Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Г.В. Баденко

Математическая физика: Преобразование Лапласа для решения нестационарных задач в примерах

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2025

УДК 517.958

Баденко Г.В. **Математическая физика: Преобразование Лапласа для решения нестационарных задач в примерах**: – СПб., учеб. пособие. 2025. – 32с.

Главная цель пособия состоит в развитии практических навыков решения уравнений математической физики в частных производных с начально- краевыми условиями. Пособие также будет полезно всем обучающимся, интересующимся поиском аналитических решений задач математической физики.

Пособие предназначено для студентов Физико-механического института, обучающихся по направлениям подготовки 01.06.01 «Математика и механика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», 01.03.03 «Механика и математическое моделирование», 01.04.03 «Механика и математическое моделирование», 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 03.04.01 «Прикладные математика и физика», 15.03.03«Прикладная механика», 15.04.03 «Прикладная механика».

Ил. 5. Библиогр.: 10 назв.

Оглавление

Введение

Использование интегрального преобразования Лапласа (символьный метод, операционный метод) к решению нестационарных неоднородных задач математической физики является наиболее эффективным методом, относящимся к аналитическим методам решения, позволяет получить решение в формульном виде. Полное изложение метода можно изучить в [1-5].

Определение преобразования Лапласа

Пусть $f(t), t \in (0; +\infty)$ - некоторая функция

Рассмотрим интеграл

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \qquad (1)$$

$p \in C; \quad \operatorname{Re} p > a$

Если интеграл (1) сходится при некотором a, то говорят, что этот интеграл определяет преобразование Лапласа от функции $f(t)$. В этом случае функция $f(t)$ действительного аргумента t называется оригиналом (начальной функцией), а $\bar{f}(p)$ - изображением (образом, трансформантой Лапласа). $f(t) \div \bar{f}(p)$

Применяя преобразование Лапласа (трансформацию) к уравнению в частных производных (ограничимся случаем, когда искомая функция есть функция двух аргументов: координаты и времени) будем получать обыкновенное дифференциальное уравнение, в которое автоматически включаются начальные условия.

Неоднородности могут входить в уравнение, в граничные условия (особенно интересны случаи граничных условий, когда они содержат, например, производные по времени) и в начальные условия.

Граничные условия подлежат той же трансформации.

Решив задачу в изображениях, восстанавливаем оригинал по изображению, то есть провести обратное преобразование Лапласа.

Определение обратного преобразования Лапласа

Обратное преобразование - это восстановление функции (оригинала) по ее трансформанте.

Формула обращения (формула Римана-Меллина) имеет вид:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(p)e^{pt}dp \qquad (2)$$

В этой формуле интеграл понимается в смысле главного значения, т.е.

$$\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(p)e^{pt}dp = \lim_{T\to\infty}\int\limits_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \bar{f}(p)e^{pt}dp$$

Чтобы вычислить интеграл (2), следует нужным образом деформировать путь интегрирования и применить обычные методы теории функций комплексной переменной (теорему Коши о вычетах и лемму Жордана для оценки интеграла по контуру большого радиуса). Что и будет рассмотрено в примерах.

Задача нахождения напряжения в линии без потерь

Вход линии без потерь $(R = G = 0)$ подключается к источнику постоянной э.д.с. E

Конец $x = l$ замыкается на землю через нагрузку, которая представляет собой сосредоточенную емкость $\boldsymbol{C_0}$.

Найти напряжение на нагрузке.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + L\frac{\partial I}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Условия: $u(0,t) = E$;

$$\boldsymbol{u(\ell,t)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{C_0}}\int_0^t I(\boldsymbol{l},\boldsymbol{\tau})d\boldsymbol{\tau};$$

$I(x,0) = 0;$

$u(x,0) = 0;$

Проводим преобразование Лапласа

$$\bar{u}(x) = \int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}dt$$

$$\bar{I}(x) = \int_0^\infty I(x,t)e^{-pt}dt$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \div \bar{u}'(x)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} \div \bar{I}'(x)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} \div p\bar{I}(x) - I(x,0) = p\bar{I}(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \div p\bar{u}(x) - u(x,0) = p\bar{u}(x)$$

Исключив $\bar{I}(x)$ из уравнения для трансформант, получаем уравнение для $\bar{u}(x)$ и трансформированные граничные условия:

$$\bar{u}'' - \frac{p^2}{v^2}\bar{u} = 0$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\bar{u}(0) = \frac{E}{p}$$

$$\bar{u}(\ell) = -\frac{1}{C_0 p^2 L}\bar{u}'(\ell)$$

Решаем задачу в изображениях:

$$\bar{u}(x) = Ash\frac{p}{v}(\ell - x) + Bch\frac{p}{v}(\ell - x)$$

$$\bar{u}(0) = Ash\frac{p}{v}(\ell) + Bch\frac{p}{v}(\ell) = \frac{E}{p}$$

$$\bar{u}(\ell) = B = \frac{\alpha E}{p\left[\frac{p\ell}{v}sh\frac{p\ell}{v} + \alpha \cdot ch\frac{p\ell}{v}\right]}$$

$$\bar{u}(\ell) = B = \frac{\alpha E}{p[pTshpT + \alpha chpT]}$$

Где $\alpha = \frac{Cl}{C_0}$ является безразмерной величиной, $T = \frac{\ell}{v}$ – период бегущей волны

Решение $\bar{u}(\ell)$ - однозначная функция, убывающая на бесконечности.

Проведем обратное преобразование Лапласа (по изображению восстановим оригинал), воспользуемся для этого теоремой Римана-Меллина:

$$u(\ell, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \bar{u}(\ell)e^{pt}dp$$

Где контур интегрирования L есть прямая, проходящая параллельно мнимой оси и лежащая в области регулярности функции $\bar{u}(\ell)$

Особые очки $\bar{u}(\ell)$:

1) p=0 – полюс 1-го порядка

2) $\frac{p\ell}{v} sh\frac{p\ell}{v} + \alpha ch\frac{p\ell}{v} = 0$ -у этого уравнения нет вещественных корней

Обозначим: $\frac{p\ell}{v} = i\gamma$

$$-\gamma\, sin\, \gamma + \alpha\, cos\, \gamma => tg(\gamma) = \frac{\alpha}{\gamma}$$

γ_n-вещественные корни уравнения $tg(\gamma) = \frac{\alpha}{\gamma}$, причем $\gamma_n = -\gamma_{-n}$

$p_n = \frac{i\gamma_n}{T}$, где $T = \frac{\ell}{v}$

n=±1, ±2, ±3…

Все особые точки являются простыми полюсами, лежащими на мнимой оси.

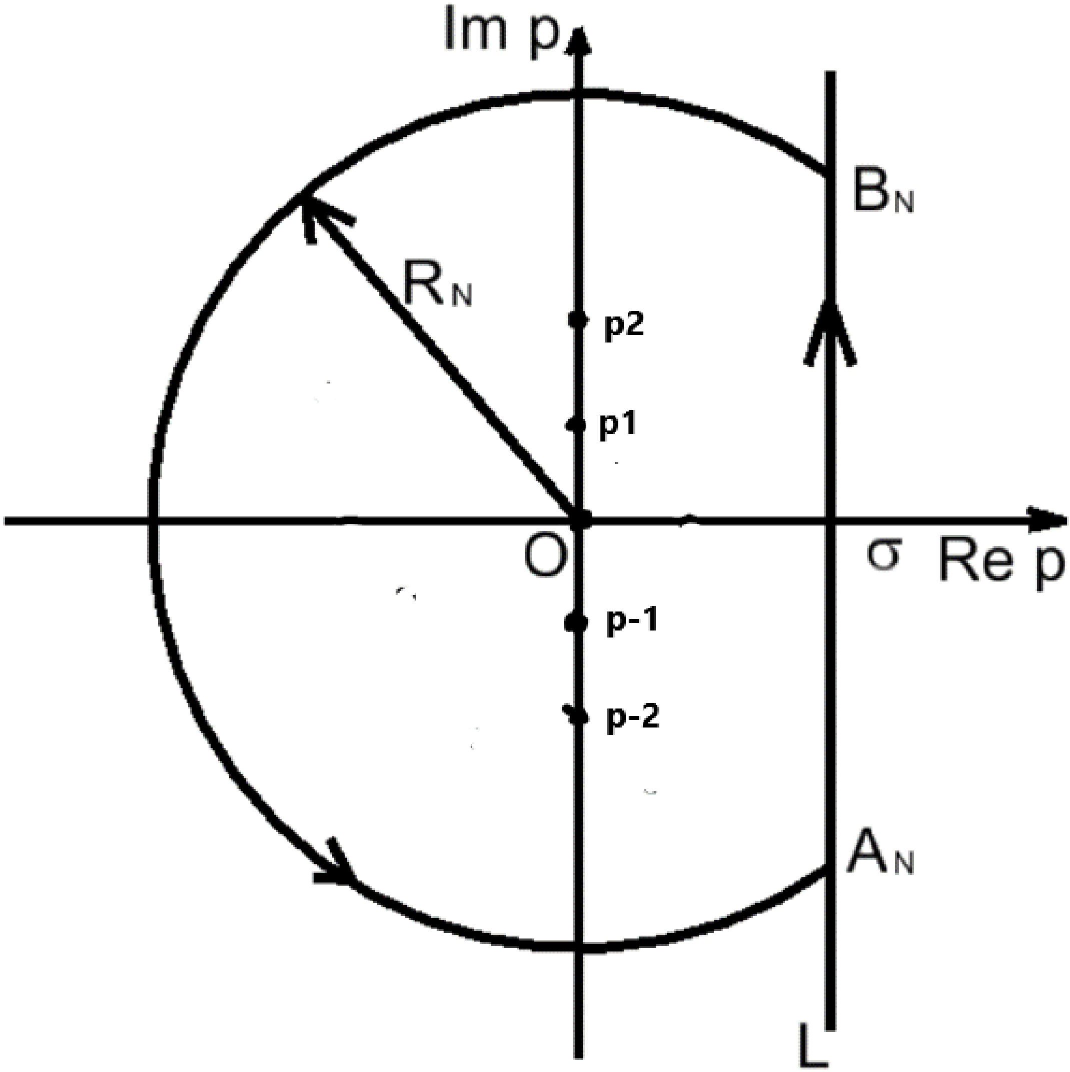
Образуем замкнутый контур, состоящий из отрезка $[A_N, B_N]$ прямой L и дуги окружности Γ радиусом R_N с центром в начале координат:

$$\oint = \int_{\Gamma} + \int_{A_N}^{B_N}$$

По теореме Коши о вычетах:

$$\oint \bar{u}(\ell)e^{pt}dp = 2\pi i(res(\bar{u}(\ell)e^{pt}; p = 0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} res(\bar{u}(\ell)e^{pt}; p = p_n))$$

По лемме Жордана получаем, что $\int_{\Gamma} = 0$, тогда $\oint -> \int_L$



Вычисление вычетов:

$$res(\bar{u}e^{pt}; p=0) = \lim_{p->0} \bar{u}(\bar{\ell}) \cdot e^{pt} \cdot p = E$$

$$res(\bar{u}(\ell)e^{pt}, p=p_n) = \frac{-\alpha E e^{\frac{i\gamma_n}{T}t}}{\gamma_n[\sin\gamma_n + \gamma_n \cos\gamma_n + \alpha \sin\gamma_n]} = \frac{-E2e^{\frac{i\gamma_n}{T}t}\sin\gamma_n}{\sin 2\gamma_n + 2\gamma_n}$$

Суммируя вычеты при $p = p_n$ попарно при равных по модулю n, получаем:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-2Ee^{\frac{i\gamma_n}{T}t}\sin\gamma_n}{\sin 2\gamma_n + 2\gamma_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2Ee^{\frac{i\gamma_n}{T}t}\sin\gamma_n}{\sin 2\gamma_n + 2\gamma_n} = -4E\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\gamma_n \cos\frac{\gamma_n t}{T}}{\sin 2\gamma_n + 2\gamma_n}$$

Ответ: $u(l,t) = E - 4E\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\gamma_n \cos\frac{\gamma_n t}{T}}{\sin 2\gamma_n + 2\gamma_n}$

Задача нахождения плотностей тепловых потоков на гранях пластины

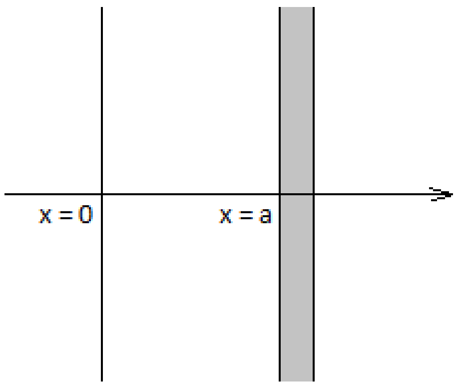
Начальная температура пластины нулевая. Грань $x = 0$ пластины поддерживается при температуре T_0, а к грани $x = a$ присоединена тепловая емкость. Получить выражения для плотностей тепловых потоков на гранях пластины.

$$\Delta T - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$$

$$T(0, \tau) = T_0$$

$$T(x, 0) = 0$$



Тепловая ёмкость — тело с большим коэффициентом теплоёмкости. (Если есть тепловой поток, то он распространяется мгновенно)

$$\tau = \frac{kt}{c\rho}$$

Количество тепла через единичную площадку за единицу времени:

$$-k\,\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{\text{x=a}} = C_0\,\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \left(\tau = \frac{kt}{C\rho}\right)$$

$$-\cancel{k}\,\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{\text{x=a}} = C_0\,\frac{\partial T}{\partial t}\Big|_{x=a}^{t\to\tau} = \frac{\cancel{k}}{\mathrm{C}\rho}\,C_0\,\frac{\partial T}{\partial \tau}\Big|_{\text{x=a}}$$

$$\alpha = \frac{C_0}{C\rho a}$$

α является безразмерной величиной

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{\text{x=a}} + \alpha a\,\frac{\partial T}{\partial \tau}\Big|_{\text{x=a}} = 0$$

Вводим преобразование Лапласа

$$\bar{T}_p(x) = \int_0^\infty T(x,\tau)e^{-p\tau}\,d\tau$$

$$\bar{T}'' - p\bar{T} + T|_{\tau=0} = 0$$

Уравнение для трансформант:

$$\bar{T}'' - p\bar{T} = 0$$

$$\bar{T}|_{x=0} = \frac{T_0}{p}$$

$$\bar{T}'(a) + \alpha a p\bar{T}(a) = 0$$

$$\bar{T}(x) = C\,\mathrm{sh}\sqrt{p}\,(a-x) + B\,\mathrm{ch}\sqrt{p}\,(a-x)$$

Составим преобразование Лапласа для потоков на гранях

Сначала найдем C и B из условий:

$$\frac{T_0}{p} = C \operatorname{sh}\sqrt{p}a + B \operatorname{ch}\sqrt{p}a$$

$$-C\sqrt{p} + \alpha a p B = 0 \qquad\qquad C = \alpha a\sqrt{p}B$$

$$\bar{T} = \frac{T_0(\alpha a\sqrt{p} \operatorname{sh}\sqrt{p}\,(a-x) + \operatorname{ch}\sqrt{p}\,(a-x))}{p(\alpha a\sqrt{p} \operatorname{sh}\sqrt{p}\,a + \operatorname{ch}\sqrt{p}\,a)}$$

$$q_0 = -k\frac{\partial T}{\partial n}|_{x=0} = k\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0}$$

$$\overline{q_0} = k\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}|_{x=0} = \frac{kT_0(-\alpha a p \operatorname{ch}\sqrt{p}\,a - \sqrt{p} \operatorname{sh}\sqrt{p}\,a)}{p(\sqrt{p}\alpha a \operatorname{sh}\sqrt{p}\,a + \operatorname{ch}\sqrt{p}\,a)}$$

$$\overline{q_a} = -k\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}|_{x=a} = \frac{kT_0(-\alpha a p)}{p(\sqrt{p}\alpha a \operatorname{sh}\sqrt{p}\,a + \operatorname{ch}\sqrt{p}\,a)} =$$

$$= \frac{kT_0\alpha a}{\sqrt{p}\alpha a \operatorname{sh}\sqrt{p}\,a + \operatorname{ch}\sqrt{p}\,a}$$

$\overline{q_0}$ и $\overline{q_a}$ являются преобразованиями Лапласа (за счет $\sqrt{p}$ убывают на ∞).

Проведем обратное преобразование Лапласа (по изображению восстановим оригинал), воспользуемся для этого теоремой Римана-Меллина:

$$q\,|_{x=0} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \bar{q}_0 e^{pt}\,dp$$

Где контур интегрирования L есть прямая, проходящая параллельно мнимой оси и лежащая в области регулярности функции $\bar{q}_0$:

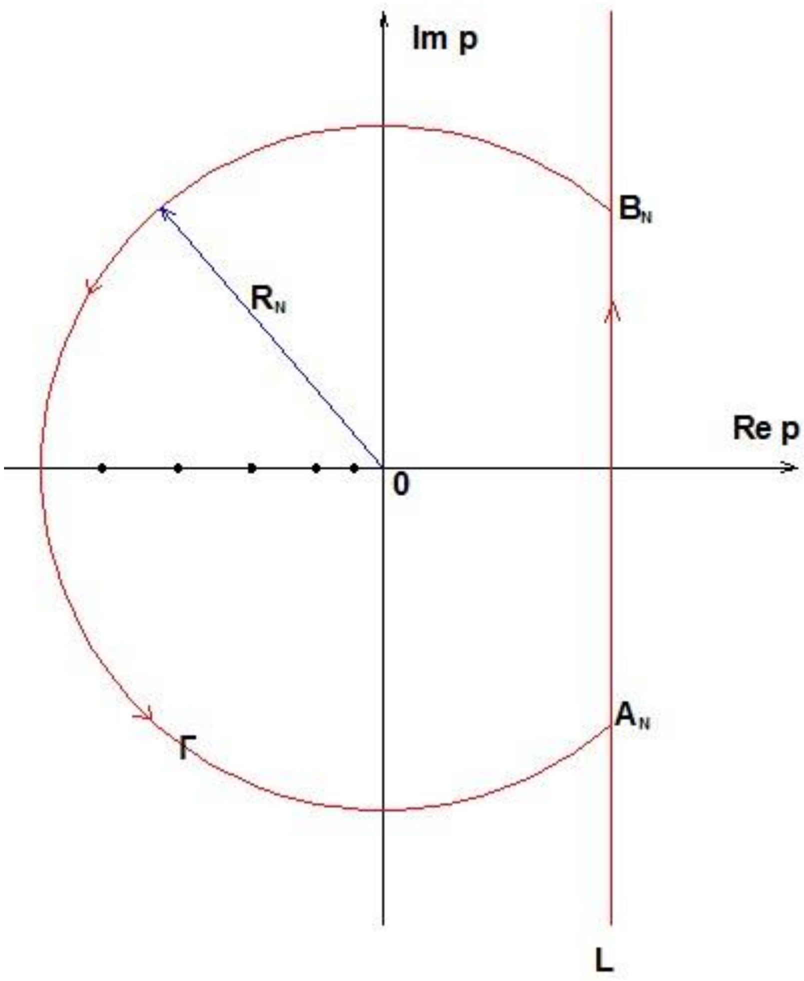
Функция однозначная, нет точек разветвления.

Особые точки для $\overline{q_0}$:

$$p_n = -\left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2$$, где $\gamma_n -$ корни уравнения $\operatorname{ctg}\gamma = \alpha\gamma$ $(n = \overline{1,\infty})$

Образуем замкнутый контур, состоящий из отрезка $[A_N, B_N]$ прямой L и дуги окружности Γ радиусом R_N с центром в начале координат:

$$\oint = \int\limits_{\Gamma} + \int\limits_{A_N}^{B_N}$$



Справа от прямой $\boldsymbol{L}$ функция $\bar{q}_0$ аналитичная, все особые точки ее находятся левее от этой прямой. Радиус окружности R_N подберем так, чтобы все особые точки $\overline{q}_0$ попали внутрь замкнутого контура. Тогда по теореме Коши о вычетах будем иметь:

$$\oint \overline{q}_0 e^{pt} dp = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} res(\overline{q}_0 e^{pt}; p = p_n)$$

По лемме Жордана интеграл по дуге равен нулю. Искомый интеграл будет равен сумме всех вычетов. Вычислим их:

$$res(\overline{q_0} e^{p\tau}, p = p_n) =$$

$$= \frac{kT_0(-\alpha a p_n \operatorname{ch}\sqrt{p_n}a - \sqrt{p_n}\operatorname{sh}\sqrt{p_n}a)\ e^{p_n\tau}}{p_n(\sqrt{p}\alpha a \operatorname{sh}\sqrt{p}a + \operatorname{ch}\sqrt{p}a)'_{p=p_n}} =$$

$$= \frac{-2kT_0\gamma_n(\gamma_n\alpha\cos\gamma_n + \sin\gamma_n)e^{p_n\tau}}{a^2\sqrt{p_n}(\alpha i\sin\gamma_n + \alpha i\cos\gamma_n + i\sin\gamma_n)} =$$

$$= \frac{2kT_0}{a}\left(\frac{1+\alpha^2\gamma_n^2}{1+\alpha+\alpha^2\gamma_n^2}\, e^{-\frac{\gamma_n^2}{a^2}\tau}\right)$$

$$q|_{x=0} = \frac{2kT_0}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\alpha^2\gamma_n^2}{1+\alpha+\alpha^2\gamma_n^2}\, e^{-\frac{\gamma_n^2}{a^2}\tau}$$

Аналогично для $\overline{q_a}$:

$p_n = -\left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2$, где γ_n – корни уравнения $\operatorname{ctg}\gamma = \alpha\gamma$ $(n = \overline{1,\infty})$

$$res(\overline{q_a} e^{p\tau}, p = p_n) =$$

$$= \frac{kT_0\alpha a\ e^{p_n\tau}}{(\sqrt{p}\alpha a \operatorname{sh}\sqrt{p}a + \operatorname{ch}\sqrt{p}a)'_{p=p_n}} =$$

$$= \frac{2\alpha k T_0}{a}\left(\frac{\gamma_n\, e^{-\frac{\gamma_n^2}{a^2}\tau}}{(1+\alpha+\alpha^2\gamma_n^2)\sin\gamma_n} \right)$$

$$q|_{x=a} = \frac{2\alpha k T_0}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n\, e^{-\frac{\gamma_n^2}{a^2}\tau}}{(1+\alpha+\alpha^2\gamma_n^2)\sin\gamma_n}$$

<u>Ответ:</u>

$$q|_{x=0} = \frac{2k T_0}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\alpha^2\gamma_n^2}{1+\alpha+\alpha^2\gamma_n^2}\, e^{-\frac{\gamma_n^2}{a^2}\tau}$$

$$q|_{x=a} = \frac{2\alpha k T_0}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n\, e^{-\frac{\gamma_n^2}{a^2}\tau}}{(1+\alpha+\alpha^2\gamma_n^2)\sin\gamma_n}$$

Задача о распространении тепла в неограниченном пространстве

Пример вычисление интеграла Римана-Меллина от многозначной функции

Тело, ограниченное изнутри сферической поверхностью радиуса a, снаружи неограниченно. Начальная температура равно нулю, а на его поверхности температура равна T_0.

Найти температуру в момент времени t.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)-\frac{\partial T}{\partial \tau}=0$$

$$T\big|_{r=a}=T_0\ ;\ T\big|_{r=\infty}-\textit{ограничена}$$

$$T\big|_{\tau=0}=0$$

Проводим преобразование Лапласа:

$$\left(r^2\overline{T}'\right)'-pr^2\overline{T}=0$$

$$\overline{T}|_{r=a}=\frac{T_0}{p}$$

$$\overline{\mathrm{T}}|_{\mathrm{r}\to\infty}-\text{ограничена}$$

$$\overline{T}=C_1\frac{e^{-\sqrt{pr}}}{r}+C_2\frac{e^{\sqrt{pr}}}{r}$$

Пусть $\operatorname{Re}\sqrt{p}>0$ (для определенности), тогда из условия ограниченности следует, что $C_2=0$

$$\overline{T}(a)=\frac{T_0}{p}=C_1\frac{e^{-\sqrt{p}a}}{a}$$

$$\overline{T}(r) = \frac{T_0 a}{rp} e^{\sqrt{p}a} e^{-\sqrt{p}r} = \frac{T_0 a}{rp} e^{-\sqrt{p}(r-a)}$$

$$\overline{T}(r) = \frac{T_0 a}{r} \frac{1}{p} \underbrace{e^{-\sqrt{p}(r-a)}}_{\overline{f}}$$

По частному случаю теоремы о свертке:

$$T(r,\tau) = \frac{T_0 a}{r} \int_0^{\tau} f(r,t)dt$$

Найдем $f(r.\tau)$:

$$f(r,\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{p\tau} e^{-\sqrt{p}(r-a)} dp$$

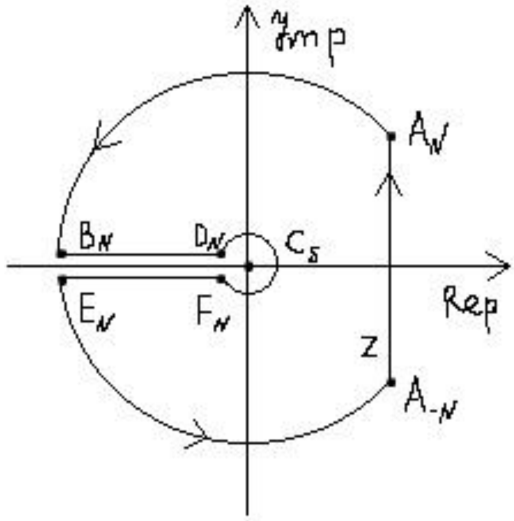
Точка $p = 0$ является точкой ветвления.

Поэтому: Замена прямой L совокупностью путей:

Из $(\cdot)\ p = 0$ провели разрез, сообразуясь с удобством и простотой дальнейшего вычисления. $B_N D_N \parallel E_N F_N$, идут на бесконечно малом расстоянии от разреза.

Внутри замкнутого контура подынтегральная функция однозначна и не имеет особенностей.

Отметим частный случай: начало координат является единственной особенностью – точкой разветвления. Тогда прямая L сразу меняется на контур: $B_N D_N C_\delta F_N E_N$



По теореме Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{A_{-N}A_NB_ND_NC_\delta F_NE_N} e^{-\sqrt{p}(r-a)}e^{p\tau}dp = 0 = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{A_{-N}}^{A_N} + \int_{\cup A_NB_N} + \int_{\cup E_NA_{-N}} + \int_{B_ND_N} + \int_{C_\delta} + \int_{F_NE_N}\right]$$

Интегралы по дугам $\cup A_NB_N$ и $\cup E_NA_{-N}$ оцениваются по лемме Жордана (=> 0 при $R_N \to \infty$)

Оценим:

$$\left|\int\limits_{C_\delta} e^{-\sqrt{p}(r-a)}e^{p\tau}dp\right| \le C\cdot 2\pi\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L e^{-\sqrt{p}(r-a)}e^{p\tau}dp = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\substack{\delta\to 0\\ R_N\to\infty}}\left[\overbrace{\int\limits_{[B_ND_N]}}^{I_1} + \overbrace{\int\limits_{[F_ND_N]}}^{I_2}\right]$$

Рассмотрим:

$$I_1 = \int\limits_{+\infty}^{0} e^{-\sqrt{p}(r-a)}e^{p\tau}dp = \begin{bmatrix} p = \rho e^{i\pi}; \quad dp = d\rho\cdot e^{i\pi} = -d\rho \\ e^{-\sqrt{p}(r-a)} = e^{-i\sqrt{\rho}(r-a)} \end{bmatrix} = \int\limits_{+\infty}^{0} e^{-i\sqrt{\rho}(r-a)}e^{-\rho\tau}(-d\rho)$$

$$I_2=\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{p}(r-a)}e^{p\tau}dp=\begin{bmatrix}p_2=\rho e^{-i\pi}:\quad dp=d\rho\cdot e^{-i\pi}=-d\rho\\ e^{-\sqrt{p}(r-a)}=e^{i\sqrt{\rho}(r-a)}\end{bmatrix}=-\int_0^{+\infty}e^{i\sqrt{\rho}(r-a)}e^{-\rho\tau}d\rho$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\left[-\int_{+\infty}^{0}e^{-i\sqrt{\rho}(r-a)}e^{-\rho\tau}d\rho-\int_0^{+\infty}e^{i\sqrt{\rho}(r-a)}e^{-\rho\tau}d\rho\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}\left(e^{i\sqrt{\rho}(r-a)}e^{-\rho\tau}-e^{-i\sqrt{\rho}(r-a)}e^{-\rho\tau}\right)d\rho=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{i\sqrt{\rho}(r-a)}-e^{-i\sqrt{\rho}(r-a)}}{2i}e^{-\rho\tau}d\rho=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\left(\sqrt{\rho}(r-a)\right)\cdot e^{-\sqrt{\rho}\tau}d\rho$$

То есть:

$$f(r,\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\left(\sqrt{\rho}(r-a)\right)\cdot e^{-\sqrt{\rho}\tau}d\rho=\begin{bmatrix}\sqrt{\rho}=y\\ d\rho=2ydy\end{bmatrix}=\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\left(y(r-a)\right)}_{u}\cdot\underbrace{ye^{-y^2\tau}dy}_{dv}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{e^{-y^2\tau}}{2\tau}\sin\left(y(r-a)\right)\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{2\tau}\int_0^{\infty}e^{-y^2\tau}(r-a)\cdot\cos\left(y(r-a)\right)dy\right]=$$

$$=\frac{r-a}{\pi\tau}\int_0^{\infty}e^{-y^2\tau}\cdot\cos\left(y(r-a)\right)dy=$$

Интеграл Лапласа: $\int_0^{\infty}e^{-a^2x^2}\cos bx\cdot dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$

$$=\frac{r-a}{\pi\tau}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\tau}}\cdot e^{-\frac{(r-a)^2}{4\tau}}=\frac{r-a}{2\sqrt{\pi}}\cdot\tau^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{(r-a)^2}{4\tau}}$$

$$T(r,\tau)=\frac{T_0a}{r}\cdot\frac{r-a}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau}t^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{(r-a)^2}{4t}}dt=\begin{bmatrix}s=\dfrac{r-a}{2\sqrt{t}}\\ ds=\dfrac{r-a}{-4}t^{-\frac{3}{2}}dt\end{bmatrix}=\frac{T_0a}{r}\left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\int_{\infty}^{\frac{r-a}{2\sqrt{\tau}}}e^{-s^2}ds=$$

$$= -\frac{T_0 a}{r}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{+\infty}^{0} e^{-s^2}\,ds + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{r-a}{2\sqrt{\tau}}} e^{-s^2}\,ds\right] = -\frac{T_0 a}{r}\left[-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-s^2}\,ds + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{r-a}{2\sqrt{\tau}}} e^{-s^2}\,ds\right] = =$$

$$\frac{T_0 a}{r}\left[\Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{r-a}{2\sqrt{\tau}}\right)\right] = \frac{T_0 a}{r}\left[1 - \Phi\left(\frac{r-a}{2\sqrt{\tau}}\right)\right].$$

Запомнить:

$\frac{1}{p} e^{-\sqrt{p}(r-a)}$ есть изображение для оригинала $\left[1 - \Phi\left(\frac{r-a}{2\sqrt{\tau}}\right)\right]$

Ответ: $T(r,\tau) = \frac{T_0 a}{r}\left[1 - \Phi\left(\frac{r-a}{2\sqrt{\tau}}\right)\right]$

Задача о распределении температуры в стенке толщиной а

Исследовать процесс распределения температуры в стенке толщиной **а**, грань x=0 которой поддерживается при температуре f(t)., а грань x=a при нулевой. Начальная температура стенки нулевая.

$$\Delta T - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$$

$$T(0,\tau) = f(\tau); T(a,\tau) = 0; \quad T(x,0) = 0$$

Проводим преобразование Лапласа:

$$\bar{T}_p(x) = \int_0^\infty T(x,\tau) e^{-p\tau}\, d\tau$$

$$\bar{T}'' - p\bar{T} + T|_{\tau=0} = 0$$

$$\bar{T}'' - p\bar{T} = 0$$

$$\bar{T}|_{x=0} = \overline{f(p)}$$

$$\bar{T}|_{x=a} = 0$$

$$\bar{T} = C \operatorname{sh}\sqrt{p}\,(a-x) + B \operatorname{ch}\sqrt{p}\,(a-x)$$

Найдем C и B из трансформированных условий:

$$B = 0; \quad C = \frac{\bar{f}(p)}{sh\sqrt{pa}}$$

$$\bar{T}(x) = \frac{\bar{f}(p)}{sh\sqrt{pa}} sh\sqrt{p(a-x)} = \bar{f}(p)\frac{sh\sqrt{p(a-x)}}{sh\sqrt{pa}} = \bar{f}(p)\cdot \bar{T}_1(x)$$

По теореме о свертке :

$$T(x,\tau)=\int_0^{\tau} f(t)\cdot T_1(x,\tau-t)dt$$

$$T_1(x,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{T_1}e^{p\tau}dp$$

$\overline{T_1}$ - функция однозначная, нет точек разветвления.

Особые точки для $\overline{T_1}$

$p_n=-\frac{(\pi n)^2}{a^2}$ - простые полюсы

$$T_1(x,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{T_1}e^{p\tau}dp=\sum_{n=1}^{\infty} res(\overline{T_1}e^{p\tau},\, p=p_n)$$

$$res(\overline{T_1}e^{p\tau},\, p=p_n)=\frac{2\pi n}{a^2}\sin\frac{\pi nx}{a}e^{-\frac{(\pi n)^2}{a^2}\tau}$$

$$T_1(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi n}{a^2}\sin\frac{\pi nx}{a}e^{-\frac{(\pi n)^2}{a^2}\tau}$$

$$T(x,\tau)=\int_0^{\tau} f(t)\cdot T_1(x,\tau-t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi n}{a^2}\sin\frac{\pi nx}{a}\int_0^{\tau} f(t)\cdot e^{-\frac{(\pi n)^2}{a^2}(\tau-t)}dt$$

Частный случай: $f(t)=T_0$, тогда $\overline{T}(0)=\frac{T_0}{p}$

$$T(x,\tau)=T_0(1-\frac{x}{a}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi nx}{a}\cdot e^{-\frac{(\pi n)^2}{a^2}\tau})$$

Решение задачи о распространении тепла в стенке толщиной а волновым методом

Решение в форме, удобной для малых времен и больших толщин

$$\bar{T}(x)=\bar{f}(p)\frac{sh\sqrt{p}(a-x)}{sh\sqrt{pa}}=\frac{T_0}{p}\frac{sh\sqrt{p}(a-x)}{sh\sqrt{pa}}$$

$$T(x,\tau)=\frac{T_0}{2\pi i}\int_L\frac{1}{p}\frac{sh\sqrt{p}(a-x)}{sh\sqrt{pa}}e^{p\tau}dp$$

$$\frac{sh\sqrt{p}(a-x)}{sh\sqrt{pa}}=\frac{e^{\sqrt{p}(a-x)}-e^{-\sqrt{p}(a-x)}}{e^{\sqrt{pa}}-e^{-\sqrt{pa}}}=\frac{e^{\sqrt{pa}}(e^{-\sqrt{p}x}-e^{-\sqrt{p}(2a-x)})}{e^{\sqrt{pa}}(1-e^{-2\sqrt{pa}})}=$$

$$=(e^{-\sqrt{p}\,x}-e^{-\sqrt{p}\,(2a-x)})\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2n\sqrt{p}\,a}=\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-\sqrt{p}\,(2na-x)}-e^{-\sqrt{p}\,(2na+2a-x)})$$

$$T(x,\tau)=\frac{T_0}{2\pi i}\int_L\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-\sqrt{p}\,(2na+x)}-e^{-\sqrt{p}\,(2na+2a-x)})e^{p\tau}dp=$$

$$=T_0\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{e^{p\tau-\sqrt{p}\,(2na+x)}}{p}dp-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{e^{p\tau-\sqrt{p}\,(2na+2a-x)}}{p}dp\right]$$

В задаче **о распространении тепла в неограниченном пространстве** вычислили аналогичные интегралы, воспользуемся этими вычислениями:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{e^{p\tau-\sqrt{p}\,(2na+x)}}{p}dp=1-\Phi(\frac{2na+x}{2\sqrt{\tau}})$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{e^{p\tau-\sqrt{p}\,(2na+2a-x)}}{p}dp=1-\Phi(\frac{2na+2a-x}{2\sqrt{\tau}})$$

И получаем:

$$T(x,\tau) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[1 - \Phi\left(\frac{2na + x}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] - \left[1 - \Phi\left(\frac{2na + 2a - x}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] \right)$$

Этот ряд сходится быстро при малых τ .

Физическая интерпретация: это тепловые волны, отраженные от краев пластины:

$$T = T_0(1 - \Phi(\frac{x}{2\sqrt{\tau}})) - T_0(1 - \Phi(\frac{2a - x}{2\sqrt{\tau}})) +$$

$$+ T_0(1 - \Phi(\frac{2a + x}{2\sqrt{\tau}})) - T_0(1 - \Phi(\frac{4a - x}{2\sqrt{\tau}})) + \ldots$$

$$T\,|_{a\to\infty} = T_0(1 - \Phi(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}))$$

Задача о распределение температуры в цилиндрическом проводнике

Найти распределение температуры в цилиндре радиуса ***a***, температура поверхности которого изменяется по закону $f(\tau)$. Начальная температура цилиндра нулевая.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)-\frac{\partial T}{\partial \tau}=0$$

$$\begin{cases} T|_{r\to 0}<\infty \\ T|_{r=a}=f(\tau) \end{cases} \qquad T|_{\tau=0}=0$$

Преобразование Лапласа:

$$\bar{T}=\int_0^\infty Te^{-pr}\,d\tau$$

Трансформированные ГУ:

$$\begin{cases} \bar{T}|_{r\to 0}<\infty \\ \bar{T}|_{r=a}=\overline{f(p)} \end{cases}$$

Уравнение для трансформанты:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \bar{T}}{\partial r}\right)-p\bar{T}=0$$

$$\bar{T}=C_1I_0(\sqrt{p}r)+C_2K_0(\sqrt{p}r)$$

$$\bar{T}|_{r\to 0}<\infty \ \Rightarrow C_2=0$$

$$\bar{T}|_{r=a}=\overline{f(p)}\Rightarrow C_1I_0(\sqrt{p}a)\ =\overline{f(p)}$$

$$\bar{T}=\frac{\overline{f(p)}\cdot I_0(\sqrt{p}r)}{I_0(\sqrt{p}a)}=\overline{f(p)}\cdot\bar{T}_1$$

В изображениях задача решена.

Восстановим оригинал по теореме о свертке:

$$T(r,\tau) = \int_0^\tau f(t)\bar{T}_1(r,\tau - t)\,dt$$

Рассмотрим частный случай. $T|_{r=a} = f(\tau) = T_0 \cdot \tau$

$$\overline{f(p)} = \frac{T_0}{p^2}$$

$\overline{T(r)}=\frac{T_0}{p^2} \cdot \bar{T}_1(r)$

Проведем обратное преобразование Лапласа для $\bar{T}_1$, используя теорему Римана – Меллина:

$$T_1(r,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{I_0(\sqrt{p}r)}{I_0(\sqrt{p}a)} e^{p\tau}\,dp$$

Функция $\bar{T}_1$ является однозначной (видно из дальнейшего разложения)

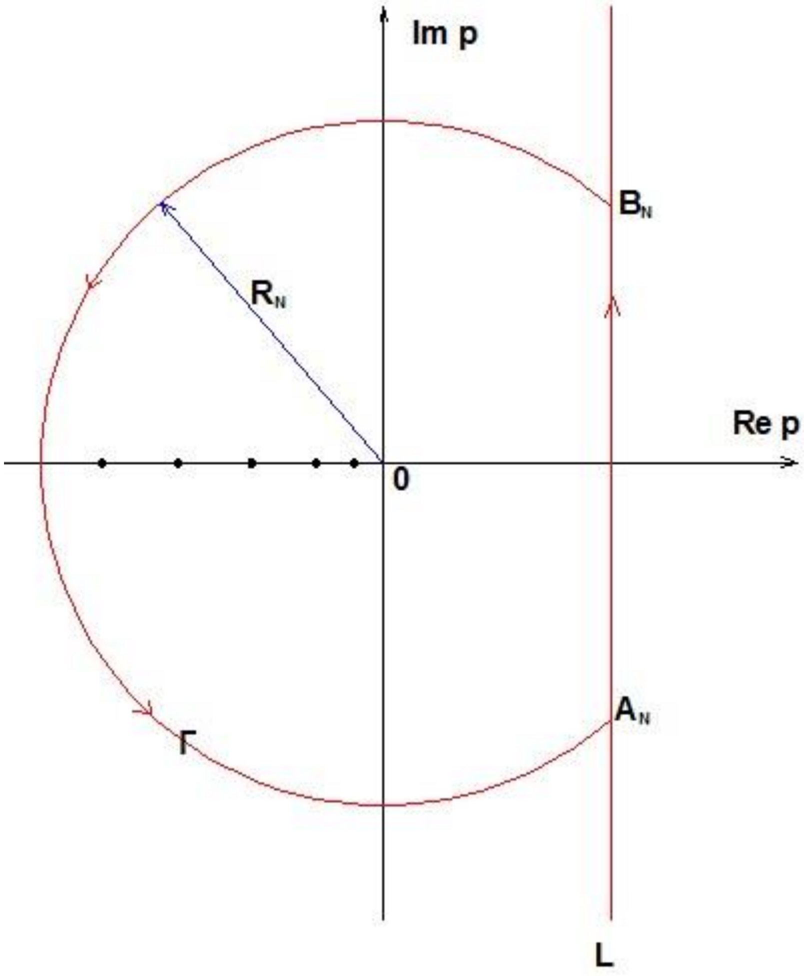
$$e^{p\tau}\bar{T}_1 = \frac{1 + p\dfrac{a^2 - r^2}{4} + p^2\dfrac{a^4 - r^4}{64} + \cdots}{1 + \dfrac{pa^2}{4} + \cdots}(1 + p\tau + \cdots)$$

Особыми точками являются простые полюсы $p_n = -\left(\frac{\gamma_\eta}{a}\right)^2$,

где γ_η есть корни уравнения $J_0(\gamma) = 0, (n = \overline{1,\infty})$

Образуем замкнутый контур, состоящий из отрезка $[A_N, B_N]$ прямой L и дуги окружности Γ радиусом R_N с центром в начале координат:

$$\oint = \int_\Gamma + \int_{A_N}^{B_N}$$



Справа от прямой $\boldsymbol{L}$ функция $\bar{T}_1$ аналитичная, все особые точки ее находятся левее от этой прямой. Радиус окружности R_N подберем так, чтобы все особые точки $\bar{T}_1$ попали внутрь замкнутого контура. Тогда по теореме Коши о вычетах будем иметь:

$$\oint \bar{T}_1\, e^{p\tau} dp = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} res(\bar{T}_1\, e^{p\tau}; p = p_n)$$

$$res(\bar{T}_1\, e^{p\tau}; p = p_n) = 2\frac{I_0(\sqrt{p_n}r)\sqrt{p_n}}{aI_1(\sqrt{p_n}a)} e^{p_n\tau} = 2\frac{\gamma_\eta}{a^2}\frac{J_0\left(\frac{\gamma_\eta r}{a}\right) e^{-\left(\frac{\gamma_\eta}{a}\right)^2\tau}}{J_1\left(\gamma_\eta\right)}$$

$$T(r,\tau) = \int_0^{\tau} f(t) T_1(r, \tau - t)\, dt$$

$$= 2T_0 \int_0^{\tau} t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_\eta}{a^2} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_\eta r}{a}\right) e^{-\left(\frac{\gamma_\eta}{a}\right)^2 (\tau - t)}}{J_1(\gamma_\eta)} dt$$

$$= 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_\eta}{a^2} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_\eta r}{a}\right) e^{-\left(\frac{\gamma_\eta}{a}\right)^2 \tau}}{J_1(\gamma_\eta)} \int_0^{\tau} t e^{\left(\frac{\gamma_\eta}{a}\right)^2 t}\, dt$$

$$= 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_\eta}{a^2} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_\eta r}{a}\right) e^{-\left(\frac{\gamma_\eta}{a}\right)^2 \tau}}{J_1(\gamma_\eta)} \left(\left(\frac{a}{\gamma_\eta}\right)^2 e^{\left(\frac{\gamma_\eta}{a}\right)^2 \tau} \tau - \left(\frac{a}{\gamma_\eta}\right)^4 \left(e^{\left(\frac{\gamma_\eta}{a}\right)^2 \tau} - 1\right)\right)$$

$$= 2T_0 \left(\tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_\eta r}{a}\right)}{J_1(\gamma_\eta)\gamma_\eta} - a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{{\gamma_\eta}^3} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_\eta r}{a}\right)}{J_1(\gamma_\eta)}\right.$$

$$\left. + a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{{\gamma_\eta}^3} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_\eta r}{a}\right) e^{-\left(\frac{\gamma_\eta}{a}\right)^2 \tau}}{J_1(\gamma_\eta)}\right)$$

Учитывая

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_\eta r}{a}\right)}{J_1(\gamma_\eta)\gamma_\eta} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{{\gamma_\eta}^3} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_\eta r}{a}\right)}{J_1(\gamma_\eta)} = \frac{a^2 - r^2}{8a^2}$$

Получаем ответ: $T(r,\tau) = T_0\left(\tau - \frac{a^2 - r^2}{4} + 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{{\gamma_\eta}^3} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_\eta r}{a}\right) e^{-\left(\frac{\gamma_\eta}{a}\right)^2 \tau}}{J_1(\gamma_\eta)}\right)$

Восстановление оригинала $T(r,\tau)$ по изображению другим способом:

$$\bar{T}=\frac{T_0}{p^2}\cdot\frac{I_0(\sqrt{p}r)}{I_0(\sqrt{p}a)}$$

$$T(r,\tau)=\frac{T_0}{2\pi i}\int\limits_L \frac{I_0\left(\sqrt{p}r\right)}{p^2 I_0\left(\sqrt{p}a\right)}e^{p\tau}\,dp$$

$$e^{p\tau}\bar{T}=\frac{1+p\dfrac{a^2-r^2}{4}+p^2\dfrac{a^4-r^4}{64}+\cdots}{p^2(1+\dfrac{pa^2}{4}+\cdots)}(1+p\tau+\cdots)$$

Особые точки подынтегральной функции:

1. $p=0$ является полюсом 2 порядка

2. $p_n=-\left(\frac{\gamma_\eta}{a}\right)^2$ являются простыми полюсами

Вычеты при p_n вычисляются как в случае 3а.

Вычет при $p=0$ вычислим разложением в произвольный ряд Лорана.

$$e^{p\tau}\cdot\bar{T}=\frac{1+p\dfrac{a^2-r^2}{4}+p^2\dfrac{a^4-r^4}{64}+\cdots}{p^2\left(1+\dfrac{pa^2}{4}+\cdots\right)}(1+p\tau+\cdots)$$
$$=\frac{1}{p^2}(A_{-2}+A_{-1}p+A_0p^2+A_1p^3+\cdots$$

$$\mathrm{Res}(\,e^{p\tau}\cdot\bar{T},p=0)=A_{-1}$$

$$1+p\tau+p\frac{a^2-r^2}{4}+p^2\frac{a^4-r^4}{64}+p^2\frac{a^4-r^4}{64}+\cdots=A_{-2}+A_{-1}p+A_0p^2+\frac{pa^2}{4}A_{-2}+\cdots$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p, получаем $A_{-1}=\tau-\frac{a^2-r^2}{4}$

Ответ: $T(r,\tau)=T_0(\tau-\frac{a^2-r^2}{4}+2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{{\gamma_\eta}^3}\frac{J_0\left(\frac{\gamma_\eta r}{a}\right)e^{-\left(\frac{\gamma_\eta}{a}\right)^2\tau}}{J_1\left(\gamma_\eta\right)})$

Данное решение удовлетворяет заданным условиям задачи.

Задачи для самостоятельного решения

1. В пластине толщиной a, начиная с момента $t=0$, происходит тепловыделение Q. Найти распределение температуры в пластине при условии, что грани излучают тепло по закону Ньютона. Температура среды равна T_0, а начальная температура нулевая.

2. Начальная температура пластины толщиной a равна T_0. В пластине, начиная с момента $t=0$, происходит тепловыделение Q. Найти распределение температуры в пластине при условии, что грань $x=a$ поддерживаются при нулевой температуре, а грань $x=0$ теплоизолированная.

3. В пластине толщиной a, начиная с момента $t=0$ происходит тепловыделение $Q\ \sin(в\ \tau)$. Найти распределение температуры в пластине при условии, что грань $x=0$ поддерживаются при нулевой температуре, а температура грани $x=a$ равна T_0, начальная температура нулевая.

4. В цилиндре радиуса a, начиная с момента $t=0$, происходит тепловыделение Q. Найти распределение температуры в цилиндре при условии, что боковая поверхность излучает тепло в окружающую среду по закону Ньютона. Начальная температура цилиндра T_0

5. Найти распределение температуры в шаре радиуса a. при условии, что начиная с момента $t=0$, в шаре происходит тепловыделение $Q\ exp(-b\tau)$. Поверхность шара излучает тепло в окружающую среду по закону Ньютона. Начальная температура шара T_0

Литература

1. Деч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Изд-во Наука, 1971.-.207 с

2. Краснов М.Л., Киселев А. И., Макаренко Г., И. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие. Изд. 3-е, испр. и доп. - М.: Едиториал УРСС, 2003 - 176 с. (Вся высшая математика в задачах.) ISBN 5-354-00383-0

3. Омельченко А. В. Методы интегральных преобразований в задачах математической физики. М.: Из-во МЦНМО – 2010.- 184

4. Суслова И. Б.; Баденко Г. В. Математическая физика: онлайн-курс Свободный доступ из сети Интернет. [Санкт-Петербург, 2016. https://openedu.ru/course/spbstu/MATHPH/

5. Голоскоков Д.П. Курс математической физики с использованием пакета Maple. СПб.: лань. – 2015. – 576 с

6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: учебник для вузов. М.: Изд-во Московского государственного университета. – 2004. – 798 с.

7. Жукова-Малицкая Г.А.; Кузьмин Ю.Н. Математическая физика: учебное пособие. Санкт-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2010 – 116 с.

8. Баденко В.Л., Баденко Г.В. Специальные разделы высшей математики. Математическая физика: учебное пособие Санкт-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2014 Свободный доступ из сети Интернет (чтение, печать, копирование) (https://elib.spbstu.ru/dl/2/3890.pdf/)

9. Математическая физика: метод приведения к однородной задаче : учебное пособие / Г. В. Баденко, В. Р. Мешков ; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого Санкт-Петербург, 2022 (1,18 Мб) https://elib.spbstu.ru/dl/5/tr/2022/tr22-84.pdf/

10. Математическая физика: задачи с непрерывным спектром : учебное пособие / Г. В. Баденко, В. Р. Мешков ; Санкт-

Петербургский политехнический университет Петра Великого Санкт-Петербург, 2022 https://elib.spbstu.ru/dl/5/tr/2022/tr22-87.pdf/info