Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

И. Ю. Вандакуров

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ «ТЕХНОСФЕРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ». ТЕМА: ВЕРОЯТНОСТЬ (ДО СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ)

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2025

УДК 519.2(075.8)

Вандакуров И.Ю. **Конспект лекций по высшей математике для студентов по направлению подготовки «Техносферная безопасность». Тема: вероятность (до случайной величины)**: учеб. пособие / И. Ю. Вандакуров – СПб., 2025. – 53 с.

Учебное пособие соответствует ФГОС ВО по дисциплине «Высшая математика» по направлению подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность». Содержание несколько шире, чем излагаемое на аудиторных занятиях, в особенности это касается студентов-заочников в связи с малым количеством аудиторных часов. Рассматривается большое количество примеров, что может быть полезно при подготовке как к экзамену, так и к контрольным работам.

Данное пособие является продолжением пособия автора [10], посвященного комбинаторике и задачам на классическое определение вероятности. Предназначено для студентов Инженерно-строительного института по направлению подготовки 20.03.01, а также для студентов института биомедицинских систем и биотехнологий по направлениям подготовки 19.03.01, 19.03.03 и 19.03.04.

Издание второе, переработанное и дополненное.

Содержание:

Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений, т.е. явлений, результат которых невозможно точно предсказать. Например, невозможно точно предсказать, какой стороной упадет подброшенная монета или каков будет уровень воды в реке Неве в данный день в данное время суток или сколько людей войдет в вестибюль станции метро «Политехническая» в данный день в данный интервал времени и т.д. В теории вероятностей с помощью математических методов стараются выявить закономерности случайных явлений, в частности, при их массовом повторении. Основные понятия теории вероятностей: эксперимент, событие, вероятность, случайная величина.

Под экспериментом (опытом, испытанием) в теории вероятностей подразумевается наблюдение некоторого явления, результат которого невозможно точно предсказать. Например, производятся несколько выстрелов по цели в стабильных условиях, и нас интересует число попаданий в цель. Или монета подбрасывается несколько раз, и нас интересует число выпадений герба. Или из партии деталей случайным образом выбирают (отсюда и слово «выборка») несколько деталей для проверки и нас интересует число бракованных деталей в этой выборке. Или с помощью жребия из трудового коллектива выбирают тех, кому достанутся бесплатные профсоюзные путевки в дом отдыха и т.д.

Предполагается, что эксперимент можно повторять, но в стабильных условиях. Если условия проведения эксперимента изменились, то это будет уже другой эксперимент.

Проще всего обстоит дело при изучении азартных игр (от французского hasard – случайность) – карты, кости, домино, лото, подбрасывание монеты, лотерея, рулетка и т.д. Сюда же можно отнести выбор по жребию (своего рода лотерея). Подбрасывание монеты или извлечение карты из хорошо перемешанной колоды можно повторять любое число раз в стабильных условиях. К таким задачам хорошо подходит классическое определение вероятности. Именно поэтому в теории вероятностей так много примеров из азартных игр.

Случайные события и основные операции над ними

Случайное событие – это то, что может произойти, а может и не произойти в результате эксперимента. Вообще говоря, событие – это неопределяемое понятие (предполагается, что каждый человек понимает, что это такое). В книгах по теории вероятностей можно встретить и такого рода определения: случайное событие – это подмножество пространства Ω элементарных исходов эксперимента, но мы не будем углубляться в эту тему.

Достоверное событие I – это событие, которое **непременно** произойдет в результате эксперимента.
Невозможное событие $\varnothing$ – это событие, которое **никогда** не произойдет в результате эксперимента.

Пример Подброшены две игральные кости, X – сумма выпавших очков. Тогда событие (X<13) будет достоверным, событие (X<2) будет невозможным, а событие (X<6) будет случайным.

Случайные события принято обозначать большими буквами латинского алфавита A, B, C,… Как уже упоминалось, за достоверным событием закреплен символ I, за невозможным – знак пустого множества $\varnothing$ [1], хотя иногда используют и другие буквы и символы, например, достоверное событие часто обозначают U или Ω.

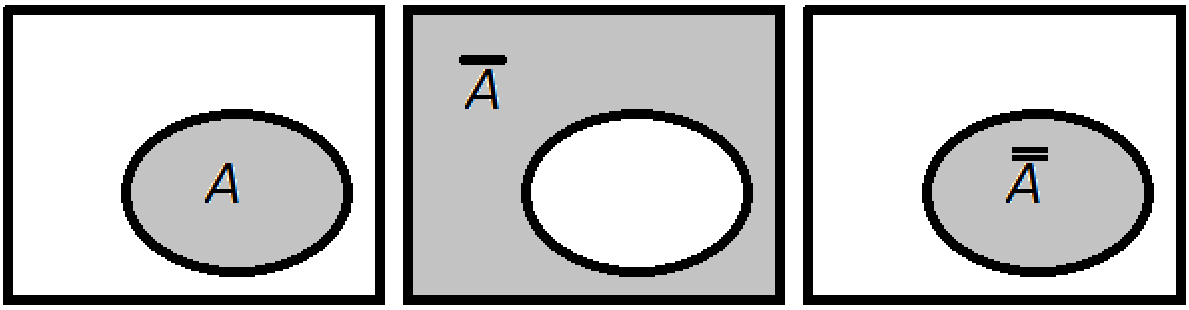
Диаграммы Венна (Эйлера-Венна)

Достоверное событие будем изображать квадратом или прямоугольником, а случайные события – некоторыми областями в этом квадрате. Эти абстрактные обозначения можно сопоставить с выстрелом по квадратной мишени с изображенной на ней областью A (при условии, что попадание в квадрат гарантированно). Тогда случайное событие A и будет попаданием в эту область A. В этой модели вопрос о том, принадлежит ли граница области самой области или нет, лишен смысла – попасть случайной точкой в бесконечно тонкую линию практически невозможно.

Событие $\overline{A}$ (черточка сверху – знак отрицания) называется **дополнительным** или **противоположным** событию A, оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

Отметим очевидное свойство $\overline{\overline{A}} = A$ (в логике говорят: двойная инверсия не меняет значение переменной)

На диаграммах Эйлера-Венна события A, $\overline{A}$ и $\overline{\overline{A}}$ изображаются так

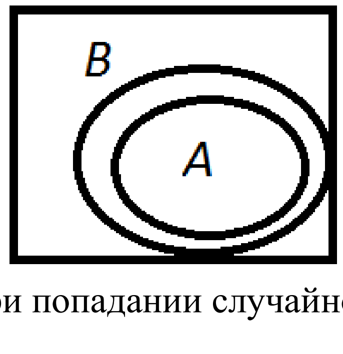


<u>Пример</u> Произведен один выстрел по цели, событие A – попадание. Тогда противоположное событие $\overline{A}$ - промах.

<u>Пример</u> Произведены два выстрела по цели, событие A – два промаха. Тогда противоположное событие $\overline{A}$ - хотя бы одно попадание.

<u>Пример</u> Подброшены две игральные кости, X – сумма выпавших очков. Пусть события $A(X=1)$ и $B(X<6)$. Тогда $\overline{A}\,(X>1)$, $\overline{B}\,(X>5)$.

Говорят, что событие A **благоприятно** (благоприятствует) событию B, если с наступлением события A непременно наступает и событие B. В этом случае говорят также, что A **влечет** B или что A является **частным случаем** B. Обозначение $A \subset B$, на диаграммах Венна область A целиком содержится в области B



при попадании случайной точки в область A обязательно попадаем и в B.

Очевидное свойство: Если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$

Это свойство **<u>транзитивности</u>** (если Вы летите из СПб в Москву, а затем из Москвы в Сочи, то Вы летите из СПб в Сочи **<u>транзитом</u>** через Москву, так и здесь, $A \subset C$ «транзитом» через B).

<u>Пример</u> Из колоды 36 карт извлечена одна. Пусть события A(это бубна), B(это карта красной масти). Тогда $A \subset B$

<u>Пример</u> Подброшены две игральные кости, X – сумма выпавших очков. Пусть события $A(X<4)$, $B(X<6)$. Тогда $A \subset B$

<u>Пример</u> Извлечен бочонок лото с номером n. Пусть события A(n делится на 6), B(n делится на 3). Тогда $A \subset B$

<u>Пример</u> Извлечен бочонок лото с номером n. События $A(15<n<20)$, $B(10<n<30)$, $C(18<n<40)$. Верны ли высказывания а) $A \subset B$, б) $A \subset C$?
<u>Ответ</u>: а) да б) нет

Если $A \subset B$ и одновременно $B \subset A$ то $A = B$ (A **эквивалентно** B). Иными словами, A эквивалентно B, если эти два события одновременно происходят или не происходят в результате эксперимента. На диаграммах Венна эквивалентные события изображаются одной и той же областью.

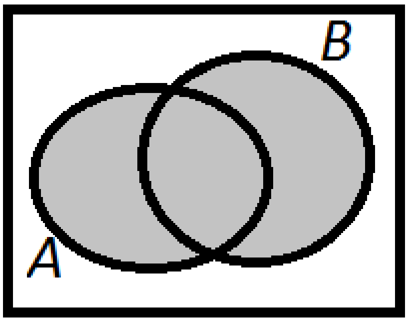
Очевидные свойства отношения эквивалентности событий:
$A = A$ (рефлексивность)
Если $A = B$ то $B = A$ (симметричность)
Если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$ (транзитивность)

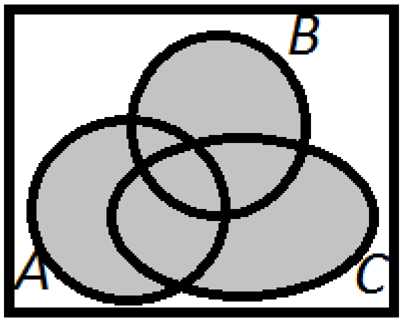
<u>Пример</u> Из колоды 36 карт извлечена одна. Пусть события A(это бубна или черва), B(это карта красной масти). Тогда $A = B$

<u>Пример</u> Подброшены две игральные кости, X – сумма выпавших очков. Пусть событие $A(X<3)$, событие $B(X=2)$. Тогда $A = B$

<u>Пример</u> Извлечен бочонок лото с номером n. Пусть событие A(n делится на 6), событие B(n делится на 2 и на 3). Тогда $A = B$

<u>Сумма</u> (объединение) нескольких событий это событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из суммируемых событий. Обозначение суммы событий $A+B$, $A+B+C$ (реже $A \cup B$, $A \cup B \cup C$). На приведенных ниже диаграммах Венна сумма событий окрашена серым

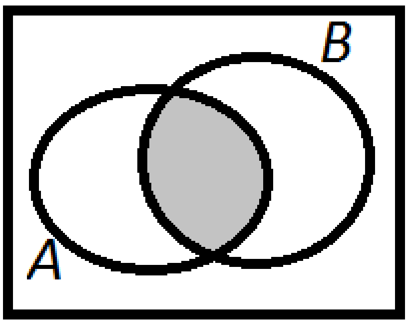


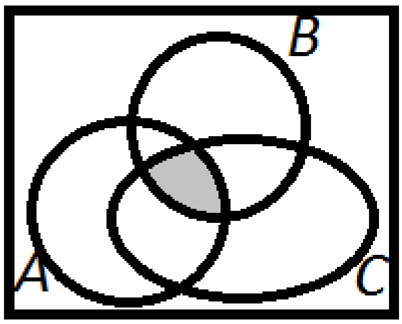


<u>Пример</u> Подброшены две игральные кости, X – сумма выпавших очков. Пусть событие $A(2<X<6)$, событие $B(4<X<10)$, событие $C(6<X<11)$. Тогда $A+B+C(2<X<11)$

<u>Пример</u> Из колоды карт извлечена одна. Пусть событие *A*(это бубна), событие *B*(это черва). Тогда *A*+*B*(это карта красной масти)

<u>Произведение</u> (пересечение, совмещение) нескольких событий это событие, которое происходит тогда и только тогда, когда **одновременно** происходят все перемножаемые события. Обозначение произведения AB, ABC (реже $A\cap B$, $A\cap B\cap C$). На приведенных ниже диаграммах Венна произведение событий окрашено серым





<u>Пример</u> Подброшены две игральные кости, X – сумма выпавших очков. Пусть события $A(2<X<7)$, $B(4<X<10)$, $C(5<X<11)$. Тогда $ABC(X=6)$

<u>Пример</u> Из колоды карт извлечена одна. Пусть событие *A*(это бубна), событие *B*(это дама). Тогда *AB*(это бубновая дама)

<u>Пример</u> n – натуральное число. Пусть событие *A*(n делится на 4), событие *B*(n делится на 5) и событие *C*(n делится на 6). Тогда *ABC*(n делится на 60)

<u>Пример</u> Извлечен бочонок лото с номером n. Пусть события $A(5<n<20)$, $B(10<n<30)$, $C(15<n<40)$. Найти а) $A+B$, б) $A+B+C$, в) AB г) ABC.
<u>Ответ</u>: а) $A+B(5<n<30)$ б) $A+B+C(5<n<40)$ в) $AB(10<n<20)$ г) $ABC(15<n<20)$

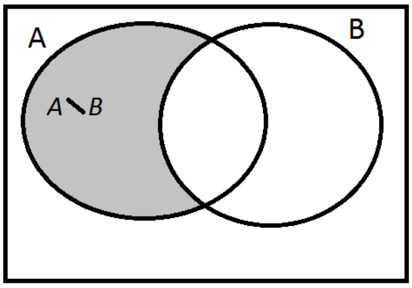
Отметим некоторые свойства суммы и произведения событий

$A+B = B+A$ (коммутативность сложения)
$(A+B)+C=A+(B+C)$ (ассоциативность сложения)
$A+\varnothing =A$
$AB = BA$ (коммутативность умножения)
$(AB)C=A(BC)$ (ассоциативность умножения)
$(A+B)C=AC+BC$ (дистрибутивность умножения относительно сложения)
$A\varnothing =\varnothing$
$AI =A$

Эти свойства совпадают со свойствами операций сложения и умножения чисел, если невозможное событие $\varnothing$ сопоставить с числом 0, а достоверное событие I сопоставить с числом 1. Однако эти аналогии не носят всеобъемлющий характер – следующие свойства операций над событиями для чисел не выполняются!

$A+A =A,$
$A+I =I,$
$A+\overline{A}=I.$
$AA =A,$
$A\overline{A}=\varnothing$,
$\overline{A+B}=\overline{A}\ \overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$
(последние две формулы называются правилами Де Моргана).

Разность событий $A \setminus B$ это событие, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A и одновременно не происходит событие B.



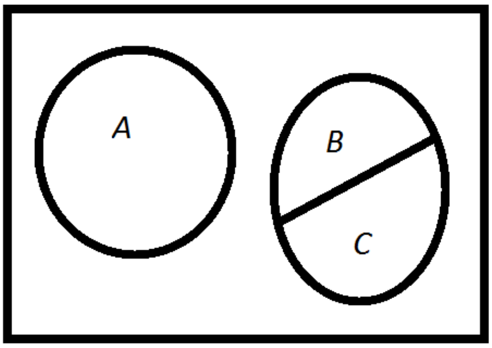
<u>Замечание</u> Во многих учебниках эта операция не используется, так как без нее легко обойтись, если заметить, что $A \setminus B=A\overline{B}$

Несколько событий называются **несовместными**, если они одновременно произойти не могут. Математическая запись
$AB=\varnothing, ABC=\varnothing, ABCD=\varnothing.$
В частности, несовместными будут события A и $\overline{A}$.

Пример Подброшена две игральные кости, X – сумма выпавших очков. Тогда события $A(X<5)$, событие $B(X>7)$ будут несовместными.

Пример Произведено три выстрела по цели. Тогда события A(более двух попаданий) и событие B(более одного промаха) будут несовместными.

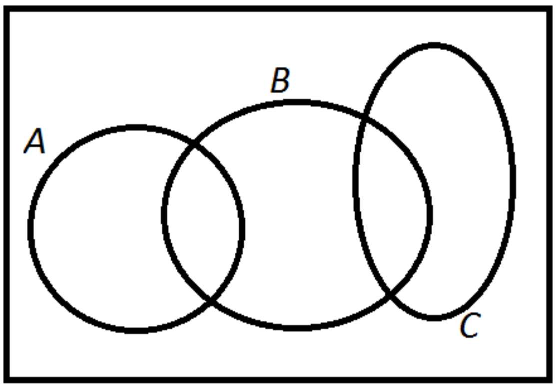
События называются **попарно несовместными**, если никакие два из них одновременно произойти не могут. Иными словами, в условиях данного эксперимента появление одного из них исключает появление всех других. На диаграммах Венна попарно несовместные события не имеют общих внутренних точек, например



При выстреле по такой мишени нельзя одновременно попасть не только во все области сразу, но и в каждую пару из них (напомним, что границами областей мы пренебрегаем).

Пример Из колоды карт извлечена одна. Пусть событие A(это бубна), событие B(это черва) и событие C(это трефа). Эти три события будут попарно несовместны.

Попарная несовместность – более жесткое требование к событиям, чем просто несовместность. Приведем диаграмму Венна



Три события A, B, C будут несовместными (при выстреле по такой мишени одновременно попасть во все три области нельзя), а вот попарной несовместности здесь нет (одновременно попасть в A и в B можно, так же, как и одновременно попасть в C и в B)

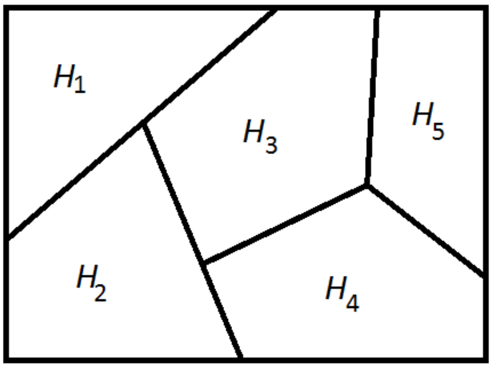
<u>Пример</u> Извлечен бочонок лото с номером n. Пусть событие $A(n<12)$, событие $B(7<n<20)$ и событие $C(n>15)$. Данные три события будут несовместными, а вот попарной несовместности здесь нет (A и B могут произойти одновременно, так же, как C и B).

Несколько событий образуют **полную группу**, если в результате эксперимента непременно произойдет хотя бы одно из них. Иными словами, $A+B=I$ (для двух событий), $A+B+C=I$ (для трех событий), и т.д.
На диаграммах Венна полная группа событий полностью покрывает весь квадрат (достоверное событие). При этом возможны наложения областей друг на друга.

<u>Пример</u> Произведено несколько выстрелов по цели. Тогда события A(хотя бы одно попадание) и B(хотя бы один промах) образуют полную группу.

<u>Пример</u> Извлечен бочонок лото с номером n. Тогда события $A(n<50)$, $B(30<n<80)$ и событие $C(n>60)$ образуют полную группу.

Несколько событий являются **гипотезами**, если они
а) образуют полную группу и
б) попарно несовместны.
Гипотезы принято обозначать буквой H (от греческого Hipothesis) с нижним индексом. На диаграммах Венна гипотезы полностью покрывают квадрат (достоверное событие) и при этом не имеют общих внутренних точек, т.е. не налегают друг на друга (наступление одной гипотезы исключает наступление остальных гипотез).



При выстреле по такой мишени непременно попадем в одну из гипотез, а вот одновременно попасть в две из них не получится.

<u>Пример</u> Подброшены две игральные кости, X – сумма выпавших очков. Тогда события $H_1(X=2)$, $H_2(2<X<5)$ и $H_3(X>4)$ являются гипотезами.

<u>Пример</u> Из колоды 36 карт извлечена одна. Тогда события H_1(это бубна), H_2(это черва) и H_3(это карта черной масти) являются гипотезами.

Пример Произведено три выстрела по цели. Тогда события A(более одного попадания) и B(более одного промаха) являются гипотезами.

Несколько событий называются **равновозможными**, если в силу симметрии эксперимента у нас нет оснований предполагать, что одно из них наступает чаще, чем другие.

Пример Подброшена одна симметричная монета. Тогда события A(выпал герб), B(выпала решетка) очевидно равновозможны.

Пример Подброшена игральная кость, X – сумма выпавших очков. Тогда события A(X=1), B(X=3) и C(X=4) очевидно равновозможны.

Пример Из колоды 36 карт извлечена одна. Тогда события A(это бубна), B(это черва) и C(это трефа) очевидно равновозможны.

Отметим слово «симметрия» в определении равновозможности событий. В предыдущих трех примерах она присутствует (у монеты две симметричные стороны – герб и решетка, у игральной кости шесть симметричных граней, в полной колоде равное число карт каждой из четырех мастей.

Контрпример Произведен выстрел по цели, тогда события A(попадание в цель) и B(промах по цели) в общем случае не будут равновозможными, так как никакой симметрии здесь не просматривается. Но если добавить, что выстрел произведен стрелком, который, согласно статистическим данным, в условиях данного эксперимента поражает мишень примерно в половине случаев, то появляется симметрия (число промахов равно числу попаданий), и события становятся равновозможными.

Несколько событий называются **случаями** (иначе **шансами**), если они одновременно
а) образуют полную группу,
б) равновозможны
в) попарно несовместны.
Иными словами, группа случаев (шансов) - это группа равновозможных гипотез. Т.о. в теории вероятностей случаи (шансы) это нечто вполне конкретное, обязательно удовлетворяющее приведенным выше трем условиям.

Пример Подброшена монета. Тогда события A(выпал герб) и B(выпала решетка) очевидно являются случаями (шансами).

Пример Из колоды 36 карт извлечена одна. Тогда события A(это бубна), B(это черва), C(это трефа) и D(это пика) являются случаями (шансами).

Пример Из колоды 36 карт извлечена одна. Тогда события A(это карта черной масти) и B(это карта красной масти) являются случаями (шансами).

Пример Подброшена игральная кость, X – сумма выпавших очков. Тогда события $A(X<3)$, $B(2<X<5)$ и $C(X>4)$ очевидно являются случаями (шансами).

Эксперимент называется **классическим**, если он приводит к полной группе равновозможных и попарно несовместных событий, т.е. к группе случаев (шансов). Особенно часто классический эксперимент встречается в задачах, связанных со жребием или с азартными играми.

В следующих примерах ответьте на пять вопросов:
а) образуют ли эти события полную группу?
б) будут ли эти события попарно несовместными?
в) образуют ли эти события группу гипотез?
г) являются ли эти события равновозможными?
д) можно ли эти события называть случаями (шансами)?

Пример Из колоды 36 карт извлечена одна. События A(это бубна), B(это дама) и C(это карта черной масти)
Ответ: а) нет б) нет в) нет г) нет д) нет

Пример Из колоды 36 карт извлечены две. События A(это две карты черной масти), B(это две карты красной масти)
Ответ: а) нет б) да в) нет г) да д) нет

Пример Подброшена игральная кость, X – сумма выпавших очков. События $A(X=1)$, $B(X>2)$.
Ответ: а) нет б) да в) нет г) нет д) нет

Пример Подброшена игральная кость, X – сумма выпавших очков. События $A(X=1)$, $B(2<X<5)$ и $C(X=6)$
Ответ: а) нет б) да в) нет г) нет д) нет

Пример Подброшена игральная кость, X – сумма выпавших очков. События A(X делится на 2), B(X делится на 3) и C(X не делится на 2 на 3)
Ответ: а) да б) да в) нет г) нет д) нет

Пример Подброшена игральная кость, X – сумма выпавших очков. Шесть событий $A_1(X=1)$, $A_2(X=2)$, $A_3(X=3)$, $A_4(X=4)$, $A_5(X=5)$, $A_6(X=6)$.

<u>Ответ</u>: а) да б) да в) да г) да д) да

<u>Пример</u> Подброшены две монеты. События *A*(выпали два герба), *B*(выпали две решетки) и *C*(выпали герб и решетка)
<u>Ответ</u>: а) да б) да в) да г) нет д) нет

<u>Пример</u> Извлечен бочонок лото с номером *n*. События $A(n<30)$, $B(30<n<40)$, $C(n>50)$.
<u>Ответ</u>: а) нет б) да в) да г) нет д) нет

<u>Пример</u> Извлечен бочонок лото с номером *n* (напомним, что их ровно 90). События *A*(*n* делится на 3), *B*(*n* при делении на 3 дает в остатке 1), *C*(*n* при делении на 3 дает в остатке 2) .
<u>Ответ</u>: а) да б) да в) да г) да д) да

<u>Различные определения вероятности</u>

Как уже упоминалось, вероятность – это одно из основных понятий теории вероятностей.

Фраза «в результате эксперимента возможно наступление события *A*» справедлива для любого случайного события *A*. В то же время возникает закономерный вопрос: а насколько возможно это наступление? Ведь из своего жизненного опыта все мы знаем, что некоторые события наступают часто (например, дождь в Санкт-Петербурге), а некоторые редко (например, дождь в пустыне).

Вероятность случайного события – это количественная оценка возможности его наступления, при этом случайному событию ставится в соответствие некоторое число *P*, которое называется вероятностью этого события (*P* от латинского probabilitas – вероятность), причем $0\leq P\leq 1$. Чем больше *P*, тем более возможно наступление этого события. В пределе, значению $P=1$ соответствует достоверное (или практически достоверное) событие. Наоборот, чем меньше *P*, тем менее возможно наступление этого события. В пределе, значению $P=0$ соответствует невозможное (или практически невозможное) событие.

Приведенное выше определение вероятности носит общий характер и лишено конкретики. Ответа на главный вопрос – а как вычислить это число *P*, в нем нет. Правило нахождения числа *P* и называется (уже конкретным) определением вероятности.

Единого определения вероятности, подходящего для всех задач, нет. Для различных задач существуют разные определения этого важнейшего понятия. У всех определений есть общее – это в первую очередь аксиомы вероятности и вытекающие из них свойства.

В [1] приведены пять определений вероятности: аксиоматическое, статистическое, субъективное, классическое и геометрическое.

Аксиоматическое определений вероятности носит скорее теоретический характер и выходит за пределы данного пособия.

При **статистическом** определении за вероятность случайного события принимают число, около которого группируются относительные частоты наступления этого события, а при большом числе испытаний, за вероятность этого события можно взять и саму относительную частоту его наступления. Например, произведено 100 выстрелов по цели в стабильных условиях, и в результате цель была поражена 60 раз. Тогда относительная частота поражения цели будет 60/100=0,6 – ее и можно приближенно принять за вероятность поражения цели. Именно такая вероятность приводится во многих задачах (фразы типа «вероятность поражения цели равна 0,6», «вероятность выхода станка из строя равна 0,1» и т.д.) Интуитивно все мы, осознанно или неосознанно, в обыденной жизни используем статистическое определение вероятности – те события, которые происходят чаще и являются более вероятными. Например, летом дожди в Санкт-Петербурге происходят гораздо чаще, чем, например, в Ташкенте, поэтому отправляясь летом в Санкт-Петербург имеет смысл взять с собой зонт, а в Ташкенте он, скорее всего, не понадобится.

При субъективном определении вероятности полагаются на оценки экспертов.

Мы же сосредоточимся на классическом и геометрическом определении вероятности.

Классическое определение вероятности

Пусть эксперимент **классический** и n – число случаев (шансов), которые могут наступить в результате этого эксперимента. Также пусть в результате этого эксперимент может наступить (а может и не наступить) случайное событие A. Тогда вероятность этого события определяется так

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n}}, \tag{1}$$

где n – общее число случаев (шансов), m – общее число случаев (шансов), благоприятных событию A.

Пример Из колоды 36 карт извлечена одна. Какова вероятность, что это бубна?
Решение Данный эксперимент имеет $n = 36$ возможных исходов, которые очевидно являются случаями (шансами). Из них благоприятными интересующему нас событию будет $m = 9$ (т.к. в данной колоде 9 бубей).
Ответ $P = \frac{m}{n} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

Пример Из колоды 36 карт извлекли три. Какова вероятность, что все три – бубны?

Решение Данный эксперимент имеет $n = C_{36}^3$ возможных исходов (где $C_{36}^3 = \frac{36\cdot35\cdot34}{3!}$ – число сочетаний из 36 по 3, столькими способами можно выбрать три элемента из 36, порядок выбора здесь не важен), которые являются случаями (шансами). Из них благоприятными интересующему нас событию будет $m = C_9^3$ (столькими способами можно выбрать три элемента из 9, в данном случае из 9 бубей, порядок тоже не важен).

Ответ $P = \frac{m}{n} = \frac{C_9^3}{C_{36}^3} = \frac{\frac{9\cdot8\cdot7}{3!}}{\frac{36\cdot35\cdot34}{3!}} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot36\cdot35\cdot34} = \frac{1}{85}$

Замечание Несколько позже мы решим эту задачу другим способом, с помощью правила умножения вероятностей.

Пример Четыре незнакомых между собой человека вошли в лифт на первом этаже восьмиэтажного дома. Считая, что никто из них не намеревается возвратиться на первый этаж и что вероятность выхода каждого из них на любом из оставшихся восьми этажах одинакова, найти вероятность того, что все четыре человека выйдут на разных этажах?

Решение Данный эксперимент имеет $n = \bar{A}_8^4 = 8\cdot8\cdot8\cdot8 = 8^4$ возможных исходов (8 вариантов выхода у каждого человека, все пассажиры лифта выбирают этаж для выхода независимо друг от друга, $\bar{A}_8^4 = 8^4$ - число размещений с повторениями из 8 по 4), которые очевидно являются случаями (шансами). Из них благоприятными интересующему нас событию будет ровно $m = A_8^4 = 8\cdot7\cdot6\cdot5$ (8 вариантов выхода у первого человека, 7 вариантов выхода у второго человека, так как, по условию задачи, он не должен выйти на том же этаже, что и первый человек, 6 у третьего, так как он не должен выйти на тех двух этажах, на которых вышли первый и второй, и 5 у четвертого, так как он не должен выйти на тех трех этажах, на которых вышли первые три человека, $A_8^4 = 8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5$ - число размещений из 8 по 4).

<u>Ответ</u> $P = \frac{m}{n} = \frac{A_8^4}{\bar{A}_8^4} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{8\cdot8\cdot8\cdot8} = \frac{105}{256}$

<u>Замечание</u> Несколько позже мы и эту задачу решим другим способом, с помощью правила умножения вероятностей.

<u>Пример</u> Предстоит разместить девять незнакомых между собой туристов с разными фамилиями в трех номерах гостиницы – четырехместном, трехместном и двухместном. Считая каждый вариант размещения равновозможным, найти вероятность, что Иванов будет ночевать в четырехместном номере, а Петров – в трехместном.

<u>Решение</u> Данный эксперимент имеет [10]

$n = P_{4,3,2} = \frac{9!}{4!\cdot3!\cdot2!}$

возможных исходов (где $P_{4,3,2}$ – число перестановок с повторениями), которые являются случаями (шансами). Из них благоприятными интересующему нас событию будет

$m = P_{3,2,2} = \frac{7!}{3!\cdot2!\cdot2!}$

(по условию задачи мы должны сначала заселить Иванова в четырехместный номер, а Петрова – в трехместный, и только после этого перебрать все варианты распределения оставшихся семи туристов по оставшимся трем местам в четырехместном номере, двум местам в трехместном и двум местам в двухместном).

<u>Ответ</u> $P = \frac{m}{n} = \frac{P_{3,2,2}}{P_{4,3,2}} = \frac{\frac{7!}{3!\cdot2!\cdot2!}}{\frac{9!}{4!\cdot3!\cdot2!}} = \frac{7!\cdot4!\cdot3!\cdot2!}{9!\cdot3!\cdot2!\cdot2!} = \frac{1}{6}$

<u>Замечание</u> И эту задачу позже мы решим другим способом, с помощью правила умножения вероятностей.

<u>Пример</u> 9 книг разных авторов случайным образом расставлены на полке. Какова вероятность, что томики Пушкина и Лермонтова окажутся рядом?

<u>Решение</u> 9 книг разных авторов могут быть переставлены на полке n=9! различными способами ($P_9 = 9!$ - число перестановок девяти элементов). Это и будет числом случаев (шансов) данного эксперимента. Число же случаев, благоприятных интересующему нас событию (томики Пушкина и

Лермонтова окажутся рядом), можно вычислить так: Мысленно склеим томики Пушкина и Лермонтова, тогда у нас будет не 9 а 8 книг, одна из них склеенная из двух, и эти 8 книг можно переставить на полке 8! способами. Но нужно еще учесть, что склеить можно по-разному – Пушкин-Лермонтов или Лермонтов-Пушкин, каждому способу склеивания соответствует 8! перестановок, итого m=2·8! случаев (шансов), благоприятных интересующему нас событию.

Ответ $P = \frac{m}{n} = \frac{2\cdot 8!}{9!} = \frac{2}{9}$

Замечание Несколько позже мы приведем другое решение этой задачи, с помощью формулы полной вероятности.

Пример 9 книг разных авторов случайным образом расставлены на полке. Какова вероятность, что между томиками Пушкина и Лермонтова окажется ровно одна книга, неважно какая?

Решение Начало решения этой задачи полностью совпадает с предыдущей n=9! - число случаев (шансов) данного эксперимента.
А вот мысленно склеивать книги для подсчета числа случаев (шансов), благоприятных интересующему нас событию, будем уже по-другому – надо склеить три книги – по краям томики Пушкина и Лермонтова (два способа, как в предыдущей задаче), а между ними любая другая книга из семи. По комбинаторному принципу умножения, получаем 2·7 способа склейки толстой книги (из трех книг). После завершения склейки на полке окажется 7 книг (6 исходных и одна толстая, склеенная из трех), и эти семь книг можно переставить на полке 7! способами. Итого, опять-таки по комбинаторному принципу умножения, получаем число случаев (шансов), благоприятных интересующему нас событию

$$m=2\cdot 7\cdot 7!$$

Ответ $P = \frac{m}{n} = \frac{2\cdot 7\cdot 7!}{9!} = \frac{2\cdot 7\cdot 7!}{9\cdot 8\cdot 7!} = \frac{2\cdot 7}{9\cdot 8} = \frac{7}{36}$

Замечание Несколько позже мы приведем другое решение этой задачи, с помощью формулы полной вероятности.

Пример 9 книг разных авторов случайным образом расставлены на полке. Какова вероятность, что между томиками Пушкина и Лермонтова окажутся ровно две книги, неважно какие?

Решение Начало решения этой задачи полностью совпадает с предыдущими двумя, n=9! - число случаев (шансов) данного эксперимента.

А мысленно склеивать книги будем уже иначе – надо склеить четыре книги в одну – по краям томики Пушкина и Лермонтова (два способа, как в предыдущей задаче), а между ними две любые книги из семи (порядок здесь важен, как и во всякой задаче на перестановки, поэтому выбрать две средние книги можно $A_7^2 = 7{\cdot}6$ способами. По комбинаторному принципу умножения, получаем $2{\cdot} A_7^2$ способа склейки толстой книги (из четырех книг). После завершения склейки на полке окажется 6 книг (5 исходных и одна толстая, склеенная из четырех), и эти шесть книг можно переставить на полке 6! способами. В итоге, по комбинаторному принципу умножения, получаем число случаев (шансов), благоприятных интересующему нас событию

$m{=}2{\cdot}A_7^2{\cdot}6!$

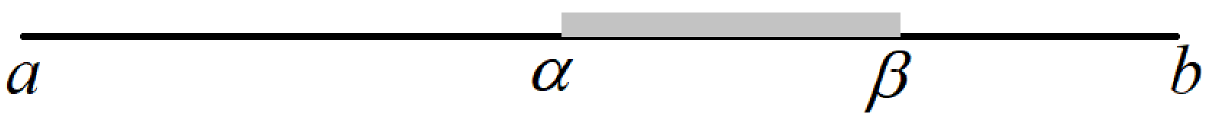
<u>Ответ</u> $P = \frac{m}{n} = \frac{2\cdot A_7^2\cdot 6!}{9!} = \frac{2\cdot 7\cdot 6\cdot 6!}{9!} = \frac{2\cdot 7\cdot 6\cdot 6!}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!} = \frac{1}{6}$

<u>Замечание</u> Несколько позже мы приведем другое решение этой задачи, с помощью формулы полной вероятности.

Ограничимся этими примерами (большое количество таких примеров приведено в предыдущем пособии по комбинаторике [10]) и перейдем к геометрическому определению вероятности, при котором очень удобно доказывать аксиомы и свойства, хотя верны эти аксиомы и свойства будут для любого определения вероятности.

<u>Геометрическое определение вероятности</u>

Сначала кратко рассмотрим одномерный случай. Пусть на оси абсцисс задан отрезок $[a;b]$ и на нем произвольным образом выбирается случайная точка с абсциссой X. Будем считать, что эта точка обязательно попадет на отрезок $[a;b]$ (иными словами, событие $X\in[a;b]$ – достоверное). Будем считать также, что попадание этой точки в любую часть отрезка $[a;b]$ равновозможно. Пусть внутри отрезка $[a;b]$ задан другой отрезок $[\alpha;\beta]\in[a;b]$.



Естественно полагать, что чем длиннее отрезок $[\alpha;\beta]$, тем вероятнее, что случайная точка попадет в него. Поэтому вероятностью события $A(X\in[\alpha;\beta])$ называют число

$P(A) = \frac{\text{Длина } [\alpha;\beta]}{\text{Длина } [a;b]} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$

Пример В ходе прогулки турист удалился по дороге на 5 км от отеля и обнаружил, что потерял ключи от номера. Какова вероятность, что потеря произошла не далее, чем 1 км от отеля?

Ответ $P = \frac{1\text{ км}}{5\text{ км}} = \frac{1}{5}$

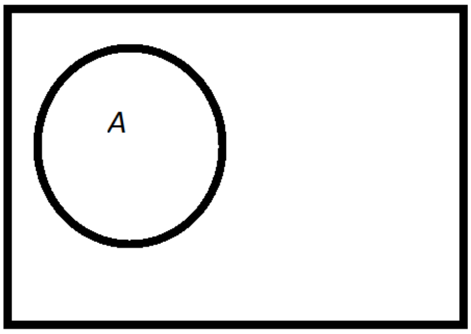
Пример Известно, что в интервал времени 12.00-14.00 на телефон поступил входящий вызов, но владелец телефона не знал об этом, так как телефон был разряжен. Какова вероятность, что этот вызов поступил с 12.30 до 13.00?

Ответ $P = \frac{30\text{ мин}}{120\text{ мин}} = \frac{1}{4}$, или так $P = \frac{0{,}5\text{ часа}}{2\text{ часа}} = \frac{1}{4}$ – важно, чтобы единицы измерения в числителе и знаменателе были одинаковыми!

Пример Допустим, что поезда метро ходят с интервалом ровно в одну минуту. Какова вероятность, что пассажир, в случайный момент времени ступивший на платформу, будет ожидать поезда не более 20 секунд?

Ответ $P = \frac{20\text{ сек}}{60\text{ сек}} = \frac{1}{3}$

Перейдем к более интересному двумерному случаю. Пусть на координатной плоскости задан квадрат Q и в нем произвольным образом выбирается случайная точка с координатами $(X;Y)$. Будем считать, что эта точка обязательно попадет в квадрат (иными словами, событие $(X;Y)\in Q$ – достоверное). Будем считать также, что попадание этой случайной точки в любую часть квадрата равновозможно.
Пусть внутри квадрата Q задана некоторая область A.

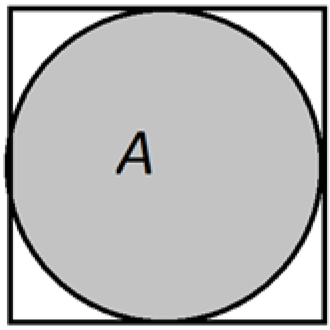


Назовем случайным событием A попадание случайной точки $(X;Y)$ в область A. Естественно полагать, что чем больше площадь области A, тем вероятнее, что случайная точка $(X;Y)$ попадет в нее. Поэтому вероятностью события A называют число

$$P(A) = \frac{\text{Площадь } A}{\text{Площадь квадрата}} = \frac{S_A}{S_{квадрата}} \qquad (2)$$

Замечание То, что в качестве достоверного события выбрано попадание случайной точки именно в квадрат, не принципиально. Вместо квадрата может быть прямоугольник, круг, эллипс и т.д.

Пример В квадрат со стороной $2a$ случайным образом «брошена» точка, причем попадание этой точки в любую часть квадрата равновозможно. Какова вероятность, что эта точка окажется внутри круга, вписанного в этот квадрат?



Решение $P(A) = \frac{S_{круга}}{S_{квадрата}}$.

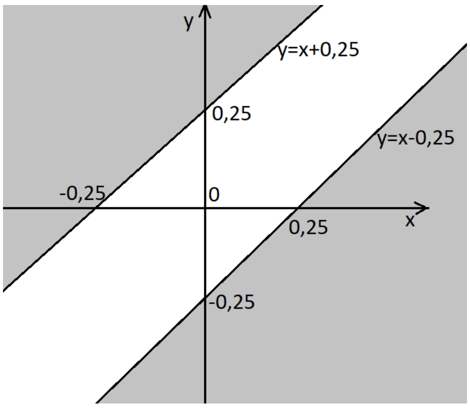
Ответ $P(A) = \frac{\pi a^2}{4a^2} = \frac{\pi}{4}$.

Пример: Задача о встрече Иванов и Петров договорились встретиться у метро между 12.00 и 13.00 при условии, что пришедший первым будет ожидать второго не более 15 минут. Какова вероятность, что встреча состоится?

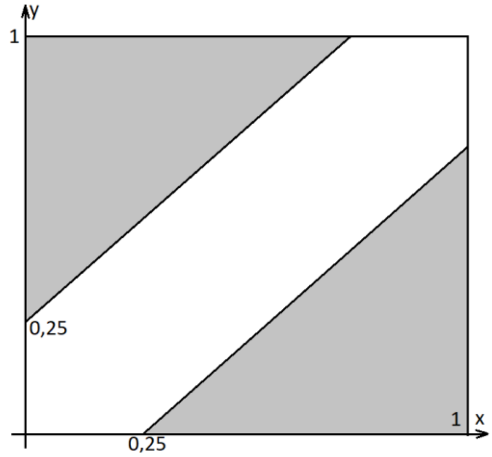
Решение Пусть X – время прихода Иванова (в долях часа, после полудня), Y – время прихода Петрова. Например, $X = 0.5$ означает, что Иванов пришел в 12.30, $Y = 0.2$ означает, что Петров пришел в 13.12 . По условию $0 \le X \le 1$, $0 \le Y \le 1$. Случайная точка с координатами (X,Y) означает, что Иванов пришел в момент времени X, а Петров пришел в Y, причем эта точка непременно попадет в квадрат ($0 \le X \le 1$, $0 \le Y \le 1$), который представляет из себя в данной задаче достоверное событие. Поскольку мы ничего не знаем о привычках Иванова и Петрова (кто приходит раньше, а кто опаздывает), то мы вынуждены полагать, что попадание случайной точки (X,Y) в любую часть квадрата равновозможно.

Условие того, что встреча состоится, можно сформулировать так $|y-x|<0,25$. Вспомним, что неравенство $|x|<\varepsilon$ равносильно двойному неравенству $-\varepsilon<x<\varepsilon$. В нашем случае

$|y-x|<0,25 \Leftrightarrow -0,25<y-x<0,25$ или $x-0,25<y<x+0,25$. Это множество на координатной плоскости представляет собой внутреннюю (белую) часть бесконечной полосы



Произведем наложение этой полосы на наш квадрат

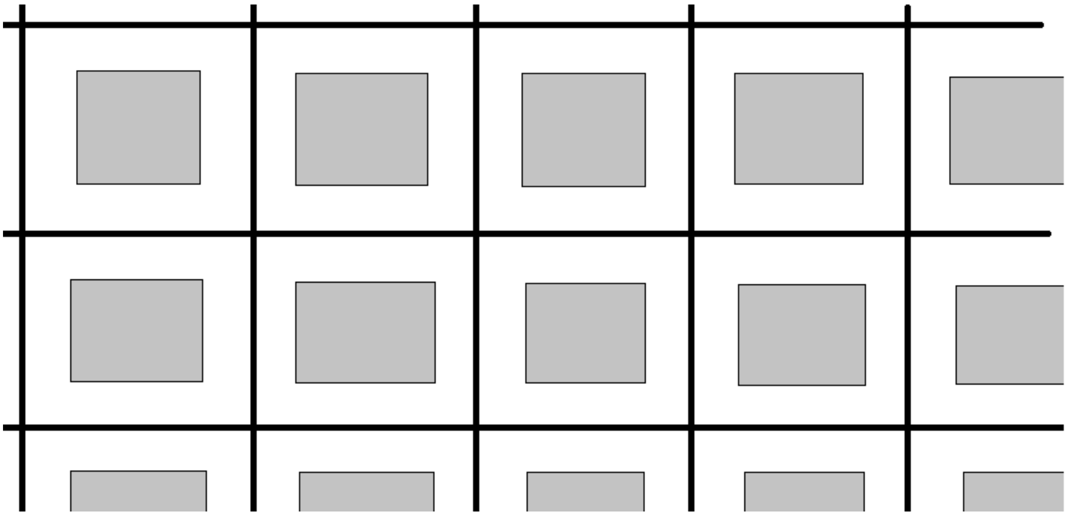


Встреча Иванова и Петрова произойдет, если случайная точка попадет в белую часть квадрата. Площадь этой белой части равна площади квадрата минус две площади равнобедренных прямоугольных треугольников с катетами 0,75, т.е. $1–2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{16}$. Поэтому вероятность встречи будет

<u>Ответ</u> $P=\frac{S_{белой\ полосы}}{S_{квадрата}}=\frac{(\frac{7}{16})}{1}=\frac{7}{16}$.

<u>Пример</u> [3] 18.155 На координатную плоскость с нанесенной сеткой квадратов (сторона квадратов – 5 см) наудачу брошена монета диаметра 2 см. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной линии этой сетки.

<u>Решение</u> Очевидно, это событие A(непересечение монетой линий сетки) случится, если центр монеты будет отстоять более чем на один сантиметр от любой линии сетки, т.е. попадет в один из квадратов, отмеченных на следующем рисунке серым цветом.



Сторона квадрата сетки – 5 см, сторона серого квадрата – 3 см, поэтому

<u>**Ответ**</u> $P = \frac{\text{Площадь серого квадрата}}{\text{Площадь квадрата сетки}} = \frac{9}{25}$

В трехмерном случае вероятность попадания случайной точки (X, Y, Z) в некоторую пространственную фигуру будет равно отношению объема этой фигуры к объему некоторого куба (этот куб символизирует достоверное событие – случайная точка обязательно должна в него попасть и ее попадание в любую часть куба считается равновозможным).

Аксиомы вероятности:

Поскольку площадь не может быть отрицательной, то из (2) следует

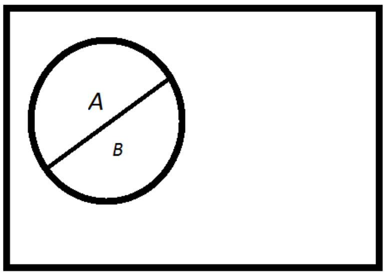
$$\boldsymbol{P(A) \geq 0} \textbf{ (аксиома неотрицательности)} \qquad (3)$$

Далее, если в качестве A выбрать весь исходный квадрат, то мы получим вероятность достоверного события

$P(I)=P((X;Y)\in Q) = \frac{\text{Площадь квадрата}}{\text{Площадь квадрата}} = 1$. Итак

$$\boldsymbol{P(I) = 1} \textbf{ (аксиома нормировки)} \qquad (4)$$

Пусть в квадрате заданы две области A и B, не имеющие общих внутренних точек. При этом события $A((X;Y)\in A)$ и $B((X;Y)\in B)$ будут несовместными (случайная точка не может одновременно попасть в обе эти области, поэтому эти два события не могут наступить одновременно).



Тогда

$$P(A+B)=P((X;Y)\in A\cup B)=\frac{S_{A\cup B}}{S_{квадрата}}=\frac{S_A+S_B}{S_{квадрата}}=\frac{S_A}{S_{квадрата}}+\frac{S_B}{S_{квадрата}}=P(A)+P(B)$$

Если A и B несовместны, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$ (аксиома аддитивности)(5)

Аксиому аддитивности легко обобщить на любое конечное число слагаемых

Если A_1, A_2, A_3, …, A_k попарно несовместны, то
$P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_k)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots+P(A_k)$ (5´)

<u>Замечание</u> В книге [1] приводится четвертая аксиома

$P(\varnothing)=0$ (вероятность невозможного события равна нулю) (6)

<u>Пример</u> Из колоды 36 карт извлечена одна. Какова вероятность, что это или бубна или черва или трефа?

<u>Решение</u> Очевидно, эти три события попарно несовместны (не может одна карта одновременно быть и бубной и червой и т.д.), поэтому, по аксиоме аддитивности (5´)

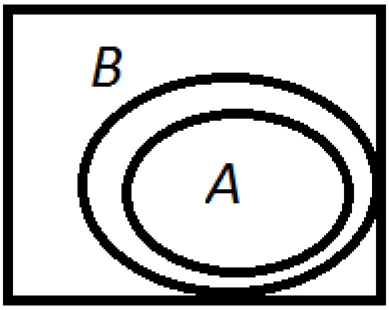
<u>Ответ</u> $P=P(бубна)+P(черва)+P(трефа)=\frac{9}{36}+\frac{9}{36}+\frac{9}{36}=\frac{3}{4}$

Еще раз напомним, что аксиомы (3), (4), (5), (6) справедливы не только для геометрического, но и для **любого** определения вероятности.

<u>Свойства вероятности, следующие из аксиом.</u>

Снова будем исходить из геометрического определения вероятности, хотя полученные формулы будут справедливы для **любого** определения вероятности.

Если $A\subset B$, то $P(A)\le P(B)$ (7)



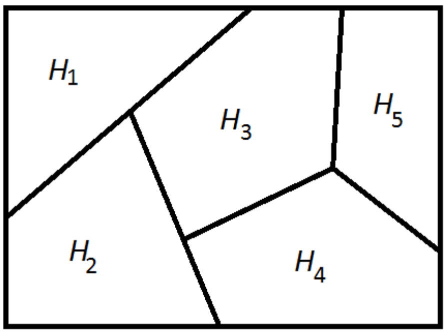
Очевидно, $S_A \leq S_B$, поэтому $P(A) = \frac{S_A}{S_{квадрата}} \leq \frac{S_B}{S_{квадрата}} = P(B)$.

<u>Пример</u> Из колоды 36 карт извлечена одна. Пусть события A(это бубна) и B(это карта красной масти). Тогда $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Очевидно, $A \subset B$. Соответственно, $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A) < P(B)$.

Если H_1 , H_2 , H_3 , …, H_k - группа гипотез, то

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + \ldots + P(H_k) = 1 \qquad (8)$$

В самом деле, гипотезы образуют полную группу, т.е. полностью покрывают весь квадрат, и попарно несовместны, т.е. не имеют ощих внутренних точек (а границами, как было сказано ранее, можно пренебречь)



$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + \ldots + P(H_k) = \frac{S_{H_1}}{S_{квадрата}} + \frac{S_{H_2}}{S_{квадрата}} + \frac{S_{H_3}}{S_{квадрата}} + \ldots + \frac{S_{H_k}}{S_{квадрата}} = \frac{S_{H_1} + S_{H_2} + S_{H_3} + \ldots + S_{H_k}}{S_{квадрата}} = \frac{S_{квадрата}}{S_{квадрата}} = 1$$

<u>Пример</u> Из колоды 36 карт извлечена одна. Тогда события H_1(это бубна), H_2(это черва) и H_3(это карта черной масти) образуют группу гипотез. Проверим (8)

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = \frac{9}{36} + \frac{9}{36} + \frac{18}{36} = 1$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \qquad (9)$$

В самом деле, события A и $\overline{A}$ образуют группу гипотез.

Пример Из колоды 36 карт извлечены одна. Пусть событие A(это бубна), тогда событие $\overline{A}$ (это не бубна).
$P(A) + P(\overline{A}) = \frac{9}{36} + \frac{27}{36} = 1$

Свойство (9) очень полезно при решении задач, так как зачастую вероятность события $\overline{A}$ найти проще, чем вероятность события A

Пример Из колоды 36 карт извлечены две. Какова вероятность, что среди них хотя бы одна бубна.

Решение Пусть A(хотя бы одна бубна), тогда $\overline{A}$ (ни одной бубны). Поэтому

Ответ $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{27}^{2}}{C_{36}^{2}} = 1 - \frac{\frac{27\cdot 26}{2!}}{\frac{36\cdot 35}{2!}} = 1 - \frac{39}{70} = \frac{31}{70}$

$0 \le P(A) \le 1$ (вероятность всегда заключена между нулем и единицей) (10)

В самом деле, то что $0 \le P(A)$ следует из аксиомы неотрицательности (3), а то, что $P(A) \le 1$, следует из (9), т.к. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, а $P(\overline{A}) \ge 0$ в силу (3).

Правило сложения вероятностей

$$\boldsymbol{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC),} \tag{11'}$$

$$\boldsymbol{P(A+B+C+D) = P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-P(AB)-P(AC)-P(AD)-P(BC)-P(BD)-P(CD) + P(ABC) + P(ABD) + P(BCD) - P(ABCD),}$$

…

Для доказательства применим формулы включений и исключений (14) и (15) из учебного пособия по комбинаторике [10]. Например, для двух событий

$$P(A+B) = P((X;Y) \in A \cup B) = \frac{S_{A\cup B}}{S_{квадрата}} = \frac{S_A + S_B - S_{A\cap B}}{S_{квадрата}} = \frac{S_A}{S_{квадрата}} + \frac{S_B}{S_{квадрата}} - \frac{S_{A\cap B}}{S_{квадрата}} = P(A) + P(B) - P(AB),$$

Для суммы трех событий доказательство аналогично.

Замечание Если события попарно несовместны, то формулы (11) и (11′) превращаются в аксиому аддитивности (5) и (5′).

Пример Из колоды 36 карт извлечена одна. Какова вероятность, что это или бубна или дама?

Решение Пусть события A(это бубна) и B(это дама), тогда AB(это дама бубей). По формуле (11)

Ответ $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{9}{36} + \frac{4}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$

Условная вероятность

$P(A)$ – безусловная вероятность события A (без всяких условий)
$P(A/B)$ – условная вероятность события A (вероятность события A при условии, что произошло событие B)

Пример В урне 10 красных, 8 зеленых и 7 белых шариков. Наудачу извлечен один. Пусть событие A(этот шарик красный), тогда безусловная вероятность $P(A) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$. Пусть событие B(не извлечен белый шар), тогда условная вероятность $P(A/B) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$ (нужно убрать из рассмотрения все белые шары).

Пример В урне 10 красных, 8 зеленых и 7 белых шариков. Наудачу извлечены два. Пусть события A(оба шарика красные), B(шарики разного цвета), C(не извлечен белый шар). Найти безусловные вероятности $P(A)$, $P(B)$ и условные вероятности $P(A/C)$ и $P(B/C)$.

$P(A) = \frac{C_{10}^2}{C_{25}^2} = \frac{\frac{10\cdot 9}{2!}}{\frac{25\cdot 24}{2!}} = \frac{10\cdot 9\cdot 2!}{2!\cdot 25\cdot 24} = \frac{3}{20}$, или так $P(A) = \frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24} = \frac{3}{20}$.

$P(B) = \frac{C_{10}^1 C_8^1 + C_{10}^1 C_7^1 + C_8^1 C_7^1}{C_{25}^2} = \frac{10\cdot 8 + 10\cdot 7 + 8\cdot 7}{\frac{25\cdot 24}{2!}} = \frac{103}{150}$.

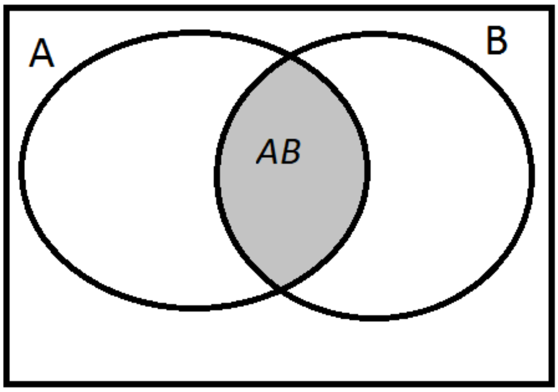
$P(A/C) = \frac{C_{10}^2}{C_{18}^2} = \frac{\frac{10\cdot 9}{2!}}{\frac{18\cdot 17}{2!}} = \frac{5}{17}$, или так $P(A/C) = \frac{10}{18}\cdot\frac{9}{17} = \frac{5}{17}$.

$P(B/C) = \frac{C_{10}^1 C_8^1}{C_{18}^2} = \frac{10\cdot 8}{\frac{18\cdot 17}{2!}} = \frac{80}{153}$ (исключили из рассмотрения белые шары)

Получим формулу для условной вероятности. Мы ее выведем для геометрического определения вероятности, но верна она будет для всех определений вероятности.

Итак, согласно (2) $P(A) = \frac{S_A}{S_{квадрата}}$.

Теперь допустим, что мы уверены в том, что произошло событие B



(A и B изображены овалами). Тогда B и будет выполнять роль достоверного события (раз мы уверены, что B произошло) и в знаменателе дроби вместо площади квадрата должна стоять площадь области B. С другой стороны, раз B произошло, то случайная точка попала в область B, и событие A при этом может произойти только если случайная точка попала в общую часть A и B, т.е. в AB. Поэтому в числителе должна стоять площадь области AB. Итак

$P(A/B) = \frac{S_{AB}}{S_B}$

Разделим числитель и знаменатель этой дроби на площадь квадрата

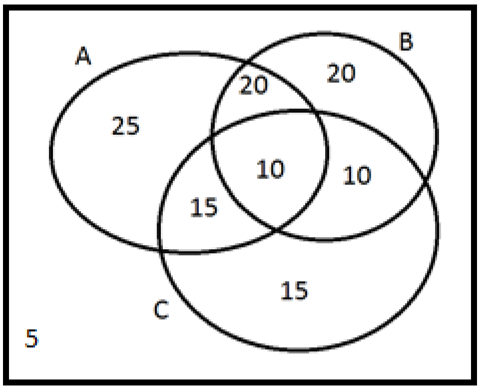
$$P(A/B) = \frac{S_{AB}}{S_B} = \frac{(\frac{S_{AB}}{S_{квадрата}})}{(\frac{S_B}{S_{квадрата}})} = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

$$\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}} \qquad (12)$$

Это и есть формула для нахождения условной вероятности, причем она верна для всех определений вероятности.

<u>**Пример**</u> На курсе обучаются 120 студентов, причем 70 из них знают английский язык, 60 – французский и 50 знают немецкий. При этом 30 студентов владеют английским и французским, 25 студентов владеют английским и немецким, 20 владеют французским и немецким, наконец, 10 студентов знают одновременно все три этих языка.
Найдем условные и безусловные вероятности некоторых событий.

Пусть A – множество студентов, знающих английский, B – множество студентов, знающих французский и C – множество студентов, знающих немецкий. Пусть, соответственно, событие A – выбранный студент знает английский, B – выбранный студент знает французский и C – выбранный студент знает немецкий. Мы уже решали соответствующую комбинаторную задачу в [10] – приведем диаграмму



Безусловные вероятности $P(A)=\frac{70}{120}=\frac{7}{12}$, $P(B)=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$,
условные вероятности $P(A/B)=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$, $P(A/C)=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$, $P(B/A)=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$,
$P(B/C)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$, $P(C/A)=\frac{25}{70}=\frac{5}{14}$, $P(C/B)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$, $P(A/BC)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$,
$P(B/AC)=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$, $P(C/AB)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.
Проверим (12) $P(AB)=\frac{30}{120}$, $P(B)=\frac{60}{120}$, $P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2}$ – все правильно!

Из (12) следует $P(AB)=P(B)P(A/B)$. Меняя местами A и B, получаем
правило (формулу) умножения вероятностей

$$\boldsymbol{P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)} \qquad (13)$$

Это правило можно распространить на умножение трех, четырех и более событий

$$\boldsymbol{P(ABC)=P(A)P(B/A)P(C/AB)} \qquad (13')$$

$$\boldsymbol{P(ABCD)=P(A)P(B/A)P(C/AB)P(D/ABC)} \qquad (13'')$$

Пример [5] 64. В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.

Решение Введем два события: A(первый учебник в переплете), B(второй учебник в переплете). Тогда по (13) $P(AB)=P(A)P(B/A)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

Другое решение: $P=\frac{m}{n}=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{\frac{3\cdot 2}{2!}}{\frac{6\cdot 5}{2!}}=\frac{3\cdot 2\cdot 2!}{2!\cdot 6\cdot 5}=\frac{1}{5}$

Пример Из колоды 36 карт извлекли три. Какова вероятность, что все три – бубны?

Решение Ранее мы уже решили эту задачу

$P = \frac{m}{n} = \frac{C_9^3}{C_{36}^3} = \frac{\frac{9\cdot8\cdot7}{3!}}{\frac{36\cdot35\cdot34}{3!}} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot36\cdot35\cdot34} = \frac{1}{85}$

Теперь решим ее с помощью правила умножения вероятностей (13′). Введем три события: *A*(первая карта бубна), *B*(вторая карта бубна), *C*(третья карта бубна), тогда *ABC* (все три карты бубны), как раз то, что нам нужно. По (13′) $P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB) = \frac{9}{36}\cdot\frac{8}{35}\cdot\frac{7}{34} = \frac{1}{85}$ – тот же ответ.

Пример [5] 69. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что он знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

Решение Введем три события: *A*(студент знает первый вопрос), *B*(студент знает второй вопрос), *C*(студент знает третий вопрос). Тогда по (13′) $P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB) = \frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23} = \frac{57}{115}$

Другое решение: $P(AB) = \frac{C_{20}^3}{C_{25}^3} = \frac{\frac{20\cdot19\cdot18}{3!}}{\frac{25\cdot24\cdot23}{3!}} = \frac{20\cdot19\cdot18\cdot3!}{3!\cdot25\cdot24\cdot23} = \frac{57}{115}$

Пример Четыре незнакомых между собой человека вошли в лифт на первом этаже восьмиэтажного дома. Считая, что никто из них не намеревается возвратиться на первый этаж и что вероятность выхода каждого из них на любом из оставшихся восьми этажах одинакова, найти вероятность, что все четыре выйдут на разных этажах?

Решение Ранее мы уже решили эту задачу

$P = \frac{m}{n} = \frac{A_8^4}{\bar{A}_8^4} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{8\cdot8\cdot8\cdot8} = \frac{105}{256}$

Теперь решим с помощью правила умножения вероятностей (13′′). Итак, первый человек вышел, где ему угодно (на любом из восьми этажей), вероятность этого события равна 1 (ведь где-нибудь, да он выйдет из лифта). Затем второй человек вышел, где ему угодно, но, по условию задачи, он не должен выйти на том же этаже, где вышел первый, поэтому у него на выбор не 8 этажей, а 7, и вероятность такого события уже не единица, а $\frac{7}{8}$. Затем третий человек вышел, где ему угодно, но, по условию задачи, он не должен выйти на тех двух этажах, где вышли первый и второй, поэтому у него на выбор не 8 этажей, а 6, и вероятность такого события равна $\frac{6}{8}$. Наконец, четвертый человек вышел, где ему угодно, но, по условию задачи, он не должен выйти на тех трех этажах, где вышли первые три, поэтому у него на выбор не 8 этажей, а 5, и вероятность такого события равна $\frac{5}{8}$. Перемножая полученные вероятности, получаем

$P = 1 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{105}{256}$ – тот же ответ.

Пример Из колоды 36 карт извлекли четыре. Какова вероятность, что все они разных мастей?

Решение Пусть первая карта – какая угодно, вероятность этого события равна 1. Далее, вторая карта не такой масти, как первая, вероятность этого события равна $\frac{27}{35}$, поскольку в колоде остались 35 карт. Далее, третья карта не такой масти, как первые две, вероятность этого события равна $\frac{18}{34}$, поскольку в колоде остались 34 карты. Наконец, четвертая карта не такой масти, как первые три, вероятность этого события равна $\frac{9}{33}$, поскольку в колоде остались 33 карты. Перемножая полученные вероятности, получаем

$$P = 1 \cdot \frac{27}{35} \cdot \frac{18}{34} \cdot \frac{9}{33} = \frac{27}{35} \cdot \frac{9}{17} \cdot \frac{3}{11} = \frac{729}{6545}$$

Другой способ решения: $P = \frac{m}{n} = \frac{C_9^1 C_9^1 C_9^1 C_9^1}{C_{36}^4} = \frac{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}{\frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{4!}} = \frac{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4!}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33} = \frac{729}{6545}$.

Пример Предстоит разместить девять незнакомых между собой туристов с разными фамилиями в трех номерах гостиницы – четырехместном, трехместном и двухместном. Считая каждый вариант размещения равновозможным, найти вероятность, что Иванов будет ночевать в четырехместном номере, а Петров – в трехместном.

Решение И эту задачу мы уже решили ранее

$$P = \frac{m}{n} = \frac{P_{3,2,2}}{P_{4,3,2}} = \frac{\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}}{\frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!}} = \frac{7! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2!}{9! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{1}{6}$$

Теперь решим ее более коротким способом, с помощью правила умножения вероятностей. Представим себе, что туристы распределяют между собой номера гостиницы по жребию (что как раз соответствует условию задачи о равновозможности любого размещения). Итак, в урне 9 бумажек, на четырех из них изображена цифра четыре – кто вытянет эту бумажку, будет ночевать в четырехместном номере, на трех бумажках изображена цифра три – кто вытянет эту бумажку, будет ночевать в трехместном номере, на оставшихся двух бумажках изображена цифра два – кто вытянет эту бумажку, будет ночевать в двухместном номере. Пусть событие A(Иванов вытянул бумажку с номером 4), событие B(Петров вытянул бумажку с номером 3). Тогда событие AB – как раз то, что нас интересует. По (13)

Ответ $P(AB) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$ – тот же ответ.

Независимость событий

Говорят, что событие A не зависит от события B, если его условная вероятность совпадает с безусловной, т.е.

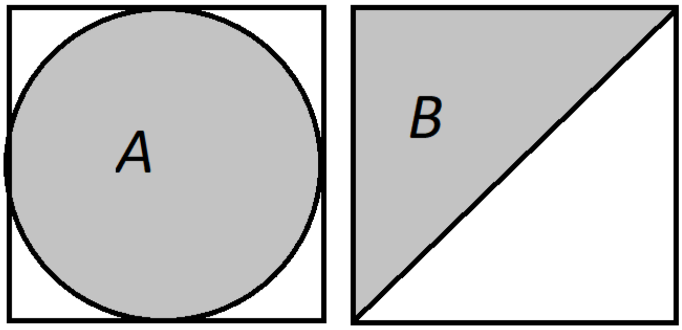
A не зависит от B, если $P(A/B) = P(A)$ (14)

Иными словами, тот факт, что событие B произошло, никак не повлиял на вероятность события A.

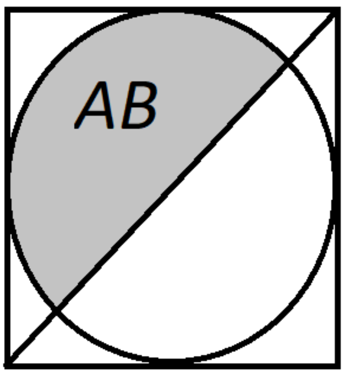
Пример Из колоды 36 карт извлекли одну. Введем два события: A(это туз), B(это карта красной масти). Тогда $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, $P(A/B) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$.
С другой стороны $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, $P(B/A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Вывод: A не зависит от B и B не зависит от A.

Пример Пусть в квадрате со стороной $2a$ заданы две области, A и B,



и пусть событие A – это попадание случайной точки в область A, а событие B – это попадание случайной точки в область B (предполагается, что попадание случайной точки в любую часть квадрата равновозможно). Тогда безусловные вероятности будут
$P(A) = \frac{S_{круга}}{S_{квадрата}} = \frac{\pi a^2}{4a^2} = \frac{\pi}{4}$, $P(B) = \frac{S_{треугольника}}{S_{квадрата}} = \frac{1}{2}$,



условные вероятности
$P(A/B) = \frac{S_{AB}}{S_{треугольника}} = \frac{S_{полукруга}}{S_{треугольника}} = \frac{\pi}{4}$, $P(B/A) = \frac{S_{AB}}{S_{круга}} = \frac{S_{полукруга}}{S_{круга}} = \frac{1}{2}$,

Вывод: A не зависит от B и B не зависит от A.

Оказывается, в теории вероятностей независимость может быть только взаимной, т.е. если A не зависит от B, то и B не зависит от A. Покажем это.

Пусть A не зависит от B, т.е. справедливо равенство (14). Подставим (14) в (13) $P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$, $P(A)P(B/A) = P(B)P(A)$, и, сокращая на $P(A)$, получим $P(B/A) = P(B)$, что и означает, что B не зависит от A.

Поэтому говорят просто, что события A и B независимы.

Понятие независимости распространяется и на несколько событий. Приведем определение из [1]: Несколько событий называются взаимно независимыми, если каждое из них не зависит от произведения любого числа остальных событий и от каждого из них в отдельности.

Замечание На практике обычно независимость событий либо указывается в условии задачи («проводится серия независимых испытаний», «орудие несколько раз стреляет по цели по независимой наводке» и т.д.) либо устанавливается исходя из здравого смысла (например, если подброшены несколько монет или несколько игральных костей, то очевидно, что то, что выпадет на каждой монете или кости, не зависит от того, что выпадет на остальных).

Пусть события A и B независимы, т.е. справедливо (14). Подставляя (14) в (13), получаем

правило умножения вероятностей для независимых событий

Если A и B независимы, то $P(AB) = P(A)P(B)$ (15)

Это правило для трех и четырех событий выглядит так

Если A, B и C независимы, то $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, (15′)

Если A, B, C и D независимы, то $P(ABCD) = P(A)P(B)P(C)P(D)$, (15″)

и т.д.

Пример Подброшены четыре монеты. Какова вероятность, что на всех выпадет герб?

Решение Пусть событие A(герб на первой монете), B(герб на второй монете), C(герб на третьей монете) и D(герб на четвертой монете), вероятность каждого из них равна $\frac{1}{2}$.

Тогда произведение этих событий $ABCD$ означает, что выпали четыре герба – как раз то, что нас интересует. Поскольку эти события очевидно независимы, то по (15″) **Ответ** $P(ABCD) = P(A)P(B)P(C)P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

Пример Подброшены три игральные кости. Какова вероятность, что на всех выпадет шестерка?

Решение Пусть событие A(шестерка на первой кости), B(шестерка на второй кости), C(шестерка на третьей кости), вероятность каждого из них равна $\frac{1}{6}$. Тогда произведение этих событий ABC означает, что выпали три шестерки – как раз то, что нас интересует. Поскольку эти события очевидно независимы, то по (15′)

Ответ $P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

Формула полной вероятности и формула Байеса

Пусть некоторый эксперимент приводит к группе гипотез. Напомним, что несколько событий $H_1, H_2, \dots, H_k$ являются гипотезами, если они образуют полную группу, т.е.

$$H_1 + H_2 + \dots + H_k = I \quad (16)$$

и попарно несовместны, т.е.

$$H_i H_k = \varnothing, \; i \neq k \quad (17)$$

(здесь I - достоверное, $\varnothing$ - невозможное события).

Пусть A – случайное событие, которое может наступить (или не наступить) в результате этого эксперимента. Тогда, с учетом (16)

$$P(A) = P(IA) = P((H_1 + H_2 + \dots + H_k)A) = P(H_1A + H_2A + \dots + H_kA).$$

Но события $H_1A, H_2A, \dots, H_kA$ – попарно несовместны (в самом деле, произведение любых двух из них $H_iAH_kA = H_iH_kAA = \varnothing A = \varnothing$, с учетом (17)), поэтому применима аксиома аддитивности (5′)

$$P(A) = P(H_1A + H_2A + \dots + H_kA) = P(H_1A) + P(H_2A) + \dots + P(H_kA).$$

Применяя к каждому слагаемому в правой части этого равенства правило умножения вероятностей (13), получаем **формулу полной вероятности**

$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+\ldots+P(H_k)P(A/H_k)=\sum_{i=1}^{k} P(H_i)P(A/H_i)$ (18)

Применим правило умножения вероятностей (13) к произведению H_iA , где H_i – любая из гипотез

$P(H_iA) = P(H_i)P(A/H_i) = P(A)P(H_i/A)$,

Из этого равенства получаем

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(H_i)P(A/H_i)}, \qquad (19)$$

(19) и есть **формула Байеса**. При этом $P(H_i)$ называют априорной вероятностью гипотезы H_i («априори» - до опыта), а $P(H_i/A)$ называют апостериорной вероятностью гипотезы H_i («апостериори» - после опыта). Тот факт, что событие произошло, позволяет нам переоценить исходные (априорные) вероятности гипотез.

Пример [3] 18.226 На складе находятся холодильники, выпущенные на московском заводе (их 50%), на минском заводе (их 30%), и на брянском заводе (их 20%). Среди московских холодильников процент брака составляет 10%, среди минских – 20% и среди брянских – 30%. Какова вероятность, что случайным образом выбранный из этого склада холодильник – бракованный? Если холодильник оказался бракованным, то какова вероятность, что он изготовлен а) на московском заводе? б) на минском заводе?
в) на брянском заводе?

Решение Введем три гипотезы: H_1 - выбранный холодильник изготовлен на московском заводе, априорная вероятность этой гипотезы $P(H_1) = 0,5$, H_2 - выбранный холодильник изготовлен на минском заводе, априорная вероятность этой гипотезы $P(H_2) = 0,3$ и H_3 - выбранный холодильник изготовлен на брянском заводе, априорная вероятность этой гипотезы $P(H_3) = 0,2$. Пусть событие A(холодильник – бракованный). Тогда по формуле полной вероятности (18)

$$P(A) = P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) + P(H_3)\,P(A/H_3) =$$
$$0,5\cdot 0,1 + 0,3\cdot 0,2 + 0,2\cdot 0,3 = 0,17$$

Теперь переоценим вероятности гипотез:
$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,5\cdot 0,1}{0,17} = \frac{5}{17}$ – видим, что вероятность первой гипотезы сильно уменьшилась. Это не удивительно – ведь у холодильников, изготовленных на московском заводе, самый маленький процент брака, и, раз

мы выбрали бракованный телевизор, то вероятность того, что он из Москвы, должна уменьшиться.

$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}2}{0{,}17} = \frac{6}{17}$ – вероятность этой гипотезы мало изменилась.

$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}3}{0{,}17} = \frac{6}{17}$ – видим, что вероятность третьей гипотезы сильно возросла, что не удивительно – ведь у холодильников, изготовленных на брянском заводе, самый большой процент брака, и, раз мы выбрали бракованный телевизор, то вероятность того, что он из Брянска, должна возрасти.

Пример [3] 18.225 Прибор может включиться в двух режимах - штатном и нештатном. Штатный режим наблюдается в 80% всех случаев работы прибора; нештатный — в 20%. Вероятность выхода прибора из строя в штатном режиме равна 0,1; в нештатном — 0,7.
а) Найти вероятность выхода прибора из строя.
б) Если прибор вышел из строя, то какова вероятность, что он включился штатно?

Решение Введем две гипотезы: H_1 – прибор включился штатно, априорная вероятность этой гипотезы $P(H_1) = 0{,}8$, H_2 - прибор включился нештатно, априорная вероятность этой гипотезы $P(H_2) = 0{,}2$. Пусть событие A(прибор вышел из строя). Тогда по формуле полной вероятности (18)

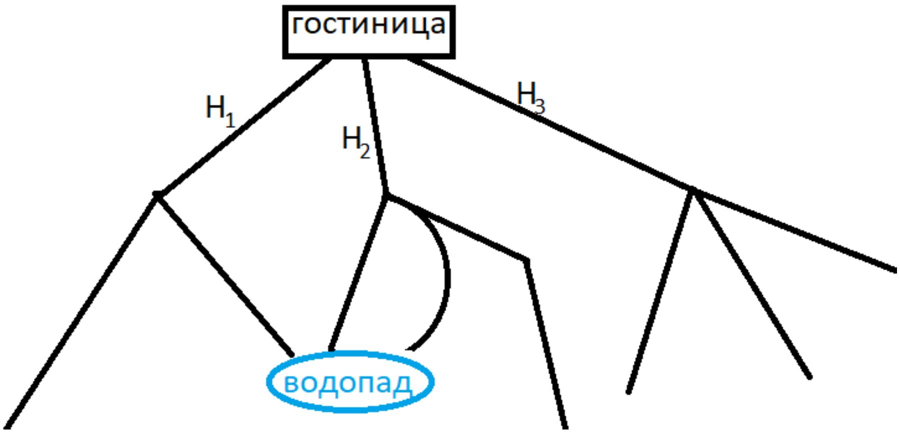
$$P(A) = P(H_1)\, P(A/H_1) + P(H_2)\, P(A/H_2) = 0{,}8\cdot 0{,}1 + 0{,}2\cdot 0{,}7 = 0{,}22$$

Теперь переоценим вероятности гипотез:

$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}8\cdot 0{,}1}{0{,}22} = \frac{4}{11}$ – вероятность первой гипотезы сильно уменьшилась. Это не удивительно – ведь прибор чаще выходит из строя именно при нештатном включении.

$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}7}{0{,}22} = \frac{7}{11}$ – вероятность второй гипотезы выросла более, чем в три раза!

Пример [3] 18.231 Турист, не зная местности (ее план прилагается), вечером вышел из гостиницы с целью полюбоваться на водопад. Какова вероятность, что турист дойдет этим вечером до водопада? Если турист дошел до водопада, то какова вероятность, что, выходя из гостиницы, он выбрал
а) дорогу H_1? б) дорогу H_2? в) дорогу H_3?



Решение Введем три гипотезы:
H_1 - выходя из гостиницы, турист выбрал дорогу H_1,
H_2 - турист выбрал дорогу H_2,
H_3 - турист выбрал дорогу H_3.

Поскольку мы ничего не знаем о привычках данного туриста (например, что он на незнакомом перекрестке обычно выбирает правую дорогу), то мы вынуждены предположить равновозможность выбора любой из трех дорог. Поэтому априорные вероятности гипотез

$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$

Пусть событие A(турист дошел до водопада). Тогда при выборе дороги H_1 будет $P(A/H_1) = \frac{1}{2}$, так как до водопада дорога еще раз разветвляется на две дороги, из которых к водопаду ведет лишь одна), аналогично $P(A/H_2) = \frac{2}{3}$ и $P(A/H_3) = 0$ (третья дорога вообще не ведет к водопаду) и по формуле полной вероятности (18)

$$P(A) = P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) + P(H_3)\,P(A/H_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{7}{18}$$

Теперь переоценим вероятности гипотез:

$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{7}{18}} = \frac{3}{7}$ – вероятность первой гипотезы слегка возросла.

$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7}$ – вероятность второй гипотезы сильно возросла. Это не удивительно – со второй дороги более всего шансов пройти к водопаду.

$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0}{\frac{7}{18}} = 0 -$ вероятность третьей гипотезы «ушла в ноль». Это не удивительно – ведь если турист выбрал дорогу H_3, то он точно до водопада этим вечером не дойдет.

Пример 9 книг разных авторов случайным образом расставлены на полке. Какова вероятность, что томики Пушкина и Лермонтова окажутся рядом?

Решение Мы уже решали эту задачу ранее
n=9! , m=2·8! $P = \frac{m}{n} = \frac{2\cdot 8!}{9!} = \frac{2}{9}$
Приведем еще одно решение, с помощью формулы полной вероятности.

Введем две гипотезы: H_1 – томик Пушкина оказался на краю полки, H_2 - томик Пушкина оказался не на краю полки. Тогда априорные вероятности этих гипотез $P(H_1) = \frac{2}{9}$, $P(H_2) = \frac{7}{9}$.

Пусть событие A(томик Лермонтова оказался рядом с томиком Пушкина) – то, что и спрашивают в задаче.
Тогда $P(A/H_1) = \frac{1}{8}$ (раз томик Пушкина на краю полки, то для томика Лермонтова подходит только одно место из восьми, рядом с томиком Пушкина),
$P(A/H_2) = \frac{2}{8}$ (раз томик Пушкина не на краю полки, то для для томика Лермонтова подходят уже два места из восьми – справа и слева от томика Пушкина), и формуле полной вероятности (18)

$P(A) = P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8} = \frac{2}{9}$ – тот же ответ.

Пример 9 книг разных авторов случайным образом расставлены на полке. Какова вероятность, что между томиками Пушкина и Лермонтова окажутся ровно одна книга, неважно какая?

Решение Ранее мы уже решили эту задачу:
n=9! , m=2·7·7! , $P = \frac{m}{n} = \frac{2\cdot 7\cdot 7!}{9!} = \frac{7}{36}$
Приведем еще одно решение, с помощью формулы полной вероятности.
Введем две гипотезы: H_1(томик Пушкина оказался на краю полки или рядом с краем полки – эти места на следующем рисунке отмечены крестиками), H_2(томик Пушкина оказался на краю полки и не рядом с краем – эти места на рисунке оставлены белыми).

Тогда априорные вероятности этих гипотез $P(H_1) = \frac{4}{9}$, $P(H_2) = \frac{5}{9}$.
Пусть событие A(томик Лермонтова оказался через одну книгу от томика Пушкина – как раз то, что и спрашивают в задаче). Тогда $P(A/H_1) = \frac{1}{8}$ (раз томик Пушкина на краю полки или рядом с ее краем, то для томика Лермонтова подходит только одно место из восьми), $P(A/H_2) = \frac{2}{8}$ (раз томик Пушкина не на краю полки и не рядом с краем, то для томика Лермонтова подходят уже два места из восьми, через одну книгу справа и слева от томика Пушкина). Применим формулу полной вероятности (18)

$P(A) = P(H_1)\ P(A/H_1) + P(H_2)\ P(A/H_2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{7}{36}$ – тот же ответ.

<u>Пример</u> 9 книг разных авторов случайным образом расставлены на полке. Какова вероятность, что между томиками Пушкина и Лермонтова окажется ровно две книги, неважно какие?

<u>Решение</u> И эту задачу мы уже решили ранее
n=9! , m=2·A_7^2·6! , $P = \frac{m}{n} = \frac{2 \cdot A_7^2 \cdot 6!}{9!} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6!}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!} = \frac{1}{6}$.
Приведем еще одно решение, с помощью формулы полной вероятности. Эта задача аналогична предыдущей, только мест для томика Пушкина в гипотезе H_1 будет больше, а именно шесть (они отмечены на следующем рисунке крестиками), а мест для томика Пушкина в гипотезе H_2 будет меньше, а именно три (они оставлены на рисунке белыми квадратиками).

Тогда априорные вероятности этих гипотез $P(H_1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, $P(H_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
Пусть событие A(томик Лермонтова оказался через две книги от томика Пушкина – что и спрашивают в задаче). Тогда $P(A/H_1) = \frac{1}{8}$, $P(A/H_2) = \frac{2}{8}$.
Применим формулу полной вероятности (18)

$P(A) = P(H_1)\ P(A/H_1) + P(H_2)\ P(A/H_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{6}$ – тот же ответ.

<u>Пример</u> [5] 93. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 - на заводе №2 и 18 - на заводе №3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах №2 и №3, эти вероятности соответственно равны

0,6 и 0,9. а) Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества. б) Если деталь оказалась отличного качества, то какова вероятность, что она изготовлена на заводе №1? №2? №3?

Решение Введем три гипотезы:
H_1 - деталь изготовлена на заводе № 1, априорная вероятность этой гипотезы $P(H_1) = 12/50 = 0{,}24$,
H_2 - деталь изготовлена на заводе № 2, априорная вероятность этой гипотезы $P(H_2) = 20/50 = 0{,}4$,
H_3 - деталь изготовлена на заводе № 3, априорная вероятность этой гипотезы $P(H_3) = 18/50 = 0{,}36$.
Пусть событие A(выбранная деталь отличного качества). Тогда по формуле полной вероятности (18)
$P(A) = P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) + P(H_3)\,P(A/H_3) =$
$0{,}24{\cdot}0{,}9 + 0{,}4{\cdot}0{,}6 + 0{,}36{\cdot}0{,}9 = 0{,}78$

Теперь переоценим вероятности гипотез:
$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}24\cdot 0{,}9}{0{,}78} = 0{,}277$
$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{0{,}78} = 0{,}307$
$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{0{,}36\cdot 0{,}9}{0{,}78} = 0{,}415$.

Пример [3] 18.184 Допустим, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин – дальтоники. На обследование прибыло одинаковое число мужчин и женщин. Случайным образом выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина?

Решение Введем две гипотезы: H_1 – выбранное лицо – женщина, априорная вероятность этой гипотезы $P(H_1) = 0{,}5$, H_2 - выбранное лицо – мужчина, априорная вероятность этой гипотезы $P(H_2) = 0{,}5$. Пусть событие A(это лицо – дальтоник). Тогда по формуле полной вероятности (18)

$$P(A) = P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{400} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20} = \frac{21}{800}$$

Теперь переоценим вероятности гипотез:
$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{1}{21}$ – вероятность первой гипотезы сильно уменьшилась, более, чем в 10 раз! Это не удивительно – ведь среди женщин дальтоников в 20 раз меньше.

$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{800}{2 \cdot 20 \cdot 21} = \frac{20}{21}$ – вероятность второй гипотезы очень сильно выросла!

Пример [5] 98. В пирамиде 10 винтовок, из них 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для обычной винтовки эта вероятность равна 0,8.
а) Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень из наудачу взятой винтовки. б) Если стрелок поразил мишень, то какова вероятность, что он выбрал винтовку с оптическим прицелом? обычную винтовку?

Решение Введем две гипотезы: H_1 – стрелок выбрал винтовку с оптическим прицелом, априорная вероятность этой гипотезы $P(H_1) = 0{,}4$, H_2 - стрелок выбрал обычную винтовку, априорная вероятность этой гипотезы $P(H_2) = 0{,}6$. Пусть событие A(стрелок поразил мишень). Тогда по формуле полной вероятности (18)

$$P(A) = P(H_1)\, P(A/H_1) + P(H_2)\, P(A/H_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}95 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}86$$

Теперь переоценим вероятности гипотез:

$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}95}{0{,}86} = 0{,}44$ – вероятность первой гипотезы выросла,
$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}8}{0{,}86} = 0{,}56$ – вероятность второй гипотезы уменьшилась.

Пример [6] 3.31 Имеются три урны: в первой из них 8 белых шаров и 2 черных; во второй 6 белых шаров и 4 черных; в третьей — 5 белых шаров (черных нет). Некто выбирает **наугад** одну из урн и **наугад** вынимает из нее шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что шар вынут из первой, второй или третьей урны.

Решение Обратим внимание, что выбор шара осуществляется в два этапа – сначала выбираем одну урну из трех, затем из нее выбираем шар. Гипотезы:
H_1 – некто выбрал первую урну,
H_2 – некто выбрал вторую урну,
H_3 – некто выбрал третью урну,
Пусть событие A – извлечен белый шар.

$$P(A) = P(H_1)\, P(A/H_1) + P(H_2)\, P(A/H_2) + P(H_3)\, P(A/H_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{4}{5}$$

$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{3}$, $P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}$,

$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{12}$.

<u>Пример</u> [6] 3.18. В группе студентов 10 отличников, 7 «хорошистов» и 3 троечника. Отличники всегда получают только «отлично», «хорошисты» с равной вероятностью получают «хорошо» и «отлично», троечники с равной вероятностью получают «удовлетворительно», «хорошо» и «отлично». На экзамен случайным образом вызван студент. Найти вероятность того, что он получит «хорошо»? б) Если он получил «хорошо», то какова вероятность, что он отличник? хорошист? троечник?

<u>Решение</u> Гипотезы:
H_1 – выбрали отличника,
H_2 – выбрали хорошиста,
H_3 – выбрали троечника,
Пусть событие A – вызванный студент получил «хорошо».

$P(A) = P(H_1)\, P(A/H_1) + P(H_2)\, P(A/H_2) + P(H_3)\, P(A/H_3) =$

$= \frac{10}{20}\cdot 0 + \frac{7}{20}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{3} = \frac{9}{40}$, $P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{20}\cdot 0}{\frac{9}{40}} = 0$,

$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{20}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{9}{40}} = \frac{7}{9}$, $P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{9}{40}} = \frac{2}{9}$.

<u>Пример</u> [3] 18.250 В группе - 25 студентов, среди них 10 отличников, 7 «хорошистов», 5 – троечников и 3 двоечника. Отличники выучили все 25 экзаменационных вопросов, «хорошисты» - 20, троечники – 15, двоечники – 10. Случайным образом вызванный студент успешно ответил на оба предложенных на экзамене вопроса. Какова вероятность, что он а) отличник? б) хорошист? в) троечник? г) двоечник?

<u>Решение</u> Введем гипотезы: H_1 студент - отличник, H_2 студент – «хорошист», H_3 студент - троечник, H_4 студент - двоечник.
$P(A) = P(H_1)\, P(A/H_1) + P(H_2)\, P(A/H_2) + P(H_3)\, P(A/H_3) + P(H_4)\, P(A/H_4) =$

$= \frac{10}{25}\cdot 1 + \frac{7}{25}\cdot\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24} + \frac{5}{25}\cdot\frac{15}{25}\cdot\frac{14}{24} + \frac{3}{25}\cdot\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24} = \frac{499}{750}$

$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{25}\cdot 1}{\frac{499}{750}} = \frac{300}{499}$, $\quad P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{25}\cdot\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}}{\frac{499}{750}} = \frac{133}{499}$,

$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{25}\cdot\frac{15}{25}\cdot\frac{14}{24}}{\frac{499}{750}} = \frac{105}{998}$, $P(H_4/A) = \frac{P(H_4)P(A/H_4)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{25}\cdot\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24}}{\frac{499}{750}} = \frac{27}{998}$.

Пример [6] 3.7. Имеются две урны: в первой 8 белых шаров и 2 черных; во второй 6 белых и 4 черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар. После этого из второй урны берут один шар. а) Найти вероятность того, он будет белым б) если извлеченный из второй урны шар оказался белым, то какова вероятность, что был переложен белый шар?

Решение Гипотезы

H_1 – переложили белый шар,

H_2 – переложили черный шар,

Пусть событие A – из второй урны достали белый шар.

$P(A) = P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) = \frac{4}{5}\cdot\frac{7}{11} + \frac{1}{5}\cdot\frac{6}{11} = \frac{34}{55}$

$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{11}}{\frac{34}{55}} = \frac{4\cdot 7\cdot 55}{5\cdot 11\cdot 34} = \frac{14}{17}$

Пример [3] 18.233 В коробке 10 теннисных мячей, из них 7 новых и 3 игранных. Для первой игры случайным образом выбирают два мяча, после игры их возвращают в коробку. Затем для первой игры снова случайным образом выбирают два мяча. а) Какова вероятность, что на вторую игру выберут два новых мяча? б) Если на вторую игру были выбраны новые мячи, то какова вероятность, что на первую игру также были выбраны новые?

Решение

H_1 – на первую игру выбрали два новых мяча,

H_2 – на первую игру выбрали новый мяч и игранный мяч,

H_3 – на первую игру выбрали два игранных мяча,

A – на вторую игру выбрали два новых мяча.

Априорные вероятности гипотез $P(H_1) = \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}$, $P(H_2) = \frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}$, $P(H_3) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}$

$P(A) = P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) + P(H_3)\,P(A/H_3) =$

$= \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9} + \frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{7\cdot 41}{2\cdot 25\cdot 27} = \frac{287}{1350}$,

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{7\cdot 41}{2\cdot 25\cdot 27}} = \frac{20}{41}, \quad P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}}{\frac{7\cdot 41}{2\cdot 25\cdot 27}} = \frac{15}{41}$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}}{\frac{7\cdot 41}{2\cdot 25\cdot 27}} = \frac{6}{41}$$

Пример [3] 18.229 Больному с первой группой крови можно перелить только кровь первой группы; если у больного вторая или третья группа крови, ему можно перелить кровь или той же группы или первой; больному с четвертой группой крови можно перелить кровь любой группы. Среди населения 34% имеют первую группу крови, 37% - вторую, 21% - третью и 8% - четвертую. Какова вероятность, что случайно выбранному больному можно перелить кровь случайно выбранного донора? Если переливание прошло успешно, то какова вероятность, что у больного а) первая группа крови б) четвертая группа крови

Решение Гипотезы:
H_1 – у больного 1-я группа крови,
H_2 – у больного 2-я группа крови,
H_3 – у больного 3-я группа крови,
H_4 – у больного 4-я группа крови.
Пусть событие A –кровь перелить можно.

$$P(A) = P(H_1)\, P(A/H_1) + P(H_2)\, P(A/H_2) + P(H_3)\, P(A/H_3) + P(H_4)\, P(A/H_4)$$
$$= 0{,}34\cdot 0{,}34 + 0{,}37\cdot(0{,}34 + 0{,}37) + 0{,}21\cdot(0{,}34 + 0{,}21) + 0{,}08\cdot 1 = 0{,}5738$$

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}34\cdot 0{,}34}{0{,}5738} = 0{,}201$$

$$P(H_4/A) = \frac{P(H_4)P(A/H_4)}{P(A)} = \frac{0{,}08}{0{,}5738} = 0{,}139$$

Пример [3] 18.255 Пусть надежность выявления туберкулеза при рентгеновском исследовании составляет 90% (10% больных остаются неопознанными). В то же время, с вероятностью 1% у здорового человека будет ложно выявлен туберкулез. Была исследована большая группа людей, среди которых 1% болен туберкулезом. Какова вероятность, что человек, признанный больным туберкулезом, действительно болен туберкулезом?

Решение Введем две гипотезы: H_1 – человек действительно болен туберкулезом, априорная вероятность этой гипотезы $P(H_1) = 0{,}001$,

H_2 - человек не болен туберкулезом, априорная вероятность этой гипотезы $P(H_2) = 0{,}999$. Пусть событие A(человек признан больным туберкулезом). Тогда по формуле полной вероятности (18)

$$P(A) = P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) = 0{,}001\cdot 0{,}9 + 0{,}999\cdot 0{,}01$$
$$= 0{,}0009 + 0{,}00999 = 0{,}01089$$

Теперь переоценим вероятности первой гипотезы:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}001\cdot 0{,}9}{0{,}01089} = 0{,}083.$$

Обобщенная биномиальная вероятность.

Пусть проводится n независимых испытаний, причем в каждом из них событие A может наступить (назовем это успехом) или не наступить (назовем это неудачей). Вероятность успеха в i-испытании равна p_i , соответственно, вероятность неудачи равна $q_i = 1-p_i$. Основной вопрос – какова вероятность того, что в этой серии n независимых испытаний успех наступит ровно k раз (очевидно, $0\le k\le n$).

Рассмотрим частный случай n=3. Пусть сначала k=0 (т.е. нас интересует вероятность того, что в серии трех независимых испытаний успех наступит ноль раз). Очевидно, данный результат может реализоваться только одним способом – неудача при первом испытании, неудача при втором испытании и неудача при третьем испытании, обозначим это так (*неудача*, *неудача*, *неудача*). В силу независимости событий, по формуле (15) мы получаем

$$P(X=0)=P(\textit{неудача},\textit{неудача},\textit{неудача})=P(\textit{неудача})P(\textit{неудача})P(\textit{неудача}) = q_1q_2q_3$$

Пусть теперь k=1 (т.е. нас интересует вероятность того, что в серии трех независимых испытаний успех наступит ровно один раз). Очевидно, данный результат может реализоваться только одним из трех способов (*успех*, *неудача*, *неудача*), (*неудача*, *успех*, *неудача*), (*неудача*, *неудача*, *успех*). Поскольку эти три события попарно несовместны, а испытания независимы, по формулам (5) и (15) мы получаем

$P(X=1) = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3$

Аналогичным образом легко получить

$P(X=2) = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3$

$P(X=3) = p_1p_2p_3$.

Этот подход годится для любых n и k. Например, вероятность того, что в серии четырех независимых испытаний успех наступит ровно два раза, будет

$P(X=2) = p_1p_2q_3q_4 + p_1q_2p_3q_4 + p_1q_2q_3p_4 + q_1p_2p_3q_4 + q_1p_2q_3p_4 + q_1q_2p_3p_4$ (нужно перебрать все случаи, когда из четырех сомножителей ровно два будут «p», всего C_4^2=6 слагаемых).

Замечание При желании, успех и неудачу можно поменять местами, т.е. то, что было успехом, назвать неудачей, и наоборот.

Пример [3] 18/338 Орудие выстрелило по удаляющейся цели три раза по независимой наводке. Вероятность попадания при первом выстреле 0,7, при втором 0,4 и при третьем 0,1. Какова вероятность а) трех промахов? б) ровно одного попадания в цель? в) ровно двух попаданий в цель? г) ровно трех попаданий в цель? д) не более двух попаданий в цель?

Решение Назовем успехом попадание в цель, тогда $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}4$, $p_3 = 0{,}1$, соответственно, вероятности неудач $q_1 = 0{,}3$, $q_2 = 0{,}6$, $q_3 = 0{,}9$. По изложенному выше

а) $P(X=0) = q_1q_2q_3 = 0{,}3{\cdot}0{,}6{\cdot}0{,}9 = 0{,}162$

б) $P(X=1) = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 = 0{,}7{\cdot}0{,}6{\cdot}0{,}9 + 0{,}3{\cdot}0{,}4{\cdot}0{,}9 + 0{,}3{\cdot}0{,}6{\cdot}0{,}1 = 0{,}504$

в) $P(X=2) = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 = 0{,}7{\cdot}0{,}4{\cdot}0{,}9 + 0{,}7{\cdot}0{,}6{\cdot}0{,}1 + 0{,}3{\cdot}0{,}4{\cdot}0{,}1 = 0{,}306$

г) $P(X=3) = p_1p_2p_3 = 0{,}7{\cdot}0{,}4{\cdot}0{,}1 = 0{,}028$.

д) $P(X< 2) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}162 + 0{,}504 = 0{,}666$

Пример [5] 50. При возникновении пожара первый сигнализатор сработает с вероятностью 0,95, второй сигнализатор сработает с вероятностью 0,9 (сигнализаторы не зависят друг от друга). Найти вероятность того, что при возникновении пожара сработает только один из сигнализаторов.

Решение Назовем успехом срабатывание сигнализатора при пожаре, тогда $p_1 = 0{,}95$, $p_2 = 0{,}9$, соответственно, вероятности неудач $q_1 = 0{,}05$, $q_2 = 0{,}1$.
$P(X=1) = p_1q_2 + q_1p_2 = 0{,}95{\cdot}0{,}1 + 0{,}05{\cdot}0{,}9 = 0{,}14$

Пример [3] 18.232 Три стрелка произвели по выстрелу. Известно, что вероятность поражения мишени при одном выстреле составляет $p_1 = 0{,}8$ для первого стрелка, $p_2 = 0{,}7$ для второго стрелка и $p_3 = 0{,}6$ для третьего стрелка. Найти вероятность того, что в мишени появилось ровно две пробоины.

Решение Назовем успехом попадание в цель, тогда $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}7$, $p_3 = 0{,}6$, соответственно, вероятности неудач $q_1 = 0{,}2$, $q_2 = 0{,}3$, $q_3 = 0{,}4$. По изложенному выше
$P(X{=}2) = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 = 0{,}8{\cdot}0{,}7{\cdot}0{,}4 + 0{,}8{\cdot}0{,}3{\cdot}0{,}6 + 0{,}2{\cdot}0{,}7{\cdot}0{,}6 = 0{,}452$

Пример В первом семестре студент должен получить четыре зачета по разным дисциплинам. Согласно многолетней статистике, студент получает зачет по первой дисциплине с вероятностью 0,9; по второй — с вероятностью 0,95; по третьей — с вероятностью 0,8 и по четвертой — с вероятностью 0,85. Найти вероятность того, что студент в первом семестре получит: а) все четыре зачета б) ровно три зачета в) ровно два зачета г) не менее двух зачетов (из четырех).

Решение Назовем успехом благополучное получение зачета, тогда $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}95$, $p_3 = 0{,}8$, $p_4 = 0{,}85$, соответственно, вероятности неудач $q_1 = 0{,}1$, $q_2 = 0{,}05$, $q_3 = 0{,}2$, $q_4 = 0{,}15$.

а) $P(X{=}4) = p_1p_2p_3p_4 = 0{,}9{\cdot}0{,}95{\cdot}0{,}8{\cdot}0{,}85 = 0{,}5814$

б) $P(X{=}3) = p_1p_2p_3q_4 + p_1p_2q_3p_4 + p_1q_2p_3p_4 + q_1p_2p_3p_4 = 0{,}9{\cdot}0{,}95{\cdot}0{,}8{\cdot}0{,}15$
$+ 0{,}9{\cdot}0{,}95{\cdot}0{,}2{\cdot}0{,}85 + 0{,}9{\cdot}0{,}05{\cdot}0{,}8{\cdot}0{,}15 + 0{,}1{\cdot}0{,}95{\cdot}0{,}8{\cdot}0{,}85 = 0{,}34315$,

в) $P(X{=}2) = p_1p_2q_3q_4 + p_1q_2p_3q_4 + p_1q_2q_3p_4 + q_1p_2p_3q_4 + q_1p_2q_3p_4 + q_1q_2p_3p_4$
$= 0{,}9{\cdot}0{,}95{\cdot}0{,}2{\cdot}0{,}15 + 0{,}9{\cdot}0{,}05{\cdot}0{,}8{\cdot}0{,}15 + 0{,}9{\cdot}0{,}05{\cdot}0{,}2{\cdot}0{,}85 + 0{,}1{\cdot}0{,}95{\cdot}0{,}8{\cdot}0{,}15$
$+ 0{,}1{\cdot}0{,}95{\cdot}0{,}2{\cdot}0{,}85 + 0{,}1{\cdot}0{,}05{\cdot}0{,}8{\cdot}0{,}85 = 0{,}06965$

г) $P(X{\geq}2) = P(X{=}2) + P(X{=}3) + P(X{=}4) = 0{,}06965 + 0{,}34315 + 0{,}5814 = 0{,}9942$

Схема Бернулли и биномиальная вероятность

Рассмотрим упрощенный вариант предыдущей задачи - пусть все испытания одинаковы, т.е. вероятности успеха в каждом испытании одинаковы и равны p, соответственно, вероятности неудач в каждом испытании также одинаковы и равны $q{=}1-p$. Это и есть схема Бернулли. Основной вопрос тот же – какова вероятность, что в этой серии n независимых испытаний успех наступит ровно k раз (очевидно, $0{\leq}k{\leq}n$).

Опять сначала рассмотрим частный случай $n{=}3$. Из полученных ранее формул для обощенной биномиальной вероятности мы получаем

$P(X{=}0) = qqq = q^3 = C_3^0 p^0 q^3$

$P(X=1) = pqq + qpq + qqp = 3pq^2 = C_3^1 p^1 q^2$

$P(X=2) = ppq + pqp + qpp = 3p^2q^1 = C_3^2 p^2 q^1$

$P(X=3) = ppp = p^3 = C_3^3 p^3 q^0$

Этот результат легко обобщается на случай произвольных n и k

$$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (20)$$

Это и есть формула биномиальной вероятности. Почему биномиальной? Вспомним формулу бинома Ньютона

$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n a^0$

и положим в ней $a = q$, $b = p$

$(q+p)^n = 1^n = 1 = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + ... + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + C_n^n p^n q^0$

или

$(q+p)^n = 1 = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + ... + P(X=n-1) + P(X=n)$

Итак, биномиальные вероятности являются слагаемыми в разложении n-степени бинома $(q+p)^n$ на сумму $(n+1)$ слагаемых. Отсюда и название.

Т.о. сумма всех биномиальных вероятностей (при фиксированном n) равна единице. Это можно было получить и из других соображений – события $(X=k)$ при k =0,1,2,...,n образуют группу гипотез и по свойству (8) сумма их вероятностей равна единице.

Пример В городе 10 обувных магазинов. Согласно данным статистики, каждый из них в течение года может обанкротиться с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что в течение года обанкротится ровно три магазина.

Решение Предположим, что все магазины работают (и банкротятся) независимо друг от друга. Назовем успехом банкротство в течение года данного магазина, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $n=10$.

$P(X=3) = C_{10}^3 p^3 q^7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}\, 0{,}2^3 0{,}8^7 = 0{,}2013.$

Пример Орудие выстрелило по цели три раза по независимой наводке. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. Какова вероятность а) трех промахов? б) ровно одного попадания? в) ровно двух попаданий? г) трех попаданий? д) не более двух попаданий?

Решение Здесь n=3, p = 0,4, q = 0,6. По формула биномиальной вероятности

а) $P(X=0) = C_3^0 p^0 q^3 = q^3 = 0{,}6^3 = 0{,}216$

б) $P(X=1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3pq^2 = 3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^2 = 0{,}432$

в) $P(X=2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3p^2 q = 3\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6 = 0{,}288$

г) $P(X=3) = C_3^3 p^3 q^0 = 0{,}4^3 = 0{,}064$

д) $P(X< 2) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}216 + 0{,}432 = 0{,}648$

Пример [5] 116. Отрезок AB разделен точкой C в отношении 2:1. На этот отрезок наудачу брошены четыре точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки C и две—правее.

Решение Назовем успехом попадание случайной точки левее точки C, тогда $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$, n=4.

$P(X=2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4\cdot 3}{2!}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{8}{27}$

Пример [5] 112. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

Решение Назовем успехом выпадение герба, тогда p = 0,5 , q = 0,5, n=5.

$P(X=0) = C_5^0 p^0 q^5 = q^5 = \frac{1}{32}$.

$P(X=1) = C_5^1 p^1 q^4 = 5pq^4 = \frac{5}{32}$

а) $P(X<2) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{3}{16}$

б) $P(X\geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$

Пример Рыбак забросил спиннинг 7 раз. Вероятность поймать рыбку при каждом забросе равна 0,3. Найти вероятность того, что рыбак поймает а) ровно две рыбки б) не более двух рыбок в) более двух рыбок.

Решение Назовем успехом пойманную рыбку, тогда $p = 0{,}3$, $q = 0{,}7$, n=7.

а) $P(X=2) = C_7^2 p^2 q^5 = 21p^2q^5 = = 21 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^5 = 0{,}31765$.

$P(X=0) = C_7^0 p^0 q^7 = q^7 = 0{,}7^7 = 0{,}082354$.
$P(X=1) = C_7^1 p^1 q^6 = 7pq^6 = 7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^6 = 0{,}24707$

б) $P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0{,}082354 + 0{,}24707 + 0{,}31765 = 0{,}64707$.

в) $P(X>2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - 0{,}64707 = 0{,}35293$

Пример [6] 4.1. Прибор состоит из 10 узлов. Надежность (вероятность безотказной работы) для каждого узла равна 0,6. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что в ходе испытаний а) откажет хотя бы один узел б) откажет ровно один узел в) откажут ровно два узла г) откажет не менее двух узлов

Решение Назовем успехом отказ узла, тогда $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, n=10.

а) $P(X>0) = 1 - P(X=0) = 1 - C_{10}^0 p^0 q^{10} = 1 - q^{10} = 1 - 0{,}00605 = 0{,}99395$

б) $P(X=1) = C_{10}^1 p^1 q^9 = 10pq^9 = 10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^9 = 0{,}040311$

в) $P(X=2) = C_{10}^2 p^2 q^8 = 45p^2q^8 = = 45 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^8 = 0{,}12093$

г) $P(X \ge 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0{,}082354 + 0{,}24707 + 0{,}31765 = 0{,}167292$

Приближенная формула Пуассона.

Вычисление биномиальной вероятности при большом числе испытаний n является весьма трудоемким процессом – нужно перемножить очень большое количество чисел. Поэтому математиков давно интересовала проблема получения приближенных формул для биномиальной вероятности при большом числе испытаний n. И такие формулы были получены – это формула Пуассона, хорошо работающая при больших n и малых p, и формулы Муавра-Лапласа, хорошо работающие при больших n и при p близких к 0,5.

Приближенная формула Пуассона (доказательство см. [1] с.31)

$$P(X{=}k) = C_n^k p^k q^{n\text{-}k} \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a},\ \text{где } a{=}np - \text{параметр Пуассона} \qquad (21)$$

Пример Произведено 100 выстрелов по цели, вероятность попадания при каждом выстреле 0,02. Какова вероятность ровно трех попаданий в цель? Решить по точной формуле и с помощью приближенной формулы Пуассона.

Решение. Это задача на биномиальную вероятность
n=100, вероятность успеха p=0,02.

По точной формуле $P(X{=}3) = C_{100}^3 p^3 q^{97} = 0{,}18228$.

Теперь по формуле Пуассона $a{=}np{=}2$, $P(X{=}3) \approx \frac{2^3}{3!} e^{-2} = 0{,}180447$
– точность очень хорошая!

Пример Автоматический станок изготовил 200 шариков, вероятность изготовления бракованного шарика 0,03. Какова вероятность среди этих 200 шариков ровно пять бракованных? Решить по точной формуле и с помощью приближенной формулы Пуассона.

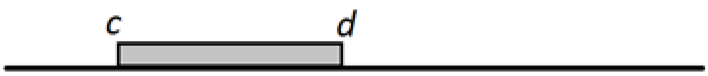
Решение. Это задача на биномиальную вероятность n=200, успехом назовем изготовление бракованного шарика, вероятность успеха p=0,03.

По точной формуле $P(X{=}5) = C_{200}^5 p^5 q^{195} = 0{,}1622$

Теперь по формуле Пуассона $a{=}np{=}6$, $P(X{=}5) = \frac{6^5}{5!} e^{-6} = 0{,}1606$

Распределение Пуассона

Пусть на отрезок числовой оси (конечный или бесконечный) распределяются случайные точки и попадание этих точек на любую часть отрезка равновозможно (например, капли дождя падают на дорожку), причем на единицу длины этого отрезка попадает в среднем ρ точек (иными словами, ρ – линейная плотность точек). Пусть на этом отрезке выделен другой отрезок $[c, d]$ длины l.



Вопрос – какова вероятность, что на $[c, d]$ попадет ровно k точек? Ответ на этот вопрос дает все та же формула Пуассона (здесь X – число точек, попавших на $[c, d]$).

$P(X{=}k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$, где $a{=}\rho l$ - параметр Пуассона, наиболее ожидаемое число точек, попавших на $[c, d]$.

В частности, $P(X{=}0) = \frac{a^0}{0!} e^{-a} = e^{-a}$, $P(X{=}1) = \frac{a^1}{1!} e^{-a} = ae^{-a}$, $P(X{=}2) = \frac{a^2}{2} e^{-a}$

Пример На бензоколонку заезжает в среднем 2 автомобиля в минуту. Какова вероятность, что между 12.20 и 12.23 на бензоколонку заедет ровно 5 автомобилей?

Решение. Здесь ρ = 2 автомобиля в минуту, l=3 минуты, a=ρl=6

$P(X{=}5) = \frac{6^5}{5!} e^{-6} = 0{,}1606$

Пример Неисправный танкер выпускает в среднем три нефтяных пятна на один пройденный километр пути. Какова вероятность, что на выбранном участке реки длиной 4 км танкер выпустит ровно 10 нефтяных пятен?

Решение. Здесь ρ = 3 пятна на км, l=4 км, a=ρl=12

$P(X{=}10) = \frac{12^{10}}{10!} e^{-12} = 0{,}10484$

Пример Дорога длиной 10 км имеет 300 выбоин. Какова вероятность, что выбранный участок дороги длиной 500 м содержит ровно 12 выбоин?

Решение. Сначала приведем решение через биномиальную вероятность. Вероятность того, что данная конкретная выбоина попадет на выбранный участок дороги (назовем это успехом), согласно геометрическому определению вероятности, будет

$p = \frac{0{,}5 \text{ км}}{10 \text{ км}} = 0{,}05,\ q = 1 - p = 0{,}95$

Всего 300 выбоин (300 испытаний, n=300)

$P(X{=}12) = C_{300}^{12} p^{12} q^{288} = 0{,}08325$

Теперь подойдем к этой задаче через распределение Пуассона. Всего на 1 км дороги приходится в среднем ρ = $\frac{300}{10}$ = 30 выбоин, длина выбранного участка дороги l=0,5 км, поэтому a=ρl=15

$P(X{=}12) = \frac{15^{12}}{12!} e^{-15} = 0{,}08286$

Точность очень хорошая!

Нетрудно заметить, что фактически мы применили приближенную формулу Пуассона для вычисления биномиальной вероятности, a=np=300·0.95=15.

<u>Пример</u> [7] Рукопись из 300 страниц содержит 600 опечаток. Какова вероятность того, что выбранные 4 страницы содержат ровно 7 опечаток?

<u>Решение</u>. Сначала приведем решение через биномиальную вероятность. Вероятность того, что данная конкретная опечатка придется на выбранные 4 страницы рукописи (назовем это успехом), согласно геометрическому определению вероятности, будет

$p = \frac{4}{300} = \frac{1}{75} = 0{,}0133$, $q = 1 - p = 0{,}9867$

Всего 600 опечаток (600 испытаний, n=600)

$P(X{=}7) = C_{600}^{7} p^7 q^{593} = 0{,}14064$

Теперь подойдем к этой задаче через распределение Пуассона. Всего на одну страницу рукописи приходится в среднем $\rho = \frac{600}{300} = 2$ опечатки, выбраны l=4 страницы, a=ρl=8

$P(X{=}7) = \frac{8^7}{7!} e^{-8} = 0{,}13959$

Точность очень хорошая!

Нетрудно заметить, что фактически мы применили приближенную формулу Пуассона для вычисления биномиальной вероятности, a=np=600$\cdot \frac{1}{75} = 8$.

Литература:

1. Математика: опорный конспект: [в 8 выпусках] / Санкт-Петербургский государственный технический университет. Санкт-Петербург: Изд-во СПбГТУ, 2001-. Вып. 9: Теория вероятностей. Детализированный конспект. Справочник по одномерным непрерывным распределениям / Ю. Д. Максимов. 2002 (обл. части тиража 2008). 97 с.: ил.; 20 см.

2. Вероятностные разделы математики: учебник для бакалавров технических направлений / Н. Н. Амосова, Б. А. Куклин, С. Б. Макарова [и др.]; под редакцией Ю. Д. Максимова. Санкт-Петербург: Иван Федоров, 2001. 588 с.: ил.; 21 см. ISBN 5-81940-050-X.

3. Сборник задач по математике для втузов: в 4 ч. / под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. [4-е изд., перераб. и доп.]. М.: Физматлит, 2004. ISBN 5940520332.

4. Математика: опорный конспект: [в 8 выпусках] / Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. Санкт-Петербург: Изд-во СПбГТУ, 2001-. Вып. 6: Теория вероятностей: контрольные задания с образцами решений: тесты: конспект-справочник / Ю. Д. Максимов, Б. А. Куклин, Ю. А. Хватов; под ред. Ю. Д. Максимова. 2001. 95 с.: ил.; 20 см.

5. **Гмурман, Владимир Ефимович**. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для вузов / В. Е. Гмурман. 5-е изд., стер. Москва: Высшая школа, 2001. 400 с.: ил.; 22 см. ISBN 5-06-003465-8.

6. **Вентцель, Е. С**. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учебное пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. 3-е изд., стер. Москва: Высшая школа, 2000. 366 с.: ил. (Высшая математика для втузов). ISBN 5060038327.

7. **Вентцель, Елена Сергеевна**. Теория вероятностей: учеб. для втузов / Е. С. Вентцель. Изд. 3-е, испр. Москва: Наука, 1964. 576 с.: ил.

8. **Чистяков, В.П.** Курс теории вероятностей: учеб. для втузов / В. П. Чистяков. Изд. 3-е, испр. Москва: Наука, 1987. 240 с.: ил.

9. **Гнеденко, Борис Владимирович**. Курс теории вероятностей: Учеб. для ун-тов / Б.В. Гнеденко. 5-е изд., стер. Москва: Наука, 1969. 400 с.: ил.

10. **Вандакуров, Игорь Юрьевич**. Конспект лекций по высшей математике для студентов по направлению подготовки «Техносферная безопасность». Тема: Комбинаторика и задачи на классическое определение вероятности: учебное пособие / И. Ю. Вандакуров; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. Санкт-Петербург, 2021. 1 файл (0,68 Мб). 10.18720/SPBPU/5/tr21-19.