

Министерство образования и науки Российской Федерации

---

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

---

*С.А. Важнов А.Г. Калимов*

# **ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА**

## **Ч А С Т Ь 1**

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
2025

## АННОТАЦИЯ

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Электротехника и электроника». Конспект лекций ориентирован на студентов неэлектротехнических специальностей по направлениям подготовки: 15.03.02 «Технологические машины и оборудование», 15.03.04 «Автоматизация технологических машин и оборудования», 15.03.04 «Мехатроника и робототехника»

В первой части пособия рассмотрены основные физические представления и законы теории электрических цепей постоянного и переменного тока, включая особенности расчета цепей переменного тока при резонансных явлениях, а также в индуктивно связанных цепях. Приведены основные положения, относящиеся к расчету симметричных и несимметричных трехфазных цепей. Наряду с теоретическим материалом настоящий конспект содержит примеры решения типовых задач.

Пособие предназначено для студентов третьего и четвертого курсов Института машиностроения, материалов и транспорта, изучающих соответствующие дисциплины в рамках подготовки бакалавров. Представленный материал может быть также использован студентами других институтов, изучающих соответствующие разделы электротехники.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b>	4
<b>Лекция 1.</b> Электрическое поле	5
<b>Лекция 2.</b> Магнитное поле	14
<b>Лекция 3.</b> Основные понятия и законы теории электрических цепей	22
<b>Лекция 4.</b> Связь между напряжением и током в основных элементах электрических цепей. Законы Кирхгофа	30
<b>Лекция 5.</b> Электрические цепи постоянного тока	38
<b>Лекция 6.</b> Расчет сложных электрических цепей постоянного тока	46
<b>Лекция 7.</b> Магнитные цепи. Законы и параметры магнитных цепей	55
<b>Лекция 8.</b> Электрические цепи синусоидального тока	63
<b>Лекция 9.</b> Активная, реактивная и полная мощности	73
<b>Лекция 10.</b> Расчет цепей синусоидального тока комплексным методом	81
<b>Лекция 11.</b> Резонанс в электрических цепях	92
<b>Лекция 12.</b> Расчет электрических цепей при учете явления взаимной индукции	99
<b>Лекция 13.</b> Трехфазные цепи	109
<b>Лекция 14.</b> Вращающееся магнитное поле	118
<b>Заключение</b> Список литературы	124

## ВВЕДЕНИЕ

В первой части пособия рассмотрены основные физические представления и законы теории электрических цепей постоянного и переменного тока, включая особенности расчета цепей переменного тока при резонансных явлениях, а также в индуктивно связанных цепях. Приведены основные положения, относящиеся к расчету симметричных и несимметричных трехфазных цепей.

## ЛЕКЦИЯ 1

### ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Дисциплина "Электротехника" базируется на изучаемых в курсе физики электромагнитных явлениях, рассматриваемых в рамках теории электромагнитного поля

Остановимся на основных характеристиках электромагнитного поля и законах, описывающих электромагнитные явления. Анализируя единое физическое явление – электромагнитное поле, выделим в нем так называемые "электрическое поле" и "магнитное поле", каждое из которых выступает на первый план при определенных условиях.

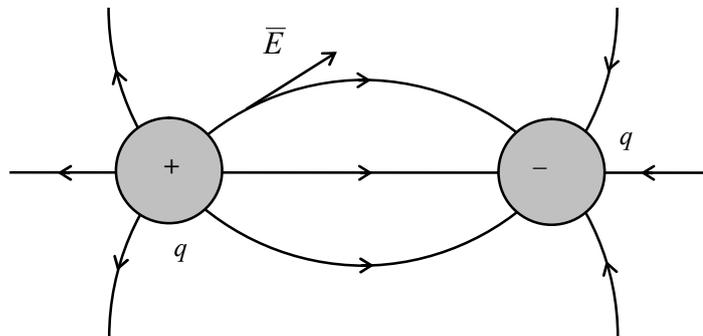
#### ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Характерным признаком электрического поля является его силовое воздействие на неподвижную электрически заряженную частицу. В качестве основной характеристики электрического поля используется векторная величина  $\vec{E}$ , называемая напряженностью электрического поля, определяющая силовое воздействие на электрический заряд  $q$ :

$$\vec{f}_э = q\vec{E}.$$

Размерность электрического заряда [Кл], напряженности электрического поля – [В/м].

Выделяя в пространстве линию, в каждой точке которой вектор  $\vec{E}$  направлен по касательной, получаем так называемую силовую линию электрического поля.



Силовые линии электрического поля начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах.

Интенсивность электрического поля характеризует поток вектора напряженности электрического поля

$$\Psi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S},$$

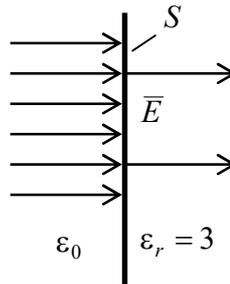
где  $d\vec{S}$  – вектор, направленный по нормали к поверхности интегрирования  $S$ .

Электрическое поле, создаваемое системой неподвижных заряженных тел, связано с зарядами этих тел интегральным соотношением, называемым теоремой Гаусса

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = q/\varepsilon,$$

где  $q$  – суммарный заряд, заключенный внутри поверхности интегрирования,  $\varepsilon$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды. Для воздуха (пустоты)  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cong 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

Часто диэлектрик характеризуют его относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ . Коэффициент  $\varepsilon_r$  показывает, во сколько раз изменяется нормальная составляющая напряженности электрического поля при переходе границы воздух-диэлектрик.



Для стекла  $\varepsilon_r = 5$ , для керамики  $\varepsilon_r \cong 15$ .

Кроме вектора  $\vec{E}$  электрическое поле можно характеризовать вектором электрического смещения  $\vec{D}$ , причем  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ .

Для любой диэлектрической среды существует постулат Максвелла (обобщенная теорема Гаусса), устанавливающий связь между потоком вектора  $\vec{D}$  сквозь замкнутую поверхность  $S$  и свободным зарядом  $q$ , заключенным внутри этой поверхности

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q.$$

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Полным электрическим током называют явление направленного движения зарядов и явление изменения электрического поля во времени, сопровождаемые магнитным полем.

Различают три основных вида электрического тока: ток проводимости, ток переноса, ток смещения.

### **Ток проводимости**

Ток проводимости может возникать в среде, обладающей электропроводностью и обусловлен движением свободных заряженных частиц в проводнике. Количественная сторона этого явления характеризуется силой тока  $i$  ( $[i] = \text{А}$ ). Величина тока  $i = dq/dt$  определяется скоростью изменения электрического заряда  $q$ , проходящего через некоторую поверхность  $S$  в единицу времени.

Для характеристики распределения в проводнике заряженных частиц используется векторная величина  $\bar{J}$ , называемая плотностью тока. Направление вектора  $\bar{J}$  указывает направление движения положительно заряженных частиц. Величина  $J = di / dS$  характеризует интенсивность их прохождения через площадку  $dS$ ,  $[J] = \text{А/м}^2$ .

При известной плотности тока  $\bar{J}$  сила тока  $i$ , проходящего через некоторую поверхность  $S$ , может быть рассчитана по формуле

$$i = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S},$$

где вектор  $d\bar{S}$  направлен по нормали к поверхности  $S$ .

Для тока проводимости характерна зависимость  $\bar{J}_{\text{ПР}} = \gamma \cdot \bar{E}$ , где символом  $\gamma$  обозначена удельная электрическая проводимость вещества проводника ( $[\gamma] = 1/\text{Ом} \cdot \text{м}$ ).

Типичным примером тока проводимости является электрический ток в металлах.

### ***Ток переноса***

Током переноса называют явление перемещения в свободном пространстве электрически заряженных частиц. Принципиальное отличие тока переноса от тока проводимости заключается в том, что плотность тока переноса  $\bar{J}_{\text{П}}$  не пропорциональна напряженности электрического поля, а определяется объемной плотностью  $\rho$  переносимого заряда и скоростью  $\bar{V}$  движения частиц

$$\bar{J}_{\text{ПЕР}} = \rho \cdot \bar{V}.$$

Примером тока переноса может служить поток электронов в электронно-лучевой трубке.

### ***Ток смещения***

Ток смещения возникает в случае изменения электрического поля во времени, а под плотностью тока смещения понимают величину

$$\bar{J}_{\text{СМ}} = d\bar{D}/dt.$$

Характерным примером тока смещения является ток в конденсаторе.

Таким образом, в зависимости от характера электрического тока его плотность может быть рассчитана по одному из следующих соотношений:

$$\bar{J}_{\text{ПР}} = \gamma \cdot \bar{E}; \quad \bar{J}_{\text{ПЕР}} = \rho \cdot \bar{V}; \quad \bar{J}_{\text{СМ}} = \frac{d\bar{D}}{dt}.$$

Справедлив принцип непрерывности электрического тока, согласно которому полный ток сквозь взятую в любой среде замкнутую поверхность  $S$  равен нулю

$$i = \oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = 0.$$

При этом

$$i = i_{\text{ПР}} + i_{\text{ПЕР}} + i_{\text{СМ}} \quad \text{и} \quad \bar{J} = \bar{J}_{\text{ПР}} + \bar{J}_{\text{ПЕР}} + \bar{J}_{\text{СМ}}.$$

Из принципа непрерывности электрического тока следует, что линии тока не имеют ни начала, ни конца, то есть являются замкнутыми линиями.

### ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕНИЕ. РАЗНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ.

Электрическое поле кроме векторов  $\bar{E}$  и  $\bar{D}$  характеризуют скалярной величиной, которая называется электрическим напряжением  $u$  и измеряется в вольтах,  $[u] = \text{В}$ .

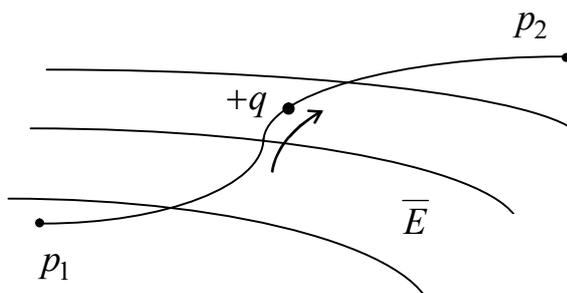
Для перемещения заряда  $q$  в электрическом поле из точки  $p_1$  в точку  $p_2$  необходимо совершить работу

$$A = q \int_{p_1}^{p_2} \bar{E} \cdot d\bar{\ell}.$$

Электрическим напряжением между точками  $p_1$  и  $p_2$  называют величину, равную отношению этой работы к перемещаемому заряду

$$u_{12} = \frac{A}{q}; \quad u_{12} = \int_{p_1}^{p_2} \bar{E} \cdot d\bar{\ell},$$

где  $u_{12}$  - электрическое напряжение (или падение напряжения) вдоль заданного пути,  $d\bar{\ell}$  - вектор, направленный по касательной к траектории перемещения заряда..



Для электрического поля неподвижных зарядов (электростатического поля) справедливо условие

$$\oint_{\ell} \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = 0,$$

вытекающее из закона сохранения энергии в системе заряженных тел.

Это обстоятельство позволяет ввести в рассмотрение функцию  $U$ , зависящую от положения точки ( $p_1$ ) в электростатическом поле:

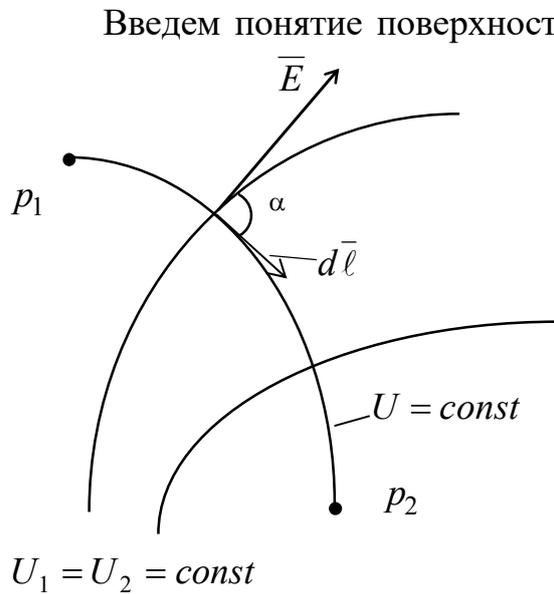
$$U_1 = \int_{p_1}^p \bar{E} \cdot d\bar{\ell},$$

где  $U_p = 0$ . Потенциал точки определяется с точностью до некоторой постоянной, величина которой зависит от того, где выбрана точка  $p$  нулевого потенциала.

В электростатическом поле напряжение между точками  $p_1$  и  $p_2$  совпадает с понятием разности потенциалов этих точек:

$$U_1 - U_2 = \int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

Электрическое поле, для которого справедливо условие  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ , называется потенциальным электрическим полем. При теоретическом исследовании систем, в которых заряженные тела имеют конечные размеры, точка  $p$ , выбирается, как правило, на бесконечности. На практике часто  $U = 0$  принимают на поверхности одного из объектов рассматриваемой системы.



Введем понятие поверхности равного потенциала, как поверхности, во всех точках которой потенциал имеет одно и тоже значение. Силовые линии электрического поля перпендикулярны поверхностям равного потенциала. Действительно:

$$U_1 - U_2 = \int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{p_1}^{p_2} E \cdot \cos\alpha \cdot d\ell = 0$$

при  $\alpha = \pi / 2$  и, следовательно,

### ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ

Представим себе проводящее тело конечных размеров, расположенное в диэлектрике с абсолютной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Сообщив некоторый заряд этому телу, приняв потенциал бесконечно удаленных от него точек равным нулю и считая  $\epsilon$  среды не зависящей от напряженности электрического поля, получим, что заряд  $q$  и потенциал тела  $U$  пропорциональны друг другу

$$q = C \cdot U \quad \text{или} \quad C = \frac{q}{U}.$$

Параметр  $C$  называют емкостью данного тела. Единица измерения емкости фарад ( $[C] = \Phi$ ). Емкость пропорциональна абсолютной диэлектрической проницаемости среды, а также зависит от размеров и формы тела –  $C = f(\epsilon, g)$ . В по-

следнем соотношении символ  $g$  имеет смысл некоторого обобщенного параметра, характеризующего геометрические особенности объекта.

При наличии двух проводящих тел с равными по величине и противоположными по знаку зарядами  $q_1 = -q_2 = q$  (эти условия присущи конденсатору) емкость определится из соотношения

$$C = \frac{q_1}{U_1 - U_2} = \frac{q_2}{U_2 - U_1} = \frac{q}{u}.$$

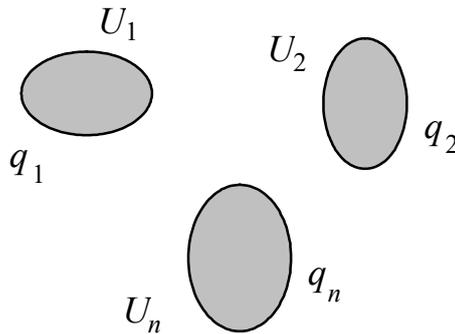
Емкость тела (тел) всегда положительна.

### ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ТЕЛ

Рассмотрим систему  $n$  заряженных тел. Используя закон сохранения энергии, можно показать, что потенциальная энергия  $W_\vartheta$  системы заряженных тел

$$W_\vartheta = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} q_k U_k, \quad (*)$$

где  $q_k, U_k$  – соответственно заряд и потенциал  $k$  – го тела



В качестве примера приведем соотношение для энергии системы, состоящей из двух разноименно заряженных тел (конденсатор). Имеем:

$$W_\vartheta = \frac{q_1 U_1}{2} + \frac{q_2 U_2}{2} = \frac{(U_1 - U_2) \cdot q}{2} = \frac{u \cdot q}{2}.$$

Известно, что  $q = C \cdot u$ , поэтому получим для конденсатора

$$W_\vartheta = \frac{u \cdot q}{2} = \frac{C \cdot u^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Энергия системы заряженных тел распределена в электрическом поле, окружающем заряженные тела. Введем понятие *объемной плотности энергии* электрического поля  $W'_\vartheta$  ( $[W'] = \text{Дж/м}^3$ )

$$W'_\vartheta = \frac{\overline{E} \cdot \overline{D}}{2}.$$

Для сред, в которых вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  совпадают по направлению (так называемые изотропные среды) справедливы равенства

$$W'_3 = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon}.$$

Полная энергия электрического поля в некотором объеме определится соотношением

$$W_3 = \int_V W'_3 dV. \quad (**)$$

При практическом определении величины  $W_3$  выражения (\*) и (\*\*) равноценны, но последнее в большей степени отвечает физической сущности явления.

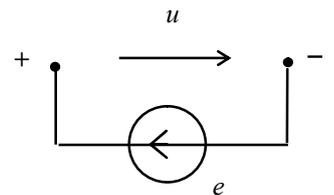
### ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА

Если в электрическом поле  $\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \neq 0$ , то это означает, что в контуре  $\ell$  существует так называемая электродвижущая сила (э.д.с.), причем

$$e = \oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad ([e] = \text{В}).$$

Появление э.д.с. связано с действием полей не потенциального характера. В источнике э.д.с. происходит преобразование энергии какого-либо вида (механической, электрохимической, и т.д.) в электрическую. Понятие э.д.с. можно трактовать и таким образом: э.д.с. характеризует способность источника электрической энергии создавать и поддерживать на своих зажимах определенную разность потенциалов.

Наиболее распространенные источники э.д.с. – электрические генераторы, аккумуляторы, гальванические элементы. Условное обозначение источника э.д.с. представлено на рисунке, причем при разомкнутых зажимах источника  $e = u$ .



В заключение рассмотрим пример, иллюстрирующий изложенный выше теоретический материал.

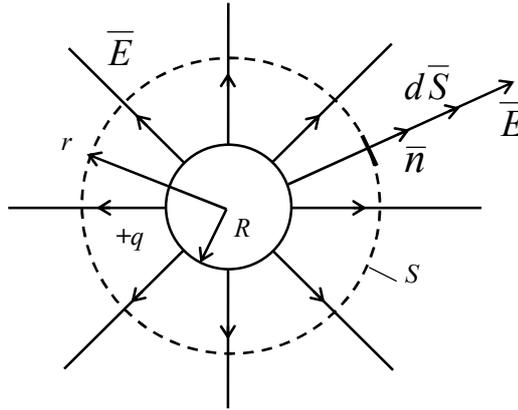
**Пример** Проводящий шар радиусом  $R$  с зарядом  $q$  расположен в воздухе. Определить выражения и построить графики зависимости электрического смещения  $D$ , напряженности электрического поля  $E$ , потенциала  $U$  в функции расстояния  $r$  от центра шара. Рассчитать значение емкости шара  $C$ .

**Решение.** Рассчитаем электрическое поле, создаваемое неподвижным заряженным проводящим шаром, с помощью постулата Максвелла

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q.$$

Картина электрического поля имеет вид, представленный на рис.1.9.

Определим характеристики электрического поля в произвольной точке пространства, расположенной вне шара на расстоянии  $r$  от его центра. Для этого через выбранную точку проведем замкнутую сферическую поверхность  $S$ , центр которой совпадает с центром шара. Внешняя нормаль  $\vec{n}$  к этой поверхности, а значит и вектор  $d\vec{S}$ , направлены в радиальном направлении и совпадают с направлением вектора  $\vec{E}$ .



Кроме того, в силу симметрии задачи,  $|\vec{D}|$  имеет одно и то же значение для всех точек поверхности и, следовательно, поток вектора электрического смещения  $\psi_D$  может быть определен в виде

$$\psi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D \cdot \cos(\vec{D}, d\vec{S}) = D \cdot \oint_S dS = D \cdot S = D \cdot 4\pi r^2.$$

В объеме, ограниченном замкнутой поверхностью  $S$ , заключен заряд шара  $q$ . Таким образом, в соответствии с постулатом Максвелла, получим

$$D \cdot 4\pi r^2 = q \quad \text{или} \quad D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Напряженность электрического поля в воздухе ( $\epsilon = \epsilon_0$ ) определится из соотношения  $D = \epsilon_0 E$  в виде

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

При определении интенсивности электрического поля внутри проводящего шара учтем, что заряд, сообщенный любому проводящему телу, располагается на его поверхности. Поэтому внутри замкнутой поверхности, проведенной через любую точку, лежащую внутри шара, электрический заряд отсутствует. Это означает равенство нулю потока  $\psi_D$  через такую поверхность и, следовательно, в любой внутренней точке проводящего шара справедливы равенства  $D = 0$  и  $E = 0$ .

Потенциал  $U$  точки с координатой  $r$  может быть рассчитан из соотношения

$$U(r) = \int_r^p \vec{E} \cdot d\vec{\ell},$$

где  $p$  - точка, потенциал которой принят равным нулю. При решении данной задачи будем считать точку  $p$  расположенной в бесконечности.

Определим потенциал произвольной точки вне шара, выбирая путь интегрирования, совпадающим с силовой линией электрического поля. Тогда

$$U(r) = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} E \cdot dr = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

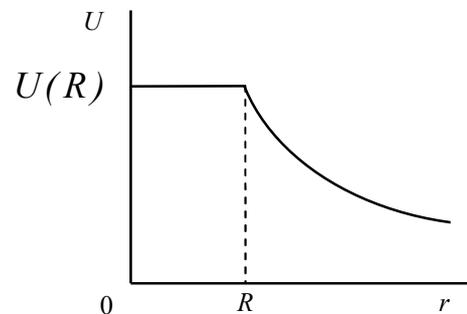
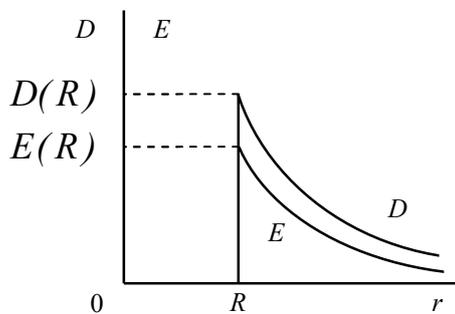
Потенциал произвольной точки внутри шара равен потенциалу на поверхности шара  $U(R)$ , так как внутри шара напряженность поля  $E = 0$ ,

$$U(r) = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R E \cdot dr + \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = U(R).$$

Емкость шара определим, используя выражение для емкости уединенного тела в виде

$$C = \frac{q}{U(R)} = 4\pi\epsilon_0 R.$$

Полученные соотношения  $D(r)$ ,  $E(r)$ ,  $U(r)$  дают возможность изобразить графики этих функций.



## ЛЕКЦИЯ 2

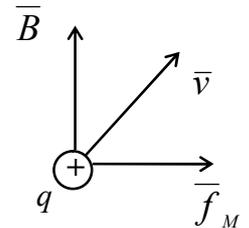
### МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Основным признаком магнитного поля является его воздействие на движущуюся заряженную частицу с силой, пропорциональной заряду частицы и ее скорости. Магнитное поле характеризуется векторной величиной  $\vec{B}$ , называемой магнитной индукцией и имеющей размерность тесла ( $[B] = \text{Тл}$ ). В магнитном поле может быть введено понятие о линиях магнитной индукции, в каждой точке которых вектор магнитной индукции направлен по касательной к ним.

Магнитная индукция определяет силу, действующую на движущийся со скоростью  $\vec{v}$  заряд  $q$ , причем

$$\vec{f}_M = q [\vec{v} \times \vec{B}].$$

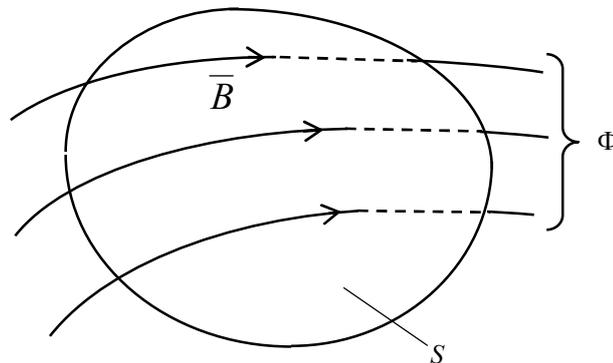
Вектор  $\vec{f}_M$  направлен перпендикулярно плоскости, в которой располагаются вектора  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .



Для анализа магнитного поля в некоторой части пространства вводится понятие магнитного потока  $\Phi$ , ( $[\Phi] = \text{Вб}$ ),

определяемого как поток вектора  $\vec{B}$  сквозь поверхность  $S$ :

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$



Магнитный поток может рассматриваться как совокупность линий магнитной индукции, проходящих через произвольную поверхность  $S$ .

Приведенное интегральное соотношение позволяет трактовать магнитную индукцию  $\vec{B}$  как поверхностную плотность магнитного потока, поэтому очевидна связь  $[B] = \text{Тл} = \text{Вб}/\text{м}^2$ .

Справедлив принцип непрерывности магнитного потока

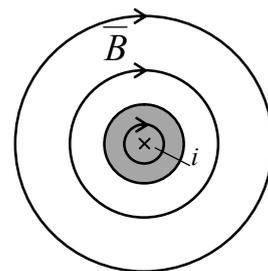
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0,$$

согласно которому магнитный поток сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю, то есть линии магнитной индукции непрерывны.

Магнитное поле создается движущимися зарядами, то есть электрическим током. Важным свойством линий магнитной индукции является то, что они

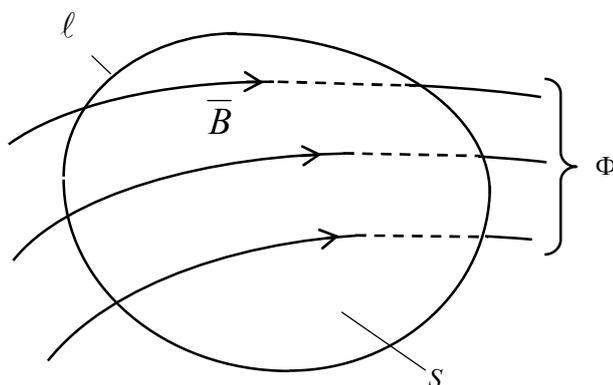
обязательно охватывают электрический ток, создающий это магнитное поле. На рисунке приведена картина магнитного поля токонесущего провода круглого поперечного сечения.

Направление тока (знак  $\times$ , изображенный на рисунке, означает уходящий от наблюдателя ток) связано с направлением магнитных силовых линий правилом правого винта.



### ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Рассмотрим находящуюся в магнитном поле поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $\ell$ .



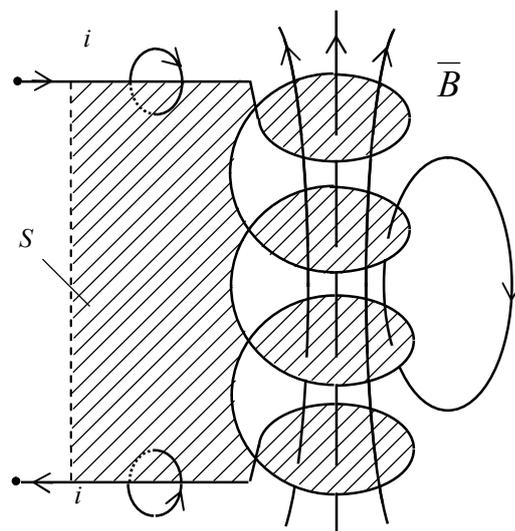
При изменении магнитного потока  $\Phi$ , проходящего через указанную поверхность, в контуре  $\ell$  появляется (индуцируется) электродвижущая сила  $e$

$$e = \oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Это соотношение носит название закона электромагнитной индукции и справедливо по отношению к любому замкнутому контуру, расположенному как в проводящей, так и в непроводящей среде. Знак “-” в этом выражении показывает, что э.д.с., возникающая в результате изменения магнитного потока, препятствует его изменению.

### ПОТОКОСЦЕПЛЕНИЕ

Рассмотрим катушку с током  $i$ , состоящую из нескольких витков (рис.). Изобразим линии магнитной индукции, пересекающие поверхность  $S$ , ограниченную этим контуром, и образующие поток  $\Phi$ . Из рисунка видно, что различные силовые линии пересекают указанную поверхность различное число раз. Для учета этого обстоятельства используется такое понятие, как потокосцепление  $\psi$ . Потокосцепление можно получить,



умножая поток магнитной индукции на число витков, с которым он сцепляется, и складывая полученные произведения. При этом слагаемые берутся со знаком “плюс” для трубок, связанных с направлением тока правилом правого винта, в противном случае соответствующее слагаемое учитывается со знаком “минус”.

Э.д.с., индуктируемая в контуре, определяется величиной потокосцепления  $\psi$ , поэтому

$$e = -\frac{d\psi}{dt}.$$

Если может быть принято допущение о том, что все линии магнитной индукции сцепляются со всеми  $w$  витками катушки, потокосцепление и магнитный поток связаны простым соотношением  $\psi = w \cdot \Phi$ .

### Э.Д.С. САМОИНДУКЦИИ И ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ

При наличии контура с электрическим током магнитный поток, создаваемый током этого контура и сцепляющийся с ним, называют потоком самоиндукции. Потокосцепление самоиндукции пропорционально току

$$\psi_L = L \cdot i.$$

Коэффициент  $L$  называется индуктивностью контура и измеряется в генри ( $[L] = \text{Гн}$ ). Индуктивность зависит от геометрических величин  $g$ , определяющих форму и размеры контура, а также от абсолютной магнитной проницаемости  $\mu$  среды, в которой существует магнитное поле, то есть  $L = f(g, \mu)$ .

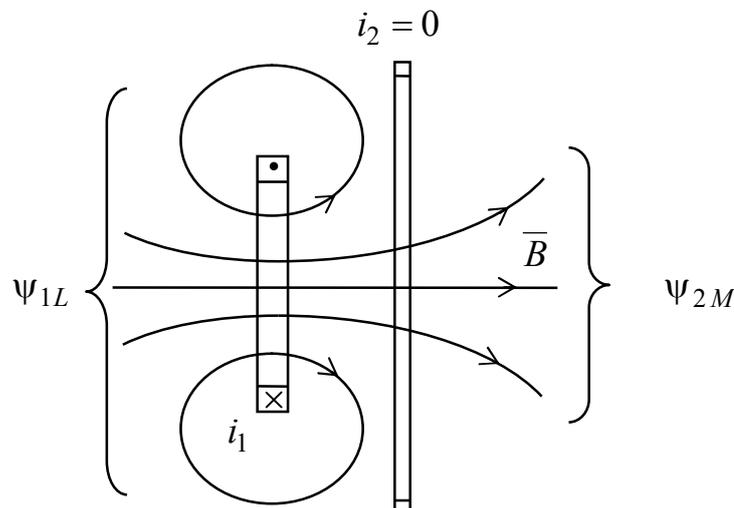
При изменении потокосцепления  $\psi_L$  в контуре возникает э.д.с. самоиндукции

$$e_L = -\frac{d\psi_L}{dt},$$

что в случае  $L = \text{const}$  приводит к соотношению

$$e_L = -L \cdot \frac{di}{dt}.$$

Рассмотрим два контура, предположив, что ток протекает только в одном из них.



Часть линий магнитной индукции потока самоиндукции первого контура сцепляется со вторым контуром. Этот поток, определяемый током в первом контуре, называют потоком взаимной индукции. Потокосцепление взаимной индукции со вторым контуром будем обозначать  $\Psi_{2M}$  или  $\Psi_{21}$ .

Потокосцепление со вторым контуром пропорционально току в первом

$$\Psi_{21} = M_{21} \cdot i_1 ;$$

взаимная индуктивность  $M_{21}$  контуров, зависит от их формы, размеров, взаимного расположения и абсолютной магнитной проницаемости  $\mu$  среды, в которой расположены контуры.

Отметим, что из энергетических соображений следует равенство  $M_{21} = M_{12}$ .

При изменении потока взаимной индукции, сцепляющегося со вторым контуром, в нем возникает э.д.с. взаимной индукции

$$e_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt}$$

или при неизменной во времени взаимной индуктивности  $M_{21}$

$$e_{21} = -M_{21} \cdot \frac{di_1}{dt}.$$

Знак “минус” в выражении для индуцируемых э.д.с. означает, что они стремятся вызвать токи, магнитное поле которых препятствует изменению магнитного потока, явившегося причиной возникновения э.д.с. Другими словами, действует так называемый принцип электромагнитной инерции.

## СВЯЗЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ТОКОМ

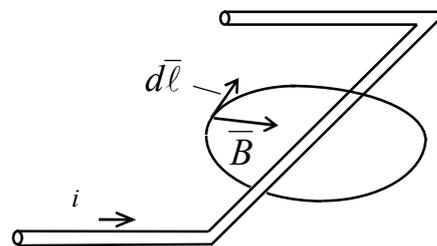
Рассмотрим расположенный в воздухе провод, по которому протекает ток  $i$ .

Опытным путем было установлено, что для любого замкнутого контура  $\ell$ , охватывающего ток  $i$ , справедливо равенство

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot i,$$

где вектор  $d\vec{\ell}$  направлен по касательной к контуру интегрирования, коэффициент  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м представляет собой абсолютную магнитную проницаемость пустоты.

Ряд используемых в инженерной практике материалов имеет магнитную проницаемость практически совпадающую с  $\mu_0$  – медь, алюминий.



В то же время существует целый класс веществ, так называемых ферромагнетиков, для которых абсолютная магнитная проницаемость превосходит постоянную  $\mu_0$  в сотни и тысячи раз. Наиболее известные ферромагнетики – стали различных марок. В средах с такими свойствами интенсивность магнитного поля резко возрастает при неизменности источника магнитного поля ( $i = const$ ).

Кроме вектора  $\overline{B}$  магнитное поле характеризуется вектором напряженности магнитного поля  $\overline{H}$ , связанного с индукцией  $\overline{B}$  соотношением

$$\overline{B} = \mu \overline{H}.$$

Связь магнитного поля с электрическим током выражается соотношением, называемым законом полного тока

$$\oint_{\ell} \overline{H} \cdot d\overline{\ell} = i.$$

Здесь  $i$  – ток, охватываемый произвольным замкнутым контуром  $\ell$ , расположенным в среде с произвольной магнитной проницаемостью. Напряженность магнитного поля имеет размерность А/м.

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Основными уравнениями электромагнитного поля являются уравнения, содержащие вектора поля  $\overline{D}$ ,  $\overline{E}$ ,  $\overline{B}$ ,  $\overline{H}$ :

$$\oint_{\ell} \overline{H} \cdot d\overline{\ell} = i \text{ – закон полного тока,}$$

$$\oint_{\ell} \overline{E} \cdot d\overline{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ – закон электромагнитной индукции,}$$

$$\oint_S \overline{B} \cdot d\overline{S} = 0 \text{ – принцип непрерывности магнитного потока,}$$

$$\oint_S \overline{D} \cdot d\overline{S} = q \text{ – постулат Максвелла.}$$

Основные уравнения поля дополняются уравнениями связи:

$$\overline{D} = \varepsilon \cdot \overline{E}, \quad \overline{B} = \mu \cdot \overline{H}.$$

Приведенные выше четыре интегральных уравнения являются аксиомами, полученными в результате обобщения большого количества опытных данных.

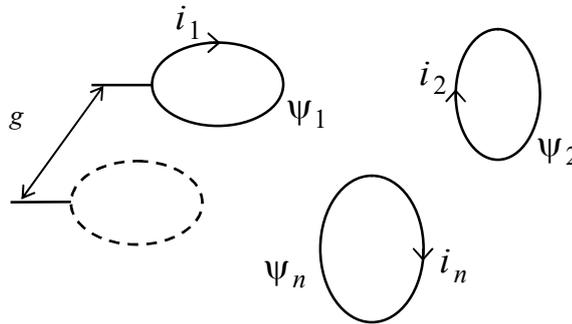
## ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ КОНТУРОВ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ТОКАМИ.

Для системы, состоящей из  $n$  контуров с токами (рис.), энергия  $W_M$  магнитного поля равна

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} i_k \Psi_k,$$

где  $i_k, \Psi_k$  – соответственно ток и потокосцепление  $k$ -го контура,

$$\Psi_k = L_k i_k + \sum_{p=1}^{p=n} M_{kp} i_p, \quad p \neq k.$$



С точки зрения физических представлений о природе электромагнитного поля уместнее говорить о распределении в пространстве энергии магнитного поля с объемной плотностью  $W'_M$  ( $[W'_M] = \text{Дж/м}^3$ ), равной

$$W'_M = \frac{\overline{H} \cdot \overline{B}}{2}.$$

В случае изотропной среды (при совпадению по направлению векторов  $\overline{H}$  и  $\overline{B}$ ), имеем соотношения

$$W'_M = \frac{H \cdot B}{2} = \frac{\mu \cdot H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu}.$$

Полная энергия магнитного поля в объеме  $V$  определится в виде

$$W_M = \int_V W'_M dV.$$

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СИЛА

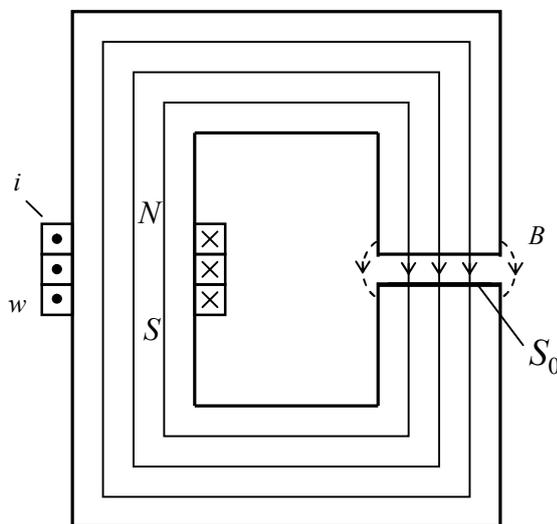
Под электромагнитной силой понимают силу, действующую на проводники с токами, расположенные в магнитном поле. К электромагнитным силам относят также механические силы, действующие на тела из

ферромагнитных материалов, расположенные в магнитном поле. Такие силы называют также электродинамическими. Электродинамическая сила может быть рассчитана при известной зависимости  $W_M(g)$  согласно соотношениям

$$f_M = - \left. \frac{\partial W_M}{\partial g} \right|_{\psi_k = \text{const}} = + \left. \frac{\partial W_M}{\partial g} \right|_{i_k = \text{const}},$$

где  $g$  – обобщенная координата (рис.), которая изменяется под действием силы.

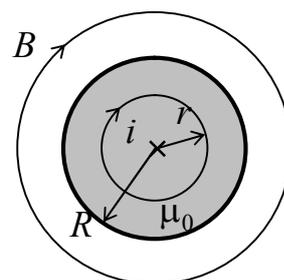
Рассмотрим силу  $f_M$ , действующую на среднюю часть полюса электромагнита, стремящуюся изменить расстояние между полюсами. Пренебрежем искажением магнитных силовых линий у краев ферромагнитного сердечника (рис.).



Можно показать, что в области однородного магнитного поля на единицу поверхности полюса действует сила  $f'_M = \frac{f_M}{S_0} = \frac{B \cdot H}{2}$ , равная объемной плотности энергии магнитного поля. При этом сила  $f_M = f'_M S_0 = \frac{B \cdot H}{2} S_0$  стремится сблизить полюса электромагнита.

В качестве примера расчета характеристик магнитного поля рассмотрим весьма длинный медный провод радиуса  $R$ , по которому протекает ток  $i$ , равномерно распределенный по сечению провода. Определим напряженность магнитного поля в произвольной точке внутри и вне провода.

**Решение.** Линии напряженности магнитного поля, создаваемого током  $i$ , представляют собой concentric окружности, центры которых располагаются на оси проводника.



На рисунке из всего множества магнитных силовых линий изображены две линии (одна внутри провода, другая снаружи). Напряженность магнитного поля определим на основании закона полного тока  $\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i$ . Через произвольную точку внутри провода проведем замкнутый контур интегрирования, совпадающий с магнитной силовой линией радиуса  $r$ . При таком выборе контура  $\ell$  вектора  $\vec{H}$  и  $d\vec{\ell}$  совпадают по направлению, и в силу симметрии задачи можем записать

$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H \cdot \oint_{\ell} d\vec{\ell} = H \cdot 2\pi r = i_0,$$

где  $i_0$  – часть тока провода, протекающего внутри контура  $\ell$ . Величина  $i_0$  при постоянной по сечению плотности тока  $J = i / \pi R^2$  определится как  $i_0 = J\pi r^2$ , следовательно

$$H \cdot 2\pi r = i \frac{r^2}{R^2},$$

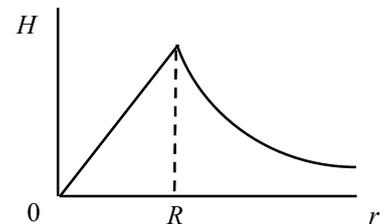
откуда получаем искомую зависимость  $H(r)$  в виде

$$H(r) = \frac{ir}{2\pi R^2}.$$

Для любой точки вне проводника решение будет отличаться лишь тем, что внутри контура интегрирования протекает весь ток провода  $i$ . Поэтому при  $r \geq R$  зависимость напряженности магнитного поля от координаты имеет вид

$$H(r) = \frac{i}{2\pi r}.$$

График функции  $H(r)$  представлен на рисунке.



## ЛЕКЦИЯ 3

### ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

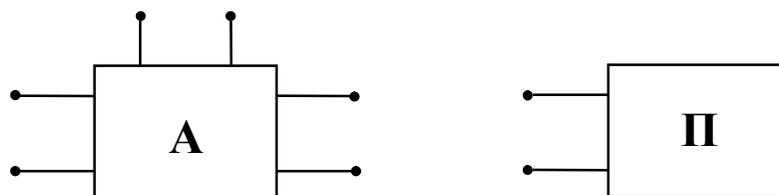
В большом числе практически важных случаев процессы в электротехнических устройствах могут быть описаны такими интегральными понятиями как э.д.с.  $e = \oint \bar{E} \cdot d\bar{\ell}$ , электрическое напряжение  $u = \int \bar{E} \cdot d\bar{\ell}$ , электрический заряд  $q = \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S}$ , электрический ток  $i = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S}$ , магнитный поток  $\Phi = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S}$ . При этом не возникает необходимость в рассмотрении вопросов распределения в пространстве векторных величин  $\bar{D}$ ,  $\bar{E}$ ,  $\bar{J}$ ,  $\bar{B}$ .

Совокупность устройств, предназначенных для прохождения в них электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий э.д.с., напряжение, ток, называется электрической цепью.

В качестве основных элементов электрической цепи отметим :

- источники электромагнитной энергии (электрические генераторы, гальванические элементы, аккумуляторы и т.д.);
- передающие электромагнитную энергию устройства (воздушные и кабельные линии электропередачи);
- преобразователи электромагнитной энергии (трансформаторы, выпрямители, инверторы и т.д.);
- приемники электромагнитной энергии (электродвигатели, электротехнологические и электрохимические установки).

Часть электрической цепи, содержащую источники электромагнитной энергии, называют активной частью цепи (активной цепью) и обычно обозначают в виде прямоугольника с буквой **А** внутри и несколькими выводами.



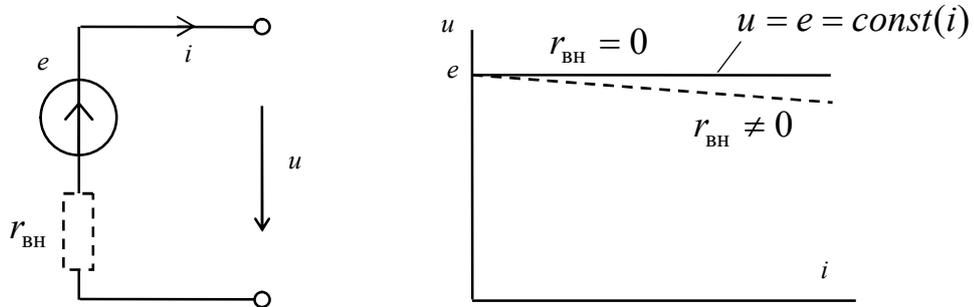
При отсутствии источников электромагнитной энергии в части электрической цепи будем называть эту ее часть пассивной цепью и обозначать буквой **П**

### ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Источники электромагнитной энергии в электрических цепях рассматриваются как источники э.д.с. и источники тока.

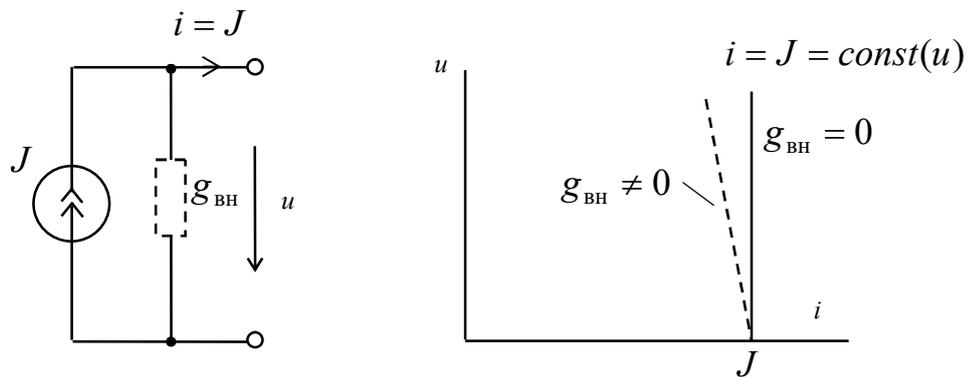
**Источник э.д.с.** – это источник электромагнитной энергии, напряжение на зажимах которого не зависит или мало зависит от тока, идущего от источника к

нагрузке (приемнику). Реальные источники э.д.с. обладают внутренним сопротивлением  $r_{BH}$ , которое является весьма небольшим по величине, вследствие чего им обычно пренебрегают. Получаем так называемый идеальный источник э.д.с., вольт-амперная характеристика (ВАХ) которого имеет вид



Величина тока  $i$  определяется видом цепи, в которой действует источник.

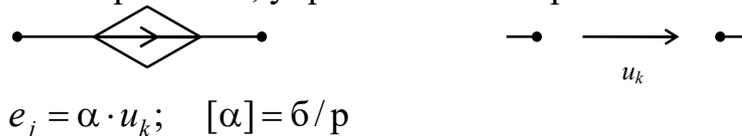
**Источник тока** – это источник электромагнитной энергии, в котором ток не зависит или мало зависит от напряжения на его зажимах. Если пренебречь внутренней проводимостью источника тока, то получим идеальный источник тока, ВАХ которого приведена на рисунке



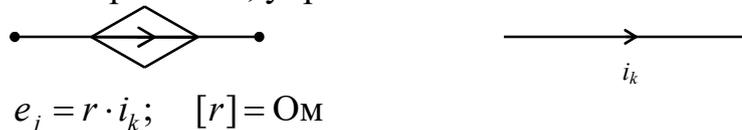
Важной разновидностью источников э.д.с. и тока являются зависимые (управляемые) источники, величины  $e$  или  $J$  которых зависят от тока или напряжения на некотором участке цепи.

Рассмотрим следующие виды зависимых источников.

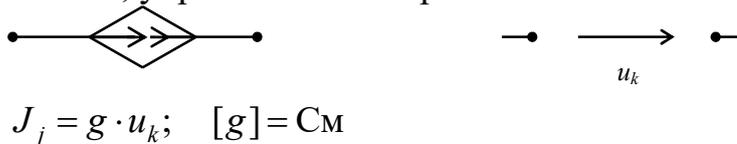
ИНУН – источник напряжения, управляемый напряжением



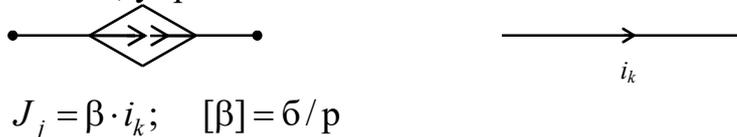
ИНУТ – источник напряжения, управляемый током



ИТУН – источник тока, управляемый напряжением



ИТУТ – источник тока, управляемый током



В принятой системе обозначений первый индекс указывает на участок цепи, в которой находится источник, а второй – на участок, который управляет источником.

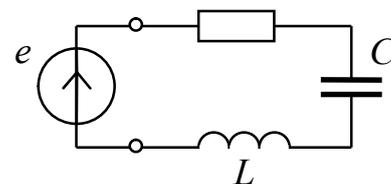
Введение зависимых источников э.д.с. и тока обусловлено активно развивающейся областью электротехники – электроникой. С помощью этих источников удобно отображать взаимное влияние различных элементов электрической цепи друг на друга, что характерно для систем, содержащих полупроводниковые элементы и микросхемы.

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Равномерное распределение электрического и магнитного полей вдоль цепи наблюдается относительно редко. Обычно электрическое и магнитное поля локализованы в определенных областях. Точно также и преобразование электромагнитной энергии в тепловую бывает сосредоточено в основном на одном или нескольких участках цепи. Поэтому при рассмотрении процессов в электрических цепях принимаются следующие допущения:

- в зоне тепловыделения (нагрева) предполагается наличие устройства, рассеивающего электромагнитную энергию. Это так называемой **резистор**, основным параметром которого является его активное сопротивление  $r$ ;
- в области концентрации электрического поля предполагается наличие **конденсатора** – устройства, накапливающего электрический заряд, основным параметром конденсатора является его электрическая емкость  $C$ ;
- в зоне локализации магнитного поля предполагается наличие **катушки индуктивности** – устройства, концентрирующего энергию магнитного поля, основным параметром катушки индуктивности является ее индуктивность  $L$ .

При таком подходе в качестве объекта исследования выступает цепь с сосредоточенными параметрами, простейший вариант которой изображен на рисунке.



Входящие в цепи с сосредоточенными параметрами элементы считаются идеальными, например, в катушке индуктивно-

сти это означает пренебрежение активным сопротивлением обмоточного провода ( $r = 0$ ) и межвитковыми емкостями ( $C = 0$ ).

Реальное устройство может не содержать ни резисторов, ни катушек индуктивности, ни конденсаторов. Тем не менее связь между током устройства и приложенным к нему напряжением может быть отражена с помощью понятий о сопротивлении, индуктивности и емкости. Эти параметры будем называть далее эквивалентными параметрами устройств.

### ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

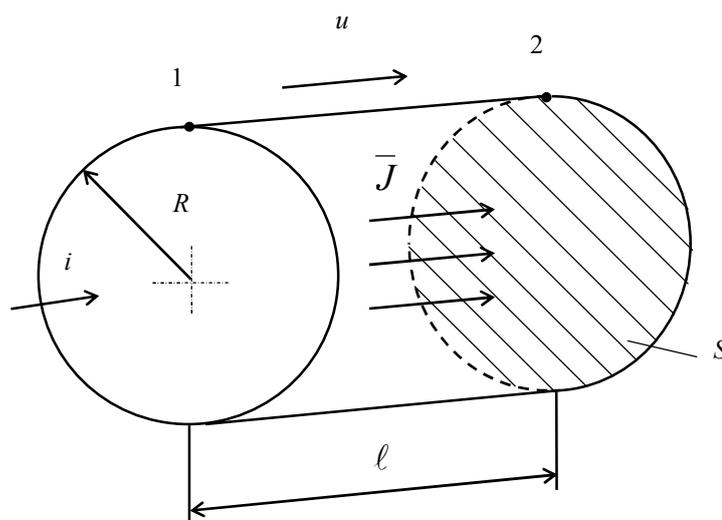
К основным параметрам электрической цепи относят сопротивление резистора  $r$  ( $[r] = \text{Ом}$ ), емкость конденсатора  $C$  ( $[C] = \text{Ф}$ ), индуктивность катушки  $L$  ( $[L] = \text{Гн}$ ), взаимную индуктивность  $M$  ( $[M] = \text{Гн}$ ).

В общем случае эти параметры могут зависеть от величин напряжений и токов в электрической цепи. Цепь, содержащая такие элементы, называется **нелинейной**. Если справедливы допущения о постоянстве параметров элементов ( $r, C, L, M = \text{const}(u, i)$ ), то рассматриваемая цепь является **линейной**.

Определение параметров  $r, C, L, M$  базируется на решении уравнений электромагнитного поля и представляет собой сложную самостоятельную задачу. В качестве примера рассмотрим вопросы расчета параметров некоторых устройств.

### РАСЧЕТ АКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОВОДА

Рассмотрим отрезок  $\ell$  протяженного цилиндрического проводника радиуса  $R$ , изготовленного из материала с удельной электрической проводимостью  $\gamma$ .



Определим сопротивление  $r$  этого провода в предположении, что протекающий по нему ток  $i$  распределен по сечению  $S$  равномерно. Учитывая, что напряженность электрического поля  $E$  распределена равномерно по сечению про-

водника, можем записать

$$i = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = \int_S \gamma \cdot E \cdot dS = \gamma \cdot E \cdot S.$$

Напряжение  $u$  между точками 1 и 2 определится в виде

$$u = \int_1^2 \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = \int_{\ell} E \cdot d\ell = E \cdot \ell,$$

откуда  $E = u/\ell$ , что приводит к равенству

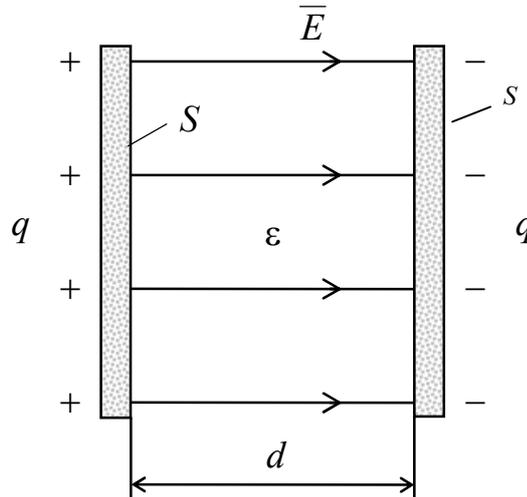
$$u = \frac{\ell}{\gamma \cdot S} \cdot i.$$

Сопротивление провода  $r$  определим из закона Ома

$$r = \frac{u}{i} = \frac{\ell}{\gamma \cdot S} = \frac{\ell}{\gamma \pi R^2}.$$

## РАСЧЕТ ЕМКОСТИ ПЛОСКОГО КОНДЕНСАТОРА

Получим выражение для расчета емкости плоского конденсатора, если известны: расстояние между пластинами  $d$ , площадь пластин  $S$ , абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества диэлектрика  $\epsilon$ .

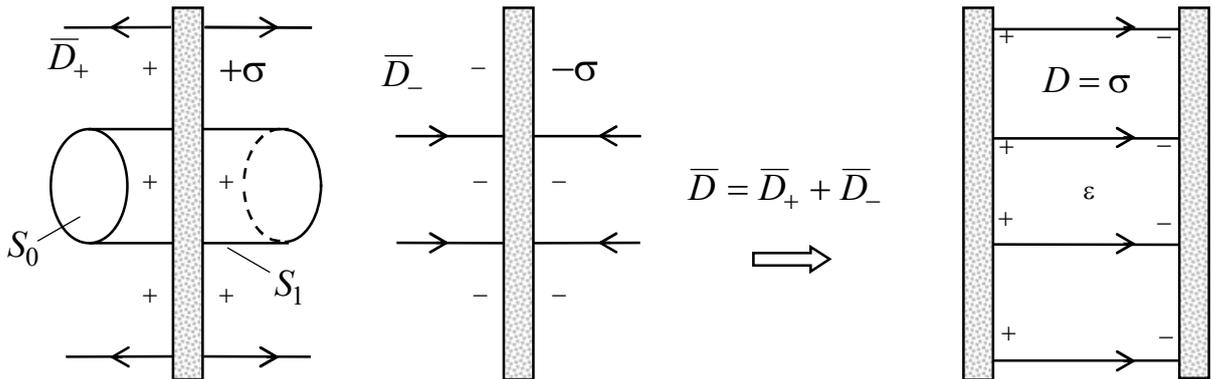


Будем считать, что заряды распределены по пластинам конденсатора равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma = q/S$ . Это допущение означает, что не учитывается краевой эффект, то есть искривление силовых линий электрического поля на краях конденсатора. По определению, емкость конденсатора может быть рассчитана по формуле

$$C = \frac{q}{U_1 - U_2} = \frac{q}{u_{12}},$$

где  $u_{12}$  – разность потенциалов между пластинами.

Рассчитаем электрическое поле конденсатора, используя постулат Максвелла. Для этого определим вектор электрического смещения  $\vec{D}$ , создаваемый положительно заряженной пластиной с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  (см. рис.).



Рассмотрим замкнутую цилиндрическую поверхность  $S_1$ , охватывающую заряд пластины, равный  $q_0 = \sigma \cdot S_0$ . Согласно постулату Максвелла можем записать

$$\oint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sigma \cdot S_0,$$

откуда следует, что  $D \cdot 2S_0 = \sigma \cdot S_0$ , то есть  $D = D_+ = \sigma / 2$ .

Величина вектора электрического смещения отрицательно заряженной пластины будет такой же, однако силовые линии имеют противоположное направление. Располагая эти заряженные поверхности на расстоянии  $d$  друг от друга (собственно конденсатор), получим согласно принципу суперпозиции, что вне пластин электрическое поле отсутствует, а между ними его интенсивность составляет  $D = \sigma$  или  $E = \sigma / \epsilon$ .

Разность потенциалов между пластинами  $u_{12}$  определим в виде

$$u_{12} = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^d E \cdot d\ell = E \cdot d.$$

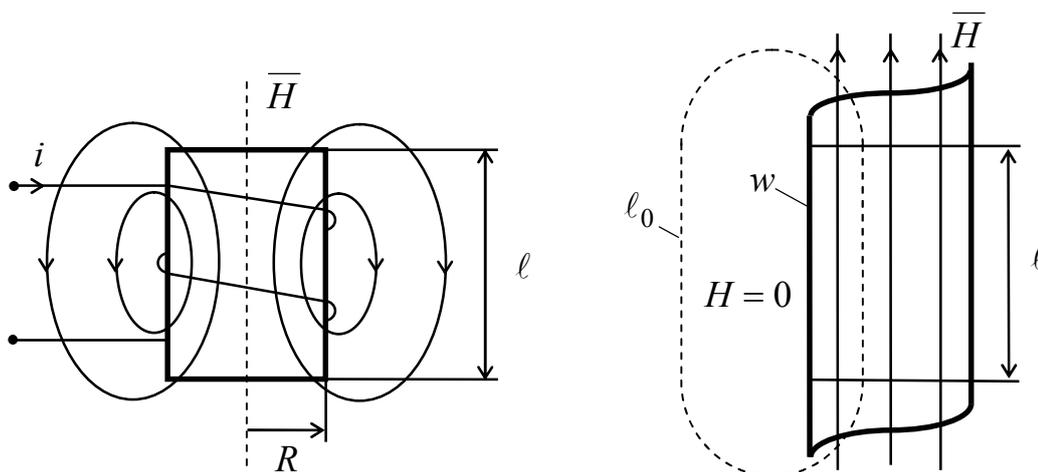
Тогда для емкости плоского конденсатора имеем

$$C = \frac{q}{u_{12}} = \frac{\sigma \cdot S}{E \cdot d} = \frac{\epsilon \cdot S}{d}.$$

## РАСЧЕТ ИНДУКТИВНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАТУШКИ

Определим индуктивность круглой цилиндрической однослойной катушки длиной  $\ell$  по известным радиусу катушки  $R$  и числу витков обмотки  $w$ .

Индуктивность катушки  $L$  может быть найдена как отношение полного потокосцепления  $\Psi$  к току катушки. Основная трудность решения этой задачи состоит в расчете величины потокосцепления  $\Psi_L$  катушки, так как различные магнитные силовые линии сцепляются с различным числом витков (рис.).



Упростим постановку задачи, предполагая в первом приближении катушку бесконечно длинной ( $\ell = \infty$ ) и считая, что ее витки намотаны вплотную друг к другу. При этом можно считать магнитное поле сосредоточенным внутри катушки, а силовые линии – замыкающимися в бесконечности.

Если длина  $\ell$  реальной катушки значительно превосходит ее диаметр, то картину магнитного поля такой катушки можно приближенно считать такой же, как и в случае  $\ell = \infty$ . Напряженность магнитного поля  $H$  определим из закона полного тока, выбрав контур интегрирования  $\ell_0$  так, чтобы часть его проходила внутри катушки параллельно ее оси. Поскольку предполагается, что вне катушки  $H = 0$ , можно записать

$$\oint_{\ell_0} \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = H \cdot \ell = i \cdot w,$$

и напряженность магнитного поля внутри катушки  $H = i \cdot w / \ell$ . Магнитный поток  $\Phi$  сквозь сечение катушки равен

$$\Phi = \int_s \bar{B} \cdot d\bar{S} = B \cdot S = \mu \cdot H \cdot \pi R^2 = \frac{\mu \cdot i \cdot w \cdot \pi R^2}{\ell},$$

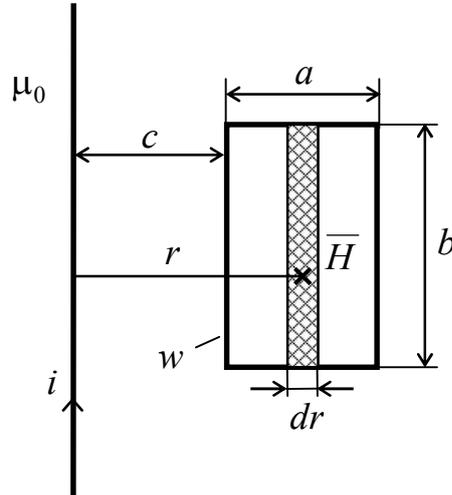
и так как потокосцепление  $\Psi = w \cdot \Phi$ , окончательно получаем

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{\mu \cdot w^2 \cdot \pi R^2}{\ell}.$$

Подчеркнем еще раз, что эта формула для определения индуктивности является приближенной и справедлива для однослойных катушек, длина которых значительно превосходит диаметр.

## РАСЧЕТ ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ ПРОВОДА И ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РАМКИ

Определим взаимную индуктивность  $M$  бесконечно длинного провода и прямоугольной рамки, состоящей из  $w$  витков.



Для расчета взаимной индуктивности определим потокосцепление  $\Psi_M$ , обусловленное магнитным полем провода.

В произвольной точке внутри рамки, на расстоянии  $r$  от провода, напряженность магнитного поля определим по закону полного тока  $\oint_{\ell} \vec{H} d\vec{\ell} = i$ .

Получаем 
$$H = \frac{i}{2\pi r}.$$

Рассчитаем магнитный поток сквозь поверхность рамки

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B dS.$$

При интегрировании в качестве элементарной площадки  $dS$  выберем прямоугольник  $dr \cdot b$ , тогда

$$\Phi = \int_c^{c+a} \mu_0 H \cdot b dr = \int_c^{c+a} \mu_0 \frac{i}{2\pi r} \cdot b dr = \frac{\mu_0 i \cdot b}{2\pi} \int_c^{c+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i \cdot b}{2\pi} \ln\left(\frac{c+a}{c}\right).$$

При плотной намотке витков рамки можем записать  $\Psi_M = w\Phi$  и для взаимной индуктивности получим

$$M = \frac{\Psi_M}{i} = \frac{\mu_0 w b}{2\pi} \ln\left(\frac{c+a}{c}\right).$$

Заметим, что взаимная индуктивность определяется «геометрией» системы и пропорциональна абсолютной магнитной проницаемости среды  $\mu_0$ .

## ЛЕКЦИЯ 4

### СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЕМ И ТОКОМ В ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Рассмотрим элементы электрической цепи (резистор, конденсатор, катушку индуктивности), считая их параметры  $r$  – сопротивление,  $C$  – емкость и  $L$  – индуктивность известными, не зависящими от тока и напряжения, то есть будем анализировать линейную электрическую цепь. Установим для этих элементов связи между напряжением  $u$  и током  $i$ .

#### Резистор

Протекающий по резистору ток и напряжение на его зажимах связаны законом Ома

$$u_r = r \cdot i_r, \quad i_r = g \cdot u_r,$$

где  $g = 1/r$  – проводимость резистора,  $[g] = 1/\text{Ом} = \text{См}$ .

#### Конденсатор

Известно, что заряд  $q$  конденсатора связан с напряжением  $u_c$  соотношением  $q = C \cdot u_c$ . Учитывая, что  $i_c = dq/dt$ , получим

$$i_c = C \cdot \frac{du_c}{dt}; \quad u_c = \frac{1}{C} \int_0^t i_c dt + u_c(0), \quad \text{где } u_c(0) = u_c(t)|_{t=0} - \text{напряжение на конденсаторе в начальный момент времени } t=0.$$

#### Катушка индуктивности

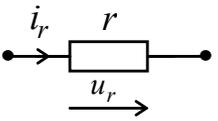
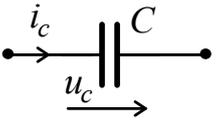
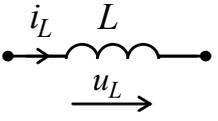
Потокоцепление самоиндукции  $\psi_L$  связано с током  $i_L$  соотношением  $\psi_L = L \cdot i_L$ . Учитывая, что э.д.с. самоиндукции  $e_L = -d\psi_L/dt$  и напряжение на зажимах катушки (преодолевающее эту э.д.с.)  $u_L = -e_L$ , получим:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad i_L = \frac{1}{L} \int_0^t u_L \cdot dt + i_L(0), \quad \text{где } i_L(0) = i(t)|_{t=0}.$$

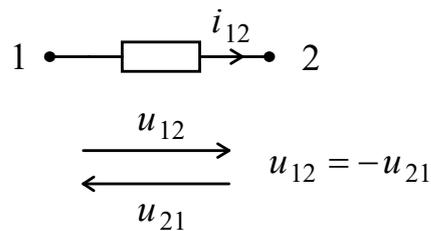
При анализе процессов в электрической цепи бывает трудно заранее указать реальные направления токов, поэтому их задают произвольно и называют **условными положительными направлениями** токов. Условные положительные направления обозначают стрелками. Если полученный в результате расчета ток в некоторый момент времени имеет отрицательное значение, то это означает, что реальное направление тока в этот момент времени противоположно условно выбранному.

Принято, что условные положительные направления напряжения и э.д.с. самоиндукции на основных элементах электрической цепи совпадают с условными положительными направлениями тока. В этом случае всегда выполняются установленные связи между напряжениями и токами для основных элементов (табл.), а параметры  $r$ ,  $L$ ,  $C$  положительны.

Таблица

Элемент эл. цепи	Связь между напряжением и током	Связь между током и напряжением
	$u_r = r \cdot i_r$	$i_r = g \cdot u_r$
	$q = C \cdot u_c$ $u_c = \frac{1}{C} \int_0^t i_c dt + u_c(0)$	$i_c = C \cdot \frac{du_c}{dt}$
	$\Psi_L = L \cdot i_L$ $u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$	$i_L = \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt + i_L(0)$

Направления тока и напряжения могут задаваться не только стрелками, но и индексами.



### СХЕМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Схема электрической цепи – это условное графическое изображение цепи. Схема может отображать соединение отдельных элементов некоторого устройства (рис.1) или является схемой замещения (эквивалентной схемой), состоящей из основных элементов  $r$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $e$ ,  $J$  и отображающей свойства реальной цепи.

Рассмотрим передачу энергии от генератора 1 к потребителю 3 через линию электропередачи 2, изображенную на рис.2.



Рис. 1

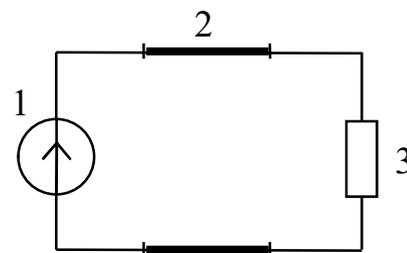
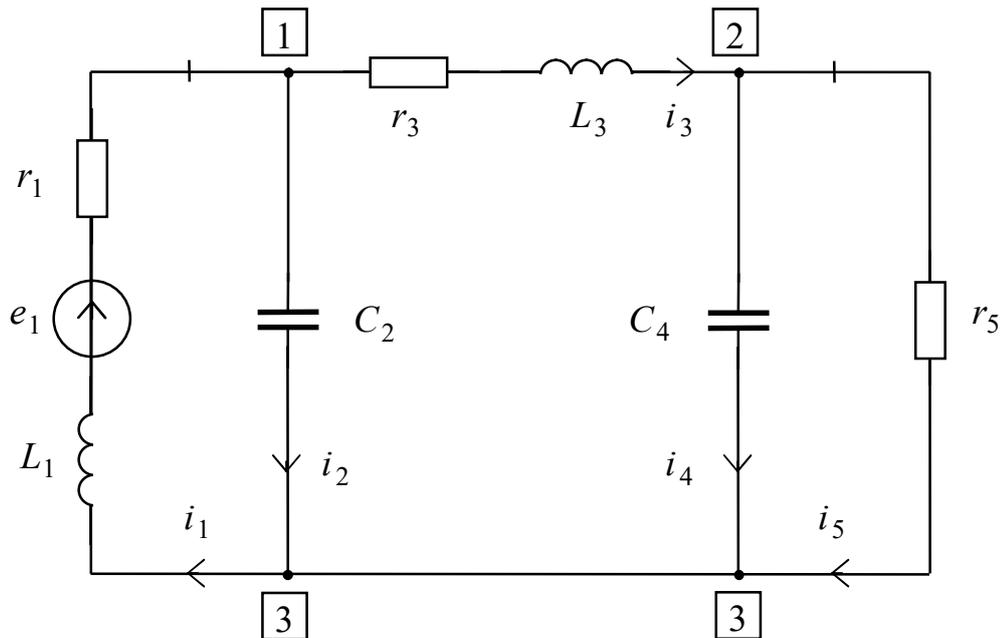


Рис. 2

В данном случае схема замещения может иметь следующий вид:



Здесь: Генератор моделируется источником э.д.с.  $e_1$ , катушкой индуктивности  $L_1$  и резистором  $r_1$ ; линия передачи – элементами  $r_3, L_3$ ; конденсаторы  $C_3, C_4$  служат для отображения токов утечки через диэлектрик, окружающий провода линии; нагрузке (потребителю) соответствует резистор  $r_5$  (например, нагревательный элемент).

Введем понятия **ветвь**, **узел**, **контур** электрической цепи и соответственно ее схемы.

**Ветвь** – участок схемы, в котором в любой момент времени ток имеет одно и то же значение. Ветвь может содержать любое число последовательно соединенных элементов цепи.

**Последовательное** соединение - это такое соединение элементов, когда по ним протекает один и тот же ток.

**Узел** – место соединения ветвей.

**Параллельным** соединением ветвей называют такое соединение, при котором все ветви присоединяются к одной паре узлов и ко всем этим ветвям приложено одно и то же напряжение.

**Смешанным** соединением называют комбинацию последовательных и параллельных соединений.

Сложные цепи могут не сводиться к перечисленным типам соединений.

**Контур** – это любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям. К каждому узлу в контуре присоединены две ветви.

Будем обозначать число узлов схемы –  $q$ , число ветвей  $p$ .

В рассмотренном примере имеем:

- число узлов  $q = 3$ ;
- число ветвей  $p = 5$ ;
- ветви 1, 3 содержат последовательно соединенные элементы;

- ветви 1 и 2, а также 4 и 5 соединены параллельно;
- ветвь 2 соединена параллельно участку, образованному ветвями 3, 4 и 5;
- ветвь 1 соединена последовательно с участком, образованным ветвями 2, 3, 4 и 5;
- ветви 1, 4, 5 не образуют какого либо из рассмотренных типов соединений;
- ветви 2, 3, 5 образуют контур (2,3,5), можно также выделить следующие контуры : (1,2), (2,3,4), (4,5), (1,3,4), (1,3,5).

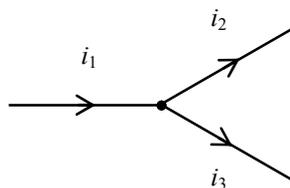
## ЗАКОНЫ КИРХГОФА

При расчете электрических цепей используются **законы Кирхгофа**.  
 Зададимся условными положительными направлениями токов, которые необходимо определить.

**Первый закон Кирхгофа** формулируется применительно к узлам электрической цепи и следует из принципа непрерывности электрического тока: **алгебраическая сумма токов всех ветвей, имеющих общий узел, равна нулю**

$$\sum_k i_k = 0.$$

Принято знак “плюс” приписывать току ветви, условное положительное направление которого направлено от узла, “минус” – к узлу. Например:



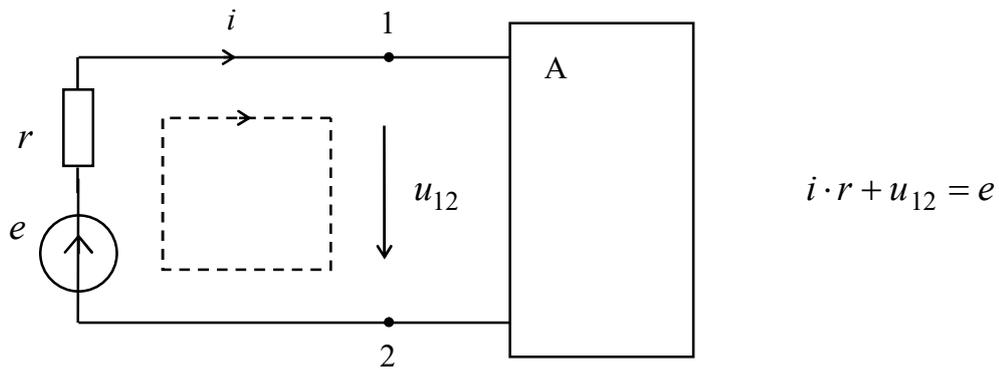
$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

**Второй закон Кирхгофа** формулируется применительно к контурам электрической цепи: **алгебраическая сумма падений напряжений на всех ветвях любого контура электрической цепи равна алгебраической сумме Э.д.с., действующих в этом контуре**

$$\sum_k u_k = \sum_k e_k.$$

При использовании второго закона Кирхгофа задаются произвольным положительным направлением обхода контура. Напряжения и э.д.с., условные положительные направления которых совпадают с направлением обхода, берутся со знаком “плюс”, в противном случае напряжения и э.д.с берутся со знаком “минус”.

Особо отметим, что при составлении уравнения по второму закону Кирхгофа контур может проходить не только по ветвям схемы, но и иметь вид, подобный указанному на рисунке пунктиром.

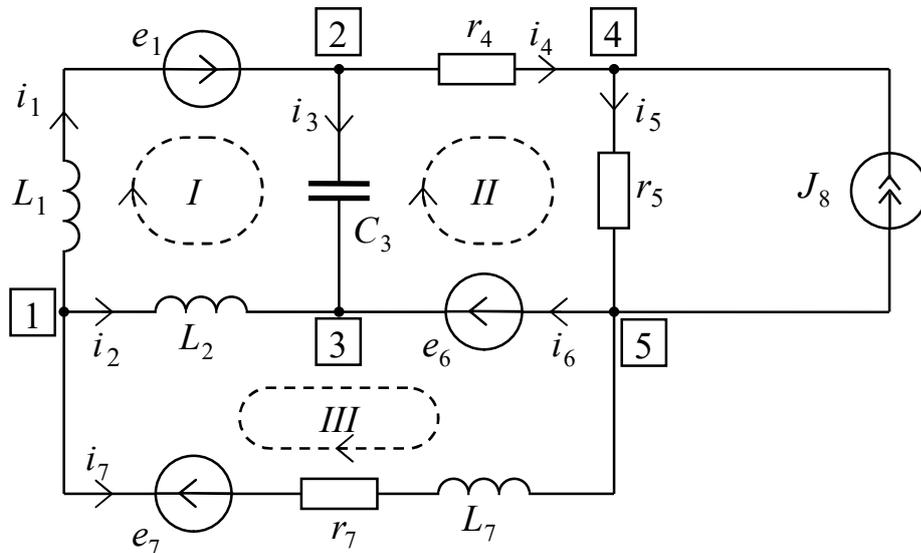


Для нахождения в цепи  $p$  неизвестных токов следует составить:  
 по первому закону Кирхгофа  $q-1$  линейно независимых уравнений для  $q-1$  узла;

по второму закону Кирхгофа число линейно независимых уравнений равно  $n = p - q + 1$ .

Общее число уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа, равно числу неизвестных токов  $p$ .

В качестве примера сформируем уравнения по законам Кирхгофа для цепи, изображенной на рисунке.



Промаркируем узлы, выберем условные положительные направления токов. Имеем  $q = 5$ ,  $p = 7$ . Ветвь с источником тока  $J_8$  при нумерации не учитываем, так как ее ток равен току источника  $J_8$ .

По первому закону Кирхгофа запишем уравнения для первых четырех узлов.

1.  $i_1 + i_2 + i_7 = 0$
2.  $-i_1 + i_3 + i_4 = 0$
3.  $-i_2 - i_3 - i_6 = 0$
4.  $-i_4 + i_5 - J_8 = 0$

При выборе независимых контуров  $n = p - q + 1 = 3$  не учитываем ветвь с источником тока, так как напряжение на его зажимах неизвестно. Проще всего независимые контура выбирать, используя отдельные «ячейки» схемы. Например, для контуров *I*, *II*, *III* при положительном обходе по часовой стрелке, получим три уравнения по второму закону Кирхгофа вида:

$$I \quad L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3 dt + u_{e3}(0) - L_2 \frac{di_2}{dt} = e_1,$$

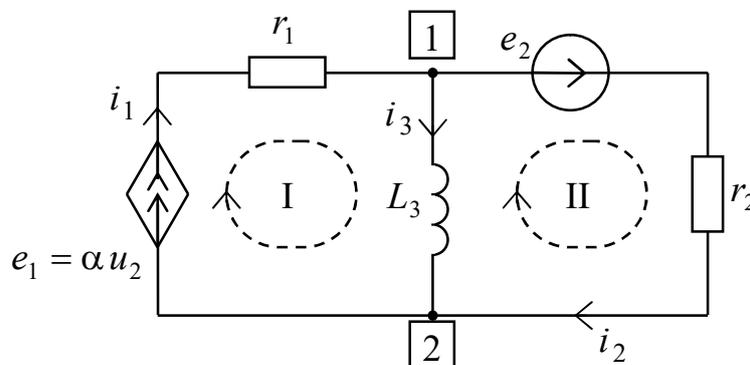
$$II \quad i_4 r_4 + i_5 r_5 - \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3 dt - u_{e3}(0) = e_6,$$

$$III \quad L_2 \frac{di_2}{dt} - L_7 \frac{di_7}{dt} - i_7 r_7 = -e_6 + e_7.$$

При расчете электрической цепи с управляемыми источниками уравнения формируются в два этапа :

- составляются уравнения цепи в предположении, что все источники независимые;
- слагаемые уравнений, соответствующие зависимым источникам, выражаются через управляющие токи и напряжения.

**Пример.** Составить уравнения по законам Кирхгофа для определения токов в ветвях электрической схемы (рис.).



Запишем:

$$I \quad -i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$I \quad i_1 r_1 + L_3 \frac{di_3}{dt} = e_1$$

$$II \quad i_2 r_2 - L_3 \frac{di_3}{dt} = e_2$$

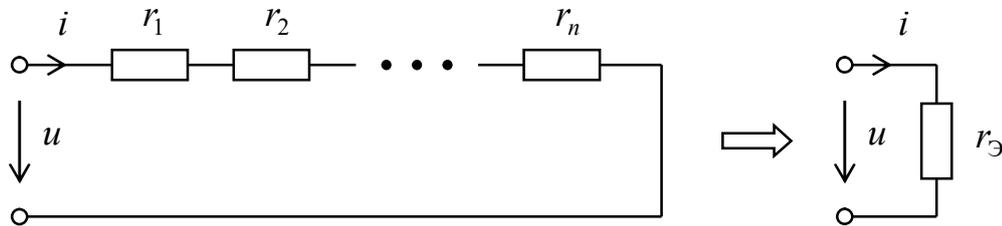
С учетом  $e_1 = \alpha u_2 = \alpha i_2 r_2$ , уравнение для первого контура примет вид:

$$i_1 r_1 + L_3 \frac{di_3}{dt} - \alpha i_2 r_2 = 0.$$

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ПРИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ И ПАРАЛЛЕЛЬНОМ СОЕДИНЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ

## Последовательное соединение элементов

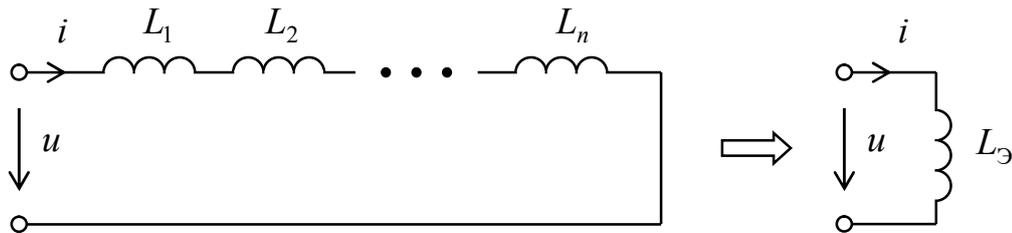
### Резисторы



По второму закону Кирхгофа  $i r_1 + i r_2 + \dots + i r_n - u = 0$ ,

$$i(r_1 + r_2 + \dots + r_n) = u, \quad i r_{\Sigma} = u, \quad r_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n r_k.$$

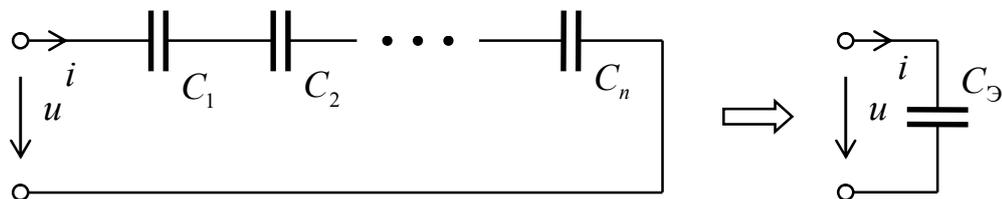
### Катушки индуктивности



$$L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_n \frac{di}{dt} = u,$$

$$(L_1 + L_2 + \dots + L_n) \frac{di}{dt} = u, \quad L_{\Sigma} \frac{di}{dt} = u, \quad L_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n L_k$$

### Конденсаторы



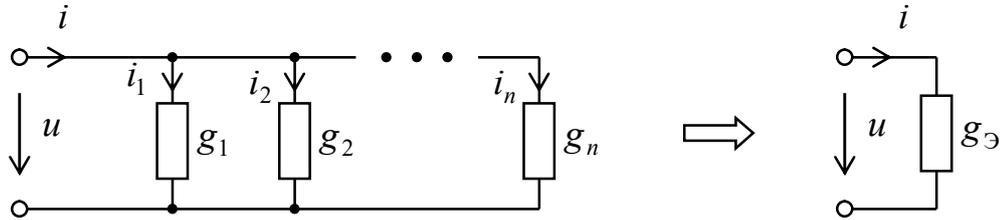
$$\frac{1}{C_1} \int_0^t idt + u_{c1}(0) + \frac{1}{C_2} \int_0^t idt + u_{c2}(0) + \dots + \frac{1}{C_n} \int_0^t idt + u_{cn}(0) = u$$

$$\left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) \int_0^t idt + u_{c\Sigma}(0) = u, \quad \frac{1}{C_{\Sigma}} \int_0^t idt + u_{c\Sigma}(0) = u,$$

$$\frac{1}{C_{\Sigma}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}, \quad \text{при } n = 2 \quad C_{\Sigma} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

## Параллельное соединение элементов

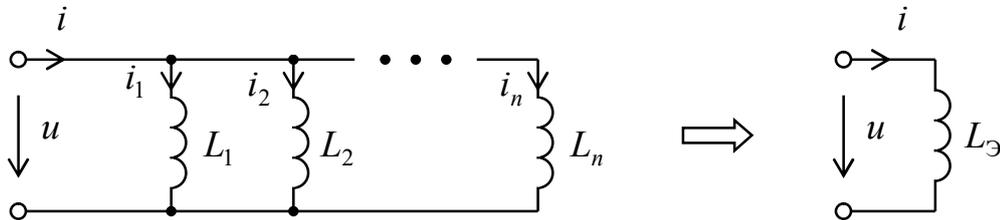
### Резисторы



По первому закону Кирхгофа  $-i + i_1 + i_2 + \dots + i_n = 0$ ,  $i_k = g_k u$ ,

$$i = u \cdot \sum_{k=1}^n g_k, \quad i = u g_{\Delta}, \quad g_{\Delta} = \sum_{k=1}^n g_k.$$

### Катушки индуктивности



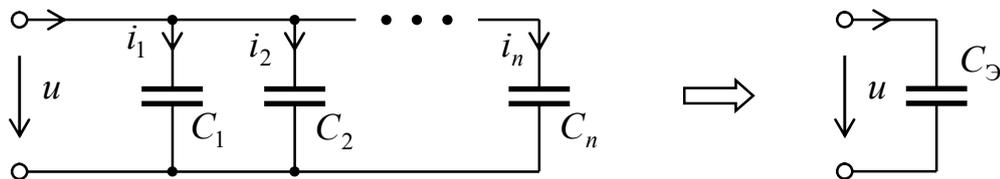
$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

$$i = \frac{1}{L_1} \int_0^t u dt + i_{L_1}(0) + \frac{1}{L_2} \int_0^t u dt + i_{L_2}(0) + \dots + \frac{1}{L_n} \int_0^t u dt + i_{L_n}(0)$$

$$i = \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \right) \int_0^t u dt + i_{L_{\Delta}}(0), \quad i = \frac{1}{L_{\Delta}} \int_0^t u dt + i_{L_{\Delta}}(0),$$

$$\frac{1}{L_{\Delta}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}, \quad \text{при } n=2 \quad L_{\Delta} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

### Конденсаторы



$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

$$i = C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt} + \dots + C_n \frac{du}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot \sum_{k=1}^n C_k, \quad C_{\Delta} = \sum_{k=1}^n C_k$$

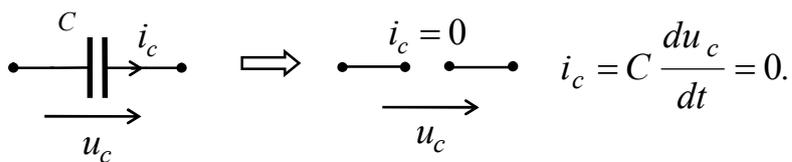
## ЛЕКЦИЯ 5

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Под электрическими цепями постоянного тока понимают цепи, в которых ток, напряжение, э.д.с. не изменяются во времени. Практически цепи постоянного тока состоят из резистивных элементов и источников энергии. Катушку индуктивности в цепи постоянного тока следует считать короткозамкнутой, так как при постоянном токе  $i_L$  в катушке не индуцируется э.д.с. самоиндукции  $e_L$ :



Конденсатор следует рассматривать как разрыв ветви, так как при постоянном напряжении  $u_C$  на зажимах конденсатора ток в этой ветви отсутствует:



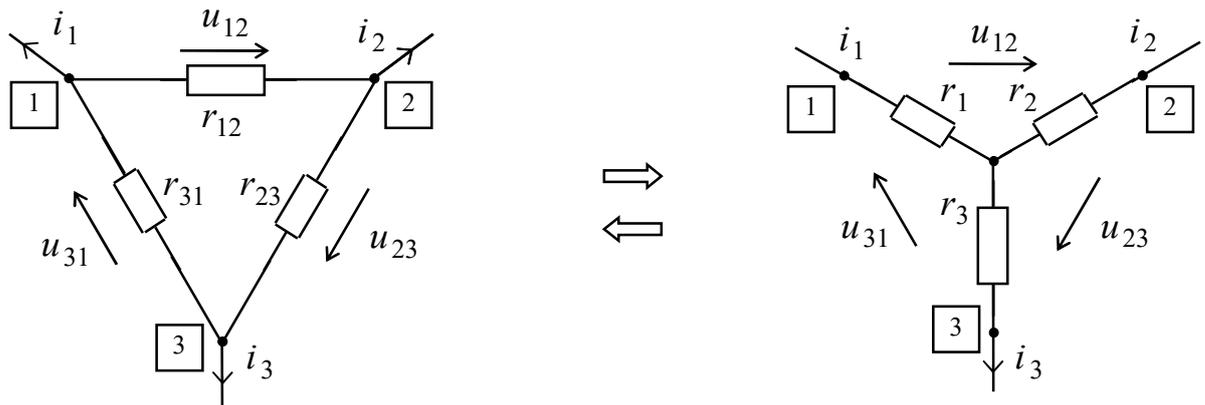
### ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Для упрощения расчета сложной цепи в ряде случаев целесообразно осуществить преобразование некоторой части цепи. Преобразование будем считать эквивалентным, если токи в ветвях и напряжения на элементах не преобразованной части схемы остаются неизменными. Преобразование цепи целесообразно использовать в тех случаях, когда оно уменьшает число узлов или число независимых контуров.

Кроме преобразования последовательно соединенных резисторов ( $r_{\Sigma} = \sum r_k$ ) и параллельно соединенных резисторов ( $g_{\Sigma} = \sum g_k$ ) возможны преобразования соединения треугольник-звезда и обратное преобразование.

#### Преобразование соединения треугольником в эквивалентное соединение звездой и обратное преобразование

На рисунке изображены фрагменты электрических схем, называемые соответственно треугольником ( $\Delta$ ) и звездой ( $\star$ ).



Для эквивалентной замены одной схемы на другую необходимо сохранить величины токов  $i_1, i_2, i_3$  и напряжений  $u_{12}, u_{23}, u_{31}$ .

Рассмотрим **преобразование соединения треугольником в соединение звездой**. Данное преобразование должно обеспечивать эквивалентность исходной и преобразованной схем при любых режимах работы. Поэтому проанализируем режимы работы в упрощенных схемах.

Если ток  $i_1 = 0$ , то сопротивление между узлами 2 и 3 в каждой из схем должны быть равны между собой

$$\underbrace{\frac{r_{23} \cdot (r_{12} + r_{31})}{r_{23} + r_{12} + r_{31}}}_{\Delta} = \underbrace{\frac{r_{23} \cdot r_{12}}{r_{23} + r_{12} + r_{31}}}_{r_2} + \underbrace{\frac{r_{23} \cdot r_{31}}{r_{23} + r_{12} + r_{31}}}_{r_3} = \underbrace{r_2 + r_3}_{\text{звезда}}. \quad (1)$$

Аналогично, при  $i_2 = 0$ , получим

$$\underbrace{\frac{r_{31} \cdot (r_{12} + r_{23})}{r_{31} + r_{12} + r_{23}}}_{\Delta} = \underbrace{\frac{r_{31} \cdot r_{12}}{r_{31} + r_{12} + r_{23}}}_{r_1} + \underbrace{\frac{r_{31} \cdot r_{23}}{r_{31} + r_{12} + r_{23}}}_{r_3} = \underbrace{r_1 + r_3}_{\text{звезда}}. \quad (2)$$

Выделяя справа от знака равенства одинаковые слагаемые, из (1) и (2) получим выражения, позволяющие рассчитать сопротивления звезды по известным сопротивлениям треугольника: **(правило запоминания !)**

$$r_1 = \frac{r_{31} \cdot r_{12}}{r_{31} + r_{12} + r_{23}}; \quad r_2 = \frac{r_{23} \cdot r_{12}}{r_{23} + r_{12} + r_{31}}; \quad r_3 = \frac{r_{31} \cdot r_{23}}{r_{31} + r_{12} + r_{23}}.$$

Рассмотрим **преобразование соединения звездой в соединение треугольником**.

Если напряжение  $u_{12} = 0$ , то сопротивления между узлами 2 и 3 в каждой из схем одинаковы

$$\underbrace{r_3 + \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}}_{\text{звезда}} = \underbrace{\frac{r_{23} \cdot r_{31}}{r_{23} + r_{31}}}_{\Delta}.$$

Записав обратные величины для левой и правой частей этого равенства, получим

$$\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3} = \frac{r_{23} + r_{31}}{r_{23} \cdot r_{31}}$$

Отсюда следует

$$\frac{r_1}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3} + \frac{r_2}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3} = \frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{31}}. \quad (3)$$

Аналогично, при  $u_{23} = 0$  имеем

$$r_1 + \underbrace{\frac{r_2 \cdot r_3}{r_2 + r_3}}_{\Delta} = \underbrace{\frac{r_{31} \cdot r_{12}}{r_{31} + r_{12}}}_{\Delta},$$

следовательно,

$$\frac{r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3} + \frac{r_2}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3} = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{31}}. \quad (4)$$

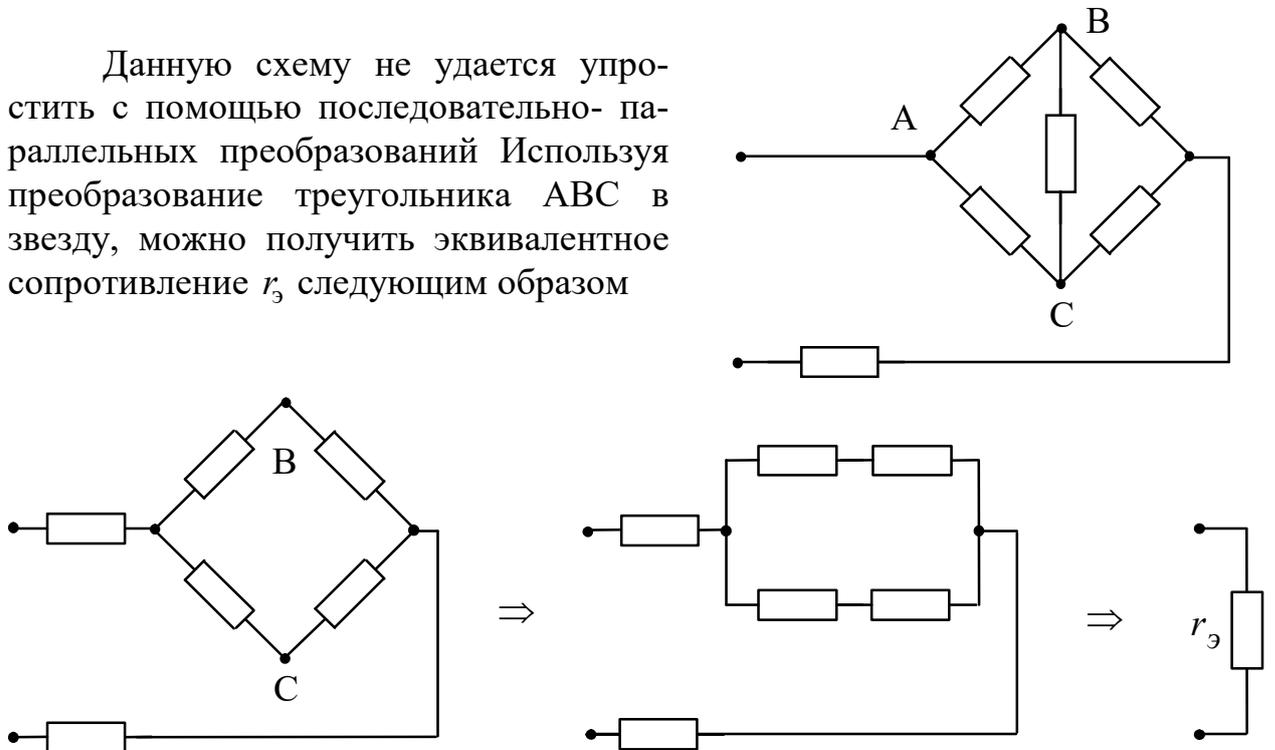
Сопоставляя соотношения (3) и (4), можем записать формулы для расчета сопротивлений треугольника по известным сопротивлениям звезды

$$r_{12} = r_1 + r_2 + \frac{r_1 \cdot r_2}{r_3}; \quad r_{23} = r_2 + r_3 + \frac{r_2 \cdot r_3}{r_1}; \quad r_{31} = r_1 + r_3 + \frac{r_1 \cdot r_3}{r_2}.$$

**(правило запоминания формул !)**

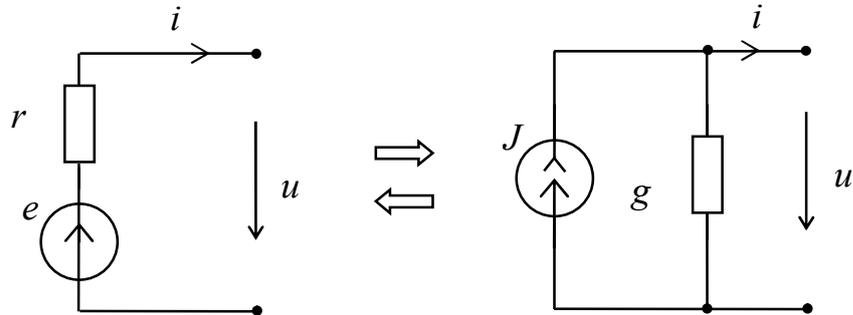
**Пример.** Найти эквивалентное сопротивление электрической цепи.

Данную схему не удастся упростить с помощью последовательно-параллельных преобразований. Используя преобразование треугольника ABC в звезду, можно получить эквивалентное сопротивление  $r_3$  следующим образом



## ЭКВИВАЛЕНТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИСТОЧНИКОВ

Эквивалентное преобразование источника э.д.с. в источник тока и обратное преобразование должно обеспечивать неизменность тока и напряжения на зажимах источника

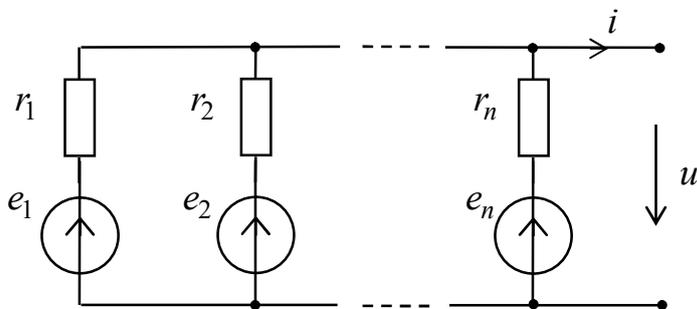


$$u = e - i \cdot r, \quad i = J - u \cdot g, \quad i = \frac{e}{r} - \frac{u}{r}, \quad u = \frac{J}{g} - \frac{i}{g}.$$

Сравнивая соотношения для напряжений  $u$  и токов  $i$  на зажимах идеальных источников э.д.с. и тока, имеем:

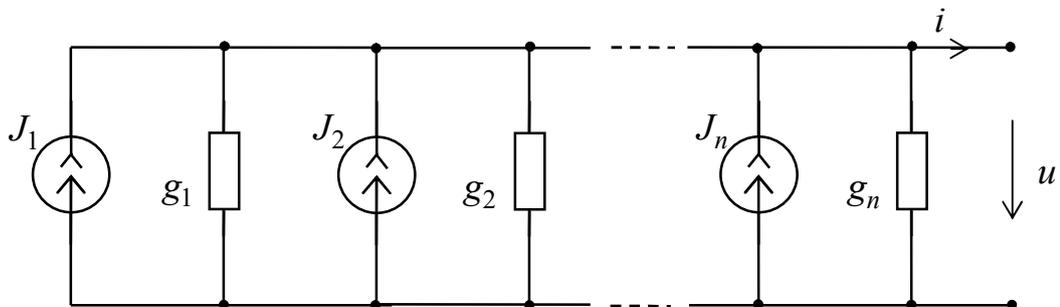
$$e = \frac{J}{g}, \quad r = \frac{1}{g}, \quad J = \frac{e}{r}, \quad g = \frac{1}{r}.$$

При указанных преобразованиях сопротивление резистора остается неизменным, а полученный источник подключается к нему последовательно или параллельно в зависимости от ситуации.



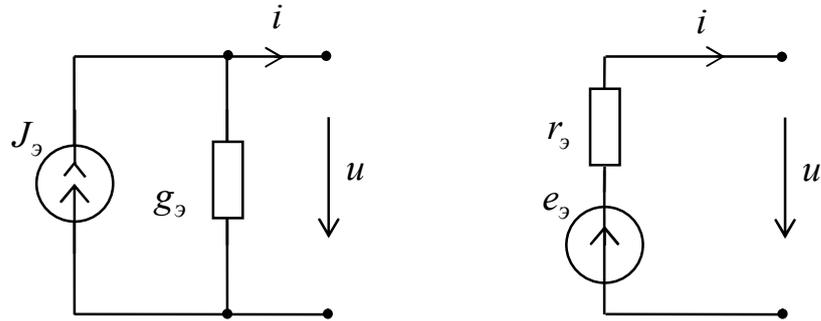
Полученный результат позволяет преобразовать несколько параллельно соединенных ветвей с источниками э.д.с. в одну ветвь с эквивалентным источником.

Используя эквивалентную замену источников, переходим к схеме



$$J_k = \frac{e_k}{r_k}, \quad g_k = \frac{1}{r_k},$$

и далее получим эквивалентный источник с параметрами  $J_3, g_3$  либо,  $e_3, r_3$ .



$$e_3 = \frac{J_3}{g_3} = \frac{\sum_k e_k}{\sum_k \frac{1}{r_k}}, \quad r_3 = \frac{1}{g_3} = \frac{1}{\sum_k \frac{1}{r_k}}.$$

### БАЛАНС МОЩНОСТЕЙ В ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

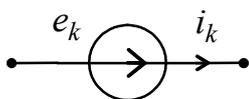
Из закона сохранения энергии следует, что сумма мощностей, рассеиваемых на резисторах цепи, равна сумме мощностей, отдаваемых источниками э.д.с. и тока

$$\sum_k P_{rk} = \sum_k P_{ek} + \sum_k P_{Jk}.$$

Мощность  $P_{rk}$ , потребляемая резистором  $r_k$ , определяется по любой из трех формул

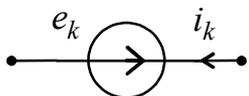
$$P_{rk} = u_k \cdot i_k = i_k^2 \cdot r_k = u_k^2 \cdot g_k.$$

Мощность  $P_{ek}$ , отдаваемая источником э.д.с.  $e_k$ , определяется выражением



$$P_{ek} = e_k \cdot i_k,$$

если условные положительные направления тока и э.д.с. совпадают, и

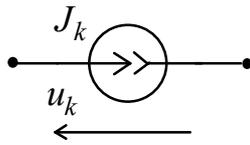


$$P_{ek} = -e_k \cdot i_k,$$

когда эти направления противоположны.

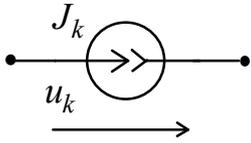
В отличие от мощности  $P_k$  которая всегда положительна, мощность источников  $P_{ek}$  может быть и положительной, и отрицательной. Отрицательная мощность получается, если ток в источнике направлен против э.д.с. В этом случае источник э.д.с. фактически является приемником. Такой режим возможен лишь в цепи, где имеется по крайней мере два источника, при этом мощность одного из источников будет величиной положительной.

Мощность  $P_{J_k}$  отдаваемая источником тока  $J_k$  определяется выражением



$$P_{J_k} = J_k \cdot u_k,$$

если условные положительные направления тока и напряжения противоположны и,



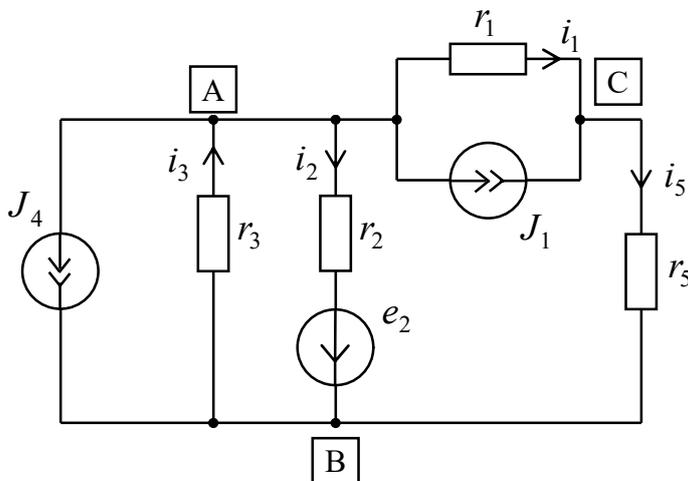
$$P_{J_k} = -J_k \cdot u_k,$$

когда эти направления совпадают.

Соотношение, представляющее собой баланс мощностей, может быть использовано для проверки правильности расчета цепи.

### Пример

Для закрепления изложенного материала, рассчитаем токи в цепи, схема которой изображена на рисунке.



Исходные данные:

$$r_1 = r_2 = r_3 = 2 \text{ Ом}$$

$$r_5 = 1 \text{ Ом}$$

$$J_1 = 2 \text{ А}; J_4 = 1 \text{ А}$$

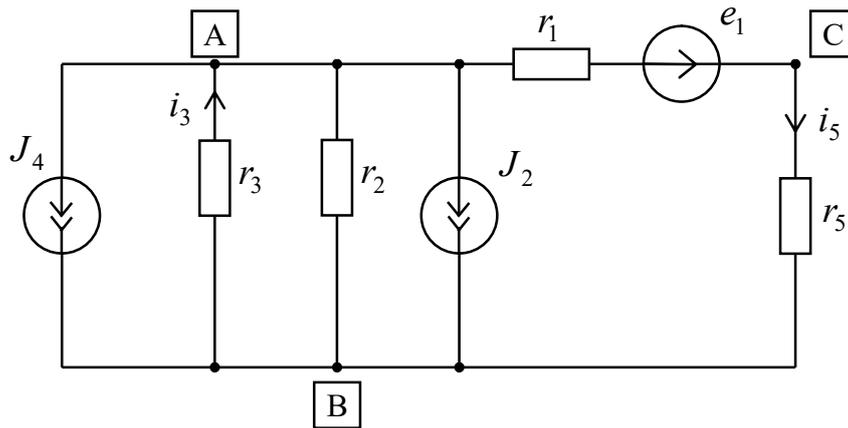
$$e_2 = 2 \text{ В}$$

Определить токи ветвей и проверить баланс мощностей.

### Решение

Для данной схемы число неизвестных токов  $p = 4$ , то есть при использовании законов Кирхгофа необходимо решать систему уравнений четвертого порядка. Проведем решение задачи, используя различные преобразования исходной схемы.

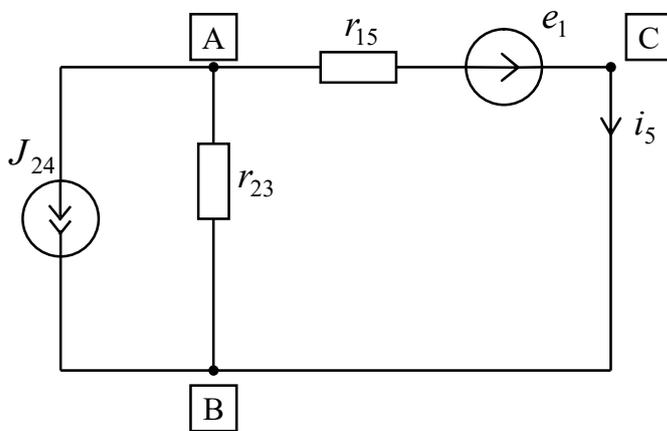
Преобразуем источники  $J_1$  и  $e_2$ . Получим схему вида



$$J_2 = \frac{e_2}{r_2} = 1 \text{ A}$$

$$e_1 = J_1 \cdot r_1 = 4 \text{ В}$$

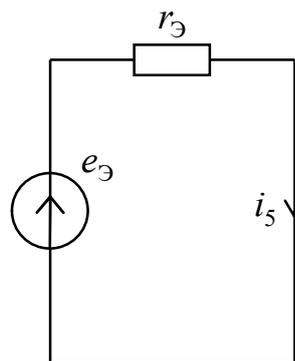
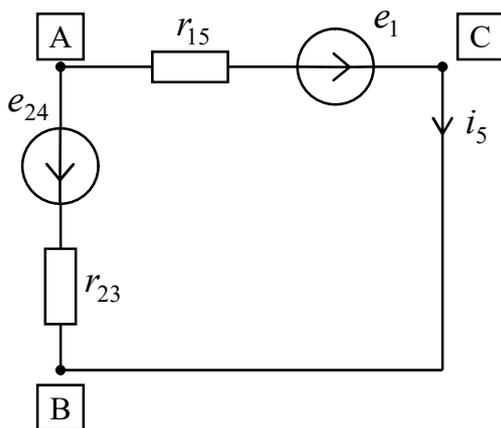
Дальнейшие преобразования позволяют свести исходную схему к эквивалентному источнику э.д.с. и определить ток  $i_5$



$$J_{24} = J_2 + J_4 = 2 \text{ A}$$

$$r_{15} = r_1 + r_5 = 3 \text{ Ом}$$

$$r_{23} = \frac{r_2 \cdot r_3}{r_2 + r_3} = 1 \text{ Ом}$$



$$e_{24} = J_{24} \cdot r_{23} = 2 \text{ В}$$

$$r_{\text{Э}} = r_{15} + r_{23} = 4 \text{ Ом}$$

$$e_{\text{Э}} = e_1 - e_{24} = 2 \text{ В}$$

$$i_5 = \frac{e_{\text{Э}}}{r_{\text{Э}}} = 0,5 \text{ А}$$

Для нахождения оставшихся токов определим напряжение  $u_{\text{BA}}$  в предпоследней схеме

$$u_{\text{BA}} = e_{24} + i_5 \cdot r_{23} = 2 + 0,5 \cdot 1 = 2,5 \text{ В}.$$

Тогда ток третьей ветви (исходная схема)

$$i_3 = u_{\text{BA}} / r_3 = 2,5 / 2 = 1,25 \text{ А}.$$

Ток  $i_1$  определим, записав для узла C первый закон Кирхгофа

$$i_1 = i_5 - J_1 = 0,5 - 2 = -1,5 \text{ A.}$$

Аналогично, для узла  $B$

$$i_2 = i_3 - i_5 - J_4 = 1,25 - 0,5 - 1 = -0,25 \text{ A.}$$

Проверим баланс мощностей.

$$\sum_k P_{rk} = \sum_k i_k^2 \cdot r_k = i_1^2 \cdot r_1 + i_2^2 \cdot r_2 + i_3^2 \cdot r_3 + i_5^2 \cdot r_5 = 8 \text{ Вт.}$$

$$\sum_k P_{ek} + \sum_k P_{Jk} = \sum_k e_k \cdot i_k + \sum_k J_k \cdot u_k = e_2 \cdot i_2 + J_4(r_3 \cdot i_3) - J_1(r_1 \cdot i_1) = 8 \text{ Вт.}$$

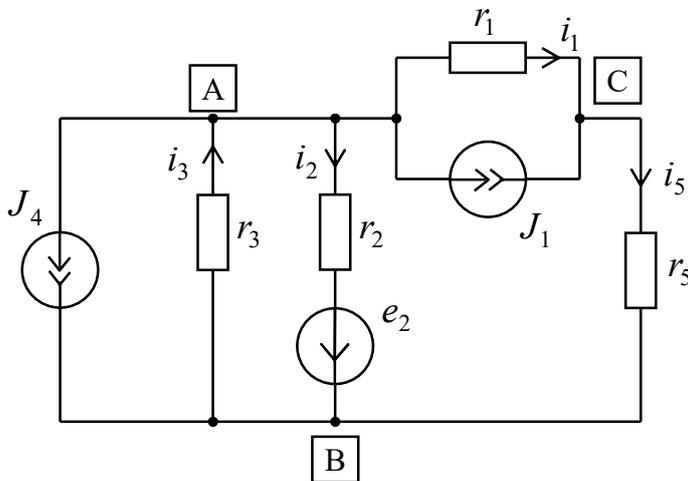
Баланс мощностей выполняется, задача решена верно.

## ЛЕКЦИЯ 6

### РАСЧЕТ СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Электрические цепи, схемы которых не являются простым сочетанием последовательного и параллельного соединения участков или не приводятся к такому виду, будем называть **сложными цепями**. Расчет любой сложной цепи можно провести, решив систему  $p$  уравнений ( $p$  – число ветвей цепи с неизвестными токами), записанных на основе законов Кирхгофа.

Существуют специальные методы, позволяющие снизить трудоемкость решения за счет представления исходной задачи как совокупности более простых задач. Проведем расчет сложной цепи на примере схемы, представленной на рисунке.



Дано:

$$r_1 = r_2 = r_3 = 2 \text{ Ом}$$

$$r_5 = 1 \text{ Ом}$$

$$J_1 = 2 \text{ А}; J_4 = 1 \text{ А}$$

$$e_2 = 2 \text{ В}$$

Определить токи ветвей.

#### Решение на основе законов Кирхгофа

В данной схеме число неизвестных токов  $p = 4$ , число узлов  $q = 3$ , число независимых контуров  $n = p - q + 1 = 2$

$$\begin{aligned} \text{Для узлов } B \text{ и } C: \quad -J_4 + i_3 - i_2 - i_5 &= 0, \\ -J_1 - i_1 + i_5 &= 0. \end{aligned}$$

Для контуров с источником э.д.с. уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} i_3 r_3 + i_2 r_2 &= e_2, \\ -i_2 r_2 + i_1 r_1 + i_5 r_5 &= -e_2. \end{aligned}$$

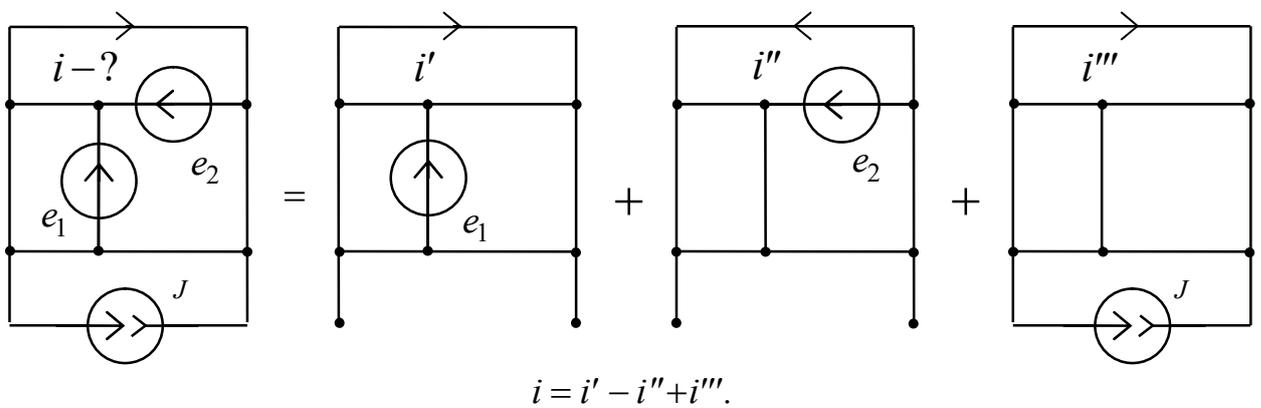
Совместное решение этих уравнений дает

$$i_1 = -1,5 \text{ А}, \quad i_2 = -0,25 \text{ А}, \quad i_3 = 1,25 \text{ А}, \quad i_5 = 0,5 \text{ А}.$$

Рассмотрим некоторые специальные методы решения подобных задач.

## Метод наложения

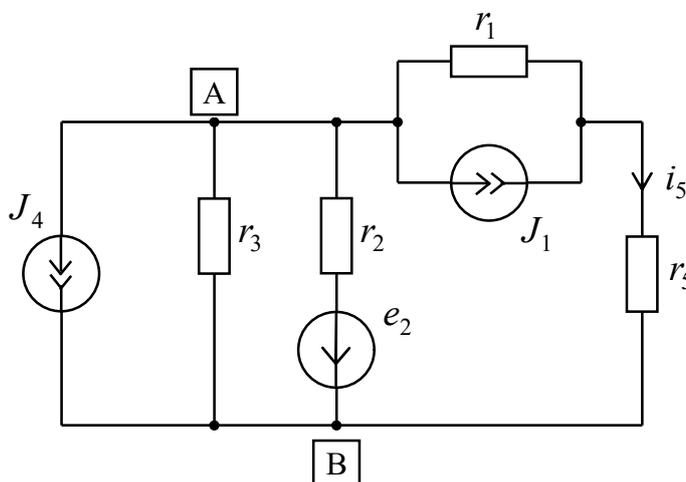
Рассматривается задача расчета токов в электрической цепи, возникающих под действием нескольких источников электромагнитной энергии. Представляя источники э.д.с. и тока в виде некоторых воздействий на электрическую цепь, а протекающие в ветвях токи как реакцию цепи на эти воздействия, можно сформулировать сущность метода наложения: реакция цепи (ток  $i$ ) на действие источников ( $e$  и  $J$ ) электромагнитной энергии определяется как сумма реакций на действие каждого из источников в отдельности. Алгоритм решения задачи при использовании метода наложения иллюстрирует рисунок (резисторы в ветвях схемы не изображены)



Ток  $i$  определяется как алгебраическая сумма токов, рассчитываемых поочередно в схемах с каждым из источников в отдельности. При этом не учитываемые на данном этапе источники исключаются путем замыкания источников э.д.с. и размыкания источников тока.

Подчеркнем, что метод наложения справедлив при расчете только линейных электрических цепей.

Проследим основные положения изложенного метода при расчете рассмотренной ранее схемы, определив в качестве примера ток  $i_5$ .



Дано:

$$r_1 = r_2 = r_3 = 2 \text{ Ом}$$

$$r_5 = 1 \text{ Ом}$$

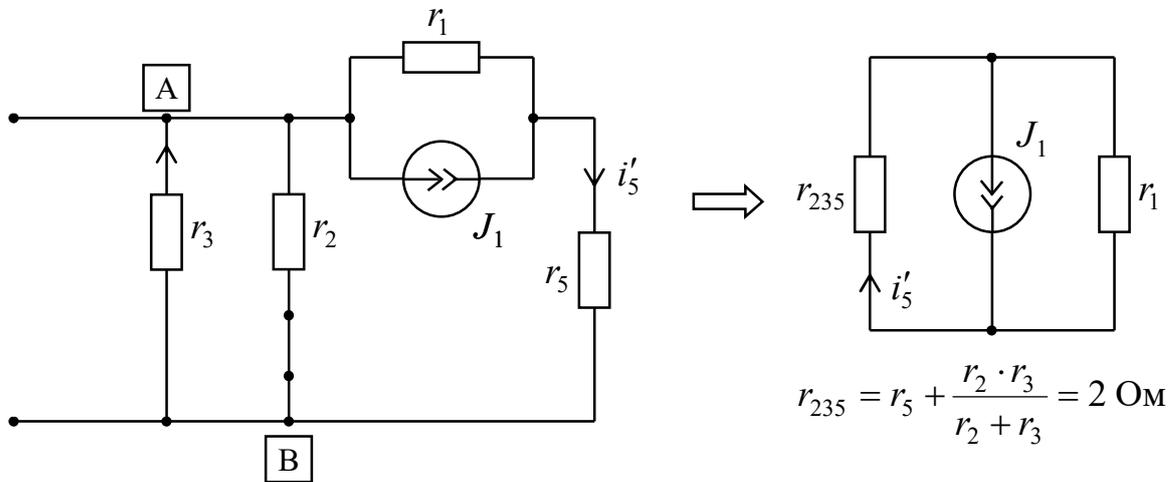
$$J_1 = 2 \text{ А}; J_4 = 1 \text{ А}$$

$$e_2 = 2 \text{ В}$$

Определить токи ветвей

Решение задачи включает в себя 3 этапа.

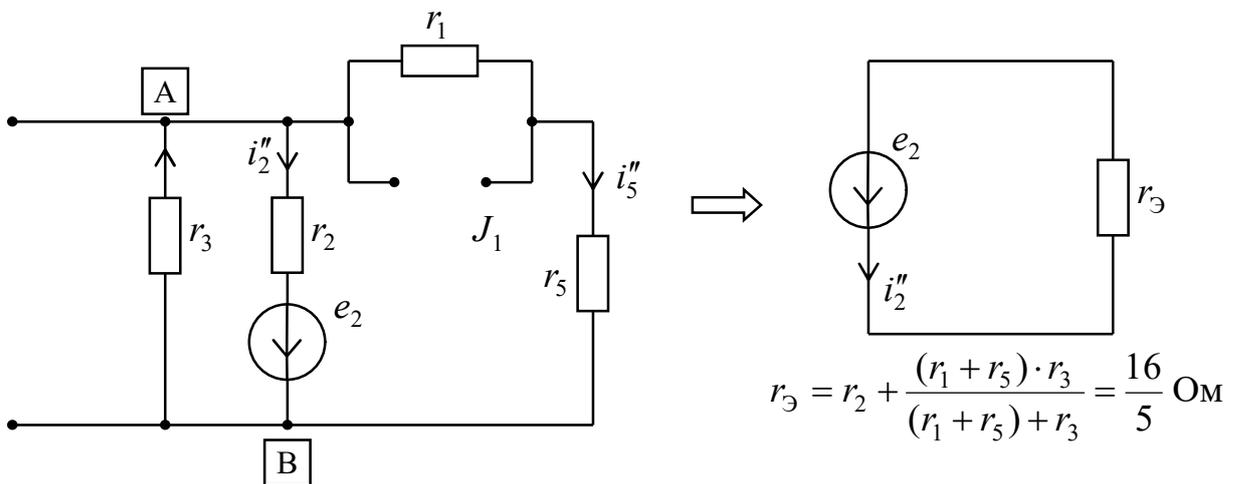
1. Учитываем источник  $J_1$



Поскольку  $r_{235} = r_1$  для тока  $i'_5$  получим:

$$i'_5 = J_1/2 = 1 \text{ А.}$$

2. Учитываем источник  $e_2$



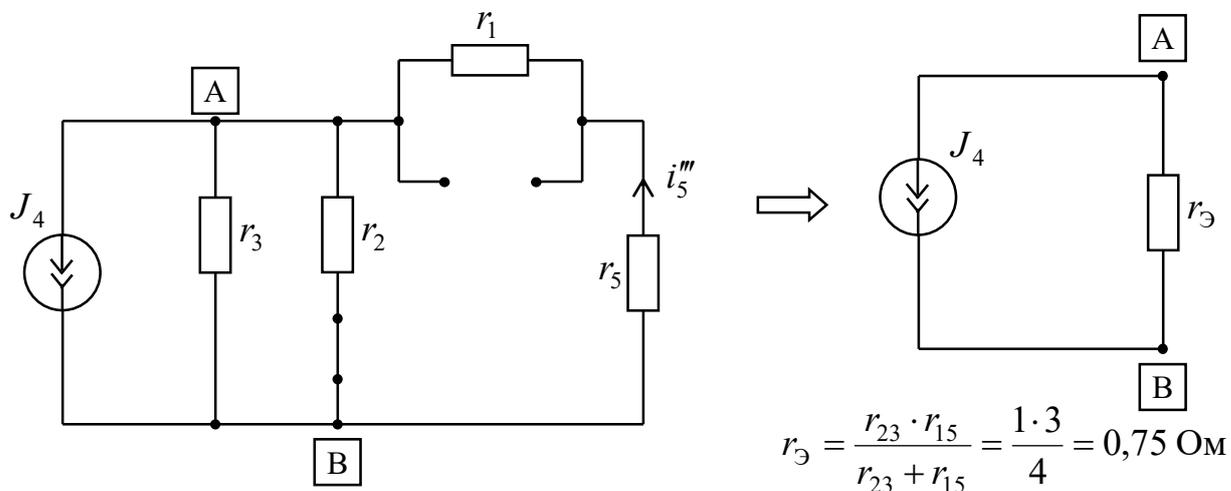
Можно записать:

$$i''_2 = \frac{e_2}{r_Э} = \frac{5}{8} \text{ А.}$$

Тогда

$$i''_5 = \frac{i''_2 r_2 - e_2}{r_1 + r_5} = -\frac{3}{12} = -0,25 \text{ А.}$$

### 3. Учитываем источник $J_4$



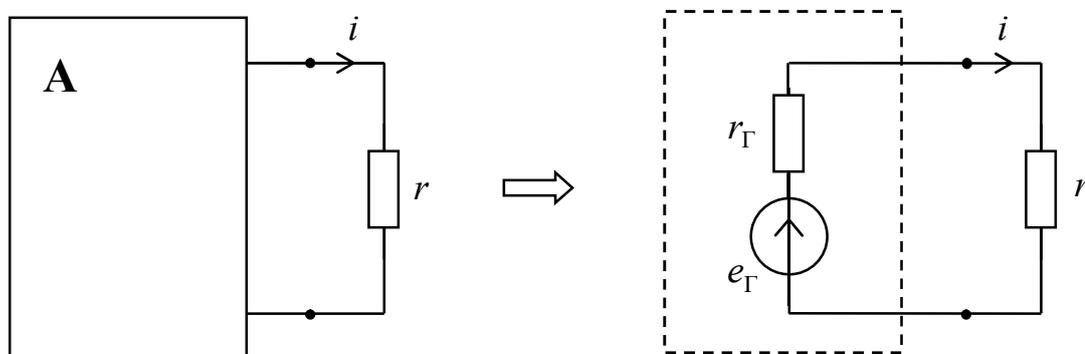
$$u_{\text{BA}} = J_4 \cdot r_{\text{Э}} = 0,75 \text{ В}, \quad i_5''' = \frac{u_{\text{BA}}}{r_1 + r_5} = 0,25 \text{ А.}$$

Окончательно:

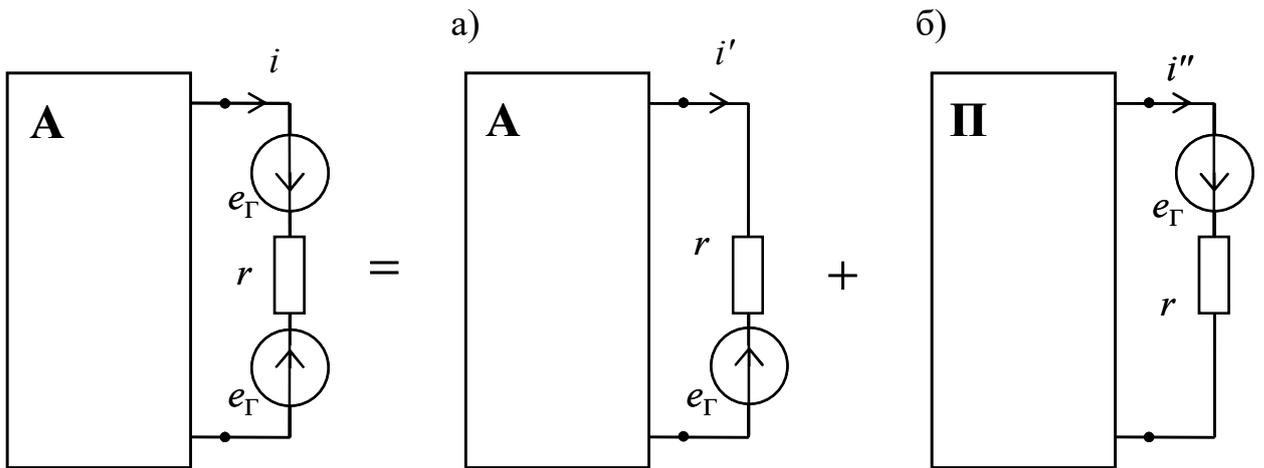
$$i_5 = i_5' + i_5'' - i_5''' = 1 - 0,25 - 0,25 = 0,5 \text{ А.}$$

### Метод эквивалентного генератора

Рассмотрим задачу расчета тока в некоторой ветви сложной электрической цепи (см. рис.). Данную задачу можно свести к анализу упрощенной схемы, где элементы  $e_{\Gamma}$  и  $r_{\Gamma}$  (составляющие так называемый **эквивалентный генератор**) моделируют активный двухполюсник **A**.



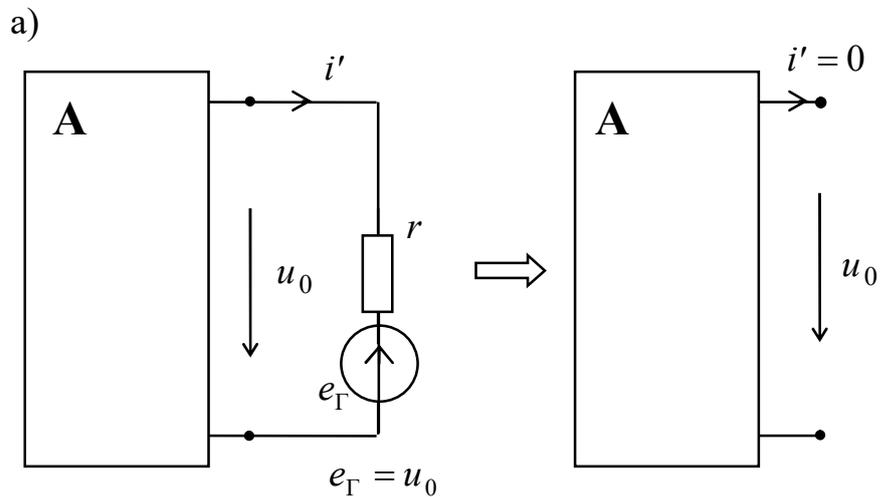
Для обоснования такого утверждения преобразуем исходную схему к изображенной на рисунке схеме



Поскольку включенные встречно в выделенную ветвь источники э.д.с. равны по величине, ток  $i$  сохранит свое значение.

Используя метод наложения, определим искомый ток в виде  $i = i' + i''$ , где токи  $i'$  и  $i''$  соответствуют схемам, каждая из которых содержит лишь один источник э.д.с. (рис.а и рис.б). Отметим, что двухполюсник **II** является пассивным, поскольку все источники исходной схемы содержатся в двухполюснике **A** (рис.а).

Рассмотрим схему рис.а



$$i' = \frac{u_0 - e_\Gamma}{r} = 0$$

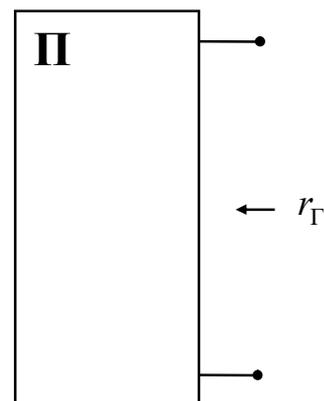
Подберем величину э.д.с  $e_\Gamma$  таким образом, чтобы ток  $i'$  был равен нулю. Для этого зададим  $e_\Gamma = u_0$ , понимая под  $u_0$  напряжение на зажимах активного двухполюсника в режиме холостого хода.

Для схемы рис.б заменим пассивный двухполюсник некоторым эквивалентным сопротивлением  $r_{\Gamma}$  и тогда

$$i'' = \frac{e_{\Gamma}}{r + r_{\Gamma}},$$

причем сопротивление  $r_{\Gamma}$  определится из схемы вида:

Заметим, что при определении  $r_{\Gamma}$  переход от активного двухполюсника А к пассивному II осуществляется путем замыкания источников э.д.с. и размыканием источников тока.



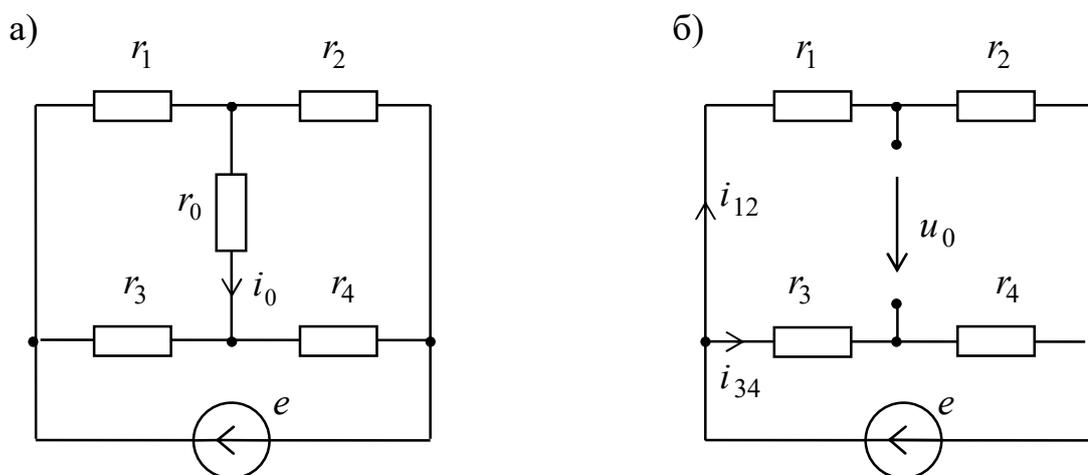
Окончательно, по методу наложения  $i = i' + i'' = i''$  и, значит, искомый ток

$$i = \frac{e_{\Gamma}}{r + r_{\Gamma}}. \quad (*)$$

Таким образом, поставленная задача фактически свелась к решению двух более простых задач: определению напряжения холостого хода  $u_0 = e_{\Gamma}$  на зажимах активного двухполюсника и расчету его эквивалентного сопротивления  $r_{\Gamma}$  при закороченных источниках э.д.с. и разомкнутых источниках тока.

Следует иметь в виду, что при отыскании тока другой ветви в соотношение (\*) необходимо подставить не только сопротивление этой ветви, но и заново рассчитанные величины  $e_{\Gamma} = u_0$  и  $r_{\Gamma}$ , которые находятся теперь относительно соответствующих узлов схемы.

В качестве примера определим методом эквивалентного генератора (МЭГ) ток  $i_0$  в диагональной ветви так называемой мостовой схемы (рис.а).



Используя метод эквивалентного генератора, можем записать

$$i_0 = \frac{e_{\Gamma}}{r_0 + r_{\Gamma}}.$$

Для определения э.д.с. эквивалентного генератора необходимо рассмотреть схему, изображенную на рис.б. Замечая, что

$$u_0 = i_{34} r_3 - i_{12} r_1, \quad i_{12} = \frac{e}{r_1 + r_2}, \quad i_{34} = \frac{e}{r_3 + r_4},$$

получаем

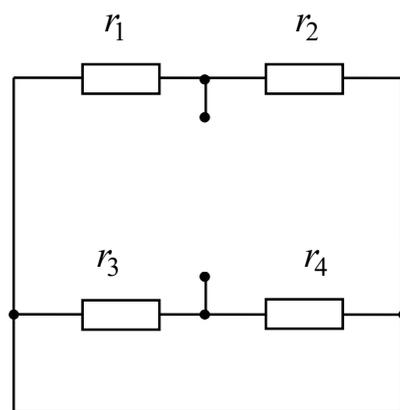
$$e_{\Gamma} = u_0 = \frac{r_2 \cdot r_3 - r_1 \cdot r_4}{(r_1 + r_2) \cdot (r_3 + r_4)} e.$$

Сопротивление эквивалентного генератора  $r_{\Gamma}$  найдем, замкнув накоротко источник э.д.с. в схеме рис.б

$$r_{\Gamma} = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_3 \cdot r_4}{r_3 + r_4}.$$

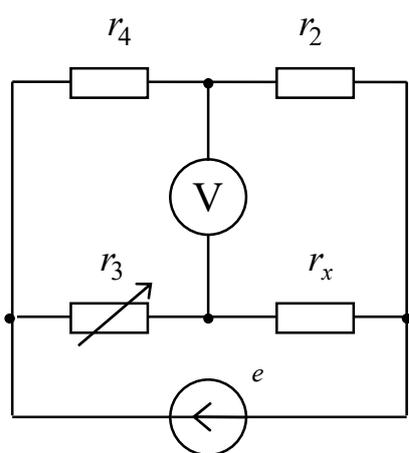
Следовательно, выражение для тока  $i_0$  имеет вид:

$$i_0 = e \cdot \frac{r_2 \cdot r_3 - r_1 \cdot r_4}{(r_1 + r_2) \cdot (r_3 + r_4)} \Big/ \left( \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_3 \cdot r_4}{r_3 + r_4} + r_5 \right).$$



Заметим, что при условии  $r_2 \cdot r_3 = r_1 \cdot r_4$  ток в диагональной ветви мостовой схемы будет равен нулю, а значит и напряжение этой ветви также равно нулю. Отмеченное свойство мостовой цепи используется для экспериментального определения сопротивления резисторов

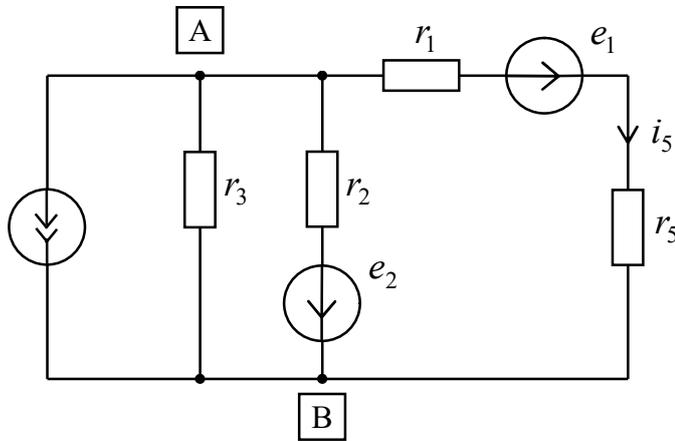
В диагональную ветвь мостовой цепи включается вольтметр. В одной из ветвей цепи размещается резистор, сопротивление  $r_x$  которого необходимо определить. Остальные ветви содержат резисторы с известными сопротивлениями, причем в качестве одного из них должен быть использован реостат ( $r_3$ ) – резистор с переменным сопротивлением.



Изменяя сопротивление реостата, добиваются выполнения условия равновесия мостовой схемы, о чем свидетельствуют показания вольтметра ( $u = 0$ ). При этом сопротивление исследуемого резистора рассчитывается по формуле

$$r_x = r_2 \cdot r_3 / r_4.$$

Рассчитаем методом эквивалентного генератора ток  $i_5$  в решенной ранее задаче, преобразовав источник тока  $J_1$  в эквивалентный источник э.д.с.  $e_1 = J_1 \cdot r_1 = 4$  В.

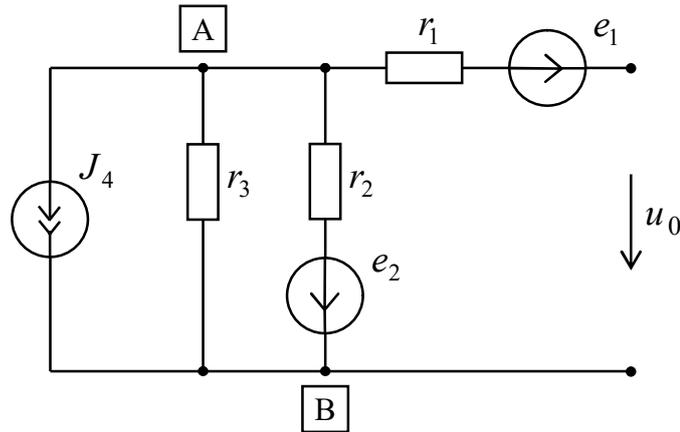


Дано:  
 $r_1 = r_2 = r_3 = 2$  Ом  
 $r_5 = 1$  Ом  
 $J_1 = 2$  А;  $J_4 = 1$  А  
 $e_2 = 2$  В  
 $i_5 = ?$

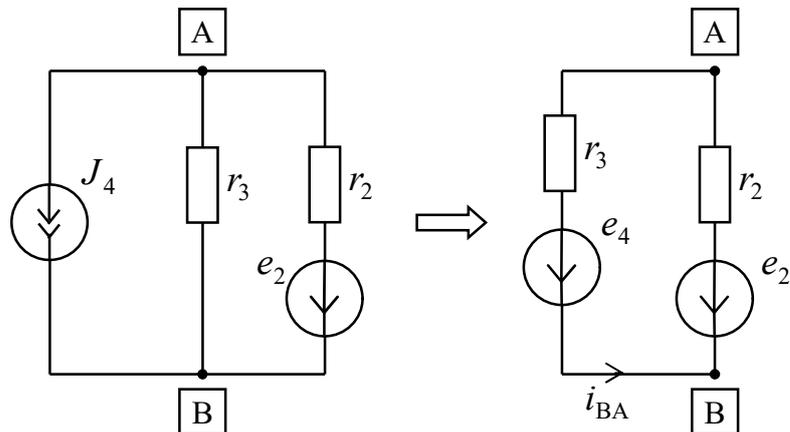
Расчетная формула для искомого тока имеет вид:

$$i_5 = \frac{e_{\Gamma}}{r_5 + r_{\Gamma}}$$

Определим э.д.с. эквивалентного генератора  $e_{\Gamma} = u_0$ .



Согласно второму закону Кирхгофа  $u_0 = -u_{BA} + e_1$ .  
 Для определения напряжения  $u_{BA}$  рассмотрим схему



где  $e_4 = J_4 \cdot r_3 = 2$  В.

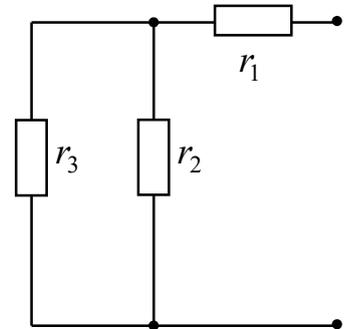
Ток  $i_{BA} = \frac{e_4 - e_2}{r_3 + r_2} = 0$ , тогда  $u_{BA} = e_2 = 2$  В и  $u_0 = -u_{BA} + e_1 = 2$  В.

Определим сопротивление эквивалентного генератора  $r_{\Gamma}$ .

$$r_{\Gamma} = r_{\text{Э}} = r_1 + \frac{r_2 \cdot r_3}{r_2 + r_3} = 3 \text{ Ом.}$$

Окончательно, ток  $i_5 = \frac{e_{\Gamma}}{r_5 + r_{\Gamma}} = \frac{2}{1+3} = 0,5$  А,

что совпадает с полученным ранее результатом

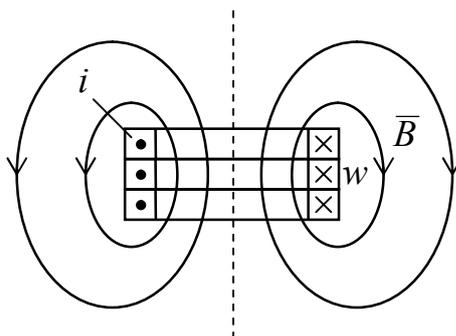


## ЛЕКЦИЯ 7

### МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ. ЗАКОНЫ И ПАРАМЕТРЫ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ ПОНЯТИЕ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ

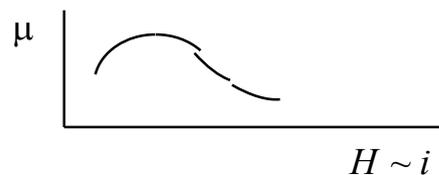
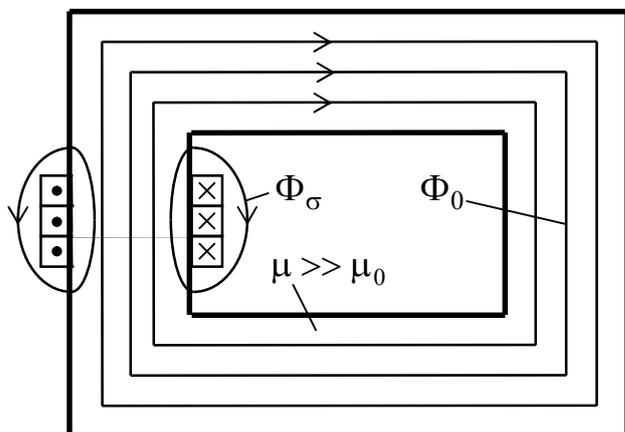
Катушка с числом витков  $w$ , по которой протекает ток  $i$ , является источником магнитного поля. Для определения характеристик магнитного поля (вектора  $\vec{B}$  магнитной индукции или вектора  $\vec{H}$  напряженности магнитного поля) в любой точке пространства необходимо решить достаточно сложную задачу расчета электромагнитного поля.

Задача существенно упростится, если для магнитных силовых линий создать условия для их замыкания. Экспериментально установлено, что магнитные силовые линии стремятся проходить в среде с большим значением магнитной проницаемости  $\mu$  (такие среды называют **ферромагнетиками**). Располагая тела из ферромагнитного материала  $\mu_{Fe}$  в среде со значительно меньшей магнитной проницаемостью, например, в воздухе или в немагнитном материале с проницаемостью  $\mu_0$  ( $\mu_{Fe} / \mu_0 \approx 10^3 - 10^4$ ), создают определенный путь для прохождения магнитного потока. В дальнейшем магнитную проницаемость ферромагнитных веществ будем обозначать символом  $\mu$ , опуская индекс "Fe".



**Магнитной цепью** называется совокупность устройств, содержащих катушки индуктивности и ферромагнитные тела, по которым замыкаются линии вектора магнитной индукции и которая может быть описана на основе интегральных понятий о магнитодвижущей силе (м.д.с.)  $F = \int_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$  и магнитном потоке  $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ .

Примером простейшей магнитной цепи является катушка с замкнутым ферромагнитным сердечником.



Магнитный поток  $\Phi_0$ , протекающий по сердечнику, называется **основным магнитный потоком**. Существует некоторое количество магнитных силовых линий, замыкающихся не только по сердечнику, но и по воздуху – это так называемый **магнитный поток рассеивания**  $\Phi_\sigma$ .

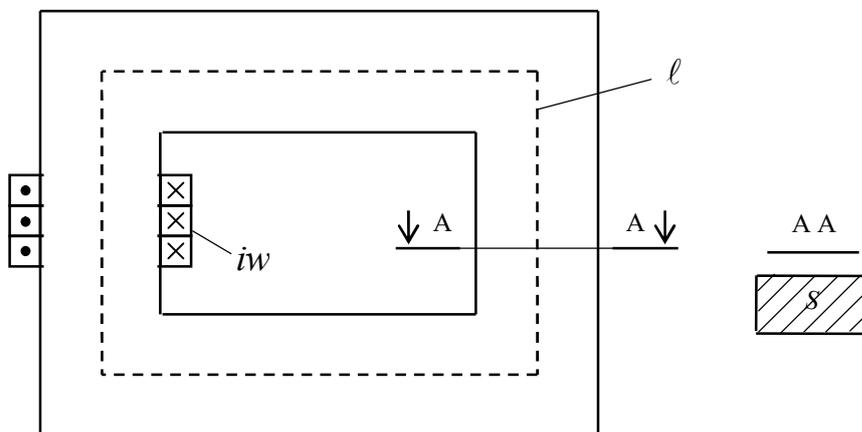
Важным свойством магнитных цепей является их нелинейность. Действительно, магнитная проницаемость  $\mu$  ферромагнетиков зависит от напряженности магнитного поля ( $\mu = f(H) \rightarrow$  рис.) и, следовательно, от токов контуров и катушек, создающих это поле. В сильных полях с увеличением напряженности магнитного поля в сердечнике магнитная проницаемость  $\mu$  материала сердечника существенно уменьшается. Это обстоятельство приводит к увеличению отношения потока рассеяния к основному потоку. При  $\mu \approx \mu_0$  разделение потока на основной поток и поток рассеяния теряет смысл. Одновременно теряет смысл понятие о магнитной цепи, и задача о распределении векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  в пространстве должна в этом случае ставиться и решаться как задача расчета электромагнитного поля. Кроме того, в переменных магнитных полях магнитный поток неравномерно распределяется по сечению сердечника.

Таким образом, оперируя понятием «магнитная цепь», условимся принимать следующие **упрощающие допущения**:

- считаем, что магнитная проницаемость цепи не зависит от напряженности магнитного поля и, следовательно, от тока, т.е. будем рассматривать магнитную цепь как линейную;
- пренебрегаем потоками рассеяния  $\Phi_\sigma$  (то есть принимаем  $\mu \gg \mu_0$ );
- считаем, что основной магнитный поток  $\Phi_0$  равномерно распределен по сечению магнитопровода.

### ЗАКОНЫ И ПАРАМЕТРЫ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

Определим магнитный поток  $\Phi$  для сердечника с постоянным поперечным сечением  $S$ , считая м.д.с.  $F = iw$  катушки известной.



Учитывая допущение о равномерном распределении потока по сечению, из определения магнитного потока  $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  получим для рассматриваемой магнитной цепи

$$\Phi = B \cdot S.$$

Применяя закон полного тока в интегральной форме к контуру  $\ell$ , являющемуся средней линией сердечника, можем записать

$$iW = \oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell}.$$

Используя допущение о неизменности потока вдоль контура  $\ell$  при постоянном сечении  $S$ , получим

$$iW = H \cdot \ell.$$

Соотношение  $B = \mu H$ , с учетом полученных ранее выражений, приводит к равенству

$$\Phi = \mu \frac{iW}{\ell} \cdot S = \frac{iW}{\ell/\mu S} = \frac{F}{\ell/\mu S}.$$

Отношение магнитодвижущей силы (м.д.с.)  $F = iW$  вдоль всей магнитной цепи к магнитному потоку  $\Phi$  называют **магнитным сопротивлением** такой цепи

$$R_M = \frac{iW}{\Phi} = \frac{F}{\Phi} = \frac{\ell}{\mu \cdot S}.$$

Размерность магнитного сопротивления  $[R_M] = 1/\text{Гн}$ .

Понятие магнитного сопротивления можно ввести и для участка магнитной цепи. В этом случае  $\ell$  представляет собой длину участка магнитопровода с сечением  $S$ . Магнитное сопротивление является основным параметром магнитной цепи.

Соотношение

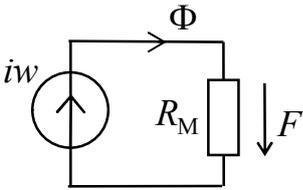
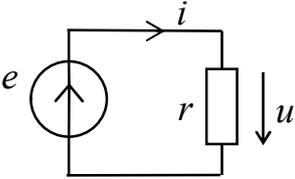
$$\Phi = \frac{F}{R_M},$$

связывающее магнитный поток, м.д.с. и магнитное сопротивление сердечника, называют **законом Ома для магнитной цепи**.

Полученное выражение аналогично закону Ома для электрической цепи

$$i = \frac{u}{r}$$

Сравнивая интегральные характеристики магнитных и электрических цепей, можно установить аналогию между ними.

Магнитная цепь		Электрическая цепь	
Магнитный поток	$\Phi = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S},$ $\bar{B} = \mu \bar{H}$	Электрический ток	$i = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S},$ $\bar{J} = \gamma \bar{E}$
М.д.с.	$i\omega = \oint_{\ell} \bar{H} \cdot d\bar{\ell}$	Э.д.с.	$e = \oint_{\ell} \bar{E} \cdot d\bar{\ell}$
М.д.с. на участке $AB$	$F_{AB} = \int_A^B \bar{H} \cdot d\bar{\ell}$	Напряжение на участке $AB$	$u_{AB} = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{\ell}$
Магнитное сопротивление	$R_M = \frac{\ell}{\mu S}$	Электрическое сопротивление	$r = \frac{\ell}{\gamma S}$
Закон Ома для участка магнитной цепи	$F = R_M \cdot \Phi$	Закон Ома для участка электрической цепи	$u = r \cdot i$
Схема магнитной цепи		Схема электрической цепи	

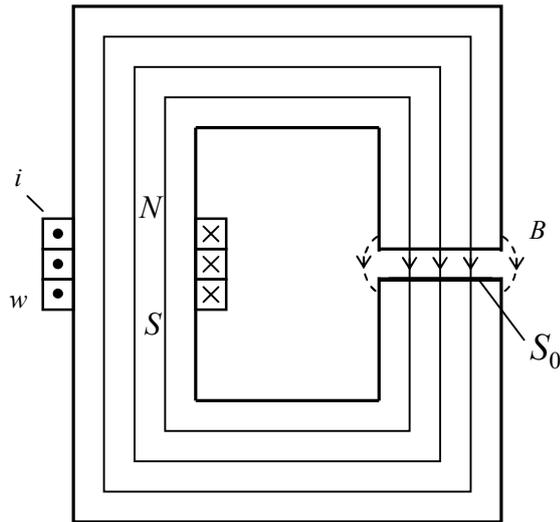
## ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СИЛА

Под электромагнитной силой понимают силу, действующую на проводники с токами, расположенные в магнитном поле. К электромагнитным силам относят также механические силы, действующие на тела из ферромагнитных материалов, расположенные в магнитном поле. Электромагнитная сила может быть рассчитана при известной зависимости энергии магнитного поля  $W_M(g)$  согласно соотношениям

$$f_M = - \left. \frac{\partial W_M}{\partial g} \right|_{\psi_k = \text{const}} = + \left. \frac{\partial W_M}{\partial g} \right|_{i_k = \text{const}},$$

где  $g$  – обобщенная координата, которая изменяется под действием силы.

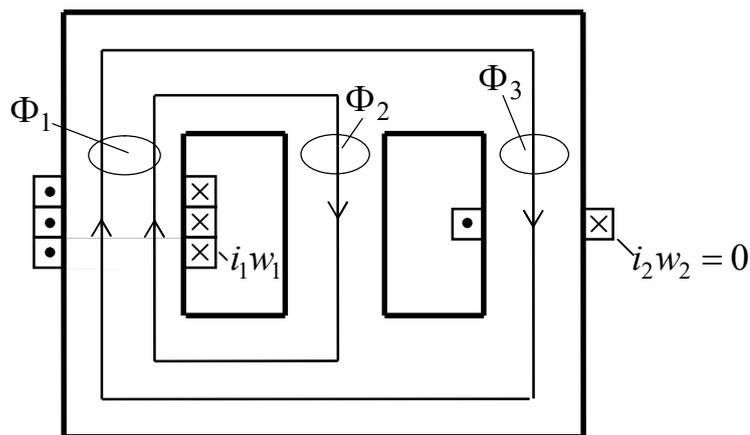
Рассмотрим силу  $f_M$ , действующую на среднюю часть полюса электромагнита, стремящуюся изменить расстояние между полюсами. Пренебрежем искажением магнитных силовых линий у краев ферромагнитного сердечника (рис.).



Можно показать, что в области однородного магнитного поля на единицу поверхности полюса действует сила  $f'_M = \frac{f_M}{S_0} = \frac{B \cdot H}{2}$ , равная объемной плотности энергии магнитного поля. При этом сила  $f_M = f'_M S_0 = \frac{B \cdot H}{2} S_0$  стремится сблизить полюса электромагнита.

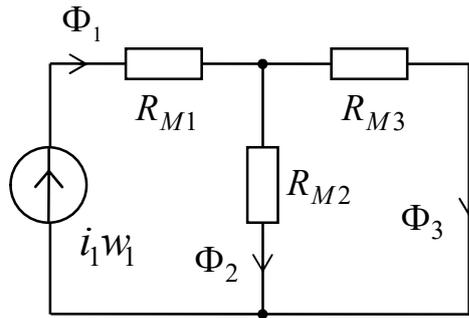
### РАСЧЕТ РАЗВЕТВЛЕННОЙ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ

При наличии разветвленного магнитопровода, магнитный поток, создаваемый обмоткой, распределяется по отдельным участкам сердечника, образуя потоки  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ .



В силу принципа непрерывности магнитного потока можно записать  $\sum_k \Phi_k = 0$  для любого узла магнитной цепи (в электрической цепи  $\sum_k i_k = 0$ ).

Схема замещения рассматриваемой магнитной цепи примет вид:



Здесь  $R_{M1}$ ,  $R_{M2}$ ,  $R_{M3}$  – магнитные сопротивления отдельных участков магнитопровода, определяемые его геометрическими размерами и магнитной проницаемостью ферромагнетика.

Для образовавшихся контуров схемы замещения можно записать уравнения, аналогичные уравнениям второго закона Кирхгофа для электрической цепи и с учетом уравнения для узла получим систему из трех уравнений, совместное решение которых позволит определить магнитные потоки  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_2 + \Phi_3, \\ \Phi_1 R_{M1} + \Phi_2 R_{M2} &= i_1 w_1, \\ \Phi_3 R_{M3} - \Phi_2 R_{M2} &= 0.\end{aligned}$$

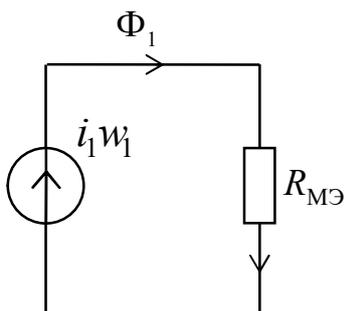
При известных потоках  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  легко определяются значения магнитной индукции и напряженности магнитного поля в любом сечении магнитопровода.

Отметим, что **аналогия** магнитных и электрических цепей постоянного тока позволяет использовать для расчета магнитных цепей все известные методики расчета цепей постоянного тока.

Рассчитаем индуктивность первой обмотки на основе соотношения

$$L_1 = \frac{\Psi_{L1}}{i_1} = \frac{w_1 \Phi_1}{i_1}.$$

Для расчета потока  $\Phi_1$  упростим схему замещения, объединив магнитные сопротивления. При этом получим:



$$\text{Здесь: } R_{M1} = \frac{l_1}{\mu S_1}, \quad R_{M2} = \frac{l_2}{\mu S_2}, \quad R_{M3} = \frac{l_3}{\mu S_3}.$$

Для  $R_{MЭ}$  имеем

$$R_{MЭ} = R_{M1} + \frac{R_{M2} \cdot R_{M3}}{R_{M2} + R_{M3}}.$$

Поток  $\Phi_1$  определится из соотношения  $\Phi_1 = \frac{i_1 w_1}{R_{MЭ}}$  и

тогда получаем:

$$L_1 = \frac{w_1^2}{R_{MЭ}} \quad - \text{индуктивность катушки с ферромагнитным сердечником.}$$

Для расчета взаимной индуктивности 1 и 2 катушек используем соотношение

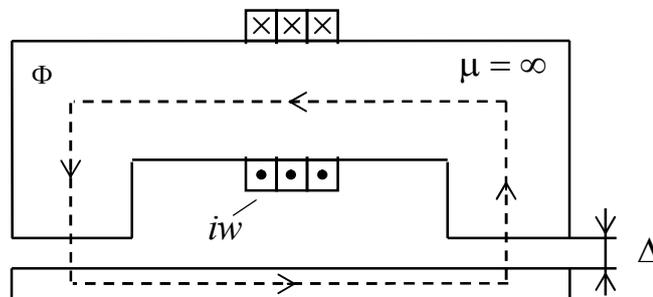
$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{w_2 \Phi_3}{i_1}.$$

Магнитный поток  $\Phi_3$  равен  $\Phi_3 = \frac{\Phi_1 R_{M23}}{R_{M3}}$  и окончательно

$$M_{21} = \frac{w_1 w_2 R_{M2}}{R_{MЭ} (R_{M2} + R_{M3})}.$$

В качестве иллюстрации к изложенному материалу рассмотрим **пример**.

Определить минимальную силу тока  $i$  электромагнита (рис.), удерживающего стальной лист массой  $m = 1000$  кг, если средний зазор  $\Delta$  между магнитом и листом, обусловленный неровностями соприкасающихся поверхностей, равен одному миллиметру. Число витков обмотки электромагнита  $w = 1000$ , площадь поперечного сечения сердечника  $S = 0,01$  м<sup>2</sup>. При решении считать магнитную проницаемость  $\mu$  вещества сердечника магнита и стального листа бесконечно большой.



**Решение.** Сопротивление магнитной цепи магнитному потоку  $\Phi$ , создаваемому током  $i$  электромагнита, определяется только магнитным сопротивлением зазоров, поскольку магнитные сопротивления участков ферромагнитного сердечника равны нулю (в силу допущения  $\mu = \infty$ ).

Величина магнитного потока определяется выражением

$$\Phi = \frac{iw}{R} = \frac{iw}{2\Delta/\mu_0 S}.$$

Электромагнитную силу, действующую на стальной лист в магнитном поле, определим из соотношения

$$f_{\Delta} = \left( \frac{\partial W_M}{\partial \Delta} \right) \Big|_{i=const},$$

где  $W_M$  – энергия магнитного поля системы.

Напряженность магнитного поля в ферромагнетике равна нулю ( $\mu = \infty$ ), поэтому вся энергия магнитного поля  $W_M = \int_V \frac{\overline{B} \cdot \overline{H}}{2} dV$  сосредоточена в области воздушного зазора под полюсами электромагнита.

Считая магнитное поле в зазоре однородным, можно записать

$$W'_M = \frac{B \cdot H}{2} \cdot V = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 S^2} \cdot 2\Delta S.$$

Итак, выражение для электромагнитной силы примет вид

$$f_\Delta = \left( \frac{\partial W_M}{\partial \Delta} \right) \Big|_{i=const} = \frac{\partial}{\partial \Delta} \left( \frac{i^2 w^2 \mu_0 S}{4\Delta} \right) \Big|_{i=const} = -\frac{(iw)^2 \mu_0 S}{4\Delta^2}.$$

Знак "-" в последнем выражении указывает на то, что сила стремится уменьшить параметр  $\Delta$ , то есть притянуть стальной лист к электромагниту.

Условием удержания стального листа является неравенство  $mg \leq |f_\Delta|$ , отсюда минимальное значение тока, необходимое для этого, равно

$$i = \frac{2\Delta}{w} \sqrt{\frac{mg}{\mu_0 S}} \cong 2 \text{ А.}$$

Для проверки полученного результата воспользуемся другим способом расчета электромагнитной силы. Можно считать, что в воздушном зазоре магнитное поле является однородным. В этом случае, сила, действующая на единицу поверхности ферромагнетика, определится выражением

$$f'_S = W'_M = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0},$$

а искомая сила

$$f_\Delta = 2S \cdot f'_S$$

Можно записать:

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{iw}{2R_{M\Delta}} \cdot \frac{1}{S} = \frac{iw}{2 \frac{\Delta}{\mu_0 S} \cdot S} = \frac{\mu_0 iw}{2\Delta}.$$

Тогда

$$f_\Delta = 2S \cdot f'_S = 2S \cdot \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 S (iw)^2}{4\Delta^2}.$$

Полученный результат с точностью до знака совпадает с полученным ранее выражением.

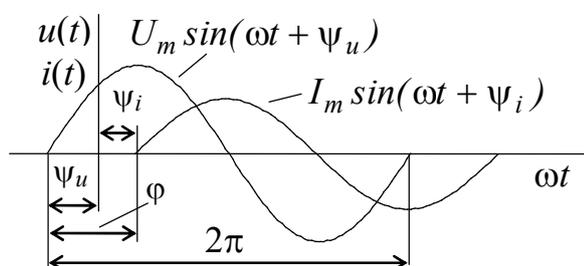
## ЛЕКЦИЯ 8

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Электрические цепи, в которых действуют только периодические синусоидальные источники напряжения  $e(t)$  и тока  $J(t)$ , будем называть далее **цепями синусоидального тока** или **цепями переменного тока**. При действии периодических синусоидальных источников с одинаковым периодом  $T$  (**циклической** частотой  $f = 1/T$  – число колебаний тока за одну секунду) во всех ветвях линейной электрической цепи устанавливаются периодические синусоидальные токи  $i(t)$  и напряжения  $u(t)$  с тем же периодом  $T$ . Величины  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $e(t)$  принято называть соответственно **мгновенными напряжением, током, э.д.с.** Мгновенные величины являются функциями времени:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e).$$

Здесь:  $U_m, I_m, E_m$  – максимальные или амплитудные значения соответствующих мгновенных величин,  $\psi_u, \psi_i, \psi_e$  их начальные фазы. Величину  $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$  называют **угловой** частотой и измеряют в рад/сек. Начальные фазы измеряются либо в радианах, либо в градусах. В последнем случае  $\omega t$  также переводится в градусы (один радиан равен приблизительно 57,3 градуса).



На рисунке изображены синусоидальные напряжение  $u(t)$  и ток  $i(t)$  для случая  $\psi_u > 0$ ,  $\psi_i < 0$ . **Угол сдвига фаз** напряжения и тока  $\varphi = \psi_u - \psi_i$  для изображенных кривых положителен. При  $\varphi = 0$  напряжение и ток совпадают по фазе (находятся в фазе). Если напряжения (токи) сдвинуты друг относительно друга на  $\pm\pi$ , то говорят, что они находятся в противофазе.

Цепи переменного тока весьма широко применяются на практике. В энергетических системах нашей страны и в энергосистемах европейских стран применяется частота 50 Герц ( $\omega = 314$  рад/сек), в США – 60 Гц. В промышленности основными источниками синусоидальной э.д.с. являются так называемые синхронные электрические генераторы, представляющие собой последнее звено в цепочке преобразования энергии сжигаемого топлива, падающей воды и т.д. в электрическую энергию.

## ДЕЙСТВУЮЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ Э.Д.С., НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ

Действующими значениями периодических э.д.с. напряжений и токов называют их среднеквадратичные значения за период:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}, \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}, \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

При синусоидальной э.д.с.  $e(t) = E_m \sin \omega t$

$$E^2 = \frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{E_m^2}{2T} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{E_m^2}{2},$$

следовательно,

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично могут быть получены соотношения:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

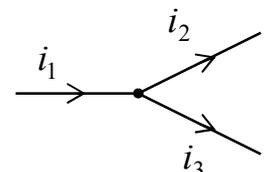
Действующее значение переменного тока  $I$  равно значению постоянного тока с таким же воздействием (например, тепловым) на объект за период  $T$ .

Отметим, что полученные соотношения между действующими и максимальными значениями синусоидальных э.д.с., напряжений и токов не зависят от величины начальной фазы.

В качестве номинальных значений токов и напряжений различных электротехнических устройств указываются обычно их действующие значения. Значительная часть измерительных приборов также показывает действующие значения измеряемых величин. Это связано с тем, что именно действующим значениям пропорциональны и выделение тепла, и силовое воздействие при протекании электрического тока.

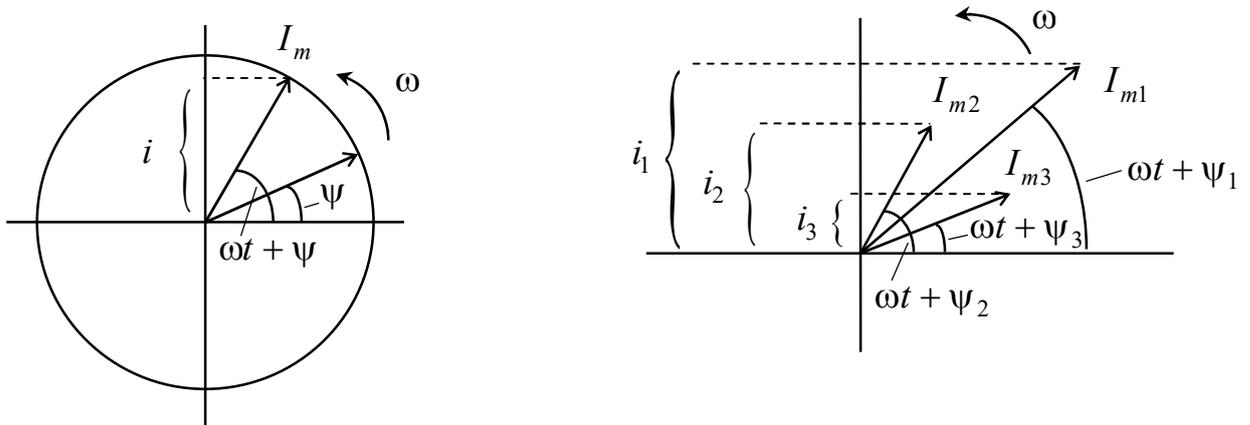
## ИЗОБРАЖЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНЫХ Э.Д.С., НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ С ПОМОЩЬЮ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВЕКТОРОВ

При анализе цепей переменного тока уравнения, записанные по законам Кирхгофа, содержат мгновенные значения соответствующих величин. Например, для узла имеем  $i_1 = i_2 + i_3$ . Последнее равенство означает, что необходимо складывать синусоидально изменяющиеся во времени функции – крайне неудобно, неэффективно.



Синусоидальные э.д.с., напряжения и токи могут быть изображены с помощью вращающихся векторов. Длина вектора равна в неко-

тором масштабе амплитудному значению э.д.с., напряжения или тока, а угол, являющийся аргументом синусоидальных функций, отсчитывается от горизонтальной оси против часовой стрелки. При соблюдении этих условий проекция вращающегося вектора на вертикальную ось равна в выбранном масштабе соответствующей мгновенной величине. Пример изображения мгновенного значения тока.  $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$  приведен на рисунке. Здесь же показано, как с помощью сложения вращающихся векторов, изображающих токи  $i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_2)$  и  $i_3 = I_{m3} \sin(\omega t + \psi_3)$  может быть получен вектор, изображающий суммарный ток  $i_1 = i_2 + i_3$ .



Так как угловая частота вращения  $\omega$  при рассмотрении установившихся процессов одинакова для векторов, изображающих э.д.с., напряжения и токи, то необходимо учитывать только взаимное расположение этих векторов друг относительно друга. Поэтому один из изображающих векторов всегда может быть расположен произвольно, а векторы остальных величин будут повернуты относительно него на углы, равные сдвигам фаз.

Совокупность векторов, характеризующих процессы, происходящие в той или иной цепи переменного тока, и построенных с учетом их ориентации друг относительно друга, называют **векторной диаграммой**.

В качестве длин изображающих векторов могут быть выбраны также и действующие значения синусоидальных э.д.с., токов и напряжений. В этом случае эти длины будут в  $\sqrt{2}$  раз меньше.

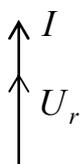
### СВЯЗЬ МЕЖДУ ТОКОМ И НАПРЯЖЕНИЕМ ДЛЯ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ В СИНУСОИДАЛЬНОМ РЕЖИМЕ.



Пусть протекающий по резистору ток изменяется по синусоидальному закону  $i = I_m \sin \omega t$ . Напряжение  $u_r$  на зажимах резистора  $r$  определяется из закона Ома:

$$u_r = r \cdot i = r \cdot I_m \sin \omega t = U_{mr} \sin \omega t.$$

Таким образом, на участке с активным сопротивлением ток и напряжение совпадают по фазе (находятся в фазе) и, следовательно, на векторной диаграмме вектора тока и напряжения на этом участке электрической цепи сонаправлены. Для действующих значений тока и напряжения можно записать



$$\varphi = 0$$

$$U_r = r \cdot I.$$

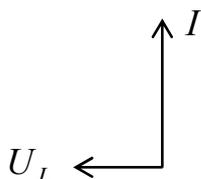
### Катушка индуктивности



Напряжение  $u_L$  на катушке с индуктивностью  $L$  при протекании по ней синусоидального тока  $i = I_m \sin \omega t$  имеет вид:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \omega L \cdot I_m \cos \omega t = \omega L \cdot I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = U_{mL} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Таким образом, на участке с катушкой индуктивности сдвиг фаз между напряжением и током составляет  $\pi / 2$ , вектор напряжения опережает вектор тока на угол  $\pi / 2$ . На векторной диаграмме вектор напряжения на катушке индуктивности опережает вектор тока на угол  $\pi / 2$ . Из последнего равенства может быть получено соотношение между действующими значениями тока и напряжения на катушке индуктивности

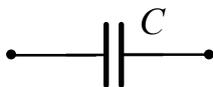


$$\varphi = \pi / 2$$

$$U_L = \omega L \cdot I.$$

Величину  $\omega L$ , имеющую размерность сопротивления, будем далее обозначать  $x_L$  и называть **индуктивным сопротивлением**. Обратная индуктивному сопротивлению величина – **индуктивная проводимость**, обозначается  $b_L = 1 / x_L = 1 / \omega L$  и измеряется в симменсах [См].

### Конденсатор

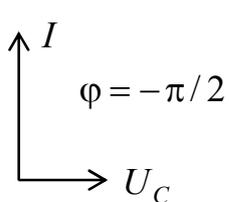


Напряжение  $u_c$  на конденсаторе емкостью  $C$  при протекании по нему синусоидального тока  $i = I_m \sin \omega t$  определяется из соотношения

$$u_c = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_c(0) = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t = \frac{1}{\omega C} I_m \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = U_{mc} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Напряжение и ток конденсатора не содержат постоянных составляющих. Слагаемое  $u_c(0)$  сокращается со значением интеграла на нижнем пределе интегрирования.

Таким образом, на участке с конденсатором сдвиг фаз между напряжением и током составляет  $-\pi / 2$ . На векторной диаграмме вектор напряжения



на конденсаторе отстает от вектора тока на угол  $\pi / 2$ . Действующие значения тока и напряжения на конденсаторе удовлетворяют равенству:

$$U_c = \frac{1}{\omega C} I.$$

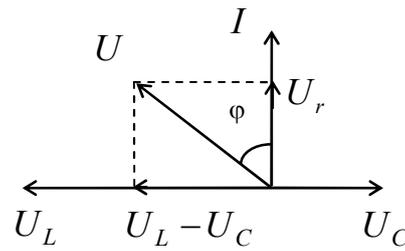
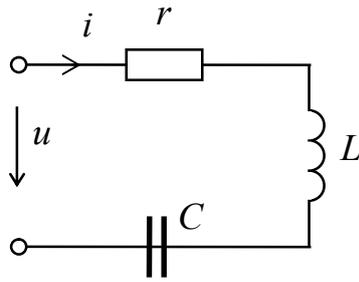
Величину  $1 / \omega C$ , имеющую размерность сопротивления, обозначают  $x_c$  и называют **емкостным сопротивлением**. Обратная величина  $b_c = 1 / x_c = \omega C$  носит название **емкостной проводимости**.

Полученные соотношения для тока и напряжения на различных элементах электрической цепи могут быть сведены в таблицу.

Элемент эл. цепи	Сопрот. перемен. току	Провод. перемен. току	Связь между действующ. значениями напряжения и тока	Связь между действующ. значениями тока и напряжения	Векторная диаграмма
	$r$	$\frac{1}{r}$	$U_r = r \cdot I$	$I = g \cdot U_r$	
	$x_L = \omega L$	$b_L = \frac{1}{\omega L}$	$U_L = \omega L \cdot I$	$I = \frac{1}{\omega L} \cdot U_L$	
	$x_c = \frac{1}{\omega C}$	$b_c = \omega C$	$U_C = \frac{1}{\omega C} \cdot I$	$I = \omega C \cdot U_C$	

### УСТАНОВИВШИЙСЯ СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК В ЦЕПИ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ УЧАСТКОВ $r, L, C$

Выполним с помощью векторных диаграмм расчет синусоидального режима в цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора  $r$ , катушки с индуктивностью  $L$  и конденсатора емкостью  $C$ . Условные положительные направления тока и напряжений примем такими, как это показано на рисунке. При известном входном напряжении  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$  найдем ток, определяемый выражением  $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ . Необходимо рассчитать амплитуду тока  $I_m$  и его начальную фазу  $\psi_i$ .



Уравнение второго закона Кирхгофа для рассматриваемой цепи имеет вид

$$u = u_r + u_L + u_C.$$

Для изображающих векторов получим:

$$\bar{U} = \bar{U}_r + \bar{U}_L + \bar{U}_C.$$

Для действующих значений имеем (см. таблицу)

$$U_r = r \cdot I, \quad U_L = \omega L \cdot I, \quad U_C = (1/\omega C) \cdot I.$$

Векторную диаграмму (рис), отображающую взаимное расположение векторов, удобно начать строить с вектора  $\bar{I}$ , расположив его произвольным образом. Далее последовательно строим:

- вектор напряжения на резисторе  $\bar{U}_r$ , совпадающий по направлению с вектором тока,
- вектор напряжения на катушке индуктивности  $\bar{U}_L$ , опережающий вектор тока на угол  $\pi / 2$ ,
- вектор напряжения на конденсаторе  $\bar{U}_C$ , отстающий от вектора тока на угол  $\pi / 2$ .

Вектор напряжения  $\bar{U}$  определяется как векторная сумма построенных напряжений. Его действующее значение может быть вычислено из простых геометрических соображений

$$U = \sqrt{U_r^2 + (U_L - U_C)^2} = I \sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = I \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2},$$

откуда получаем

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{U}{z}; \quad \varphi = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_r} = \arctg \frac{x}{r}.$$

Искомые величины

$$I_m = \sqrt{2} \cdot I \quad \text{и} \quad \psi_i = \psi_u - \varphi,$$

при известных  $I$  и  $\varphi$  легко вычисляются.

Величина  $x = x_L - x_C$  представляет собой **реактивное сопротивление** рассматриваемой цепи и является чисто **расчетной** величиной.

Отметим, что индуктивное  $x_L$  и емкостное  $x_C$  сопротивления являются положительными величинами, в то время как реактивное сопротивление цепи  $x$  может быть **положительным** (при  $x_L > x_C$ ) или **отрицательным** (при  $x_L < x_C$ ).

Если реактивное сопротивление цепи положительно, то говорят, что оно имеет индуктивный характер. При отрицательном реактивном сопротивлении цепи говорят, что оно имеет емкостной характер. Полагая в рассматриваемом примере  $\omega L = 0$ , получаем  $x = -x_c$ , то есть реактивное сопротивление конденсатора отрицательно. Аналогично при  $1/\omega C = 0$  имеем  $x = x_L$ , следовательно реактивное сопротивление катушки положительно.

Величину  $z$ , равную отношению действующих значений напряжения и тока на входе цепи и имеющую размерность электрического сопротивления, называют **полным сопротивлением** цепи. Отметим, что полное сопротивление цепи синусоидального тока не может быть вычислено как сумма активного и реактивного сопротивлений. Вычисления следует производить по формуле

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}.$$

Рассмотрим сдвиг фаз  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{r}$  между током и напряжением на зажимах всей цепи. Угол сдвига определяется соотношением между индуктивным сопротивлением  $x_L = \omega L$  и емкостным сопротивлением  $x_C = 1/\omega C$ .

Если  $\omega L > 1/\omega C$ , то  $x > 0$ ,  $0 < \varphi \leq \pi/2$ , и ток отстает по фазе от напряжения на зажимах цепи.

Если же  $\omega L < 1/\omega C$ , то  $x < 0$ ,  $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$ , и ток опережает по фазе напряжение на зажимах цепи.

Таким образом, в пассивной электрической цепи угол сдвига между током и напряжением  $\varphi$  может изменяться в пределах от  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$ .

Заметим, что ток совпадает по фазе с приложенным напряжением только при  $x = 0$ , то есть или при отсутствии в цепи реактивных сопротивлений, или при их взаимной компенсации. Последнее имеет место при **резонансе** – явлении, которое будет рассмотрено далее.

### УСТАНОВИВШИЙСЯ СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК В ЦЕПИ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ УЧАСТКОВ $g, L, C$

Выполним с помощью векторных диаграмм расчет синусоидального режима в цепи, состоящей из параллельно включенных резистора с проводимостью  $g$ , катушки с индуктивностью  $L$  и конденсатора емкостью  $C$ . Направления токов и напряжения примем такими, как это показано на рисунке. При известном входном напряжении  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$  найдем ток, определяемый выражением  $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ . Необходимо рассчитать амплитуду тока  $I_m$  и его начальную фазу  $\psi_i$ .

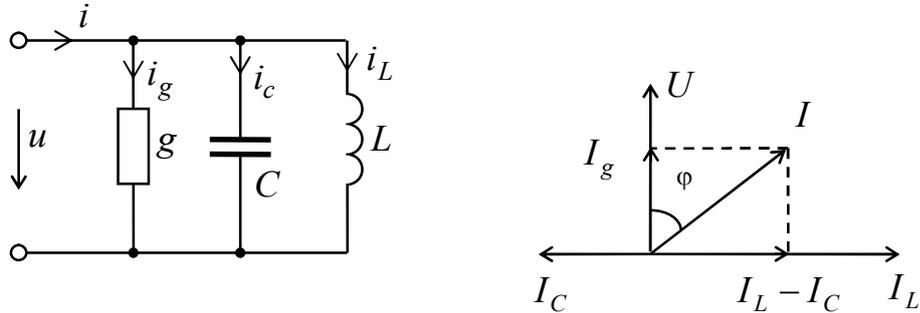
Уравнение первого закона Кирхгофа для рассматриваемой цепи имеет вид

$$i = i_g + i_C + i_L,$$

или в векторной форме

$$\bar{I} = \bar{I}_g + \bar{I}_C + \bar{I}_L$$

Будем использовать далее соотношения для действующих значений из таблицы в следующем виде



$$I_g = g \cdot U, \quad I_{\bar{n}} = \omega C \cdot U, \quad I_L = (1/\omega L) \cdot U.$$

Векторная диаграмма, представленная на рисунке, может быть построена в следующей последовательности:

- строим вектор напряжения  $\bar{U}$ , выбирая его направление произвольно,
- строим вектор тока резистора  $\bar{I}_g$ , совпадающий по направлению с вектором напряжения,
- строим вектор тока катушки индуктивности  $\bar{I}_L$ , отстающий от вектора напряжения на угол  $\pi / 2$ ,
- строим вектор тока конденсаторе  $\bar{I}_C$ , опережающий вектор напряжения на угол  $\pi / 2$ .

Вектор тока  $\bar{I}$  определяется как векторная сумма построенных токов. Его действующее значение может быть вычислено аналогично тому, как это было сделано при определении действующего значения вектора напряжения в цепи, состоящей из последовательно включенных резистора, катушки индуктивности и конденсатора

$$I = \sqrt{I_g^2 + (I_L - I_{\bar{n}})^2} = U \sqrt{g^2 + (1/\omega L - \omega C)^2} = U \sqrt{g^2 + (b_L - b_{\bar{n}})^2},$$

откуда получаем

$$I = U \sqrt{g^2 + b^2} = y \cdot U; \quad \varphi = \arctg \frac{I_L - I_C}{I_g} = \arctg \frac{b}{g}.$$

Искомые величины

$$I_m = \sqrt{2} \cdot I \quad \text{и} \quad \psi_i = \psi_u - \varphi,$$

при известных  $I$  и  $\varphi$  легко вычисляются.

В дальнейшем под величиной  $b = b_L - b_C$  будем понимать **реактивную проводимость рассматриваемой** цепи. Реактивная проводимость может быть как положительной, так и отрицательной. В первом случае говорят о индуктивном характере, во втором – о емкостном характере реактивной проводимости.

Полагая  $b_L$  равной нулю, получим  $b = -b_c$ , то есть реактивная проводимость конденсатора отрицательна. При  $b_c = 0$  имеем  $b = b_L$  и, следовательно, реактивная проводимость катушки положительна. Величину  $y$ , равную отношению действующих значений тока и напряжения, называют **полной проводимостью** цепи. Как и полное сопротивление  $z$ , полную проводимость  $y$  цепи синусоидального тока следует вычислять не алгебраическим сложением активной и реактивной проводимостей, а с использованием формулы

$$y = \sqrt{g^2 + b^2}.$$

Рассмотрим сдвиг фаз  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{g}$  между током и напряжением на зажимах всей цепи. Угол сдвига определяется соотношением между индуктивной проводимостью  $b_L = 1/\omega L$  и емкостной проводимостью  $b_C = \omega C$ .

Если  $1/\omega L > \omega C$ , то  $b > 0$ ,  $0 < \varphi \leq \pi/2$ , и ток отстает по фазе от напряжения на зажимах цепи.

Если же  $1/\omega L < \omega C$ , то  $b < 0$ ,  $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$ , и ток опережает по фазе напряжение на зажимах цепи.

## ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ЦЕПЯХ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Изложенный выше материал позволяет сформулировать правила преобразования простейших цепей переменного тока.

### Последовательное соединение элементов

Возможно объединение последовательно соединенных резисторов

$$r_{\mathcal{D}} = \sum_k r_k,$$

либо последовательно соединенных реактивных элементов

$$x_{\mathcal{D}} = \sum_k x_k.$$

При расчете полного сопротивления цепи справедлива формула

$$z_{\mathcal{D}} = \sqrt{r_{\mathcal{D}}^2 + x_{\mathcal{D}}^2}.$$

### Параллельное соединение элементов

Возможно объединение параллельно соединенных резисторов

$$g_{\mathcal{D}} = \sum_k g_k,$$

либо параллельно соединенных реактивных элементов

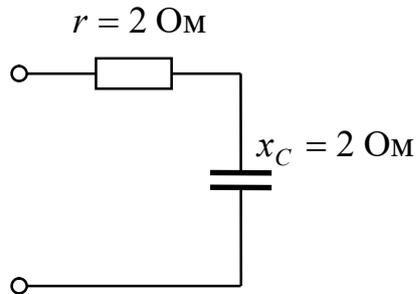
$$b_{\mathcal{D}} = \sum_k b_k.$$

При расчете полной проводимости цепи справедлива формула

$$y_{\Sigma} = \sqrt{g_{\Sigma}^2 + b_{\Sigma}^2} .$$

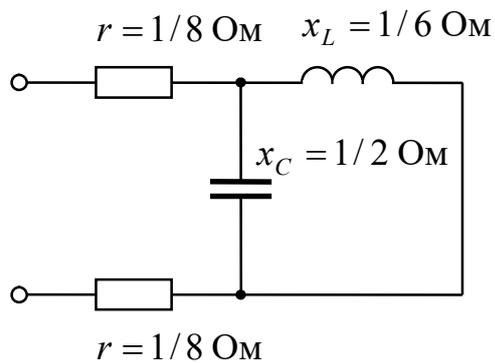
### Примеры

1. Определить полное сопротивление цепи  $z$  и угол сдвига фаз  $\varphi$ .



Ответ:  $z_{\Sigma} = 2\sqrt{2} \text{ Ом}$ ;  $\varphi = -\pi/4$

2. Определить полное сопротивление цепи  $z$  и угол сдвига фаз  $\varphi$ .



Ответ:  $z_{\Sigma} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ Ом}$ ;  $\varphi = \pi/4$

## ЛЕКЦИЯ 9

### АКТИВНАЯ, РЕАКТИВНАЯ И ПОЛНАЯ МОЩНОСТИ

Пусть напряжение  $u$  на входе цепи и ток  $i$  являются синусоидальными функциями времени

$$u(t) = U_m \sin \omega t, \quad i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Мгновенная мощность  $p(t)$ , поступающая в цепь,

$$\text{справка} \quad \sin x \cdot \sin y = 0,5[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

состоит из двух слагаемых: постоянной величины  $UI \cos \varphi$  и синусоидальной составляющей, изменяющейся с удвоенной частотой.

Введем понятие **активной мощности**  $P$ , определяемой как среднее значение мгновенной мощности за период:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{U \cdot I}{T} \int_0^T [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] dt = UI \cos \varphi,$$

так как среднее значение за период второго слагаемого, входящего в выражение для мгновенной мощности, равно нулю. Таким образом, активная мощность, выделяемая в цепи синусоидального тока, зависит не только от действующих значений тока и напряжения, но и от угла сдвига  $\varphi$  между этими величинами.

Множитель  $\cos \varphi$  также называют **коэффициентом мощности**. Равенство  $\cos \varphi = 1$  и, следовательно,  $P = UI$  достигается при  $\varphi = 0$ , то есть только в случае чисто активного сопротивления цепи. При наличии в цепи активного и реактивного сопротивления  $\varphi \neq 0$ , и  $\cos \varphi < 1$ , следовательно,  $P < UI$ . В предельных случаях, при  $\varphi = \pi / 2$  и  $\varphi = -\pi / 2$ , соответствующих чисто индуктивному и чисто емкостному характеру сопротивления цепи,  $P = 0$ , то есть активная мощность в цепи не выделяется.

Введем в рассмотрение величину  $S = UI$ , называемую **полной мощностью**. Полная мощность представляет собой наибольшую возможную активную мощность, которая может выделяться в цепи при наиболее благоприятных условиях, то есть при равенстве единице коэффициента мощности.

По аналогии введем понятие о так называемой **реактивной мощности**  $Q = UI \sin \varphi$ , широко используемое при расчете электрических сетей переменного тока. Очевидно, что  $Q \leq S$  и может быть как положительной, так и отрицательной величиной.. Между полной, активной и реактивной мощностью существует связь

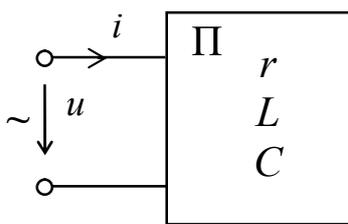
$$S^2 = P^2 + Q^2.$$

Для промышленных предприятий  $\varphi > 0$ , так как основной нагрузкой в промышленности являются электродвигатели. Поэтому одной из мер повышения коэффициента мощности промышленных предприятий является включение дополнительных конденсаторов параллельно устройствам с индуктивным сопротивлением. Это мероприятие в целом приводит к увеличению  $\cos\varphi$  и, следовательно, дает возможность более рационально использовать электрическую энергию.

Значительное различие между понятиями полной, активной и реактивной мощности отражено также и в том, что несмотря на одинаковую размерность этих величин, единицы измерения их названы по-разному. Активная мощность измеряется в ваттах (Вт), полная – в вольтамперах (ВА), реактивная – в варах (Вар).

### ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Рассмотрим двухполюсник  $\Pi$ , предполагая, что внутри него не содержатся источники электромагнитной энергии. Такой двухполюсник может быть охарактеризован некоторыми эквивалентными параметрами.



Полным эквивалентным сопротивлением  $z_3$  всей цепи будем называть отношение действующих значений напряжения и тока на входе цепи

$$z_3 = \frac{U}{I}.$$

Большинство измерительных приборов показывают действующее значение напряжения и тока. Поэтому полное эквивалентное сопротивление цепи может быть легко вычислено по измеренным действующим значениям тока  $I$  и напряжения  $U$ .

Эквивалентное активное сопротивление  $r_3$  цепи определим как отношение активной мощности на зажимах цепи к квадрату действующего значения тока

$$r_3 = \frac{P}{I^2}.$$

Эквивалентное реактивное сопротивление всей цепи определим так, чтобы сохранилась связь

$$z_3 = \sqrt{r_3^2 + x_3^2},$$

имеющая место для простейших цепей, поэтому

$$x_3 = \pm \sqrt{z_3^2 - r_3^2}.$$

Знак "плюс" в последнем выражении соответствует положительному сдвигу

фаз между током и напряжением на входе цепи ( $\varphi > 0$ , на векторной диаграмме вектор напряжения опережает вектор тока). При этом сопротивление цепи носит индуктивный характер. Знак "минус" соответствует отрицательному сдвигу фаз между током и напряжением на входе цепи ( $\varphi < 0$ , на векторной диаграмме вектор напряжения отстает от вектора тока). При этом сопротивление цепи носит емкостной характер.

Аналогичным образом могут быть определены полная эквивалентная проводимость цепи  $y_3$ , эквивалентная активная проводимость  $g_3$  и эквивалентная реактивная проводимость  $b_3$ :

$$y_3 = \frac{I}{U}, \quad g_3 = \frac{P}{U^2}, \quad b_3 = \pm \sqrt{y_3^2 - g_3^2}.$$

Используя выражение для активной мощности  $P = UI \cdot \cos \varphi$ , потребляемой цепью, можно установить связь между эквивалентными параметрами цепи и сдвигом фаз между напряжением и током на входе цепи:

$$r_3 = \frac{P}{I^2} = \frac{UI \cdot \cos \varphi}{I^2} = \frac{U}{I} \cos \varphi = z_3 \cos \varphi.$$

Аналогично

$$g_3 = \frac{P}{U^2} = \frac{UI \cdot \cos \varphi}{U^2} = \frac{I}{U} \cos \varphi = y_3 \cos \varphi.$$

Для эквивалентного реактивного сопротивления и проводимости имеем

$$x_3 = \pm \sqrt{z_3^2 - r_3^2} = \pm z_3 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = z_3 \sin \varphi,$$

$$b_3 = \pm \sqrt{y_3^2 - g_3^2} = \pm y_3 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = y_3 \sin \varphi.$$

Следовательно,

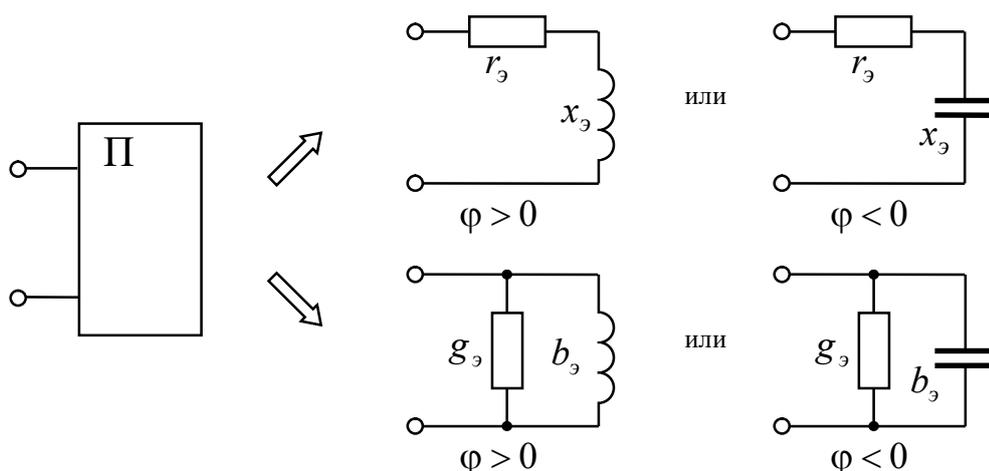
$$\cos \varphi = \frac{r_3}{z_3} = \frac{g_3}{y_3}, \quad \sin \varphi = \frac{x_3}{z_3} = \frac{b_3}{y_3}.$$

Последние соотношения позволяют получить связи между эквивалентными параметрами двухполюсника

$$y_3 = \frac{1}{z_3}, \quad g_3 = \frac{r_3}{z_3^2} = \frac{r_3}{r_3^2 + x_3^2}, \quad b_3 = \frac{x_3}{z_3^2} = \frac{x_3}{r_3^2 + x_3^2},$$

$$z_3 = \frac{1}{y_3}, \quad r_3 = \frac{g_3}{y_3^2} = \frac{g_3}{g_3^2 + b_3^2}, \quad x_3 = \frac{b_3}{y_3^2} = \frac{b_3}{g_3^2 + b_3^2}.$$

Таким образом, **на каждой конкретной частоте** электрическая цепь любой сложности может быть заменена двухполюсником, имеющим эквивалентные параметры  $z_3, r_3, x_3$  или  $y_3, g_3, b_3$ . Все возможные конфигурации схемы такого двухполюсника представлены на следующем рисунке



Конкретный вид схемы определяется тем, какую систему параметров ( $z_3, r_3, x_3$  или  $y_3, g_3, b_3$ ) предполагается использовать и каков знак реактивного сопротивления или реактивной проводимости.

Заметим, что для эквивалентных параметров справедливы следующие соотношения:

$$z_3 = \frac{1}{y_3}, \quad r_3 \neq \frac{1}{g_3}, \quad x_3 \neq \frac{1}{b_3}; \quad y_3 = \frac{1}{z_3}, \quad g_3 \neq \frac{1}{r_3}, \quad b_3 \neq \frac{1}{x_3}.$$

Эквивалентные параметры сложных цепей переменного тока, рассматриваемых как двухполюсник, в общем случае зависят от частоты. Так, один и тот же двухполюсник может при изменении частоты менять характер реактивного сопротивления. На некоторых частотах двухполюсник может иметь чисто активное сопротивление, несмотря на наличие в нем катушек индуктивности и конденсаторов. Эти свойства цепей переменного тока с реактивными элементами наблюдаются в рассмотренных ранее простейших цепях. Например, сопротивление  $rLC$  контура при  $\omega < 1/\sqrt{LC}$  носит емкостной характер, при  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  – чисто активное, а при  $\omega > 1/\sqrt{LC}$  носит индуктивный характер.

### БАЛАНС МОЩНОСТИ В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Правильность расчета цепи переменного тока можно проверить, используя баланс мощностей.

Источники отдают в цепь активную и реактивную мощности

$$P_{\text{ИСТ}} = U_{\text{ВХ}} I_{\text{ВХ}} \cos \varphi, \quad Q_{\text{ИСТ}} = U_{\text{ВХ}} I_{\text{ВХ}} \sin \varphi.$$

Эти мощности рассеиваются на отдельных участках цепи и, с учетом

$$P = U \cdot I \cos \varphi = I z \cdot I \cos \varphi = I^2 r, \quad Q = U \cdot I \sin \varphi = I z \cdot I \sin \varphi = I^2 x,$$

можно записать

$$P_k = \sum_k I_{rk}^2 \cdot r_k; \quad Q_k = \sum_k I_{xk}^2 \cdot x_k.$$

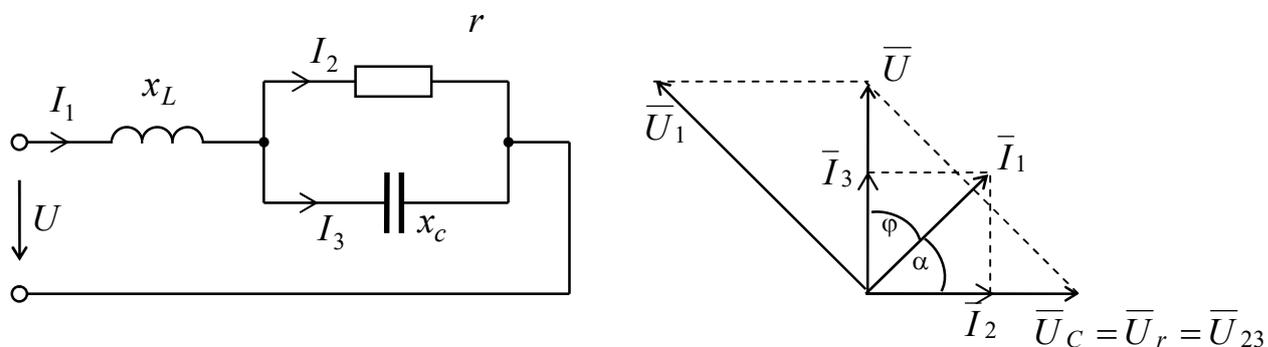
Уравнение баланса мощностей имеет вид:

$$P_{\text{ИСТ}} = \sum_k P_k, \quad Q_{\text{ИСТ}} = \sum_k Q_k.$$

Рассмотрим использование векторных диаграмм для расчета простейших цепей переменного тока.

### Пример 1

Пусть в электрической цепи, изображенной на рисунке,



$$I_3 = 10 \text{ А}, \quad x_L = x_c = r = 10 \text{ Ом}.$$

Определим с помощью векторной диаграммы величину действующего значения напряжения  $U$  на входе цепи, угол сдвига  $\varphi$  между входным током и напряжением, а также выделяемую в ней активную и реактивную мощности. Провести расчет эквивалентных параметров цепи и проверить баланс мощностей.

### Решение

Построим произвольно вектор тока конденсатора  $\bar{I}_3$ ; напряжение на конденсаторе  $U_c$ , равное напряжению на резисторе  $U_r$ , отстает по фазе от тока на угол  $\pi/2$ . Действующее значение напряжения  $U_c = I_3 \cdot x_c = 100 \text{ В}$ , следовательно, длина вектора тока резистора  $I_2 = U_r / r = 10 \text{ А}$ . Этот вектор сонаправлен с вектором  $\bar{U}_r$ . Ток  $\bar{I}_1$  может быть получен как векторная сумма  $\bar{I}_2$  и  $\bar{I}_3$ . Действующие значения  $I_1$  найдем по теореме Пифагора

$$I_1 = \sqrt{I_2^2 + I_3^2} = 10\sqrt{2} \text{ А}.$$

Вектор напряжения  $\bar{U}_L = \bar{U}_1$  опережает вектор тока  $\bar{I}_1$  на угол  $\pi/2$ . Действующие значения напряжения  $U_1 = x_L I_1 = 100\sqrt{2} \text{ В}$ . Напряжение  $\bar{U}$

может быть определено как векторная сумма  $\bar{U}_{23}$  и  $\bar{U}_1$ . Действующее значение  $U$  найдем по теореме косинусов

$$U = \sqrt{U_{23}^2 + U_1^2 - 2 \cdot U_{23} U_1 \cos(\pi/2 - \alpha)},$$

где угол  $\alpha$  определяется из векторной диаграммы. Таким образом, действующее значение  $U$  и угол сдвига  $\varphi = \pi/4$  между входным током и напряжением найдены (цепь носит индуктивный характер).

Активная мощность, выделяемая в цепи, может быть рассчитана из соотношения  $P = UI \cdot \cos\varphi$ , или, что проще в данной задаче, по формуле  $P = I_2^2 \cdot r = 10^2 \cdot 10 = 1000$  Вт. Реактивная мощность определится соотношением  $Q = UI \cdot \sin\varphi = 1000$  Вар.

Определим далее эквивалентные параметры  $z_3, r_3, x_3$  данной цепи

$$z_3 = \frac{U}{I_1} = \frac{100}{10\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \text{ Ом}; \quad r_3 = \frac{P}{I_1^2} = \frac{1000}{200} = 5 \text{ Ом},$$

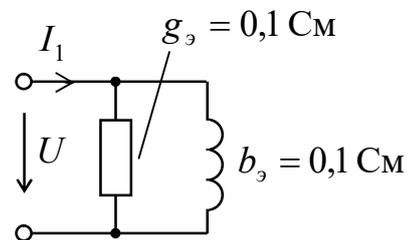
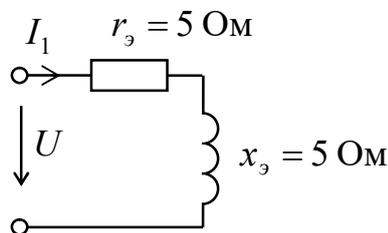
$$x_3 = \sqrt{z_3^2 - r_3^2} = \sqrt{50 - 25} = 5 \text{ Ом}.$$

Заметим, что эквивалентное активное сопротивление цепи  $r_3$  не равно сопротивлению резистора  $r$ , и эквивалентное реактивное сопротивление  $x_3$  не равно ни одному из сопротивлений реактивных элементов.

Для эквивалентных проводимостей  $y_3, g_3, b_3$  получим:

$$y_3 = \frac{I_1}{U} = \frac{10\sqrt{2}}{100} = \sqrt{2}/10 \text{ См}; \quad g_3 = \frac{P}{U^2} = \frac{1000}{10^4} = 0,1 \text{ См},$$

$$b_3 = \sqrt{y_3^2 - g_3^2} = 0,1 \text{ См}.$$



Проверим выполнение баланса мощностей.

Потребляемая активная мощность

$$P = I_2^2 r = 1000 \text{ Вт} \quad \text{равна активной мощности источника } P_{\text{ИСТ}}.$$

Потребляемая реактивная мощность

$$Q = Q_1 + Q_3; \quad Q_1 = I_1^2 x_1 = I_1^2 x_L = 2000 \text{ Вар}; \quad Q_3 = I_3^2 x_3 = I_1^2 (-x_C) = -1000 \text{ Вар}.$$

$$Q = 2000 - 1000 = 1000 \text{ Вар} \quad \text{равна реактивной мощности источника } Q_{\text{ист}}.$$

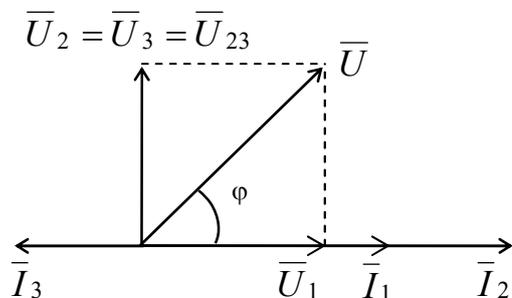
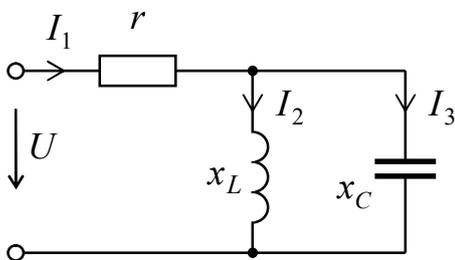
## Пример 2

Для цепи, изображенной на рисунке, заданы следующие данные:

$$U = 10 \text{ В}, \quad r = 2 \text{ Ом}, \quad x_C = 3 \text{ Ом}, \quad I_3 = 2 \text{ А}.$$

Определить:  $I_1$ ,  $x_L$ ,  $P$ ,  $Q$  и параметры схемы замещения.

Проверить баланс мощностей.



## Решение

$$\text{Определим} \quad U_2 = U_3 = U_{23} = I_3 x_C = 6 \text{ В}.$$

В соответствии с векторной диаграммой

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}, \quad \text{откуда} \quad U_1 = 8 \text{ В}.$$

$$\text{Тогда} \quad I_1 = \frac{U_1}{r} = 4 \text{ А}. \quad \text{Из равенства} \quad \bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \quad \text{получаем}$$

$$I_2 = 6 \text{ А}. \quad \text{Следовательно} \quad x_L = \frac{U_2}{I_2} = 1 \text{ Ом}.$$

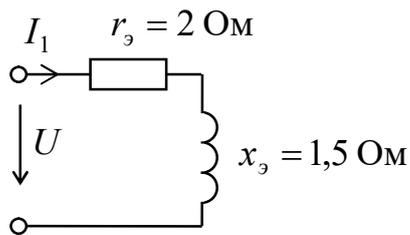
$$\text{Активная мощность источника } P = UI_1 \cdot \cos\varphi = UI_1 \cdot \frac{U_1}{U} = 32 \text{ Вт},$$

$$\text{потребляемая активная мощность} \quad P = I_1^2 r = 32 \text{ Вт}.$$

$$\text{Реактивная мощность источника} \quad Q = UI_1 \cdot \sin\varphi = UI_1 \cdot \frac{U_{23}}{U} = 24 \text{ ВАр},$$

$$\text{потребляемая реактивная мощность} \quad Q = I_2^2 x_2 + I_3^2 x_3 = 24 \text{ ВАр}.$$

Схема замещения



$$r_3 = r = 2 \text{ Ом}; \quad x_3 = x_{23} = \frac{x_L(-x_C)}{x_L - x_C} = 1,5 \text{ Ом},$$

$$z_3 = \sqrt{r_3^2 + x_3^2} = 2,5 \text{ Ом}.$$

Проверяем  $z_3 = U / I_1 = 2,5 \text{ Ом}.$

### ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ

Схема эл. цепи	Дано	Определить	Ответ
	$I = 5 \text{ А},$ $U_c = 10 \text{ В},$ $r = 5 \text{ Ом},$ $P = 80 \text{ Вт}.$	$x_L,$ $\cos \varphi$	$x_L = 10 \text{ Ом},$ $\cos \varphi = 0,8$
	$U = 10 \text{ В},$ $r = 2 \text{ Ом},$ $I_c = 2 \text{ А},$ $x_c = 3 \text{ Ом}.$	$P,$ $I_r,$ $x_L$	$P = 32 \text{ Вт},$ $I_r = 4 \text{ А},$ $x_L = 1 \text{ Ом}$
	$x_L = x_c,$ $U_c = 60 \text{ В},$ $U = 100 \text{ В},$ $P = 240 \text{ Вт}.$	$I_L,$ $x_c$	$I_L = 5 \text{ А},$ $x_c = 20 \text{ Ом}.$

## ЛЕКЦИЯ 10

### РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА КОМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ

Непосредственное использование для расчета цепей синусоидального тока законов Кирхгофа связано с громоздкими и трудоемкими вычислениями.

Существенное упрощение расчета достигается с помощью изображения синусоидальных функций времени комплексными числами. Метод, основанный на символическом изображении действительных синусоидальных функций времени комплексными числами, будем называть **комплексным методом**.

Комплексное число  $\dot{A}$  может быть записано в алгебраической, показательной и тригонометрической формах, соответственно:

$\dot{A} = a_1 + ja_2$ ,  $a_1$  – вещественная часть,  $a_2$  – мнимая часть комплексного числа;

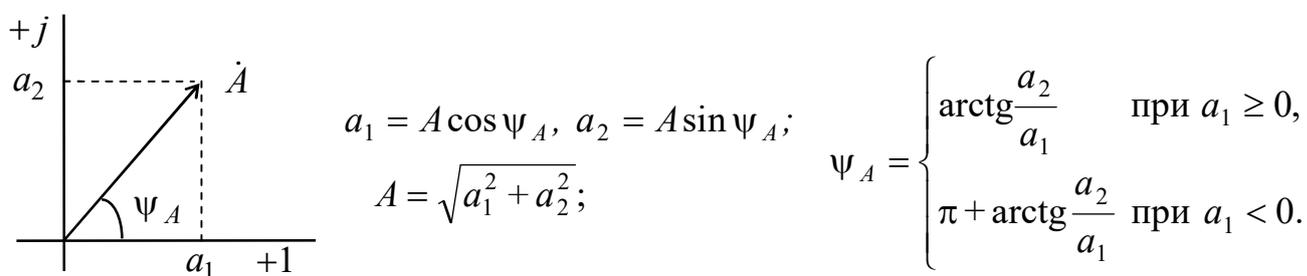
$\dot{A} = A e^{j\psi_A}$ ,  $A$  – модуль,  $\psi_A$  – аргумент комплексного числа;

$\dot{A} = A \cos \psi_A + jA \sin \psi_A$ .

Здесь и далее  $j = \sqrt{-1}$  – принятое в электротехнике обозначение мнимой единицы.

Соотношения между различными формами описания комплексного числа могут быть наглядно представлены с помощью изображения комплексного числа на комплексной плоскости.

В результате получим следующие формулы преобразования показательной формы записи комплексного числа в алгебраическую и обратно:



Заметим также, что

$$j^2 = -1; \quad j = e^{j\frac{\pi}{2}}; \quad \frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Две комплексные величины, имеющие равные модули и равные, но противоположные по знаку аргументы, называются **сопряженными**. Для комплексного числа  $\dot{A} = A e^{j\psi_A} = a_1 + ja_2$  сопряженное ему комплексное число запишется в форме  $A^* = A e^{-j\psi_A} = a_1 - ja_2$ , причем  $\dot{A} \cdot A^* = a_1^2 + a_2^2$ .

Сложение и вычитание комплексных чисел осуществляется в алгебраической форме, умножение и деление, как правило, – в показательной форме.

## Изображение синусоидальной функции комплексным числом

Изменяющийся по синусоидальному закону во времени ток  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$  при заданной частоте  $\omega$  характеризуется двумя величинами –  $I_m$ ,  $\psi_i$ . Поскольку комплексное число также задается двумя параметрами, можно записать:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \text{Im}[I_m e^{j(\omega t + \psi_i)}],$$

так как

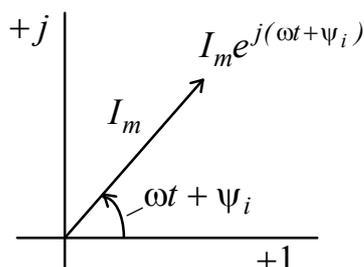
$$I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

При этом комплексное число

$$I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = \dot{I}_m e^{j\omega t}$$

будем рассматривать как символическое изображение действительного синусоидального тока  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ .

Заметим, что изображение синусоидального тока на комплексной плоскости тождественно изображению синусоидального тока на векторной диаграмме с помощью вектора  $\bar{I}_m$ , вращающегося с частотой  $\omega$ .



Вводя знак изображения  $\stackrel{\cdot}{\equiv}$ , запишем

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \stackrel{\cdot}{\equiv} I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = \dot{I}_m e^{j\omega t}.$$

Отметим, что выражения, стоящие справа и слева от знака  $\stackrel{\cdot}{\equiv}$  не равны между собой. Знак изображения лишь показывает, что между синусоидальной функцией времени и комплексным числом может быть установлено взаимно однозначное соответствие.

Будем называть далее действительную синусоидальную функцию оригиналом, а изображающую ее комплексную величину – изображением.

Комплексное число  $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$  называют **комплексной амплитудой тока**. Аналогично,  $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$ ,  $\dot{E}_m = E_m e^{j\psi_e}$  называют **комплексными амплитудами напряжения и э.д.с.** соответственно.

Разделив комплексные амплитуды на  $\sqrt{2}$ , получим комплексные действующие величины

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = I e^{j\psi_i}, \quad \dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}} = U e^{j\psi_u}, \quad \dot{E} = \frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}} = E e^{j\psi_e}.$$

В дальнейшем комплексные действующие значения тока, напряжения или э.д.с. будем для краткости называть **комплексными током, напряжением или э.д.с.**

Рассмотрим примеры перехода от оригинала синусоидальной функции к ее комплексному изображению и обратный переход.

$$1. i = 2 \cdot \sin(\omega t + \pi/4) \rightarrow \dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i} = 2e^{j\frac{\pi}{4}} = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{4} + j2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} + j\sqrt{2} \text{ А.}$$

$$2. u = 10 \cdot \sin(\omega t + \pi) \rightarrow$$

$$\dot{U} = U e^{j\psi_u} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j\pi} = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \cos\pi + j \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \sin\pi = -5\sqrt{2} \text{ В.}$$

$$3. \dot{E} = (3 - j3) \text{ В.} \rightarrow e = E_m \sin(\omega t + \psi_e).$$

$$E = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}, \quad \psi_e = \arctg\frac{-3}{3} = -\pi/4, \quad E_m = \sqrt{2} E = 6.$$

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e) = 6 \sin(\omega t - \pi/4).$$

$$4. \dot{I}_m = (-2 + j2) \text{ А.} \rightarrow i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

$$I_m = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}, \quad \psi_i = \pi + \arctg\frac{2}{-2} = \pi - \pi/4 = 3\pi/4,$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 3\pi/4).$$

### Изображение производной и интеграла от синусоидальной функции

Получим выражение для изображения производной по времени от синусоидальной функции, например, синусоидального тока  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ .

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \omega I_m \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}).$$

Изображение данной синусоидальной функции будет иметь вид

$$\omega I_m e^{j(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2})} = \omega I_m e^{j\psi_i} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t} = j\omega \dot{I}_m e^{j\omega t}.$$

Таким образом,

$$\frac{di}{dt} \doteq j\omega \dot{I}_m e^{j\omega t},$$

то есть **операция взятия производной от действительной функции заменяется умножением на  $j\omega$  ее комплексного изображения.**

Получим теперь изображение для интеграла от синусоидальной функции.

$$\int_0^t idt = \int_0^t I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt = -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t + \psi_i) \Big|_0^t = \frac{I_m}{\omega} \sin(\omega t + \psi_i - \pi/2) \Big|_0^t.$$

После подстановки пределов интегрирования, получим:

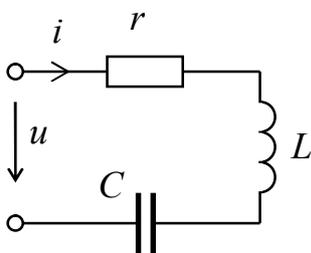
$$\int_0^t idt = \frac{I_m}{\omega} \sin(\omega t + \psi_i - \pi/2). \quad \text{Результирующее выражение не содержит постоянных слагаемых, так как рассматривается синусоидальный режим.}$$

Искомое изображение будет иметь вид

$$\int_0^t idt \quad \stackrel{::}{=} \quad \frac{I_m}{\omega} e^{j(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2})} = \frac{I_m}{\omega} e^{j\psi_i} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t} = \frac{\dot{I}_m}{j\omega} e^{j\omega t},$$

то есть **операция интегрирования действительной функции заменяется делением на  $j\omega$  ее комплексного изображения.**

Таким образом, **комплексный метод** является методом алгебраизации уравнений цепи. Сущность его заключается в том, что все заданные функции времени заменяются их комплексными изображениями, при этом интегро-дифференциальные уравнения, составленные по законам Кирхгофа, переходят в алгебраические уравнения относительно комплексных переменных. Решая эти уравнения, находим комплексные выражения искомых функций и от них переходим к оригиналам этих функций.



В качестве примера рассмотрим цепь, состоящую из соединенных последовательно резистора, катушки индуктивности и конденсатора, к зажимам которой приложено напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ . Считая параметры  $r, L, C$  известными, определим ток  $i$  в цепи.

Уравнение Кирхгофа для данной цепи имеет вид

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_c(0) = u.$$

Перейдя к комплексным изображениям, получим алгебраическое уравнение в комплексной форме

$$r\dot{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \dot{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m e^{j\omega t} = \dot{U}_m e^{j\omega t},$$

откуда

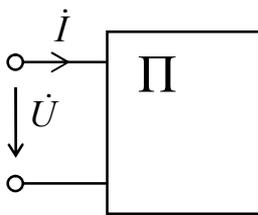
$$\dot{I}_m \left( r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \dot{U}_m, \quad \dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{r + j\omega L + 1/j\omega C} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{z e^{j\varphi}} = \frac{U_m}{z} e^{j(\psi_u - \varphi)} = I_m e^{j\psi_i},$$

$$\text{где } z = \sqrt{r^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{r}, \quad I_m = \frac{U_m}{z}, \quad \psi_i = \psi_u - \varphi.$$

Таким образом, определены амплитуда  $I_m$  и начальная фаза  $\psi_i$  искомого тока в выражении  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ .

Поскольку все токи и напряжения в цепи изменяются с частотой  $\omega$ , равной частоте приложенного напряжения, то в дальнейшем при использовании комплексного метода расчета множитель  $e^{j\omega t}$  будем опускать.

### Комплексные сопротивление и проводимость



Отношение комплексного напряжения  $\dot{U}$  к комплексному току  $\dot{I}$  называют **комплексным сопротивлением** цепи и обозначают  $Z$ .

Получаем:

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = z e^{j\varphi} = z \cos \varphi + j z \sin \varphi = r + jx,$$

где  $r, x$  и  $z$  – активное, реактивное и полное сопротивления цепи.

Отношение комплексного тока  $\dot{I}$  к комплексному напряжению  $\dot{U}$  называют **комплексной проводимостью** цепи и обозначают  $Y$ . Имеем:

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = y e^{-j\varphi} = y \cos \varphi - j y \sin \varphi = g - jb,$$

где  $g, b$  и  $y$  – активная, реактивная и полная проводимости цепи. Отметим очевидную связь  $ZY = 1$  и  $zy = 1$  для комплексных и полных сопротивлений и проводимостей. Заметим:

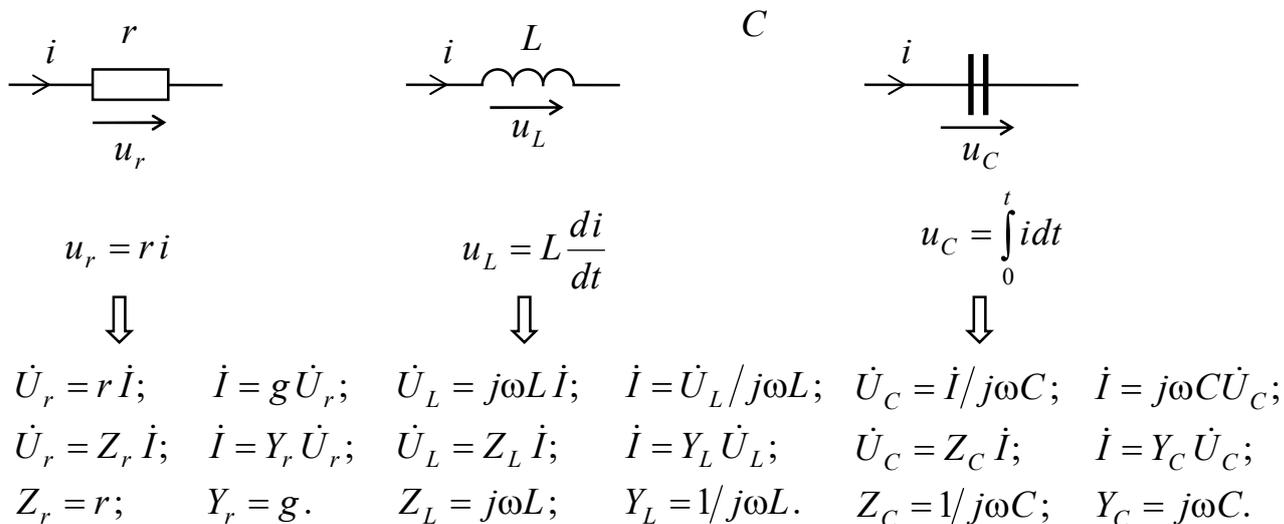
$$Y = 1/Z = \frac{1}{r + jx} = \frac{(r - jx)}{(r + jx) \cdot (r - jx)} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j \frac{x}{r^2 + x^2} = g - jb,$$

$$Z = 1/Y = \frac{1}{g - jb} = \frac{(g + jb)}{(g - jb) \cdot (g + jb)} = \frac{g}{g^2 + b^2} + j \frac{b}{g^2 + b^2} = r + jx.$$

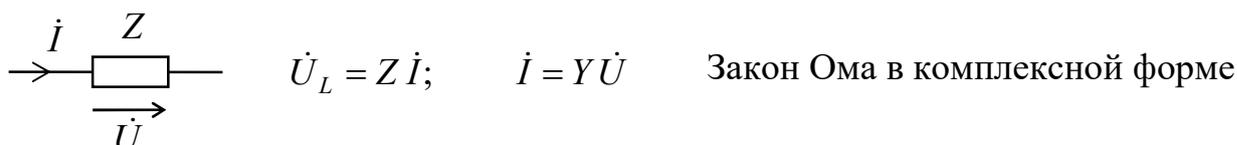
Эти расчетные соотношения были получены ранее достаточно сложным образом.

## Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме

Рассмотрим отдельные элементы электрической цепи.

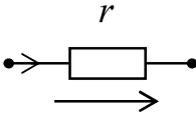
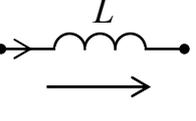
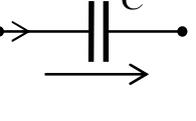


Обобщая, можем записать



Связь между комплексными напряжением и током для основных элементов электрической цепи иллюстрирует таблица

Таблица

Элемент эл. цепи	Комплексное сопротивление $Z$	Комплексная проводимость $Y$	Связь между компл. напряжением и током	Связь между компл. током и напряжением
	$r$	$\frac{1}{r}$	$U_r = r \cdot I_r$	$I_r = g \cdot U_r$
	$j\omega L = jx_L = jx$	$\frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} = -jb_L = -jb$	$U_L = j\omega L \cdot I_L$	$I_L = -j \frac{1}{\omega L} \cdot U_L$
	$\frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -jx_C = jx$	$j\omega C = jb_C = -jb$	$U_C = -j \frac{1}{\omega C} \cdot I_C$	$I_C = j\omega C \cdot U_C$

Первый закон Кирхгофа для мгновенных значений токов  $\sum_k i_k = 0$ , в комплексной форме запишется в виде

$$\sum_k \dot{I}_k = 0.$$

Второй закон Кирхгофа для мгновенных значений э.д.с. и падений напряжений  $\sum_k u_k = \sum_k e_k$ , в комплексной форме запишется в виде

$$\sum_k \dot{U}_k = \sum_k \dot{I}_k Z_k = \sum_k \dot{E}_k,$$

где  $\dot{E}_k$ ,  $\dot{U}_k$ ,  $\dot{I}_k$ ,  $Z_k$  – комплексные э.д.с., падение напряжения, ток и сопротивление в  $k$ -й ветви, входящей в контур.

Как было указано ранее, необходимо перед составлением уравнений по законам Кирхгофа задать положительные направления э.д.с., токов и напряжений во всех ветвях цепи, обозначив эти направления на схеме стрелками.

Таким образом, в области изображений структура цепи синусоидального тока и описывающие ее уравнения идентичны уравнениям, описывающим цепь постоянного тока. Поэтому в области изображений для расчета установившихся процессов в сложных цепях синусоидального тока могут быть использованы все рассмотренные ранее методы расчета цепей постоянного тока (метод наложения, метод эквивалентного генератора, преобразование источников и т.д.).

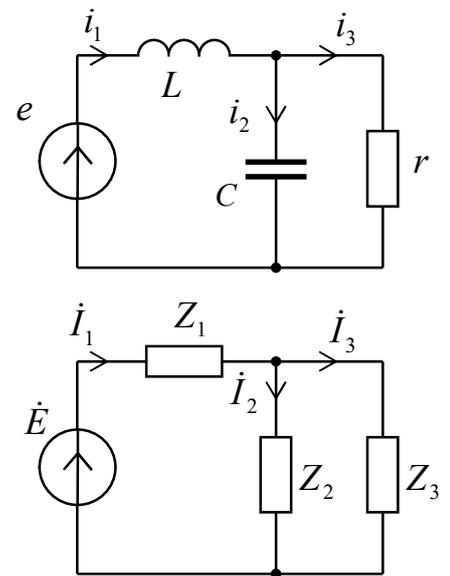
Используем комплексный метод расчета для определения токов в цепи, изображенной на рисунке, если на ее входе действует источник синусоидальной э.д.с.  $e = 10\sqrt{2} \sin \omega t$ , а сопротивления элементов равны  $r = \omega L = 1 / \omega C = 2$  Ом.

Решение задачи комплексным методом предполагает рассмотрение схемы следующего вида в которой переменным  $e$ ,  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  соответствуют их комплексные изображения  $\dot{E}$ ,  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$ ,  $\dot{I}_3$ , а комплексные сопротивления ветвей равны  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$ .

Комплексную э.д.с. определим из соотношения

$$\dot{E} = E \cdot e^{j\psi_e} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j0} = 10 \text{ В.}$$

Комплексные сопротивления отдельных элементов цепи равны



$$Z_1 = j\omega L = (j2) \text{ Ом}, \quad Z_2 = -j \frac{1}{\omega C} = (-j2) \text{ Ом}, \quad Z_3 = r = 2 \text{ Ом}.$$

Поскольку расчет данной цепи аналогичен расчету резистивной цепи такой же структуры, запишем эквивалентное сопротивление  $Z_3$  в виде

$$Z_3 = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = j2 + \frac{-j2 \cdot 2}{2 - j2} = j2 + \frac{-j2 \cdot (1+j)}{(1-j)(1+j)} = (1+j) \text{ Ом}.$$

Ток в первой ветви определим по закону Ома

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{Z_3} = \frac{10}{1+j} = (5 - j5) \text{ А}.$$

Падение напряжения на второй ветви, равное падению напряжения на третьей ветви, может быть найдено из соотношения

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_3 = \dot{I}_1 \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = (5 - j5)(1 - j) = -j10 \text{ В}.$$

Тогда имеем

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_2 / Z_2 = 5 \text{ А}, \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = (-j5) \text{ А}.$$

Окончательно получим следующие мгновенные значения токов в ветвях цепи

$$i_1 = 10 \sin(\omega t - \pi/4), \quad i_2 = 5\sqrt{2} \sin \omega t, \quad i_3 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - \pi/2).$$

## РАСЧЕТ МОЩНОСТИ ПО КОМПЛЕКСНЫМ НАПРЯЖЕНИЮ И ТОКУ

Комплексная мощность  $\dot{S}$  определяется выражением вида

$$\dot{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = U e^{j\psi_u} \cdot I e^{-j\psi_i} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ.$$

Соответственно, для сопряженной комплексной величины  $S^*$  получаем:

$$S^* = U^* \cdot \dot{I} = U e^{-j\psi_u} \cdot I e^{j\psi_i} = UI \cos \varphi - jUI \sin \varphi = P - jQ.$$

Из приведенных соотношений следует, что активная мощность  $P$  определяется как вещественная часть  $\dot{S}$  или  $S^*$ , а реактивная мощность  $Q$  представляет собой коэффициент при  $+j$  или  $-j$  комплексной мощности  $\dot{S}$  или  $S^*$  соответственно.

Модуль комплексной мощности равен полной мощности

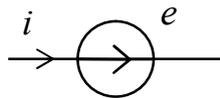
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U \cdot I.$$

## Баланс мощностей в цепи синусоидального тока

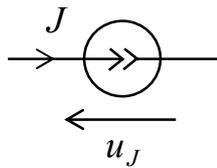
Сумма комплексных мощностей всех источников энергии в сколь угодно сложной электрической цепи равна сумме комплексных мощностей приемников в этой цепи

$$\sum_k \dot{S}_{Ek} + \sum_k \dot{S}_{Jk} = \sum_k \dot{S}_{Zk}$$

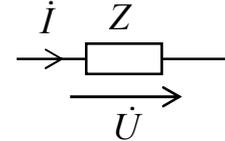
Здесь:



$$\dot{S}_{Ek} = \dot{E} I^*$$



$$\dot{S}_{Jk} = \dot{U}_J J^*$$

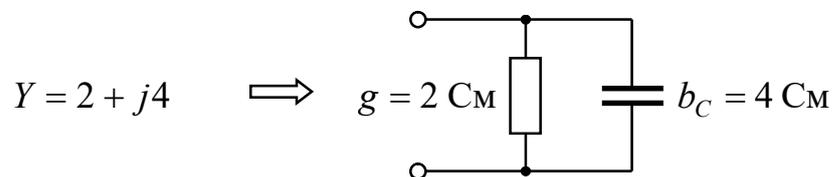
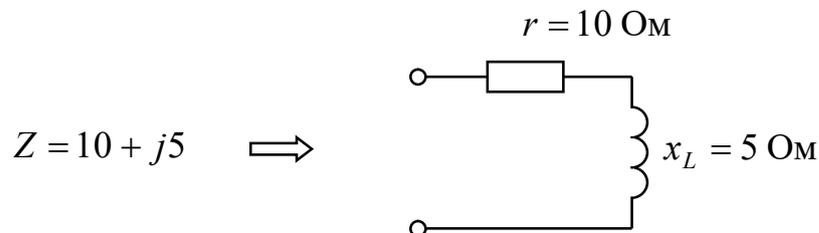


$$\dot{S}_{Zk} = \dot{U} I^*$$

Рассмотрим несколько примеров применения комплексного метода при анализе цепей синусоидального тока.

### Пример 1.

По заданным комплексным сопротивлению и проводимости изобразить схему соответствующей цепи переменного тока.



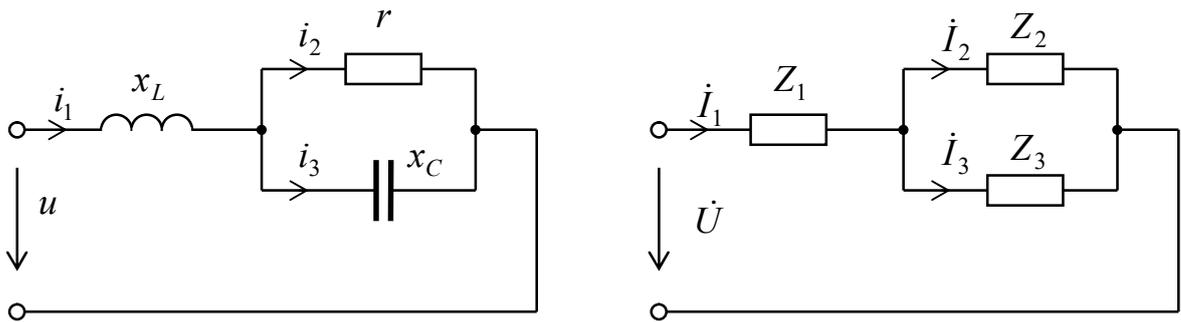
### Пример 2.

Для изображенной на рисунке схемы определить входное напряжение  $u$ , токи ветвей  $i_1, i_2$  и проверить выполнение баланса мощностей.

Исходные данные:

$$r = x_L = x_C = 10 \text{ Ом}; \quad i_3 = 10\sqrt{2} \sin \omega t$$

## Решение



Определим комплексные сопротивления расчетной схемы.

$$Z_1 = j10; \quad Z_2 = 10; \quad Z_3 = -j10$$

Комплексное изображение тока третьей ветви имеет вид

$$\dot{I}_3 = I_3 e^{j\psi_3} = I_3 = 10.$$

По закону Ома

$$\dot{U}_3 = \dot{I}_3 Z_3 = -j100 = \dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = \dot{U}_2 / Z_2 = -j10.$$

По первому закону Кирхгофа

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 10 - j10.$$

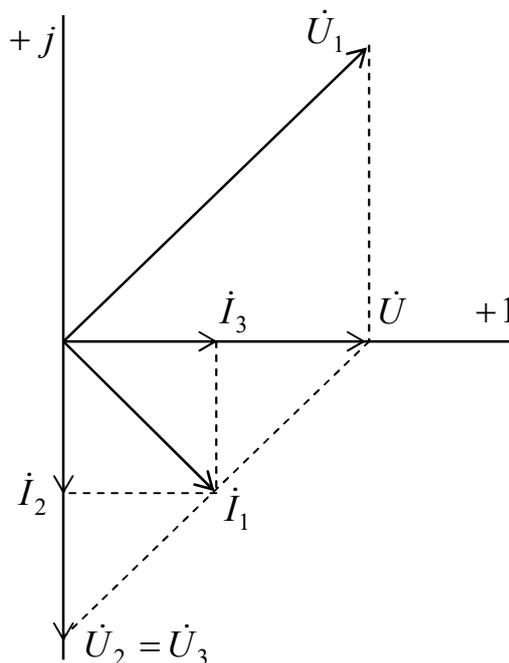
Можем записать

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1 = 100 + j100; \quad \dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 100.$$

Тогда

$$Z_{\text{э}} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = 5 + j5.$$

Проверим выполнение законов Кирхгофа, изобразив полученные токи и напряжения на комплексной плоскости. Углы сдвига фаз для различных ветвей.



Баланс мощностей.

Комплексная мощность источника равна

$$\dot{S} = \dot{U} \cdot I_1^* = 100 \cdot (10 + j10) = 1000 + j1000 = P + jQ \text{ ВА,}$$

Имеем  $P = 1000 \text{ Вт; } Q = 1000 \text{ ВАр.}$

Для отдельных ветвей

$$\dot{S}_1 = \dot{U}_1 \cdot I_1^* = (100 + j100) \cdot (10 + j10) = j2000.$$

$$\dot{S}_2 = \dot{U}_2 \cdot I_2^* = (-j100) \cdot (j10) = 1000.$$

$$\dot{S}_3 = \dot{U}_3 \cdot I_3^* = (-j100) \cdot 10 = -j1000.$$

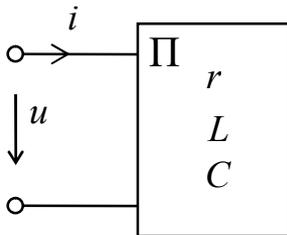
$$\sum_k \dot{S}_{kJK} = j2000 + 1000 - j1000 = 1000 + j1000; \quad \rightarrow \quad \text{баланс выполняется.}$$

## ЛЕКЦИЯ 11

### РЕЗОНАНС В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Рассмотрим пассивную электрическую цепь, содержащую резисторы, катушки индуктивности и конденсаторы.

При определенных условиях ток и напряжение на входе цепи могут совпадать по фазе, то есть  $\varphi = 0$ . Этот особый режим работы носит название резонанса.



Поскольку угол сдвига между током и напряжением определяется в виде

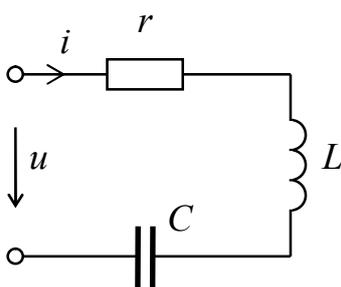
$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_{\Sigma}}{r_{\Sigma}} = \operatorname{arctg} \frac{b_{\Sigma}}{g_{\Sigma}},$$

то условие резонанса выражается равенствами

$$x_{\Sigma} = 0 \quad \text{или} \quad b_{\Sigma} = 0.$$

#### Резонанс в цепи при последовательном соединении элементов $r, L, C$

Рассмотрим цепь, изображенную на рисунке. Комплексное сопротивление этой цепи равно



$$Z = r + j(\omega L - 1/\omega C) = r + jx$$

Условие резонанса  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{r} = 0$  в данном случае имеет вид

$$x = 0 \rightarrow \omega L = 1/\omega C \quad \text{или} \quad \omega^2 LC = 1.$$

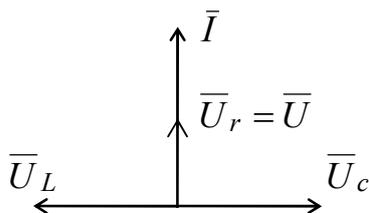
Резонанса можно добиться изменением либо частоты  $\omega$ , либо индуктивности  $L$ , либо емкости  $C$ . При заданных значениях  $L$  и  $C$  состояние резонанса в цепи наступает при частоте

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

Эта угловая частота называется **резонансной**. При резонансной частоте имеем

$$x_L = x_C \rightarrow U_L = U_C$$

и векторная диаграмма примет вид, представленный на рисунке.



Как видно из векторной диаграммы, вектора  $\bar{U}_L$  и  $\bar{U}_C$  равны по величине и противоположны по направлению, таким образом, напряжение  $U_{LC}$  при резонансной частоте равно нулю. Индуктивное и равное ему емкостное сопротивление цепи при резонансной частоте

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho,$$

обозначаемое символом  $\rho$ , носит название **волнового сопротивления** колебательного контура и измеряется в омах.

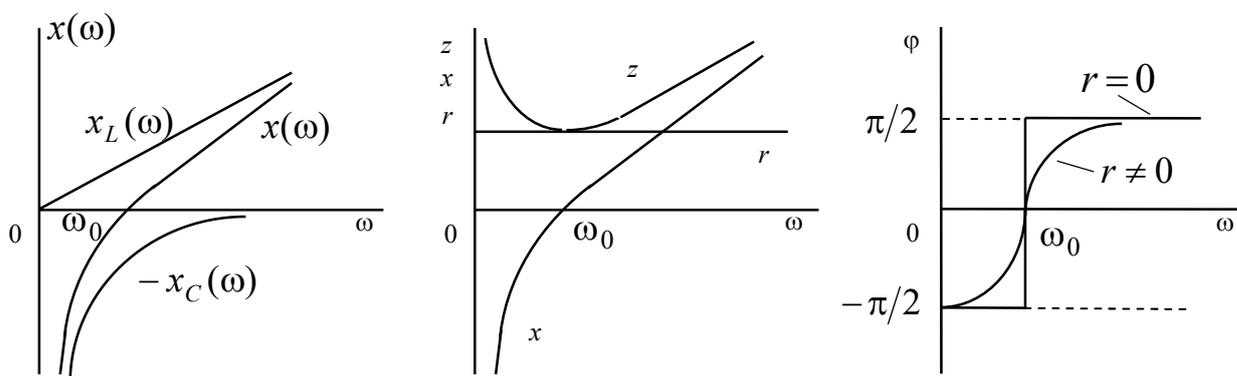
Отношение волнового сопротивления к активному сопротивлению в последовательном колебательном контуре называется **добротностью**  $Q = \frac{\rho}{r}$ .

Добротность  $Q = \frac{\rho}{r} = \frac{\rho \cdot I}{r \cdot I} = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U}$  показывает во сколько раз напряжение на реактивных элементах отличается от входного напряжения. При  $Q > 1$  напряжение  $U_{L0} = U_{C0}$  может превышать входное напряжение  $U$ , поэтому резонанс в последовательной  $r, L, C$  цепи называют **резонансом напряжений**.

Величина обратная добротности  $d = \frac{1}{Q} = \frac{r}{\rho}$  называется **затуханием** контура.

Рассмотрим частотные свойства цепи с последовательно соединенными элементами  $r, L, C$ . Будем считать, что на входе цепи действует синусоидальное напряжение с постоянной амплитудой и угловой частотой  $\omega$ , меняющейся в пределах от 0 до  $\infty$ .

Изменение частоты приводит к изменению параметров цепи  $x, z, \varphi$ . На рисунке приведены соответствующие частотные характеристики



$$x = \omega L - 1/\omega C = x_L(\omega) - x_C(\omega),$$

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}.$$

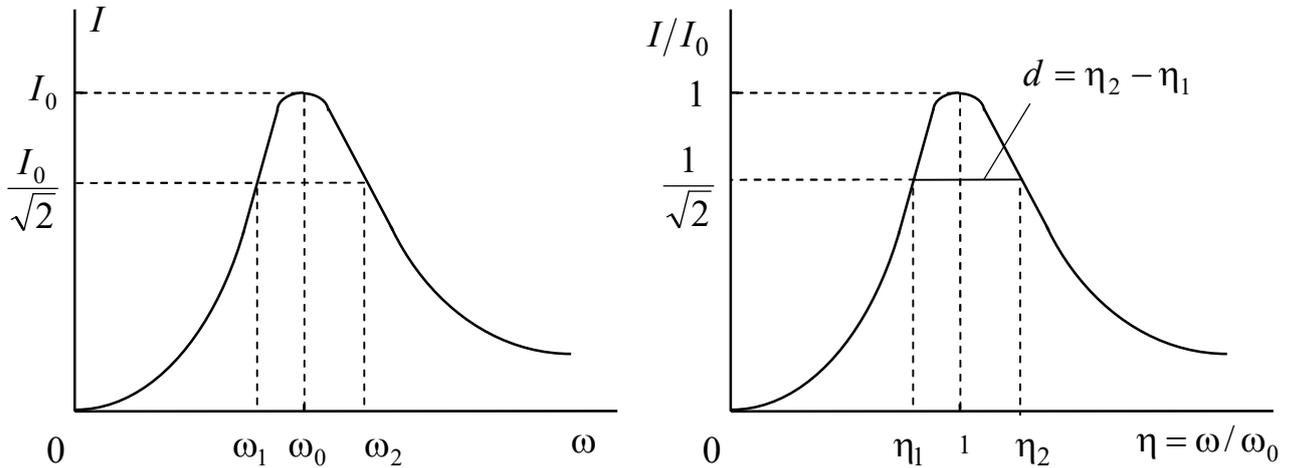
Активное сопротивление рассматриваемой цепи не зависит от частоты, а реактивное при определенных значениях частоты ( $\omega = 0, \infty$ ) становится равным либо нулю либо бесконечности. В интервале частот  $0 < \omega < \omega_0$  реактивное сопротивление возрастает от  $-\infty$  до 0 и имеет **емкостной** характер, при  $\omega > \omega_0$  реактивное сопротивление возрастает от 0 до  $\infty$  и имеет **индуктивный** характер.

Рассмотрим зависимость тока  $I(\omega)$  в  $rLC$  контуре от частоты приложенного напряжения:

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}.$$

Анализ этого выражения показывает, что при  $U = const$  максимального значения  $I_0 = U/r$  ток достигает в точке, соответствующей резонансной частоте.

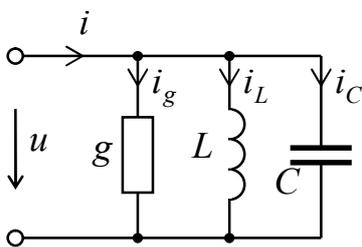
Важной характеристикой  $rLC$  контура является ширина резонансной кривой или полоса пропускания. Это диапазон частот  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$  при котором  $I > I_0 / \sqrt{2}$ .



Можно показать, что  $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \omega_0 \cdot d$ , где  $d$  – затухание контура. Если построить зависимость  $I/I_0 = f(\omega/\omega_0)$ , то по этому графику можно определить затухание контура  $d = \eta_2 - \eta_1$  (см. рис.).

### Резонанс в цепи при параллельном соединении элементов $g, L, C$

Рассмотрим электрическую цепь (рис.), представляющую собой параллельный колебательный контур



Запишем выражение для комплексной проводимости этой цепи

$$Y = g - j(1/\omega L - \omega C) = g - jb .$$

Условие резонанса  $\varphi = \arctg \frac{b}{g} = 0$  в данном случае имеет вид

$$b = 0 \rightarrow 1/\omega L = \omega C \quad \text{или} \quad \omega^2 LC = 1.$$

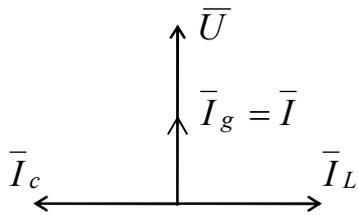
Резонанса можно добиться изменением либо частоты  $\omega$ , либо индуктивности  $L$ , либо емкости  $C$ . При заданных значениях  $L$  и  $C$  состояние резонанса в цепи наступает при **резонансной** частоте

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} .$$

При резонансной частоте имеем

$$b_L = b_C \rightarrow I_L = I_C$$

и векторная диаграмма примет вид, представленный на рисунке.



Как следует из диаграммы, при резонансе токи катушки индуктивности и конденсатора равны по величине и противоположны по направлению, следовательно ток  $I_{LC}$  равен нулю. Для рассматриваемой цепи вводятся понятия:

- волновой проводимости  $\gamma$  ( $[\gamma] = \text{См}$ )

$$\gamma = \omega_0 C = 1/\omega_0 L = \sqrt{C/L};$$

- добротности  $Q$

$$Q = \frac{\gamma}{g} = \frac{\gamma \cdot U}{g \cdot U} = \frac{I_{L0}}{I} = \frac{I_{C0}}{I};$$

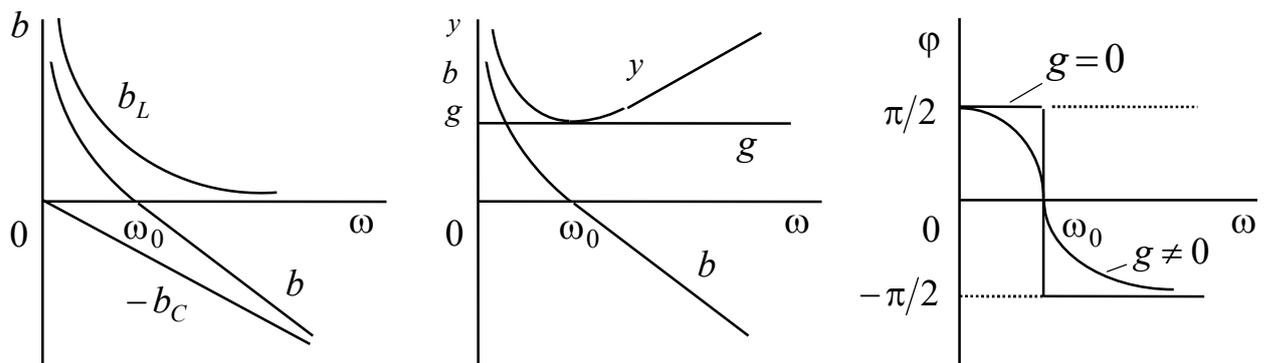
- затухания  $d$

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{g}{\gamma}.$$

Добротность  $Q$  показывает во сколько раз ток в реактивных элементах отличается от входного тока. При  $Q > 1$  ток  $I_{L0} = I_{C0}$  может превышать входной ток  $I$ , поэтому резонанс для параллельной  $g, L, C$  цепи называют **резонансом токов**.

Рассмотрим частотные свойства цепи с параллельно соединенными элементами  $g, L, C$ . Будем считать, что на входе цепи действует синусоидальный ток с постоянной амплитудой и угловой частотой  $\omega$ , меняющейся в пределах от 0 до  $\infty$ .

Изменение частоты приводит к изменению параметров цепи  $g, y, \varphi$ . На рисунке приведены соответствующие частотные характеристики



$$b(\omega) = 1/\omega L - \omega C = b_L(\omega) - b_C(\omega), \quad y = \sqrt{g^2 + b^2}.$$

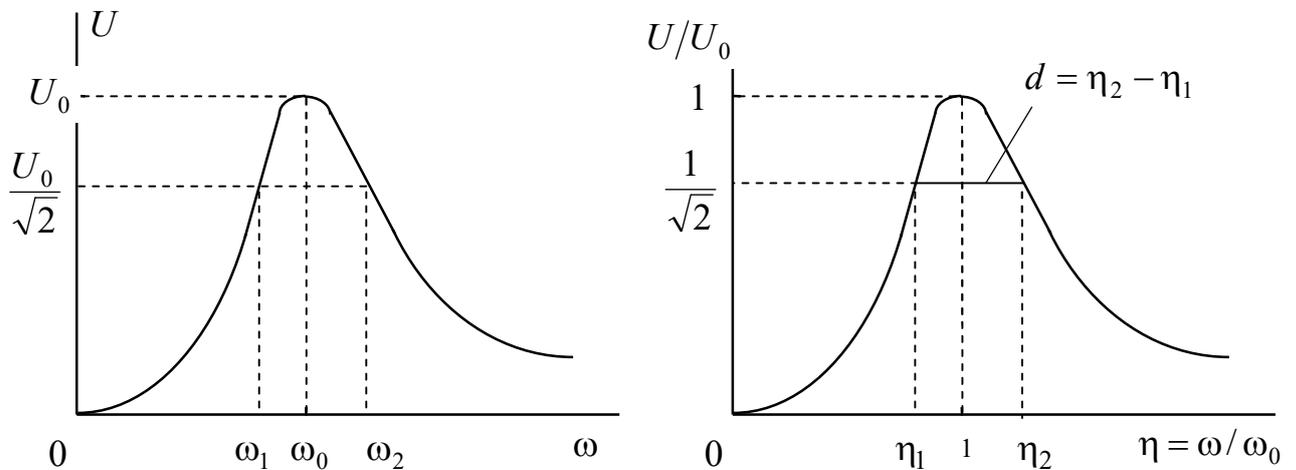
Активная проводимость рассматриваемой цепи не зависит от частоты, а реактивная при определенных значениях частоты ( $\omega = 0, \infty$ ) становится равным либо нулю либо бесконечности. В интервале частот  $0 < \omega < \omega_0$  реак-

тивная проводимость убывает от  $\infty$  до 0 и имеет **индуктивный** характер, при  $\omega > \omega_0$  реактивная проводимость убывает от 0 до  $-\infty$  и имеет **емкостной** характер.

Рассмотрим зависимость напряжения  $U(\omega)$  в  $g L C$  контуре от частоты, считая амплитуду тока постоянной:

$$U(\omega) = \frac{I}{\sqrt{g^2 + (1/\omega L - \omega C)^2}} .$$

Напряжение достигает максимального значения  $U_0 = I/g$  при резонансной частоте. Форма кривой  $U(\omega)$  зависит от затухания цепи.

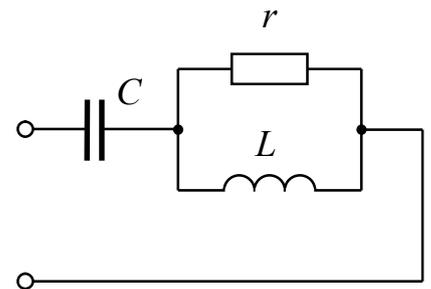


Можно показать, что  $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \omega_0 \cdot d$ , где  $d$  – затухание контура. Если построить зависимость  $U/U_0 = f(\omega/\omega_0)$ , то по этому графику можно определить затухание контура  $d = \eta_2 - \eta_1$  (см. рис.).

### Резонанс в цепи при смешанном соединении элементов

Для определения резонансных частот при смешанном соединении элементов  $r, L, C$  следует использовать условие резонанса  $\varphi = 0$ , эквивалентное выполнению двух условий:  $x_p = 0$  и  $b_s = 0$ . Рассмотрим несколько примеров.

1. Определить резонансную частоту  $\omega_0$  цепи, схема которой изображена рисунке, при заданных параметрах  $r, L, C$ .



Эквивалентное комплексное сопротивление рассматриваемой цепи

$$Z_3 = -jx_C + \frac{jx_L \cdot r}{r + jx_L} = -jx_C + \frac{jx_L \cdot r \cdot (r - jx_L)}{(r + jx_L) \cdot (r - jx_L)} = -jx_C + \frac{jx_L \cdot r^2 + x_L^2 \cdot r}{r^2 + x_L^2}$$

$$= \frac{x_L^2 \cdot r}{r^2 + x_L^2} + j \left( \frac{x_L \cdot r^2}{r^2 + x_L^2} - x_C \right) = r_3 + jx_3.$$

Определяя резонансную частоту  $\omega_0$  из условия  $x_3 = 0$ , получим

$$\frac{\omega_0 L \cdot r^2}{r^2 + (\omega_0 L)^2} = \frac{1}{\omega_0 C} \rightarrow \omega_0^2 L C r^2 = r^2 + (\omega_0 L)^2,$$

$$\omega_0^2 (L C r^2 - L^2) = r^2 \rightarrow \omega_0^2 = \frac{r^2}{L C r^2 - L^2}.$$

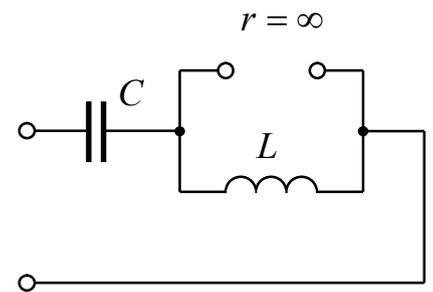
Окончательно

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L C - (L/r)^2}}.$$

Последнее выражение при  $r = \infty$  дает известный результат  $\omega_0 = 1 / \sqrt{L C}$ , что вполне естественно, поскольку в этом случае элементы  $L$  и  $C$  оказываются соединенными последовательно.

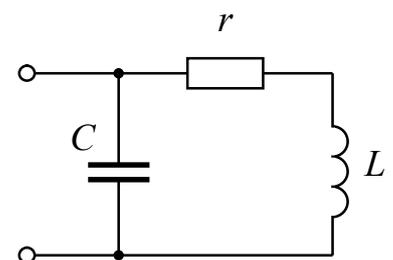
Отметим, что дополнительным условием резонанса является неравенство  $L C > \frac{L^2}{r^2}$ , то есть ре-

зонанс возможен только при определенном соотношении для параметров элементов цепи.



2. Рассчитать резонансную частоту  $\omega_0$  цепи, схема которой изображена рисунке, при заданных параметрах  $r, L, C$ .

Определим эквивалентную комплексную проводимость цепи



$$Y_3 = j\omega C + \frac{1}{r + j\omega L} = j\omega C + \frac{r - j\omega L}{r^2 + (\omega L)^2} =$$

$$= \frac{r}{r^2 + (\omega L)^2} - j \left( \frac{\omega L}{r^2 + (\omega L)^2} - \omega C \right) = g_3 - jb_3.$$

В данной цепи условие резонанса  $b_3 = 0$  приводит к равенству

$$\frac{\omega_0 L}{r^2 + (\omega_0 L)^2} = \omega_0 C,$$

откуда для резонансной частоты получим:

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC - (r/L)^2}$$

Проверка при  $r = 0$  приводит к известной формуле  $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ .

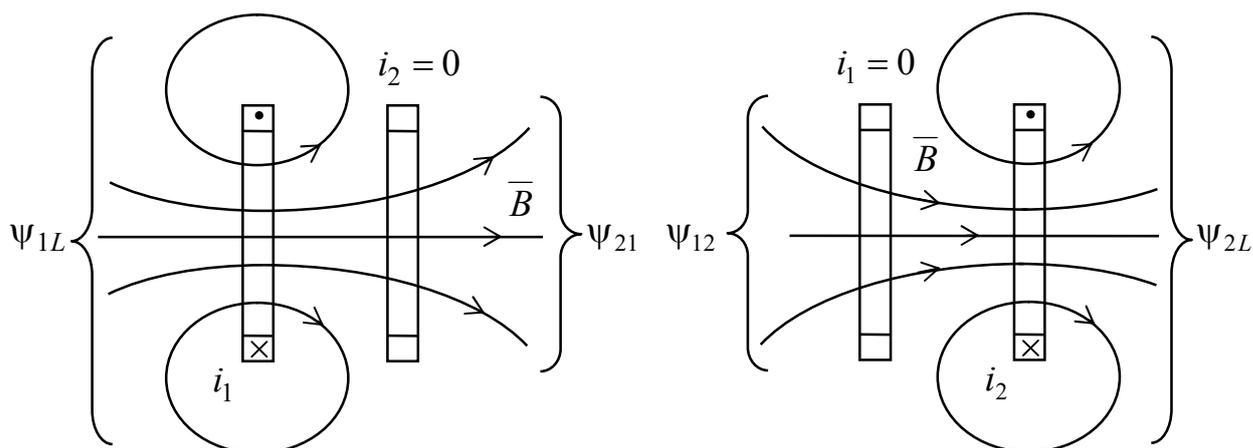
Отметим, что дополнительным условием резонанса является неравенство  $\frac{1}{LC} > \frac{r^2}{L^2}$ , то есть резонанс возможен только при определенном соотношении для параметров элементов цепи.

## ЛЕКЦИЯ 12

### РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ УЧЕТЕ ЯВЛЕНИЯ ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ

Явление наведения (возникновения) э.д.с. в каком-либо контуре при изменении тока в другом контуре называется явлением **взаимной индукции**.

Рассмотрим два контура, расположенные на некотором расстоянии друг от друга. Предположим, что ток  $i_1$  протекает только в первом контуре.



Линии магнитной индукции, сцепляющиеся с этим контуром, образуют потокосцепление самоиндукции  $\psi_{1L} = L_1 i_1$ , а те из них, которые сцепляются со вторым контуром, определяют потокосцепление взаимной индукции  $\psi_{21} = M_{21} i_1$ .

Если ток  $i_2$  протекает только по второму контуру ( $i_1 = 0$ ), то можно аналогично ввести понятия  $\psi_{2L} = L_2 i_2$  – потокосцепление самоиндукции второго контура и  $\psi_{12} = M_{12} i_2$  – потокосцепление взаимной индукции первого контура, создаваемое током во втором контуре.

При протекании токов в обоих контурах справедливы равенства

$$\psi_1 = \psi_{1L} \pm \psi_{12}, \quad \psi_2 = \psi_{2L} \pm \psi_{21},$$

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  – полные потокосцепления первого и второго контуров. В этих соотношениях ставят знак "+", если поток взаимной индукции совпадает по направлению с потоком самоиндукции (согласное включение контуров) и знак "-" в противоположном случае (встречное включение).

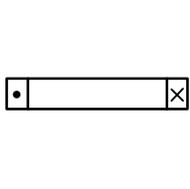
На основе закона сохранения энергии можно показать, что взаимные индуктивности  $M_{21}$  и  $M_{12}$  равны друг другу:  $M_{21} = M_{12} = M$ .

Параметр  $M$  определяет магнитную связь контуров (катушек). Для характеристики степени магнитной связи двух катушек вводят также безразмерный параметр, который носит название **коэффициента связи**:

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Важным свойством коэффициента связи является его ограниченность  $0 \leq k \leq 1$ , при этом нулевое значение коэффициента означает отсутствие магнитной связи между катушками.

Взаимная индуктивность характеризует связь между двумя контурами за счет общего магнитного поля и зависит от взаимного расположения контуров, в частности от расстояния между ними и от их взаимной ориентации. Очевидно, что при увеличении расстояния между катушками и при сохранении их взаимной ориентации величина взаимной индуктивности будет уменьшаться, так как интенсивность магнитного поля, создаваемого контуром с током, уменьшается с увеличением расстояния от него. Зависимость взаимной индуктивности от ориентации контуров наглядно иллюстрируется на рисунке.



Несмотря на близость двух контуров, линии индукции магнитного поля, создаваемого током в первом контуре, не пересекают плоскость второго, следовательно, взаимная индуктивность контуров равна нулю.

На величину взаимной индуктивности оказывает влияние также магнитная проницаемость объектов, находящихся в непосредственной близости от контуров. В частности, ферромагнитные тела могут существенно исказить картину магнитного поля, что в свою очередь может изменить (как увеличить, так и уменьшить) взаимную индуктивность контуров.

Учет магнитной связи катушек при расчете электрической цепи – это учет явления взаимной индукции. При этом напряжения на зажимах катушек определяются соотношениями:

$$u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d}{dt}(\psi_{1L} \pm \psi_{12}) = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}.$$

По аналогии, для приложенного ко второму контуру напряжения, имеем

$$u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\psi_{2L} \pm \psi_{21}) = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}.$$

При изменении токов по синусоидальному закону связь между токами и напряжениями определяется аналогичными соотношениями для комплексных величин

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \cdot I_1 \pm j\omega M \cdot I_2,$$

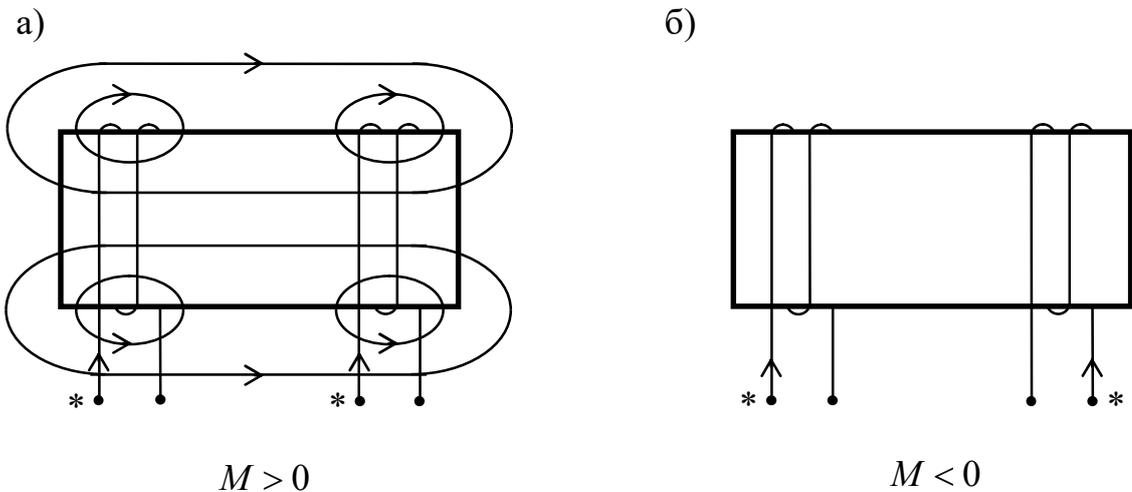
$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \cdot I_2 \pm j\omega M \cdot I_1.$$

Взаимная индуктивность  $M$  может быть как **положительной** величиной так и **отрицательной**. Принято считать, что  $M > 0$ , если при протекании

в катушках токов, направления которых условно приняты за положительные, потоки взаимной индукции совпадают по направлению с потоками самоиндукции, и  $M < 0$  в противном случае. Очевидно, что знак взаимной индуктивности зависит как от взаимного расположения контуров, так и от тех направлений токов, которые приняты за положительные.

Часто один из выводов каждой из индуктивно связанных катушек маркируют специальными значками, например, звездочками (\*). Положительными направлениями токов в таком случае считаются направления токов от звездочки.

Рассмотрим две индуктивно связанные катушки, размещенные на едином сердечнике.

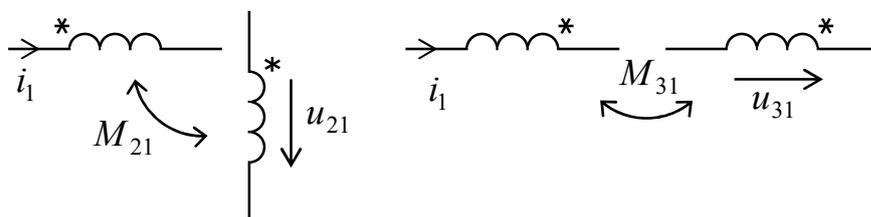


Промаркируем катушки произвольным образом, так как это показано на рисунке. Учитывая направление намотки и маркировку катушек, можем определить знак взаимной индуктивности. Если токи в катушках направить от звездочек, то их потоки совпадут по направлению, а это значит, что взаимная индуктивность положительна.

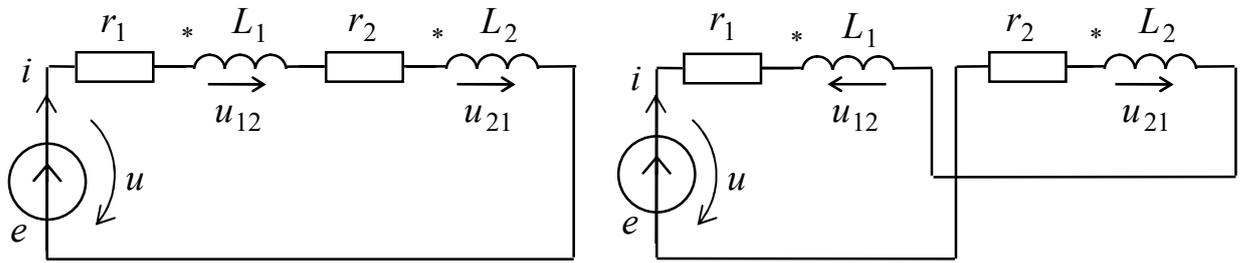
При другом варианте маркировки (рис.) получаем  $M < 0$ . Таким образом, маркировка катушек и знак  $M$  на схеме однозначно определяют взаимные направления реальных магнитных потоков катушек, присутствующих в электрической цепи.

Явление взаимной индукции необходимо учитывать при составлении уравнений по второму закону Кирхгофа.

Можно сформулировать следующее правило для определения направления напряжения взаимной индукции: если в одной катушке положительное направление тока принято от звездочки, то положительное направление напряжения взаимной индукции на другой катушке также будет направлено от звездочки, и наоборот.



В качестве примера рассмотрим две схемы последовательного соединения этих катушек с маркировкой, указанной на рисунке.



В зависимости от соединения катушек – согласного или встречного, будет изменяться вид уравнений, описывающих режим работы схемы.

Рассмотрим случай согласного включения катушек. Запишем уравнение второго закона Кирхгофа в комплексной форме

$$\dot{U} = r_1 I + j\omega L_1 I + \dot{U}_{12} + r_2 I + j\omega L_2 I + \dot{U}_{21}.$$

Падение напряжения на первой катушке складывается из двух составляющих – падения напряжения  $j\omega L_1 \dot{I}$ , совпадающего с направлением тока, и падения напряжения взаимной индукции от тока, протекающего во второй катушке  $\dot{U}_{12} = j\omega M \cdot \dot{I}$ . Для определения направления напряжения взаимной индукции обратим внимание на то, что ток  $\dot{I}$  протекает по второй катушке от звездочки. Это означает, что соответствующее падение напряжения  $\dot{U}_{12}$ , приложенное к первой катушке, также будет направлено от звездочки. Это направление совпадает с направлением обхода контура, и поэтому соответствующее слагаемое войдет в уравнение со знаком "+". Проведя аналогичный анализ для падения напряжения на второй катушке, получим, уравнение

$$\dot{U} = r_1 I + j\omega L_1 I + j\omega M \cdot I + r_2 I + j\omega L_2 I + j\omega M \cdot I,$$

или

$$\dot{U} = (r_1 + r_2) \cdot I + j\omega \cdot (L_1 + L_2 + 2M) \cdot I.$$

Величина  $L'_3 = L_1 + L_2 + 2M$  представляет собой эквивалентную индуктивность всей цепи. Эквивалентная индуктивность — величина сугубо положительная, что следует из выражения для энергии магнитного поля

$$W_M = \frac{1}{2} L'_3 i^2 > 0.$$

Переход от согласного включения к встречному может быть осуществлен путем пересоединения концов обмотки одной из катушек. Уравнение второго закона Кирхгофа для этого случая отличается от предыдущего тем, что падения напряжения взаимной индукции входят в уравнение со знаком "-". Действительно, ток во второй катушке теперь направлен к звездочке. Это означает, что соответствующее падение напряжения на первой катушке  $\dot{U}_{12} = j\omega M \cdot \dot{I}$  будет

направлено к звездочке и не совпадает с направлением обхода контура. Точно также падение напряжения  $\dot{U}_{21} = j\omega M \cdot \dot{I}$  направлено в сторону, противоположную направлению обхода контура и, следовательно, войдет в уравнение со знаком "-"

$$\dot{U} = r_1 I + j\omega L_1 I - j\omega M \cdot I + r_2 I + j\omega L_2 I - j\omega M \cdot I,$$

или

$$\dot{U} = (r_1 + r_2) \cdot I + j\omega \cdot (L_1 + L_2 - 2M) \cdot I.$$

**Эквивалентная индуктивность** системы из двух катушек в этом случае равна

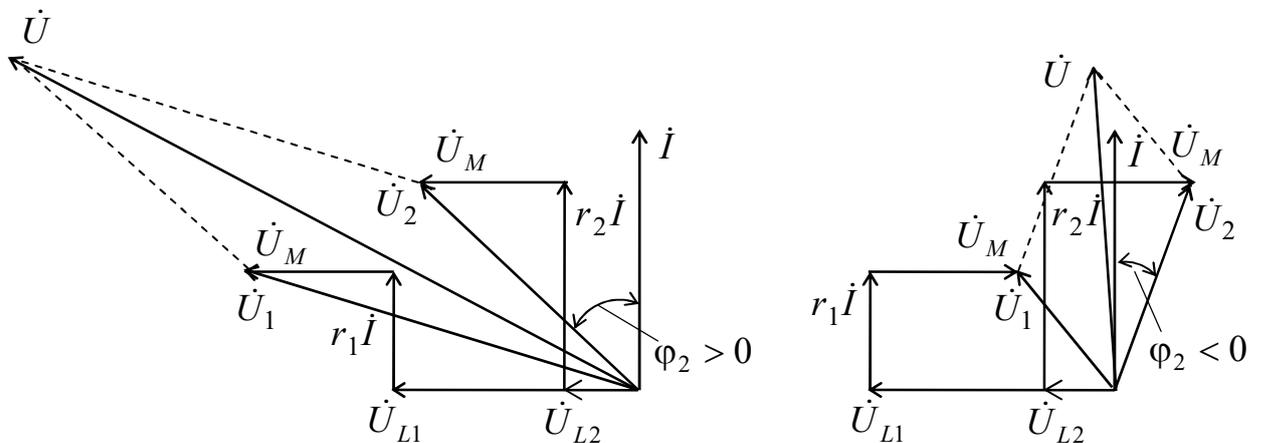
$$L''_{\text{э}} = L_1 + L_2 - 2M.$$

Как и в предыдущем случае, эта индуктивность больше нуля.

Изменение величины эквивалентной индуктивности при пересоединении концов обмотки одной из катушек может быть использовано на практике для определения величины взаимной индуктивности:

$$M = \frac{L'_3 - L''_3}{4}$$

На рисунке 9.3 показаны векторные диаграммы для согласного и встречного включений катушек при одинаковом значении тока в обоих случаях.



Построение векторной диаграммы для первого случая начнем с вектора тока  $\dot{I}$ . Затем отложим вектора падений напряжения на резисторе  $r_1$ , катушке индуктивности  $L_1$ , резисторе  $r_2$ , катушке индуктивности  $L_2$ . Вектора напряжений взаимной индукции  $\omega M \dot{I}$  будут совпадать по направлению с векторами напряжений самоиндукции  $\omega L_1 \dot{I}$  и  $\omega L_2 \dot{I}$  в соответствии с правилом, сформулированным выше. Сложив вектора, соответствующие всем падениям напряжений, получим вектор входного напряжения, равный э.д.с.  $\dot{E}$ , действующей в контуре.

Векторная диаграмма для второго случая строится в той же последователь-

ности, однако теперь вектора напряжений взаимной индукции  $\omega M \dot{I}$  противоположны по направлению векторам напряжения самоиндукции  $\omega L_1 \dot{I}_1$  и  $\omega L_2 \dot{I}_2$ .

В качестве примера более сложной задачи рассмотрим формирование уравнений Кирхгофа для цепи, изображенной на рисунке. Взаимное влияние катушек друг на друга учитывается маркировкой и величинами взаимных индуктивностей  $M_{12}$ ,  $M_{23}$ ,  $M_{13}$ .

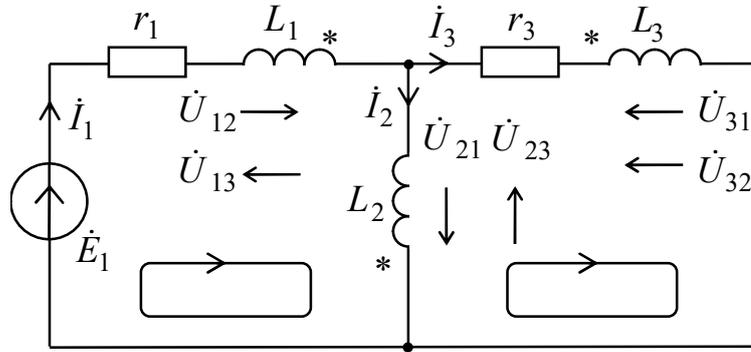


Рис. 9.4

Условно положительные направления токов в ветвях показаны стрелками. В соответствии с первым законом Кирхгофа можем сформировать одно уравнение

$$-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0.$$

Для формирования уравнений второго закона Кирхгофа выберем независимые контура и зададим направление их обхода так, как это показано на рисунке. Рассматривая контур с источником э.д.с., заметим, что падение напряжения на катушке индуктивности  $L_1$  складывается из трех составляющих: падения напряжения  $j\omega L_1 \dot{I}_1$  от тока, протекающего в этой катушке и напряжений взаимной индукции  $\dot{U}_{12} = j\omega M_{12} \dot{I}_2$  и  $\dot{U}_{13} = j\omega M_{13} \dot{I}_3$ . Слагаемое  $\dot{U}_{12}$  войдет в уравнение со знаком "+", так как ток  $\dot{I}_2$  направлен в катушке индуктивности к звездочке, следовательно, напряжение взаимной индукции будет также направлено к звездочке и совпадает с направлением обхода контура. Во втором случае ток  $\dot{I}_3$  направлен в катушке от звездочки, он создает падение напряжения  $\dot{U}_{13}$  на катушке от звездочки, направленное противоположно обходу контура, и соответствующее падение напряжения войдет в уравнение со знаком "-".

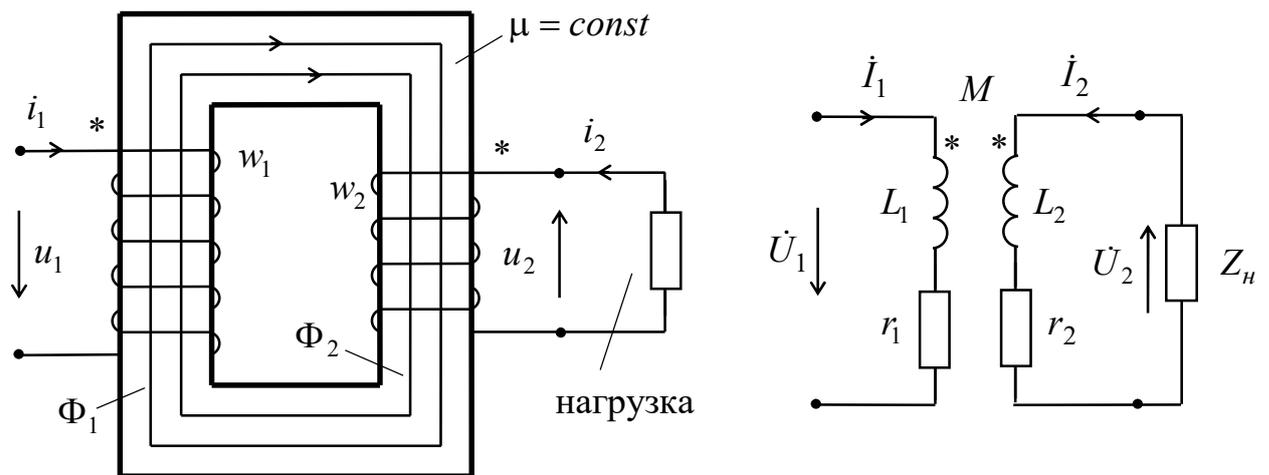
Проведя аналогичные рассуждения для определения знаков напряжений на катушках  $L_2$  и  $L_3$ , запишем уравнения второго закона Кирхгофа:

$$\dot{E}_1 = r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M_{12} \dot{I}_2 - j\omega M_{13} \dot{I}_3 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M_{21} \dot{I}_1 - j\omega M_{23} \dot{I}_3,$$

$$0 = r_3 \dot{I}_3 + j\omega L_3 \dot{I}_3 - j\omega M_{31} \dot{I}_1 - j\omega M_{32} \dot{I}_2 - j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M_{21} \dot{I}_1 + j\omega M_{23} \dot{I}_3.$$

## Трансформатор с линейными характеристиками

Одним из важнейших элементов электрической цепи в котором используется магнитная связь между контурами, является трансформатор. Трансформаторы могут иметь различное назначение, однако чаще всего они применяются для преобразования величины переменного напряжения или тока. Такое преобразование необходимо, например, в том случае, когда напряжение источника энергии отличается от напряжения, на которое рассчитан приемник энергии. Трансформаторы состоят из двух или нескольких индуктивно связанных обмоток. Здесь мы ограничимся рассмотрением простейшего двухобмоточного трансформатора (рис). В реальном трансформаторе магнитная проницаемость  $\mu$  материала сердечника зависит от напряженности магнитного поля. Приняв допущение  $\mu = \text{const}$ , будем в дальнейшем рассматривать так называемый **линейный трансформатор**, процессы в котором описываются линейными уравнениями. Полученные при таком подходе результаты в первом приближении могут быть использованы и для описания режимов в трансформаторе с ненасыщенным ферромагнитным сердечником.



Промаркируем обмотки и выберем условно положительные направления токов так, как это показано на рисунке. Обмотку трансформатора, к которой приложено напряжение источника  $U_1$ , будем называть **первичной**, а обмотку, к которой присоединена нагрузка, – **вторичной**.

Магнитные потоки, создаваемые токами первичной и вторичной обмоток, при выбранном направлении токов совпадают по направлению. Это означает, что взаимная индуктивность  $M$  между обмотками положительна.

Обозначим активные сопротивления обмоток  $r_1$  и  $r_2$ , а их индуктивности  $L_1$  и  $L_2$ . Пусть вторичная обмотка нагружена на сопротивление  $Z_H = r_H + jx_H$ . Вводя обозначения

$$r_{22} = r_2 + r_H, \quad x_{22} = \omega L_2 + x_H,$$

запишем уравнения второго закона Кирхгофа для первичного и вторичного контуров

$$\begin{aligned} r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \cdot \dot{I}_2 &= \dot{U}_1, \\ r_{22} \dot{I}_2 + jx_{22} \dot{I}_2 + j\omega M \cdot \dot{I}_1 &= 0. \end{aligned}$$

Исключим из второго уравнения ток  $\dot{I}_2$

$$\dot{I}_2 = -\frac{j\omega M \cdot \dot{I}_1}{r_{22} \dot{I}_2 + jx_{22} \dot{I}_2}.$$

Теперь из первого уравнения получим:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\left( r_1 + \frac{\omega^2 M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2} \cdot r_{22} \right) + j \cdot \left( \omega L_1 - \frac{\omega^2 M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2} \cdot x_{22} \right)} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{\text{вх}}}.$$

Величина  $Z_{\text{вх}} = r_{\text{вх}} + jx_{\text{вх}}$  представляет собой **входное сопротивление нагруженного трансформатора**. Сопротивления  $r_{\text{вх}}$  и  $x_{\text{вх}}$ , равные соответственно

$$r_{\text{вх}} = \frac{\omega^2 M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2} \cdot r_{22} \quad \text{и} \quad x_{\text{вх}} = -\frac{\omega^2 M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2} \cdot x_{22},$$

зависят от параметров нагрузки и называются **вносимыми активным и реактивным сопротивлениями**. Вносимое активное сопротивление всегда больше нуля. В нем поглощается энергия, передаваемая из первичной цепи во вторичную. Вносимое реактивное сопротивление имеет знак, противоположный  $x_{22}$ .

### Идеальный трансформатор

**Идеальным** называют трансформатор для которого при любых сопротивлениях нагрузки отношение первичного и вторичного комплексных напряжений и отношение вторичного и первичного комплексных токов постоянны и равны действительному числу

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = -c, \quad (*)$$

где параметр  $c$  носит название **коэффициента трансформации**.

Запишем уравнения трансформатора в предельном идеализированном случае

$$r_1 = r_2 = 0 \quad \text{и} \quad k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1,$$

то есть отсутствуют активные сопротивления обмоток и нет магнитных потоков рассеивания.

При сделанных допущениях можно записать:

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \dot{I}_1 + j\omega M \cdot \dot{I}_2, \quad (1)$$

$$j\omega M \cdot \dot{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = 0. \quad (2)$$

Выразим  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$  через  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$ :

Выразив из второго уравнения ток  $\dot{I}_1$ ,

$$\dot{I}_1 = -\frac{\dot{U}_2}{j\omega M} - \frac{L_2}{M} \dot{I}_2 \quad (3)$$

подставим полученное выражение в первое уравнение:

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \left( -\frac{\dot{U}_2}{j\omega M} - \frac{L_2}{M} \dot{I}_2 \right) + j\omega M \cdot \dot{I}_2 = -\frac{L_1}{M} \dot{U}_2 + j\omega M \cdot \left( 1 - \frac{L_1 L_2}{M^2} \right) \cdot \dot{I}_2$$

Легко заметить, что при  $k = 1$  выполняется равенство  $1 - L_1 L_2 / M^2 = 0$ , и тогда, обозначая  $c = L_1 / M$  и, значит,  $c = M / L_2$ , запишем:

$$\dot{U}_1 = -c \cdot \dot{U}_2,$$

$$\text{из (3): } \dot{I}_1 = +\frac{1}{j\omega M} \cdot \frac{\dot{U}_1}{c} - \frac{L_2}{M} \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{j\omega L_1} - \frac{1}{c} \dot{I}_2.$$

Практически индуктивность  $L_1$  достаточно велика, и в выражении для тока  $\dot{I}_1$  слагаемым  $\dot{U}_1 / j\omega L_1$  можно пренебречь в сравнении с  $\dot{I}_2 / c$ . В этом случае приходим к соотношениям вида:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= -c \cdot \dot{U}_2, \\ \dot{I}_1 &= -\frac{1}{c} \dot{I}_2 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = -c.$$

Полученные соотношения определяют так называемый идеальный трансформатор. Заметим, что полученный результат **справедлив при любой нагрузке**.

Для коэффициента трансформации можно записать:

$$c = \frac{L_1}{M}; \quad L_1 = \frac{\Psi_1}{i_1} = \frac{w_1 \Phi_1}{i_1}; \quad M = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{w_2 \Phi_1}{i_1},$$

следовательно,

$$c = \frac{U_1}{U_2} = \frac{w_1}{w_2}.$$

то есть, для идеального трансформатора коэффициент трансформации может быть найден как отношение числа витков первичной и вторичной обмоток.

При  $c < 1$  трансформатор называют **повышающим** ( $U_2 = U_1 / c$ ;  $U_2 > U_1$ ),

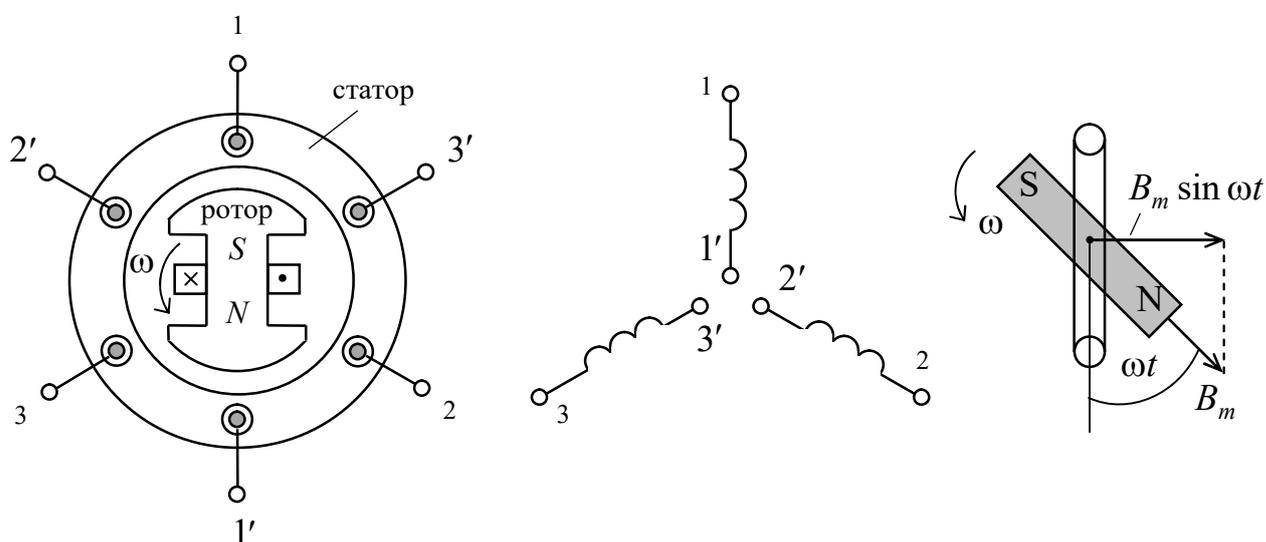
При  $c > 1$  – **понижающим** ( $U_2 < U_1$ ).

## ЛЕКЦИЯ 13

### ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

Трехфазной цепью будем называть совокупность электрических цепей, в которых действуют три синусоидально изменяющихся во времени э.д.с. **одной** частоты, сдвинутые друг относительно друга по фазе и создаваемые **общим** источником энергии. Отдельные цепи такой системы называют фазами.

Рассмотрим устройство трехфазного генератора переменного тока, поперечное сечение которого схематично изображено на рисунке. На статоре генератора с пространственным сдвигом друг относительно друга на  $120^\circ$  расположены три обмотки 11', 22' и 33', заложенные в диаметрально противоположные пазы статора.



При вращении ротора (постоянный электромагнит, вращаемый двигателем) в обмотках статора возникают синусоидальные э.д.с., принимающие максимальные значения при пересечении осью полюсов (NS) ротора проводников статорных обмоток. Для каждой из трех обмоток это происходит в свой, определенный момент времени, поэтому наводимые в обмотках э.д.с. не совпадают по фазе. На рисунке максимальная по величине э.д.с. возникает в обмотке 11'. Через промежуток времени  $T/3$  ( $T$  – период оборота ротора) максимальная по величине э.д.с. возникает в обмотке 22', а еще через  $T/3$  – в обмотке 33'.

Совокупность э.д.с., напряжений и токов в трехфазной цепи будем называть **трехфазной системой** э.д.с., напряжений и токов. **Симметричной** будем считать трехфазную систему э.д.с. (напряжений, токов), в которой э.д.с. (напряжение, ток) в отдельных фазах имеют **одинаковую** амплитуду и отстают друг от друга **на один и тот же угол**.

В трехфазной цепи могут действовать симметричные системы э.д.с. прямой, обратной и нулевой последовательности.

### Симметричная система прямой последовательности

Угол сдвига между фазами э.д.с. составляет  $2\pi/3$ , то есть справедливы соотношения

$$e_1 = E_m \sin \omega t,$$

$$e_2 = E_m \sin(\omega t - 2\pi/3),$$

$$e_3 = E_m \sin(\omega t - 4\pi/3).$$

Для действующих значений э.д.с. в комплексной форме можно записать:

$$\dot{E}_1 = E_1 e^{j\psi}; \quad \dot{E}_2 = \dot{E}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \quad \dot{E}_3 = \dot{E}_1 e^{-j\frac{4\pi}{3}}.$$



### Симметричная система обратной последовательности

Угол сдвига между фазами э.д.с. составляет  $4\pi/3$  (учитывая периодичность синусоидальной функции, этому углу эквивалентен угол  $-2\pi/3$ ), следовательно

$$e_1 = E_m \sin \omega t,$$

$$e_2 = E_m \sin(\omega t + 2\pi/3),$$

$$e_3 = E_m \sin(\omega t + 4\pi/3).$$

Действующие значения э.д.с. в комплексной форме в этом случае принимают значения

$$\dot{E}_1 = E_1 e^{j\psi}; \quad \dot{E}_2 = \dot{E}_1 e^{j\frac{2\pi}{3}}; \quad \dot{E}_3 = \dot{E}_1 e^{j\frac{4\pi}{3}}.$$

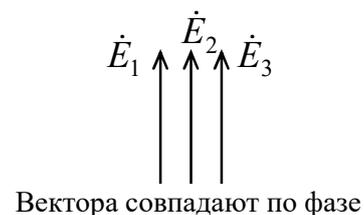


### Симметричная система нулевой последовательности

Угол сдвига между фазами э.д.с. равен нулю, следовательно

$$e_1 = e_2 = e_3 = E_m \sin \omega t;$$

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = \dot{E}_3 = E_1.$$



Важное свойство систем **прямой** и **обратной** последовательностей состоит в том, что сумма э.д.с. во всех фазах равна нулю

$$\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3 = 0.$$

Все сказанное выше относится и к симметричным системам напряжений и токов. В частности, для систем **прямой** и **обратной** последовательностей справедливы соотношения:

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 0, \quad \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0.$$

**Несимметричными** системами будем называть трехфазные системы, не удовлетворяющие указанным выше требованиям симметрии.

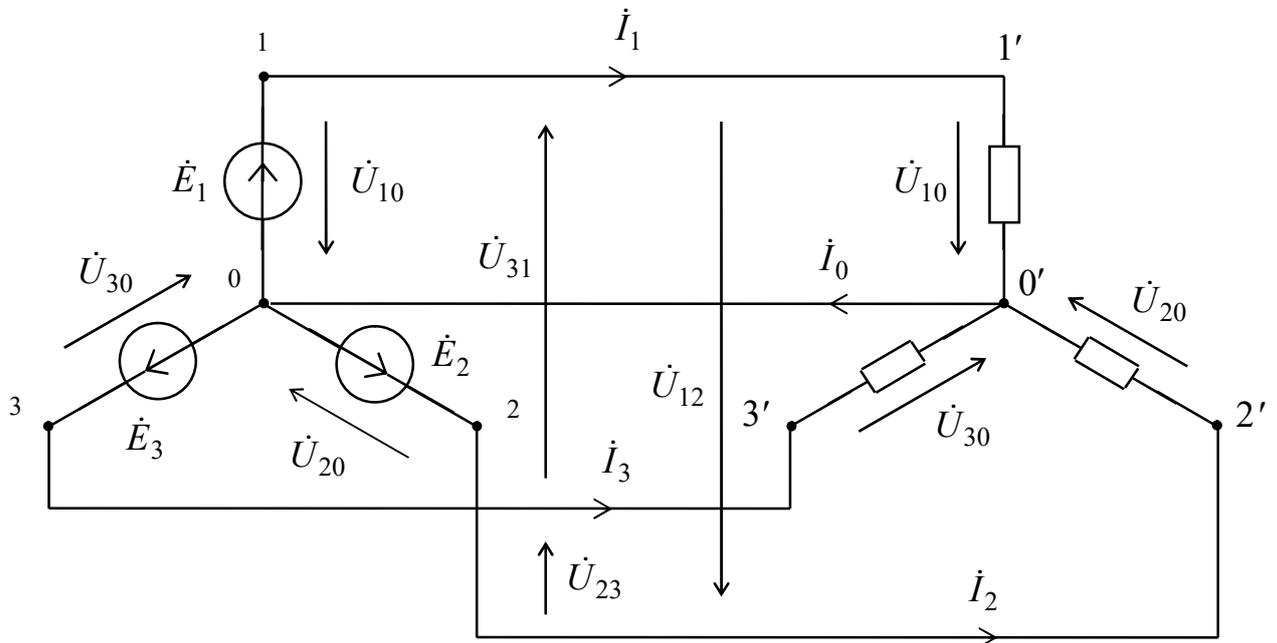
### Способы соединения источников и приемников в трехфазных цепях.

Основными видами соединений являются соединение звездой и соединение треугольником.

#### Соединение звездой

При соединении звездой все отдельные ветви источника или приемника соединяются в одной точке, называемой нейтральной (нулевой). Эти ветви принято называть фазами, а действующие в них токи и напряжения фазными.

В случае, если нулевые точки приемника и источника связаны отдельным проводом, то такой провод называется нулевым.

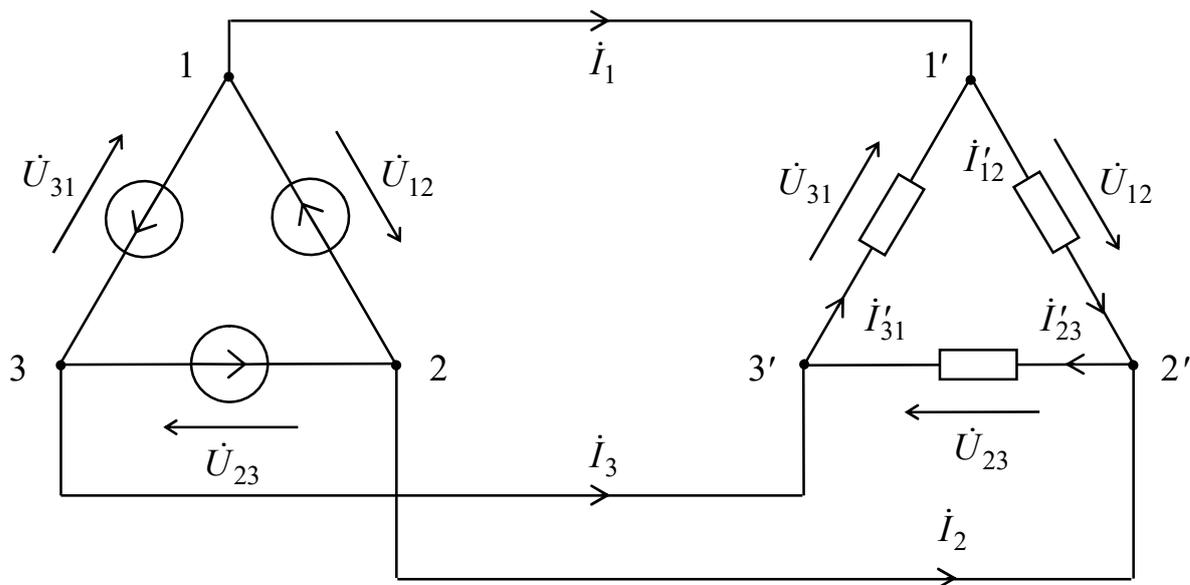


Различают фазные токи:  $I_1, I_2, I_3$  и фазные напряжения  $U_{10}, U_{20}, U_{30}$ . Линейными напряжениями являются переменные  $U_{12}, U_{23}, U_{31}$ .

Токи фаз в данном случае одновременно являются линейными токами.

#### Соединение треугольником

При соединении треугольником отдельные ветви источника или приемника образуют замкнутый контур (треугольник). Каждая сторона треугольника при таком соединении представляет собой отдельную фазу.



Между собой трехфазные источник и приемник соединяются так называемыми **линейными** проводами. Соответственно токи в этих проводах и напряжения между ними называются **линейными**.

Схемы соединения обмоток источника питания и цепей приемника не зависят друг от друга. В одной и той же цепи могут присутствовать источники питания и приемники с разными схемами соединения.

Переменные  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$  в данном случае являются линейными токами, отличаясь при этом от фазных токов.

Линейные напряжения  $\dot{U}_{12}, \dot{U}_{23}, \dot{U}_{31}$  совпадают с фазными напряжениями.

Связи между фазными и линейными токами и напряжениями зависят от типа соединения трехфазной цепи.

При соединении **звездой** линейные токи одновременно являются фазными, а линейные напряжения представляют собой разность фазных напряжений:

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_{10} - \dot{U}_{20}, \dot{U}_{23} = \dot{U}_{20} - \dot{U}_{30}, \dot{U}_{31} = \dot{U}_{30} - \dot{U}_{10}.$$

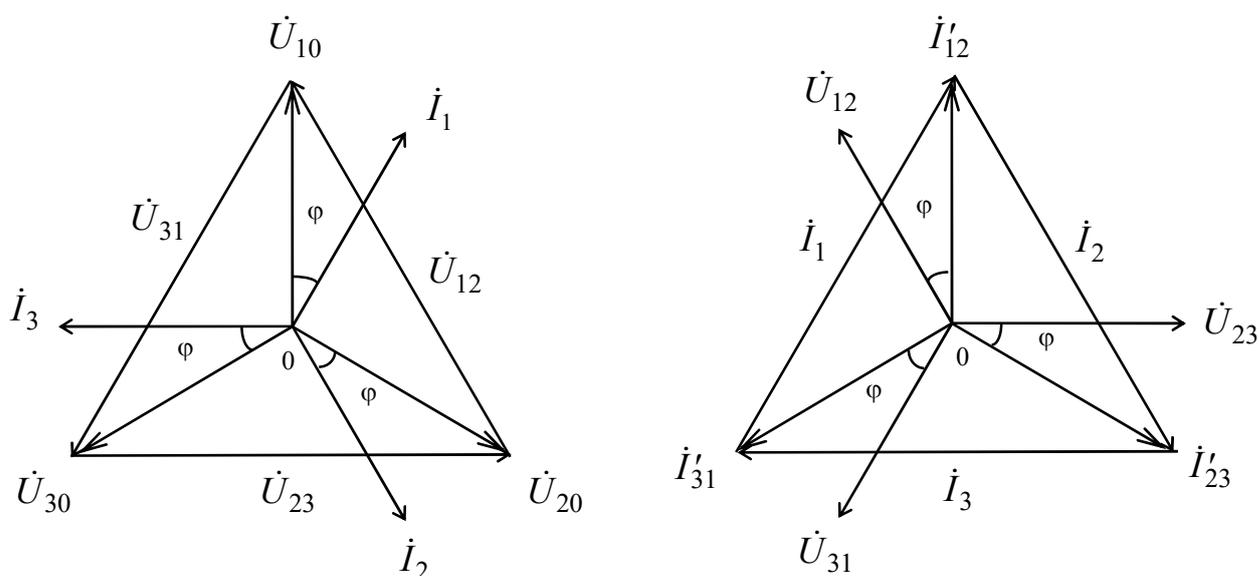
При соединении **треугольником** фазные напряжения одновременно являются линейными, а линейные токи определяются как разность фазных токов:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{12} - \dot{I}_{31}, \dot{I}_2 = \dot{I}_{23} - \dot{I}_{12}, \dot{I}_3 = \dot{I}_{31} - \dot{I}_{23}.$$

### Симметричный режим работы трехфазной цепи

**Симметричным режимом** трехфазной цепи называют режим, при котором трехфазные системы токов и напряжений в этой цепи одновременно симметричны. Для реализации такого режима необходимо, чтобы сопротивления всех фаз были одинаковы. На рисунке приведены векторные диаграммы, характерные для цепи при симметричном режиме в случае соединения

нагрузки звездой и треугольником.



Из приведенных диаграмм следуют простые соотношения, связывающие фазные и линейные токи и напряжения в симметричных режимах.

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} U_{\text{ф}} \quad I_{\text{л}} = I_{\text{ф}} \quad - \text{ при соединении звездой,}$$

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3} I_{\text{ф}} \quad U_{\text{л}} = U_{\text{ф}} \quad - \text{ при соединении треугольником.}$$

Активная мощность в случае симметричной трехфазной нагрузки определяется в виде:

$$P = 3 U_{\text{ф}} I_{\text{ф}} \cos \varphi \quad \text{или} \quad P = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi,$$

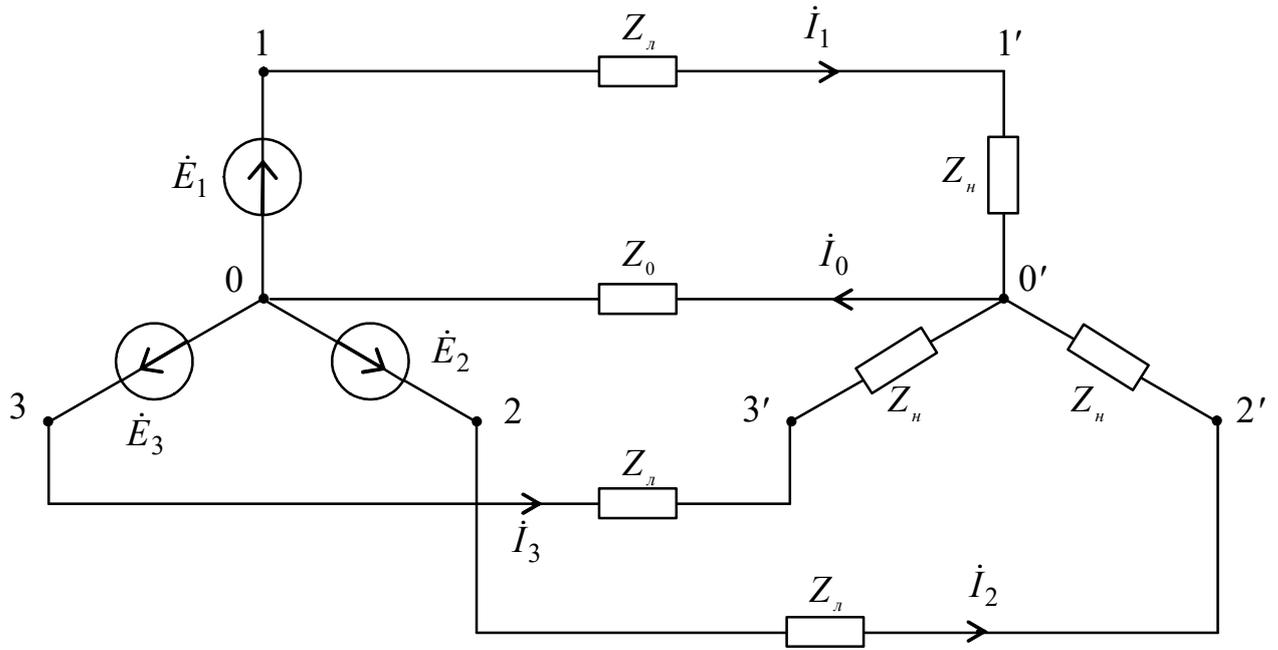
где  $\varphi$  – угол сдвига между фазным напряжением и фазным током.

Аналогичный вид имеют выражения для реактивной и полной мощностей:

$$Q = 3 U_{\text{ф}} I_{\text{ф}} \sin \varphi = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi; \quad S = 3 U_{\text{ф}} I_{\text{ф}} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}}.$$

В симметричной трехфазной цепи токи и напряжения различных фаз одинаковы по амплитуде и отличаются только начальными фазами. Поэтому информации об этих параметрах в одной из фаз достаточно, чтобы определить состояние всей трехфазной цепи. Следовательно, расчет трехфазной цепи может быть выполнен по схеме замещения, составленной для одной фазы. Рассмотрим на конкретных примерах вопросы формирования и расчета таких схем.

**Пример 1.** В симметричной трехфазной цепи действует симметричная трехфазная система э.д.с. прямой (либо обратной) последовательности. Источник питания и нагрузка соединены звездой. Определить токи во всех фазах.



Для определения тока первой фазы целесообразно составить уравнение по второму закону Кирхгофа для контура, содержащего цепи первой фазы и нулевой провод

$$\dot{E}_1 = \dot{I}_1(Z_{Л} + Z_{Н}) + \dot{I}_0 Z_0.$$

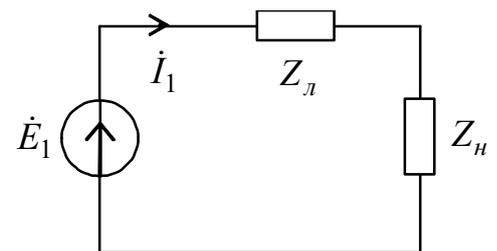
Ток нулевого провода в соответствии с первым законом Кирхгофа равен сумме фазных токов

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3.$$

Как отмечалось ранее, сумма трех фазных токов, а значит и ток нулевого провода в симметричных режимах прямой и обратной последовательностей равны нулю, поэтому

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_{Л} + Z_{Н}}.$$

На основе полученного выражения построим схему замещения, позволяющую рассчитать фазный ток



Для прямой последовательности токи второй и третьей фаз могут быть найдены через ток первой фазы

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}}, \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_1 e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \dot{I}_1 e^{j\frac{2\pi}{3}}.$$

**Пример 2.** Рассчитать цепь, рассмотренную в предыдущей задаче, при наличии в ней трехфазной системы э.д.с. нулевой последовательности.

Для системы нулевой последовательности характерно условие

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = \dot{E}_3, \text{ следовательно } \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{I}_3.$$

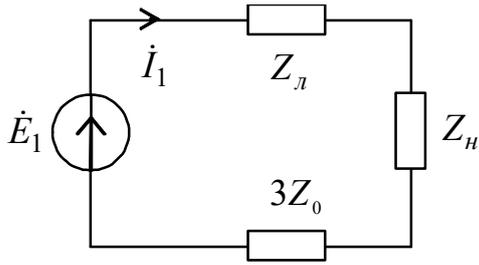
В соответствии с первым законом Кирхгофа можем записать

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 3\dot{I}_1.$$

Согласно второму закону Кирхгофа, справедливо равенство

$$\dot{E}_1 = \dot{I}_1(Z_{Л1} + Z_{Н1}) + \dot{I}_0 Z_0, \quad \text{или иначе} \quad \dot{E}_1 = \dot{I}_1(Z_{Л1} + Z_{Н1}) + 3\dot{I}_1 Z_0.$$

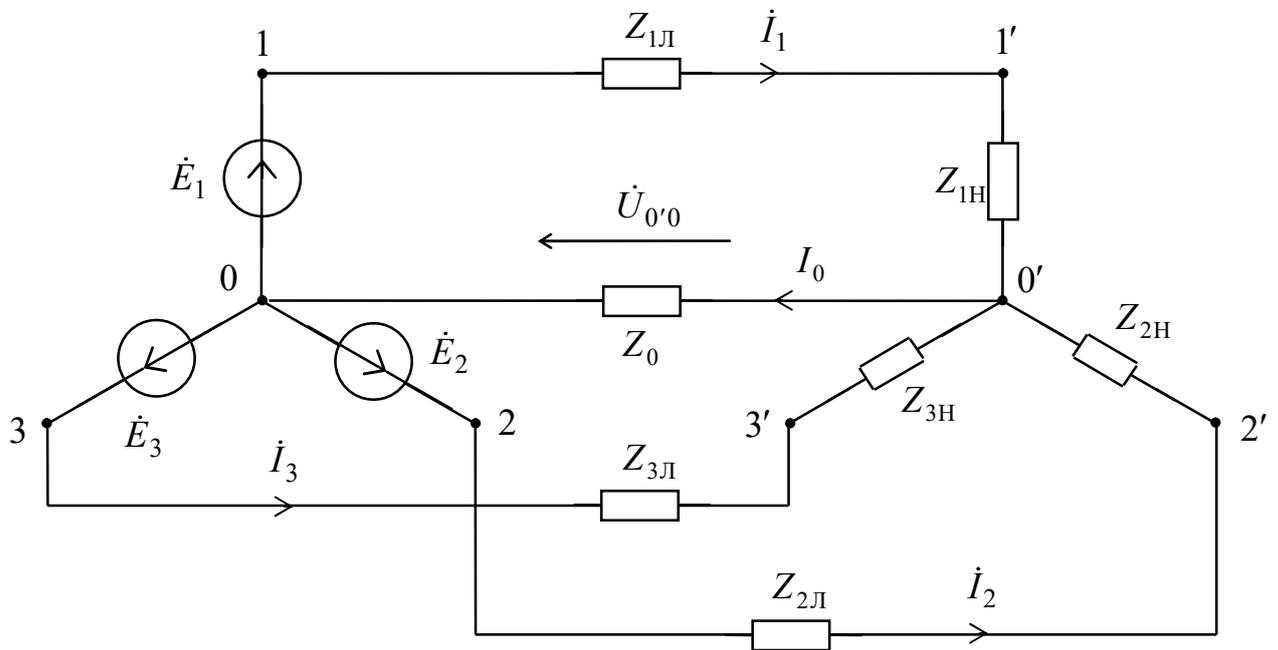
Полученное выражение позволяет сформировать схему замещения симметричной трехфазной цепи в случае действия в ней системы э.д.с. нулевой последовательности и определить фазный ток



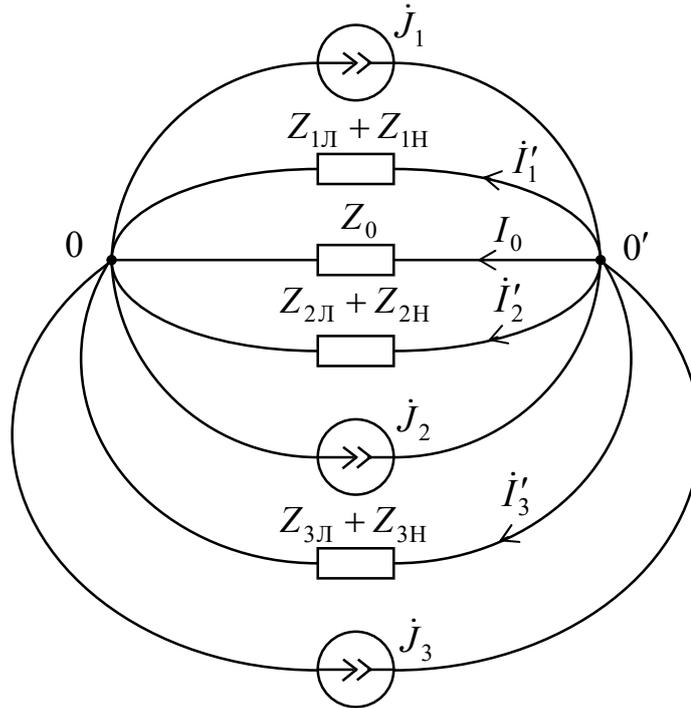
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_{Л1} + 3Z_0 + Z_{Н1}}.$$

### Расчет несимметричной трехфазной цепи

Расчет несимметричной трехфазной цепи может быть проведен на основе уравнений, записанных по законам Кирхгофа.



В данном случае этот подход является не рациональным (система четырех уравнений). При решении воспользуемся преобразованием источников э.д.с. в источники тока.



Здесь:

$$j_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_{1Л} + Z_{1Н}}; \quad j_2 = \frac{\dot{E}_2}{Z_{2Л} + Z_{2Н}}; \quad j_3 = \frac{\dot{E}_3}{Z_{3Л} + Z_{3Н}}.$$

По первому закону Кирхгофа

$$\dot{I}_0 + \dot{I}'_1 + \dot{I}'_2 + \dot{I}'_3 = \dot{J}_1 + \dot{J}_2 + \dot{J}_3. \quad (*)$$

Выразим токи ветвей через напряжение между узлами  $\dot{U}_{0'0}$ :

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_{0'0}}{Z_0}; \quad \dot{I}'_1 = \frac{\dot{U}_{0'0}}{Z_{1Л} + Z_{1Н}}; \quad \dot{I}'_2 = \frac{\dot{U}_{0'0}}{Z_{2Л} + Z_{2Н}}; \quad \dot{I}'_3 = \frac{\dot{U}_{0'0}}{Z_{3Л} + Z_{3Н}}.$$

Подставив токи ветвей в соотношение (\*), получим для напряжения  $\dot{U}_{0'0}$ :

$$\dot{U}_{0'0} = \frac{\dot{J}_1 + \dot{J}_2 + \dot{J}_3}{\frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_{1Л} + Z_{1Н}} + \frac{1}{Z_{2Л} + Z_{2Н}} + \frac{1}{Z_{3Л} + Z_{3Н}}}.$$

Токи в отдельных фазах будут равны

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{0'0}}{Z_{1Л} + Z_{1Н}}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2 - \dot{U}_{0'0}}{Z_{2Л} + Z_{2Н}}, \quad \dot{I}_3 = \frac{\dot{E}_3 - \dot{U}_{0'0}}{Z_{3Л} + Z_{3Н}},$$

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3.$$

Если в трехфазной цепи присутствуют соединения источников и (или) элементов нагрузки треугольником, то его следует преобразовать к соединению звездой, после чего воспользоваться описанной выше методикой расчета.

Отметим достоинства **трехфазной системы**.

1. При передаче мощности от трехфазного генератора в нагрузку требуется меньшее число проводов, чем в несвязанных однофазных системах.
2. В трехфазной цепи имеется **два уровня** напряжений –  $U_{\text{л}}$ ,  $U_{\text{ф}}$ .
3. Трехфазная система токов позволяет создать **вращающееся в пространстве магнитное поле**, то есть появляется возможность создания электродвигателей.

## ЛЕКЦИЯ 14

### ВРАЩАЮЩЕЕСЯ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Одной из основных причин, благодаря которой трехфазные цепи широко используются на практике, является возможность получения так называемого вращающегося магнитного поля. На эффекте вращающегося магнитного поля основан принцип действия электрических двигателей.

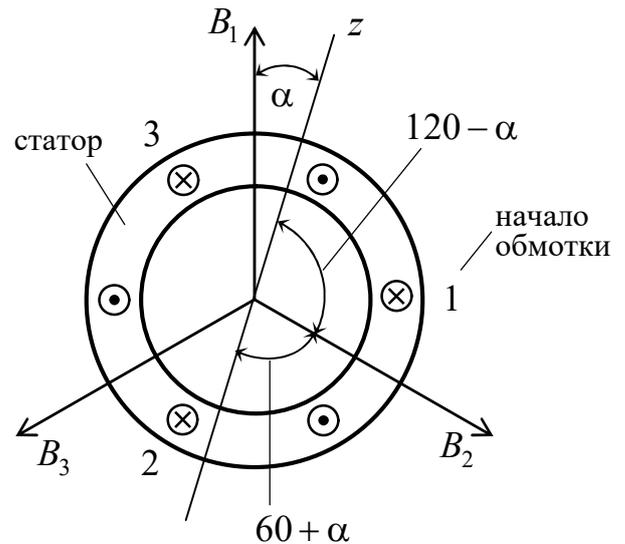
Статорные обмотки трехфазного электрического двигателя расположены также, как и обмотки рассмотренного ранее трехфазного генератора, (под углом 120 градусов друг относительно друга).

Питание фаз обмотки осуществляется от соответствующих фаз трехфазного источника, следовательно и токи фаз двигателя будут сдвинуты на угол 120 градусов

$$i_1 = I_m \sin \omega t,$$

$$i_2 = I_m \sin(\omega t - 120^\circ),$$

$$i_3 = I_m \sin(\omega t - 240^\circ).$$



Отметим, что условно положительные направления токов выбираем от начала каждой обмотки к ее концу.

Ток в каждой обмотке создает в пространстве магнитное поле, пропорциональное этому току, поэтому можно записать:

$$B_1 = B_m \sin \omega t,$$

$$B_2 = B_m \sin(\omega t - 120^\circ),$$

$$B_3 = B_m \sin(\omega t - 240^\circ).$$

Направление векторов магнитной индукции для каждой обмотки указано на рисунке.

Представим некоторую ось  $z$ , составляющую угол  $\alpha$  с осью первой катушки. Проекция вектора  $B_1$  на ось  $z$  равна

$$B_{1z} = B_1 \cos \alpha.$$

Для второй и третьей катушек проекции на ось  $z$  примут вид:

$$B_{2z} = B_2 \cos(120^\circ - \alpha); \quad B_{3z} = B_3 \cos(240^\circ - \alpha).$$

(тригонометрия:  $-\cos(60^\circ + \alpha) = +\cos(120^\circ - \alpha)$ ).

Для суммарного магнитного поля трех катушек получим:

$$B_z = B_{1z} + B_{2z} + B_{3z} = B_m \sin \omega t \cdot \cos \alpha + \\ + B_m \sin(\omega t - 120^\circ) \cdot \cos(120^\circ - \alpha) + \\ + B_m \sin(\omega t - 240^\circ) \cdot \cos(240^\circ - \alpha)$$

Используем тождество:

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)].$$

Тогда

$$B_z = \frac{B_m}{2} \cdot \left[ \begin{aligned} &\sin(\omega t + \alpha) + \sin(\omega t - \alpha) + \\ &+ \sin(\omega t - 120^\circ + 120^\circ - \alpha) + \sin(\omega t - 120^\circ - 120^\circ + \alpha) + \\ &+ \sin(\omega t - 240^\circ + 240^\circ - \alpha) + \sin(\omega t - 240^\circ - 240^\circ + \alpha) \end{aligned} \right] = \\ = \frac{B_m}{2} \cdot [3 \sin(\omega t - \alpha) + \sin(\omega t + \alpha) + \sin(\omega t + \alpha - 240^\circ) + \sin(\omega t + \alpha - 480^\circ)].$$

С учетом равенства  $\sin(\omega t + \alpha - 480^\circ) = \sin(\omega t + \alpha - 120^\circ)$  три последних слагаемых в выражении для  $B_z$  равны нулю, поэтому получаем:

$$B_z = \frac{3}{2} B_m \sin(\omega t - \alpha).$$

Пусть ось  $z$  вращается с угловой частотой  $\omega$  по часовой стрелке. Тогда угол  $\alpha$  будет изменяться по закону  $\alpha = \alpha_0 + \omega t$ , где  $\alpha_0$  характеризует положение оси  $z$  при  $t = 0$ . Тогда

$B_z = \frac{3}{2} B_m \sin(\omega t - \alpha_0 - \omega t)$  и при  $\alpha_0 = -\pi / 2$  окончательно получим:

$$B_z = \frac{3}{2} B_m.$$

Таким образом, вектор магнитной индукции  $\overline{B}_z$  имеет амплитуду  $3B_m / 2$  и вращается в пространстве с угловой скоростью  $\omega$  по часовой стрелке.

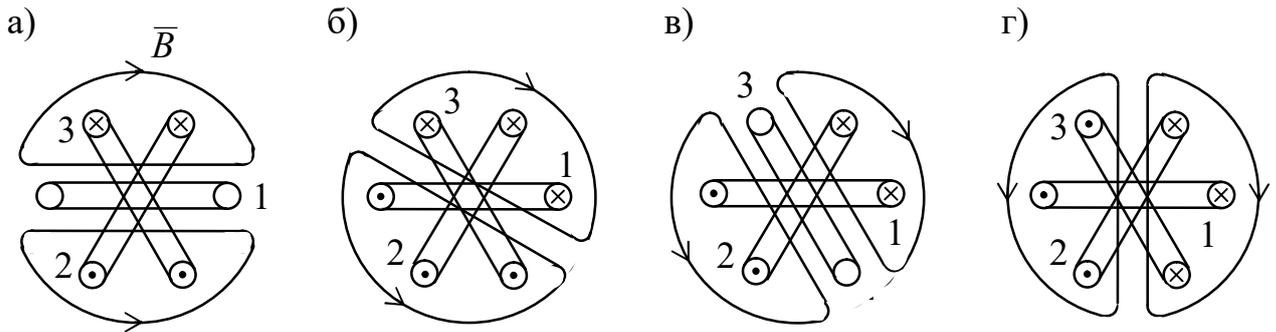
Для получения магнитного поля, вращающегося в противоположном направлении, достаточно поменять между собой одноименные выводы двух любых фаз обмоток статора.

Наглядное представление о вращающемся магнитном поле можно получить, рассмотрев последовательность изменения токов в катушках статора.

Токи в катушках изменяются по гармоническому закону

$$i_1 = I_m \sin \omega t, \quad i_2 = I_m \sin(\omega t - 120^\circ), \quad i_3 = I_m \sin(\omega t - 240^\circ).$$

Заметим, что при  $\omega t = 0$  мгновенные значения токов  $i_1 = 0$ ,  $i_2 < 0$ ,  $i_3 > 0$ . Направления токов и схематичная картина результирующего магнитного поля показаны на рис.а.



Для  $\omega t = 30^\circ$  имеем  $i_1 > 0$ ,  $i_2 < 0$ ,  $i_3 > 0$ , что иллюстрирует рис.б.

Изображенные на рис.в и рис.г линии магнитной индукции относятся к случаям  $\omega t = 60^\circ$  и  $\omega t = 90^\circ$ .

Сопоставление схематичных картин магнитного поля, приведенных для последовательных моментов времени ( $T/4$ ), показывает, что результирующее магнитное поле системы трехфазных катушек вращается в пространстве. Продолжив анализ, можно убедиться, что в течение одного периода  $T$  изменения переменного тока магнитное поле совершает один полный оборот в пространстве.

При наличии во вращающемся магнитном поле проводников с токами, находящихся на роторе, на него действует вращающий момент, обеспечивающий работу электродвигателя.

### Вращающееся магнитное поле двухфазного тока

Рассмотрим две катушки, расположенные в пространстве под углом  $90^\circ$  градусов, питаемые системой токов с фазовым сдвигом  $90^\circ$ , то есть

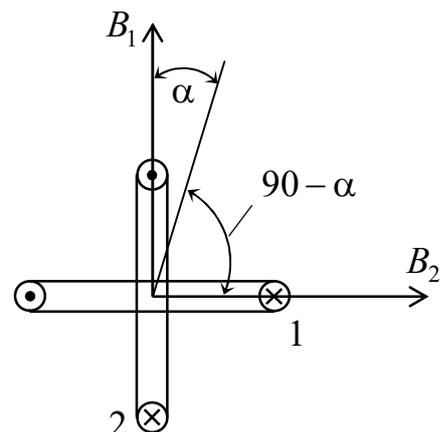
$$i_1 = I_m \sin \omega t;$$

$$i_2 = I_m \sin(\omega t - 90^\circ).$$

Индукция магнитного поля каждой катушки изменяется во времени по такому же закону

$$B_1 = B_m \sin \omega t;$$

$$B_2 = B_m \sin(\omega t - 90^\circ).$$



Представим некоторую ось  $z$ , составляющую угол  $\alpha$  с осью первой катушки.

Проекции векторов  $B_1$  и  $B_2$  на эту ось равны:

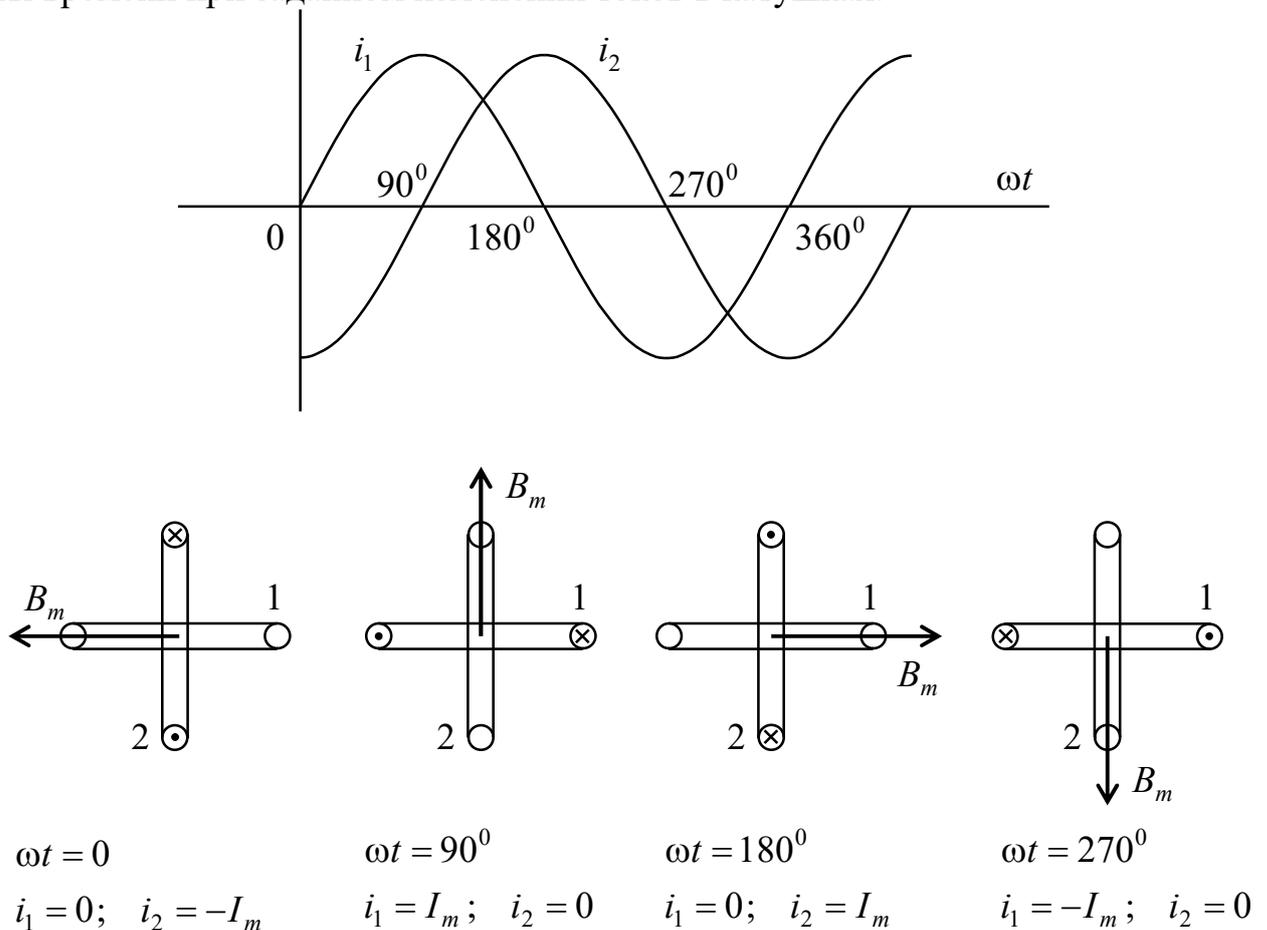
$$\begin{aligned} B_z &= B_{1z} + B_{2z} = \\ &= B_1 \cos \alpha + B_2 \cos(90^\circ - \alpha) = B_m \sin \omega t \cdot \cos \alpha + B_m \sin(\omega t - 90^\circ) \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = \\ &= \frac{B_m}{2} [\sin(\omega t + \alpha) + \sin(\omega t - \alpha) + \sin(\omega t - \alpha) + \sin(\omega t - 180^\circ + \alpha)] = B_m \sin(\omega t - \alpha). \end{aligned}$$

Имеем

$$B = B_m \sin(\omega t - \alpha).$$

Пусть ось  $z$  вращается с угловой частотой  $\omega$  по часовой стрелке. Тогда угол  $\alpha$  будет изменяться по закону  $\alpha = \alpha_0 + \omega t$ , где  $\alpha_0$  характеризует положение оси  $z$  при  $t = 0$ . Тогда при  $\alpha_0 = -\pi/2$  окончательно получим:  $B = B_m$ , то есть магнитное поле с амплитудой  $B_m$  **вращается** по часовой стрелке с угловой скоростью  $\omega$ .

Рассмотрим положение вектора  $B$  в пространстве в различные моменты времени при заданном изменении токов в катушках:

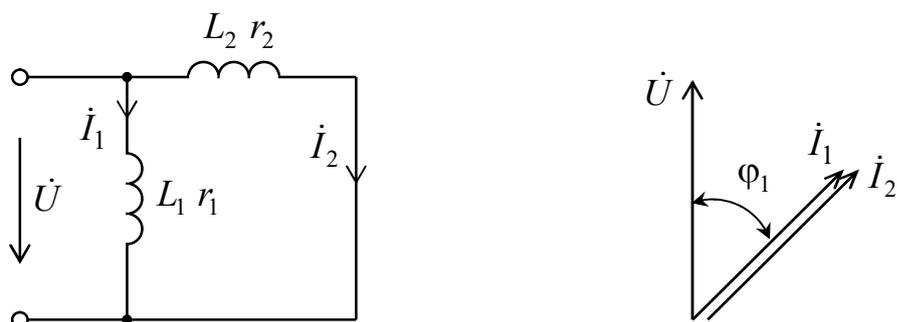


Наглядно видно, что вектор с амплитудой  $B_m$  вращается по часовой стрелке с угловой скоростью  $\omega$ , совершая за период  $T$  полный оборот в пространстве.

Эффект вращения магнитного поля, создаваемого двумя катушками, используется в двигателях малой мощности.

При наличии двух катушек, расположенных в пространстве под углом  $90^\circ$  и системы синусоидальных токов в них с фазовым сдвигом  $90^\circ$ , получаем указанный эффект.

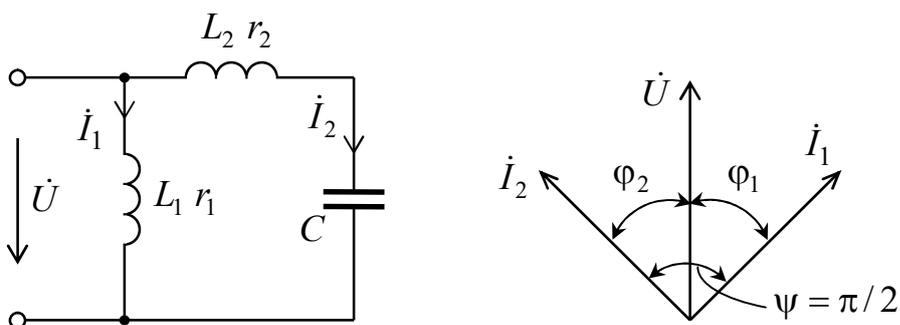
Катушки ( $L_1 = L_2$ ,  $r_1 = r_2$ ) подключаются параллельно общему источнику э.д.с.



Как видно из векторной диаграммы, требуемого сдвига фаз для токов в катушках нет, угол сдвига между токами и входным напряжением равен

$$\varphi_1 = \arctg \frac{\omega L_1}{r_1}.$$

Добавим во вторую ветвь схемы конденсатор.



При определенном значении емкости  $C$  конденсатора ток  $I_2$  будет опережать ток  $I_1$  на угол  $90$  градусов, создавая необходимое условие для получения вращающегося магнитного поля.

Можно записать:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega L_2 - 1/\omega C}{r_2}.$$

Для выбора величины емкости  $C$  конденсатора из последнего выражения определим

$$r_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = \omega L_2 - 1/\omega C; \quad \frac{1}{\omega C} = \omega L_2 - r_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2; \quad C = \frac{1}{\omega \cdot (\omega L_2 - r_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2)}. (*)$$

Согласно векторной диаграмме

$$|\varphi_1| + |\varphi_2| = \frac{\pi}{2}; \quad \rightarrow \quad |\varphi_2| = \frac{\pi}{2} - |\varphi_1|. \quad (**)$$

Поскольку  $\varphi_1 > 0$ ;  $\varphi_2 < 0$  из соотношения (\*\*\*) получаем:

$$-\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1; \quad \rightarrow \quad \varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$$

Тогда с учетом

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \left( \varphi_1 - \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1} = -\frac{1}{\omega L_1 / r_1} = -\frac{r_1}{\omega L_1}$$

для емкости  $C$  согласно (\*) справедливо равенство:

$$C = \frac{1}{\omega \cdot \left( \omega L_2 + \frac{r_1 \cdot r_2}{\omega L_1} \right)}.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Список литературы

1. К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В.Коровкин, В.Л. Чечурин, Теоретические основы электротехники. Т.1, Т.2 - Л.: СПб.; Питер, 2003
2. А.Б. Новгородцев, Теоретические основы электротехники. 30 лекций по теории цепей, СПб.; Питер, 2006
3. М.А. Шакиров ред., Практикум по ТОЭ, ч.1, учебн. пособие, изд. Политехнического университета, 2017