Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Институт компьютерных наук и кибербезопасности

Высшая школа компьютерных технологий и информационных систем

С.А. Нестеров, К.В. Никитин

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ
С ПРИМЕНЕНИЕМ СРЕДЫ MATLAB

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2025

УДК 621.078

Теория управления в примерах и задачах с применением среды Matlab. Учебное пособие / С.А. Нестеров, К.В. Никитин - Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, СПб., 2025.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям «Информатика и вычислительная техника», «Управление в технических системах» и др. В каждой главе даны краткие теоретические сведения, необходимые для решения примеров и задач теории линейных непрерывных и дискретных систем автоматического управления. Решение этих задач, как правило, не требует громоздких вычислений. Ряд примеров и задач могут выполняться в среде Matlab. В отдельной главе приведены основные функции пакета Control Systems, входящего в Matlab, а также примеры решения задач с его применением.

Пособие представляет собой очередной вариант ранее многократно опубликованных пособий на кафедрах «Автоматики и телемеханики», «Автоматики и вычислительной техники» и «Компьютерные системы и программные технологии» преподавателями Денисовым А.А., Строгановым Р.П., Чечуриным С.Л., Бабко Л.В., Васильевым В.П. и другими с внесенными изменениями и дополнениями.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Исследование систем автоматического управления состоит из ряда этапов: составление математического описания (математической модели) отдельных звеньев и всей системы, анализ устойчивости и установившихся режимов, выбор корректирующих звеньев, построение переходных процессов. Этот перечень вопросов и определяет структуру пособия. Пособие предназначено для использования на практических занятиях и для самостоятельной работы студентов. Большинство приведенных в нем задач не требует громоздких вычислений и их решение можно получить «вручную» точными или приближенными методами.

В последние десятилетия для выполнения многих научных и инженерных расчетов и, в частности, для автоматизированного проектирования систем управления, широко применяются пакеты прикладных программ, входящих в систему Matlab. По указанию преподавателей примеры и задачи, приведенные в пособии, могут предлагаться для решения в среде Matlab. Для некоторых из этих задач достаточно использовать стандартные функции пакета Control Systems, входящего в Matlab. Для решения более сложных задач приходится составлять свои программы, которые во многих случаях удобно реализовать в среде Matlab.

Пакет прикладных программ символьной математики (Symbolic Mathematics Toolbox), также входящий в Matlab, позволяет объединить численные и символьные вычисления и получить решение ряда задач в общем виде. Этот пакет реализует более 100 символьных и численных операций.

Широкие возможности для исследования процессов в системах управления дает приложение Simulink.

В последней главе пособия дано описание основных функций пакета Control Systems с примерами их применения. В приложении приведены некоторые программы анализа и синтеза систем управления с использованием среды Matlab, разработанные с участием студентов кафедры КСПТ. Эти программы могут быть полезны особенно при выполнении лабораторных работ и при курсовом проектировании. Их можно найти в учебных материалах, размещенных в Интранете в разделах кафедры КСПТ.

Для закрепления знаний теории управления рекомендуем обратиться к Web-сайту ***http://wps.prenhall.com/esm_dorf_modctrlsys_10/***. На этом сайте имеются контрольные вопросы и задачи различной степени сложности из известного учебника по теории управления [6]. В интерактивном режиме можно пройти самотестирование и проверить свои ответы.

Глава 1
УРАВНЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЗВЕНЬЕВ

В задачах этой главы необходимо составить дифференциальное уравнение, связывающее выходную физическую величину y с входной величиной u, используя для этого соответствующие законы физики. В общем случае полученное дифференциальное уравнение вида:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y, u^{(m)}, u^{(m-1)}, \ldots, u', u)=0$$

является нелинейным. Если функция F и ее первые частные производные по всем аргументам непрерывны в точке линеаризации (рабочей точке), то линеаризованное уравнение в приращениях записывается в виде:

$$a_n\Delta y^{(n)} + a_{n-1}\Delta y^{(n-1)} + \ldots + a_1\Delta y' + a_0\Delta y = b_m\Delta u^{(m)} + b_{m-1}\Delta u^{(m-1)} + \ldots + b_1\Delta u' + b_0\Delta u,$$

где коэффициенты a_i и b_k равны значениям соответствующих частных производных при подстановке значений аргументов в точке линеаризации (задаются значения входной и выходной величин и всех их временных производных, кроме старшей производной выходной величины, значение которой определяется из исходного уравнения):

$$a_i = \left.\frac{\partial F}{\partial y^{(i)}}\right|_0; \quad b_k = -\left.\frac{\partial F}{\partial x^{(k)}}\right|_0; \text{ где } i = 0, 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, m.$$

В операторной форме это линеаризованное уравнение принимает вид:

$$a_n p^n y + a_{n-1} p^{n-1} y + \ldots + a_1 p y + a_0 y = b_m p^m u + b_{m-1} p^{m-1} u + \ldots + b_1 p u + b_0 u.$$

В краткой форме можно записать последнее уравнение в виде:

$$y = W(p)u,$$

где

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots\ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}, \quad p = \frac{d}{dt}.$$

Передаточная функция звена определяется как отношение изображения Лапласа выходной величины $Y(s)$ к изображению Лапласа входной величины $U(s)$ при нулевых начальных условиях:

$$W(s) = Y(s)/U(s).$$

С точностью до обозначения операторов $W(s)$ совпадает с $W(p)$.

Задачи

1.1. Составьте уравнения и передаточные функции электрических цепей, изображенных на рис. 1.1.

1.2. Составьте уравнение и определите передаточную функцию, связывающую напряжение $U_{вых}$, снимаемое с движка, и перемещение движка потенциометра x. Длина потенциометра равна L, сопротивление потенциометра по длине равномерное. Напряжение питания потенциометра равно U_0.

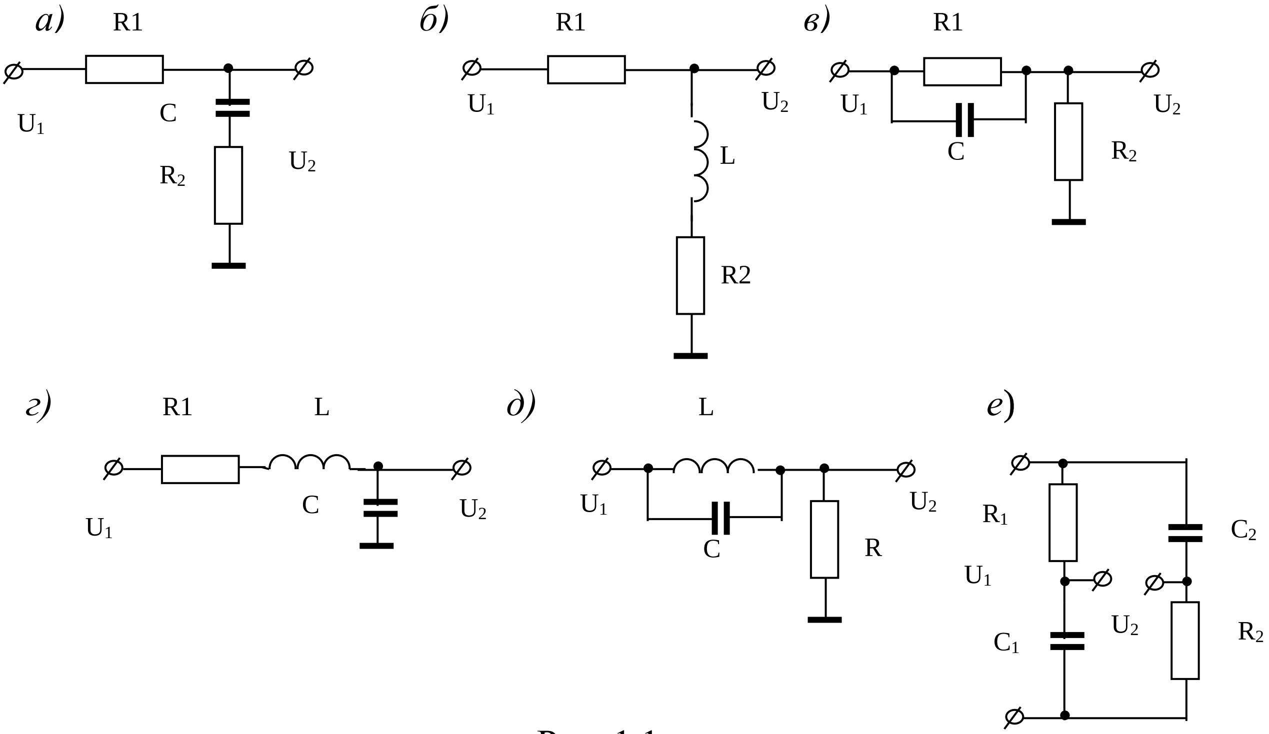


Рис. 1.1.

1.3. Составьте уравнение движения тела, прикрепленного к неподвижной стене с помощью пружины, под действием внешней силы F. Масса тела – m. Жесткость пружины равна c. На тело действует сила трения, пропорциональная скорости движения. Коэффициент пропорциональности равен k. Получите передаточную функцию звена, считая входной величиной силу F, а выходной – координату центра масс тела x.

1.4. Определите передаточную функцию цепи с идеальным операционным усилителем (рис. 1.2).

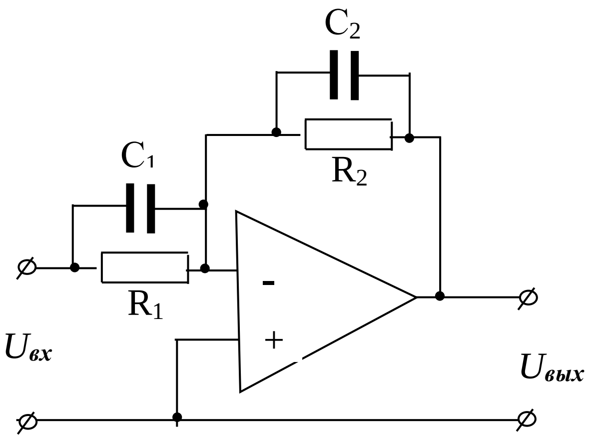


Рис. 1.2

1.5. Определите зависимость угла поворота спутника α от момента вращения M, создаваемого парой двигателей (рис. 1.3). При включении одной пары двигателей спутник вращается в одну сторону, при включении другой пары – в противоположную сторону. Спутник считать жестким телом с моментом инерции J.

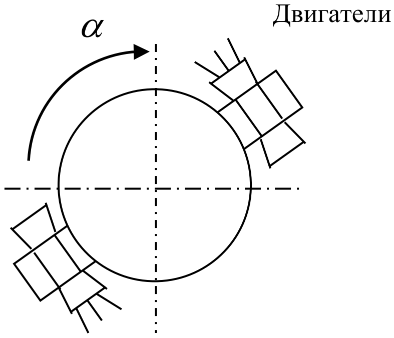


Рис. 1.3

1.6. Составьте уравнение, связывающее угол поворота крутящегося маятника α (рис. 1.4) с внешним вращающим моментом M. Момент инерции маятника равен J, коэффициент упругости пружины – c, коэффициент вязкого трения, пропорционального угловой скорости, – b.

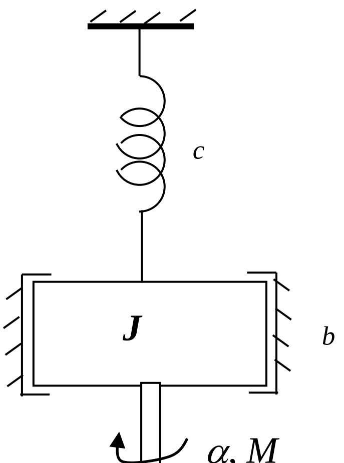


Рис. 1.4

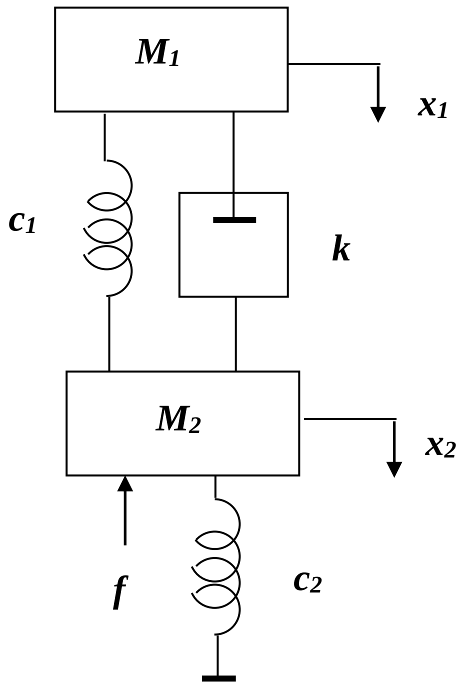


Рис. 1.5

1.7. Составьте уравнение, связывающее вертикальное перемещение автомобиля x_1 относительно поверхности шоссе (рис 1.5) с внешней силой f. Масса автомобиля – M_1; масса колес – M_2; коэффициент упругости рессор –

c_1; коэффициент упругости шин – c_2; коэффициент вязкого трения, пропорционального вертикальной скорости автомобиля, – k.

Указание: Разбейте систему на две подсистемы. Одна подсистема состоит из автомобиля, рессор и демпфера с коэффициентом k. Вторую подсистему представляют упругие шины. Расстояние центра колеса от поверхности шоссе – x_2.

1.8. Составьте уравнение, связывающее скорость вращения ротора двигателя постоянного тока (ДПТ) ω с напряжением якорной цепи U_a. Момент инерции якоря равен J, индуктивность и сопротивление якоря – L_a и R_a, момент вращения пропорционален якорному току с коэффициентом пропорциональности $C_м$, противоЭДС пропорциональна скорости вращения ротора ω с коэффициентом пропорциональности $C_е$. Поток возбуждения постоянен.

Определите передаточную функцию ДПТ для случаев:

а) входная величина – U_a, выходная величина – ω, момент сопротивления $M_c = const$;

б) входная величина – U_a, выходная величина – угол поворота ротора φ, момент сопротивления $M_c = const$;

в) входная величина – момент сопротивления M_c, выходная величина – ω, $U_a = const$.

1.9. Составьте уравнение, связывающее выходное напряжение $U_г$ генератора постоянного тока с напряжением возбуждения $U_в$ и скоростью вращения ротора ω, считая, что U_a пропорционально произведению ω и потока возбуждения Φ. Параметры обмотки возбуждения: индуктивность $L_в$ и резистивное сопротивление $R_в$. Поток возбуждения Φ и ток цепи возбуждения связаны коэффициентом пропорциональности $k_в$. Получите передаточную функцию для двух случаев:

а) входная величина – $U_в$, выходная величина – $U_г$, $\omega = const$;

б) входная величина – ω, выходная величина – $U_г$, $U_в = const$.

1.10. Составьте уравнение химической реакции, если известно, что скорость протекания реакции пропорциональна разности количества не прореагировавшего вещества Q и количества получившегося в результате реакции продукта Y.

1.11. В резервуар объемом V, заполненный до краев раствором кислоты с концентрацией ρ, втекает раствор той же кислоты с концентрацией $\rho_{вх}$. Количество раствора, втекающего в резервуар в единицу времени, равно Q. Количество раствора, вытекающего из резервуара, равно количеству поступившей жидкости. Считая, что получающийся раствор становится мгновенно однородным, получите уравнение, связывающее концентрацию раствора в резервуаре с концентрацией втекающего раствора, и определите передаточную функцию.

1.12. Составьте линеаризованные уравнения:

а) $y - x^2 - x = 0$ в точке $x_0 = 1$;

б) $y - sin\,x = 0$ $x_0 = 0$;

в) $y - ln\,x = 0$ $x_0 = 1$;

г) $\sin x - \cos y = 0$ $x_0 = \pi/4$;

д) $y + \dfrac{x}{e^x - 1} = 0$ $x_0 = 0$;

е) $y + \dfrac{1}{(x-1)^3} = 0$ $x_0 = 1$;

ж) $y'' + y'x + yx' + x + y = 0$ $y_0' = x_0' = y_0 = x_0 = 1$;

з) $y'' + y'x + x'x + x + y = 0$ $y_0' = x_0' = 0, y_0 = -1, x_0 = 1$;

и) $y'' + y'^3x + sin\,y + x = 0$ $y_0' = 1, y_0 = 0,\ x_0 = -1$.

1.13. Зависимость сопротивления термистора от температуры определяется выражением $R = R_0e^{-0,1T}$; где R_0 = 10000 Ом, T – температура в градусах Цельсия. Получите линейную модель термистора, работающего при T = 20°С, для малых изменений температуры.

1.14. Составьте передаточную функцию звена, приведенного на рис. 1.6. Количество жидкости, втекающей в единицу времени, пропорционально открытию впускного клапана $x_п$. Количество жидкости, вытекающей в единицу времени, пропорционально произведению открытия выпускного клапана $x_в$ и давления жидкости, т.е. количества жидкости в резервуаре. Коэффициенты пропорциональности – c_1 и c_2. Рассмотрите два случая:

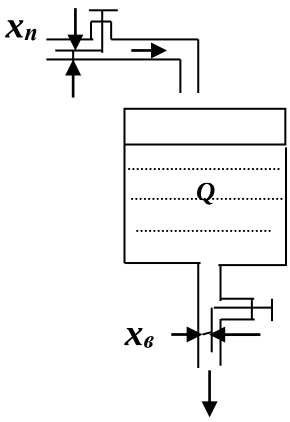


Рис. 1.6.

а) входная величина – открытие впускного клапана $x_п$, выходная величина – количество жидкости в резервуаре Q, $x_в = x_{в0} = const$;

б) входная величина – открытие выпускного клапана $x_в$, выходная величина – количество жидкости в резервуаре Q, $x_п = x_п = const$.

Линеаризацию произвести в точке $x_в = x_{в0}$ и $x_п = x_{п0}$.

1.15. Составьте уравнение колебаний математического маятника (рис. 1.7). Масса маятника равна m, длина нити – l. Входной величиной является внешний момент M, выходной величиной – угол отклонения маятника от вертикальной оси α. Выполните линеаризацию полученного уравнения при $\alpha=0$ и найдите передаточную функцию.

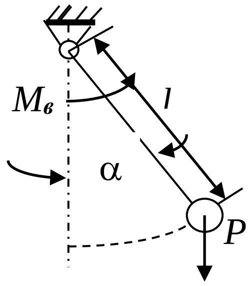


Рис. 1.7.

1.16. Составьте уравнение движения сердечника электромагнита (рис. 1.8) массой m, подвешенного на пружине с жесткостью c_1. Электромагнитная сила $F_{эм}$, действующая на сердечник, пропорциональна отношению квадрата тока i, протекающего через катушку, и величины зазора δ. Коэффициент пропорциональности c_2. Найдите передаточную функцию для случаев:

а) входная величина – внешняя сила $F_{вн}$, выходная величина – зазор δ, в рабочей точке δ_0 при $i = i_0 = const$;

б) входная величина – сила тока i, выходная величина – зазор δ в точке $\delta = \delta_0$, $i = i_0$ при $F_{вн} = 0$.

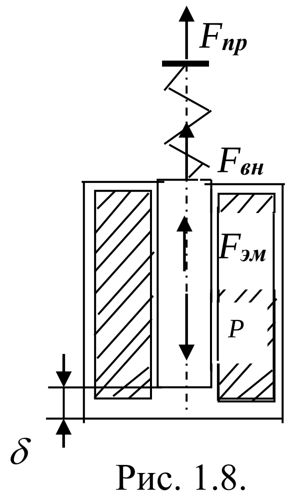


Рис. 1.8.

1.17. Составьте уравнения, описывающие физические процессы, протекающие в двигателе постоянного тока при управлении скоростью вращения ротора напряжением возбуждения $U_в$. Вращающий момент пропорционален произведению якорного тока I_a и магнитного потока Φ с коэффициентом пропорциональности $C_{мф}$, а противоЭДС пропорциональна произведению скорости вращения ротора ω и магнитного потока с коэффициентом пропорциональности $C_{еф}$, магнитный поток пропорционален току в цепи возбуждения с коэффициентом пропорциональности $k_в$. Параметры двигателя: момент инерции якоря равен J, индуктивность и сопротивление якоря – L_a и R_a, индуктивность и сопротивление обмотки возбуждения – $L_в$ и $R_в$. Определите передаточную функцию двигателя (входная величина – $U_в$, выходная величина – ω, $U_a = const$, момент сопротивления $M_c = const$) в рабочей точке I_{a0}, Φ_0, ω_0.

Глава 2
СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В теории автоматического управления используются два основных вида описания систем: один – в переменных входы-выходы, другой – в переменных состояния. Первый приводит к передаточным функциям (передаточным матрицам) и частотным характеристикам. В этом случае выходная ***y*** и входная ***u*** переменные связаны через передаточную функцию:

$$\mathbf{y}=\mathbf{W(p)u}. \qquad (2.1)$$

Во втором случае система описывается уравнениями, разрешенными относительно первых производных переменных состояния.

Состояние системы определяется векторной переменной $\mathbf{x(t)}=[x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)]$, позволяющей однозначно определить выход системы $\mathbf{y(t)}$ через ее вход $\mathbf{u}$ и начальное состояние $\mathbf{x(t)}=\mathbf{x(t_0)}$. Переменные состояния часто являются абстрактными величинами, которые не могут быть непосредственно измерены.

Уравнения состояния, линеаризованные относительно некоторого стационарного режима, имеют стандартный вид:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) &= \mathbf{Ax(t)} + \mathbf{Bu(t)},\\ \mathbf{y(t)} &= \mathbf{Cx(t)} + \mathbf{Du(t)},\end{aligned} \qquad (2.2)$$

где **A** – матрица объекта размерности $n \times n$, **B** – матрица управления или входа – $n \times m$, **C** – матрица выхода – $l \times n$, ***D*** – матрица компенсации – $l \times m$. В случаях $m<n$ матрица **D** = 0.

Преобразование уравнений (2.2) к виду (2.1) единственно:

$$\mathbf{W}(p)=\mathbf{C}(\mathbf{pE-A})^{-1}\mathbf{B},$$

где **E** – единичная матрица. Из-за трудностей обращения матриц во многих случаях передаточную функцию проще получить путем преобразования структурной схемы, соответствующей уравнениям (2.2).

Переход от уравнений (2.1) к уравнениям состояния (2.2) не является единственным и зависит от базиса пространства состояний.

Нормальная форма уравнений состояния

Если система с одним входом управляема и имеет передаточную функцию вида:

$$W(p)=\frac{b_{n-1}p^{n-1}+b_{n-2}p^{n-2}+...+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+...+a_1p+a_0},$$

то матрицы **A**, **B**, **C** нормального представления имеют вид:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}=\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & ... & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Если система не управляема, т.е. пара матриц $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ вырождена, то нормального представления не существует.

Таким образом, если передаточная функция *W(p)* известна, то матрицы $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ управляемой системы в нормальной форме могут быть легко получены. С другой стороны, если матрицы $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ управляемой системы заданы, то для получения нормальной формы матрицы **A** достаточно вычислить коэффициенты характеристического полинома исходной матрицы.

Канонические формы уравнений состояния

Если передаточная функция $W(p)=\dfrac{R(p)}{Q(p)}$ объекта с одним входом имеет только простые полюсы p_i (корни характеристического уравнения), то используются два канонических представления вида:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} p_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & p_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & p_n \end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}=\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & ... & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix}$$

или

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} p_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & p_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & p_n \end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ ... \\ b_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{где } b_i=\frac{R(p_i)}{Q'(p_i)}.$$

Условия управляемости и наблюдаемости систем

Система (непрерывная или дискретная), представленная в форме уравнений состояния, управляема тогда и только тогда, когда пара матриц $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ не вырождена, т.е. ранг матрицы $\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & ... & \mathbf{A}^{\mathbf{n}-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}$ равен порядку системы *n*.

Система (2) наблюдаема, если ранг матрицы наблюдаемости $\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\mathbf{T}} & \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{C}^{\mathbf{T}} & (\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^2\mathbf{C}^{\mathbf{T}} & ... & (\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{n}-1}\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\end{bmatrix}$ равен порядку системы *n*, ($\mathbf{C}^{\mathbf{T}}$ и $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ – транспонированные матрицы).

Переход от одного базиса к другому

Переход от представления управляемой системы в базисе {**A**, **B**} пространства переменных состояния ***x*** в другой базис {**A***, **B***} осуществляется с помощью преобразования ***x****=**P*x***. Матрица перехода **P** является единственной и может быть вычислена по формуле $\mathbf{P}=\mathbf{U}^{*}\mathbf{U}^{-1}$,
где $\mathbf{U} = [\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ и $\mathbf{U}^{*} = [\mathbf{B}^{*}\ (\mathbf{A}^{*})\mathbf{B}^{*}\ (\mathbf{A}^{*})^{2}\mathbf{B}^{*}\ \ldots\ (\mathbf{A}^{*})^{n-1}\mathbf{B}^{*}]$.

Очевидно, $\mathbf{U}^{*}= \mathbf{PU}$, $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{U}(\mathbf{U}^{*})^{-1}$. Легко убедиться, что $\mathbf{A}^{*}= \mathbf{PAP}^{-1}$, $\mathbf{B}^{*}= \mathbf{PB}$, $\mathbf{C}^{*} = \mathbf{CP}^{-1}$. Выбор нового базиса {**A***, **B***} не является произвольным. Требуется, чтобы передаточные функции исходной и преобразованной систем совпадали.

Преобразования структурных схем

Для получения передаточной функции системы можно использовать правила структурных преобразований, заменяя типовые соединения звеньев одним эквивалентным звеном.

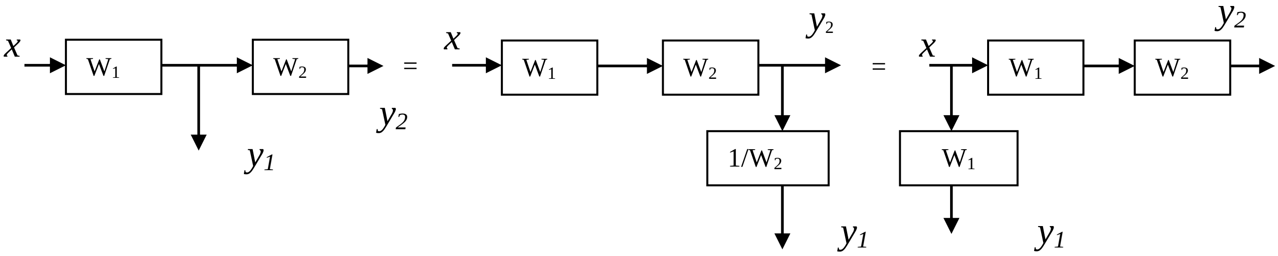
Последовательное соединение звеньев заменяется звеном с передаточной функцией, равной произведению передаточных функций, входящих в соединение: $W_{\text{ïîñë}.}(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i\ (p)$.

Параллельное соединение звеньев заменяется звеном с передаточной функцией, равной алгебраической сумме передаточных функций, входящих в соединение: $W_{\text{ïàð}.}(p) = \sum_{i=1}^{n} \pm W_i(p)$.

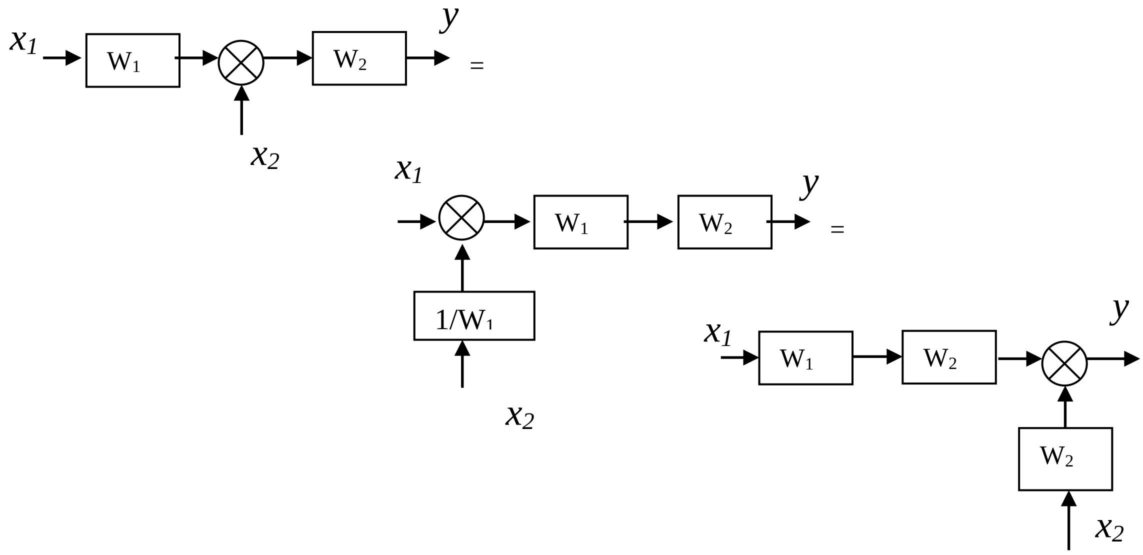
Звено с передаточной функцией $W_{пр}(p)$, охваченное обратной связью с передаточной функцией звена в обратной связи $W_{обр}(p)$, заменяется звеном с передаточной функцией: $W_{\text{îáð}.} = \dfrac{W_{\text{ïð}.}(p)}{1 \pm W_{\text{ïð}.}(p) W_{\text{îáð}.}(p)}$ (Знак + для отрицательной, а знак – для положительной обратной связи).

Если структура системы не позволяет выделить рассмотренные соединения (например, при наличии перекрещивающихся контуров или связей) применяются эквивалентные структурные преобразования, осуществляемые путем переноса точек размножения или суммирования сигналов через звенья вперед или назад, как показано ниже:

а)



б)



Правила переноса воздействий

Для получения передаточной функции можно применять также формулу Мейсона, позволяющую вычислить передаточную функцию между любыми двумя узлами структурной схемы [4, 5]:

$$W(p)=\frac{[(\sum_{k=1}^{r}W_{\text{ïð .ê}})\prod_{i=1}^{s}(1+W_{pi})]*}{[\prod_{i=1}^{s}(1\pm W_{pi})]*}.$$

Здесь под $W_{пр.к}$ понимаются передаточные функции всех прямых путей между рассматриваемыми узлами; W_{pi} – передаточная функция каждого контура, взятая со знаком + для отрицательной обратной связи, после его размыкания. Произведение $\prod_{i=1}^{s}$ включает все s замкнутых контура. Звездочка * означает исключение из скобок всех членов, содержащих произведения передаточных функций одних и тех же звеньев (включая звенья с передаточной функцией, равной единице).

Задачи

2.1. Получите дифференциальное уравнение, связывающее выход ***x*** с задающим воздействием ***g***, по структурной схеме, приведенной на рис. 2.1.

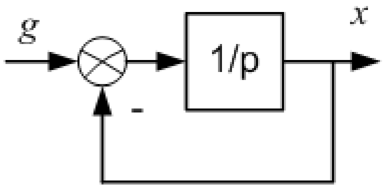


Рис. 2.1

2.2. Составьте систему дифференциальных уравнений по структурным схемам, приведенным на рис. 2.2 и 2.3.

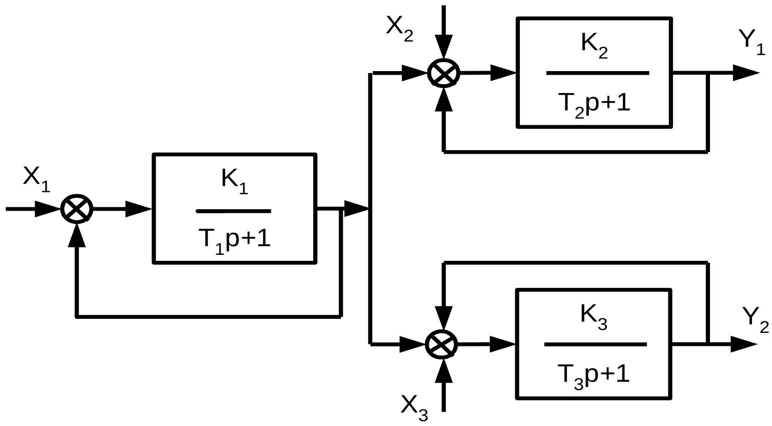


Рис. 2.2

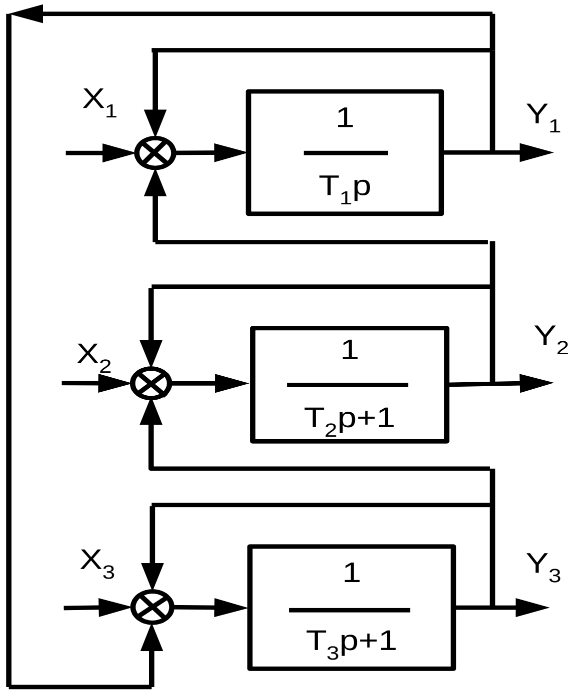


Рис. 2.3

2.3. Составьте структурные схемы по следующим математическим описаниям систем:

$$à)\quad 4\ddot{y}+3\dot{y}+y=2u, \qquad á)\ \dddot{y}+\dot{y}+y=u,$$

$$â)\quad \begin{cases}(T_1p+k_1+1)(T_2p+k_2+1)y_1= & k_2[(T_1p+k_1+1)x_2+k_1x_1],\\(T_1p+k_1+1)(T_3p+k_3+1)y_2= & k_3[(T_1p+k_1+1)x_3+k_1x_1].\end{cases}$$

$$ã)\quad \begin{cases}(T_1p+1)y_1+y_2=x_1\,,\\(T_2p+1)y_2+y_2+y_3=x_2\,,\\(T_3p+1)y_3+y_1=x_3\,.\end{cases}$$

2.4. Покажите эквивалентность структурных схем, изображенных на рис. 2.4.

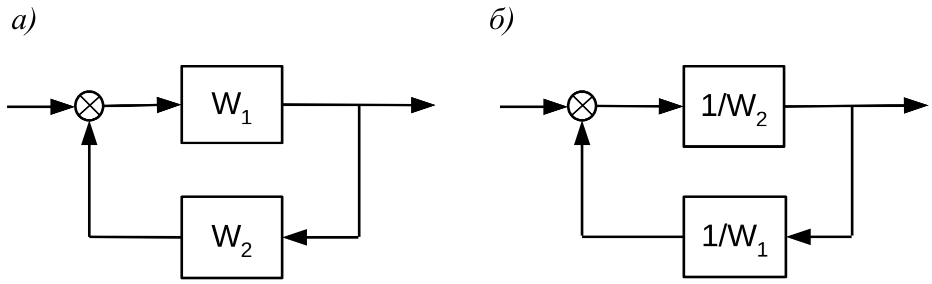


Рис. 2.4

2.5. Приведите структурную схему рис. 2.5 к одноконтурному виду, не изменяя передаточных звеньев прямого тракта.

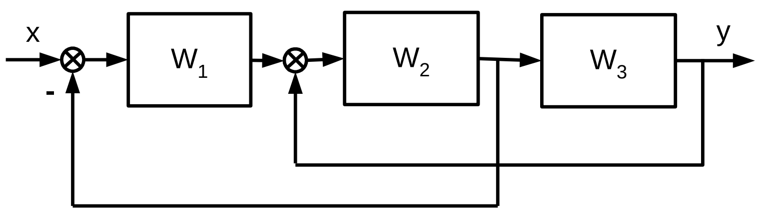


Рис. 2.5

2.6. Получите передаточные функции системы (рис. 2.2) между 1–ым входом и всеми выходами.

2.7. Получите передаточную функцию системы (рис. 2.3) между 1-ым входом и 3-им выходом.

2.8. Преобразуйте структурную схему рис. 2.6, приведя все возмущения к одной точке – выходу звена с передаточной функцией W_3.

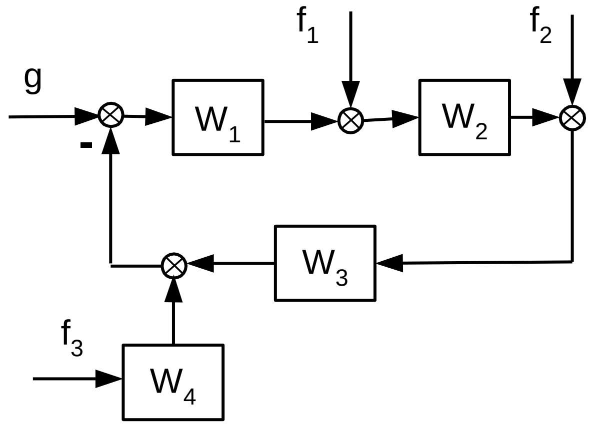


Рис. 2.6

2.9. Получите передаточные функции систем, показанных на рис. 2.7.

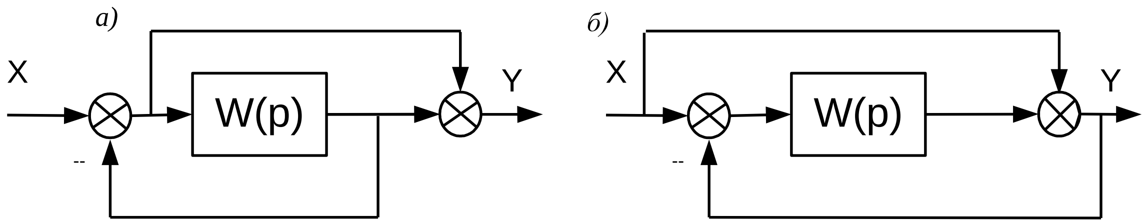


Рис. 2.7

2.10. Путем структурных преобразований получите передаточные функции систем (рис. 2.8).

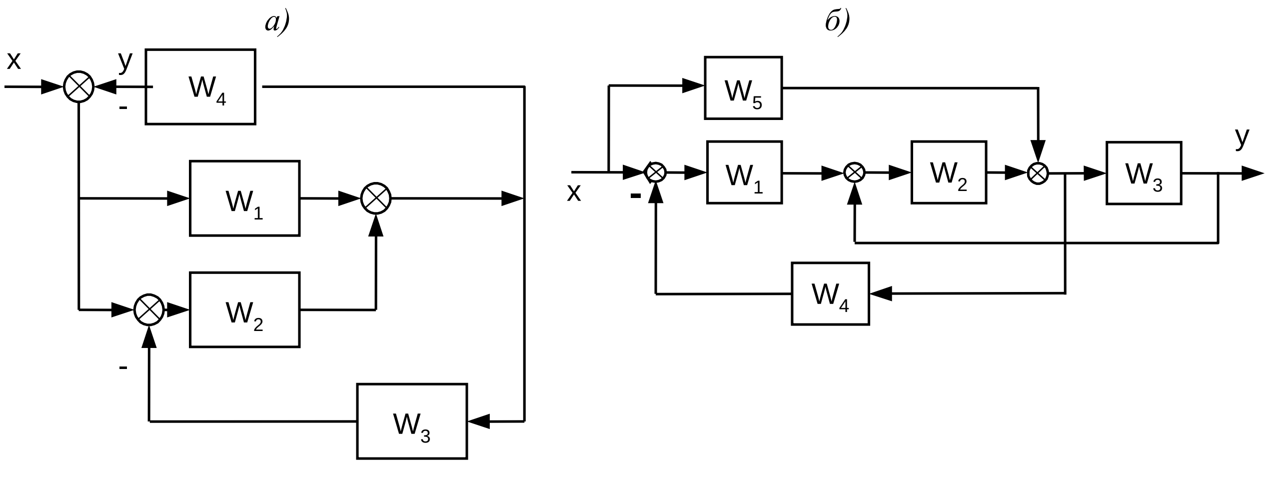


Рис. 2.8

2.11. Вычислите передаточную функцию замкнутой системы (рис. 2.9) с помощью функций MATLAB *series* и *feedback*.

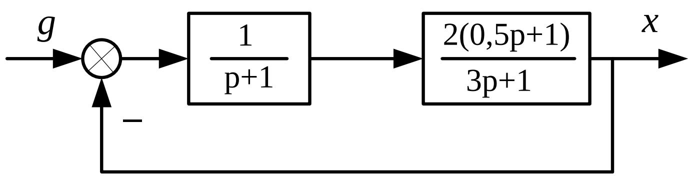


Рис. 2.9

2.12. Составьте уравнения состояния электрических схем, изображенных на рис. 1.1, приняв за переменные состояния напряжения на конденсаторах и токи, протекающие через индуктивности.

2.13. На основе полученных в предыдущей задаче уравнений состояния электрических цепей составьте структурные схемы (схемы моделирования), используя интегрирующие и усилительные звенья.

2.14. Преобразуйте описания систем, заданные передаточными функциями, в уравнения состояния:

а) $W(p)=\dfrac{k}{p^2+p+1}$; *б)* $W(p)=\dfrac{k}{p(p+1)(p+2)}$;

в) $W(p)=\dfrac{k(p+1)}{p^2-3p+2}$; *г)* $W(p)=\dfrac{k(p+1)}{p^4+p^3+2p^2+p+1}$;

д) $W(p)=\dfrac{k(p^2+p+1)}{p^3+2p^2+p+1}$; *е)* $W(p)=\dfrac{k(p^2+2p+1)}{p^4+p^3+2p^2+p+1}$.

2.15. Получите уравнения состояния систем из предыдущей задачи с помощью функций Matlab.

2.16. Даны уравнения движения систем. Проверьте их управляемость и наблюдаемость.

а) $\dot{x}_1=x_1+x_2;$ $\dot{x}_2=-x_1+u;;$ $y=x_2.$

б) $\dot{x}_1=x_1+x_2+u;$ $\dot{x}_2=x_2;$ $y=x_2.$

в) $\dot{x}_1=x_1+x_2;$ $\dot{x}_2=-x_2+u;;$ $y=x_2.$

г) $\dot{x}_1=x_1+x_2+u;$ $\dot{x}_2=2x_2;$ $y=x_1.$

$$д)\quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + u;; \\ y &= x_1. \end{aligned} \qquad е)\quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 + u; \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 + x_3; \\ y &= x_3. \end{aligned}.$$

2.17. По уравнениям состояния систем из задачи 2.16 получите соответствующие передаточные функции систем.

2.18. Приведите уравнения систем к нормальной форме:

$$а)\ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 + 2u \end{aligned}; \qquad б)\ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + 4x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 + 2u \end{aligned};$$

$$в)\ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \end{aligned}; \qquad г)\ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -3x_1 + u \end{aligned}$$

2.19. Составьте структурные схемы систем по уравнениям состояния, полученным в предыдущей задаче.

2.20. Найдите матрицу преобразования **P,** переводящую систему **{A, B}** в другой базис $\{A^*, B^*\}$, убедившись, что такое преобразование возможно:

$$а)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},\ \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$б)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\ \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$в)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Глава 3
ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

При исследовании систем управления важное значение имеют частотные характеристики. Они описывают вынужденные установившиеся движения системы при подаче на ее вход гармонического воздействия.

В этой главе рассматривается построение частотных характеристик отдельных звеньев и систем.

Все частотные характеристики могут быть получены из передаточной функции $W(p)$ при подстановке в нее $p=j\omega$. Функцию $W(j\omega)$, называемую амплитудно-фазовой частотной функцией (или частотной передаточной функцией) можно представить в виде:

$$W(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

$$A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)};\ \varphi(\omega)=arctg\frac{V(\omega)}{U(\omega)}.$$

Для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, передаточные функции представляют собой дробно-рациональные функции p. Если $W(p)=R(p)/Q(p)$, то частотная передаточная функция соответственно имеет вид: $W(j\omega)=R(j\omega)/Q(j\omega)$.

Амплитудно-частотная характеристика $A(\omega)=|W(j\omega)|=\dfrac{|R(j\omega)|}{|Q(j\omega)|}$;

а фазо-частотная характеристика $\varphi(\omega)=argR(j\omega)-arg(Q(j\omega)$,

где $|R(j\omega)|=\sqrt{U_R^2(\omega)+V_R^2(\omega)};\ |Q(j\omega)|=\sqrt{U_Q^2(\omega)+V_Q^2(\omega)};$

$$arg\,R(j\omega)=arctg\frac{V_R(\omega)}{U_R(\omega)};\ arg\,Q(j\omega)=arctg\frac{V_Q(\omega)}{U_Q(\omega)}.$$

Годограф $W(j\omega)$ называется амплитудно-фазовой частотной характеристикой (или диаграммой Найквиста).

В практических расчетах используются логарифмические амплитудные характеристики (ЛАХ) и логарифмические фазовые характеристики (ЛФХ). Аналитические выражения для ЛАХ и ЛФХ определяются из следующих соотношений:

$$L(\omega)=20Lg|W(j\omega)|\quad,\quad \varphi(\omega)=argW(j\omega).$$

При этом обычно строят асимптотические ЛАХ. По оси абсцисс откладывают $\lg\omega$ в декадах или указывают само значение частоты в рад/сек., используя логарифмическую шкалу.

(Совокупность ЛАХ и ЛФХ называют также диаграммой Боде).

Логарифмические частотные характеристики удобно строить на специально разлинованной бумаге, когда по оси абсцисс откладываются значения частоты по

логарифмической шкале. Разлиновать бумагу можно с помощью программы **BodePaper**, работающей в среде **Matlab**. Эту программу можно загрузить из Интранет *(http://aivt.ftk.spstu.ru).*
Там же имеется программа **BodePlotGui**, полезная для изучения асимптотических ЛАХ.

При рассмотрении структурных схем САУ можно выделить три типа соединений звеньев: последовательное, параллельное и с обратной связью.

При последовательном соединении звеньев частотная передаточная функция представляет собой произведение АФЧХ отдельных звеньев, а ЛАХ и ЛФХ соответственно их сумму:

$$W(j\omega)=\prod_{i-1}^{n}W_i(j\omega),$$

$$L(\omega)=\sum L_i(\omega) \quad и \quad \varphi(\omega)=\sum\varphi_i(\omega).$$

При параллельном соединении звеньев частотная передаточная функция представляет собой сумму АФЧХ отдельных звеньев.

$$W(j\omega)=\sum_{i=1}^{n}W_i(j\omega).$$

Приближенное построение ЛАХ параллельного соединения выполняют по участкам: в частотном диапазоне, где $L_1>L_2$ принимают $L=L_1$, а в диапазоне, где $L_2>L_1$ принимают $L=L_2$.

При охвате звена обратной связью частотная передаточная функция имеет вид:

$$W(j\omega)=\frac{W_1(j\omega)}{1+W_1(j\omega)W_2(j\omega)},$$

где $W_1(j\omega)$ – характеристика прямой связи, а $W_2(j\omega)$ – характеристика обратной связи.

Приближенное построение ЛАХ можно производить следующим образом:

1) в диапазоне частот, где $|W_1(j\omega)\ W_2(j\omega)|<<1,$ (т.е. $L_1+L_2<0$) можно считать:

$|W(j\omega)|\approx|W_1(j\omega)|$ *и* $L(\omega)\approx L_1(\omega),$

2) в диапазоне частот, где $|W_1(j\omega)\ W_2(j\omega)|>>1$ (т.е. $L_1+L_2>0$)

$|W(j\omega)|\approx 1/|W_2(j\omega)|$ *и* $L(\omega)\approx -L_2(\omega).$

Таким образом, вначале строят сумму ЛАХ звеньев, а затем – общую ЛАХ соединения.

Для минимально-фазовых систем по полученной ЛАХ можно построить ФЧХ на основе известной их взаимосвязи. Для неминимально-фазовых систем построение характеристик рекомендуется начинать с АФЧХ.

Задачи

3.1. Выведите выражения и постройте все частотные характеристики звеньев, передаточные функции которых имеют вид:

$$а)\ W(p)=\frac{kp}{Tp+1};\qquad б)\ W(p)=k(Tp+1);$$

$$в)\ W(p)=\frac{k}{Tp-1};\qquad г)\ W(p)=\frac{k}{p(Tp+1)}.$$

3.2. Выведите выражения и постройте все частотные характеристики звеньев с передаточными функциями:

$$а)\ W(p)=\frac{k(1+T_1p)}{1+T_2p},\quad T_1>T_2,\ k>1,$$

$$б)\ W(p)=\frac{k(1+T_1p)}{1+T_2p},\quad T_1<T_2,\ k<1.$$

Сравните эти характеристики.

3.3. Докажите, что у звена с передаточной функцией

$$W(p)=\frac{(1+T_1p)}{1+T_2p},\quad T_1>T_2\ \ \textit{èëè}\ \ T_1<T_2$$

фазовый сдвиг на сопрягающих частотах одинаков и зависит от соотношения постоянных времени.

Нарисуйте схемы электрических четырехполюсников, имеющих указанные передаточные функции.

3.4. Определите частоту, при которой фазовый сдвиг звеньев с передаточной функцией

$$W(p)=\frac{(1+T_1p)}{1+T_2p},\quad T_1>T_2\ \ \textit{èëè}\ \ T_1<T_2\ ,$$

имеет экстремальное значение и найдите это значение.

3.5. Определите постоянные времени T_1 и T_2 форсирующего звена с передаточной функцией $W(p)=\dfrac{k(1+T_1p)}{1+T_2p}$,

обеспечивающего максимальный фазовый сдвиг $\varphi_м$= 60° на частоте ω =20 с$^{-1}$.

Проверьте результат с помощью Matlab.

3.6. Постройте АФЧХ, ЛАХ и ЛФХ неминимально-фазового звена с передаточной функцией

$$W(p)=\frac{k(1-T_1p)}{1+T_2p}, \quad T_1>T_2 \text{ èëè } \quad T_1>T_2.$$

Сравните их с соответствующими характеристиками минимально-фазового аналога.

3.7. Постройте АФЧХ звена с передаточной функцией $W(p)=\dfrac{ke^{-p\tau}}{1+Tp}$.

3.8. На вход инерционного звена с постоянной времени T=1с и коэффициентом передачи k=10 подано синусоидальное воздействие с частотой ω=5 с$^{-1}$ и амплитудой $X_м$ = 2. Определите значение амплитуды установившихся колебаний на выходе $Y_м$ и фазу выходного сигнала.

3.9. Постройте приближенные АФЧХ, ЛАХ и ЛФХ систем с заданными передаточными функциями:

а) $W(p)=\dfrac{10(1-10p)}{1+p}$,

б) $W(p)=\dfrac{(1-10p)}{(1+p)p}$,

в) $W(p)=\dfrac{p^2}{(p-1)}$,

г) $W(p)=\dfrac{10(p-1)}{(1+10p)p^2}$,

д) $W(p)=\dfrac{p^2(1-p)}{(1+p)^2}$,

е) $W(p)=\dfrac{(1-p)^2}{(1+p)^2}$,

ж) $W(p)=\dfrac{1}{p(p+1)^2}$,

з) $W(p)=\dfrac{10}{p(p-1)^2}$.

С помощью Matlab постройте точные характеристики и сравните полученные результаты.

3.10. Постройте примерные АФЧХ последовательно соединенных звеньев по АФЧХ отдельных звеньев:

а) $W_1(p)=p-1, \quad W_2(p)=-p+1$,

б) $W_1(p)=\dfrac{1}{(1+p)}, \quad W_2(p)=-\dfrac{10p}{(1+p)}$,

в) $W_1(p)=\dfrac{10p}{(1+p)}, \quad W_2(p)=\dfrac{2}{(1+2p)}$.

Проверьте результаты с помощью Matlab, построив точные характеристики.

3.11 Постройте примерные АФЧХ параллельно включенных звеньев:

$$а)\ W_1(p)=K,\quad W_2(p)=\frac{1}{Tp}\quad,\quad б)\ W_1(p)=K,\quad W_2(p)=Tp,$$

$$в)\ W_1(p)=K_1,\quad W_2(p)=K_2p,\quad W_3(p)=\frac{K_3}{p}.$$

3.12. Постройте асимптотические ЛАХ и ЛФХ звеньев, включенных параллельно. Определите передаточные функции соединений:

$$а)\ W_1(p)=\frac{10}{(1+0{,}001p)},\quad W_2(p)=\frac{100}{(0{,}0001p^2+0{,}001p+1)};$$

$$б)\ W_1(p)=\frac{p}{(1+p)},\qquad W_2(p)=\frac{0{,}1}{(10p+1)}.$$

$$в)\ W_1(p)=\frac{10}{(0{,}05p+1)},\quad W_2(p)=0{,}1(0{,}1p+1).$$

С помощью Matlab постройте точные характеристики и сравните их с асимптотическими.

3.13. Постройте асимптотические ЛАХ звеньев, охваченных отрицательной обратной связью, по ЛАХ отдельных звеньев.

$$а)\ W_1(p)=10,\quad W_2(p)=\frac{100}{(0{,}01p+1)};$$

$$б)\ W_1(p)=\frac{10}{(0{,}01p+1)},\quad W_2(p)=\frac{0{,}01p}{(0{,}001p+1)}.$$

$$в)\ W_1(p)=\frac{100}{(0{,}001p+1)},\quad W_2(p)=\frac{0{,}001p+1}{(0{,}01p+1)}.$$

$$г)\ W_1(p)=\frac{10p+1}{(0{,}1p+1)},\quad W_2(p)=\frac{100p}{(100p+1)(0{,}01p+1)}.$$

$$д)\ W_1(p)=\frac{100}{p(0{,}01p+1)},\quad W_2(p)=\frac{0{,}1p}{(p+1)}.$$

С помощью Matlab постройте точные характеристики и сравните их с асимптотическими.

3.14 Постройте ЛАХ и ЛФХ систем с передаточными функциями:

$$а)\ W(p)=\frac{10(10p+1)}{(0{,}01p+1)(0{,}1p+1)(p+1)},$$

$$б)\ W(p)=\frac{100(10p+1)}{p(100p+1)(0{,}1p+1)(p+1)},$$

в) $W(p) = \dfrac{0{,}1(0{,}2p+1)}{p^2(0{,}05p+1)(0{,}005p+1)}$,

г) $W(p) = \dfrac{10p(0.1p+1)}{(0{,}01p+1)(p+1)}$.

Проверьте результаты с помощью Matlab.

3.15. На рис. 3.1 приведены асимптотические ЛАХ минимально-фазовых звеньев. Определите их передаточные функции и запишите выражения для ФЧХ.

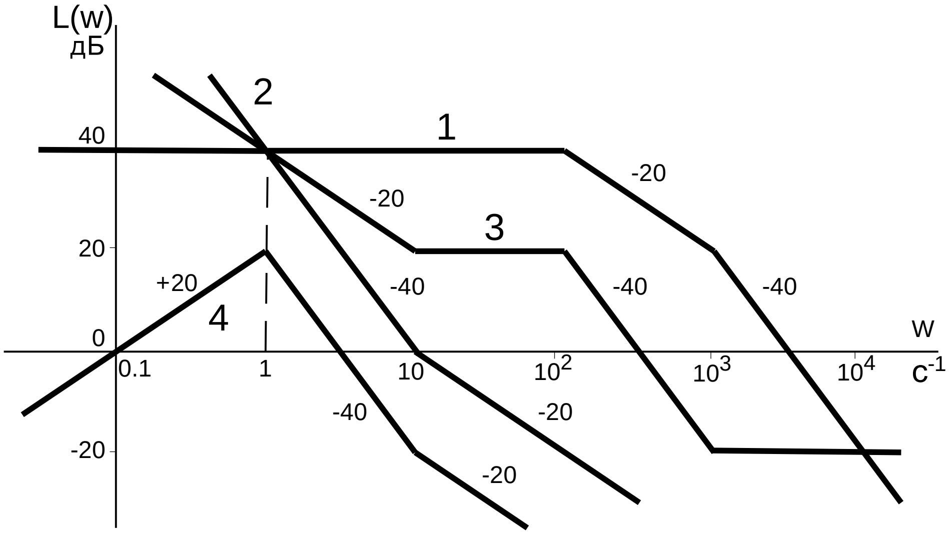


Рис. 3.1

3.16. Постройте примерный вид АФЧХ разомкнутой системы по ЛАХ минимально-фазовой системы (рис. 3.1).

3.17. Постройте примерный вид ЛАХ и ЛФХ разомкнутой системы по ее АФЧХ (рис. 3.2).

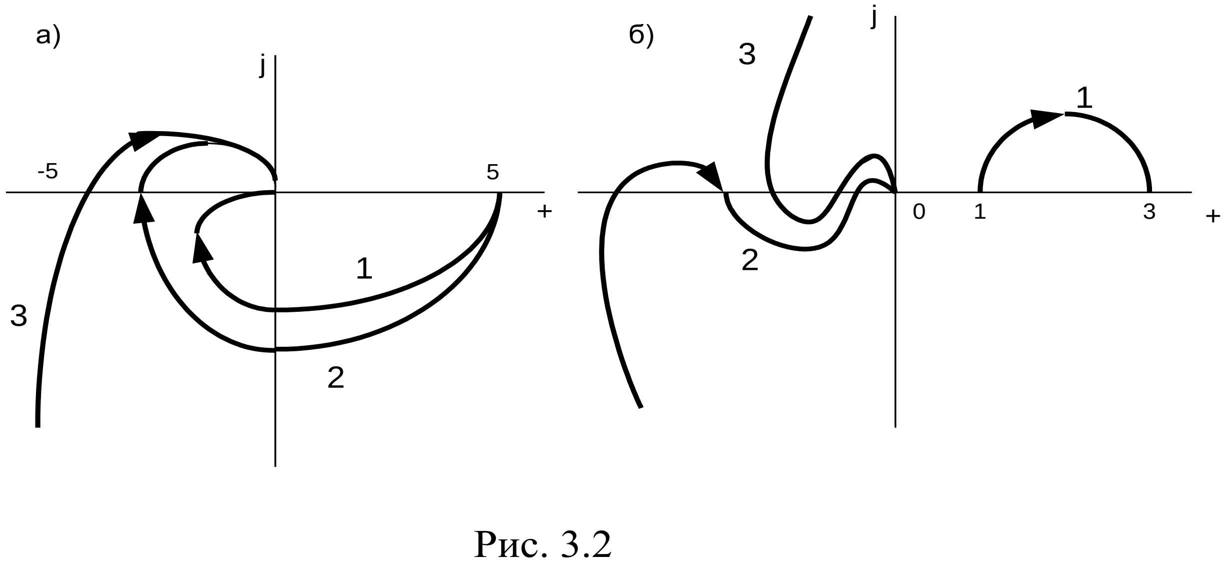


Рис. 3.2

Глава 4

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Известно, что для асимптотической устойчивости линейных непрерывных систем необходимо и достаточно, чтобы вещественные части всех корней характеристических полиномов лежали в левой комплексной полуплоскости, т.е. $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$, i = 1, 2, … , n.

Устойчивость можно определить по коэффициентам характеристического полинома (знаменателя передаточной функции)

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

– с помощью определителя Гурвица, составленного из коэффициентов *D(p)*:

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix};$$

– с применением таблицы Рауса:

r_i		Столбец			
		1	2	3	4
–	1	$c_{11} = a_0$	$c_{12} = a_2$	$c_{13} = a_4$	…
–	2	$c_{21} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{23} = a_5$	…
$r_3 = \frac{c_{11}}{c_{21}}$	3	$c_{31} = c_{12} - r_3 c_{22}$	$c_{32} = c_{13} - r_3 c_{23}$	$c_{33} = c_{14} - r_3 c_{24}$	…
$r_4 = \frac{c_{21}}{c_{31}}$	4	$c_{41} = c_{22} - r_4 c_{32}$	$c_{42} = c_{23} - r_4 c_{33}$	$c_{43} = c_{24} - r_4 c_{34}$	…
…	…	…	…	…	…
$r_i = \frac{c_{i-2,1}}{c_{i-1,1}}$	i	$c_{i,1} = c_{i-2,2} - r_i c_{i-1,2}$	$c_{i,2} = c_{i-2,3} - r_i c_{i-1,3}$	$c_{i,3} = c_{i-2,4} - r_i c_{i-1,4}$	…
…	…	…	…	…	…

Система устойчива, если положителен определитель Гурвица Δ_n и все его диагональные миноры, либо положительны коэффициенты первого столбца таблицы Рауса.

В соответствии с критерием Михайлова система устойчива, если поворот против часовой стрелки вектора, проведенного из начала координат в точку ω годографа Михайлова

$$D(j\omega)=a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(j\omega)+a_n$$

при изменении ω от нуля до бесконечности, равен nπ/2.

По критерию Найквиста замкнутая система устойчива, если поворот против часовой стрелки вектора, проведенного из точки (-1, j0) в точку ω амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы при изменении ω от нуля до бесконечности равен $\frac{\pi}{2}(2\ddot{I}+\grave{I})$, где *П*-число правых полюсов передаточной функции разомкнутой системы, *М*-число полюсов на мнимой оси (включая ν - число полюсов в нуле).

При использовании логарифмических частотных характеристик в случае *М*=0 замкнутая система устойчива, если алгебраическая сумма переходов фазовой характеристикой линий $\pm\ell\pi,\ \ell=1,3,5,\ldots$ в области частот положительной логарифмической амплитудной характеристики разомкнутой системы равна *П/2*. Положительным считается переход фазовой характеристикой линий $\pm\ell\pi$ снизу вверх.

Для выделения областей устойчивости в плоскости двух неизвестных параметров А и В из характеристического уравнения *D(p)=0* подстановкой $p=j\omega$ получают систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} Re\,D(j\omega)=0 \\ Im\,D(j\omega)=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} A\cdot P_1(\omega)+B\cdot Q_1(\omega)+R_1(\omega)=0; \\ A\cdot P_2(\omega)+B\cdot Q_2(\omega)+R_2(\omega)=0. \end{cases}$$

Решение этой системы равно:

$$A=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} -R_1 & Q_1 \\ -R_2 & Q_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix}}; \qquad B=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} P_1 & -R_1 \\ P_2 & -R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix}}.$$

Координаты точек *A(ω)* наносят на ось абсцисс и *B(ω)* – на ось ординат. Этим строго определяется порядок записи системы уравнений (т.е. порядок следования уравнений в системе и коэффициентов в каждом уравнении) и его связь с выбором осей координат. Изменение этого порядка, а также изменение знака коэффициентов одного из уравнений может привести к ошибкам в определении области устойчивости по правилам штриховки кривых. При изменении ω от 0 до ∞ кривую *B=f(A)* штрихуют двойной штриховкой слева, если Δ>0, и справа, если Δ<0. Через точки ω_i, в которых $A(\omega_i)$ или $B(\omega_i)$ представляют неопределенность вида 0/0 или ∞/∞ проходят особые прямые. Уравнения особых прямых находят подстановкой значений ω_i в одно из уравнений системы. Особые прямые штрихуются одинарной штриховкой в сторону штриховки основной кривой, если определитель Δ в точке ω_i меняет знак. При $\omega_i \neq 0$ или $\omega_i \neq \infty$ особые прямые штрихуются двойной штриховкой. В случае, если вещественная и мнимая части уравнения нелинейно зависят от параметров *A и B*, вопрос о штриховке решается по знаку определителя линеаризованных уравнений.

Во многих практических случаях параметры системы известны неточно или могут изменяться в определенных пределах. Для анализа устойчивости таких систем с неопределенными параметрами рассматривают семейство характеристических полиномов:

$$f(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n, \qquad \text{ãäå}\, a_i \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i], i = 0, 1, 2, \ldots, n..$$

Тогда система устойчива при заданных вариациях её параметров, если устойчивы характеристические полиномы со следующими коэффициентами:

$$(1) \quad (\overline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4, \underline{a}_5, \underline{a}_6, \overline{a}_7, \ldots)$$

$$(2) \quad (\overline{a}_0, \overline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \overline{a}_4, \overline{a}_5, \underline{a}_6, \underline{a}_7, \ldots)$$

$$(3) \quad (\underline{a}_0, \overline{a}_1, \overline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \overline{a}_5, \overline{a}_6, \underline{a}_7, \ldots)$$

$$(4) \quad (\underline{a}_0, \underline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5, \overline{a}_6, \overline{a}_7, \ldots)$$

Для n=3 достаточно проверить один полином – (1):

$$f(p) = \overline{a}_0 p^3 + \underline{a}_1 p^2 + \underline{a}_2 p + \overline{a}_3,$$

для n=4 – два полинома – (1) и (2), для n=5 – три полинома – (1), (2) и (3). При n≥6 необходимо проверить все четыре полинома [11].

Задачи

4.1. Исследуйте устойчивость систем, описываемых дифференциальными уравнениями:

а) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = u;$

б) $\ddot{x} + 2\dot{x} - x = u;$

в) $\dddot{x} + 2\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = u;$

4.2. Исследуйте устойчивость систем, описываемых дифференциальными уравнениями:

а) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u.$

б) $\dot{x}_1 = -x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 + u_2.$

4.3. Определите устойчивость равновесного состояния систем, осуществив предварительно линеаризацию уравнений состояния:

а) $\begin{aligned}&\dot{x}_1 = x_1 + x_2,\\ &\dot{x}_2 = -x_1 + x_2^2;\end{aligned}$ б) $\begin{aligned}&\dot{x}_1 = x_2 \cdot cos\, x_1,\\ &\dot{x}_2 = -x_2 - sin\, x_1;\end{aligned}$

в) $\begin{aligned}&\dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_1 x_2,\\ &\dot{x}_2 = 5x_1 - 3x_2 + 3x_3,\\ &\dot{x}_3 = -x_1 - 2x_3 + x_2^3.\end{aligned}$

4.4. Определите устойчивость систем по характеристическим уравнениям:

а) $3p^3 + p^2 + 2p + 1 = 0,$

б) $p^4 + p^3 + 3p^2 + 2p + 1 = 0,$

в) $p^5 + 3p^4 + 2p^3 + p^2 + 4p + 1 = 0,$

г) $7p^7 + 6p^6 + 4p^5 + 5p^4 + p^3 2p^2 + 3p - 1 = 0.$

Проверьте ответы с помощью Matlab.

4.5. При каких положительных значениях параметра *a* система

$\dot{x}_1 = -ax_1 + u_1$

$\dot{x}_2 = (a - 2)x_3 + u_1 + u_2$

$\dot{x}_3 = -x_2 - 2ax_3 - u_2$

будет устойчивой.

4.6. Проверьте устойчивость системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, если компоненты матрицы **A** положительны:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & 0 \\ a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

4.7. Дано характеристическое уравнение устойчивой системы

$$Ap^3 + Bp^2 + Cp + D = 0.$$

Определите, устойчивы ли системы, характеристические уравнения которых имеют вид:

à) $Bp^3 + Ap^2 + Bp + C = 0,$

á) $Ñp^3 + Dp^2 + Ap + B = 0,$

â) $Dp^3 + Cp^2 + Bp + A = 0.$

4.8. Дано характеристическое уравнение устойчивой системы:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0.$$

Устойчива ли система, характеристическое уравнение которой

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0 \ .$$

4.9. Определите устойчивость разомкнутой и замкнутой систем по передаточной функции разомкнутой системы:

$$\grave{a})W(p) = \frac{100}{p^3 + 3p^2 + 30p + 1}; \qquad \hat{a})W(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)};$$

$$\acute{a})W(p) = \frac{50(p+1)}{p^4 + 7p^3 + 12p^2 - 10p + 100}; \quad \tilde{a})W(p) = \frac{2(p+1)}{p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p}.$$

Проверьте ответы с помощью Matlab.

4.10. Определите значения критических коэффициентов усиления K по передаточным функциям разомкнутых систем:

$$\grave{a})W(p) = \frac{K}{p(p+1)(2p+1)(5p+1)}; \qquad \hat{a})W(p) = \frac{K(p+1)}{(p^2-1)(p+3)};$$

$$\acute{a})W(p) = \frac{K(p+1)}{(p^2+1)(p+3)}; \qquad \tilde{a})W(p) = \frac{K(p^2+p+2)}{p^3+p^2+2p+4}.$$

4.11. Постройте годограф Михайлова и определите устойчивость систем по характеристическим уравнениям:

$$\grave{a})\ p^4 + 2p^3 + 5p^2 + 4p + 4 = 0;$$

$$\acute{a})\ p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 4 = 0;$$

$$\hat{a})\,3p^4 + p^3 + 3p^2 + 4p + 1 = 0;$$

$$\tilde{a})\ p^4 + 2p^2 + 8p + 5 = 0;$$

$$\ddot{a})\ p^5 + p^4 + 7p^3 + 4p^2 + 10p + 3 = 0.$$

Проверьте ответы с помощью Matlab.

4.12. Где начинается годограф Михайлова, если характеристическое уравнение имеет:

а) нулевые корни;

б) нечетное число правых корней;

в) четное число правых корней, либо правые корни отсутствуют.

Вдоль какой оси уходит в бесконечность годограф D(jω) при ω→∞ и *а)* четном n,

б) нечетном n ?

4.13. Определите устойчивость системы и число правых корней для годографов Михайлова D(jω), изображенных на рис. 4.1.

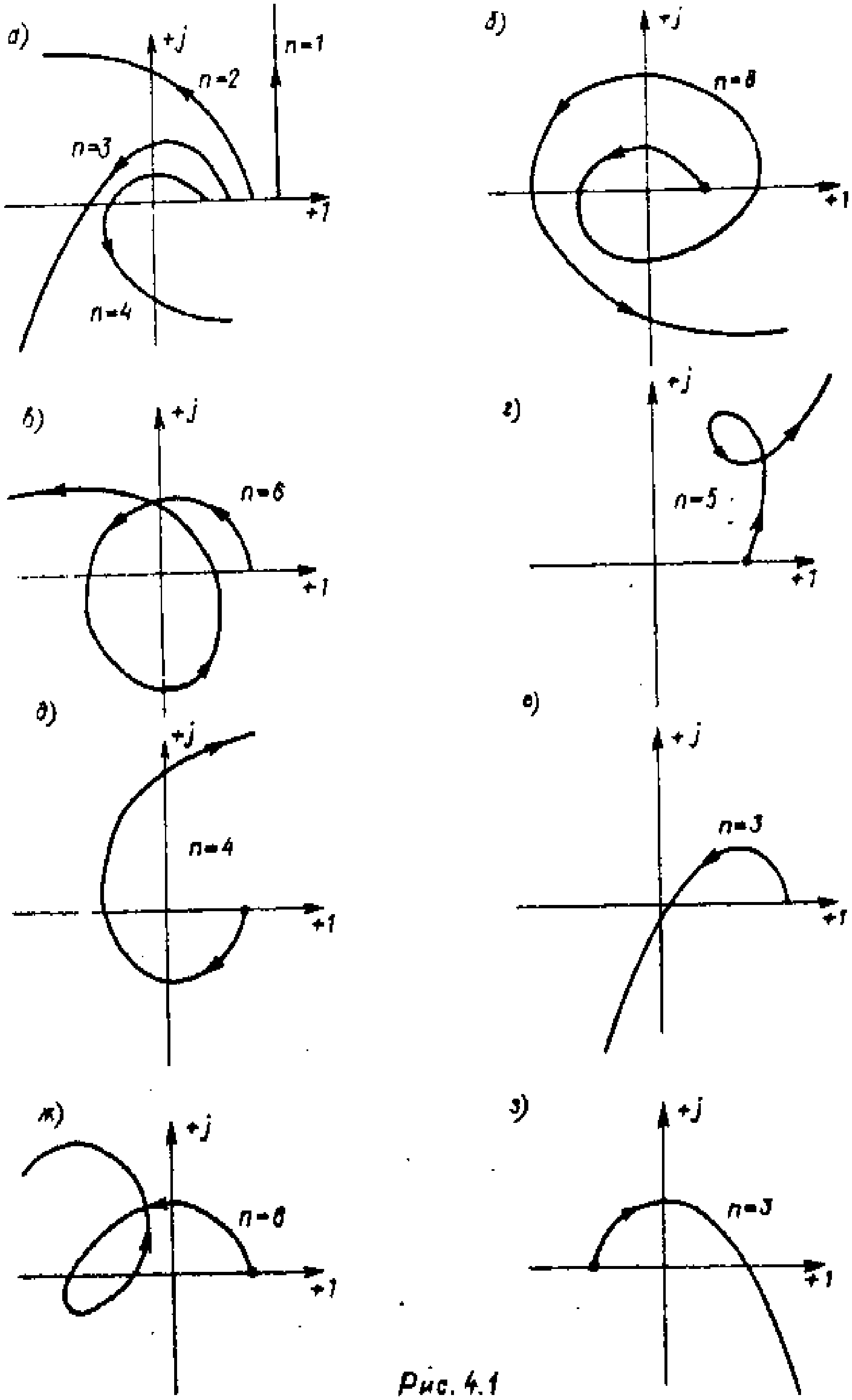


Рис. 4.1

4.14. На рис. 4.2 приведен годограф D(jω) разомкнутой системы четвертого порядка. Определите устойчивость и число правых корней замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

à) $W(p)=\frac{5}{D(p)}$; á) $W(p)=\frac{p}{D(p)}$;

â) $W(p)=\frac{10(p+1)}{D(p)}$.

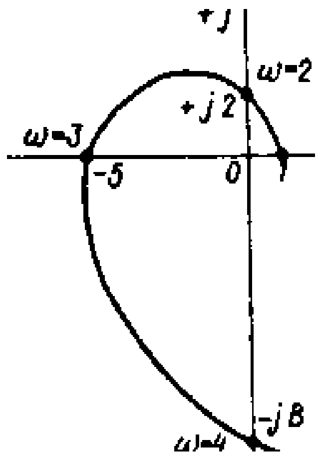


Рис. 4.2

4.15. Даны передаточные функции разомкнутых систем:

а) $W(p)=\frac{K}{Tp+1}$, *б)* $W(p)=\frac{K}{Tp-1}$.

С помощью критерия Найквиста исследуйте устойчивость замкнутых систем.

4.16. Разомкнутая система имеет передаточную функцию

$$W(p)=\frac{p+1}{p^2+1}.$$

Постройте АФЧХ и определите устойчивость замкнутой системы.

С помощью Matlab:

а) проверьте полученное решение,

б) определите запасы устойчивости, если окажется, что замкнутая система устойчива.

4.17. Устойчива ли замкнутая система, если передаточная функция разомкнутой системы $W(p)=\frac{p^2+2}{p-1}$.

Решите задачу с помощью Matlab, для чего постройте АФЧХ разомкнутой системы. Определите запасы устойчивости, если окажется, что замкнутая система устойчива.

4.18. Определите устойчивость замкнутых систем по амплитудно-фазовым частотным характеристикам W(jω) разомкнутых, изображенных на рис. 4.3. Рассмотрите случаи, когда точка (-1, j0) имеет координаты А, Б, В, Г.

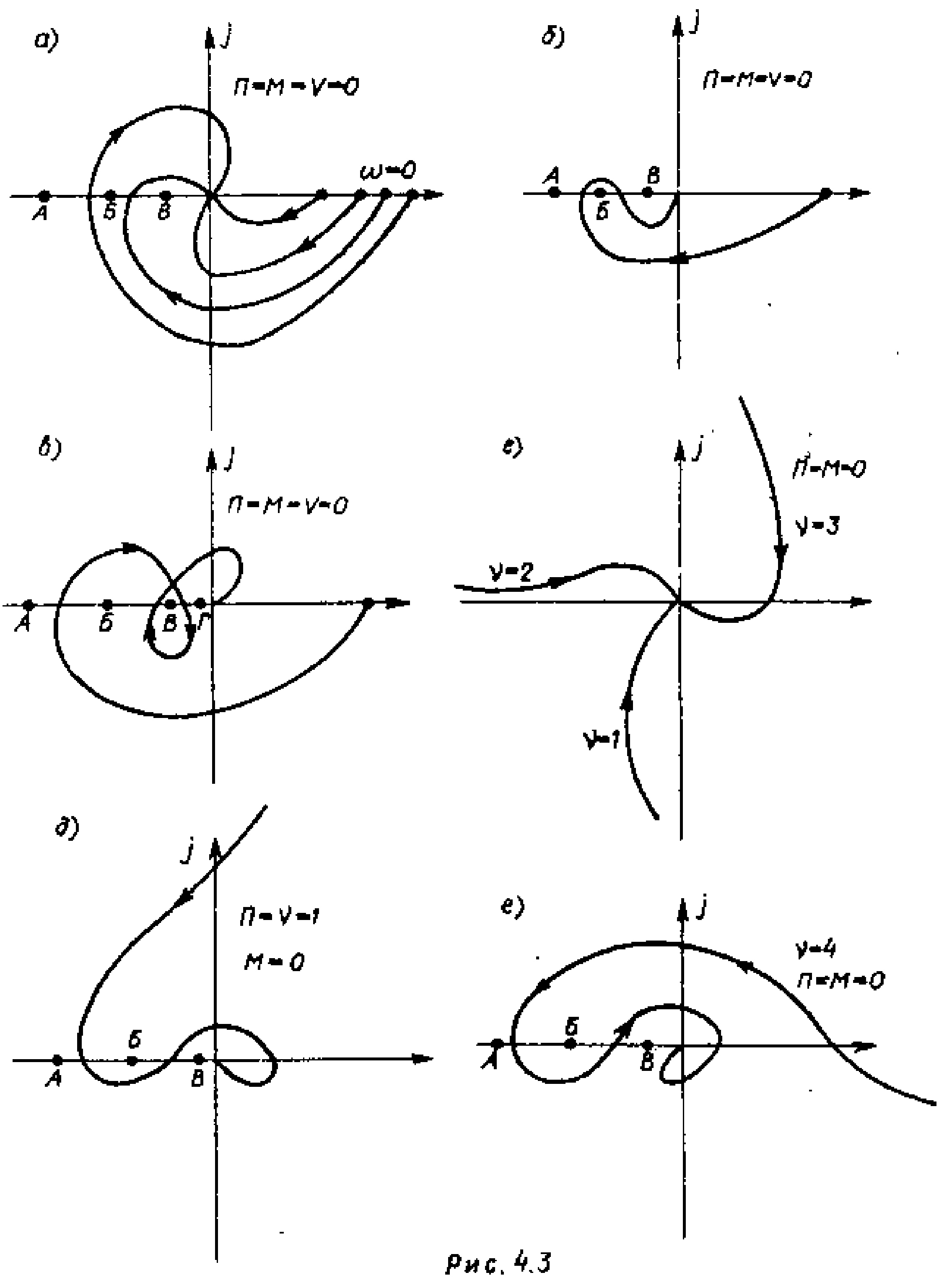

а)
j
П=М=V=0
ω=0
А
Б
В
б)
j
П=М=V=0
А
В
Б
в)
j
П=М=V=0
А
Б
В
Г
г)
j
П=М=0
V=3
V=2
V=1
д)
j
П=V=1
М=0
А
Б
В
е)
j
V=4
П=М=0
А
Б
В

Рис. 4.3

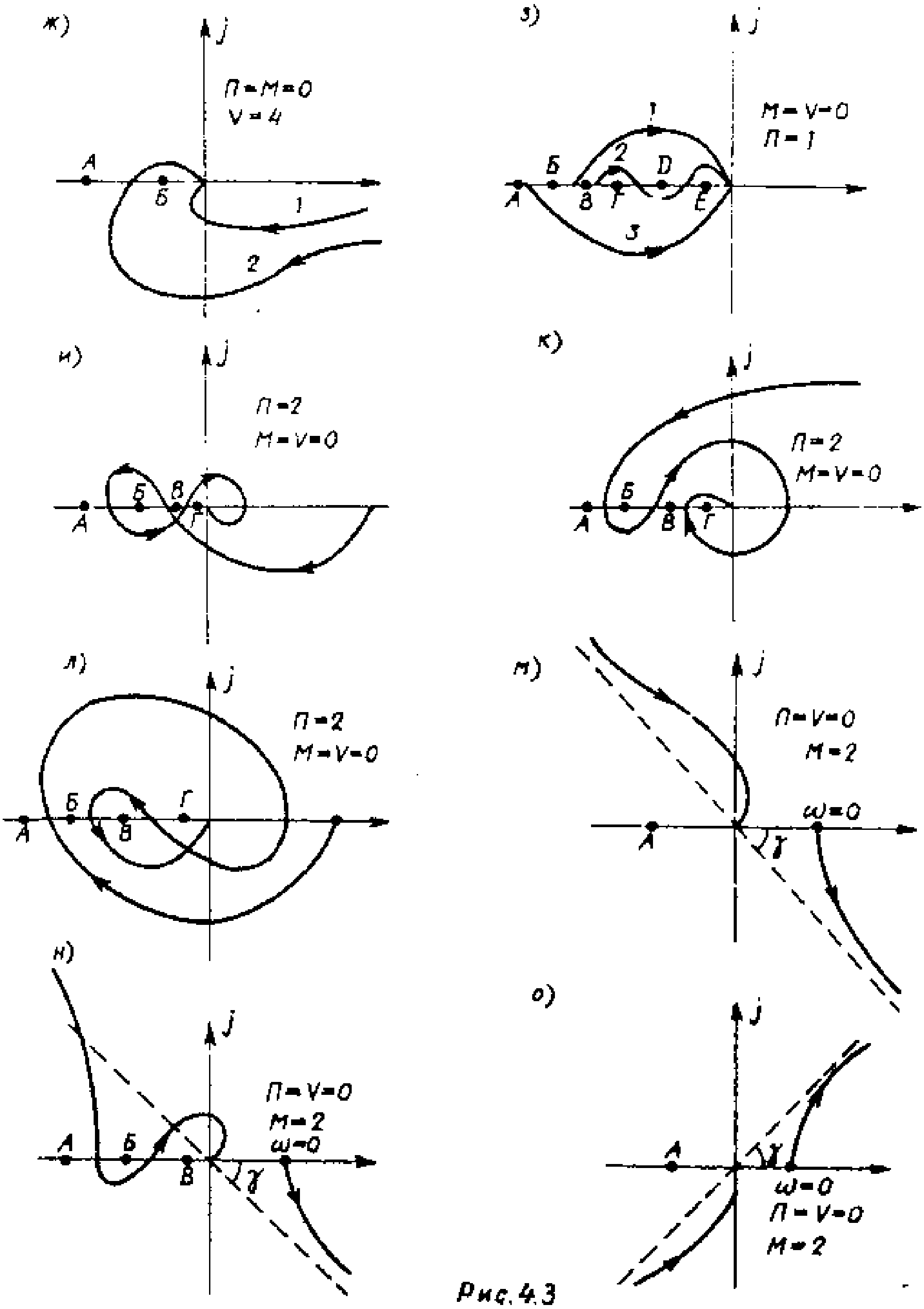

ж)
j
П = М = 0
V = 4
А
Б
1
2
з)
j
М = V = 0
П = 1
1
2
3
А
Б
В
Г
D
Е
и)
j
П = 2
М = V = 0
А
Б
В
Г
к)
j
П = 2
М = V = 0
А
Б
В
Г
л)
j
П = 2
М = V = 0
А
Б
В
Г
м)
j
П = V = 0
М = 2
ω = 0
А
γ
н)
j
П = V = 0
М = 2
ω = 0
А
Б
В
γ
о)
j
А
γ
ω = 0
П = V = 0
М = 2

Рис. 4.3

4.19. Частотные характеристики W(jω) разомкнутых систем показаны на рис. 4.4. Определите пределы изменения коэффициента усиления *K* разомкнутой системы, в которых замкнутая система устойчива.

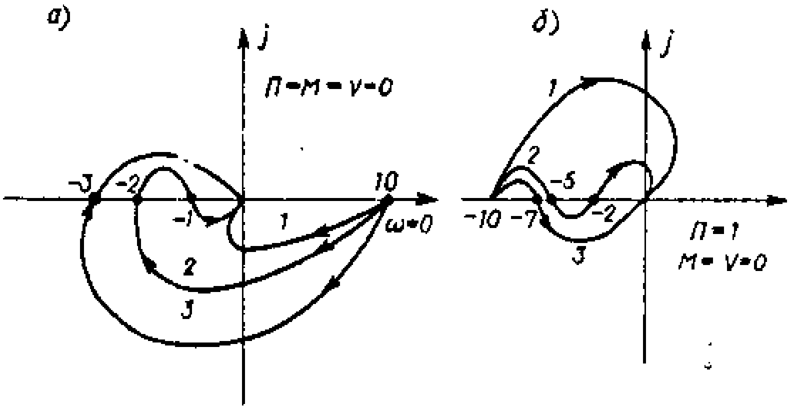


Рис. 4.4

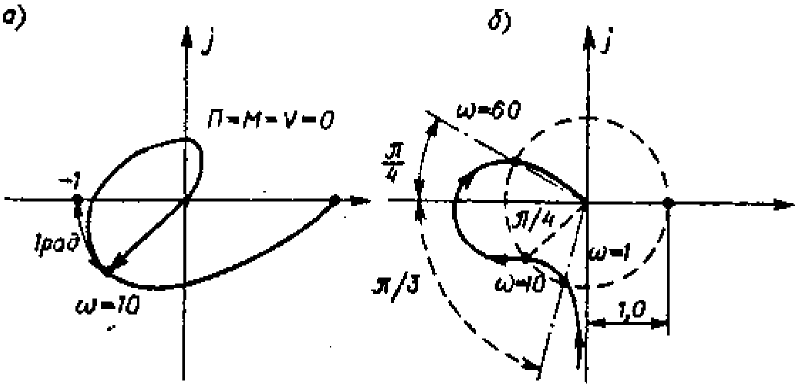


Рис. 4.5

4.20. На рис. 4.5 приведены частотные характеристики W(jω) разомкнутых систем без учета последовательного соединенного звена постоянного запаздывания. Определите пределы изменения времени запаздывания $\tau > 0$, в которых замкнутая система устойчива.

4.21. Определите устойчивость замкнутых систем по логарифмическим амплитудным и фазовым частотным характеристикам разомкнутых систем, приведенным на рис. 4.6.

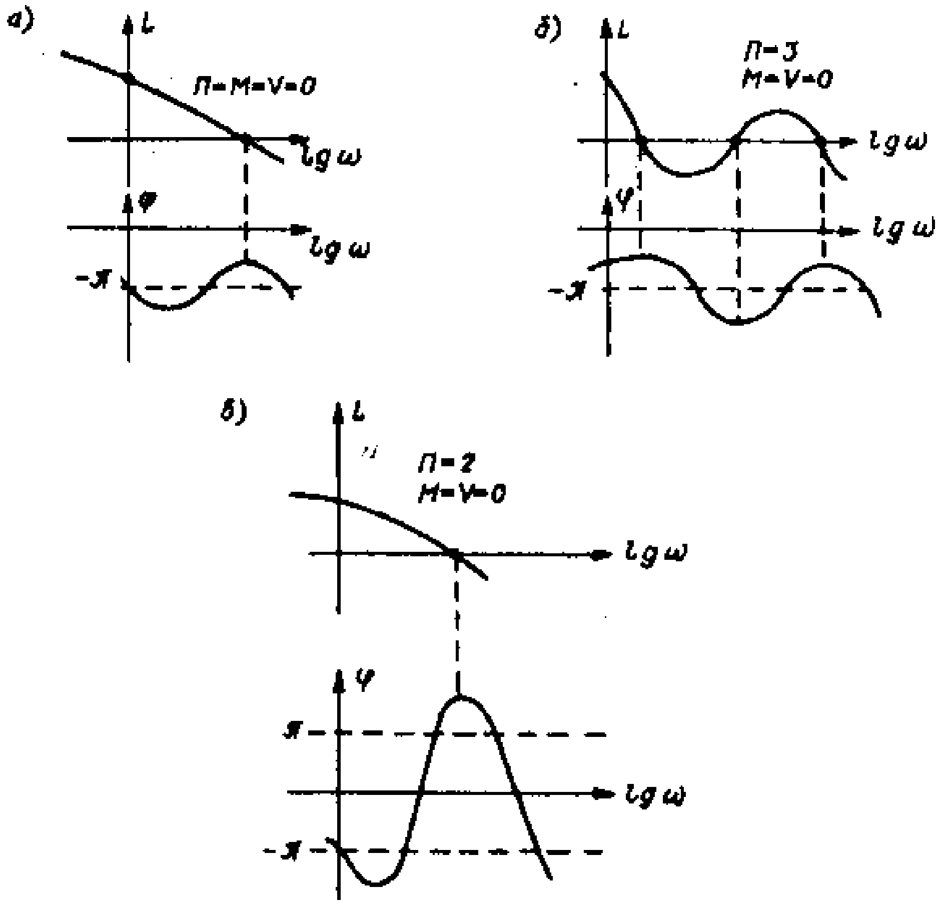


Рис. 4.6

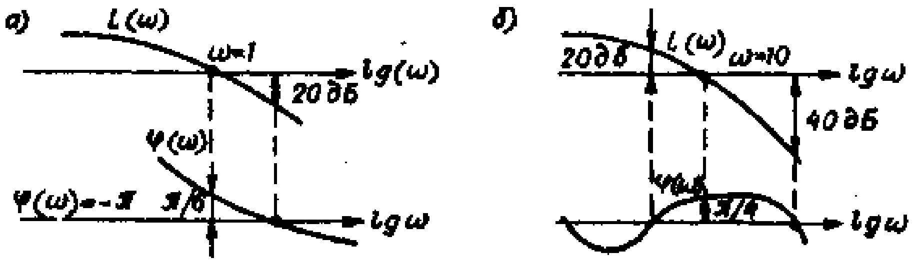


Рис. 4.7

4.22. На рис. 4.7 приведены логарифмические характеристики разомкнутой системы, устойчивой в замкнутом состоянии. Определите, во сколько раз нужно изменить коэффициент усиления К при отсутствии запаздывания и какое запаздывание может быть введено при неизменном К, чтобы замкнутая система была на границе устойчивости.

4.23. Определите устойчивость замкнутой системы по логарифмическим амплитудным частотным характеристикам (рис. 4.8) минимально-фазовых разомкнутых систем.

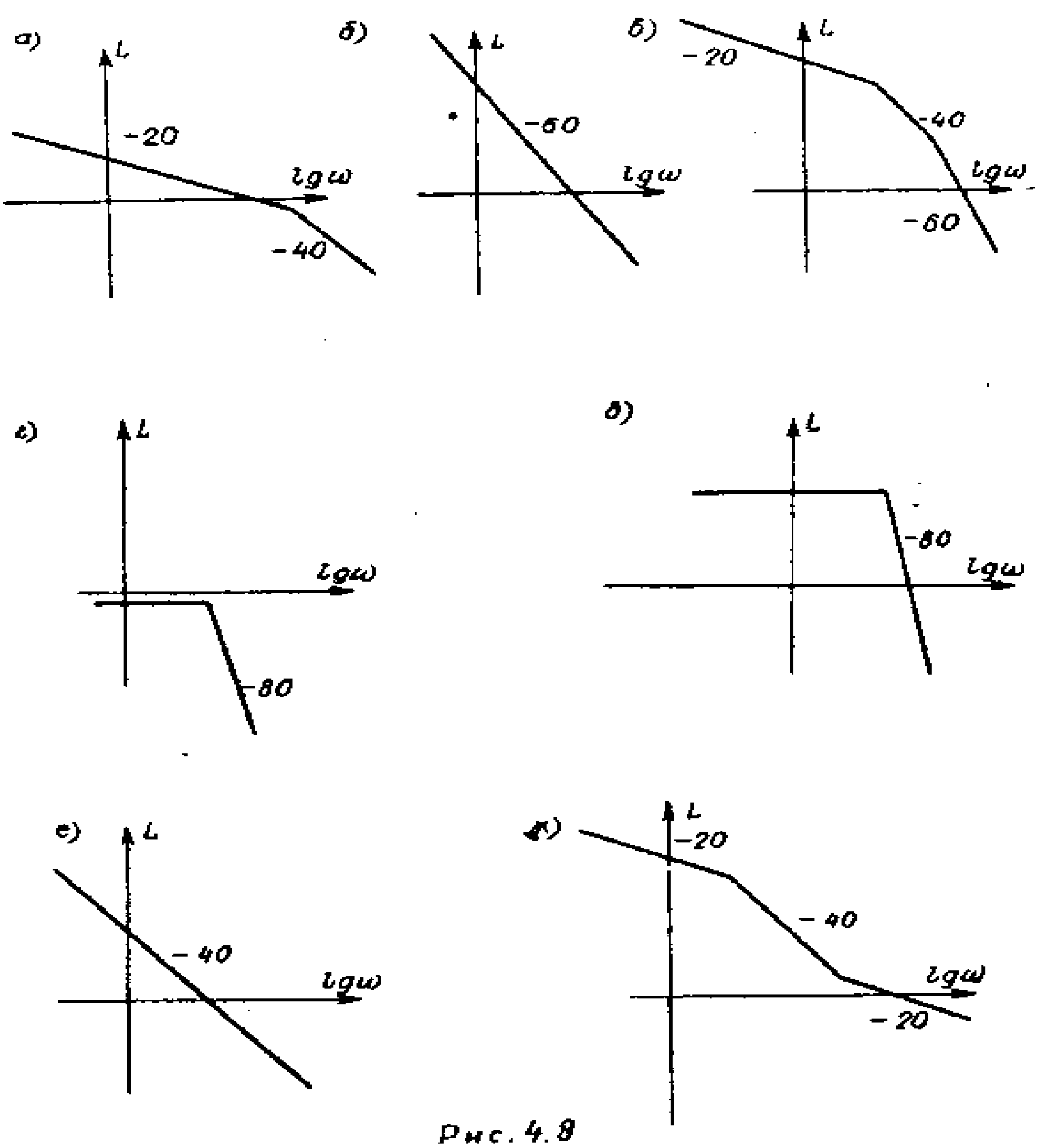


Рис. 4.8

4.24. Исследуйте устойчивость замкнутой системы по логарифмическим частотным характеристикам, если передаточная функция разомкнутой системы $W(p) = \dfrac{10}{p(10p+1)(p+1)(0.2p+1)}$.

Проверьте решение с помощью Matlab.

4.25. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p)=\frac{2p+4}{p(2p+1)(0.125p^2+0.05p+1)}.$$

С помощью Matlab постройте логарифмические частотные характеристики системы. Определите частоту ω_1, при которой амплитудная характеристика равна 0 дБ и частоту ω_2, при которой фаза равна-180^{o}. Сделайте заключение об устойчивости замкнутой системы.

4.26. Исследуйте устойчивость системы из предыдущей задачи с помощью критерия Найквиста.

4.27. Даны характеристические уравнения систем: Постройте Д-разбиение по двум параметрам A и B:

$$\text{à) } Ap^3+p^2+p+B=0; \qquad \text{ã)} p^3+A(p^2+2)+Bp-4=0;$$

$$\text{á)} p^3+Ap^2+Bp+1=0; \qquad \text{ä) } p^4+Ap^3+2p^2+Bp+1=0;$$

$$\text{â) } p^3-Ap^2+(p+1)B+1=0; \quad \text{å)} p^3+p^2+Ap+AB=0.$$

4.28. Постройте картину Д-разбиения в плоскости положительных значений параметров *(К, Т)* для системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии:

а) $W(p)=\dfrac{K}{(2p+1)(0.2p+1)(Tp+1)}$;

б) $W(p)=\dfrac{K}{p(p+1)(Tp+1)}$.

Воспользуйтесь программой ***DCOM.*** (См. Приложение).

4.29. В системе с характеристическим уравнением $p^3+a_1p^2+a_2p+a_3=0$ параметры являются неопределенными и могут принимать значения: $6\le a_1\le 20,\ 15\le a_2\le 80,\ 8\le a_3\le 40.$ Определите, устойчива ли система во всей области вариации параметров.

4.30. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p)=\frac{K}{p(T_1p+1)(T_2p+1)}.$$

Номинальные значения параметров: $K=4, T_1=1c., T_2=0.5c.$ Проверьте устойчивость системы, если ее параметры изменяются в следующих пределах: $3\le K\le 5,\ 0.6\le T_1\le 1.5,\ 0.2\le T_2\le 0.7.$

Глава 5
УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ САУ

Для исследования точности систем управления в установившихся режимах используется известная теорема операционного исчисления о конечном значении:

$$y_{уст} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{p\to 0} pY(p)$$

где $Y(p) = W(p)F(p)$, а $F(p)$ – изображение внешнего воздействия, приложенного к системе.

В частности, для статического режима замкнутой системы отклонение выходной величина $y_{уст}$, вызванное приложением постоянного воздействия $f_{ст}=const$, выражается соотношением:

$$ó_{óñò} = (\lim_{p\to 0} \frac{W_{fy}(p)}{1+W(p)})\, f_{ñò}\,,$$

где $W(p)$ – передаточная функция разомкнутой системы, $W_{fy}(p)$ -передаточная функция участка системы от места приложения возмущающего воздействия f до выходной величины y.

Добротность системы по возмущению определяется отношением возмущения f (как правило, постоянного) к ошибке ε_f , вызванной этим возмущением:

$$g_f = \frac{f}{\varepsilon_f}\ .$$

Вынужденную составляющую ошибки непрерывной САУ в случае воздействия на нее полиномиального возмущения вида $f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$, можно представить в виде ряда:

$$\varepsilon(t) = c_0 + c_1 \dot{f}(t) + \frac{c_2 \ddot{f}(t)}{2!} + \frac{c_3 \dddot{f}(t)}{3!} + ..\frac{c_n \overset{(n)}{f}(t)}{n!} = \sum_{i=0}^{n} c_i \frac{f^{(i)}}{i!}(t),$$

где коэффициенты ошибок c_i представляют собой коэффициенты разложения передаточной функции по ошибке $W_\varepsilon(p)$ в ряд Маклорена по степеням p, т.е.

$$c_i = \left[\frac{d^i W_\varepsilon(p)}{d\,p^i}\right]_{p=0}.$$

В установившемся режиме, вызванном гармоническим воздействием $f(t)=f_m sin(\omega t)$, выходная величина в случае непрерывных систем имеет вид:

$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi)$, где $y_m=|W_з(j\omega)|f_m$, а $\varphi(\omega) = argW_з(j\omega)$.

Задачи

5.1. В системе, представленной на рис. 5.1, передаточные функции имеют вид:

$$W_1(p)=\frac{b_1 p+b_0}{a_2 p^2+a_1 p+a_0}\ ,\ W_2(p)=\frac{\beta_1 p+\beta_0}{\alpha_2 p^2+\alpha_1 p+\alpha_0};$$

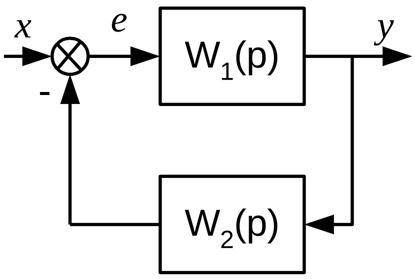


Рис. 5.1

Определите, при каких коэффициентах передаточной функции $W_2(p)$ в статическом режиме будет иметь место: а) статическая ошибка $\varepsilon=0$, б) $y=x$.

5.2. Определите статизм системы (рис. 5.2) по возмущению f. Параметры системы: K_1 = 5, K_2 = 2, K_3 = 5, K_4 = 0,2, T_1 = T_2 =0,05 $с$, T_3.= 0,1 $с$. Статическая зависимость выходной величины от f приведена на рис. 5.2б.

На какую величину изменится выходной сигнал у при изменении возмущения на 50%, 100% ?

5.3. Для предыдущей задачи 5.2 определите, каков должен быть коэффициент усиления системы $K=K_1 K_2 K_3$ чтобы обеспечить поддержание $y_{уст}$ с точностью 0,1% при изменении возмущения на 100%.

5.4. Определите порядок астатизма и добротность системы (рис. 5.3) по входному воздействию g и возмущению f.

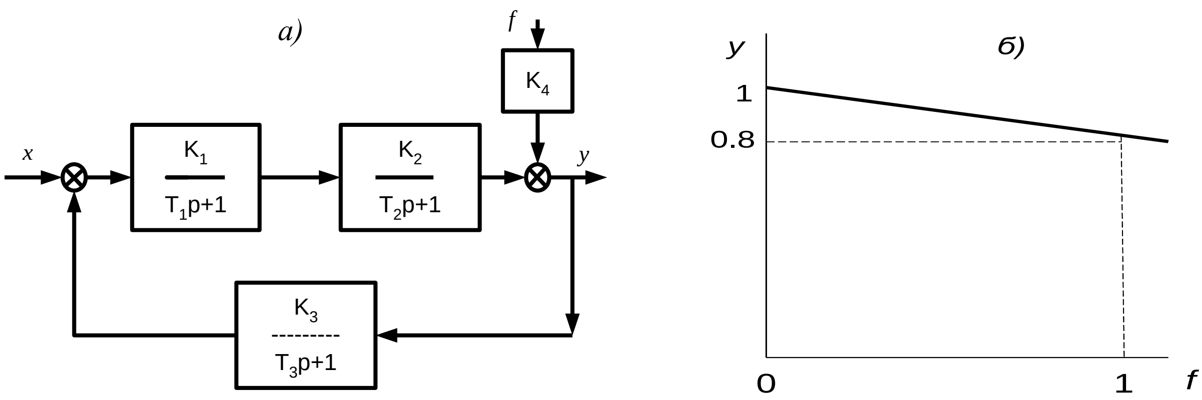


Рис. 5.2

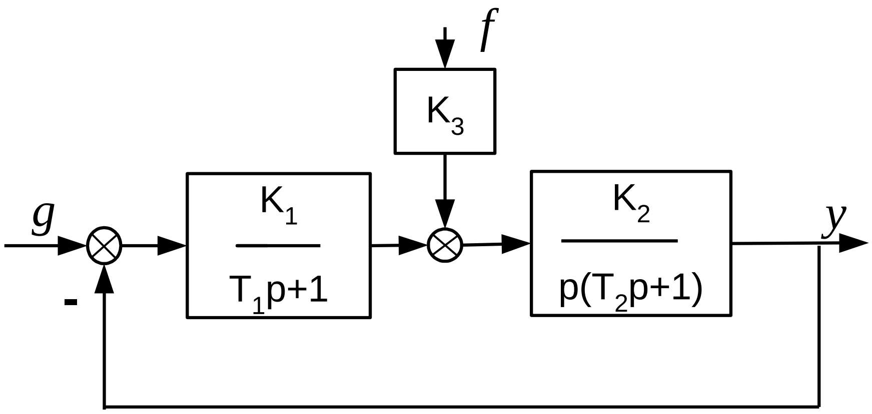


Рис. 5.3

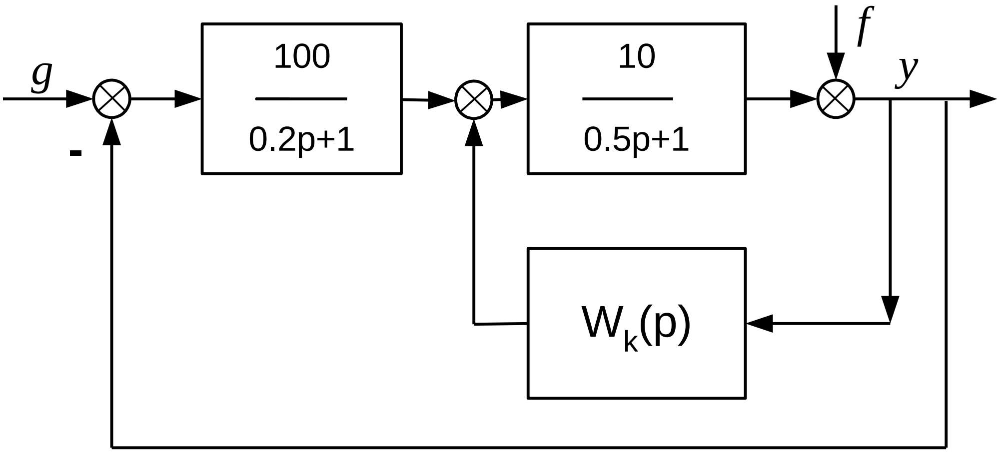


Рис. 5.4

5.5. Структурная схема системы показана на рис. 5.4. Определите передаточную функцию корректирующего контура $W_K(p)$, обеспечивающего инвариантность системы к возмущению f.

5.6. Определите установившуюся ошибку следящей системы, имеющей передаточную функцию в разомкнутом состоянии

$$W_1(p) = \frac{50}{p(0{,}1p+1)(0{,}02p+1)}$$

при движении задающей оси с постоянной скоростью 0,1 рад/с. Каким должен быть коэффициент усиления, чтобы скоростная ошибка не превышала 0,001 рад. ?

5.7. Передаточная функция разомкнутой следящей системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{100(0{,}05p+1)}{p^2(0{,}1p+1)(0{,}01p+1)}$$

Найти установившуюся ошибку слежения при входном воздействии $x(t)=at^2$, где a=5 с$^{-2}$.

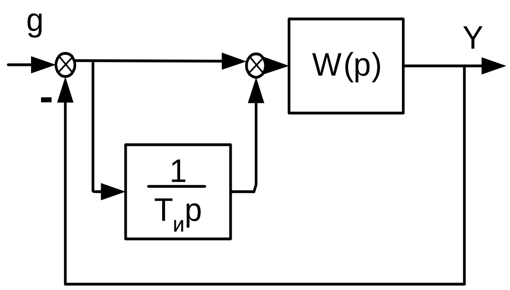


Рис. 5.5

5.8. В закон регулирования статической системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

для повышения точности введено корректирующее воздействие по интегралу от ошибки (рис. 5.5). Определите установившуюся ошибку при отработке входного воздействия $x(t) = a_0 + a_1 t$.

5.9. Определите три первых коэффициента ошибки для следящей системы с передаточной функцией в разомкнутом состоянии

$$W(p) = \frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} \quad .$$

Найдите выражение для ошибки системы $\varepsilon(t)$, если K=100, T_1=0,01 *с*, T_2= 0,1 *с*, и входное воздействие $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = 10 + 2t - 0{,}5\, t^2$.

5.10. Найдите коэффициенты ошибки и выражение $\varepsilon(t)$ системы, имеющей передаточную функцию в замкнутом состоянии

$$W(p) = \frac{y}{x} = \frac{2p + 10}{0{,}05p^3 + 1{,}05\,p^2 + 3p + 10}$$

при задающем воздействии $x(t) = 2 + 5t + 10\, t^2$.

5.11. Передаточная функция разомкнутой следящей системы

$$W(p) = \frac{K}{p(Tp + 1)} = \frac{20}{p(0{,}1p + 1)}$$

На вход системы подается воздействие $x(t) = 2\sin(5t)$. Определите ошибку в установившемся режиме.

5.12. Для предыдущего примера определите, каким должен быть коэффициент усиления системы, чтобы ошибка слежения не превышала $\varepsilon_m = 6'$ при гармоническом задающем воздействии с амплитудой $x_м$ = 10 *град*. и частотой ω = 2 $с^{-1}$.

Глава 6
ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Переходные процессы можно построить с помощью классического или операторного метода решения дифференциальных уравнений. При использовании классического метода выходной сигнал ищется в виде суммы свободного и вынужденного движений:

$$y(t) = y_c(t) + y_{вын}(t).$$

Собственное движение является решением однородного дифференциального уравнения. Вынужденное движение является решением неоднородного уравнения. Собственное движение имеет вид:

$y_c(t) = \sum C_i e^{\lambda_i t}$, где λ_i – корни характеристического уравнения, C_i – . Вынужденное движение определяется правой частью дифференциального уравнения. Произвольные постоянные C_i определяются при подстановке начальных условий $y_0, \dot{y}_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ в общее решение $y(t)$ и его производные по времени.

Применение операторного метода позволяет исключить этап определения постоянных интегрирования. При использовании операторного метода сначала определяют изображение выходной величины $Y(p)$, пользуясь правилами преобразования Лапласа. Оригинал $y(t)$ находят с помощью обратного преобразования Лапласа.

Если изображение непрерывной выходной величины $Y(p) = G(p)/H(p)$ представляет дробно-рациональную функцию от p, то для нахождения оригинала в случае простых полюсов этой функции можно воспользоваться теоремой разложения:

$y(t) = \sum \frac{G(p_i)}{H'(p_i)} e^{-p_i t}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где p_i – простые полюсы $H(p)$,

$$H'(p_i) = \frac{dH}{dp}\Big|_{p=p_i}.$$

Весовая характеристика w(t) представляет реакцию системы на входное воздействие в виде δ(t) при нулевых начальных условиях и является оригиналом от передаточной функции: $w(t) = L^{-1}[W(p)]$.

Переходная характеристика $h(t)$ представляет реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях и равна $h(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{p}W(p)\right]$. Весовая и переходная функции связаны выражением: $w(t) = \dot{h}(t)$.

По весовой или переходной характеристикам можно оценить качество процессов управления (время переходного процесса, перерегулирование и колебательность).

Если известна весовая или переходная характеристика, то реакцию системы на любое входное воздействие *x(t)* при нулевых начальных значениях можно найти с помощью интеграла свертки:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t-\tau)w(\tau)d\tau = h(t)x(0) + \int_{0}^{t} x'(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

где x(0) - значение входного сигнала при t = 0.

Построение переходных процессов по описанию систем в пространстве состояний.

Уравнения состояния линейной системы имеют вид:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx.$$

Тогда при нулевых начальных условиях для изображений Лапласа переменных состояния **x** и выхода **y** получим:

$$X(p)=(pE-A)^{-1}BU(p),$$
$$Y(p)=C(pE-A)^{-1}BU(p).$$

Вектор состояния **x** как функция времени определяется по формуле:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_{0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Выражение $\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(pE-A)^{-1}]$ называется переходной матрицей или матричной экспонентой. Тогда весовая функция

$$y(t) = w(t) = L^{-1}[C(pE-A)^{-1}B]=Ce^{At}B=C\Phi(t)B.$$

Переходная матрица Φ(t) может быть получена различными способами:

1) Можно применить обратное преобразование Лапласа к каждому элементу матрицы и найти $(pE-A)^{-1}=(pE-A)^{*}/A(p)$, где $(pE-A)^{*}$ – присоединенная матрица, A(p)=det(pE-A).

При этом можно использовать формулу разложения и таблицы преобразования Лапласа.

2) Элементы Φ(t**)** можно получить по формуле Лагранжа-Сильвестра:

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum \frac{|A-p_1E|\ldots|A-p_{i-1}E||A-p_{i+1}E|\ldots|A-p_nE|}{(p_i-p_1)\ldots(p_i-p_{i-1})(p_i-p_{i+1})\ldots(p_i-p_n)} e^{p_i t}$$

(для случая простых собственных значений p_i).

Косвенные оценки качества переходных процессов.

Для оценки качества переходного процесса применяются частотные, корневые и интегральные критерии.

В частотных методах для этой цели используются:

показатель колебательности *M* (максимальное значение амплитудной частотной характеристики замкнутой системы);

резонансная частота ω_p, при которой достигается этот максимум;

диапазон положительных частот ω_n, в котором значение вещественной частотной характеристики *U(ω)* не меньше, чем 0,2*U(0)*;

частота среза ω_c, при которой амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы равна 1.

Из интегральных оценок качества переходного процесса наиболее распространены квадратичный критерий $I_2 = \int_0^\infty [(y(t) - y(\infty)]^2 dt$ и улучшенный квадратичный критерий $I_3 = \int_0^\infty \left[(y(t) - y(\infty))^2 + \tau^2 y'^2\right]^2 dt.$ Соотношения, связывающие значения этих критериев с коэффициентами числителя и знаменателя передаточной функции системы, приведены, например, в [1].

В частности, для системы, имеющей передаточную функцию

$$W(p) = \frac{b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0},$$

$$I_2 = \frac{b_0^2}{2a_0^2}\left(\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2^2}{a_1 a_2 - a_0 a_3}\right);\ I_3 = I_2 + \frac{\tau^2 b_0^2 a_2}{2(a_1 a_2 - a_0 a_3)}.$$

Корневыми критериями качества переходного процесса являются степень устойчивости $\eta = min|\alpha_i|$ и степень колебательности $\mu = max\ |\beta_i/\alpha_i|$, где $\lambda_i = \alpha_i \pm j\beta_i$ – корни характеристического уравнения системы.

Степень устойчивости η позволяет оценить сверху время переходного процесса: $\tau \le 3/\eta$, а степень колебательности μ - дать оценку колебательности всего переходного процесса.

Для определения степени устойчивости η в характеристическом полиноме $D(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n$ делают замену $p = q-\eta$ и получают "смещенный" полином" $D(q)=c_0q^n+c_1q^{n-1}+\ldots+c_n$. Коэффициенты c_i $(i=1,2,\ldots n)$ определяются по формуле: $c_i = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}D(p)}{d^{n-1}p}\Big|_{p=-\eta}$. Степень устойчивости η определяется из условия нахождения полинома $D(q)$ на границе устойчивости с помощью критериев устойчивости.

Метод корневого годографа.

Корневые годографы позволяют выбрать значения одного или нескольких параметров системы для обеспечения желаемого качества процессов управления. Качественный вид корневого годографа легко построить, используя его основные свойства (см., например, [2]).

В среде Matlab корневые годографы строят с помощью функций семейства ***rlocus***. При этом характеристическое уравнение замкнутой системы должно быть представлено в виде

$$1+KW_{экв}(s) = 0,$$

где K – варьируемый параметр. Им может быть любой параметр, но чаще всего это коэффициент передачи разомкнутой системы. $W_{экв}(s)$ – эквивалентная передаточная функция. Для построения корневого годографа в командное окно Matlab вводится передаточная функция $W_{экв}(s)$.

Зная желаемые показатели качества переходного процесса, на построенном корневом годографе можно выбрать требуемое значение варьируемого параметра, при котором будут обеспечены эти показатели качества.

Модальное управление.

Динамические свойства системы управления определяются множеством полюсов ее передаточной функции. Задачу синтеза управляющего устройства, обеспечивающего желаемое размещение полюсов, называют модальным управлением.

Для получения желаемого расположения полюсов передаточной функции системы

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (6.1)$$

вводят в этой системе линейную безынерционную обратную связь по переменным состояния:

$$u = Kx. \qquad (6.2)$$

С учетом обратной связи уравнение (6.1) примет вид:

$$\dot{x} = (A + BK)x + Bu\,. \qquad (6.3)$$

Выбирая элементы матрицы обратных связей K, можно получить характеристический полином, обеспечивающий требуемое качество переходного процесса. Наиболее просто определить матрицу K в том случае, когда уравнение (6.1) задано в нормальной форме. Пусть характеристический полином системы (6.1) без обратной связи:

$$D = p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n.$$

Требуется, чтобы корни характеристического уравнения (6.3) имели заданные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогда характеристический полином матрицы (A + BK) замкнутой системы будет иметь вид:

$$D = (p - \lambda_1)(p - \lambda_2)\ldots(p - \lambda_n) = p^n + a_1^* p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}^* p + a_n^*\ .$$

Если K является вектором-строкой

$$K = |a_n - a_n^* \quad a_{n-1} - a_{n-1}^* \quad \ldots \quad a_1 - a_1^*|\,,$$

то в системе будет обеспечено желаемое расположение полюсов передаточной функции.

Если уравнение (6.1) задано не в нормальной форме, то предварительно следует найти преобразующую матрицу ***P*** перевода (6.1) в нормальную форму (см. главу 2). Затем от вычисленной вектор-строки ***K*** для нормальной системы можно перейти к вектор-строке $\boldsymbol{K_0}$ обратных связей для исходной матрицы с помощью того же преобразования: $\boldsymbol{K_0 = PK}$.

Задачи

Переходные процессы в САУ

6.1. Непосредственным интегрированием найдите общее решение дифференциальных уравнений:

а) $\ddot{y} + y = x$;

б) $\ddot{y} - y = x$;

в) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = x$.

при $x(t) = a*1(t)$, $a = const$.

6.2. Найдите законы изменения векторов состояния и выхода многомерной системы:

а) $\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + g, \quad y = x_1 + x_2.$
$\dot{x}_2 = 2x_1 + x_2,$

с начальными условиями $x_1(0) = 1$, $x_2 = -1$ при входном сигнале $g(t) = e^{t}\cdot 1(t)$.

б) $\dot{x} = -x_2 + g_1, \qquad y_1 = x_2,$
$\dot{x} = x_1 + g_2, \quad y_2 = x_1 + 0{,}5x_2.$

с начальными условиями $x_1(0) = -1$, $x_2 = 0$ при входном сигнале $g_1(t) = 1(t)$, $g_1(t) = 2(t)$.

6.3. Найдите импульсные переходные характеристики систем, структурные схемы которых представлены на рис. 6.1.

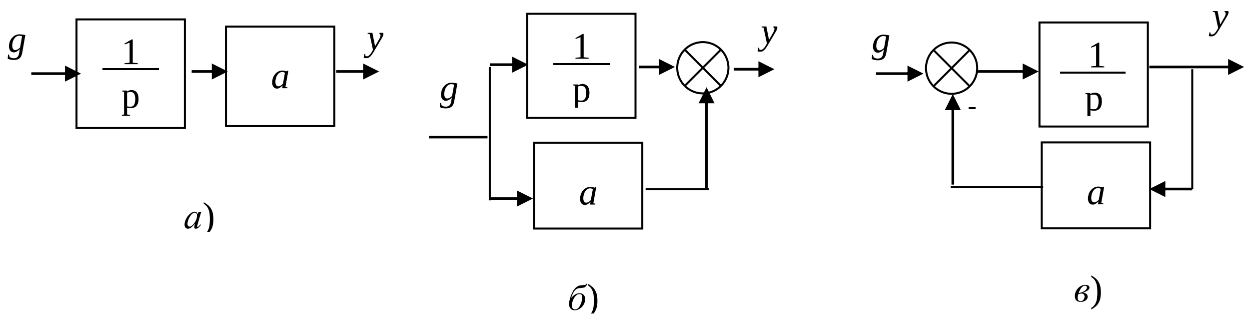


Рис. 6.1

6.4. С помощью формул разложения найдите весовые функции систем:

$$а)\ W(p) = \frac{p+3}{(0{,}1p+1)(0{,}2p+1)(0{,}5p+1)(p+1)};$$

б) $W(p)=\dfrac{p^4+p^3+8p^2+4p+1}{p^3(p^2-1)}$;

в) $W(p)=\dfrac{(p+1)(p+4)}{(p^2+p+1)(p+3)^2(p+5)}$.

6.5. Определите переходные и весовые функции разомкнутых и замкнутых систем, если передаточные функции разомкнутых систем имеют вид:

а) $W(p)=\dfrac{1{,}2}{p(0{,}2p+1)}$; б) $W(p)=\dfrac{7p^2+28p+29}{p^3+3p^2+3p+1}$.

6.6. Считая, что выходными величинами являются переменные состояния, определите переходные и весовые матрицы для систем, имеющих уравнения состояния:

а) $\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_1+x_2+u\\ \dot{x}_2&=2x_2+2u\end{aligned}$; в) $\begin{aligned}\dot{x}_1&=2x_1+4x_2+2u\\ \dot{x}_2&=x_1+x_2+u\end{aligned}$;

б) $\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_1+2x_2+u\\ \dot{x}_2&=x_1+x_2\end{aligned}$; г) $\begin{aligned}\dot{x}_1&=-2x_1+x_2+u\\ \dot{x}_2&=-3x_1+u\end{aligned}$.

6.7. Для системы с матрицей $\mathbf{A}=\begin{vmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{vmatrix}$ найдите переходную матрицу состояния ***Ф(t)***.

6.8. Определите закон изменения выходной величины для звена с передаточной функцией $W(p) = 2/(0{,}2p+1)$ при входных воздействиях:

а) $x = t+ 0{,}5t^2$; в) $x = e^t$;

б) $x = \sin t$; г) $x = e^{-t}$.

и нулевых начальных условиях.

6.9. Переходная функция системы имеет вид:

а) $h(t) = 1/6 - e^{-5t} - 5/3e^{-3t} - 5/2e^{-4t}$;

б) $h(t) = 5 - e^{-2t} - 4\cos t - 2\sin t$;

в) $h(t) = 1 - e^{-t} + e^{-2t}\sin t$.

Определите реакцию системы на входное воздействие $x(t) = e^{-t}\cdot 1(t)$ при нулевых начальных условиях.

6.10. Структурная схема следящей системы приведена на рис. 6.2. Определите переходный процесс $y(t)$ в системе при входных воздействиях $x(t) = f(t) = 1(t)$ и нулевых начальных условиях.

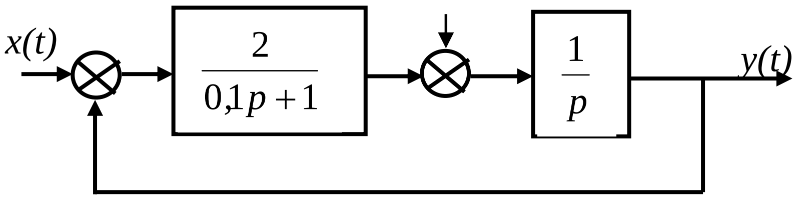


Рис. 6.2

6.11. Система задана уравнением состояния $\dot{\mathrm{x}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathrm{x}$.

Найдите матрицу ***Ф(t)*** и ***x(t)*** для начальных условий $x_1(0) = 1$; $x_2(0) = 1$.

6.12. Передаточная функция системы имеет следующий вид:

а) $W(p) = \dfrac{b_0}{a_0 p + a_1}$; *б)* $W(p) = \dfrac{b_0 p + b_1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}$

в) $W(p) = \dfrac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n}$.

Определите, при каких начальных условиях $y^{(i)}_{t=-0}$ и отсутствии входного воздействия переходный процесс в системе образует весовую характеристику.

6.13. Найдите изображение выходной величины при отсутствии входного воздействия и ненулевых начальных условиях для следующих систем:

а) $W(p) = \dfrac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$, $y(-0) = y_0$, $\dot{y}(-0) = 0$;

б) $W(p) = \dfrac{b_0}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p}$, $y(-0) = y_0$, $\dot{y}(-0) = \dot{y}_0$, $\ddot{y}(-0) = \ddot{y}_0$;

в) $W(p) = \dfrac{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}$, $y(-0) = y_0$, $\dot{y}(-0) = \dot{y}_0$, $\ddot{y}(-0) = \ddot{y}_0$.

6.14. Определите передаточные функции систем по заданным выходным процессам *y(t)* и входным воздействиям *x(t)*. Начальные условия нулевые.

а) $y(t) = t^3$, $x(t) = t^3 + 6t$;

б) $y(t) = 0{,}25 + e^{-t} + (1{,}25 - 1{,}5t)e^{-2t}$, $x(t) = e^{-t}$;

в) $y(t) = -0{,}5\, e^{t} + 0{,}5 \sin t + 0{,}5 \cos t$, $x(t) = \sin t$;

г) $y(t) = 5/9 + 4/3\, t - 5/9\, e^{-3t}$, $x(t) = e^{-3t}$.

6.15. Определите передаточные функции систем по заданным выходным процессам *y(t)* и входным воздействиям *x(t)*. Начальные условия ненулевые.

а) $y(t) = -5 + 8\,e^{-3t} + 12\,e^{-2t}$, $x(t) = 2$ при $y(-0)=7$, $\dot{y}(-0)=0$;

б) $y(t) = -4 + 12t - e^{-t} + 6e^{-2t}$, $x(t) = 1 - e^{-2t}$ при $y(-0) = \dot{y}(-0)=1$;

в) $y(t) = 5/9 + 10/3\,t - 5/9\,e^{-3t}$, $x(t) = e^{-3t}$. при $y(-0) = 0$, $\dot{y}(-0)=3$.

6.16. Определите изображение и оригинал выходной величины для системы, имеющей в разомкнутом состоянии передаточную функцию:

а) $W(p)=\dfrac{0{,}5}{p(p+1)}$; *б)* $W(p)=\dfrac{8p+5}{p(p+0{,}5)(p+6)}$

и начальные условия $y(-0) = 10$, $\dot{y}(-0)=\ddot{y}(-0)=0$, при замыкании системы отрицательной единичной обратной связью и $x(t)= 0$.

6.17. Определите, при каких начальных условиях $y^{(i)}(0)$ переходный процесс в системе, изображенной на рис. 6.2, при воздействиях $f(t) = 1(t)$, $x(t) = 0$ будет совпадать с переходным процессом в той же системе при нулевых начальных условиях и воздействиях $x(t) = 1(t)$, $f(t) = 0$.

6.18. Найдите реакцию системы, описываемой уравнением:

$$\dddot{x}(t)+6\,\ddot{x}(t)+11\,\dot{x}(t)+6\,x(t)=\ddot{g}(t)+5\,\dot{g}(t)+6\,g(t)$$

с начальными условиями $x(0)=1, \dot{x}(0)=-3, \ddot{x}(0)=9$ на входной сигнал $g(t) = 1(t)$. Определите начальные и конечные значения выходного сигнала и его двух первых производных.

6.19. При каких условиях, наложенных на передаточную функцию *W(p)* (порядок полинома числителя – *m*, порядок полинома знаменателя – *n*), начальные условия задачи совпадают с начальными значениями оригинала и его *l* младших производных.

Косвенные методы оценки качества переходного процесса

6.20. Передаточная функция разомкнутой САУ имеет вид $W(p)=\dfrac{K}{p(Tp+1)}$. Определите соотношение между *K* и *T*, при котором система будет иметь показатель колебательности не более заданного значения *M*.

6.21. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид $W(p)=\dfrac{K}{p\prod\limits_{i=1}^{n}(T_i p+1)}$. Определите условие, при котором показатель колебательности замкнутой системы не будет превышать 1 (n – произвольное число).

6.22. Передаточная функция разомкнутой следящей системы имеет вид $W(p)=\dfrac{K}{p(Tp+1)^2}$. Вычислите квадратичную интегральную оценку I_2 и определить значение K, соответствующее минимуму I_2. Найдите минимальное значение I_2.

6.23. Передаточная функция разомкнутой системы $W(p)=\dfrac{K(Tp+1)}{p^2}$. Вычислите квадратичную интегральную оценку I_3 для замкнутой системы и определите значение постоянной времени T, соответствующее минимуму этой оценки.

6.24. Даны характеристические уравнения автоматических систем:

а) $p^3 + 5p^2 + 8p + 6 = 0$;

б) $p^3 + 8p^2 + 19p + 12 = 0$;

в) $p^4 + 9p^3 + 46p^2 + 124p + 120 = 0$;

г) $p^4 + 6p^3 + 23p^2 + 34p + 26 = 0$.

Определите степень устойчивости η и степень колебательности μ.

6.25. Передаточная функция разомкнутой системы $W(p)=\dfrac{K}{p(Tp+1)}$. Определите степень колебательности μ и соотношение между добротностью K и постоянной времени T, при котором переходный процесс в замкнутой системе будет апериодическим.

6.26. Передаточная функция разомкнутой системы $W(p)=\dfrac{K(Tp+1)}{p^2}$. Определите соотношение между K и T, при котором в замкнутой системе будут иметь место:

а) незатухающие колебания;

б) апериодический переходный процесс.

Метод корневого годографа

6.27. Система с единичной обратной связью имеет в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$W(p)=\frac{K(p+0.2)}{p^3+p^2+4p+5}.$$

а) Постройте корневой годограф и определите, при каких K система устойчива в замкнутом состоянии

б) Определите, при каком K коэффициент затухания ζ имеет максимальное значение и оцените время переходного процесса

6.28. Система управления имеет единичную обратную связь. Передаточная функция прямой цепи

$$W(p)=\frac{K(p+10)}{p(p+1)(p+20)(p+50)}.$$

а) Определите значение K, при котором комплексным корням будет соответствовать коэффициент затухания $\zeta = 0.8$;

б) Оцените время процесса;

в) Постройте переходную характеристику замкнутой системы и определите время процесса и перерегулирование.

6.29. Постройте корневой годограф системы с единичной обратной связью, если передаточная функция прямой цепи $W(p)=\dfrac{K(p+1)}{p^2(p+9)}$.

а) Определите значение K, при котором все три корня будут действительными и одинаковыми;

б) Определите значения этих корней и оцените время переходного процесса;

в) Постройте переходный процесс при ступенчатом входном сигнале и определите время процесса и перерегулирование.

6.30. Система с единичной обратной связью в разомкнутом состоянии имеет передаточную функцию

$$W(p)=\frac{4(p+z)}{p(p+1)(p+3)}.$$

а) Постройте корневой годограф

б) Определите корни характеристического уравнения при $z = 0.6;\ 2;\ 4$.

в) Постройте переходные процессы при ступенчатом сигнале на входе и определите перерегулирование и время процессов (по критерию 5%).

Указание. Характеристическое уравнение замкнутой системы надо предварительно представить в виде $1+\dfrac{zR(p)}{Q(p)}=0$.

6.31. Передаточная функция разомкнутой системы с единичной обратной связью

$$W(p)=\frac{K(p^2+4p+8)}{p^2(p+4)}.$$

а) С помощью корневого годографа определите коэффициент затухания ζ и доминирующие корни при K = 7,5 с.;
б) Оцените время переходного процесса;
в) Постройте переходный процесс при ступенчатом входном сигнале и определите время процесса и перерегулирование.

Модальное управление

6.32. Передаточная функция объекта управления $W(p)=\frac{1}{p^2}$.
Определите коэффициенты обратных связей по переменным состояния так, чтобы полюсы замкнутой системы имели значения *-1+j, -1-j*.

6.33. Дана передаточная функция объекта управления:

$$W(p)=\frac{1}{p^3+2p^2+p+4}.$$

Получите уравнения состояния в нормальной форме и определите матрицу обратных связей, при которой полюсы передаточной функции замкнутой системы имеют значения: -1, -2, -3.

Составьте структурную схему системы с обратными связями и проверьте найденное решение.

6.34. Определите матрицы коэффициентов обратной связи систем из условия получения заданных полюсов передаточной функции замкнутой системы:

а) λ_1 = -2, λ_2 = -4, $W(p)=\frac{20}{p^2+4p+20}$;

б) λ_1 = -0,3, $\lambda_{2,3}$ = -0,1 + j0,2, $W(p)=\frac{1}{p^3+0{,}1p^2+0{,}5p+3}$.

Проверьте полученное решение с помощью Matlab, для чего запишите уравнения состояния исходной системы в нормальной форме и примените функцию *place.*

6.35. Процессы в объекте управления описываются уравнением состояния:

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & -10 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} u .$$

С помощью Matlab (функции *acker* или *place*) определите такую матрицу обратных связей **K**, при которой полюсы передаточной функции замкнутой системы имеют значения –2 и –3.

Глава 7
ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

7.1. Математическое описание дискретных систем управления

Линейная дискретная система описывается разностным уравнением
$a_n y[k+n] + a_{n-1} y[k+n-1] + \ldots + a_0 y[k] = b_m u[k+m] + b_{m-1} u[k+m-1] + \ldots + b_0 u[k]$, (7.1)
где u[k] – входной сигнал, а y[k] – выходной сигнал, k – дискретное время.

Применив Z-преобразование к левой и правой части этого уравнения при нулевых начальных условиях (y[0]=y[1]=…=y[n-1]=u[0]=…=u[m]=0) получим связь между входом и выходом, которая определяется в виде:

$$Y(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots\ldots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} U(z) = W(z) U(z), \qquad (7.2)$$

где $Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y[k] z^{-k}$, $z = e^{pT}$.

Другой способ описания дискретных систем – в форме переменных состояния. Уравнения состояния линейной дискретной системы имеют вид:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k], \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k]. \end{aligned} \qquad (7.3)$$

Здесь x – вектор выхода размерности n, u – вектор входа размерности m, y – вектор выхода размерности l, A – матрица объекта размерности nxn, B – матрица управления или входа – nxm, C – матрица выхода – lxn, D – матрица компенсации – lxm. В случаях m<n матрица D=0.

Применяя к системе (7.3) *Z*-преобразование, получим связь между изображениями входа *U(z)* и выхода *Y(z)* в виде:

$$Y(z) = C(Ez - A)^{-1} BU(z) = W(z),$$

где передаточная функция системы $W(z) = C(Ez - A)^{-1} B$.

Нормальная форма уравнений состояния. Если система с одним входом управляема и имеет передаточную функцию вида:

$$W(z) = \frac{b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \ldots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0},$$

то матрицы A, B, C нормального представления имеют такой же вид, как и для непрерывных систем:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Если система не управляема, т.е. пара матриц $\{A, B\}$ вырождена, то нормального представления не существует.

Таким образом, если передаточная функция *W(z)* известна, то матрицы $\{A, B\}$ управляемой системы *в нормальной форме* можно легко получить. С другой стороны, если матрицы $\{A, B\}$ управляемой системы заданы в некотором базисе, то для получения *нормальной формы* матрицы А достаточно вычислить коэффициенты характеристического полинома исходной матрицы.

Условия управляемости и наблюдаемости дискретных систем определяются с помощью критериев Калмана, имеющих такую же форму, как и для непрерывных систем.

Переход от одного базиса к другому осуществляется так же, как и в случае непрерывных систем.

Переход от непрерывной модели к дискретной. Если непрерывная часть представлена в форме уравнений состояния, то переход к дискретной модели можно осуществить двумя способами.

<u>Точная модель</u>.

$$x[k+1] = A^* x[k] + B^* u[k],$$
$$y[k] = Cx[k],$$

где $A^* = e^{AT}$, $\quad B^* = \int_0^T e^{At} B dt$, $\quad T -$ период квантования.

Собственные числа λ матрицы А непрерывной системы и матрицы A^* дискретной модели связаны соотношением $\lambda^* = e^{\lambda T}$, поэтому если непрерывная модель устойчива, т.е. $Re(\lambda_i) < 0$, то дискретная тоже устойчива ($|\lambda^*_i| < 1$) и в узлах квантования значения вектора состояния совпадают.

<u>Приближенная модель</u>.

Производная в системе дифференциальных уравнений может быть приближенно представлена в виде:

$\dot{x}(t) \approx \dfrac{x[k+1] - x[k]}{T}$. Тогда матрицы A^* и B^* в дискретной модели имеют вид: $A^* = (E+AT)$, $B^* = BT$. Следует заметить, что для приближенной модели необходимо выбирать шаг квантования из условия устойчивости системы разностных уравнений:

$$|1 + \lambda_i T| < 1 \ \text{, где } \lambda_i - \text{собственные числа матрицы}.$$

Импульсные системы. Одним из видов дискретных систем являются импульсные системы. В простейшем случае они содержат импульсный элемент и непрерывный объект управления. Импульсный элемент можно представить в виде идеального импульсного ключа с периодом квантования Т и формирующего элемента (экстраполятора), превращающего последовательность импульсов в постоянный сигнал в течение всего периода квантования, который затем воздействует на непрерывный объект управления. Подобного типа экстраполятор носит название экстраполятора нулевого порядка. Структурная схема системы представлена на рис. 7.1.

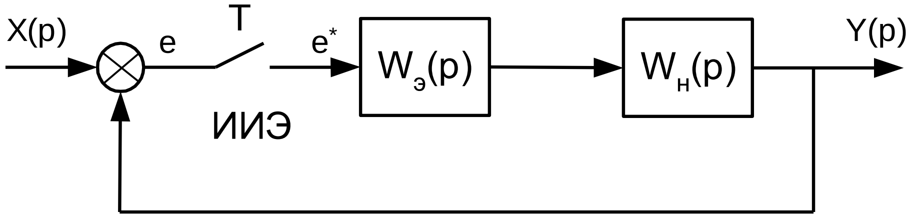


Рис. 7.1

Передаточная функция экстраполятора нулевого порядка имеет вид:

$$W_э(p) = \frac{1}{p}(1 - e^{-pT}) \approx \frac{1}{p}(1 - z^{-1}), \; z = e^{pT}.$$

Таким образом, дискретная передаточная функция разомкнутой системы оказывается равной Z-преобразованию непрерывной части совместно с экстраполятором и определяется выражением:

$$W(z) = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{W_H(p)}{p}\right\}.$$

Цифроаналоговые системы. Структура цифроаналоговой системы автоматического управления представлена на рис.7.2.

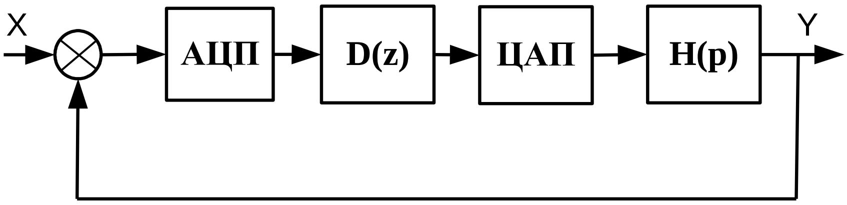


Рис. 7.2

Упрощенно входной преобразователь (АЦП) может быть представлен в виде идеального импульсного элемента, который преобразует непрерывную функцию времени в решетчатую функцию. Выходной преобразователь (ЦАП) можно представить в виде идеального ключа и экстраполятора нулевого порядка. Тогда передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(z) = D(z)(1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{H(p)}{p}\right\}.$$

В таблице 1 приведены Z-изображения некоторых решетчатых функций, а также производящие функции времени и их изображения Лапласа.

Таблица 1

Производящая непрерывная функция		Решетчатая функция	Z - преобразование
Оригинал	Преобразование Лапласа		
$f(t)=\begin{cases}1\,\text{ïðè}\;\; t=0,\\ 0\,\text{ïðè}\;\; t\neq 0\end{cases}$	–	$\delta[k]$	1
$1(t)$	$1/p$	$1[k]$	$\dfrac{z}{z-1}$
t	$\dfrac{1}{p^2}$	kT	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$
$0.5t^2$	$\dfrac{1}{p^3}$	$0.5(kT)^2$	$\dfrac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{p+a}$	$e^{-akT}=d^k$	$\dfrac{z}{z-d},\ d=e^{-aT}$
$sin(at)$	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$	$sin(akT)$	$\dfrac{z\,sin(aT)}{z^2-2z\,cos(aT)+1}$
$cos(at)$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$	$cos(akT)$	$\dfrac{z^2-z\,cos(aT)}{z^2-2z\,cos(aT)+1}$

Задачи

7.1. Преобразуйте описания дискретных систем, заданных передаточными функциями, к виду в переменных состояния:

а) $W(z)=\dfrac{K}{z^2+z+1}$; *б)* $W(p)=\dfrac{K}{z(z+1)(z+2)}$;

в) $W(p)=\dfrac{K(z+1)}{z^2-3z+2}$; *г)* $W(p)=\dfrac{K(z+1)}{z^4+z^3+2z^2+z+1}$;

д) $W(p)=\dfrac{K(z^2+z+1)}{z^3+2z^2+z+1}$; *е)* $W(p)=\dfrac{K(z^2+2z+1)}{z^4+z^3+2z^2+z+1}$.

7.2. Даны уравнения движения дискретных систем. Проверьте их управляемость и наблюдаемость.

а) $\begin{aligned} x_1[k+1]&=x_1[k]+x_2[k],\\ x_2[k+1]&=-x_1[k]+u,\\ y[k]&=x_2[k].\end{aligned}$ *б)* $\begin{aligned} x_1[k+1]&=x_1[k]+x_2[k]+u[k],\\ x_2[k+1]&=x_2[k],\\ y[k]&=x_2[k].\end{aligned}$

$$\text{в)}\ \begin{aligned} x_1[k+1] &= x_1[k] + x_2[k], \\ x_2[k+1] &= -x_2[k] + u[k], \\ y[k] &= x_2[k]. \end{aligned} \qquad \text{г)}\ \begin{aligned} x_1[k+1] &= x_1[k] + x_2[k] + u[k], \\ x_2[k+1] &= 2x_2[k], \\ y[k] &= x_1[k]. \end{aligned}$$

7.3. По уравнениям состояния систем из задачи 7.2 получите соответствующие передаточные функции дискретных систем.

Проверьте решения с помощью Matlab.

7.4. Приведите уравнения состояния дискретных систем к нормальной форме:

$$\text{а)}\ \begin{aligned} x_1[k+1] &= x_1[k] + 2x_2[k] + u[k] \\ x_2[k+1] &= 2x_1[k] + x_2[k] \end{aligned};$$

$$\text{б)}\ \begin{aligned} x_1[k+1] &= -2x_1[k] + 2x_2[k] + u[k] \\ x_2[k+1] &= -3x_1[k] + u[k] \end{aligned}.$$

7.5. Составьте структурные схемы систем по уравнениям состояния, полученным в задаче 7.4.

7.6. Найдите матрицу преобразования P, переводящую систему из базиса $\{A, B\}$ в другой базис $\{A^*, B^*\}$, предварительно убедившись, что такое преобразование возможно:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$; $B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; $B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

в) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $A^* = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

7.7. Получите передаточные функции дискретной системы (рис. 2.1), если непрерывная часть имеет вид:

а) $W(p) = \dfrac{10}{p+1}$; б) $W(p) = \dfrac{2}{p(p+2)}$;

в) $W(p) = \dfrac{k}{p^2 + p + 1}$; г) $W(p) = \dfrac{1}{p^2 + 4p + 4}$.

Период квантования T=0.1 с.

Проверьте полученное решение с помощью Matlab (функция *c2d*).

7.8. Получите точную и приближенную дискретную модель непрерывной системы с периодом квантования T=0.1 с.

а) $$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u\\ y &= x_2;\end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + u\\ \dot{x}_2 &= x_2\\ y &= x_2;\end{aligned}$$

в) $$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u\\ y &= x_2\end{aligned}$$

г) $$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + u\\ \dot{x}_2 &= 2x_2\\ y &= x_1\end{aligned}$$

д) $$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

е) $$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 + u\\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 + x_3\\ y &= x_3\end{aligned}$$

7.2. Частотные характеристики дискретных систем

Частотные характеристики дискретных систем можно получить из передаточной функции *W(z)* при подстановке в нее $z=e^{j\varpi}$, где $\varpi=\omega T$ – относительная частота. Изменяя ϖ от 0 до π в $W(e^{j\varpi})$, строят АФЧХ, АЧХ, ФЧХ, аналогичные частотным характеристикам непрерывных систем. Однако их построение в таком варианте оказывается неудобным вследствие трансцендентности выражений, содержащих частоту, и периодичности частотных характеристик. Поэтому большое распространение получили частотные передаточные функции и частотные характеристики с использованием так называемой псевдочастоты λ. Переход к псевдочастоте осуществляется на основе билинейного преобразования:

$$z=\frac{1+\frac{T}{2}q}{1-\frac{T}{2}q} \quad è \quad q=\frac{2(z-1)}{T(z+1)},$$

(*T* – период квантования, *q* – комплексная переменная)

с последующей постановкой в *W(z)* и заменой *q* на $j\lambda$. При этом $\lambda=\frac{2}{T}tg(\frac{\omega T}{2})$. Таким образом может быть получена частотная передаточная функция на основе псевдочастоты $j\lambda$:

$$W(e^{j\omega T})=W(j\lambda)=W\left(\frac{1+j\lambda\frac{T}{2}}{1-j\lambda\frac{T}{2}}\right).$$

Эта функция используется для получения АФЧХ, АЧХ, ФЧХ, ЛАХ и ЛФХ, аналогичных частотным характеристикам непрерывных систем при изменении λ от 0 до бесконечности.

Задачи

7.9. Выведите выражения и постройте все частотные характеристики звеньев, передаточные функции которых имеют вид:

а) $W(z)=\dfrac{kT}{z-1};$ б) $W(z)=kT(z-1).$

7.10. Постройте все частотные характеристики звеньев с передаточными функциями:

а) $W(z)=\dfrac{2z}{(z-1)(z-0{,}5)},$

б) $W(z)=\dfrac{2z(z-0{,}8)}{(z-1)(z-0{,}5)},$

7.3. Устойчивость дискретных систем

Для устойчивости дискретных систем все полюсы передаточной функции *W(z)* или корни характеристического полинома *D(z)* должны быть расположены внутри окружности единичного радиуса, т.е. должно выполняться условие $|z_i| < 1$. В некоторых случаях устойчивость можно определить непосредственным вычислением корней z_i.

При использовании алгебраических критериев устойчивости в выражении *W(z)* или *D(z)* следует перейти к новой переменной *q* с помощью билинейного преобразования $z=(1+q)/(1-q)$, которое отображает окружность единичного радиуса в *z*-плоскости в мнимую ось *q*-плоскости, а внутренность единичного круга в левую полуплоскость q. Таким образом, при данной подстановке получается уравнение, условия устойчивости для которого такие же, как у непрерывных систем.

Для применения частотных критериев устойчивости с теми же формулировками, что и для непрерывных систем, производят замену $q=j\lambda$, где λ – относительная псевдочастота $(\lambda = tg\dfrac{\omega t}{2})$.

При этом в критерии Найквиста вместо числа правых полюсов передаточной функции непрерывной разомкнутой системы учитывается число полюсов $W(z)$, модули которых $|z_i|>1$, или число правых полюсов передаточной функции $W(q)$.

Заметим, что в отличие от непрерывных систем устойчивость дискретных систем 2-го порядка зависит от численных значений параметров (в частности, от коэффициента усиления). Необходимые и достаточные условия устойчивости системы с характеристическим полиномом $D(z)=z_2+a_1z+a_0$ имеют вид: $D(0)<1$, $D(1)>0$, $D(-1)>0$.

Задачи

7.11. Исследуйте устойчивость динамических систем, описываемых уравнениями:

а) $2x[k+1]+x[k]=u[k]$;

б) $x[k+2]+0{,}5\,x[k]=u[k]$;

в) $5x[k+1]-x[k]=u[k]$;

г) $x[k+2]-x[k+1]+0{,}2\,x[k]=u[k]$;

д) $x[k+3]+2\,x[k+2]+x[k+1]=u[k]$;

е) $x[k+3]-0{,}5\,x[k+2]+0{,}2\,x[k]=u[k]$.

7.12. Исследуйте устойчивость динамических систем, описываемых уравнениями состояния:

а) $x_1[k+1]=x_1[k]+2x_2[k]$,
$x_2[k+1]=4x_1[k]+3x_2[k]+u[k]$,

б) $x_1[k+1]=-x_2[k]+u[k]$,
$x_2[k+1]=x_1[k]$,

в) $x_1[k+1]=-x_2[k]+u[k]$,
$x_2[k+1]=x_1[k]-x_2[k]+u[k]$,

7.13. Определите устойчивость систем по характеристическим уравнениям:

а) $5z^3+2z^2+3z+1=0$,

б) $z^3+z^2+z+1=0$,

в) $z^2-1{,}3z+0{,}4=0$,

г) $3z^3+z^2+2z+1=0$.

7.14. Определите устойчивость разомкнутой и замкнутой систем по передаточной функции разомкнутой системы:

$$а)\,W(z)=\frac{0{,}11z}{z^2-1{,}67z+0{,}78}; \qquad б)\,W(z)=\frac{0{,}1}{z^2-1{,}3z+0{,}4};$$

$$в)\,W(z)=\frac{0{,}1}{z^2-1{,}5z+0{,}6}; \qquad г)\,W(z)=\frac{1}{z^2-z+1}.$$

7.15. Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$z^2 + (K\text{-}1{,}5)z + 0{,}5 = 0.$$

Определите диапазон значений K, при которых система устойчива.

7.16. Определите значение критического коэффициента усиления K по условию устойчивости замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы

$$W(z)=\frac{Kz}{(z-1)(z-0{,}78)}$$

7.17. Постройте годограф Михайлова и определите устойчивость систем по характеристическим уравнениям:

$а)\,5z^3+2z^2+3z+1=0,$

$б)\,z^3+z^2+z+1=0,$

$в)\,z^2-1{,}3z+0{,}4z=0.$

7.4. Установившиеся режимы дискретных систем

Для исследования точности дискретных САУ в установившихся режимах используются известные теоремы операционного исчисления о конечном значении:

$$y_{уст}=\lim_{k\to\infty}y[k]=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})Y(z).$$

В частности, для статического режима замкнутой системы отклонение выходной величина $y_{уст}$, вызванное приложением постоянного воздействия $f_{ст}=const$, выражается соотношением:

$$y_{уст}=(\lim_{z\to 1}\frac{W_{fy}(z)}{1+W(z)})\,f_{ст}\ ,$$

где $W(z)$ – передаточная функция разомкнутой системы, $W_{fy}(z)$-передаточная функция участка системы от места приложения возмущающего воздействия до выходной величины y.

Вынужденную составляющую ошибки непрерывной САУ в случае воздействия на нее полиномиального возмущения вида $f[k]=\sum_{i=0}^{n}a_i k^i$, можно представить в виде ряда:

$$\varepsilon[k] = \sum_{i=0}^{n} c_i \frac{f^{(i)}[k]}{i!}, \text{ где } c_i = \left[\frac{d^i W_\varepsilon(e^{pT})}{d\,p^i}\right]_{p=0}, \; T \text{ – шаг квантования.}$$

Задачи

7.18. В системе, структура которой дана на рис. 7.3, $W_1(z) = \dfrac{Kz}{z^2 - a_1 z + a_0}$, $W_2(z) = 1$. Определите, при каких коэффициентах передаточной функции $W_1(z)$ в статическом режиме будет иметь место:
а) статическая ошибка $e = 0$, *б)* $y = x$.

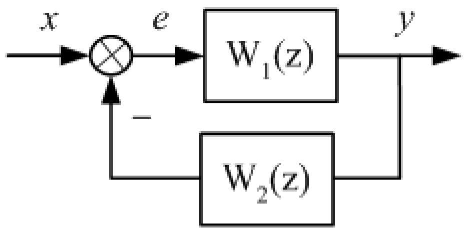


Рис. 7.3

7.19. Дана система регулирования с ЭВМ в контуре управления (рис. 7.2), у которой $D[z] = 10$; $H(p) = 0{,}5/p$, период квантования $T=0{,}1$. Определите установившуюся ошибку $y_{уст}$ для входного сигнала

а) $x(t)=2$;

б) $x(t)=2 + 0{,}5t$.

7.20. В системе регулирования (рис. 7.2),

$$D[z] = k_d \frac{1 - az^{-1}}{1 + bz^{-1}}, \; H(p) = 2{,}5/p^2.$$

где $k_d = 10$; $a = 0{,}7$; $b = 0{,}5$, период квантования $T = 0{,}2$.
Определите установившуюся ошибку для входного сигнала

а) $x(t) = 1$;

б) $x(t) = 1 + 0{,}5\,t$;

в) $x(t) = 1 + t^2$.

7.21. В системе регулирования (рис. 7.2)
$D[z] = k_d$, где $k_d=10$; $H(p) = 2{,}5/p^2$; $T = 0{,}2$.
Определите установившуюся ошибку для входного сигнала

а) $x(t) = 1$;

б) $x(t) = 1 + 0{,}5\,t$.

7.5. Переходные процессы

При использовании операторного метода сначала определяют изображение выходной величины $Y(z) = W(z)X(z)$. Оригинал $y[k]$ (решетчатая функция) вычисляется как обратное Z-преобразование:

$$y[k] = Z^{-1}[Y(z)] = \frac{T}{j2\pi}\int_{\sigma-j\pi/T}^{\sigma+j\pi/T} Y(e^{pT})e^{pT}dp = \frac{1}{j2\pi}\oint Y(z)z^{k-1}dz.$$

Если изображение выходной величины $Y(z) = G(z)/H(z)$ представляет дробно-рациональную функцию z, то для нахождения оригинала в случае простых полюсов этой функции можно воспользоваться теоремой разложения:

$$y[k] = \sum \frac{G(z_i)}{H'(z_i)} z_i^{k-1}, \quad \text{где } z_i \text{ - простой полюс, } H'(z_i) = \frac{dH}{dz}\Big|_{z=z_i}.$$

Вычислить значения оригинала $y[k]$ в дискретных точках можно без нахождения полюсов изображения, используя разложение $Y(z)$ в ряд Лорана. Из определения Z-преобразования следует:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y[k]z^{-k} = y[0] + y[1]z^{-1} + y[2]z^{-2} + y[3]z^{-3} + \ldots$$

Разложив любым способом изображение в ряд Лорана по убывающим степеням z, получим:

$Y(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + \ldots.$

(Практически ряд Лорана получают делением числителя на знаменатель, начиная со старших степеней полиномов.)

Сравнивая два ряда между собой, можно установить, что

$y[0]=c_0$, $y[1]= c_1$, $y[2]= c_2$, $y[3]= c_3$ и т.д.

Весовая характеристика дискретной системы $w[k]$ представляет реакцию системы на входное воздействие в виде $\delta[k]$ при нулевых начальных условиях и является оригиналом от передаточной функции: $w[k] = Z^{-1}\{W(z)\}$.

Переходная характеристика $h[k]$ представляет реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях и равна $h[k] = Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}W(z)\right]$. Взаимосвязь между весовой и переходной функциями выражается соотношением: $w[k] = \nabla h[k]$.

Задачи

7.22. Непосредственным решением разностных уравнений определите переходные функции системы и постройте переходные процессы:

а) $y[k+2] + y[k] = x$;

б) $y[k+2] - 0{,}25y[k] = x$;

в) $y[k+2] + 0{,}25y[k] = x$;

г) $y[k+2] + 4y[k+1] + 3y[k] = x$

при $x[k]=a1[k]$, $a = const$.

7.23. С помощью формул разложения найдите весовые функции систем, имеющих передаточные функции:

а) $W(z) = \dfrac{0{,}1}{z^2 - 1{,}3z + 0{,}4}$;

б) $W(z) = \dfrac{z}{z^2 - 1{,}5z + 0{,}5}$;

в) $W(z) = \dfrac{z^2 + 2z + 1}{z^3 - 1{,}5z^2 + 0{,}5z}$.

7.24. Считая, что выходными величинами являются переменные состояния, определите переходные и весовые матрицы для систем, имеющих уравнения состояния:

а) $\mathrm{x}[\mathrm{k}+1] = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \mathrm{x}[\mathrm{k}]$

б) $\mathrm{x}[\mathrm{k}+1] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \mathrm{x}[\mathrm{k}]$

в) $\mathrm{x}[\mathrm{k}+1] = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \mathrm{x}[\mathrm{k}]$

г) $\mathrm{x}[\mathrm{k}+1] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} \mathrm{x}[\mathrm{k}]$

7.25. С помощью *Z*- преобразования определите переходную матрицу состояния системы, свободное движение которой описывается системой разностных уравнений:

а) $\mathrm{x}[\mathrm{k}+1] = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \mathrm{x}[\mathrm{k}]$

б) $\mathrm{x}[\mathrm{k}+1] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} \mathrm{x}[\mathrm{k}]$

в) $\mathrm{x}[\mathrm{k}+1] = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \mathrm{x}[\mathrm{k}]$

7.26. Передаточная функция замкнутой дискретной системы:

$$W(z)=\frac{Y(z)}{G(z)}=\frac{0{,}35z+0{,}3}{z^2-z+0{,}7}.$$

а) Вычислите переходную характеристику системы с помощью функции *step*, задав время процесса t=[0:1:20].

б) С помощью функции *d2c* определите эквивалентную непрерывную передаточную функцию, полагая период квантования Т = 1 с.

в) С помощью функции *step* постройте переходную характеристику непрерывной системы и сравните ее с полученной в п. *(а)*.

Глава 8
ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MATLAB

Система Matlab в настоящее время широко используется при выполнении различных научно-технических расчетов. Это интерактивная система, имеющая свой язык, мощные средства отладки и развитый пользовательский интерфейс. Matlab применяется для обучения во многих университетах различных стран. В этой главе пособия дано описание основных команд и функций пакета Control System, входяшего в Matlab, приведены примеры их применения для расчета систем автоматического управления. В Приложении к этой главе приведены некоторые программы на языке Matlab, разработанные и используемые на кафедре автоматики и вычислительной техники.

8.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Математические модели линейных стационарных динамических систем в Matlab могут быть представлены передаточными функциями (в двух формах) или уравнениями в пространстве состояний. Можно пользоваться любым из описаний и переходить от одного к другому с помощью специальных команд.

Передаточные функции

Передаточная функция одномерной системы, имеющей один вход и один выход (SISO – single input, single output) представляет отношение двух полиномов от s (или p):

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad m \le n. \tag{8.1}$$

Полиномы *B(s)* и *A(s)* задают векторами-строками их коэффициентов, которые располагают по убывающей степени s:

числитель (numerator) `num=[`b_m b_{m-1} … b_0`]`,

знаменатель (denominator) `den=[`a_n a_{n-1} … a_0`]`.

Таким образом, команда `tf(num,den)` создает передаточную функцию SISO-системы (8.1).

```
Пример.
» num=[1 2];
» den=[3 4 5];
» H=tf(num,den)
Transfer function:
     s + 2
---------------
3 s^2 + 4 s + 5
```

Передаточная матрица многомерной системы (MIMO – multi input, multi output) содержит передаточные функции от всех входов ко всем выходам. Каждая из этих передаточных функций задается соответствующими векторами коэффициентов числителя и знаменателя.

Например, числитель $N(s)=\begin{bmatrix} s-1 \\ s+2 \end{bmatrix}$ и знаменатель $D(s)=\begin{bmatrix} s+1 \\ s^2+4s+5 \end{bmatrix}$ определяют передаточную матрицу MIMO системы, имеющей один вход и два выхода:

$$H(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{s-1}{s+1} \\ \dfrac{s+2}{s^2+4s+5} \end{bmatrix}.$$

Передаточную функцию H(s) можно создать, задавая числитель и знаменатель массивами ячеек, содержащих их коэффициенты:

```
» N={[1 -1];[1 2]};
» D={[1 1];[1 4 5]};
» H=tf(N,D)
Transfer function from input to output...
      s - 1
 #1:  -----
      s + 1
          s + 2
 #2:  -------------
      s^2 + 4 s + 5
```

Отметим, что число входов системы равно числу столбцов матрицы H, а число выходов – числу ее строк.

Нуль-полюсное описание

Другая форма представления передаточной функции – нуль-полюсное описание или zpk-форма:

$$H(s)=k\frac{(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}\quad,\quad m\le n\ , \qquad (8.2)$$

где z_i (i=1,…,m) – нули (zeros) передаточной функции,

p_j (j=1,…,n) – полюсы (poles) передаточной функции,

k – скалярный коэффициент, равный $\dfrac{b_m}{a_n}$.

Для создания zpk – модели (8.2) используется команда `zpk(z,p,k)`.

Например, задав векторы нулей, полюсов и коэффициент k, получим:

```
» zpk([0 -2],[-1+2i -1-2i -5],10)
Zero/pole/gain:
     10s(s+2)
-------------------
(s+5)(s^2 + 2s + 5)
```

Комплексно-сопряженные нули и полюсы следует задавать парами.

Для многомерной (MIMO) системы с m входами и n выходами zpk – модель создается аналогичной командой `sys=zpk(z,p,k)`,

где z и p – массивы ячеек n x m, в которых z{i, j} и p{i, j} – векторы нулей и полюсов передаточной функции от входа j к выходу i,

k – n x m – матрица коэффициентов для каждого канала.

```
Например,
» zpk({[];[-1 -2]},{1;[0 2]},[5;10])
определяет систему с одним входом и двумя выходами:
Zero/pole/gain from input to output...
        5
 #1:  -----
      (s-1)
      10(s+1)(s+2)
 #2:  --------------
         s(s-2)

Другой пример. Если
» z={[] -5;[1-i 1+i] []};
» p={0 [-1 1];[1 2 3] []};
» k=[1 3;2 0];
то создается система с двумя входами и двумя выходами:
» H=zpk(z,p,k)
Zero/pole/gain from input 1 to output...
      1
 #1:  -
      s
       2 (s^2 - 2s + 2)
 #2:  -----------------
      (s-1) (s-2) (s-3)
Zero/pole/gain from input 2 to output...
        3 (s+5)
 #1:  -----------
      (s+1) (s-1)
 #2:  0
```

Передаточные функции MIMO систем как в форме (8.1), так и (8.2) можно создать с помощью объединения (конкатенации) составляющих ее SISO – описаний (см. ниже).

Описание в пространстве состояний

Это основной способ описания систем в Matlab. В этом случае уравнения системы имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \qquad (8.3)$$

$$y = Cx + Du,$$

где x – вектор состояния (размерности n),

u – вектор входа (размерности m),
y – вектор выхода (размерности r),
A, B, C, D – матрицы соответствующих размерностей.

Для создания описания в пространстве состояний используется команда `sys=ss(A,B,C,D)`. Эта команда создает модель объекта (ss-модель) с именем sys, сохраняя в памяти матрицы A, B, C, D, размерности которых должны быть согласованы. В противном случае выводится сообщение об ошибке.

Для моделей с нулевой матрицей D можно для краткости записывать D = 0, что означает нулевую матрицу соответствующей размерности.

При работе в среде Matlab объекты могут различаться по типам моделей (например, одни задаются передаточными функциями, другие – уравнениями состояния или нуль-полюсным описанием). Становится неясным, в какой форме будет получен результат. Этот вопрос разрешается следующим ***правилом приоритетов***.

Модели вида tf, zpk и ss ранжируются согласно иерархии:
ss > zpk > tf .

Это означает, что zpk имеет приоритет перед tf, а ss имеет приоритет и перед tf и перед zpk.

Другими словами, при любых операциях с моделями разных типов в результате получается:

– ss-модель, если имеется, по крайней мере, одна модель в ss-форме,
– zpk-модель, если нет ss и есть, по крайней мере, одна zpk-модель,
– tf-модель, если все модели имеют форму tf.

Работа с объектами различных типов выполняется следующим образом. Результирующий тип модели определяется по правилу приоритетов, и все модели преобразуются в этот тип, а затем выполняются необходимые операции.

Дискретные модели

Чтобы создать дискретную модель объекта с заданным периодом дискретности, следует к входным аргументам функций tf, zpk и ss добавить период дискретности Ts, измеряемый в секундах:

```
sys=tf(num,den,Ts),
sys=zpk(z,p,k,Ts),
sys=ss(A,B,C,D,Ts).
```

```
Например, команда
» sys= zpk(0.5,[-1 0.5],2,0.05)
создает zpk-модель:
Zero/pole/gain:
  2 (z-0.5)
-------------
(z+1) (z-0.5)
Sampling time: 0.05
```

Если период дискретности для дискретной системы не определен (неспецифицирован), то указывается значение Ts = -1.

Выделение подсистем

В случае многомерных систем бывает необходимо выделить некоторую подсистему, связывающую определенные вход и выход. Выделение нужной подсистемы производится оператором `subsys=sys(i,j)`, где первый индекс i указывает номер выхода, а второй индекс j- номер входа. Результирующая подсистема будет моделью того же типа, что и sys.

Если, например, система с двумя входами и тремя выходами задана передаточной матрицей H, то для выделения подсистемы, связывающей второй вход с третьим выходом, следует указать: `H32 = H(3, 2).`

Оператор `sys(3, 1:2)` выделяет подсистему, связывающую первый и второй входы с третьим выходом.

Свойства моделей

Модели систем, создаваемые в Matlab с помощью функций tf, zpk, ss, сохраняют данные систем (числители и знаменатели, нули и полюсы передаточных функций, матрицы A, B, C, D и т.д.). Их называют также LTI-объектами (Linear Time Invariant). Эти объекты могут также содержать дополнительную информацию о системе (имена входных и выходных переменных, период дискретности, входные задержки, дополнительные данные о модели и т.д.). Эту информацию называют свойствами моделей (или LTI-объектов).

Каждое свойство устанавливается парой аргументов:
свойство (PropertyName), значение (PropertyValue).
Первый аргумент – название (имя) свойства или его сокращение с достаточным числом знаков для идентификации имени. Например, 'inputname' или его сокращение 'inputn', 'outputname' ('outputn'). Второй аргумент – значение, которое придается свойству.

Основные свойства объектов приведены в следующей таблице.

Свойство	Описание	Тип данных
InputName	Названия входов	массив ячеек
OutputName	Названия выходов	массив ячеек
Notes	Описательная информация	текст
Ts	Период дискретности	скаляр
Variable	Переменные передаточной функции 's', 'p', 'z', 'z^-1'	символы
Userdata	Дополнительные даные	произвольные

Специфическими свойствами lti-объектов являются:
для tf-моделей – num, den, variable;
для zpk-моделей – z, p, k, variable;
для ss-моделей – a, b, c, d, StateName – имена переменных.

Свойства lti-объектов можно установить при создании этих объектов с помощью команд `tf`, `zpk` и `ss`.

```
    Например, создавая tf-объект, указывают и его свойства:
    » h=tf(10,[1 2 3], 'inputn','напряжение', 'outputn',
'скорость');
    » h
    Transfer function from input "напряжение" to output
"скорость":
         10
    -------------
    s^2 + 2 s + 3
```

Другой способ состоит в назначении свойств существующей модели командой `set`.

```
    Например:
    » h=zpk([],[-1 -2],5);
    » set(h,'inputn','давление');
    » h
    Zero/pole/gain from input "давление" to output:
         5
    -----------
    (s+1) (s+2)
    В этом примере имя выхода не установлено.
```

По умолчанию переменная преобразования Лапласа обозначается буквой s. Можно заменить ее переменной p, указав имя переменной и ее значение : ('variable', 'p').
В случае MIMO-системы для указания имен каждого входа и выхода используют массивы ячеек из строковых переменных. Например, для системы h с двумя входами их имена назначаются так:
`set(h,'inputname',{'температура';'давление'})`
В случае ss-моделей свойство 'statename' позволяет присвоить имена переменным состояния.
Данные о свойствах объекта sys можно получить, выполнив команду `get(sys)`.

```
    Пример.
     » h=tf(10,[2 1],'inptn','напряжение','outptn','скорость',
     'user','студент');
     » get(h)
        num = {[0 10]}
        den = {[2 1]}
```

```
Variable = 's'
Ts = 0
Td = 0
InputName = {'напряжение'}
OutputName = {'скорость'}
Notes = {}
UserData = 'студент'
```

Данные об отдельном свойстве объекта можно получить, указав имя этого свойства после имени объекта.

```
Пример.
» sys=ss([1 2;3 4],[1;1],[1 0],0);
» sys.a
ans =
     1     2
     3     4
» h=tf(10,[4 5]);
» h.num
ans =   [1x2 double]
» h.num{1}
ans =   0    10
```

Преобразование моделей

Если какая-либо модель системы sys создана, то ее преобразование в другую форму можно выполнить простым образом:

```
sys_ss=ss(sys),
sys_zpk=zpk(sys),
sys_tf=tf(sys).
```

Пусть, например, имеется tf-модель системы. Преобразуем ее в ss-форму.

```
» sys=tf(1,[2 3 4]);
» sys_ss=ss(sys)
a =
              x1       x2
      x1    -1.5       -1
      x2       2        0
b =
              u1
      x1     0.5
      x2       0
c =
              x1      x2
      y1      0      0.5
d =
              u1
      y1      0
Continuous-time system.
```

Модели в переменных состояния могут иметь различные формы. Пакет Control System позволяет создавать канонические формы двух типов – модальную и присоединенную, а также преобразовывать модели к новому базису, используя выбранную матрицу подобного преобразования.

В канонической ***модальной*** форме (называемой также жордановой) на диагонали матрицы А располагаются собственные значения матрицы, причем паре комплексно-сопряженных собственных значений соответствует блок размера 2x2, также расположенный на диагонали этой матрицы. Так, для системы с собственными значениями $(\lambda_1, \sigma \pm j\omega, \lambda_2)$ модальная матрица А имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \omega & 0 \\ 0 & -\omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}$$

Модальная форма системы sys создается функцией `csys=canon(sys,'modal')`.

Матрица А ***присоединенной*** канонической формы (называемой также фробениусовой) для системы с характеристическим полиномом

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n$$

имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & -a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_1 \end{vmatrix}.$$

Присоединенная форма системы sys создается функцией `csys=canon(sys,'companion')`.

Функция `[csys,T]=canon(sys,'тип')` выводит на дисплей также матрицу T преобразования, в котором новый вектор состояния $\bar{x} = Tx$. Матрица T может оказаться пустой, если исходная система не является ss-моделью.

Присоединенная каноническая форма может иметь плохую обусловленность, поэтому ее применения по возможности надо избегать.

Преобразование ss-моделей к новому базису с заданным преобразованием T осуществляет функция `sysT=ss2ss(sys,T)`. При этом новый вектор состояния $\bar{x} = Tx$, а преобразованные матрицы системы имеют вид $\bar{A} = TAT^{-1}$, $\bar{B} = TB$, $\bar{C} = CT^{-1}$.

При плохо обусловленных матрицах возникают вычислительные трудности. Чтобы их избежать, можно выполнить масштабирование матриц ss-модели с четверкой матриц {A, B, C, D}, используя преобразование подобия с новым вектором состояния $\overline{x} = Tx$ и диагональной матрицей T и скаляром α такими, что матрица

$$\begin{vmatrix} TAT^{-1} & TB/\alpha \\ \alpha CT^{-1} & 0 \end{vmatrix}$$

имеет малые числа обусловленности по отношению к задаче на собственные значения. Масштабирование модели sys производит функция:

`[sysb,T]=ssbal(sys,condT),`

причем входная величина condT задает верхнюю границу числа обусловленности для матрицы T; по умолчанию принимается T=1/eps. Для вычисления T и α используется функция `balance`, входящая в ядро Matlab [12].

```
Пример.
» a=[0 -2e3;1 100];
» b=[1;1];
» c=[1 0];
» d=0;
» sys=ss(a,b,c,d);
%Определим числа обусловленности матрицы A
» condeig(sys.a)
ans =
  4.4755e+001
  4.4755e+001
% Выполним масштабирование матриц системы и найдем числа
% обусловленности масштабированной модели
» [sysb,T]=ssbal(sys);
» condeig(sysb.a)
ans =
  2.3378e+000
  2.3378e+000
```

В результате масштабирования числа обусловленности уменьшились примерно в 19 раз, из чего следует, что точность вычисления собственных значений повысилась в такое же число раз.

Преобразование непрерывной модели sysC **в дискретную** sysD с периодом дискретности Ts выполняется командой `c2d`:

`sysD=c2d(sysC,Ts).`

Обратное **преобразование дискретной системы** sysD с периодом дискретности Ts **в непрерывную модель** sysC выполняется командой `d2c`:

`sysC=d2c(sysD,Ts).`

В обоих случаях по умолчанию предполагается использование экстраполятора нулевого порядка. Однако, возможно также использование экстраполяции первого порядка, билинейной аппроксимации и др. [14, 15].

Функция `sys=d2d(sys,Ts)` формирует дискретную модель системы sys с новым периодом дискретности Ts.

При работе в Matlab следует иметь в виду следующее:

1. Три возможных формы моделей не равнозначны при выполнении вычислений. В частности, точность вычислений с tf-моделями высоких порядков может оказаться низкой. Поэтому в таких случаях рекомендуется использовать ss-модели, а передаточные функции применять для просмотра и интерпретации результатов.

2. Преобразование к форме передаточной функции может вызвать потерю точности. В результате нули и полюсы передаточной функции могут отличаться от параметров исходной модели в zpk или ss-форме.

3. Преобразование в ss-форму не является единственным для одномерных систем, а в многомерном случае не гарантирует получения минимальной реализации. Поэтому выполнение последовательно преобразований из ss в tf-форму и обратно в ss-форму может давать различные матрицы системы и даже различное число переменных состояния.

8.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ

Преобразование структурных схем систем управления в Matlab выполняется с помощью функций, приведенных в следующей таблице.

`append`	объединение моделей с добавлением входов и выходов
`series`	последовательное соединение (умножение) моделей
`parallel`	параллельное соединение (сложение) моделей
`feedback`	соединение с обратной связью
`connect`	объединение моделей с использованием матрицы соединений

Функция `sys=append(sys1,sys2,…,sysN)` объединяет входы и выходы LTI-моделей любых видов sys1, …, sysN и формирует результирующую модель, показанную на рис. 8.1.

Для ss-моделей sys1 и sys2 с матрицами [A1, B1, C1, D1] и [A2, B2, C2, D2] функция `append` создает результирующую модель в виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}1 \\ \dot{x}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A1 & 0 \\ 0 & A2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B1 & 0 \\ 0 & B2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C1 & 0 \\ 0 & C2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D1 & 0 \\ 0 & D2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \end{bmatrix}$$

Все модели должны быть либо непрерывными, либо дискретными с одинаковым периодом дискретности. Результирующий тип модели определяется на основе правила приоритетов. Ограничений на количество входных аргументов не накладывается.

Функция `sys=series(sys1,sys2)` выполняет последовательное соединение двух LTI-моделей, когда входами второй модели являются выходы первой. Эта функция эквивалентна операции умножения:
`sys=sys1*sys2.`

Функция `sys=parallel(sys1,sys2)` выполняет параллельное соединение двух LTI-моделей и эквивалентна операции сложения:
`sys=sys1+sys2.`

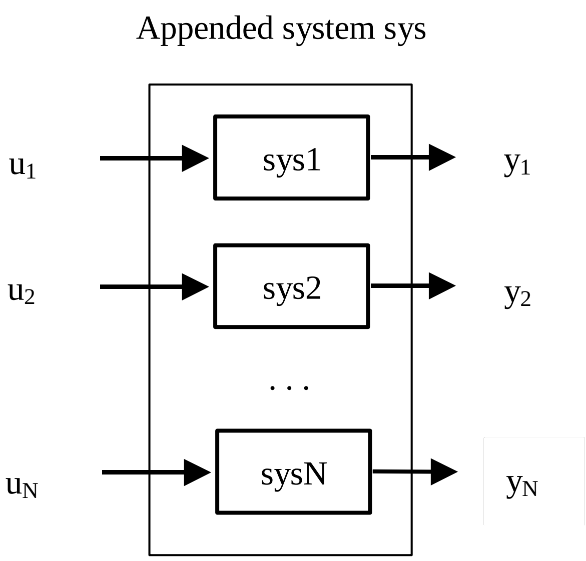
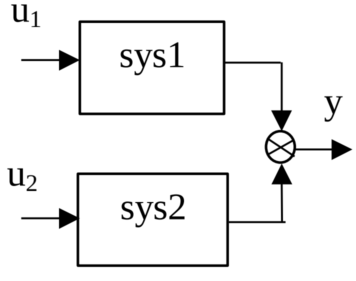


Рис. 8.1

Для объединения моделей в форме горизонтальной конкатенации (рис. 8.2) предназначена функция `sys=[sys1,sys2].`
Вертикальную конкатенацию (рис. 8.3) выполняет функция
`sys=[sys1;sys2].`



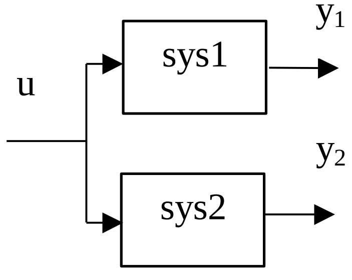


Рис. 8.2 Рис. 8.3

Функция `sys=feedback(sys1,sys2)` создает модель системы с отрицательной обратной связью, когда в прямой цепи включена система sys1, а в цепи обратной связи sys2.

В случае положительной обратной связи используется обращение
`sys=feedback(sys1,sys2,+1).`

Пример. Пусть объект с LTI-моделью P охвачен единичной отрицательной обратной связью (рис. 8.4). Для замыкания системы следует применить функцию Hy = feedback(P,1).

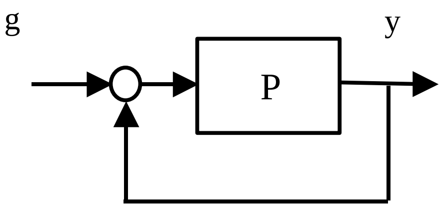


Рис. 8.4

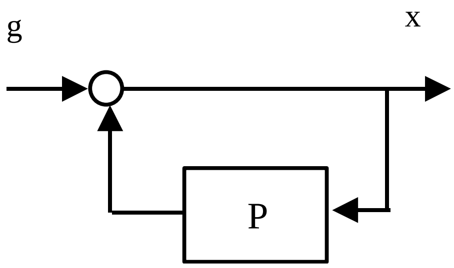


Рис. 8.5

Для системы, показанной на рис.8.5, надо использовать функцию Hx = feedback(1,P).

В частности, если

```
P=tf(1,[1 0]);
» Hy=feedback(P,1);
Transfer function:
  1
-----
s + 1
» Hx=feedback(1,P)
Transfer function:
  s
-----
s + 1
```

В более общем случае, показанном на рис. 8.6, следует применять обращение `sys=feedback(sys1,sys2,feedin,feedout)`.

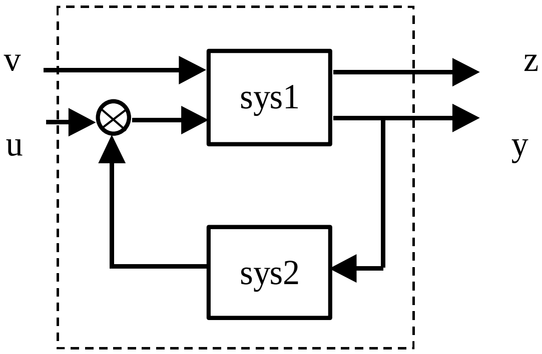


Рис. 8.6

В этом случае вектор feedin содержит индексы входного вектора системы sys1 и определяет, какие ее входы включаются в контур обратной связи. Вектор feedout определяет, какие выходы sys1 используются для обратной связи. Результирующая модель sys имеет те же входы и выходы, что и sys1 (с сохранением их порядка). По умолчанию считается, что обратная связь – отрицательная.

Пример. Пусть объект P, заданный в пространстве состояний, имеет 5 входов и 4 выхода, а регулятор K в цепи обратной связи имеет 3 входа и 2 выхода. Чтобы подключить выходы 1, 3 и 4 объекта ко входам регулятора, а выходы регулятора ко входам 4 и 2 объекта, надо указать

```
feedin = [4 2];
feedout = [1 3 4];
H = feedback(P, K, feedin, feedout)
```

Функция `connect`.

Для получения ss-модели сложных систем используются последовательно функции `append` и `connect`. При этом функция `append` создает блочно-диагональную модель sys без учета связей между отдельными системами. Затем с помощью функции `connect` формируется ss-модель с учетом соединений блоков. Синтаксис этой функции:

`sysc=connect(sys,Q,inputs,outputs).`

Здесь матрица Q описывает связи между блоками. Каждая строка матрицы Q соответствует одному входу системы; первый элемент строки – это номер входа, следующие элементы указывают номера выходов, которые суммируются на этом входе. При вычитании сигналов соответствующие номера выходов указываются со знаком минус. Например, если на вход 7 поступают сигналы с выходов 2, 15 и 6, причем сигнал с выхода 15 поступает со знаком минус, то соответствующая строка матрицы связей Q имеет вид [7 2 –15 6].

Векторы inputs и outputs определяют, какие входы и выходы всей системы являются внешними. Например, если внешними являются входы 1, 2, 15 и выходы 2, 7 системы sys, то inputs = [1 2 15]; outputs = [2 7]. Результирующая система sysc будет иметь именно эти входы и выходы.

Поскольку при вводе большого объема данных легко допустить ошибку, следует проверить полученную модель каким-либо способом. Здесь возможны, например, такие рекомендации:

– следует убедиться, что полюсы и статические коэффициенты передачи системы являются приемлемыми;

– можно построить временные и частотные характеристики системы и сравнить их с ожидаемыми.

Если возникает необходимость много работать со структурными схемами, то рекомендуется использовать систему Simulink, которая является мощным инструментом моделирования динамических систем.

8.3. УПРАВЛЯЕМОСТЬ, НАБЛЮДАЕМОСТЬ И МИНИМАЛЬНОСТЬ

Для систем, заданных в пространстве состояний матрицами A, B, C, D, важную роль имеют свойства управляемости и наблюдаемости.
Для того, чтобы система была полностью ***управляемой***, необходимо и достаточно выполнения одного из условий:

– матрица управляемости $Co = [\,B \quad AB \quad A^2B \quad \ldots \quad A^{n-1}\,]$ имеет полный ранг: rankCo = n;

– грамиан управляемости $Wc = \int_0^\infty e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}d\tau$ невырожден, т.е. $\det Wc \neq 0$.

Для того, чтобы система была полностью ***наблюдаемой***, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:

– матрица наблюдаемости $Oo = [C^T \;\; A^TC^T \;\; (A^T)^2C^T \ldots (A^T)^{n-1}C^T]$ имеет полный ранг: rankOo = n;

– грамиан наблюдаемости $Wo = \int_0^\infty e^{A^T\tau}C^TCe^{A\tau}d\tau$ невырожден: $\det Wo \neq 0$.

Функция `Co=ctrb(sys)` (сокращ. controllability) формирует матрицу управляемости Co для системы, заданной в пространстве состояний, а функция `Oo=obsv(sys)` (сокращ. observability) – матрицу наблюдаемости Oo. Далее можно определить ранг полученной матрицы, выполнив команду rank(Co) или rank(Oo).

Функции `Wc=gram(sys,'c')` и `Wo=gram(sys,'o')` формируют грамианы управляемости и наблюдаемости. Грамианы используются также для построения минимальных реализаций систем.

Грамианы управляемости и наблюдаемости вычисляются путем решения матричных уравнений Ляпунова соответственно:

$$AW_c + W_cA^T + BB^T = 0,$$
$$A^TW_0 + W_0A + C^TC = 0.$$

В случае, если система оказывается неполностью управляемой или неполностью наблюдаемой, можно выполнить переход к минимальной реализации. Это означает удаление неуправляемых и ненаблюдаемых переменных состояния или сокращение одинаковых нулей и полюсов для моделей в форме tf и zpk. Такие операции выполняет функция

```
sysr = minreal(sys).
```

Для выделения неуправляемой и ненаблюдаемой частей системы может использоваться преобразование уравнений состояния к одной из канонических форм с помощью функций `ctrbf` и `obsvf`. При сокращении нулей и полюсов непосредственно выполняется поиск их одинаковых (в пределах допуска) значений. Передаточные функции преобразуются в zpk-форму. Величина допуска по умолчанию принята равной sqrt(eps), где eps – машинная точность. Это значение может быть увеличено применением команды `sysr=minreal(sys,tol)`.

В результате применения операции `minreal` получается модель пониженной размерности.

При другом подходе к понижению размерности системы первоначально применяется алгоритм построения сбалансированной реализации, которая имеет равные (и диагональные) грамианы управляемости и наблюдаемости. Соответствующая функция имеет вид:

`sysb=balreal(sys).`

Функция `[sysb,g]=balreal(sys)` возвращает также вектор g, состоящий из диагональных элементов результирующего грамиана. После построения сбалансированной реализации диагональ g может быть использована для понижения порядка модели. Так как вектор g характеризует степень управляемости и наблюдаемости мод сбалансированной модели, то можно пренебречь теми модами, которым соответствуют малые значения g(i), сохранив наиболее важные динамические свойства исходной системы. После выполнения балансировки для удаления этих мод применяют функцию modred, которая существует в нескольких модификациях.

Функция `sys=modred(sys,elim)` понижает порядок системы при сохранении значения коэффициента передачи (что сохраняет установившееся значение переходного процесса). Вектор elim определяет номера переменных состояния, которые должны быть удалены. Производные от этих переменных состояния приравниваются нулю и полученные уравнения разрешаются относительно оставшихся состояний. Результирующая система будет иметь порядок, меньший, чем первоначальная, на число элементов в векторе elim.

Функция `rsys=modred(sys,elim,'del')` просто удаляет переменные состояния, определяемые вектором elim. Этот способ не гарантирует сохранения коэффициента передачи, но дает лучшую аппроксимацию частотных характеристик и переходного процесса.

Для применения функции `balreal` модель объекта sys должна быть устойчивой, управляемой и наблюдаемой.

```
    Пример 1. Пусть задана система с матрицами
    » A=[-2 1 0;0 -3 -3;0 0 -5];
    » B=[0;1;1];
    » C=[1 0 0];
    » D=0;
    » sys=ss(A,B,C,D);
    Проверим управляемость и наблюдаемость системы.
    » Co=ctrb(sys);
    » rank(Co)
    ans = 2
    Система неполностью управляема, так как rank(Co)<n=3.
Проверим наблюдаемость.
    » Oo=obsv(sys);
    » rank(Oo)
    ans = 3
```

Система полностью наблюдаема: rank(Oo)=n=3. Определим ее минимальную реализацию с помощью функции minreal. Предварительно преобразуем модель в zpk-форму.

```
» h=zpk(sys)
Zero/pole/gain:
      (s+2)
-----------------
(s+2) (s+3) (s+5)
```

Система является неминимальной. Определим минимальную реализацию.

```
» hr=minreal(h)
Zero/pole/gain:
     1
-----------
(s+3) (s+5)
```

Пример 2. Рассмотрим следующий объект в форме zpk-модели

```
» sys=zpk([-10 -20.01],[-5 -9.9 -20.1],1)
Zero/pole/gain:
   (s+10) (s+20.01)
----------------------
(s+5) (s+9.9) (s+20.1)
```

Построим для него сбалансированную реализацию

```
» [sysb,g]=balreal(sys);
» g
g =  1.0062e-001
     6.8039e-005
     1.0055e-005
```

Из анализа диагонали g результирующего грамиана видно,что последние две переменные состояния слабо связаны со входом и выходом. Удалим эти состояния с помощью функции modred и найдем минимальную реализацию в zpk-форме.

```
» sysr=modred(sysb,[2 3],'del');
» zpk(sysr)
Zero/pole/gain:
 1.0001
--------
(s+4.97)
```

8.4. ВРЕМЕННЫЕ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Временные характеристики

Построение временных характеристик выполняется с помощью функций, перечень которых приведен в следующей таблице.

step	переходная функция
impulse	импульсная переходная (весовая) функция
initial	реакция на ненулевые начальные условия
lsim	реакция на произвольный входной сигнал

gensig	генератор входного сигнала

Команда `step(sys)` рассчитывает и строит переходную характеристику системы sys, заданной LTI-моделью любого вида. Эта модель может быть непрерывной и дискретной, одномерной и многомерной. Для многомерной системы строятся переходные характеристики по каждому каналу вход-выход. Время моделирования выбирается автоматически, исходя из динамических свойств системы.

Команда `step(sys,t)` позволяет назначить время моделирования, указав либо t=Tfinal – момент окончания моделирования в секундах, либо вектор t = 0:dt:Tfinal.

Для дискретных систем значение шага dt должно быть равно периоду дискретности.

Команды

`step(sys1,sys2,…,sysN)`,

`step(sys1,sys2,…,sysN,t)` позволяют построить на одном графике переходные характеристики нескольких систем. При этом все системы должны иметь одинаковое число входов и выходов.

Кривые переходных процессов нескольких систем на одном графике можно изобразить различными стилями (различные цвет, тип и маркеры линий), используя команду

`step(sys1,'PlotStyle1',…,sysN,'PlotStyleN')`

или ее модификацию с явным указанием времени (см. выше).

Например, `step(sys1,'k',sys2,'g--',sys3,'b+')` выведет характеристику первой системы сплошной линией черного цвета, характеристику второй – штриховой зеленой линией, третьей – синей линией, помеченной знаком +.

Функции `[y,t,x]=step(sys)`, `[y,t,x]=step(sys,t)` вычисляют переходные характеристики и выводят векторы выхода y, времени t и переменных состояния x. Графики при этом не строятся.

При вычислениях переходных характеристик применяется следующий алгоритм. Непрерывные модели преобразуются в эквивалентные дискретные модели с экстраполятором нулевого порядка. Период дискретности выбирается автоматически, исходя из динамических свойств системы. Если же задан вектор времени t = 0:dt:Tf , то значение dt используется как период дискретности.

Команды группы `impulse` вычисляют и строят реакцию на импульсную функцию Дирака $\delta(t)$ для непрерывной системы или на единичный импульс – для дискретной системы. Эта реакция называется импульсной переходной или весовой функцией. Команды impulse имеют те же модификации, что и `step`.

Пример. Построить весовые характеристики системы с двумя входами.

```
» a=[-0.5 -0.8;0.8 0];
» b=[1 0;1 3];
» c=[2 5];
» sys=ss(a,b,c,0);
» impulse(sys)
```

Весовые характеристики показаны на рис. 8.7.

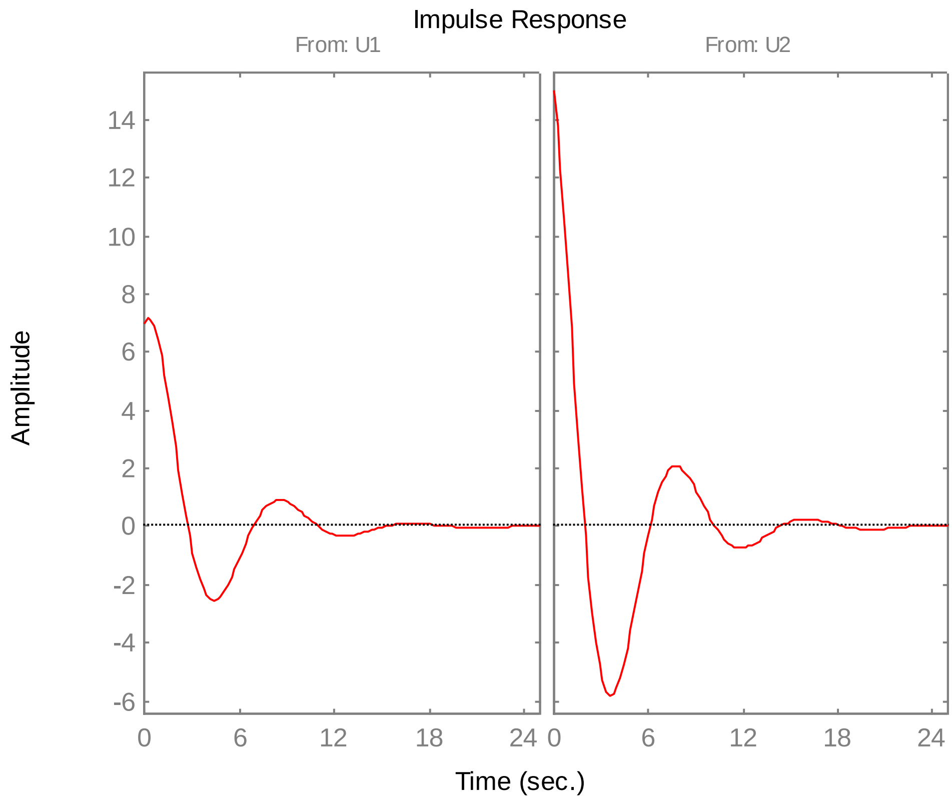


Рис. 8.7

Команды группы `initial` рассчитывают и строят реакцию на ненулевые начальные условия для системы, заданной в пространстве состояний:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x0;$$

$$y = Cx.$$

Основная команда этой группы `initial(sys,x0)` строит графики переходных процессов, вызванных ненулевыми начальными условиями по переменным состояния для ss-модели. Эта модель может быть непрерывной или дискретной, одномерной или многомерной. Она может иметь или не иметь входы u. Продолжительность моделирования определяется автоматически так, чтобы адекватно отобразить переходный процесс.

Команда `initial(sys,x0,t)` позволяет явно указать продолжительность моделирования (см. выше).

Если указать выходные аргументы в левой части, то выводятся векторы выхода, времени и переменных состояния:

```
[y,t,x]=initial(sys,x0),
[y,t,x]=initial(sys,x0,t).
```
Графики при этом не строятся.

Пример. Построим переходный процесс в системе 2-го порядка:

```
» a=[-0.5 -0.8;0.8 0];
» c=[2 5];
» x0=[1;0];
» sys=ss(a,[],c,[]);
» initial(sys,x0)
```

Переходный процесс показан на рис. 8.8.

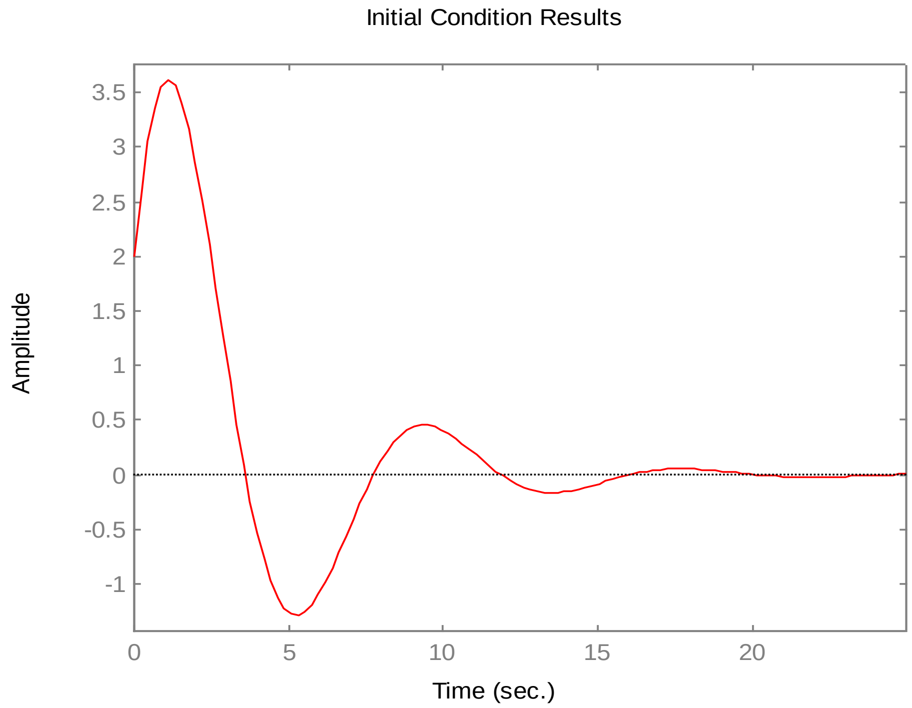


Рис. 8.8

Для расчета и построения переходных процессов при произвольных входных воздействиях предназначена команда `lsim(sys,u,t)`.

Интервал моделирования задается вектором t = 0:dt:Tfinal. Входное воздействие u задается матрицей с числом строк, равным длине вектора t, и числом столбцов, равным числу входов. Каждая строка u(i, :) задает значения входного сигнала в момент времени t(i). Модель sys может быть непрерывной и дискретной, одномерной и многомерной. В дискретной модели вектор u всегда соответствует вектору t и поэтому последний может быть опущен или заменен пустым массивом. В случае непрерывной модели шаг dt используется как период дискретности при преобразовании непрерывной модели в дискретную. В тех случаях, когда значение dt слишком велико и может вызвать скрытые колебания, параметр dt изменяется автоматически.

Команда `lsim(sys,u,t,x0)` применяется только для ss-моделей и учитывает начальные условия для переменных состояния.

Другие модификации команды:

```
lsim(sys1,sys2,…,sysN,u,t),
lsim(sys1,sys2,…,sysN,u,t,x0),
```

```
lsim(sys1,'PlotStyle1',…,sysN,'PlotStyleN',u,t),
lsim(sys1,'PlotStyle1',…,sysN,'PlotStyleN',u,t,x0);
[y,t,x]=lsim(sys,u,t),
[y,t,x]=lsim(sys,u,t,x0).
```

Их назначение и смысл такие же, как у подобных команд, выполняющих построение переходных характеристик.

Некоторые стандартные сигналы для использования в командах lsim можно сгенерировать с помощью функций

```
[u,t]=gensig('<тип>',tau)
[u,t]=gensig('<тип>',tau,Tf,Ts).
```

Возможны следующие типы сигналов:

sin	синусоида
square	прямоугольный периодический сигнал
pulse	периодические импульсы

Функция `gensig` возвращает вектор t значений времени и вектор u значений сигнала u. Аргумент tau указывает период сигнала в секундах. Аргументы Tf и Ts устанавливают продолжительность действия сигнала и период дискретности для генератора импульсов.

Входной сигнал u и время t можно включить прямо в команду `lsim` и моделировать процессы в системе с одним входом. Так как t однозначно определяется параметрами Tf и Ts, можно также генерировать входные воздействия для систем со многими входами путем повторных вызовов команды `gensig`.

Пример. Построить переходный процесс в системе на входной прямоугольный периодический сигнал с периодом 5 с. Система имеет один вход и два выхода.

Вначале сгенерируем входной сигнал с помощью функции gensig, а затем выполним моделирование.

```
» [u,t]=gensig('square',4,10,0.1);
» h=[tf(2,[1 2 3]);tf([1 -1],[1 1 5])];
» lsim(h,u,t)% Переходный процесс показан на рис. 8.9.
```

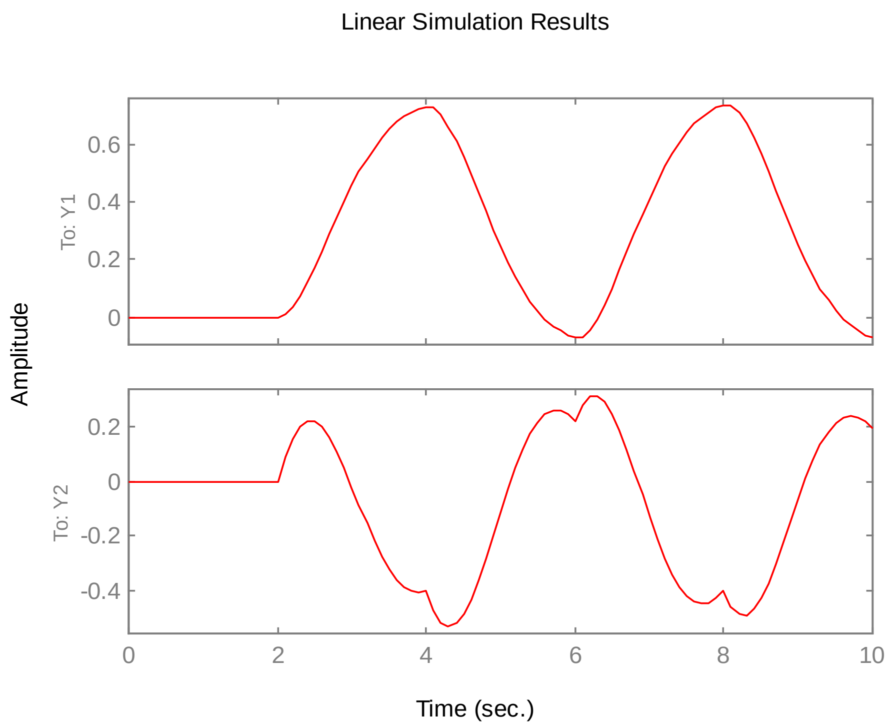


Рис. 8.9

Частотные характеристики

Перечень основных функций для построения частотных характеристик дан в следующей таблице.

`bode`	логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики (диаграммы Боде)
`margin`	запасы устойчивости по модулю и фазе
`nyquist`	годограф Найквиста
`freqresp`	вычисление частотной передаточной функции при заданных значениях частоты
`evalfr`	вычисление частотной передаточной функции при одном комплексном значении частоты

Команда `bode(sys)` строит логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики LTI-модели sys. Эта модель может быть непрерывной и дискретной, одномерной и многомерной. В случае многомерной модели на экран выводятся частотные характеристики для каждого канала вход-выход. Диапазон частот определяется автоматически по значениям нулей и полюсов передаточной функции.

Команда `bode(sys,{wmin,wmax})` строит частотные характеристики в диапазоне от wmin до wmax (в рад/с). Можно задавать w как вектор в рад/с или в логарифмических единицах (декадах):

`w=logspace(d1,d2,N)`, где N- количество точек. (Если указать w=logspace(d1, d2), то вектор будет состоять из 50 точек.)

Для сравнения нескольких систем можно построить их частотные характеристики на одном графике с помощью команд

```
bode(sys1,sys2,…,sysN),
bode(sys1,sys2,…,sysN,w).
```

Все системы должны иметь одинаковое число входов и выходов, среди них могут быть как непрерывные, так и дискретные. Цвет, тип и маркеры линий можно задать командами

```
bode(sys1,'PlotStyle1',…,sysN,'PlotStyleN'),
bode(sys1,'PlotStyle1',…,sysN,'PlotStyleN',w)
```

Функции

`[mag,phase,w]=bode(sys)`,

`[mag,phase,w]=bode(sys,w)` выполняют расчет характеристик без вывода графиков на экран.

Запасы устойчивости по модулю и фазе, а также соответствующие частоты определяют с помощью команды `margin(sys)`. При этом также строится диаграмма Боде.

Если указываются выходные аргументы (в левой части), то построение частотных характеристик не производится:

```
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w).
```

Построение годографа Найквиста выполняется командами:

```
nyquist(sys),    nyquist(sys,w),
nyquist(sys1,sys2,…,sysN),
nyquist(sys1,sys2,…,sysN,w),
nyquist(sys1,'PlotStyle1',…,sysN,'PlotStyleN'),
[re,im,w]=nyquist(sys).
```

Применение этих команд аналогично командам группы bode.

```
    Пример. Определить запасы устойчивости следующей дискретной
системы:
    » Hd=tf([0.048 0.046],[1 -1.81 0.91],0.1)
    Transfer function:
      0.048 z + 0.046
    -------------------
    z^2 - 1.81 z + 0.91
    Sampling time: 0.1
    » [Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(Hd)
    Gm = 1.9565e+000  Pm = 1.2419e+001
    Wcg = 5.3935e+000  Wcp = 4.4164e+000
    Выразим запас устойчивости по модулю в дБ.
    » 20*log10(Gm)
    ans =
       5.8297e+000
    Покажем эти запасы на логарифмических характеристиках.
    » margin(Hd)  % См. рис. 8.10.
```

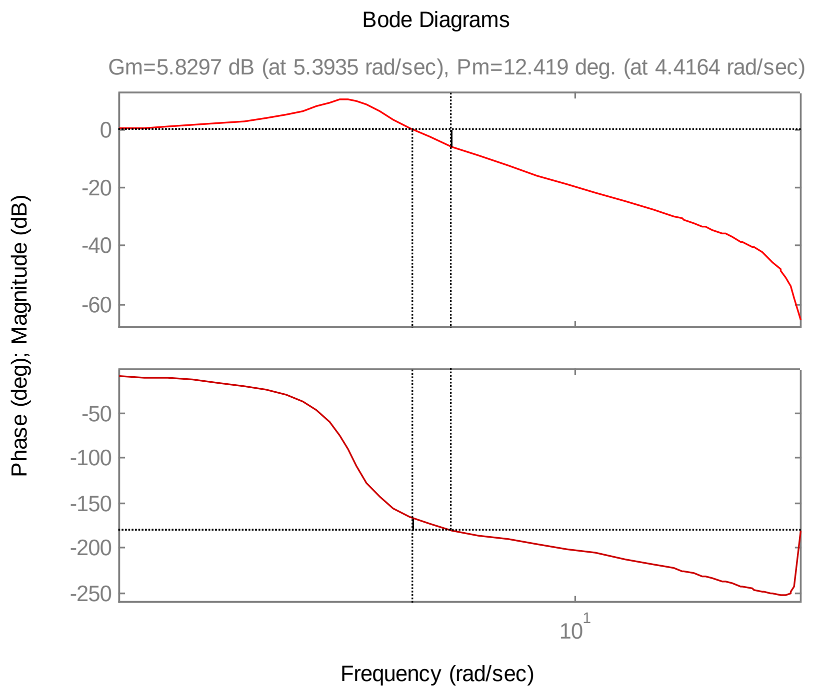


Рис. 8.10

Функция `H=freqresp(sys,w)` (сокращение от frequesy response) рассчитывает значения частотной передаточной функции LTI-модели при действительных значениях частоты (в рад/с), заданных вектором w. Для непрерывных систем – это значение передаточной функции при s=jw. Для дискретных систем частоты w(1),…,w(N) отображаются на точки единичной окружности преобразованием $z=\exp(jwT_s)$, где T_s – период дискретности.

Пример. Определить значения частотной передаточной функции системы с одним входом и двумя выходами на частотах 1, 10 и 100 рад/с.

```
» P=[tf(1,[1 1]);tf([1 -1],[1 2])]
Transfer function from input to output...
        1
 #1:  -----
      s + 1
      s - 1
 #2:  -----
      s + 2
» w=[1 10 100];
» H=freqresp(P,w)
H(:,:,1) =
   0.5000 - 0.5000i
  -0.2000 + 0.6000i
H(:,:,2) =
   0.0099 - 0.0990i
   0.9423 + 0.2885i
H(:,:,3) =
   0.0001 - 0.0100i
   0.9994 + 0.0300i
```

Функция `fresp=evalfr(sys,w)` вычисляет значение передаточной функции LTI-модели sys для одного заданного комплексного значения аргумента w. Эта функция является упрощенной версией функции freqresp.

Пример. Вычислить значение передаточной функции дискретной системы при z = 1+j.

```
» P=tf([1 -1],[1 1 1],-1)
Transfer function:
   z - 1
-----------
z^2 + z + 1
Sampling time: unspecified
» w=1+j;
» evalfr(P,w)
ans =
0.2308 + 0.1538i
```

Просмотр характеристик lti-объектов

В составе Control System Toolbox имеется специальная система для просмотра временных и частотных характеристик различных lti-моделей – LTI Viewer.

Эта система имеет собственную рабочую среду, которая формируется независимо от рабочей среды Matlab, однако между ними возможен обмен данными через окно просмотра. Для того, чтобы просмотреть характеристики системы с помощью LTI Viewer, надо:

– создать lti-модель системы sys в командном окне Matlab,

– вызвать LTI Viewer командой ltiview(sys).

После этого в рабочем поле LTI Viewer в окне "Systems" слева появится объект с именем sys. Этот объект далее можно анализировать средствами LTI Viewer, выбирая соответствующую опцию по правой кнопке мыши.

Для того чтобы можно было работать с моделью sys в следующих сеансах просмотра, надо сохранить созданный объект в рабочей области Matlab, и в начале очередного сеанса выполнить команду Load Workspace, а затем вызвать LTI Viewer, как описано выше.

Работа с LTIViewer достаточно проста, однако при необходимости более подробные сведения о ней можно найти в [14, 15].

8.5. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Анализ устойчивости линейных систем можно выполнить непосредственной проверкой необходимых и достаточных условий устойчивости (прямой метод), а также с помощью критериев устойчивости (косвенные методы).

Как известно, непрерывная линейная система устойчива, если все полюсы ее передаточной функции (или собственные значения матрицы системы) имеют отрицательную вещественную часть, т.е. располагаются в левой комплексной полуплоскости. Для устойчивости дискретной системы требуется, чтобы все полюсы передаточной функции располагались внутри окружности единичного радиуса.

Поскольку основой системы Matlab являются хорошо разработанные алгоритмы матричных операций, то анализ устойчивости в среде Matlab достаточно просто выполняется прямым вычислением полюсов передаточной функции (корней характеристического полинома) или собственных значений матрицы системы.

При анализе устойчивости lti-моделей систем можно использовать функции, приведенные в следующей таблице.

`pole, eig`	вычисление полюсов модели
`pzmap`	вычисление полюсов и нулей и отображение их расположения на комплексной плоскости

poly	вычисление характеристического полинома
roots	вычисление корней полинома
rlocus	построение корневого годографа

Функции `p=pole(sys)` и `poles=eig(sys)` вычисляют полюсы одномерной или многомерной модели системы sys, которая задана в ss, zpk или tf-форме.

Команда `pzmap(sys)` вычисляет полюсы и нули непрерывной или дискретной системы и дает картину их расположения на комплексной плоскости. Полюсы показываются знаком x, а нули – o. По расположению полюсов можно не только сделать заключение об устойчивости, но и дать оценку качества процессов.

Если использовать обращение `[p,z]=pzmap(sys)`, то полюсы и нули выводятся в виде векторов-столбцов, но картина их расположения на дисплей не выводится.

Функции `p=poly(sys)` и `p=poly(A)`, где sys – lti-модель системы в любой форме, а A – матрица порядка n, позволяют вычислить вектор коэффициентов характеристического полинома

$p(\lambda) = \det(\lambda I\text{-}A) = a_0\lambda^n+a_1 \lambda^{n+1}+\ldots+a_{n-1} \lambda+a_n$.

Корни характеристического полинома можно затем найти, применив функцию `r=roots(p)`.

Влияние коэффициента усиления на устойчивость замкнутой системы можно выяснить, применив последовательно функции `rlocus(sys)` и `[k,poles]=rlocfind(sys)`. Однако в основном эти функции применяют для решения задач синтеза (см. ниже).

В ряде случаев анализ устойчивости предпочтительнее проводить с использованием известных критериев устойчивости. Так, можно применить критерий Найквиста, для чего следует построить амплитудно-фазовую частотную характеристику разомкнутой системы с помощью команды `nyquist`. Для применения логарифмического критерия строят логарифмические частотные характеристики (команда `bode`).

В некоторых случаях полезным оказывается применение других критериев устойчивости. В приложении к главе 7 в качестве примера приведена функция `routh`, реализующая алгоритм Рауса.

В практических расчетах часто требуется выделить области устойчивости в плоскости настраиваемых параметров системы или выполнить Д-разбиение плоскости этих параметров. Для решения этих задач можно применить программы `stabreg` (сокр. stability region) и `Dcom` (сокращение от D-composition). Эти программы приведены в приложении. Комментарии к ним даны там же.

Пример 1. Передаточная функция разомкнутой системы $G(s)=1/s(2s^4+3s^3+2s^2+3s+4)$. Определить устойчивость замкнутой системы.

```
» numg=1;                              % числитель
```

```
» deng=conv([1 0],[2 3 2 3 4]);     % знаменатель
» G=tf(numg,deng);                  % передаточная функция
» H=feedback(G,1)                   % замыкание обратной
                                    % связи
Transfer function:
                   1
---------------------------------------
2 s^5 + 3 s^4 + 2 s^3 + 3 s^2 + 4 s + 1

% определение полюсов передаточной функции
» poles=pole(H)

poles =  0.4535 + 0.9961i
         0.4535 - 0.9961i
        -1.0464 + 0.4824i
        -1.0464 - 0.4824i
        -0.3144
```

Так как имеются полюсы с положительной вещественной частью, то замкнутая система неустойчива.

Пример 2. Определить предельный по устойчивости коэффициент передачи системы, имеющей характеристический полином $q = s^3+18s^2+70s+K$, полагая, что K может принимать значения от 1 до 2000.

Составим программу для определения предельного значения K.

```
K=[1:1:2000];               % пределы и шаг изменения K
for n=1:length(K);
       q=[1 18 70 K(n)];    % характеристический полином
       poles=roots(q);      % определение корней полинома
       r=real(poles);       % формирование вектора вещест-
                            % венных частей корней для K(n).
             if max(r)>=0,  % условие перехода корней
                            % в правую полуплоскость
                  poles     % вывод первого корня, имеющего
                            % real part>0.
                  K=K(n)    % вывод соответствующего
                            % значения K.
                  break
       end
end

poles =
 -18.0000
   0.0000 + 8.3666i
   0.0000 - 8.3666i

K = 1260
```

8.6. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В библиотеке Control System реализованы три основных группы методов синтеза линейных систем:

– методы, основанные на изучении расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы в комплексной плоскости (наиболее развит в этой группе метод корневого годографа);

– синтез обратных связей по переменным состояния, обеспечивающих заданное расположение корней характеристического уравнения (или спектр матрицы системы) – так называемое модальное управление;

– методы синтеза регуляторов по интегральным квадратичным критериям качества (задачи линейно-квадратичного оптимального управления по переменным состояния или по выходу системы).

Метод корневого годографа

Этот метод позволяет построить в комплексной плоскости расположение нулей и полюсов передаточной функции, а также траектории полюсов замкнутой системы при изменении одного параметра. Можно также решать задачу выбора этого изменяемого параметра так, чтобы полюсы системы имели требуемые или близкие к требуемым значения. Обычно таким параметром является коэффициент обратной связи k (или коэффициент передачи разомкнутой системы).

Пусть передаточная функция системы sys без обратной связи

$$h(s) = n(s)/d(s).$$

Тогда полюсы замкнутой системы – это корни характеристического уравнения

$$q(s) = d(s)+kn(s) = 0.$$

Корневой годограф – это траектории полюсов замкнутой системы при изменении коэффициента передачи k в предположении, что обратная связь – отрицательная.

Построение корневого годографа системы sys при изменении коэффициента обратной связи k выполняется командой `rlocus(sys)`.

При этом значения коэффициента k выбираются автоматически так, чтобы ветви корневого годографа были гладкими кривыми.

Команда `rlocus(sys,k)` позволяет задать вектор k как входной аргумент и построить корневой годограф в выбранном диапазоне изменения этого коэффициента.

Команды `[r,k]=rlocus(sys)`, `r=rlocus(sys,k)` выводят на дисплей массив r полюсов замкнутой системы и соответствующие значения коэффициента передачи. Построение корневого годографа при этом не производится.

```
Пример. Построим корневой годограф следующей системы:
» sys=tf([0.5 1],[0.001 0.035 0.35 1 0])
Transfer function:
              0.5 s + 1
------------------------------------
0.001 s^4 + 0.035 s^3 + 0.35 s^2 + s
» rlocus(sys)
Корневой годограф показан на рис. 8.11.
```

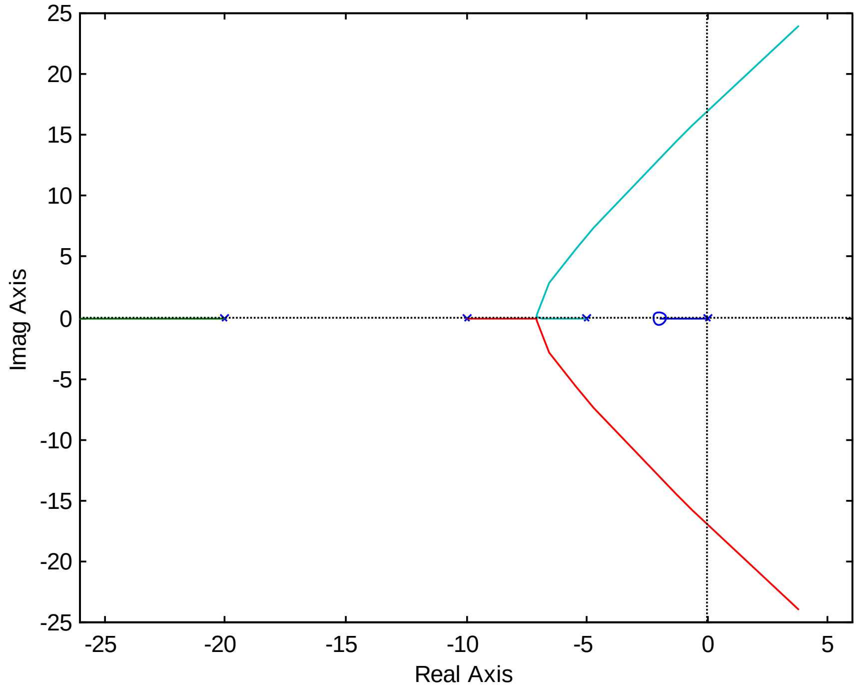


Рис. 8.11

С помощью команды `sgrid` можно нанести на комплексной плоскости, в которой построен корневой годограф, специальную сетку постоянных значений коэффициента затухания (от 0 до 1 с шагом 0.1) и собственных частот (от 0 до 10 рад/с. с шагом 1 рад/с.). Команда `sgrid(z,wn)` наносит сетку постоянных значений коэффициента затухания и собственной частоты, заданных векторами z и wn. Такие же действия для дискретных систем выполняет команда `zgrid`.

С помощью функции `[k,poles]=rlocfind(sys)` после построения корневого годографа на нем можно выбрать желаемую точку (совместив с ней перекрестие специально созданного этой командой курсора) и определить значение коэффициента обратной связи k в этой точке.

Функция `[k,poles]=rlocfind(sys,p)` позволяет задать вектор p желаемых полюсов и затем отыскать на корневом годографе ближайшие по расположению полюсы с выводом на дисплей соответствующих коэффициентов передачи k.

Пример. Определить значение коэффициента обратной связи, при котором замкнутая система будет иметь коэффициент затухания z=0.7.

```
» h=tf([2 5 1],[1 2 3])
» rlocus(h);
» sgrid;
» [k,poles]=rlocfind(h)
```

Выберем далее на годографе точку, в которой z=0.7 (рис. 8.12)

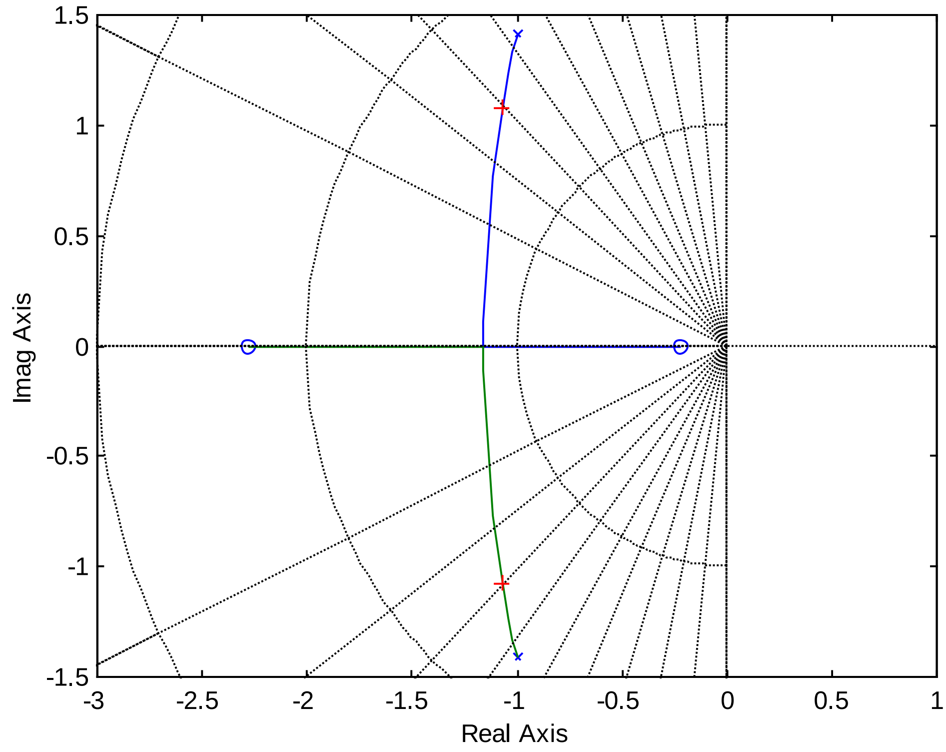


Рис. 8.12

Выбранная точка помечена знаком +.

```
selected_point =
-1.0737e+000 +1.0789e+000i
k = 1.9213e-001
poles =
 -1.0694e+000 +1.0782e+000i
 -1.0694e+000 -1.0782e+000i
```

Проверим значение коэффициента затухания:

```
» z=cos(atan(1.0782/1.0694))
z = 7.0420e-001
```

Для проектирования систем управления методом корневого годографа в Matlab имеется специальная подсистема – графический интерфейс проектирования с помощью корневых годографов The Root Locus Design GUI (RLD GUI). Эта подсистема вызывается командой `rltool`.

В среде RLD GUI можно не только строить корневые годографы, но и анализировать в интерактивном режиме влияние параметров системы на корневые годографы, а также на временные и частотные характеристики замкнутой системы.

Размещение полюсов замкнутой системы. Модальное управление

Задавая определенное расположение полюсов системы в комплексной плоскости, можно приблизить качество процессов управления к желаемому. Задачу выбора обратных связей по переменным состояния, обеспечивающих желаемое размещение полюсов (или заданный спектр матрицы системы) называют задачей размещения полюсов или задачей модального управления.

Пусть исходная система (без дополнительных обратных связей) описывается уравнениями

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du.$$

Если эта система управляема, то можно реализовать обратную связь по переменным состояния, такую, что при управлении $u = -Kx$ полюсы замкнутой системы (собственные числа матрицы A-BK) будут иметь заданные значения. Однако следует иметь в виду, что задание любого произвольного расположения полюсов может потребовать больших по величине коэффициентов обратных связей или привести к большим перерегулированиям по переменным состояния [3].

Вектор K обратных связей для одномерной системы с расположением полюсов, заданным вектором p, вычисляет функция `K=acker(A,B,p)`.

Однако для систем высокого порядка и плохо обусловленных систем эта функция может привести к значительным погрешностям.

Функция `K=place(A,B,p)` позволяет рассчитать матрицу K коэффициентов обратной связи для многомерной или одномерной системы. При этом предполагается, что все входы системы доступны для управления. Длина вектора p желаемого расположения полюсов замкнутой системы должна быть равна числу строк матрицы A. Функция `place` выводит сообщение о числе точных десятичных цифр у полюсов замкнутой системы. Если какие-либо полюсы отличаются от желаемых значений более чем на 10%, то выводится соответствующее предупреждение.

Функция `place` использует алгоритм, который позволяет получить робастное решение, поэтому рекомендуется применять ее вместо `acker` также и для одномерных систем. Обе функции (`acker` и `place`) применимы как для непрерывных, так и для дискретных моделей.

Функцию `place` можно применять также для расчета вектора L коэффициентов передачи наблюдателя состояния многомерной системы, если использовать обращение `L=place(A′, C′)`, где `A′, C′`– транспонированные матрицы.

Пример.

```
» a=[0 2; 2 -3];
» b=[0; 1];
» p=[-1+0.5i -1-0.5i];
» k=place(a, b, p)
place: ndigits= 15
k =  2.6250  -1.0000
```

Убедимся, что система с обратной связью имеет заданные полюсы:

```
» eig(a-b*k)
ans =
  -1.0000 + 0.5000i
  -1.0000 - 0.5000i
```

Синтез оптимальных регуляторов по интегральным квадратичным критериям качества

Эффективность управления в линейной системе

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

можно оценить интегральным квадратичным критерием качества

$$J(u) = \int_0^\infty (x^T Qx + u^T Ru + 2x^T Nu)dt.$$

Весовые матрицы Q, N, R учитывают важность отклонений переменных состояния и затрат на управление. Матрица K обратной связи $u = -Kx$, минимизирующей указанный интегральный критерий, определяется выражением $K=R^{-1}(B^TS+N^T)$, где S – решение алгебраического уравнения Риккати

$$A^TS+SA-(SB+N)R^{-1}(B^TS+N^T)+Q=0.$$

Функция `[K,S,e]=lqr(A,B,Q,R,N)` вычисляет матрицу обратных связей K, а также решение S уравнения Риккати и собственные значения матрицы замкнутой системы e=eig(A-BK). Если аргумент N опущен, то по умолчанию считается N=0.

Имеется также аналогичная функция `dlqr` для дискретных систем.

В случае, когда минимизируется интегральный критерий

$$J(u) = \int_0^\infty y^T Qy + u^T Ru + 2y^T Nu)dt,$$

учитывающий ограничения на выходную величину y, матрица K обратной связи $u = -Kx$ вычисляется с помощью функции

`[K,S,e]=lqry(sys,Q,R,N).`

Модель системы sys в этом случае задается четверкой матриц {A, B, C, D}. По умолчанию, если матрица N опущена, полагается N=0.

В теории управления находят большое применение уравнения Риккати и уравнения Ляпунова. Для решения непрерывных алгебраических уравнений Риккати предназначена группа функций `care`, а для дискретных – `dare`.

Функция `X=lyap(A,Q)` находит решение непрерывного матричного уравнения Ляпунова вида
$AX+XA^T+Q=0$,
где A и Q – квадратные матрицы одинаковых размеров.

Для решения обобщенного уравнения Ляпунова (или уравнения Сильвестра) вида

$$AX+XB+C=0$$

используется функция `X=lyap(A,B,C)`. Матрицы A, B, C должны иметь согласованные размеры, но не обязательно должны быть квадратными.

Для решения дискретного уравнения Ляпунова
$A^TXA-X+Q=0$
применяется обращение `X=dlyap(A,Q)`.

8.7. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Пример 1.

На рис. 8.13 приведена схема следящей системы. Параметры системы:

коэффициенты передачи датчика угла поворота и датчика обратной связи K_1=57.3 В/рад;

коэффициент усиления усилителя K_2=100; коэффициент передачи двигателя K_3=8 рад/В·с;

постоянные времени – усилителя $T_у$ = 0.01 с., двигателя – 0.2 с.;

коэффициент передачи от момента нагрузки $M_н$ к скорости вращения K_4 = 1600 рад/н·см·с;

передаточное число редуктора K_5 = 0.001;

коэффициент передачи обратной связи по скорости K_6 = 0.01 В·с/рад; инерционная постоянная времени обратной связи T = 0.001 с.

Требуется:

– получить передаточные функции замкнутой системы по заданию u и возмущению $M_н$;

– получить модель системы пониженной размерности, используя функции balreal и modred;

– построить логарифмические частотные характеристики моделей полной и пониженной размерностей;

– сравнить переходные характеристики моделей полной и пониженной размерностей.

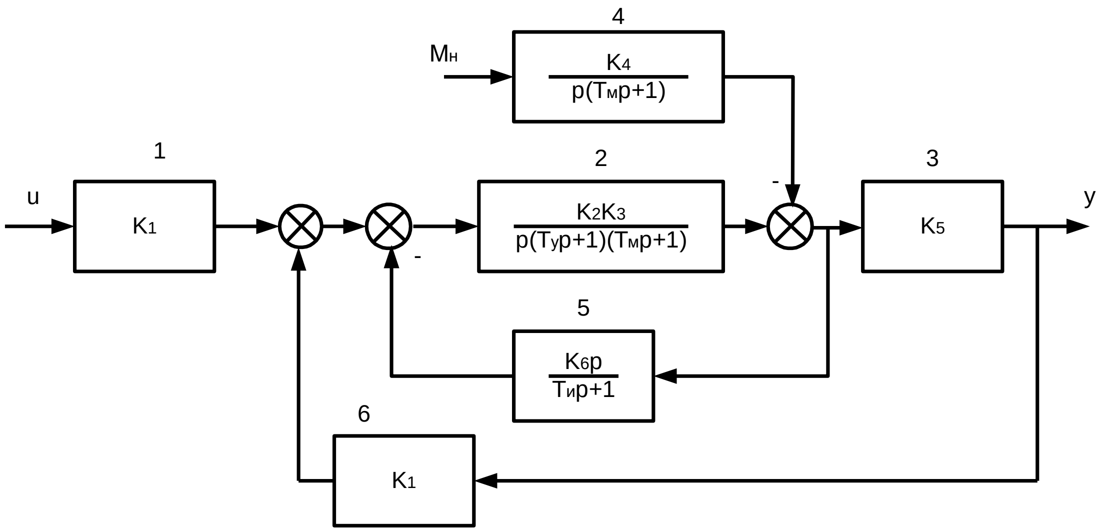


Рис. 8.13

u – задающее воздействие;
y – угол поворота исполнительного механизма.
1 – датчик угла поворота; 2 – усилитель и двигатель; 3 –редуктор;
4 – передача от нагрузки к углу поворота вала двигателя;
5 – обратная связь по скорости;
6 – датчик обратной связи.

Составим программу расчета.

```
% test
% СЛЕДЯЩАЯ СИСТЕМА
% Применение функций append, connect, minreal, balreal, modred
% Сравнение диаграмм Боде и переходных характеристик
h1=tf(57.3,'inputn','u');             % датчик угла поворота
h2=tf([800],[0.002 0.21 1 0]);        % усилитель и двигатель
h3=tf(0.001,'outputn','y');           % редуктор
h4=tf([1600],[0.2 1 0],'inputn','Мн');% влияние момента нагрузки
h5=tf([0.005 0],[0.001 1 ]);           % тахогенератор
h6=tf(57.3);                          % основная обратная связь
% объединение звеньев в систему
sys=append(h1,h2,h3,h4,h5,h6);
% установление связей между звеньями
Q=[2 1 -6 -5; 3 2 -4 0; 6 3 0 0; 5 2 -4 0];
inputs=[1 4];                          % внешние входы
outputs=[3];                           % выход
sysc=connect(sys,Q,inputs,outputs);    % получение модели
                                       % системы с учетом связей
Hc=tf(sysc)                            % передаточная функция
                                       % (для контроля решения)
% получение минимальной реализации: сокращение общих множителей
%числителя и знаменателя
syse=minreal(sysc);
[sysb,g]=balreal(syse);                % балансировка
Hb=tf(sysb)                            % для контроля решения
```

Функция balreal определяет т.н. сбалансированную модель системы, которая имеет равные и диагональные грамианы управляемости и наблюдаемости. Их диагональными элементами являются составляющие вектора g. При выполнениии команды balreal получено

```
    g = 0.5574
        0.0667
        0.0096
        0.0000
```

Малые значения двух последних (3 и 4) элементов вектора g указывают, что две переменные состояния слабо связаны со входом и выходом модели. Поэтому их можно удалить с помощью функции modred, понизив порядок модели, для чего в числе аргументов modred указывают соответствующие составляющие вектора g (3 и 4). Отметим, что редуцированная модель системы имеет второй порядок.

```
sysr=modred(sysb,[3 4],'del');           % понижение порядка
Hr=tf(sysr)                              % для контроля решения
bode(syse,'-',sysr,'x')                  % диаграммы Боде
gtext('Частотные характеристики syse и sysr') % надписи
pause
step(syse,'-',sysr,'x'), grid            % переходный процесс
gtext('for syse и sysr')                 % надписи
```

Как видно из рис. 8.14 и 8.15 частотные характеристики исходной и редуцированной моделей различаются в области высоких частот, однако переходные характеристики весьма близки.

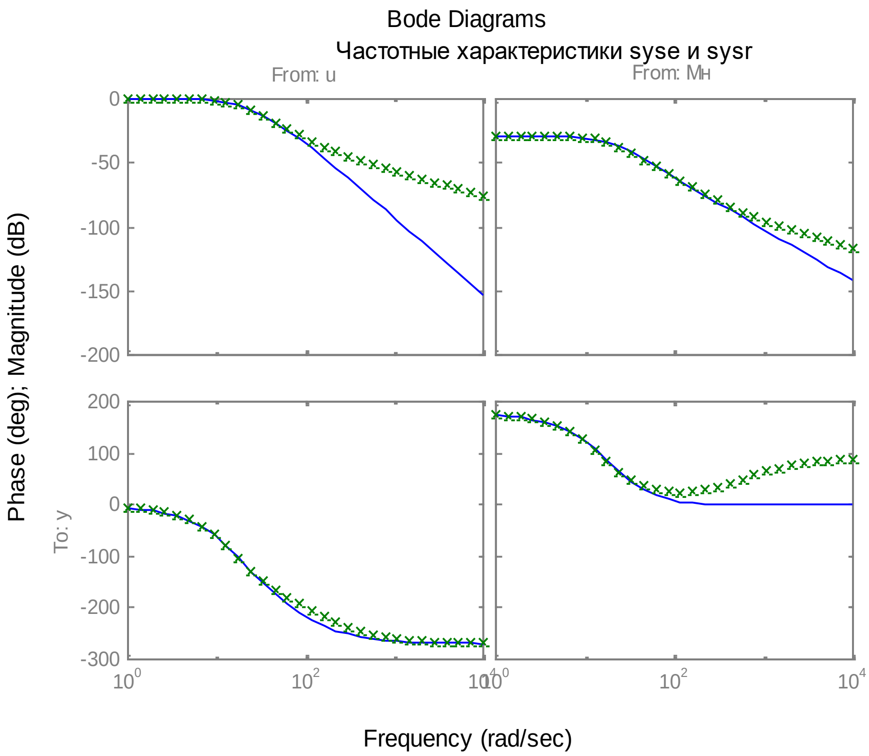


Рис. 8.14

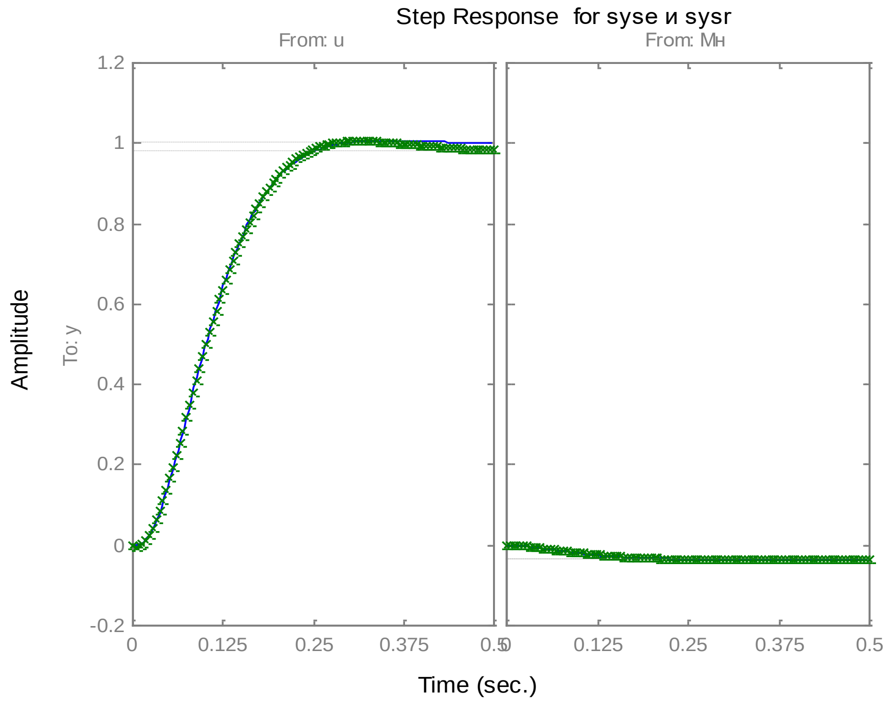


Рис. 8.15

Для этой же следящей системы (не производя редукции модели) определим влияние обратной связи по скорости на характер процессов отработки задающего воздействия. Передаточную функцию системы получим другим способом, используя алгебраические преобразования и функцию feedback.

```
% следящая система (вход - задание, выход - угол поворота)
% влияние обратной связи по скорости на качество процессов;
% на одном графике - пять переходных процессов
% (для различных k)
hold on
for k=0:0.002:0.006;  % коэффициент передачи тахогенератора
h1=tf(57.3);          % измерительный элемент
h2=tf(100,[0.01 1]);  % усилитель
h3=tf(8,[0.2 1 0]);         % двигатель
h2_3=h2*h3;                 % усилитель-двигатель
h4=tf([k 0],[1]);           % тахогенератор
h5=tf(0.001);               % редуктор
h23_4=feedback(h2_3,h4);    % усилитель и двигатель
                            % с обратной связью
sys=h1*h23_4*h5;            % разомкнутая система
H=feedback(sys,1);          % замкнутая система
t=0:0.01:3;
y=step(H,t);                % переходная характеристика
plot(t,y);
xlabel('t, сек'), ylabel('y')   % надписи
title('Переходные характеристики при k = 0:0.002:0.006)');
end
```

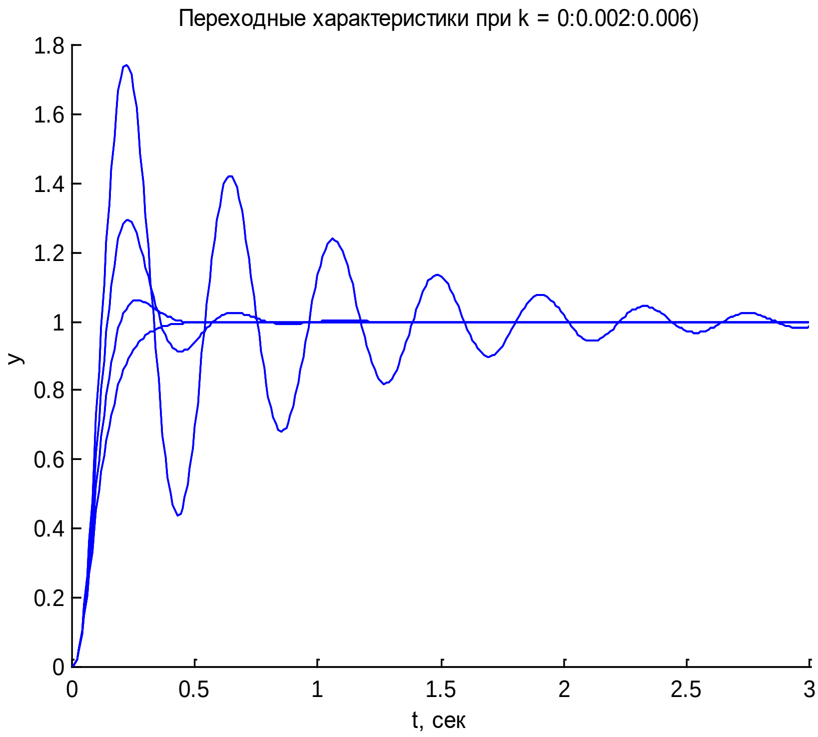


Рис. 8.16

В зависимости от требований к процессу управления (рис. 8.16) можно выбрать величину обратной связи.

Пример 2.

Определить область устойчивости системы с характеристическим полиномом

$$q = p^3 + (x - 1.2)p^2 + (y - 0.8x + 0.48)p + (0.16x - 0.4y + 0.936)$$

в плоскости варьируемых параметров (x, y).

Для решения этой задачи воспользуемся программой `stabreg(q,range_x,range_y)`, которая приведена в приложении.

Входные данные запишем в виде m-файла, который назовем test_stab.

```
% test_stab
echo on
% характеристический полином
q='[1, x-1.2, y-0.8*x+0.48, 0.16*x-0.4*y+0.936]';
x=[0.1:0.1:8];               % пределы изменения параметра x
y=[0.1:0.1:6];               % пределы изменения параметра y
```

Из командного окна Matlab вызовем этот файл, а затем – программу построения границ области устойчивости.

```
» stabreg(q,x,y)
```

Граница области устойчивости показана на рис. 8.17.

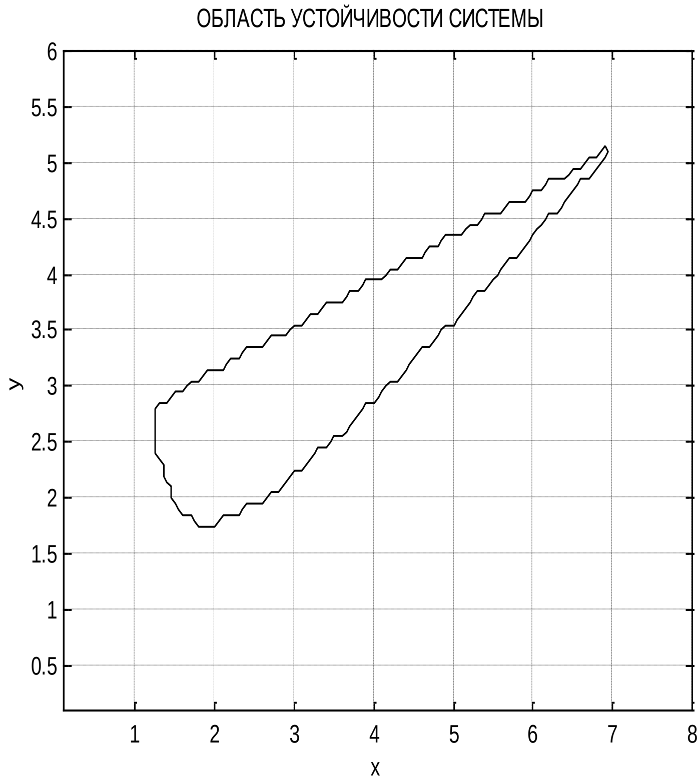


Рис. 8.17

Пример 3.

Провести Д-разбиение плоскости параметров (x, y) для системы из примера 2. Применим программу D-com (см. Приложение).

```
% Пример Д-разбиения плоскости двух параметров
echo on
q = '[1, x-1.2, y-0.8*x+0.48, 0.16*x-0.4*y+0.936]';
x = [0:0.1:10];
y = [0:0.1:10];
dcom( q, x, y )
```

После вывода на экран границ областей с различным числом правых корней с помощью мыши производится разметка этих областей – указывается число правых корней в пределах каждой из областей, на которые разбита плоскость параметров.

Картина Д-разбиения показана на рис. 8.18.

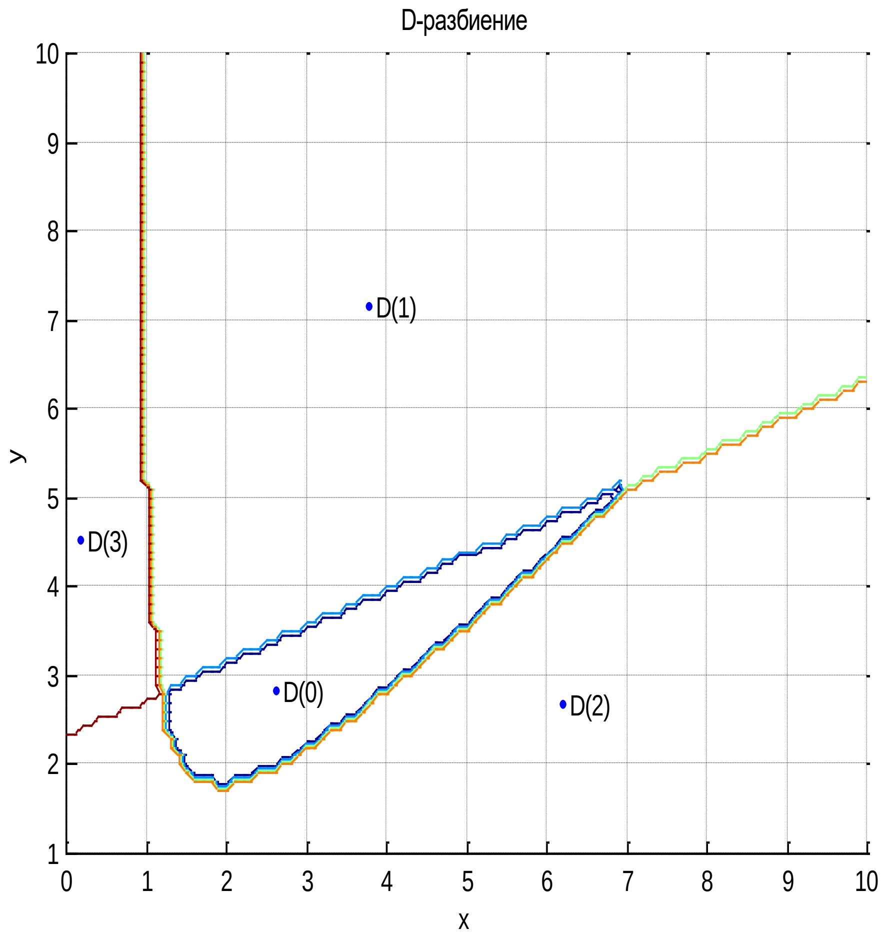


Рис. 8.18

Пример 4.

Двигатель внутреннего сгорания

Рассмотрим задачу выбора оптимальных настроек ПИ-регулятора в системе регулирования двигателя внутреннего сгорания [9]. Структурная схема системы дана на рис. 8.19.

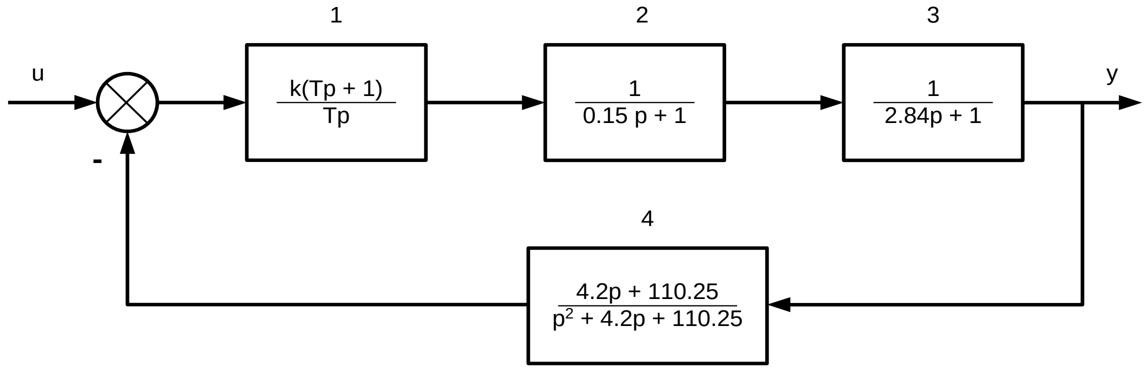


Рис. 8.19

1 – ПИ - регулятор; 2, 3 - объект управления; 4 - механический (центробежный) датчик обратной связи;

u - задающее воздействие; y - выходная величина (частота вращения)

Составим программу исследования. Настройки регулятора будем определять на основе корневых критериев качества с использованием программы `rtanalti`. (Описание этой программы дано в приложении).

Предварительно требуется определить передаточную функцию замкнутой системы и указать область вариации параметров регулятора.

Числитель передаточной функции замкнутой системы

$R = kTs^3 + (k+4.2kT)s^2 + (110.25kT+4.2k)s + 110.25k,$

знаменатель:

$Q = 0.284Ts^5 + 4.1328Ts^4 + 44.659Ts^3 + (332.535+4.2k)Ts^2 +$
$+ (110.25kT+110.25T+4.2k)s + 110.25k.$

Исходные данные для программы `rtanalti` вводятся с помощью m-файла, который записывают в виде функции `[R,Q,area]=dvs(a)`. Отметим, что имя файла может отличаться от имени функции.

```
function [R, Q, area] = dvs( a )
% Функция, формализующая исходные данные для программы rtanalti
% Файл настраивается пользователем
% a - текущее значение вектора варьируемых параметров системы
% a = [a(1) a(2)]
% R,Q - числитель и знаменатель передаточной функции,
% вычисленные в текущей точке a
% area - область вариации параметров a(1) и a(2). Задается
% пользователем в формате: [минимум a(1),шаг a(1),максимум a(1);
% минимум a(2),шаг a(2), максимум a(2)]
%
% NB! Знаменатель передаточной функции необходим для вычисления
% степеней устойчивости и колебательности.
% Числитель используется для построения переходных характеристик
% в выбранной точке на плоскости двух варьируемых параметров
% системы

% Задание области вариации параметров a(1) и a(2)
area = [ 0 0.1 15; 0 0.1 5 ];
% В этом файле можно переобозначить варьируемые параметры
k = a(1); T = a(2);
% Задание коэффициентов числителя и знаменателя п.ф.
% Они записываются по убыванию степеней s
R = [ k*T k+4.2*k*T 110.25*k*T+4.2*k 110.25*k ];
Q = [ 0.284*T 4.1328*T 44.659*T (332.535+4.2*k)*T...
      110.25*k*T+110.25*T+4.2*k 110.25*k ];
```

Вызовем программу rtanalti. В качестве входных параметров укажем имя файла исходных данных.

```
» rtanalti('dvs')
```

После окончания вычислений в интерактивном режиме производится пометка линий равной степери устойчивости и колебательности.

Затем выбирается точка на плоскости параметров, для которой производится дальнейший анализ (построение переходного процесса, определение корней полинома и т.д.)

Рабочая информация при выполнении программы отображается в командном окне Matlab.

```
Текущие значения параметров системы:
 a1 = 5.336226
 a2 = 1.000000
Значение степени устойчивости: 1.234210
Значение степени колебательности: 6.918893
```

Результаты расчетов приведены на рис. 8.20 – 8.22. Как видно из переходной характеристики (рис. 8.22), время переходного процесса не превышает значения $3/\eta$, где η - степень устойчивости, и равно 3 сек. При этом перерегулирование $\sigma < 15\%$.

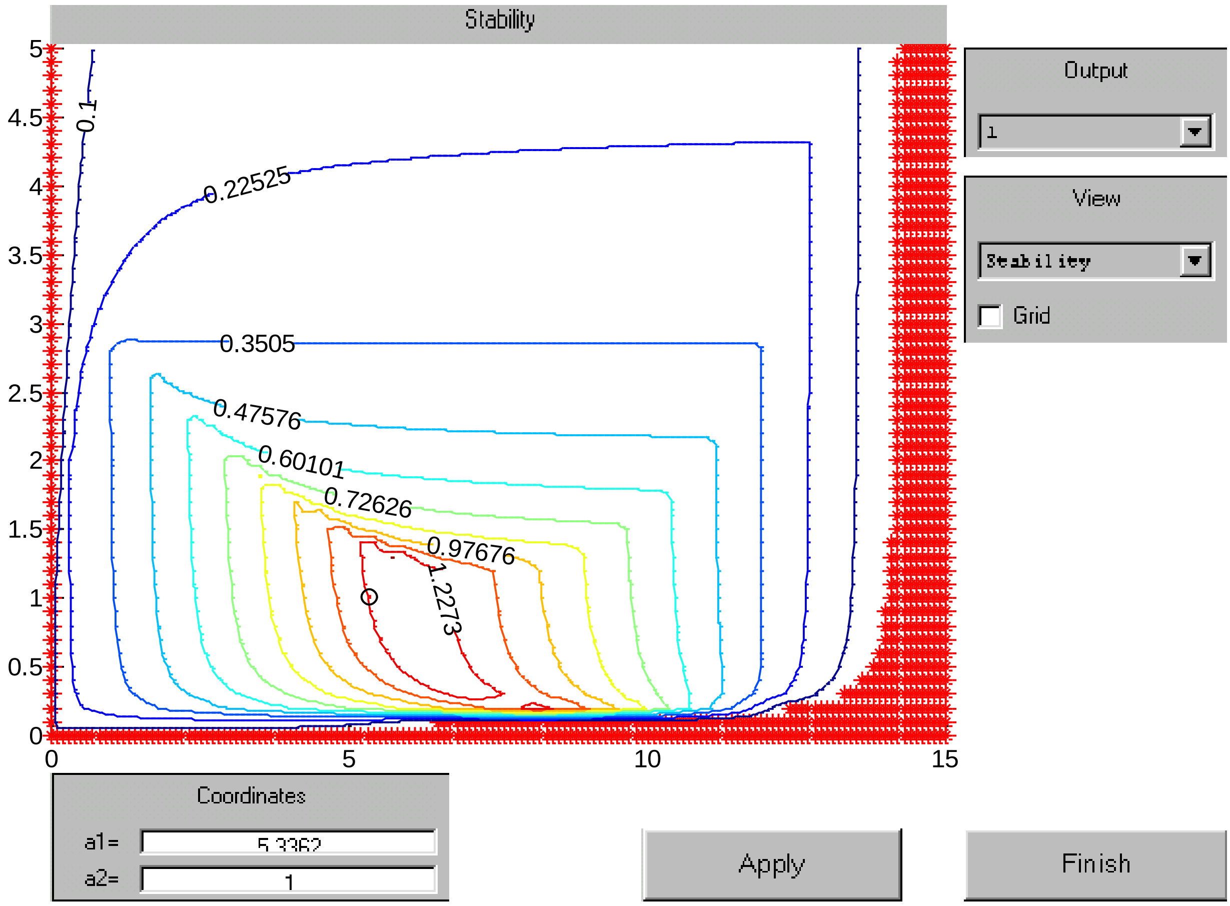


Рис.8.20

На рис. 8.20 показан экран дисплея при выводе линий равного уровня степени устойчивости. Справа и внизу основного поля видны кнопки управления. В левом нижнем углу указаны координаты выбранной точки на плоскости параметров регулятора. (Эта точка на графике отмечена кружком).

На рис. 8.21 показан экран при выводе линий равной степени колебательности. Соответствующая переходная характеристика приведена на рис. 8.22.

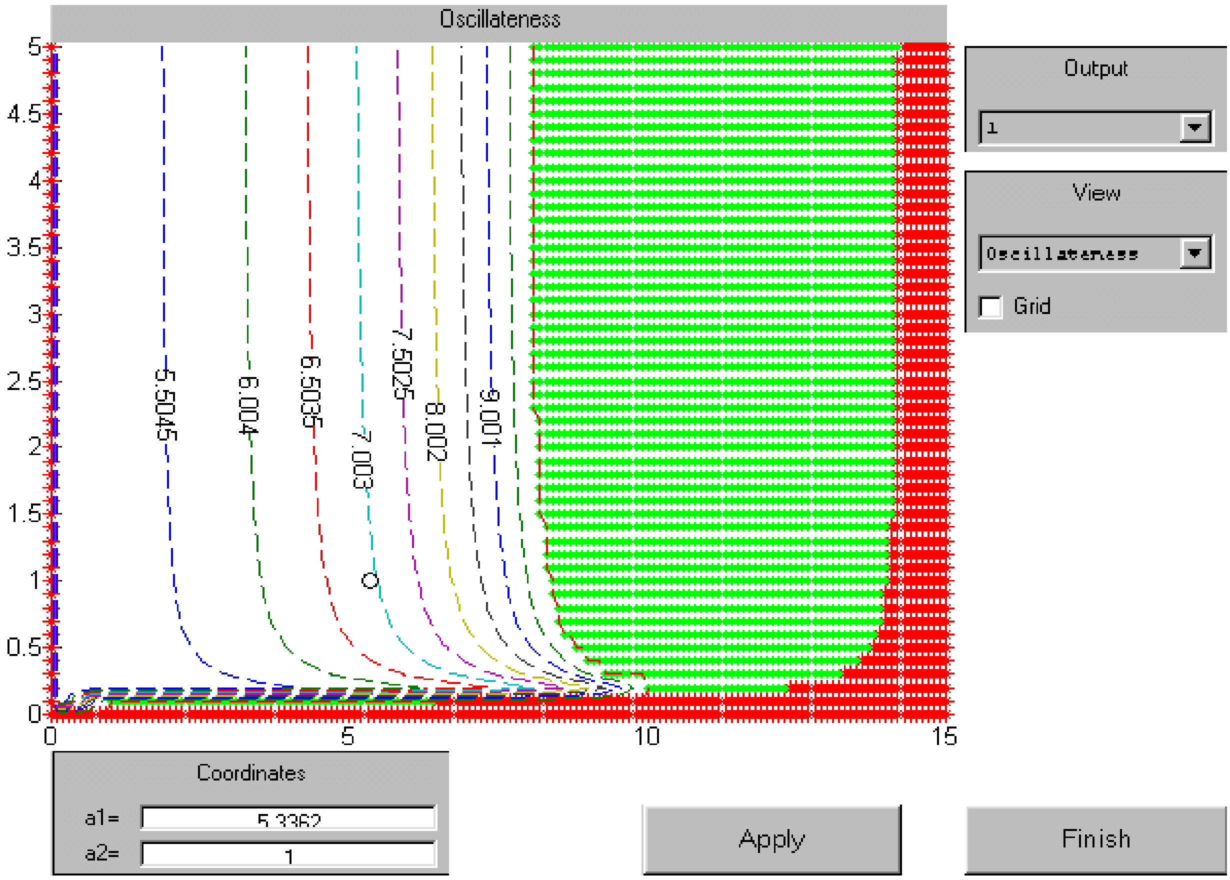


Рис. 8.21

Выберем другую точку на плоскости параметров.

```
Текущие значения параметров системы в этой точке:
 a1 = 1.919740
 a2 = 1.402778
Значение степени устойчивости: 0.517427
Значение степени колебательности: 5.484464
```

Переходная характеристика для этих настроек регулятора показана на рис. 8.23.

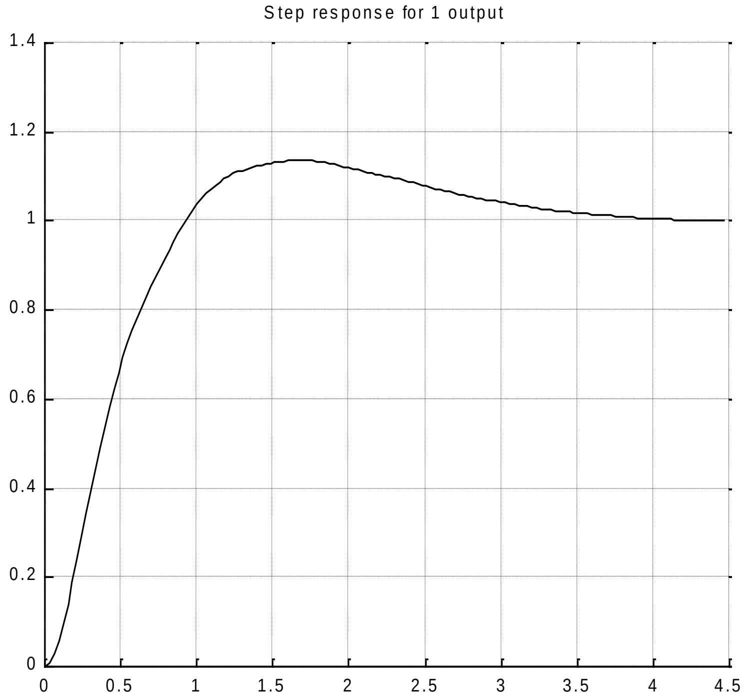


Рис. 8.22

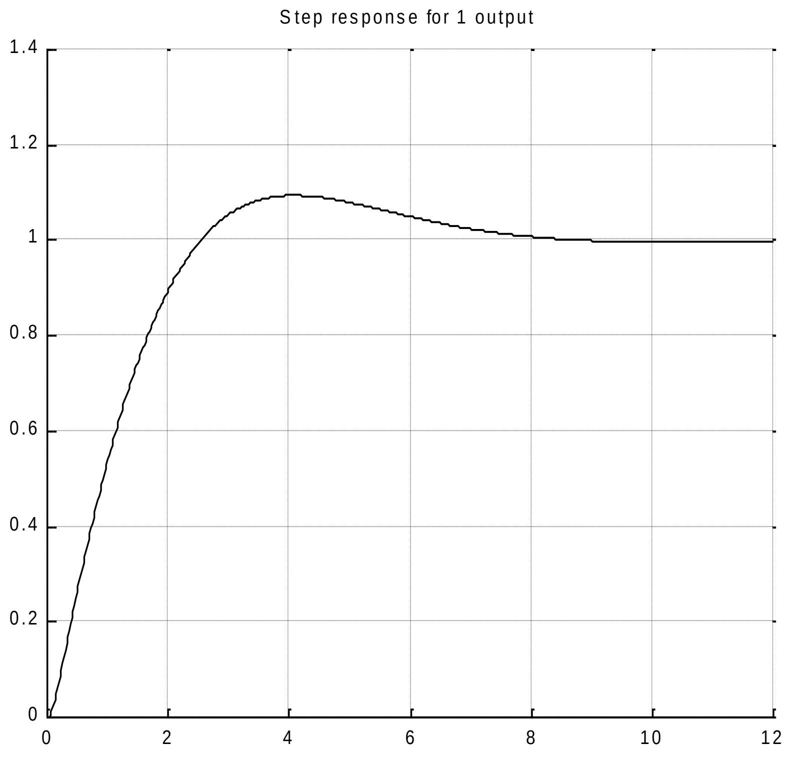


Рис. 8.23

Заинтересованному читателю предлагаем сравнить значения настроек регулятора с полученными в [9] по интегральным критериям качества.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Программа routh

```
function [rr] = routh( C );
%ROUTH - определение устойчивости системы по критерию Рауса
% C - вектор коэффициентов характеристического полинома
% в исследуемой точке
% rr - количетво правых корней

rr = 0;                  % Предполагается, что правых корней нет
% Проверка положительности всех коэффициентов характеристического
% полинома
if C( 1 ) < 0            % Коэффициент при старшей степени
                         % отрицательный?
    C = - C;             % Изменение знаков всех коэффициентов
end
% Построение и анализ таблицы Рауса
N = length( C );         % Количество строк в таблице Рауса
M = fix( (N-1) / 2 ) + 1; % Количество столбцов в таблице Рауса
R = zeros( N , M );      % Резервирование памяти для таблицы
                         % и заполнение ее нулями
C1 = [C 0 0 0];          % Формирование модифицированного
                         % полинома
for I = 1 : 2 : M*2      % Нечетные индексы
    R( 1, ceil( I / 2 ) ) = C1( I );  % Построение первой строки
                                      % таблицы
end

for I = 2 : 2 : M*2           % Четные индексы
    R( 2, I / 2 ) = C1( I );  % Построение второй строки таблицы
end

for I = 3 : N                 % Цикл по строкам
    L = R( I - 2, 1 ) / R( I - 1, 1 );     % Множитель для строки
% Первый элемент в строке
    R( I, 1 ) = R( I - 2, 2 ) - L * R( I - 1, 2 );
% Проверка смены знака первого элемента строки текущего столбца
    if R( I, 1 ) * R( I-1, 1 ) < 0
     rr = rr + 1;           % Соответствует наличию правого корня
    end

    M1 = M - fix((I - 1 )/2);  % Индекс последнего ненулевого
                               % элемента строки
    for K = 2 : M1             % Цикл по столбцам
        R( I, K ) = R( I - 2, K + 1 ) - L * R( I - 1, K + 1 );
    end
end                            % Присвоение признака устойчивости

if rr == 0
  'Система устойчива.';        % Вывод сообщения об устойчивости
else
  disp( sprintf( '%s %d %s', 'Система неустойчива. Имеется', rr,
  'правых корней.' ) );
end
```

Программа stabreg

```
function [] = stabreg( q_string, range_x, range_y )
% STABREG (сокр. stability region).Построение границы области
% устойчивости по двум параметрам x, y для системы
% с характеристическим уравнением, заданным в строке q_string
% q_string - строка, содержащая символьную запись знаменателя
% передаточной функции как функции варьируемых параметров x и y
% range_x - массив абсцисс в формате [минимум:шаг:максимум]
% range_y - массив ординат в формате [минимум:шаг:максимум]
% Разработал Б.Крассий

n = length( range_x );
m = length( range_y );
P = zeros( m, n );      % Матрица, соответствующая плоскости двух
                        % параметров, ненулевые значения элементов
                        % которой говорят о неустойчивости системы
% Сканирование и проверка на устойчивость в плоскости (x,y)
for i = 1:n
    for j = 1:m
        x = range_x( i );           % Текущая абсцисса
        y = range_y( j );           % Текущая ордината
        q = eval(q_string);         % Значение знаменателя в
                                    % текущей точке
        p = roots( q );             % Полюсы в текущей точке
        if max( real( p ) ) < 0
            P( j, i ) = 0;          % Система устойчива
        else
            P( j, i ) = 1;          % Система неустойчива
        end
    end
end
% Построение границ области устойчивости.
% Параметр 'k' устанавливает цвет линии - черный.
contour( range_x, range_y, P, 1, 'k' ); % построение линий уровня
grid on;
xlabel( 'x' ), ylabel( 'y' );
```

Программа Dcom

```
function [] = dcom( q_string, range_x, range_y )
% DCOM (сокр. D-decomposition). Построение D-разбиения в
% пространстве двух варьируемых параметров x,y системы
% с характеристическим уравнением,заданным в строке q_string
%
% q_string  - символьная запись знаменателя передаточной функции
% с двумя варьируемыми параметрами x и y
% range_x   - массив абсцисс в формате [минимум:шаг:максимум]
% range_y   - массив ординат в формате [минимум:шаг:максимум]
%
% Пример вызова:
% q_string = '[1, x-1.2, y-0.8*x+0.48, 0.16*x-0.4*y+0.936]';
% range_x = [0:0.1:10];
% range_y = [0:0.1:10];
```

```
% dcom( q_string, range_x, range_y );

n = length( range_x );
m = length( range_y );
P = zeros( m, n );       % Матрица, соответствующая плоскости
                         % двух параметров, ненулевые значения
                         % элементов которой говорят
                         % о неустойчивости системы
% Сканирование и проверка на устойчивость в плоскости (x,y)
for i = 1:n
   for j = 1:m
      x = range_x( i );        % Текущая абсцисса
      y = range_y( j );        % Текущая ордината
      q = eval( q_string ); % Значение знаменателя в текущей
                            % точке
      P( j, i ) = rr( q );      % Количество правых полюсов
                                % в данной точке
   end
end
% Построение окна
F = figure;
A = axes( 'Parent', F, ...
   'Position',[0.1 0.1 0.85 0.85], ...
   'Units', 'normalized', ...
   'NextPlot', 'add', ...
   'ButtonDownFcn', 'dcom_action;', ...
   'Tag', 'Axes', ...
   'UserData', q_string );
% Построение графика D-разбиения
contour( range_x, range_y, P );
xlabel( 'x' ), ylabel( 'y' );
title( 'D-разбиение' );
grid on;
```

В программе используются функции dcom_action и rr

```
function [] = dcom_action()
% DCOM_ACTION - функция обработки нажатия левой кнопки мыши
% в активном окне
h = gcbo;                 % Объект, для которого вызван обработчик
cp = get( h, 'CurrentPoint' );   % Указываемая мышью точка
x = cp( 1, 1 ); y = cp( 1, 2 );
q_string = get( h, 'UserData' ); % Исследуемый полином
n = rr( eval( q_string ) );      % Количество правых полюсов
s = sprintf( ' D(%i)', n );      % Подготовка строки
text( x, y, s )';                % Вывод строки на график
plot( x, y, '.' );               % Вывод текущей точки на график

function n = rr( q )
% RR (RightRoots) вычисляет n - количество правых полюсов
% полинома q

p = roots( q );
k = find( real( p ) >= 0 );    % Индексы полюсов, расположенных
                               % в правой полуплоскости
if( isempty( k ) == 0 )        % Имеется length(k) правых полюсов
   n = length( k );
else
   n = 0;                      % Правые полюса отсутствуют
```

```
end
```

Программа rtanalti

Программа RTANALTI (RooT ANALisys of Linear Time Invariant systems) предназначена для расчета линейных непрерывных многомерных систем автоматического управления и работает в интерактивном режиме.

Возможности программы:

- представление САУ в виде передаточной функции (для MISO моделей) или в пространстве состояний (для MIMO моделей);
- задание полных моделей (числителя R и знаменателя Q передаточной функции, матриц A, B, C, D) или только характеристического полинома или матрицы объекта A;
- построение D-разбиения и графиков линий равного уровня степеней устойчивости и колебательности в заданном пространстве двух параметров системы;
- построение для указываемых точек на графиках переходных функций, вывод информации о корнях характеристического полинома, степенях устойчивости и колебательности;
- сохранение результатов расчета в файле и представление результатов предыдущих расчетов;
- управление графиками, настройка объема производимых расчета.

Запуск программы производится набором в командной строке

```
rtanalti('data'),
```

где data - имя файла исходных данных.

Файлы исходных данных могут называться как угодно, но должны иметь такую же структуру, как файлы data или data1 (см. ниже примеры их составления).

Для примера можно запустить `rtanalti('data')` или `rtanalti('data1')` для расчета САУ, заданной в виде передаточной функции или в пространстве состояний соответственно.

Окна с графиками и управлением появляются по окончании расчета. После этого надо разметить линии равного уровня (окончание разметки - нажатие клавиши Enter), и далее можно переходить к анализу. Выбор координат исследуемой точки производится мышью на графике.

Для построения переходной характеристики надо нажать кнопку Apply. Можно также пользоваться меню Options. Диагностические сообщения и прочая рабочая информация выводятся в командное окно MATLAB.

Примеры программ задания входных данных.

```
function [R,Q,area] = data(a)
%DATA - задание исходных данных
% Файл создается пользователем
% a(a1, a2) - вектор варьируемых параметров системы
% R, Q - числитель и знаменатель передаточной функции

% Задание области вариации параметров a1,a2.
% Формат: [минимум, шаг, максимум]
area = [ 0 0.1 10; 0 0.15 15 ];
% Задание коэффициентов числителя и знаменателя п.ф.,
% зависящих от параметров. Записываются по убыванию степеней
R = [1; 2];                                   % Числитель п.ф.
Q = [2 10*a(1)*a(2)+1 10*a(1) 10*a(1) ];      % Знаменатель п.ф.

function [A,B,C,D,area] = data(a)
%DATA1 - задание исходных данных
%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
% Файл создается пользователем
```

```
% a(a1, a2)  - вектор варьируемых параметров системы
% A,B,C,D - матрицы системы в переменных состояния
% Задание области вариации параметров A и B.
% Формат: [минимум, шаг, максимум]
area = [ 0 0.1 10; 0 0.6 15 ];

% Задание матриц, зависящих от параметров
A = [0 1 0; 0 0 1;-0.5*10*a(1)-0.5*10*a(1)-0.5*(10*a(1)*a(2)+1)];
B = [0 0 0.5]';
C = [1 0 0];
D = [0];
```

Справки по программе можно получить по команде `help rtanalti.`
Программу разработал Б.А. Крассий.

Программа построения фазового портрета и переходных процессов

```
function PH_PORT
clear
clc
%
disp('PH_PORT - программа построения фазового портрета и переходных
процессов')
disp ('----------------------------------------------------------')
disp(' Модель системы в форме уравнений состояния задается')
disp('в m-файл-функции (по образцу DATASYS)')
disp(' Пределы области, в которой производится построение фазовых
траекторий,')
disp(' а также время интегрирования задаются в самой программе')
disp(' Для начала построения фазового портрета нажмите ENTER,')
disp(' выберите начальные условия, нажмите LEFT BUTTON,')
disp(' повторите построение траекторий для новых начальных условий')
disp(' так, чтобы получить весь фазовый портрет')
disp(' Для окончания построения нажмите RIGHT BUTTON.')
disp('---')
disp('Нажмите любую клавишу, чтобы продолжить')

A = input('\n Введите имя файла данных:   ','s');
tspan=20;
x0=[-0.1 0.1]'; % начальные условия
button=1;
m = 4;   % масштабный коэффициент
% m = input('\n Введите масштаб графика по осям x(1) и x(2):   ');
% нанесение внутренних осей координат
p=m*[-1 0;1 0];
plot(p(:,1),p(:,2))
hold on
plot(p(:,2),p(:,1))
axis(m*[-1 1 -1 1])  % пределы изменения координат
xlabel('{\it{x}}_1','Fontsize',12)
ylabel('{\it{x}}_2','Fontsize',12)
title('Phase portrait of SYS','Fontsize',12), grid
set(gca,'Fontsize',12)
while(button==1)
 % выбор начальной точки левой клавишей мыши
 % правой клавишей останавливается решение
    [t,x]=ode23s(A,tspan,x0);
    plot(x(:,1),x(:,2))
    [x1,x2,button]=ginput(1);
```

```
    x0=[x1 x2]';
end
disp('Строим переходные процессы')
pause
%hold on
% Построение переходных процессов
 x0 = input('\n Введите начальные условия 1:  ');
 t0 = input('\n Введите время вычисления:  ');
    [t,x]=ode23s(A,t0,x0);
 figure
 subplot(2,1,1), plot(t,x(:,1),'-',t,x(:,2),'-.'), grid
 xlabel('t,sec')
 title('Transient Responce 1'), legend('x_1','x_2')
   pause
 disp('Построение переходного процесса для других начальных условий')
x0 = input('\n Введите начальные условия 2:   ') ;
t0 = input('\n Введите время вычисления:  ') ;
    [t,x]=ode23s(A,t0,x0);
subplot(2,1,2), plot(t,x(:,1),'-',t,x(:,2),'-.'),grid
xlabel('t,sec')
 title('Transient Responce 2'), legend('x_1','x_2')

  disp ('__________________________________________ ')

  disp ('Для построения других процессов запустите программу снова')
```

Пример программы задания входных данных DATASYS

Файл данных должен содержать правые части уравнений состояния. Имя файла должно совпадать с именем функции.

```
function dx = DATASYS(~,x)
dx = [x(1)+x(2)-x(1)*(x(1)^2+x(2)^2);-x(1)+x(2)-x(2)*(x(1)^2+x(2)^2)];
```

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления.- СПб.: изд-во «Профессия», 2004.
2. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления.- М.: Наука, 1973.
3. Юревич Е.И. Теория автоматического управления.- СПб.: изд-во «БХВ - Петербург», 2007.
4. Ким Д.П. Теория автоматического управления, тома 1 и 2. М.: Физматгиз, 2007.
5. Певзнер Л.Д. Практикум по теории автоматического управления. - М.: Высшая школа, 2006.
6. R.Dorf, R.Bishop, Modern Control Systems, 10th ed., Prentice Hall, 2010.
   (Русский перевод: Р. Дорф, Р.Бишоп. Современные системы управления. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2002)

НЕСТЕРОВ Сергей Александрович, НИКИТИН Кирилл Вячеславович

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ
С ПРИМЕНЕНИЕМ СРЕДЫ MATLAB

Учебное пособие

Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 8,5.

Институт компьютерных наук и кибербезопасности СПбПУ
195251 Санкт-Петербург, Политехническая ул., 21