos\omega t + \left(2\alpha\omega - 2\gamma\omega\right)\cdot x_0\cdot e^{-\alpha t}\cdot\sin\omega t = 0.$$

Чтобы последнее выражение было справедливо в любой момент времени необходимо, чтобы обе круглые скобки (при косинусе и синусе) были равны нулю. По этим условиям и определяем α и ω:

$$\alpha = \gamma, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,.$$

Таким образом, решение уравнения для затухающих колебаний будет выглядеть так:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right)t\,. \tag{11.3}$$

Величина γ называется декрементом затухания.

На рисунках ниже изображены графики зависимости смещения тела из положения равновесия при малых (рис. 11.1) и больших (рис. 11.2) величинах декремента затухания.

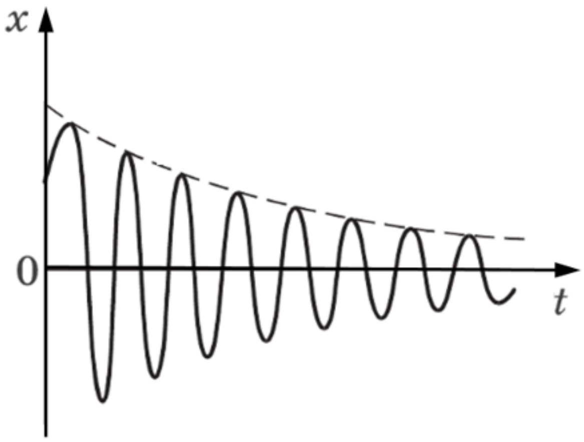


Рис. 11.1

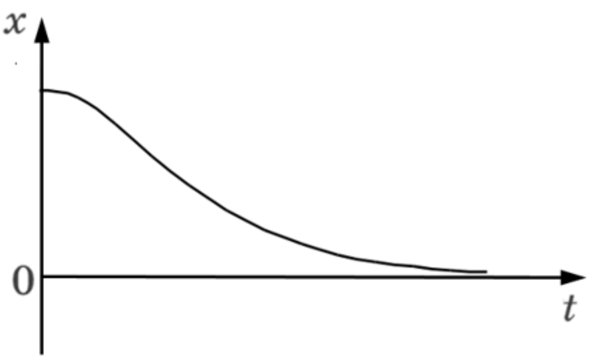


Рис. 11.2

При очень большом трении в системе колебаний вообще не будет, а будет более или менее плавное приближение колебательной системы к положению устойчивого равновесия.

2. Вынужденные механические колебания.

Вынужденными колебаниями называются колебания, которые совершаются под влиянием внешних сил. В данном случае будут изучаться механические колебания под действием внешней силы, изменяющейся по гармоническому закону. Уравнение II закона Ньютона в этом случае примет вид:

$$ma = -kx - \beta\upsilon + F_0 \cos\omega t$$

или

$$x'' + 2\gamma \cdot x' + \omega_0^2 \cdot x = \left(F_0 / m\right)\cos\omega t. \qquad (11.4)$$

Процесс установления колебаний будет проходить так. Сначала в течение некоторого времени τ будет происходить увеличение амплитуды колебаний (так называемый переходный процесс), а затем начнется установившийся процесс колебаний с постоянной амплитудой, зависящей от величины вынуждающей силы и ее частоты.

Рассматривать будем установившийся процесс, поэтому решение будем искать на частоте вынуждающей силы в виде

$$x(t) = x_0\cos(\omega t + \varphi). \qquad (11.2)$$

и, таким образом, необходимо найти две величины: фазу колебаний φ и амплитуду x_0. Действуя по тем же принципам, что и в случае затухающих колебаний, получаем следующее уравнение для определения неизвестных:

$$\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\varphi - 2\gamma\omega\sin\varphi - F_0 / \left(m x_0\right)\right]\cos\omega t +$$
$$+\left[\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\sin\varphi - 2\gamma\omega\cos\varphi\right]\sin\omega t = 0$$

Чтобы это выражение было справедливо в любой момент времени необходимо, чтобы обе квадратные скобки (при косинусе и синусе) были равны нулю. По этим условиям и определяем x_0 и φ:

$$x_0 = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}},$$

$$tg\varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Построим график зависимости амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы $x_0 = f(\omega)$ (рис.11.3). При частотах, близких к собственной частоте колебаний системы, происходит резкое увеличение амплитуды вынужденных колебаний. Это явление называется резонансом, а соответствующая частота − резонансной. Она равна

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

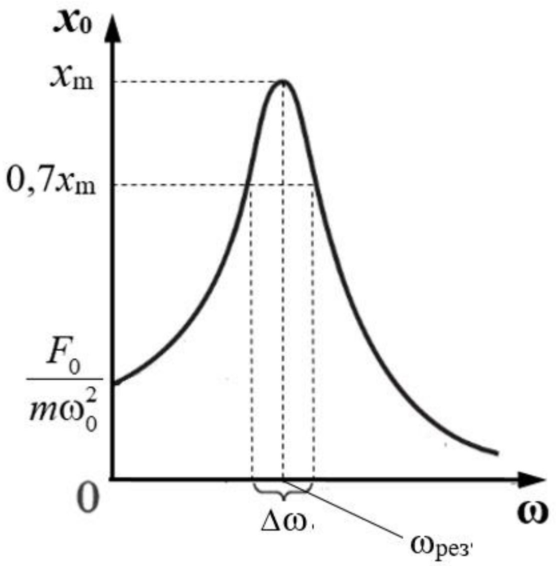


Рис. 11.3

Важной характеристикой колебательной системы является добротность Q. Она характеризует ширину резонансной кривой. Чем больше добротность, тем уже резонансная кривая. Определить добротность можно по формуле

$$Q = \frac{\omega_{рез}}{\Delta\omega}.$$

Под $\Delta\omega$ понимается ширина области, где амплитуда колебаний не меньше 0.7 от амплитуды колебаний при резонансе (рис. 11.3).

3. Сложение колебаний. Биения.

Решение ряда вопросов, в частности сложение нескольких колебаний одинакового направления (или, что то же самое, сложение нескольких гармонических функций), значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости. Полученная таким образом схема называется *векторной диаграммой*.

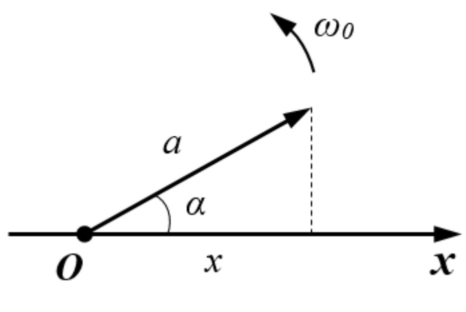


Рис. 11.4

Возьмем ось, которую обозначим за x (изображена на рисунке 11.4 горизонтально). Из точки O, взятой на оси, отложим вектор длины a, образующий с осью угол α. Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью ω_0, то проекция конца вектора будет перемещаться по оси x в пределах от $-a$ до a, причем координата этой проекции будет изменяться со временем по закону $x = a\cos(\omega t+\alpha)$. Значит, гармоническое колебание может быть представлено с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью x угол, равный фазе колебания.

Теперь с помощью векторной диаграммы рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты. Смещение x колеблющегося тела будет суммой смещений x_1 и x_2, которые запишутся следующим образом:

$$x_1 = a_1\cos(\omega_0 t + \alpha_1),$$

$$x_2 = a_2\cos(\omega_0 t + \alpha_2).$$

Представим оба колебания с помощью векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, как изображено на рисунке 11.5. Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор $\vec{a}$. Легко видеть, что проекция этого вектора на ось x равна сумме проекций слагаемых векторов:

$$x = x_1 + x_2.$$

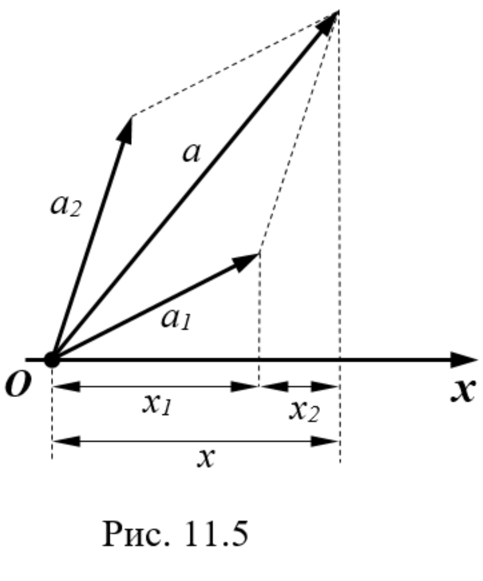


Рис. 11.5

Следовательно, вектор $\vec{a}$ представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той же угловой скоростью ω_0, что и вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с частотой ω_0, амплитудой a и начальной фазой α. Из построения видно, что

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

и

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2}{a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2}.$$

Если частоты колебаний x_1 и x_2 неодинаковы, вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ будут вращаться с различной скоростью. В этом случае результирующий вектор $\vec{a}$ пульсирует по величине и вращается с непостоянной скоростью − диаграмма будет нестационарной.

Особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. Результирующее движение при этих условиях можно рассматривать как гармоническое колебание с пульсирующей амплитудой. Такое колебание называется *биениями*. Обозначим частоту одного из колебаний буквой ω, частоту второго колебания через $\omega + \Delta\omega$. По условию $\Delta\omega \ll \omega$. Амплитуды обоих колебаний будем полагать одинаковыми и равными a. Для простоты положим, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тогда уравнения колебаний будут иметь следующий вид:

$$x_1 = a\cos\omega t, \quad x_2 = a\cos((\omega + \Delta\omega)t) .$$

Складывая эти выражения и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем

$$x = x_1 + x_2 = \left(2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega t .$$

График этой функции показан на рисунке 11.6. Заключенный в скобки множитель изменяется гораздо медленнее, чем второй множитель. Это дает основания считать, что рассматриваемое колебание − гармоническое с частотой ω, амплитуда которого изменяется по некоторому периодическому закону. Выражением этого закона не может быть множитель, стоящий в скобках, так как он изменяется в пределах от $-2a$ до $+2a$, в то время как амплитуда по определению − положительная величина. Аналитическое выражение амплитуды имеет вид:

$$\text{амплитуда} = \left|2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right| .$$

Эта величина − периодическая функция с частотой, в два раза превышающая частоту выражения, стоящего под знаком модуля, то есть с частотой $\Delta\omega$. Таким образом, частота пульсаций амплитуды − ее называют частота биений − равна разности частот складываемых колебаний.

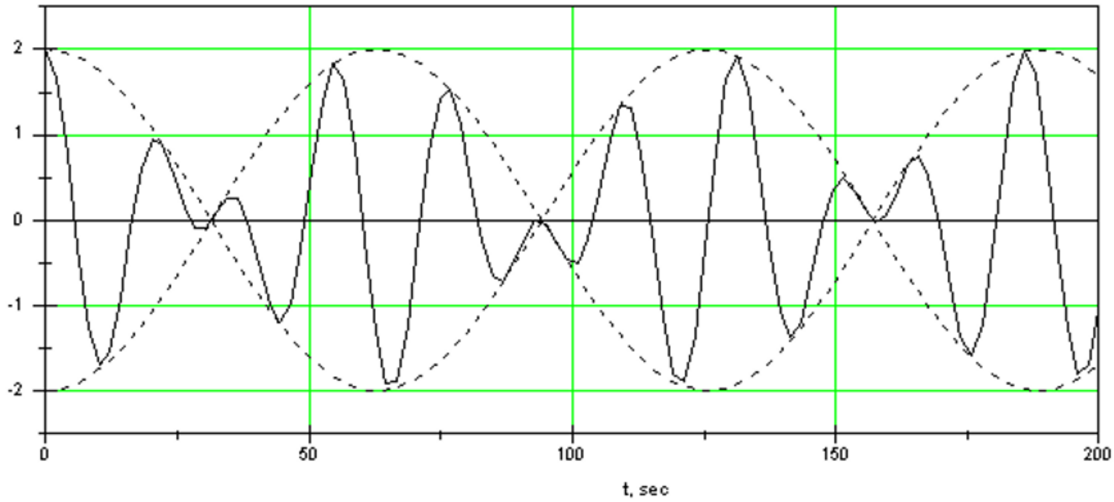


Рис. 11.6

Литература

1. Иванов, В. К. Физика. Механика, молекулярная физика и термодинамика : учебное пособие для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки бакалавров 16.03.01 "Техническая физика" / В. К. Иванов, А. Н. Ипатов ; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, [Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций]Санкт-Петербург : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. 162 с.
2. Иродов И. Е. Физика макросистем : основные законы : учебное пособие / И. Е. Иродов. 8-е изд. Москва : Лаборатория знаний, 2020. 210 с.
3. Савельев И.В. Курс физики : учебное пособие для вузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям : [в 3 т.]. Т. 1: Механика; Молекулярная физика Изд. 5-е, стер. 2016. 350 с.

Разработал доцент кафедры физики
Васильев А.Э.

ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Лекция 12. Элементы релятивистской механики

1. Принцип относительности Галилея и опыт Бертоцци.
2. Постулаты Эйнштейна.
3. Замедление времени.
4. Сокращение длины.
5. Преобразования Лоренца.
6. Интервал в СТО.
7. Преобразования скорости в СТО.
8. Релятивистский импульс.
9. Основное уравнение релятивистской динамики.
10. Кинетическая энергия релятивистской частицы.
11. Связь массы и энергии. Инвариант.

1. Принцип относительности Галилея и опыт Бертоцци.

Специальная теория относительности (СТО), созданная Эйнштейном в 1905 году, по своему основному содержанию может быть названа *физическим учением* о пространстве и времени. Физическим потому, что свойства пространства и времени в этой теории рассматриваются в теснейшей связи с законами совершающихся в них физических явлений. Термин «специальная» подчеркивает то обстоятельство, что эта теория рассматривает явления только в инерциальных системах отсчета.

Прежде чем перейти к ее изложению, сформулируем основные принципы ньютоновской механики:

1) Пространство имеет 3 измерения; справедлива евклидова геометрия.
2) Время существует независимо от пространства в том смысле, в котором независимы три пространственных измерения.
3) Промежутки времени и размеры тел не зависят от системы отсчета.
4) Признается справедливость закона инерции Ньютона - Галилея (I закон Ньютона).
5) При переходе от одной ИСО к другой справедливы преобразования Галилея для координат, скоростей и времени.
6) Выполняется принцип относительности Галилея: все инерциальные системы отсчета эквивалентны друг другу в отношении механических явлений.
7) Соблюдается принцип дальнодействия: взаимодействия тел распространяются мгновенно, то есть с бесконечной скоростью.

Эти представления ньютоновской механики вполне соответствовали всей совокупности экспериментальных данных, имевшихся в то время. Со временем исследованию подверглись такие явления и процессы, при которых относительные скорости движения тел были велики (сравнимы со скоростью распространения света в вакууме). И тогда оказалось, что в ряде случаев механика Ньютона не работала.

Первым подвергся проверке закон сложения скоростей. Принцип относительности Галилея утверждал, что все ИСО эквивалентны по своим механическим свойствам. Но их, наверное, можно отличить по электромагнитным или каким-либо другим свойствам. Например, можно заняться экспериментами по распространению света. В соответствии с существовавшей в то время волновой теорией, существовала некая абсолютная система отсчета (так называемый «эфир»), в которой скорость света была равна c. Во всех остальных системах скорость света должна была подчиняться закону

$$c' = c - V .$$

Это предположение взялись проверить сначала Майкельсон, а затем и Морли. Целью эксперимента являлось обнаружение «истинного» движения Земли относительно эфира. Было использовано движение Земли по орбите со скоростью 30 км в секунду. Идея эксперимента состояла в следующем. Свет от источника S посылался в двух взаимно перпендикулярных направлениях, отражался от зеркал A и B, находящихся на одинаковом расстоянии L от источника S, и возвращался в точку S (рис.12.1).

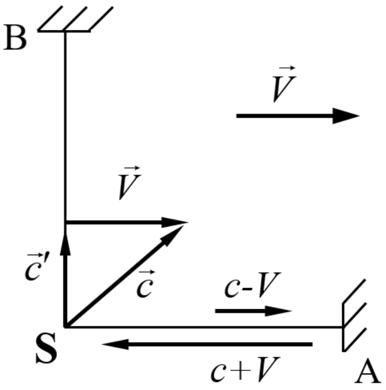


Рис. 12.1

Сравнивалось время прохождения светом путей SAS и SBS. Допустим, что вся установка в момент эксперимента движется со скоростью V в указанном направлении. Если скорость света подчиняется обычному закону сложения скоростей, то время прохождения пути SAS равно

$$t_{\mathrm{II}} = \frac{L}{c-V} + \frac{L}{c+V} = \frac{2L}{c}\frac{1}{1-\dfrac{V^2}{c^2}},$$

тогда как время прохождения пути SBS равно

$$t_{\perp} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

Исходя из этих результатов, ученые ожидали получить разницу во времени. Однако, как ни увеличивали они точность экспериментов, разницы во временах зафиксировать не удалось. Конечно, случайно могло оказаться, что относительная скорость Земли относительно эфира была в этот момент равна нулю, но эксперимент, проведенный через полгода, когда скорость Земли должна была быть 60 км/с, тоже ничего не дал.

Еще более наглядно продемонстрировал ограниченность области применения классической механики эксперимент, проведенный в 1964 году Бертоцци. Ему удалось в одном эксперименте независимо измерить скорость и кинетическую энергию электронов. Электроны ускорялись в ускорителе Ван-де-Граафа, а затем двигались равномерно, проходя расстояние АВ (рис.12.2), которое можно было измерить достаточно точно. Определив время этого движения, определяли скорость. Далее электроны попадали в мишень и нагревали ее. Температуру мишени измеряли термопарой и по этим результатам находили кинетическую энергию электронов. В результате получали график зависимости квадрата скорость электрона от его кинетической энергии. Согласно классической механике $\left(\nu^2 = 2E_k / m\right)$ он должен представлять прямую линию. В ходе же эксперимента получилась зависимость с предельным значением скорости $3 \cdot 10^8$ м/с.

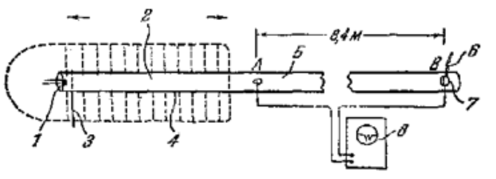


Рис. 12.2

После анализа этих и многих других экспериментов стало ясно, что нужна новая теория для изучения таких явлений.

2. Постулаты Эйнштейна.

Глубокий анализ всего экспериментального и теоретического материала, имеющегося к началу XX в., привел Эйнштейна к пересмотру исходных положений классической физики, прежде всего представлений о свойствах пространства и времени. В результате им была создана специальная теория относительности, явившаяся логическим завершением всей классической физики.

Эта теория принимает без изменения такие положения ньютоновской механики, как евклидовость пространства и закон инерции Галилея - Ньютона. Что же касается утверждения о неизменности размеров твердых тел и промежутков времени в разных системах отсчета, то Эйнштейн обратил внимание на то, что эти представления возникли в результате изучения движений тел с малыми скоростями, поэтому их экстраполяция в область больших скоростей ничем не оправдана. Только опыт может дать ответ на вопрос, каковы их истинные свойства. Это же относится к преобразованиям Галилея и к принципу дальнодействия.

В качестве исходных позиций специальной теории относительности Эйнштейн принял два постулата, или принципа, в пользу которых говорит весь экспериментальный материал**:**

1) принцип относительности,

2)независимость скорости света от скорости источника.

Первый постулат представляет собой обобщение принципа относительности Галилея на любые физические процессы:

все физические явления протекают одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета; все законы природы и уравнения, их описывающие, инвариантны, т. е. не меняются, при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Другими словами, *все инерциальные системы отсчета эквивалентны* (неразличимы) *по своим физическим свойствам;* никаким опытом нельзя в принципе выделить ни одну из них как предпочтительную.

Второй постулат утверждает, что *скорость света в вакууме не зависит от движения источника света и одинакова во всех направлениях.*

Это значит, что, скорость *света в вакууме одинакова во всех ИСО***.** Таким образом**,** скорость света занимает особое положение в природе. В отличие от всех других скоростей, меняющихся при переходе от одной системы отсчета к другой, скорость света в пустоте является инвариантной величиной. Как мы увидим, наличие такой скорости существенно изменяет представления о пространстве и времени.

Из постулатов Эйнштейна следует также, что скорость света в вакууме является *предельной:* никакой сигнал, никакое воздействие одного тела на другое не могут распространяться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме. Именно предельный характер этой скорости и объясняет одинаковость скорости света во всех системах отсчета. В самом деле, согласно принципу относительности, законы природы должны быть одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Тот факт, что скорость любого сигнала не может превышать предельное значение, есть также закон природы. Следовательно, значение предельной скорости − скорости света в вакууме − должно быть одинаково во всех инерциальных системах отсчета: в противном случае эти системы можно было бы отличить друг от друга.

В частности, наличие предельной скорости автоматически предполагает ограничение скорости движения частиц величиной *с.* Иначе эти частицы могли бы осуществлять передачу сигналов (или взаимодействий между телами) со скоростью, превышающей предельную. Таким образом, согласно постулатам Эйнштейна, значение всех возможных в природе скоростей движения тел и распространения взаимодействий ограничено величиной *с*. Этим самым отвергается принцип дальнодействия ньютоновской механики.

Все содержание специальной теории относительности вытекает из этих двух ее постулатов. В настоящее время оба постулата Эйнштейна, как и все следствия из них, убедительно подтверждаются всей совокупностью накопленного экспериментального материала.

Синхронизация часов. Прежде чем делать какие-либо выводы из этих постулатов, Эйнштейн тщательно проанализировал представления о способах измерения пространства и времени. В первую очередь он обратил внимание на то, что физической реальностью обладает не точка пространства и не момент времени, когда что-либо произошло, а только само событие. Для описания события в данной системе отсчета нужно указать место, в котором оно происходит, и момент времени, когда оно происходит.

Положение точки, в которой происходит событие, может быть определено с помощью жестких масштабов методами евклидовой геометрии и выражено в декартовых координатах. Соответствующий же момент времени можно определить с помощью часов, помещенных в ту точку системы отсчета, где происходит данное событие. Однако такое определение уже не является удовлетворительным, когда нам надо сопоставить друг с другом события, происходящие в *различных* местах, или, что то же самое, сравнить время для событий, происходящих в местах, удаленных от часов.

Действительно, чтобы сравнить время (показания часов в различных точках системы отсчета), прежде всего, необходимо установить способ, как определить общее для всех точек системы отсчета время. Другими словами, надо обеспечить *синхронный* ход всех часов данной системы отсчета.

Ясно, что синхронизировать часы, помещенные в различные точки системы отсчета, можно только с помощью каких-нибудь сигналов. Наиболее быстрые сигналы, пригодные для этой цели, – это световые или радиосигналы, распространяющиеся с известной скоростью c. Выбор именно этих сигналов обусловлен еще и тем, что их скорость не зависит от направления в пространстве, а также одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Далее можно поступить следующим образом. Наблюдатель, находящийся, например, в начале координат О данной системы отсчета, сообщает по радио: «Передаем сигнал точного времени. Сейчас по моим часам время t_0». В момент, когда этот сигнал достигнет часов, находящихся на известном расстоянии r от точки О, их устанавливают так, чтобы они показывали время

$$t = t_0 + r/c,$$

то есть с учетом времени запаздывания сигнала Повторение сигнала через определенные промежутки времени даст возможность каждому наблюдателю установить синхронный ход его часов с часами в точке О. В результате такой операции можно утверждать, что все часы данной системы отсчета показывают в каждый момент одно и то же время.

Существенно отметить, что определенное таким образом время относится лишь к той системе отсчета, относительно которой синхронизированные часы покоятся.

Соотношения между событиями. Обратимся к вопросу о пространственных и временных соотношениях между данными событиями в разных инерциальных системах отсчета.

Уже в ньютоновской механике пространственные соотношения между различными событиями зависят от того, к какой системе отсчета они относятся. Например, две последовательные вспышки лампочки в движущемся поезде происходят в одной и той же точке системы от*счета,* связанной с поездом, но в разных точках системы отсчета, связанной с полотном дороги.

Утверждение, что два разновременных события происходят в одном и том же месте или на таком-то расстоянии друг от друга, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе от счета это утверждение относится.

В противоположность этому временные соотношения между событиями в ньютоновской механике считаются не зависящими от системы отсчета. Это значит, что если какие-нибудь два события происходят одновременно в одной системе отсчета, то они являются одновременными и во всех других системах отсчета. Вообще промежуток времени между двумя данными событиями считается одинаковым во всех системах отсчета.

Легко убедиться, что в действительности это не так − *одновременность* (а, следовательно, и течение времени) *является понятием относительным,* приобретающим смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это понятие относится. Покажем с помощью простого рассуждения, что два события, одновременные в одной системе отсчета, в другой системе отсчета оказываются неодновременными.

Представим себе стержень АВ, движущийся с постоянной скоростью *V* относительно $К^1$ - системы отсчета. В середине стержня находится лампочка О, по концам (в точках А и В) − фотоэлементы. Пусть в некоторый момент лампочка О дала кратковременную вспышку света. Поскольку скорость распространения света в системе отсчета, связанной со стержнем (как и во всякой инерциальной системе отсчета) равна с в обоих направлениях, то световые импульсы достигнут равноудаленных от О фотоэлементов А и В в один и тот же момент времени (в системе отсчета «стержень») и оба фотоэлемента сработают одновременно.

Иначе обстоит дело в $К^1$ - системе. В этой системе отсчета скорость световых импульсов в обоих направлениях также равна *c*, однако проходимые ими пути различны. Действительно, пока световые импульсы идут к точкам А и В, последние переместятся вправо и, следовательно, фотоэлемент А сработает раньше, чем фотоэлемент В.

Таким образом, события, одновременные в одной системе отсчета, не являются одновременными в другой системе отсчета, т. е. одновременность в отличие от представлений ньютоновской механики является понятием относительным. А это в свою очередь означает, что время в разных системах отсчета течет неодинаково. Если бы в нашем распоряжении имелись мгновенно распространяющиеся сигналы, то события, одновременные в одной системе отсчета, были бы одновременными и в любой другой системе. Это непосредственно следует из только что рассмотренного примера. В этом случае течение времени не зависело бы от системы отсчета и можно было бы говорить об абсолютном времени, которое фигурирует в преобразованиях Галилея. Таким образом, преобразования Галилея, по существу, исходят из предположения, что синхронизация часов осуществляется с помощью мгновенно распространяющихся сигналов. Однако таких сигналов в действительности нет.

3. Замедление времени.

Сначала сравним поперечные по отношению к направлению скорости движения размеры тел. Пусть в системе К^1 стержень А^{1}О^1 покоится, расположившись вдоль оси y^1 и длина его L_0. Система К^1 движется вдоль оси x^1 причем оси x и x^1 при движении остаются параллельными (рис.12.3). Тогда в некоторый момент точки О^1 и О совпадут. Совпадут ли длины стержней АО и А^{1}О^1 = L_0? Да, так как в соответствии с первым постулатом все ИСО равноправны, в противном случае по поперечной длине стержня можно было бы отличать системы. Таким образом, $y^1 = y$.

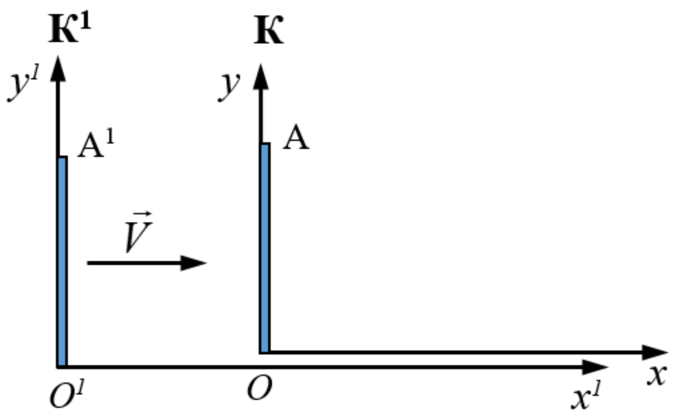


Рис. 12.3

Теперь проведем еще один мысленный эксперимент (рис.12.4).

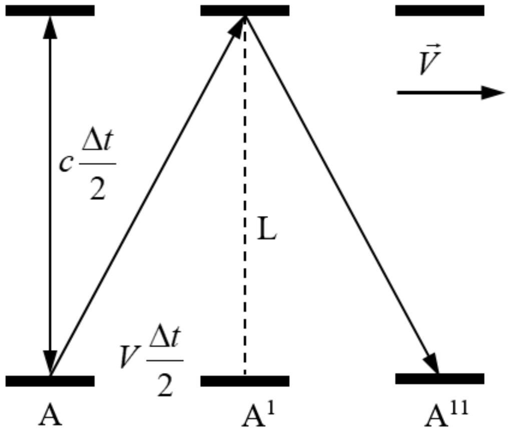


Рис. 12.4

В качестве часов выбираем световой луч и два зеркала. В качестве интервала времени берем $\Delta t_0 = 2L/c$. Это время прохода луча туда и обратно неподвижных относительно наблюдателя А часах. Такое время называется **собственным** для данных часов. Если же часы движутся со скоростью V перпендикулярно оси часов, то относительно наблюдателя А (и связанной с ним ИСО К) промежуток времени будет другой. Поперечные размеры часов неизменны, поэтому путь, проходимый лучом для наблюдателя А, иной (рис. 12.4). Теорема Пифагора дает

$$\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 = \left(V\frac{\Delta t}{2}\right)^2 + L^2,$$

$$\Delta t = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{V}{c}.$$

Новый интервал времени

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (12.1)$$

Ясно, что так как $V < c$, то и $\beta < 1$ и $\Delta t > \Delta t_0$. Таким образом, изменяется единица измерения времени − она становится больше. Тем самым, по движущимся часам пройдет меньше времени, чем по неподвижным (относительно наблюдателя А). Это явление и называется замедлением времени.

4. Сокращение длины.

Пусть стержень АВ неподвижен в системе $К^1$ и расположен в ней параллельно оси x^1 (рис. 12.5). Система $К^1$ движется параллельно оси x относительно системы К со скоростью V. Длина стержня, измеренная в системе, где он неподвижен, называется *собственной* длиной стержня. В данном случае она равна L_0. Как определить длину стержня в системе К?

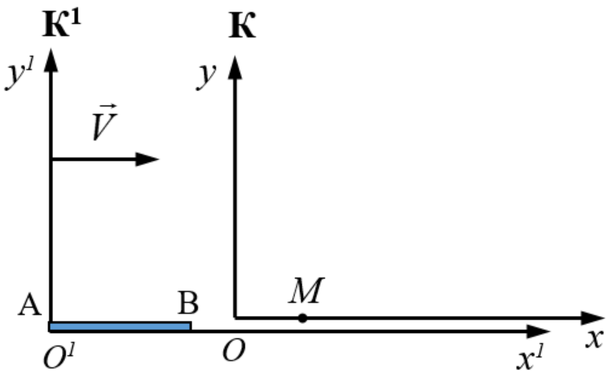


Рис. 12.5

В точке М установим часы и зафиксируем моменты времени $t_А$ и $t_В$ совпадения с меткой точек В и А стержня. Следовательно, время пролета стержня мимо неподвижных часов

$$\Delta t_0 = t_А - t_В.$$

Тогда длина стержня в системе К

$$L = V \cdot \Delta t_0.$$

Для наблюдателя в системе $К^1$ время будет другое и

$$L_0 = V \cdot \Delta t,$$

а промежутки времени связаны друг с другом соотношением (12.1). Окончательно получаем

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} \quad . \qquad (12.2)$$

Так как $\beta < 1$, то $L < L_0$ –это и называется *лоренцевым сокращением*. Это чисто кинематический эффект. В качестве примера рассмотрим, при какой скорости длина стержня уменьшится на одну треть:

$$L = 2L_0/3 = L_0\sqrt{1-\beta^2}\ .$$

Получим $\beta = 0.73$, а $V = 0.73c$.

Это огромная скорость. При реальных для макроскопических объектов скоростях V = 100 м/с, величина $\beta \cong 3\cdot10^{-7}$ и разность длин никак не проявляется.

5. Преобразования Лоренца.

Теперь наступило время заменить преобразования Галилея и закон сложения скоростей новыми формулами с учетом постулатов Эйнштейна.

Рассмотрим некоторое событие, произошедшее в точке А, с точки зрения двух наблюдателей К и $К^1$. Наблюдатель системы $К^1$ движется относительно наблюдателя системы К со скоростью V (на рисунке 12.6 изображено положение осей координат систем и направление их относительного движения – стандартное для СТО).

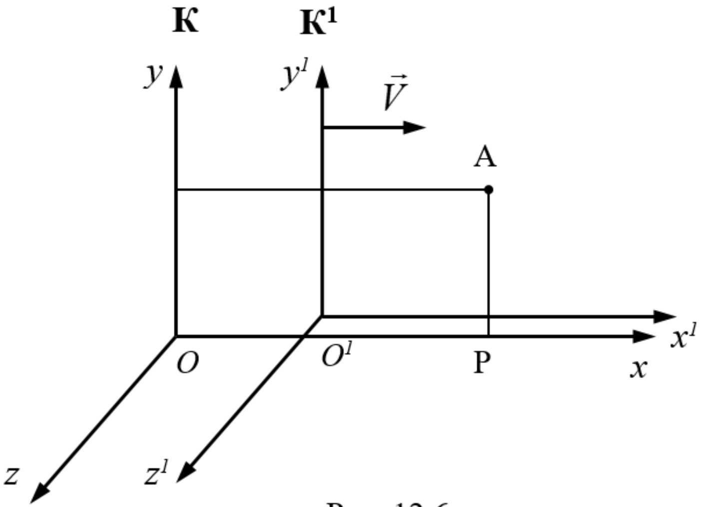


Рис. 12.6

Пусть в тот момент, когда точки О и $О^1$ совпадали, на часах обоих систем было время $t = t^1 = 0$. Предположим теперь, что в точке А с координатами x, y, z К-системы отсчета в момент времени t по ее часах произошло событие.

Найдем соответствующие величины (x^1, y^1, z^1,t^1), определенные в системе К^1. Вопрос относительно координат y^1 и z^1 уже был решен ранее: это поперечные по отношению к движению координаты и $y^1 = y$, $z^1 = z$. Координата x^1 точки А в системе К^1 равна О^{1}Р и является собственной длиной этого отрезка − (О^{1}Р)$_0$. Длина же этого отрезка в системе К равна

$$O^1P = x - V\cdot t \quad \text{(в этой системе отрезок движется).}$$

Связь между длинами этого отрезка определена формулой сокращения длины, тогда

$$O^1P = (O^1P)_0\cdot\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}$$

и

$$x^1 = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \qquad (12.3)$$

Аналогично можно найти и обратную связь x и x^1:

$$x = \frac{x^1 + Vt^1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \qquad (12.4)$$

Теперь найдем связь между моментами наступления события в точке А t и t^1. Исключая значение x^1 из последней формулы с помощью предыдущей, получаем связь времен:

$$t^1 = \frac{t - x\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \qquad (12.5)$$

а обратно

$$t = \frac{t^1 + x^1\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \qquad (12.6)$$

Итак, преобразования Лоренца при переходе от одной ИСО к другой выглядят так:

$$\begin{cases} x^1 = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y^1 = y \\ z^1 = z \\ t^1 = \dfrac{t - x\dfrac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x^1 + Vt^1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y = y^1 \\ z = z^1 \\ t = \dfrac{t^1 + x^1\dfrac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^1 = x - Vt \\ y^1 = y \\ z^1 = z \\ t^1 = t \end{cases} \qquad (12.7)$$

В третьем столбце (12.7) приведены преобразования Галилея. Сразу заметим, что в пределе β « 1 эти формулы переходят в преобразования Галилея. При этом t^1 = t. Кроме того, этими формулами пользоваться нельзя в случае $V = c$. То есть нельзя связать ИСО с фотонами − световыми квантами.

И последнее: в формулу для времени входит координата. Это указывает на неразрывную связь между пространством и временем. Другими словами, речь идет о едином пространстве-времени, в котором протекают все физические явления.

6. Интервал в СТО.

В механике Ньютона промежутки времени и размеры тел не зависят от ИСО, в которой они измерялись. В этом случае говорят, что величины Δt и

$$\Delta L = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}\,,$$

равные промежутку времени и расстоянию между точками, инвариантны по отношению к преобразованию координат в механике Ньютона. В СТО эти величины утратили свойство инвариантности. Однако, оказалось, что существует величина, включающая Δt и ΔL, обладающая свойством инвариантности − ее назвали *интервал*. Приведем формулу для его вычисления:

$$\Delta S = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2} = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta L^2}\,.$$

Убедимся в инвариантности интервала: покажем, что интервал ΔS, определенный в системе К, равен интервалу ΔS^1, определенному в системе $К^1$.

Для этого воспользуемся преобразованиями Лоренца для интервала времени Δt^1 и проекций отрезка Δx^1, Δy^1 и Δz^1. Подставим их в выражение для интервала

$$\Delta S^1 = \sqrt{c^2 \Delta t^{12} - \Delta x^{12} - \Delta y^{12} - \Delta z^{12}} =$$

$$= \sqrt{c^2 \frac{\left[\Delta t - \left(\frac{V}{c^2}\right)\Delta x\right]^2}{1-\beta^2} - \frac{(\Delta x - V\Delta t)^2}{1-\beta^2} - \Delta y^2 - \Delta z^2} = \Delta S.$$

Интервал может быть вещественным (времениподобным), если $c \cdot \Delta t > \Delta L$; мнимым (пространственноподобным), если $c \cdot \Delta t < \Delta L$ и равным нулю, если $c \cdot \Delta t = \Delta L$. Если рассматривать 4х-мерное пространство, то поверхность $L = ct$ разделяет пространство на две части: часть, где события связаны причинно-следственной связью ($L < ct$) − времениподобный интервал и часть, где события причинно-следственной связью связаны быть не могут. Это происходит потому, что не существует воздействий, способных передаваться со скоростью, большей c.

Итак, в СТО мы знаем уже три инвариантные (по отношению к преобразованиям координат и времени) величины: скорость света c, промежуток собственного времени $\Delta\tau$ и интервал между событиями ΔS.

7. Преобразования скорости в СТО.

Преобразования Галилея давали для скорости следующие формулы при переходе от одной ИСО к другой (при стандартном расположении ИСО):

$$\begin{cases} v_x^1 = v_x - V \\ v_y^1 = v_y \\ v_z^1 = v_z \end{cases}. \qquad (12.8)$$

Получим теперь с помощью преобразований Лоренца новые формулы. Для этого рассмотрим частицу, движущуюся со скоростью $\vec{v}$ в системе К (рис. 12.7). Найдем ее скорость в системе К^1.

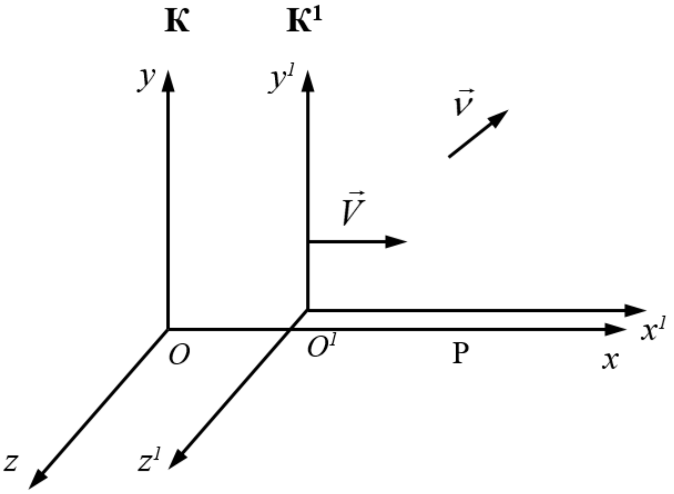


Рис. 12.7

По определению скорости

$$\begin{cases} v_x^1 = \dfrac{dx^1}{dt^1} = \dfrac{dx^1}{dt}\dfrac{dt}{dt^1} = \dfrac{v_x - V}{\sqrt{1-\beta^2}}\dfrac{dt}{dt^1}, \\ v_y^1 = \dfrac{dy^1}{dt^1} = \dfrac{dy^1}{dt}\dfrac{dt}{dt^1} = v_y\dfrac{dt}{dt^1}, \\ v_z^1 = \dfrac{dz^1}{dt^1} = \dfrac{dz^1}{dt}\dfrac{dt}{dt^1} = v_z\dfrac{dt}{dt^1}. \end{cases}$$

Для удобства вычислений производная представлена в виде производной от сложной функции. Несложные вычисления дают окончательный результат:

$$\begin{cases} v_x^1 = \dfrac{v_x - V}{1 - \dfrac{v_x V}{c^2}}, \\ v_y^1 = v_y\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v_x V}{c^2}}, \\ v_z^1 = v_z\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v_x V}{c^2}}. \end{cases} \qquad (12.9)$$

Это и есть релятивистский закон сложения скоростей.

Ясно, что при v, $V << c$ формулы (12.9) переходят в классические преобразования Галилея (12.8).

Покажем теперь, что скорость света будет одинакова во всех ИСО: пусть $v_x = c$, тогда

$$v_x^1 = (c - V)/(1 - V/c) = c\ ;$$

$$v_y^1 = 0\ ;\ v_z^1 = 0.$$

Модуль скорости в К^1 системе можно найти по стандартной формуле

$$v^1 = \sqrt{\left(v_x^1\right)^2 + \left(v_y^1\right)^2 + \left(v_z^1\right)^2}\ .$$

8. Релятивистский импульс.

Законы сохранения, как и другие законы природы, должны соблюдаться во всех ИСО, то есть быть инвариантными по отношению к преобразованиям Лоренца. Покажем, что старое определение импульса $\vec{p} = m\vec{v}$ не дает этого. Рассмотрим центральное абсолютно неупругое соударение двух одинаковых частиц с массой покоя m_0 в двух системах: К^1 (где частицы летят с одинаковыми по модулю скоростями V навстречу друг другу вдоль оси x^1) и К, которая движется со скоростью V в положительном направлении оси x^1. В системе К^1 полный импульс системы из двух частиц равен нулю, как до соударения, так и после него. В системе же К скорости частиц определяются так:

$$v_{1x} = \frac{v_{1x}^1 + V}{1 + \frac{v_{1x}^1 V}{c^2}} = \frac{2V}{1 + \left(\frac{V}{c}\right)^2},\ \ v_{1y} = 0,$$

$$v_{2x} = \frac{v_{2x}^1 + V}{1 + \frac{v_{2x}^1 V}{c^2}} = 0,\ \ v_{2y} = 0 \quad .$$

Таким образом, до соударения импульс частиц в системе К равен

$$p_x^{\text{ДО}} = m_0 v_{1x} + m v_{2x} = \frac{2m_0 V}{1 + \left(\frac{V}{c}\right)^2}.$$

После соударения частицы покоятся в системе К^1, следовательно, в системе К импульс частиц равен

$$p_x^{\text{ПОСЛЕ}} = 2m_0V.$$

Итак, в системе К закон сохранения *такого* импульса не соблюдается с точностью $(V/c)^2 \ll 1$. Вывод напрашивается сам собой – импульс нужно определить иначе, так, чтобы выполнялся закон сохранения импульса. При этом новый импульс переходил бы в старый при малых скоростях движения частиц. Для этого в определение импульса нужно ввести собственное время: старое определение импульса –

$$\vec{p} = m\frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v}$$

новое определение импульса –

$$\vec{p} = m_0\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (12.10)$$

В (12.10) m_0 − масса покоя частицы, а τ − ее собственное время.

9. Основное уравнение релятивистской динамики.

Как и следовало ожидать, II закон Ньютона, записанный в виде

$$m_0\vec{a} = \vec{F},$$

не инвариантен к преобразованиям Лоренца (как это было для преобразований Галилея). Однако этим преобразованиям удовлетворяет уравнение

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

где $\vec{p} = m_0\dfrac{d\vec{r}}{d\tau} = \dfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ − новое определение импульса, введенное в СТО. При $\beta \ll 1$ оно переходит во II закон Ньютона. Следует заметить, что в СТО имеются формулы для преобразования всех механических величин, включая силу, при переходе из одной ИСО к другой.

Уравнение динамики в СТО сложнее, чем II закон Ньютона; направления ускорения и силы не всегда совпадают. Но есть два простых случая, когда эти направления совпадают:

1) $\vec{v}\,||\,\vec{F}$. Тогда в основном уравнении можно убрать вектора и вычислить производную. Получится следующее уравнение:

$$\frac{m_0 a}{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}} = F$$

или
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_0}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (12.11)$$

2) $\vec{v}\perp\vec{F}$. В этом случае проще всего спроектировать основное уравнение на тангенциальное направление (ось τ) − $a_\tau = 0$ и на нормальное направление (ось n) − $ma_n = F$. Тогда мы получаем уравнение

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_0}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (12.12)$$

10. Кинетическая энергия релятивистской частицы.

Чтобы получить релятивистское выражение для кинетической энергии частицы, будем исходить из того, что работа, совершенная над частицей, равна приращению ее кинетической энергии

$$dE_k = dA.$$

Умножим основное уравнение динамики СТО на

$$d\vec{r} = \vec{v}\cdot dt\ -$$

перемещение частицы за время dt под действием силы $\vec{F}$. В результате получаем

$$\vec{v}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)dt = \vec{F}d\vec{r} = dA.$$

Следовательно, с учетом того, что $\vec{v}d\vec{v} = vdv$, получаем

$$dA = dE_k = \frac{m_0 v dv}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Легко убедиться прямым дифференцированием, что это дифференциал

$$dE_k = d\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right),$$

что после интегрирования дает

$$E_k = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + const\,.$$

Кинетическая энергия, по самому своему определению, это энергия движения, поэтому, если $v = 0$, то и $E_к = 0$. Исходя из этого, находим

$$\mathrm{const} = -\,m_0c^2.$$

Тогда для кинетической энергии в СТО получаем формулу

$$E_k = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right). \tag{12.13}$$

Эта формула при $\beta \ll 1$ переходит в классическую $E_к = mv^2/2$. Для простоты расчетов по проверке можно использовать формулу бинома Ньютона для представления знаменателя.

11. Связь массы и энергии. Инвариант.

Из формулы

$$dE_к = dmc^2$$

следует, что приращение кинетической энергии частицы сопровождается пропорциональным приращением ее релятивистской массы. Вместе с тем известно, что при протекании различных процессов в природе одни виды энергии могут преобразовываться в другие. Например, кинетическая энергия сталкивающихся частиц может преобразоваться во внутреннюю энергию образовавшейся частицы. Поэтому естественно ожидать, что масса тела будет возрастать не только при сообщении ему кинетической энергии, но и вообще при *любом* увеличении общего запаса энергии тела независимо от того, за счет какого конкретного вида энергии это увеличение происходит.

Отсюда Эйнштейн пришел к следующему фундаментальному выводу: общая энергия тела (или системы тел), из каких бы видов энергии она ни состояла (кинетической, электрической, химической и т. д.), связана с массой этого тела соотношением

$$E = mc^2. \qquad (12.14)$$

Эта формула выражает один из наиболее фундаментальных законов природы − закон взаимосвязи (пропорциональности) массы m и полной энергии E тела. Во избежание недоразумений обратим внимание на то, что в полную энергию E не включена потенциальная энергия тела во внешнем поле, если таковое действует на тело. Соотношение $E = mc^2$ можно записать и в другой форме, если учесть формулу

$$E_\text{k} = (m - m_0)c^2.$$

Тогда полная энергия тела

$$E = m_0c^2 + E_\text{k}, \qquad (12.15)$$

где m_0 − масса покоя тела, E_k − его кинетическая энергия. Отсюда непосредственно следует, что покоящееся тело (E_k = 0) также обладает энергией

$$E_0 = m_0c^2. \qquad (12.16)$$

Эту энергию называют *энергией покоя* или собственной энергией.

Мы видим, что масса тела, которая в нерелятивистской механике выступала как мера инертности (во втором законе Ньютона) или как мера гравитационного действия (в законе всемирного тяготения), теперь выступает в новой функции - как мера *энергосодержания* тела. Даже покоящееся тело, согласно теории относительности, обладает запасом энергии − энергией покоя. Изменение полной энергии тела (системы) сопровождается эквивалентным изменением его массы

$$\Delta m=\Delta E/c^2, \qquad (12.17)$$

и наоборот. При обычных макроскопических процессах изменение массы тел оказывается чрезвычайно малым, недоступным для измерений.

Ясно, что как энергия E, так и импульс p частицы имеют различные значения в разных системах отсчета. Оказывается, однако, что существует величина − некоторая комбинация E и p, которая является инвариантной, то есть имеет одно и то же значение в разных системах отсчета. Эта величина есть $E^2 - p^2c^2$. Убедимся, что это так. Воспользовавшись формулами $E = mc^2$ и $p = mv$, запишем

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 - m^2v^2c^2 = \frac{m_0c^4}{1-\beta^2}\left[1-\beta^2\right].$$

или после сокращения получаем так называемый *инвариант*

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4. \tag{12.18}$$

Этот вывод чрезвычайно важен: он позволяет во многих случаях упростить анализ и решение различных вопросов.

Литература

1. Иванов, В. К. Физика. Механика, молекулярная физика и термодинамика : учебное пособие для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки бакалавров 16.03.01 "Техническая физика" / В. К. Иванов, А. Н. Ипатов ; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, [Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций]Санкт-Петербург : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. 162 с.
2. Иродов И. Е. Физика макросистем : основные законы : учебное пособие / И. Е. Иродов. 8-е изд. Москва : Лаборатория знаний, 2020. 210 с.
3. Савельев И.В. Курс физики : учебное пособие для вузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям : [в 3 т.]. Т. 1: Механика; Молекулярная физика Изд. 5-е, стер. 2016. 350 с.

Разработал доцент кафедры физики
Васильев А.Э.

ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Лекция 13. Механика жидкостей

1. Движение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли
2. Истечение жидкости из отверстия в днище сосуда

1.Движение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли

При рассмотрении движения жидкости в большинстве случаев с достаточной степенью точности можно считать ее идеальной жидкостью.

Идеальная жидкость — воображаемая несжимаемая жидкость, лишенная вязкости и теплопроводности. В идеальной жидкости отсутствует внутреннее трение, т. е., нет касательных напряжений между двумя соседними слоями, она непрерывна и не имеет структуры. Такая идеализация допустима во многих случаях течения, рассматриваемых в гидроаэродинамике, и дает хорошее описание реальных течений жидкостей и газов на достаточном удалении от омываемых твердых поверхностей.

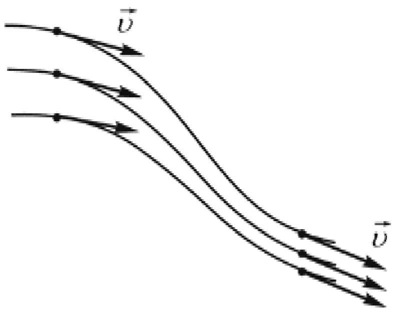


Рис. 13.1

Движение слоев жидкости или газа относительно друг друга или всей жидкости или газа относительно твердых тел называют *течением*. Совокупность частиц движущейся жидкости называется *потоком*. (рис13.1)

Движение жидкости будет известно, если в каждой точке области пространства, где течет жидкость, будет известен вектор скорости υ проходящих через нее частиц жидкости как функция времени. Совокупность векторов скоростей, заданных для всех точек пространства, образует *поле вектора скорости*. Векторы скорости, соответствующие каждой точке потока жидкости, это не скорости одной и той же частицы, проходящей в различные моменты времени через различные точки траектории, а скорости различных частиц жидкости, проходящих в один и тот же момент времени через различные точки потока. Если в движущейся жидкости провести линии таким образом, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала по направлению с вектором $\vec{V}$, то такие линии называются *линиями тока* (рис. 13.1). Условились проводить линии тока таким образом, чтобы их густота была больше там, где больше скорость течения жидкости и меньше там, где жидкость течет медленнее. Таким образом, по картине линий тока можно судить не только о направлении, но и о величине вектора $\vec{V}$ в разных точках пространства.

Величина и направление скорости в рассматриваемых точках пространства в общем случае могут меняться со временем. Если ни в одной из точек потока вектор скорости с течением времени не изменяется, то течение жидкости называется *установившимся* или *стационарным*. Но в разных точках стационарного потока скорости могут быть различными. Это означает, что линии тока при установившемся течении жидкости совпадают с траекториями частиц. Линии тока нигде не могут пересекаться одна с другой, поскольку в той или иной точке потока в данный момент времени может находиться только одна частица жидкости, имеющая определенную скорость.

Часть потока, ограниченная боковой поверхностью, образованной линиями тока, называется *трубкой тока*. Любая трубка тока в стационарном потоке жидкости не изменяется с течением времени. Поэтому очевидно, что если поток стационарен, то внутри данной трубки тока движутся все время одни и те же частицы жидкости. Следовательно, количество жидкости, проходящей через какое-то сечение трубки тока, сохраняется неизменным на всем протяжении трубки (поскольку жидкость считаем несжимаемой).

Рассмотрим течение жидкости по трубке тока, изображенной на рис. 13.2.

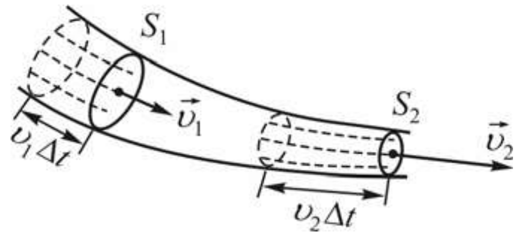


Рис 13.2

Выделим в стационарном потоке идеальной жидкости участок достаточно узкой трубки тока, ограниченной поперечными сечениями S_1 и S_2.

Эти сечения должны быть настолько малыми, чтобы скорости частиц жидкости, проходящих через любую точку каждого сечения, можно было бы считать одинаковыми по величине и перпендикулярными к сечению. Найдем объем жидкости, протекающей за интервал времени Δt через каждое из сечен S_1 и S_2. Через сечение S_1 пройдут все частицы жидкости, расстояние которых до этого сечения в начальный момент не превышало $V_1\Delta t$. Откуда объем жидкости, которая протекает через сечение S_1 за время Δt, равен $S_1V_1\Delta t$. Аналогично за то же время через сечение S_2 протечет объем жидкости, равный $S_2V_2\Delta t$. Учитывая, что жидкость несжимаемая и поток стационарный, приходим к выводу, что найденные объемы должны быть одинаковы, т. е.,

$$S_1V_1 = S_2V_2 \qquad (13.1)$$

Полученное соотношение называется *уравнением неразрывности струи*. Его можно записать в виде

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{V_2}{V_1} \qquad (13.2)$$

Таким образом, при стационарном течении скорости движения частиц жидкости обратно пропорциональны площадям поперечного сечения трубки. Поскольку сечения S_1 и S_2 могут находиться в любом месте трубки тока, то уравнение неразрывности в общем виде можно записать

$$SV = const \qquad (13.3)$$

Установим связь между давлением и скоростью жидкости в разных сечениях трубки. Поскольку мы рассматриваем идеальную жидкость (не учитываем вязкость и сжимаемость жидкости), то в этом случае работа внутренних сил в жидкости будет равна нулю. Будем также считать, что трение между жидкостью и стенкой сосуда отсутствует. Полное давление в потоке жидкости представляет собой сумму ее статического и динамического давлений.

Статическое давление обусловлено потенциальной энергией жидкости, которая находится под давлением. Оно представляет собой сумму двух давлений:

давления, обусловленного весом выделенного объема жидкости, и давления, обусловленного внешними силами.

Динамическое давление (или давление напора) обусловлено кинетической энергией жидкости, которая движется по трубе.

Рассмотрим стационарное течение жидкости. При перемещении некоторой массы жидкости Δm из одного сечения трубы во второе ее скорость, а значит, и кинетическая энергия изменяются. Внешними силами, которые действуют на эту массу жидкости, являются ее сила тяжести Δmg и силы давления со стороны жидкости, которая находится позади этой массы, $F_1 = p_1S_1$ и со стороны жидкости, находящейся перед ней, $F_2 = p_2S_2$. Если рассматривать эту массу в качестве физической системы, которая находится в инерциальной системе отсчета, связанной с поверхностью Земли, то изменение кинетической энергии рассматриваемой массы жидкости согласно теореме об изменении кинетической энергии равно сумме работ силы тяжести и сил давления, т. е.

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_2^2}{2} = \Delta mg\left(h_1 - h_2\right) + \left(p_1 - p_2\right)\Delta V \qquad (13.4)$$

где ΔV — объем жидкости, переместившейся за некоторый интервал времени с участка трубы сечением S_1 и давлением p_1 на другой участок трубы сечением S_2 и давлением p_2; V_1 и V_2 — скорости течения жидкости рис. 13.3

в рассматриваемых сечениях; h_1 и h_2 — высоты центра тяжести выделенной массы жидкости относительно некоторого нулевого горизонтального уровня (рис. 13.3).

После деления левой и правой частей полученного равенства на объем ΔV получим:

$$\frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g\, h_2 + p_2 = \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g\, h_1 + p_1 \qquad (13.5)$$

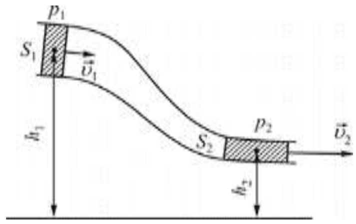


Рис. 13.3

Полученное соотношение называют *уравнением Бернулли**, согласно которому при стационарном течении идеальной жидкости сумма ее статического и динамического давлений постоянна в любом сечении трубы. Анализируя уравнение Бернулли, можно также прийти к выводу, что оно выражает закон сохранения энергии для единицы объема жидкости $\frac{\rho V_2^2}{2}$ - кинетическая энергия единицы объема жидкости, ρgh — его потенциальная энергия в поле силы тяжести, p — работа силы давления при подъеме единицы объема на единичную высоту.

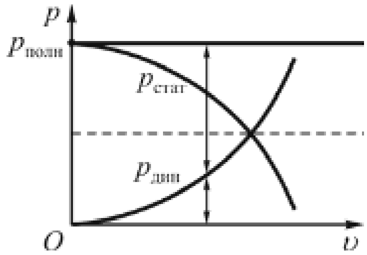


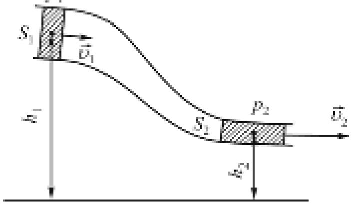
Рис. 13.4

Из уравнения Бернулли следует, что при увеличении скорости течения (уменьшении сечения трубы) динамическое давление жидкости возрастает, а ее статическое давление уменьшается. Зависимости статического, динамического и полного давлений жидкости от скорости ее течения приведены на рис.13.4.

2. Истечение жидкости из отверстия в днище сосуда

При постоянном уровне жидкости в сосуде

Рассмотрим процесс истечения через небольшое отверстие в дне сосуда при условии равенства количества поступающей в сосуд жидкости и расхода ее через



отверстие. (рис13.5) Т.о., истечение происходит при постоянном уровне жидкости в сосуде и при атмосферном давлении. Запишем уравнение Бернулли для идеальной жидкости для плоскостей сравнения 1 и 2, причем плоскость 1 проходит по уровню жидкости в сосуде, а плоскость 2 - в самом узком сечении струи, чуть ниже отверстия в днище:

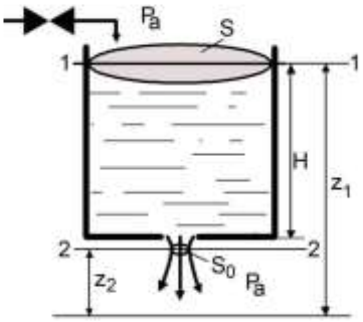


Рис. 13.5.

Рассмотрим процесс истечения через небольшое отверстие в дне сосуда при условии равенства количества поступающей в сосуд жидкости и расхода ее через отверстие. Т.о., истечение происходит при постоянном уровне жидкости в сосуде и при атмосферном давлении. Запишем уравнение Бернулли для идеальной жидкости для плоскостей сравнения 1 и 2, причем плоскость 1 проходит по уровню жидкости в сосуде, а плоскость 2 - в самом узком сечении струи, чуть ниже отверстия в днище:

$$\frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \qquad (13.6)$$

Поскольку истечение происходит при атмосферном давлении,

$P_1 = P_2 = P_{атм}$, уровень жидкости в сосуде постоянен: $V_1 = 0$, сечение 2 проходит несколько ниже дна сосуда, в технических расчетах можно принять

z_1-z_2= H. Тогда уравнение Бернулли можно записать как:

$$H = \frac{V_2^2}{2g} \qquad (13.7)$$

$$V_2 = \sqrt{2gH}$$

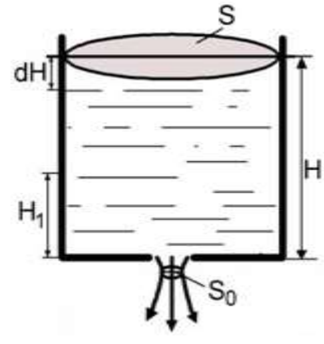
Уравнение (13.7) — это формула Торричели (1643 год). При расчете течения реальной жидкости следует учесть потери напора и эффект сжатия струи при выходе из отверстия. Фактическая скорость истечения рассчитывается по формуле: $V_0 = \alpha V_2$, где коэффициент расхода $\alpha = \varepsilon\,\varphi$. Коэффициент сжатия струи ε равен отношению площади сечения струи в месте наибольшего сжатия $S_{сж}$ к сечению отверстия S_0 : $\varepsilon = \frac{S_{сж}}{S_0}$, $\varepsilon < 0$. определяется опытным путем.

Потерю напора в отверстии за счет трения учитывают коэффициентом скорости φ, значения которого лежат в пределах 0,95–0,99. Тогда расход жидкости через отверстие: Q= $\alpha S_0\sqrt{2gH}$.

Коэффициент расхода α - справочная величина, зависящая от режима истечения. α изменяется в пределах от 0,58 до 0,75. Из полученных зависимостей видно, что расход жидкости через отверстие не зависит от формы сосуда, поэтому уравнение расхода можно применять и при истечении из боковых отверстий.

При переменном уровне жидкости в сосуде

Задача об истечении жидкости при переменном напоре обычно сводится к определению времени опорожнения всего сосуда в зависимости от начального наполнения, формы и размеров сосуда и отверстия. В этом случае вследствие непрерывного изменения напора, а следовательно, и непрерывного изменения скоростей и давлений, всегда наблюдается неустановившееся движение жидкости, поэтому при расчетах нельзя использовать обычное



уравнение Бернулли. (рис.13.6)

Рис. 13.6

Для решения задачи полное время истечения жидкости разбиваем на бесконечно малые промежутки времени *dt,* в течение каждого из которых напор считаем постоянным, а движение жидкости установившимся. Рассмотрим истечение жидкости в атмосферу через отверстие в дне сосуда из открытого вертикального цилиндрического сосуда с сечением *S*. Элементарный объем жидкости, прошедшей через отверстие за бесконечно малый промежуток времени *dt*, рассчитывается по формуле $dV = \propto S_0\sqrt{2gH}dt$($dV$ -элементарный объём). Величину *H* в течение времени *dt* примем постоянной. В действительности за это время уровень жидкости в сосуде опустится на величину dH и объем жидкости в нем изменится на dV:

$$dV = -S \cdot dH$$

Знак «минус» показывает, что с течением времени величина *H* уменьшается и, следовательно, *dH* будет отрицательной.

Полное время опорожнения сосуда определим в результате интегрирования уравнения.

$$\int_0^t dt = \left(\propto S_0\sqrt{2gH}\right)^{-1} \int_H^0 \frac{S}{\sqrt{H}} dH$$

При *S=const*, $t = \frac{2S\sqrt{H}}{\alpha_0\sqrt{2g}}$

Для определения времени истечения только части объема от *H* до H_1:

$$t = \frac{2S(\sqrt{H} - \sqrt{H_1}}{\alpha_0\sqrt{2g}}$$

Если сечение аппарата изменяется (конический резервуар, горизонтальная цистерна), т. е., *S* величина переменная, необходимо использовать зависимость *S=f(H)*. Такие задачи решают при наполнении и опорожнении резервуаров, цистерн, водохранилищ

Литература

1. Иванов, В. К. Физика. Механика, молекулярная физика и термодинамика: учебное пособие для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки бакалавров 16.03.01 "Техническая физика" / В. К. Иванов, А. Н. Ипатов; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, [Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций] Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. 162 с.
2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы [Электронный ресурс] / И. Е. Иродов. —12-е изд. (эл.). —М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.—309 с.: ил.
3. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1986.− 400с.
4. Савельев И. В. Курс физики: учебное пособие для вузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям: [в Т. 1: Механика; Молекулярная физика Изд. 5-е, стер. 2016. 350 с. 5. 3 т.].
5. Сивухин Д. В. Общий курс физики: учебное пособие для физических специальностей вузов: [в 5 томах] Т. 2: Термодинамика и молекулярная физика/ Д. В. Сивухин. Изд. 6-е, стер. Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2014. 543 с.
6. Трофимова Т. И. Курс физики: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1999.− 542 с.
7. Физические величины: Справочник/ А.П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А.М. Братковский и др. Под.ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991.− 1232 с.

Разработал доцент кафедры физика Леонова Н. А.