Министерство образования и науки Российской Федерации
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

А.В. Сурина

АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2025

УДК 519.2

ББК 22.171.1

Сурина А.В. **Анализ временных рядов**: Учеб. пособие. СПб., 2025 – 90 с.,

Учебное пособие предназначено для студентов магистратуры очной и заочной форм обучения, изучающих дисциплину «Статистические методы в инновационной деятельности».

Пособие содержит три раздела и приложения. Первый раздел - «Предварительный анализ временных рядов», второй раздел – «Моделирование временных рядов», третий раздел – «Анализ качества моделей». В этих разделах представлен теоретический материал. В приложениях приведены основные термины, используемые в анализе временных рядов, графическое представление динамики, кривые роста.

Оглавление

Введение 5

Часть 1. Предварительный анализ временных рядов 8

1.1. Понятие временного ряда. Классификация временных рядов 8

1.2. Составляющие временного ряда 10

1.3. Проблема сопоставимости динамических рядов и пути ее решения 13

1.4. Выявление аномальных значений уровней временного ряда 14

1.5. Предварительный анализ временных рядов 23

1.5.1. Тест на стационарность ВР 23

1.5.2. Автокорреляционная функция 27

1.5.3. Проверка наличия (отсутствия) тренда 29

1.5.4. Расчет показателей, характеризующих тенденцию динамики 34

1.5.5. Сглаживание временных рядов 37

1.5.6. Выделение периодических составляющих временного ряда 42

1.5.7. Фрактальный анализ временных рядов 46

Часть 2. Моделирование временных рядов 48

2.1. Построение моделей тренда 48

2.1.1. Прямолинейный тренд и его свойства 48

2.1.2. Квадратичный тренд 50

2.1.3. Экспоненциальный тренд 52

2.1.4. Степенной тренд 53

2.1.5. Гиперболический тренд 54

2.1.6. Логистический тренд и его свойства 55

2.2. Распознавание типа тренда и оценка его параметров 56

2.2.1. Графический анализ для распознавания типа тенденции 56

2.2.2. Оценка параметров линейного, параболического и гиперболического трендов с помощью метода наименьших квадратов 58

2.2.3. Логарифмирование как инструмент оценки параметров экспоненциального, логарифмического и логистического уравнений тренда 61

2.3. Моделирование периодических колебаний временного ряда 63

2.3.1. Основные методы выявления периодической компоненты 63

2.3.2. Моделирование сезонных колебаний с помощью фиктивных переменных 65

2.3.3. Методы измерения сезонных колебаний. Индексы сезонности 67

2.3.4. Аналитическое выравнивание сезонных колебаний с помощью ряда Фурье 69

2.4. Моделирование случайной составляющей временного ряда 71

2.4.1. Модели авторегрессии 72

2.4.2. Модели скользящего среднего 72

2.4.3. Модели авторегрессии-скользящего среднего 72

2.4.4. Авторегрессионная модель с условной гетероскедастичностью 72

Часть 3. Анализ качества моделей 76

3.1. Анализ качества моделей 76

3.2. Диагностика остатков 79

3.3. Измерение устойчивости уровней ряда 80
3.3.1. Устойчивость временного ряда 80
3.3.2. Измерение устойчивости тенденции динамики 82
Литература 85
Приложения 86
Приложение 1. Основные термины 86
Приложение 2. Графическое представление динамики 88
Приложение 3. Кривые роста 90

Введение

Управление инновационной деятельностью приобретает особое значение в современной жизни, оказывая значительное влияние на стратегию, цели и методы управления компаниями.

Инновационная деятельность создает не только будущий облик компании, определяя ее технологии, выпускаемые продукты, потенциальных потребителей, окружение, но и основу ее конкурентной позиции, а значит и стратегической позиции на рынке. В глобальной конкуренции решающую роль играют именно инновации.

В контексте социально-экономических исследований, неотъемлемой частью которых является инновационная деятельность, цель статистики – организовывать, обрабатывать и анализировать данные так, чтобы исследователь мог получить ответ на поставленный вопрос.

Статистика инновационной деятельности призвана отразить процессы создания, внедрения и распространения на рынке новых либо усовершенствованных продуктов, услуг, технологических процессов.

Разнообразные содержательные задачи экономического анализа требуют использования статистических данных, характеризующих исследуемые процессы и развернутые во времени в форме временных рядов. При этом нередко одни и те же временные ряды используются для решения различных по постановке и содержанию проблем.

Временные ряды или как их еще называют динамические ряды один из самых распространенных объектов изучения статистического анализа. В них наиболее концентрировано отражаются изменения экономических объектов и явлений, позволяя достаточно тщательно проанализировать особенности развития. Фактически временной ряд - это множество последовательных наблюдений, упорядоченных во времени по уровням состояния либо изменения некоторого изучаемого явления.

Статистика является ключевым моментом процесса, в соответствии с которым выполняются научные исследования, по этой причине изучение методов статистического анализа является очень важным в образовании каждого инноватора.

Цель создания данного учебного пособия - помочь студентам, обучающимся по направлению «Инноватика», получить более широкое представление о методах анализа, математического моделирования и прогнозирования явлений и процессов, изменяющихся во времени.

В пособии подробно излагаются методы распознавания типа тренда, алгоритмы расчета линейных и нелинейных трендов; описываются различные модели сезонных колебаний, гармонические модели, модели авторегрессии, скользящего среднего, авторегрессии-скользящего среднего; рассматриваются различные меры качества построенных моделей и методы диагностики остатков.

Таким образом, в учебном пособии содержатся необходимые теоретические сведения для освоения дисциплины «Статистические методы в инновационной деятельности», существенной частью которой является анализ временных рядов. Оно способствует формированию у студентов практических навыков по построению и анализу стохастических моделей различных явлений и процессов, изменяющихся во времени.

Структура учебного пособия соответствует двум основным функциям, выполняемым статистикой как наукой: описательной и объясняющей.

Учебное пособие состоит из трех разделов: предварительный анализ временных рядов, моделирование временных рядов, анализ качества моделей временных рядов и диагностика остатков.

Существуют специализированные пакеты статистической обработки данных, которыми можно воспользоваться, однако эффективность их применения будет гораздо выше, если пользователь понимает суть используемых в них технологий, алгоритмов, критериев, показателей. И здесь на помощь приходит статистика, понимаемая как совокупность знаний, связанных с изучением количественной стороны массовых общественных явлений.

Анализ временных рядов рассматривается как отдельный метод математической статистики, инструментарий прикладного статистического анализа.

Часть 1. Предварительный анализ временных рядов

1.1. Понятие временного ряда. Классификация временных рядов

Понятие временного ряда. Ряд наблюдений $y(t_1)$, $y(t_2),\dots,y(t_N)$ анализируемой случайной величины $\xi(t)$, произведенных в последовательные моменты времени $t_1, t_2,\dots, t_N$, называется *временным рядом* (ВР), то есть ВР - упорядоченная во времени последовательность наблюдений, характеризующих уровни развития изучаемого явления в последовательные моменты или периоды времени. В литературе также встречаются термины *динамический ряд*, *ряд динамики*, в англоязычной литературе принят термин *time series*.

Величины $y(t_i)$ называются *уровнями ряда*, а t_i – временными метками (моменты или интервалы наблюдения). Целью исследования ВР является выявление закономерностей в изменении уровней ряда и построении его модели в целях прогнозирования и исследования взаимосвязей между явлениями.

Определение временного ряда опирается на понятие случайной величины $\xi(t)$, зависящей от параметра t, интерпретируемого как время, т.е. по существу речь идет об однопараметрическом семействе случайных величин $\left\{\xi(t)\right\}$.

Принципиальные отличия временного ряда от последовательности наблюдений y_1, $y_2,\dots$, y_N, образующих случайную выборку состоят в следующем:

- в общем случае, исходя из своей природы, члены временного ряда не являются статистически независимыми, в отличие от элементов случайной выборки;
- члены временного ряда не являются одинаково распределенными.

Классификация ВР. Существуют различные признаки классификации временных рядов.

По количеству анализируемых характеристик процесса или явления ВР подразделяются на *одномерные* (фиксированная числовая характеристика) и *многомерные* (рассматриваются несколько характеристик исследуемого процесса или явления). Одномерные ВР строятся по одному конкретному показателю, а многомерные ряды представляют собой систему взаимосвязанных параметров.

По времени ВР подразделяются на *моментные* и *интервальные*. Интервальный ряд – последовательность, в которой уровень явления относят к результату, накопленному или вновь произведенному за определенный интервал времени. Моментный ряд – последовательность, в которой уровень ряда характеризует изучаемое явление в конкретный момент времени. При работе с моментными данными необходимо помнить, что сложение показателей такого ряда динамики невозможно, поскольку может появиться проблема двойного счета.

По расстоянию промежутку времени между последовательными наблюдениями ряды бывают *равномерные* (наблюдения через равные промежутки времени) и *неравномерные* (промежутки времени между наблюдениями изменяются).

В зависимости от формы представления уровней ряды могут быть абсолютными (например, объем произведенной продукции), относительными (индекс инфляции) или средними (величина среднедушевых доходов).

По постоянству во времени ВР бывают *стационарными* и *нестационарными*. Стационарный временной ряд это ряд данных, статистические свойства которого не зависят от времени. Такие ряды не содержат тенденцию или циклическую компоненту. Значение их каждого последующего уровня может быть определено как сумма среднего уровня ряда и случайной составляющей. Для нестационарного ряда характерно изменение статистических свойств во времени.

ВР называется строго стационарным (или стационарным в узком смысле), если совместное распределение вероятностей m наблюдений

$Y(t)=\{y(t_1), y(t_2),\ldots, y(t_m)\}$ такое же, как и для m наблюдений $y(t_{1+\tau}), y(t_{2+\tau}),\ldots, y(t_{m+\tau})$ при любых τ, $t_1, t_2,\ldots, t_N$ и m, т.е. если его свойства не меняются при изменении начала отсчета.

Ряд y(t) называется стационарным в широком смысле, если математическое ожидание, дисперсия ВР не зависят от t.

Каждый временной ряд может характеризоваться средним значением ряда, а также усредненным отклонением от него (фактическая оценка дисперсии ряда). Динамика временного ряда для некоторого экономического показателя, т.е. изменение этого показателя во времени может быть оценена абсолютным приростом, темпом роста и темпом прироста. Названные характеристики динамического ряда вычисляются при постоянной и переменной базе и называются, соответственно, базисными и цепными.

Начиная изучение особенностей модельного представления динамических рядов, будем исходить из того, что большинство объектов исследования, т.е. социально-экономических показателей формируется под воздействием огромного множества – главных и второстепенных, объективных и субъективных, прямых и косвенных тесно взаимосвязанных друг с другом и часто действующих в различных направлениях тенденций. Вследствие этого при анализе динамики временных рядов исходят из априорной гипотезы о наличии в них двух основных компонент: детерминированной (систематической, неслучайной) и стохастической (случайной), причем изменение последней оценивают с некоторой вероятностью.

1.2. Составляющие временного ряда

В общем случае модель временного ряда имеет следующий вид:

$$y_t = f\left(d_t, \varepsilon_t\right),$$

где d_t - систематическая (детерминированная) составляющая ряда;

ε_t - случайная составляющая ряда с нулевым математическим ожиданием $M[\varepsilon_t] = 0$ и дисперсией $D[\varepsilon_t] = \sigma^2$.

Детерминированная составляющая временного ряда зависит от типа факторов, под влиянием которых она формировалась. В общем случае такого рода составляющая бывает трех видов: тренд, сезонная компонента, циклическая компонента

Долговременная (вековая) составляющая, формирующая общую в длительной перспективе тенденцию в изменении анализируемого признака. Обычно эта тенденция описывается с помощью той или иной неслучайной функции, как правило, монотонной. Эту функцию называют функцией тренда или просто - трендом. Сезонная составляющая, формирующаяся под влиянием сезонных колебаний экономического показателя в течение заданного периода времени, обычно года. Циклическая (конъюнктурная) оставляющая, формирующая изменения анализируемого признака в связи с действием долговременных циклов экономической, демографической или астрофизической природы (волны Кондратьева, демографические «ямы» и пики, циклы солнечной активности и т.п.).

Естественно, что перечислить все факторы, которые прямо или косвенно оказывают влияние на интересующий нас показатель, мы не можем, хотя бы просто потому, что их бесконечно много. Именно с этим связывают возникновение стохастической (случайной) составляющей временного ряда, она является предметом серьезных исследований.

Очевидно, что в процессе формирования значений каждого временного ряда не обязательно участвуют одновременно факторы всех четырех типов. Однако во всех случаях предполагается непременное участие случайных (эволюционных) факторов, которые называют «белым шумом», в отличие от простых остаточных компонент исследуемого ряда.

Окончательные выводы о том, участвуют или нет факторы данного типа в формировании значений ВР, могут базироваться как на анализе содержательной сущности задачи, т.е. быть априорно экспертными по своей природе, так и на специальном статистическом анализе исследуемого временного ряда.

Как правило, наличие той или иной составляющей можно определить с помощью визуального анализа графика временного ряда.

Тренд, или тенденция $f(t)$, представляет собой устойчивую закономерность, наблюдаемую в течение длительного периода времени, например, возрастание или убывание исследуемой характеристики.

Сезонная компонента $\varphi(t)$ связана с наличием факторов, действующих с заранее известной периодичностью менее 1 года. Циклическая компонента $\psi(t)$ – неслучайная функция, описывающая длительные периоды (более 1 года). Случайная компонента $\varepsilon(t)$ – это составная часть временного ряда, оставшаяся после выделения систематических компонент. Эта компонента отражает воздействие многочисленных факторов случайного характера и может иметь разнообразную структуру.

Если временной ряд представляется в виде суммы соответствующих компонент, то полученная модель носит название аддитивной:

$$Y(t) = f(t) + \varphi(t) + \psi(t) + \varepsilon(t),\ t = t_1,...,t_N,$$

Аддитивная модель применяется тогда, когда анализируемый ряд динамики имеет примерно одинаковую амплитуду колебаний в течение рассматриваемого промежутка времени

В мультипликативной модели временного ряда компоненты представляют собой сомножители

$$Y(t) = f(t) \cdot \varphi(t) \cdot \psi(t) \cdot \varepsilon(t),\ t = t_1,...,t_N$$

Как правило, именно мультипликативная модель чаще всего применяется в экономических исследованиях. Данный вид модели применяется в том случае, если на протяжении анализируемого промежутка времени амплитуда колебаний постоянно возрастает или уменьшается

Смешанная модель представляет собой комбинированную модель временного ряда и записывается в следующем виде

$$Y(t) = f(t) \cdot \varphi(t) \cdot \psi(t) + \varepsilon(t),\ t = t_1,...,t_N$$

Не обязательно в процессе формирования значений уровней каждого ВР должны участвовать одновременно все компоненты.

Перед построением модели исходные данные проверяются на:

- сопоставимость: уровни ВР должны иметь одинаковые единицы измерения, шаг наблюдений, интервал времени, методику расчета, элементы, относящиеся к неизменной совокупности;
- однородность: отсутствие случайных выбросов, аномальных наблюдений, которые искажают результаты моделирования;
- устойчивость: наличие закономерности в изменении уровней ряда;
- достаточность: число наблюдений должно в 5–15 раз превосходить число параметров модели.

1.3. Проблема сопоставимости динамических рядов

При построении динамического ряда исследователю важно помнить, что все уровни должны отвечать требованию сопоставимости: в частности уровни должны относиться в одной территории, характеризовать один и тот же объект или явление, быть рассчитанными по единой методологии с использованием единых единиц измерения значений анализируемого показателя. Сопоставимость по кругу охватываемых явлений означает, что процедура сравнения проводится для равных по числу элементов совокупностей, однородных по своему экономическому содержанию и обладающих одинаковыми границами.

Сопоставимость по времени регистрации для интервальных рядов динамики предполагает равенство временных промежутков, за которые собираются и представляются данные.

Сопоставимость по территории предполагает исследование данных в рамках одних тех же территориальных границ в течение всего времени анализа.

Сопоставимость по методологии расчетов предполагает использование единого методологического аппарата для вычислений уровней динамического ряда в течение всего аналитического периода.

Приведение статистической информации к сопоставимому виду осуществляется при помощи особой вычислительной процедуры, которая носит название «смыкание временных рядов».

Под смыканием принято понимать процесс объединения нескольких динамических рядов, относящихся к разным периодам времени и с первоначально несопоставимыми уровнями, в один динамический ряд с новыми, уже сопоставимыми уровнями, расположенными в хронологической последовательности.

Для того, чтобы проведение данной процедуры стало возможным, необходимо обладать информацией о значении показателя, рассчитанного по старой и новой методологии, но относящейся к одному аналитическому периоду времени.

Принято выделять два основных способа смыкания временных рядов.

Первый способ является абсолютным. Он предполагает корректировку данных до изменений на коэффициент перехода.

Второй способ (относительный) предполагает получение временного ряда, выраженного в процентах или долях. Временной ряд пересчитывается, исходя из численного значения уровня, принятого за 100%. Применение данного способа предполагает пересчет значений как до, так и после «переломного момента».

Выбор способа смыкания обусловлен спецификой исходных временных рядов, а также целями исследовательской работы в рамках решения конкретной практической задачи

1.4. Выявление аномальных значений уровней временного ряда

Под аномальным уровнем ряда понимается конкретное численное значение уровня, которое не отвечает потенциальным возможностям исследуемой системы и, которое, оставаясь в качестве уровня ряда, оказывает существенное влияние на значения основных характеристик временного ряда, в том числе на соответствующую трендовую модель.

Причинами аномальных наблюдений могут быть ошибки технического порядка, или *ошибки первого рода*. К ним относятся ошибки, возникающие при передаче информации, а также ошибки, возникающие при агрегировании и дезагрегировании показателей.

Кроме того, причины аномальных уровней во временных рядах могут быть обусловлены факторами, имеющими объективный характер, но проявляющимися эпизодически или очень редко (*ошибки второго рода*). Такого рода ошибки устранению не подлежат.

Одним из способов выявления аномальных уровней временных рядов является *метод Ирвина,* основывающийся на вычислении параметра λ_t:

$$\lambda_t = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{\delta_y},$$

где δ_y - среднее квадратическое отклонение:

$$\delta_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}{n-1}}$$

где $\vec{y}$ - среднее значение уровня ряда:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n}$$

На следующем этапе расчетные значения λ_t сравниваются с табличными значениями критерия Ирвина λ_α. В случае, если $\lambda_t > \lambda_\alpha$, можно сделать вывод о том, что соответствующее значение уровня y_t является аномальным.

Значения критерия Ирвина для уровня значимости $\alpha = 0,05$ и $\alpha = 0,01$ приведены в таблице 1.

Таблица 1. Табличные значения критерия Ирвина

Число измерений n	Уровень значимости	
	α = 0,05	α = 0,01
2	2,8	3,7
3	2,2	2,9
10	1,5	2,0
20	1,3	1,8
30	1,2	1,7
50	1,1	1,6
100	1,0	1,5
400	0,9	1,3
1000	0,8	1,2

После выявления аномальных уровней ряда, обязательным условием является определение причин их возникновения, а затем устранение этих значений.

Критерий Романовского. Данный критерий применяется для исследования грубых погрешностей (промахов), если число наблюдений n меньше 20.

Конкурирующая гипотеза о наличии грубых погрешностей в подозрительных результатах подтверждается, если выполняется неравенство:

$$\beta_t = \frac{|y_t - \bar{y}|}{\delta_y}$$

При анализе грубых промахов значение β_t сравнивается с критерием β_q, выбранным по таблице 2.

Таблица 2. Табличные значения критерия Романовского

n	α = 0,01	α = 0,02	α = 0,05	α = 0,1
4	1,73	1,72	1,71	1,69
6	2,16	2,13	2,10	2,00
8	2,43	2,37	2,27	2,17
10	2,62	2,54	2,41	2,29
12	2,75	2,66	2,52	2,39
15	2,90	2,80	2,64	2,49
20	3,08	2,96	2,78	2,62

Если $\beta_t \geq \beta_q$, то значение уровня ряда считается промахом и отбрасывается.

Критерий вариационного размаха является одним из самых простых методов исключения грубой погрешности измерений (промаха). Для его использования определяют размах вариационного ряда упорядоченной совокупности наблюдений:

$$R = y_{\max} - y_{\min}$$

где y_{max} и y_{min} - максимальное и минимальное значение уровня ряда соответственно.

Если какой-либо член вариационного ряда, например y_k, резко отличается от всех других, то производят проверку, используя следующее неравенство:

$$\bar{y} - z \times R < y_k < \bar{y} + z \times R$$

где $\bar{y}$ – выборочное среднее арифметическое значение, вычисленное после исключения предполагаемого промаха;

z – критериальное значение.

В таблице 3 приведены критериальные значения для метода вариационного размаха

Таблица 3. Значения критерия вариационного размаха

n	5	6	7	8-9	10-11	12-15	16-22	23-25	25-63	64-150
z	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8

Нулевую гипотезу (об отсутствии грубой погрешности) принимают, если указанное неравенство выполняется. Если y_k не удовлетворяет неравенству, то этот результат исключают из вариационного ряда.

Критерий Диксона основан на предположении, что погрешности измерений подчиняются нормальному закону (предварительно необходимо построение гистограммы результатов наблюдений) и проверка гипотезы о принадлежности нормальному закону распределения. При использовании критерия вычисляют коэффициент Диксона (наблюдаемое значение критерия) для проверки наибольшего или наименьшего экстремального значения в зависимости от числа измерений. В таблице 4 приведены формулы для вычисления коэффициентов. Коэффициенты r_{10}, r_{11} применяют, когда имеется один выброс, а r_{21}, r_{22} - когда два выброса. Требуется первоначальное упорядочение результатов измерений (объема выборки) по возрастанию. Критерий применяется, когда выборка может содержать более одной грубой погрешности.

Таблица .4. Формулы коэффициентов Диксона

Число измерений *n* (объем выборки)	Коэффициент Диксона	Для наименьшего экстремального значения параметра	Для наибольшего экспериментального параметра
3-7	r_{10}	$\frac{y_2 - y_1}{y_n - y_1}$	$\frac{y_n - y_{n-1}}{y_n - y_1}$
8-10	r_{11}	$\frac{y_2 - y_1}{y_{n-1} - y_1}$	$\frac{y_n - y_{n-1}}{y_n - y_2}$
11-13	r_{21}	$\frac{y_3 - y_1}{y_{n-1} - y_1}$	$\frac{y_n - y_{n-2}}{y_n - y_2}$
14-25	r_{22}	$\frac{y_3 - y_1}{y_{n-2} - y_1}$	$\frac{y_n - y_{n-2}}{y_n - y_3}$

Вычисленные для выборки по формулам значения коэффициентов Диксона r сравнивают с табличным значением критерия Диксона r_q (табл. 5).

Нулевая гипотеза об отсутствии грубой погрешности выполняется, если выполняется неравенство $r < r_q$.

Если $r > r_q$, то результат признается грубой погрешностью и исключается из дальнейшей обработки.

Таблица 5. Табличные значения критерия Диксона

Статистика	Число измерений	r_q при уровне значимости q			
		0,1	0,05	0,02	0,01
r_{10}	3	0,886	0,941	0,976	0,988
	4	0,679	0,765	0,846	0,899
	5	0,557	0,642	0,729	0,780
	6	0,482	0,560	0,644	0,698
	7	0,434	0,507	0,586	0,637
r_{11}	8	0,479	0,554	0,631	0,683
	9	0,441	0,512	0,587	0,636
	10	0,409	0,477	0,551	0,597
r_{21}	11	0,517	0,576	0,538	0,679
	12	0,490	0,546	0,605	0,642
	13	0,467	0,521	0,578	0,615
r_{22}	14	0,462	0,546	0,602	0,641
	15	0,472	0,525	0,579	0,616
	16	0,452	0,507	0,559	0,595
	17	0,438	0,490	0,542	0,577
	18	0,424	0,475	0,527	0,561
	19	0,412	0,462	0,514	0,547
	20	0,401	0,450	0,502	0,535
	21	0,391	0,440	0,491	0,524
	22	0,382	0,430	0,481	0,514
	23	0,374	0,421	0,472	0,505
	24	0,367	0,413	0,464	0,497
	25	0,360	0,406	0,457	0,489

Критерии Райта и правило «трех сигм» являются одними из простейших методов для проверки результатов, подчиняющихся нормальному закону распределения.

Сущность правила трех сигм заключается в следующем: если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

На практике правило трех сигм применяют так: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но условие, указанное в приведенном правиле, выполняется, то есть основания предполагать, что изучаемая величина распределена нормально; в противном случае она не распределена нормально. С этой целью для выборки вычисляется центр распределения и оценка среднего квадратического отклонения результата наблюдений. Результат, который удовлетворяет следующему условию, считается имеющим грубую погрешность и удаляется, а ранее вычисленные характеристики распределения уточняются:

$$|y_k - \bar{y}| \geq 3\delta \ .$$

Правило «трех сигм» считается слишком жестким, поэтому рекомендуется назначать границу цензурирования (табл. 6) в зависимости от объема выборки (критерий Райта).

Таблица 6. Границы критерия Райта

Объём выборки	Условия критерий Райта
6<n<100	$\lvert y_k - \bar{y} \rvert \geq 4\delta$
100<n<1000	$\lvert y_k - \bar{y} \rvert \geq 4{,}5\delta$
1000<n<10000	$\lvert y_k - \bar{y} \rvert \geq 5\delta$

Может оказаться, что при новых значениях $\bar{y}$ и δ другие результаты попадут в категорию аномальных, поэтому дважды использовать критерии грубой погрешности не рекомендуется.

Критерий Смирнова рекомендуется использовать при объемах выборки $n \geq 25$ или при известных значениях генеральных среднего и среднего квадратического отклонения. Он устанавливает менее жесткие границы грубой погрешности. Для реализации этого критерия вычисляются действительные значения квантилей распределения (наблюдаемое значение критерия) по формуле:

$$\beta = \frac{\max|y_k - \bar{y}|}{\delta}$$

где y_k - сомнительное значение ряда (максимальное или минимальное)

Найденное значение β сравнивается с критериальным β_q, приведенным в таблице 7.

Таблица 7. Квантили распределения

Объем выборки n	Предельное значение β_q при уровне значимости q				
	0,100	0,050	0,0010	0,005	0,001
1	2	3	4	5	6
1	1,282	1,645	2,326	2,576	3,090
2	1,632	1,955	2,575	2,807	3,290
3	1,818	2,121	2,712	2,935	3,403
4	1,943	2,234	2,806	3,023	3,481
5	2,036	2,319	2,877	3,090	3,540
6	2,111	2,386	2,934	3,143	3,588
7	2,172	2,442	2,981	3,188	3,628
8	2,224	2,490	3,022	3,227	3,662
9	2,269	2,531	3,057	3,260	3,692
10	2,309	2,568	3,089	3,290	3,719
15	2,457	2,705	3,207	3,402	3,820
20	2,559	2,799	3,289	3,480	3,890
25	2,635	2,870	3,351	3,539	3,944
30	2,696	2,928	3,402	3,587	3,988
40	2,792	3,015	3,480	3,662	4,054
50	2,860	3,082	3,541	3,716	4,108
100	3,076	3,285	3,723	3,892	4,263
250	3,339	3,534	3,946	4,108	4,465
500	3,528	3,703	4,108	4,263	4,607

Если $\beta > \beta_q$, то значение y_k считают грубой ошибкой и отбрасывают.

Указанные выше критерии во многих случаях оказываются «жесткими». Тогда рекомендуется пользоваться критерием грубой погрешности «k», зависящим от объема выборки n и принятой доверительной вероятности P (табл. 8).

Таблица .8. Зависимость критерия грубой погрешности k от объема выборки n и доверительной вероятности P

n	P = 95%	P = 99%	P = 99,73%
9	4,42	7,10	11,49
10	4,31	6,99	10,26
12	4,16	6,38	8,80
15	4,03	5,88	7,66
20	3,90	5,41	6,73
25	3,84	5,14	6,25
30	3,80	5,00	5,95
40	3,75	4,82	5,56
50	3,73	4,70	5,34

Для распределений, отличных от нормального, таких классов как:

- двухмодальные кругловершинные композиции нормального и дискретного распределения с эксцессом ε = 1,5 - 3;
- островершинные двухмодальные;
- композиции дискретного двузначного распределения и распределения Лапласа с эксцессом ε = 1,5 - 6;
- композиции равномерного распределения с экспоненциальным распределением эксцесса ε = 1,8 - 6 и классом экспоненциальных распределений в пределах изменения эксцесса ε = 1,8 – 6;

граница грубой погрешности определяется величиной $\pm(t_{гр} \times \sigma)$, где:

$$t_{гр} = 1.2 + 3.6\,(1-\gamma)\lg n/10,$$

где γ – контрэксцесс:

$$t_{гр} = 1{,}55 + 0{,}8 \times \sqrt{\varepsilon - 1} \times \lg \frac{n}{10}$$

Погрешности в определении оценок δ и $t_{гр}$ являются отрицательно коррелированными, т. е. возрастание δ сопровождается уменьшением $t_{гр}$. Поэтому определение границ грубой погрешности для законов, отличных от нормального, с эксцессом ε ≤ 6, с помощью критерия $t_{гр}$ является достаточно точным и может широко использоваться на практике.

Оценки $\bar{y}$, δ и ε должны вычисляться после исключения подозрительных результатов из выборки. После расчета границ грубой погрешности результаты наблюдений, оказавшиеся внутри границ, возвращаются, а ранее найденные характеристики распределения уточняются.

Для равномерного распределения за границы грубой погрешности можно принять величину ± 1,8δ.

Таким образом, существуют различные способы выявления аномальных значений уровня ряда, выбор которых должен быть определен на основе требуемых целей исследования и специфики исходного временного ряда.

1.5. Предварительный анализ временных рядов

К процедурам предварительного анализа относятся тест на стационарность, проверка наличия тренда, сглаживание временных рядов, построение автокорреляционной функции, вычисление показателей динамики ВР, методы выявления периодических компонент ВР, в частности, спектральный и вейвлет-анализ.

1.5.1. Тест на стационарность ВР

При анализе случайных процессов задача проверки стационарности изучаемого процесса занимает важное место. Суждение о стационарности позволяет исследователю уточнить модель процесса или выявить причины нарушения стабильности хода эксперимента.

Тест на стационарность осуществляется путем проверки гипотез о постоянстве среднего, определяемого непараметрическим критерием сдвига, и о постоянстве дисперсии процесса или его остатков, определяемого критерием рассеяния.

В случае опровержения гипотезы о постоянстве среднего процесса проводится процедура удаления тренда. Если же процесс имеет ненулевое постоянное среднее, то он сглаживается процедурой удаления среднего. При любом исходе процесс центрируется относительно нуля.

Если при проверке постоянства дисперсии процесса или его остатков после удаления непериодического тренда выявлено нарушение постоянства среднего квадрата, тогда процесс относится к классу нестационарных процессов, причем первичным является предположение о том, что его нестационарность обусловлена только изменением дисперсии с течением времени.

В случае принятия гипотезы о постоянстве дисперсии рекомендуется проверить процесс на стационарность по критерию Пирсона или любому другому критерию, позволяющему выявить нестационарность.

Проверка постоянства среднего значения. Существует несколько алгоритмов проверки постоянства среднего значения процесса. К ним относятся непараметрический критерий сдвига и критерий инверсий.

Непараметрический критерий сдвига. Во всех непараметрических методах не предполагается, что исследователь знает распределение исследуемого процесса. Нулевая гипотеза обычно состоит в предположении, что две сравниваемые выборки характеризуются одним и тем же распределением, причем безразлично каким. Пусть имеется по N независимых отсчетов с первого и второго участков записи, или одна реализация разбита на две одинаковые группы по N измерений

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \text{ и } Y = (y_1, y_2, \ldots, y_N).$$

В последовательности Y ищется наибольшее значение y_{max} и подсчитывается число s отсчетов x_i, превышающих y_{max}. Если это число s превышает критическое значение $Z_{кр}$, то для выбранной доверительной вероятности P делается вывод о том, что в реализации присутствует сдвиг среднего вверх. Если этот вид нестационарности не обнаружен, следует проверить число значений y_i, превышающих x_{max}, что характеризует сдвиг среднего вниз.

Критические значения $Z_{кр}$ равны:

для $N < 15$ $Z_{кр} = 4$ при $P = 0.95$; $Z_{кр} = 6$ при $P = 0.99$;

для $N > 15$ $Z_{кр} = 5$ при $P = 0.95$; $Z_{кр} = 7$ при $P = 0.99$.

Критерий инверсий. Критерий строится на понятии инверсии, которая заключается в том, что в последовательности чисел за большим следует меньшее. Если отсчеты отражают стационарный процесс, то число инверсий I независимо от распределения наблюдаемого процесса обладает известным распределением. Так, величина γ, определяемая формулой

$$\gamma = 1 - \frac{4I}{N(N-1)}$$

имеет среднее значение, равное нулю, и дисперсию, равную:

$$D_\gamma = \frac{2(2N-5)}{9N(N-1)}$$

Величина γ, уже начиная с $N > 10$, имеет распределение, близкое к нормальному. Поэтому для проверки нулевой гипотезы о том, что дрейфа среднего значения нет, можно использовать неравенство

$$\left| \frac{\gamma}{\sqrt{D_\gamma}} \right| < Z_\Phi\left(\frac{1+p}{2}\right).$$

Критерий инверсий является одним из наиболее эффективных непараметрических критериев, применим как к последовательности отсчетов процесса, так и к последовательностям его характеристик.

Проверка постоянства дисперсии. К алгоритмам проверки постоянства дисперсии процесса относятся критерий Кохрена и критерий рассеяния.

<u>Критерий Кохрена</u>. Данный критерий применяется для выяснения вопроса о том, являются ли несколько оценок дисперсий $\tilde{\sigma}_i^2$ принадлежащими одному и тому же нормальному распределению. Если по нескольким участкам реализации вычислены оценки дисперсий $\tilde{\sigma}_i^2$ и вычисленная по формуле

$$G = \frac{\tilde{\sigma}_{i\ \max}^2}{\sum\limits_{i=1}^{K} \tilde{\sigma}_i^2},$$

статистика G превышает критическое значение $Z_G(v, K, P)$, где $v = N–1$, N – объем каждой выборки, K – число участков (выборок), то предположение о стационарности следует отвергнуть.

Следует отметить, что данный критерий справедлив при предположении о нормальности и очень чувствителен к нормальности исходного распределения, и его применение может приводить к серьезным ошибкам, если предположение о нормальности не справедливо.

<u>Критерий рассеяния</u>. Используются отсчеты двух выборок по N измерений: $X = (x_1, x_2,…, x_N)$ и $Y = (y_1, y_2,…, y_N)$. По второй

последовательности Y находится наибольший отсчет y_{max} и наименьший y_{min}. Затем подсчитывается число s отсчетов x_i, превышающих y_{max} или меньших, чем y_{min}. Нулевая гипотеза, состоящая в предположении равенства дисперсий для первого и второго участков реализации, принимается, если число s меньше критического значения $Z_{кр}$ с выбранной доверительной вероятностью P. Критические значения $Z_{кр}$ приведены в таблице 9. Объемы каждой выборки N целесообразно выбирать равными для обеих выборок.

Таблица 9. Критические значения критерия рассеяния

$P_{дов} = 0.95$		$P_{дов} = 0.99$	
Диапазон N	$Z_{критич}$	Диапазон N	$Z_{критич}$
Не более 6	5	Не более 10	7
От 7 до 25	6	От 11 до 20	8
От 26 до 50	7	От 21 до 50	9
От 51	8	От 51	10

Кроме того, для анализа постоянства дисперсий может применяться критерий инверсий. Для этого определяется стационарность ряда оценок $\tilde{\sigma}_i^2$ или $\tilde{\sigma}_i$, по результатам вычислений на нескольких интервалах.

Проверка стационарности. Для проверки стационарности распределений может применяться следующая логическая схема: из реализации извлекаются две или более выборки, состоящие из отсчетов x_i, y_i, …, снятых на нескольких участках записи. По полученным отсчетам рассчитывается статистика критерия, которая сравнивается с критическим значением при выбранной доверительной вероятности.

Для проверки согласия распределений разных выборок применимы критерии согласия эмпирических распределений с теоретическими, поэтому проверку стационарности распределений основывают на методах проверки согласия распределений.

Критерий χ^2. Пусть имеется n_x отсчетов x_i с первого участка записи, n_y отсчетов y_i со второго участка и т.д. Общее количество отсчетов равно N. Выдвигается нулевая гипотеза о том, что эти выборки принадлежат одной и той же генеральной совокупности, а отклонения в распределениях для каждого участка объясняются лишь случайным характером процесса.

Использование χ^2 при анализе временных рядов возможно с применением следующего алгоритма: выборка объема N разбивается на L разрядов (интервалов) и параллельно на две группы с равным числом отсчетов $N/2$. Границы разрядов выбираются по каждой группе отдельно и по всей реализации в целом. В идеале предполагается, что если во всей реализации есть s_i элементов из i-го разряда, то на каждом из участков будет по s_i отсчетов этого же интервала. После сортировки каждой группы и всей реализации по интервалам количества отсчетов, попавшие в разряды, можно описать в форме таблицы 10:

Таблица 10. Разбиение выборки

n_{x1}	n_{x2}	…..	n_{xL}	N_x
n_{y1}	n_{y2}	…..	n_{yL}	N_y
n_1	n_2	…..	n_L	N

По таблице оцениваются вероятности принадлежности отсчетов каждому из участков X и Y, и вычисляется статистика

$$\chi^2 = 2\sum_{j=1}^{L}\frac{1}{n_j}\left[\left(n_{x_j} - \frac{n_j}{2}\right)^2 + \left(n_{y_j} - \frac{n_j}{2}\right)^2\right],$$

которая сравнивается с критическим значением $Z_{кр}(v, P)$, где $v = L–1$. Нулевая гипотеза отвергается при $\chi^2 > Z_{кр}(v, P)$.

1.5.2. Автокорреляционная функция

Автокорреляционная функция (АКФ) – последовательность коэффициентов автокорреляции уровней первого и последующих порядков, характеризующих тесноту линейной связи между последующими и предыдущими членами временного ряда, т.е. корреляцию между рядами Y_1, $Y_2,\ldots, Y_{\mathrm{N}}$ и $Y_{\mathrm{L+1}}$, $Y_{\mathrm{L+2}} ,\ldots, Y_{\mathrm{L+N}}$, где L показывает длину временного смещения в ряду (величину лага).

Коэффициенты автокорреляции определяются по формуле:

$$r_\tau = \frac{\sum_{t=\tau+1}^{n} (y_t - \bar{y}_{1\tau})(y_{t-\tau} - \bar{y}_{2\tau})}{\sqrt{\sum_{t=\tau+1}^{n} (y_t - \bar{y}_{1\tau})^2 \sum_{t=\tau+1}^{n} (y_{t-\tau} - \bar{y}_{2\tau})^2}},$$

где τ – величина лага,

$$\bar{y}_{1\tau} = \frac{\sum_{t=\tau+1} y_t}{n-\tau}, \quad \bar{y}_{2\tau} = \frac{\sum_{t=\tau+1}^{n} y_{t-\tau}}{n-\tau}$$

Функцию $r(\tau) = r_\tau$ называют автокорреляционной функцией временного ряда, а ее график – коррелограммой.

Анализ автокорреляционной функции и коррелограммы позволяет выявить структуру ряда, т. е. определить присутствие в ряде той или иной компоненты. Так, если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции первого порядка, то исследуемый ряд содержит только тенденцию. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции порядка m, то ряд содержит циклические колебания с периодичностью в m моментов времени. Если ни один из коэффициентов автокорреляции не является значимым, то ряд не содержит тенденции и циклических колебаний.

Линейные коэффициенты автокорреляции характеризуют тесноту только линейной связи текущего и предыдущих уровней ряда. Поэтому по коэффициентам автокорреляции можно судить только о наличии или отсутствии линейной (или близкой к линейной) зависимости. Если ряд имеет сильную нелинейную тенденцию, коэффициент автокорреляции может приближаться к нулю. Для проверки ряда на наличие нелинейной тенденции рекомендуется вычислить линейные коэффициенты автокорреляции для временного ряда, состоящего из логарифмов исходных уровней. Отличные от нуля значения коэффициентов автокорреляции будут свидетельствовать о наличии нелинейной тенденции.

Для проверки наличия автокорреляции используется критерий Дарбина – Уотсона (DW):

$$d = \frac{\sum_{t=1}^{N-1}\left(y_{t+1} - y_t\right)^2}{\sum_{t=1}^{N} y_t^2} .$$

Возможные значения критерия находятся в интервале [0; 4]. Если ряд не содержит автокорреляцию, то значения критерия колеблются вокруг 2. При значении, близком к 4, говорят о сильной положительной автокорреляции; если значение стремится к 0, то говорят об отрицательной автокорреляции.

1.5.3. Проверка наличия тренда

Начальным этапом решения задачи анализа и прогнозирования временных рядов является исследование графика изменения исследуемого показателя.

В результате графического отображения временного ряда присутствие тренда не всегда является очевидным. В таком случае для выявления тенденции и определения тренда проводят дополнительный анализ, направленный на подтверждение или опровержение утверждения о существовании тренда.

Сущность основных подходов к решению данной задачи заключается в статистической проверке гипотез. Критерии выявления элементов ряда основываются на проверке гипотезы о случайности ряда.

Для проверки наличия тенденции наиболее широко применяются следующие методы.

Метод сравнения средних. Применяется для выявления монотонно возрастающей или монотонно убывающей тенденции. ВР разбивается на две примерно одинаковые части y_1, y_2, … , y_{n1} и y_{n1+1}, y_{n1+2}, … ,$y_{n1+n2=n}$ и вычисляются средние ($\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$) и выборочные дисперсии (s_1^2 и s_2^2) для обеих частей соответственно.

Далее рассчитывается значение критерия Стьюдента по формуле:

$$t_b = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \sqrt{\frac{s_2^2}{n_2}}}},$$

если предполагается, что значения дисперсий на этих участках не равны между собой, и по формуле:

$$t_b = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{s^2}\sqrt{\frac{n_1 \times n_2}{n_1 + n_2}},$$

где s^2 – общая выборочная дисперсия ряда, если предполагается, что дисперсии одинаковы.

Нулевая гипотеза о равенстве средних (об отсутствии тенденции) отвергается, если выполняется условие $t_в > t_{кр}(1\text{-}\alpha,\ m)$, где $t_{кр}(1\text{-}\alpha,\ m)$ – табличное значение t-критерия Стьюдента при уровне значимости α и числе степеней свободы $m = n_1 + n_2 - 2$.

Метод Фостера-Стюарта. Является более универсальным и дает более надежные результаты. Каждому уровню ряда y_i, начиная с $i = 2$, ставятся в соответствие два значения p_i и q_i:

$$p_i = \begin{cases} 1, & \text{если } y_i \text{ меньше всех предыдущих уровней} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} 1, & \text{если } y_i \text{ больше всех предыдущих уровней} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Вычисляется статистика критерия Стьюдента по формуле:

$$t_b = \frac{\sum_{i=2}^{n}(p_i - q_i)}{2\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}}.$$

Гипотеза об отсутствии тенденции отвергается, если выполняется условие $t_в > t_{кр}(1\text{-}\alpha,\ n\text{-}1)$, где $t_{кр}(1\text{-}\alpha,\ n\text{-}1)$ – табличное значение t-критерия Стьюдента при уровне значимости α и числе степеней свободы $n - 1$.

Критерий серий, основанный на медиане. Представим уровни исследуемого ВР в виде вариационного ряда, т.е. расположим значения ВР в порядке возрастания. Найдем медиану y_m полученного ряда: середину ряда в случае нечетного n, среднее арифметическое двух значений в середине вариационного ряда в случае четного n.

По исходному ВР построим последовательность из плюсов и минусов следующим образом: вместо y_t ставится «+», если $y_t > y_m$, и «-», если $y_t < y_m$ (члены временного ряда, равные y_m, в полученной таким образом последовательности плюсов и минусов не учитываются).

Образованная последовательность плюсов и минусов характеризуется общим числом серий $\nu(n)$ и протяженностью самой длинной серии $l(n)$.

При этом под «серией» понимается последовательность подряд идущих плюсов и подряд идущих минусов. Если исследуемый ряд состоит из статистически независимых наблюдений, случайно варьирующих около некоторого постоянного уровня, то чередование «+» и «-» в построенной последовательности должно быть случайным. В этом случае справедлива гипотеза о неизменности среднего значения ВР. При этом построенная последовательность не должна содержать слишком длинных серий подряд идущих «+» или «-», и, соответственно, общее число серий не должно быть слишком малым. Так что в данном критерии целесообразно рассматривать одновременно пару критических статистик ($\nu(n)$; $l(n)$). Если нарушается хотя бы одно из неравенств

$$\begin{cases} \nu(n) > \frac{1}{2}\left(n + 2 - 1{,}96\sqrt{n-1}\right) \\ l(n) < 1{,}43\ln(n+1) \end{cases},$$

то гипотеза о неизменности среднего значения временного ряда отвергается с вероятностью ошибки α, такой, что $0{,}05 < \alpha < 0{,}0975$ и, тем самым, подтверждается наличие зависящей от времени неслучайной составляющей в разложении ВР.

Критерий «восходящих» и «нисходящих» серий. Этот критерий позволяет выявить смещение среднего значения в исследуемом распределении не только монотонного, но и более общего, например, периодического характера. Исследуется последовательность знаков – плюсов и минусов, но правило образования этой последовательности в данном критерии иное: на i-ом месте вспомогательной последовательности ставится «+», если $y_{i+1} > y_i$, и «-», $y_{i+1} < y_i$ (если два или несколько следующих друг за другом наблюдений равны между собой, то принимается во внимание только одно из них). Последовательность подряд идущих «+» (восходящая серия) будет соответствовать возрастанию результатов наблюдения, а последовательность «-» (нисходящая серия) – их убыванию. Критерий основан на том же соображении, что и предыдущий: если выборка случайна, то в образованной последовательности знаков общее число серий не может быть слишком малым, а их протяженность — слишком большой. При уровне значимости 0,05 < α < 0,0975 критерий имеет вид:

$$\begin{cases} \nu(n) > \dfrac{2n-1}{3} - 1{,}96\sqrt{\dfrac{16n-29}{90}} \\ l(n) < l_0(n) \end{cases}$$

где $$l_0(n) = \begin{cases} 5, \quad n \le 26 \\ 6{,}26 < n \le 153 \\ 7{,}153 < n \le 1170 \end{cases}$$

Если хотя бы одно из неравенств окажется нарушенным, то гипотезу о неизменности среднего значения временного ряда следует отвергнуть, что говорит о наличии тенденции в исследуемом ВР.

Критерий Аббе (критерий квадратов последовательных разностей) для проверки стохастической независимости предполагает расчет величины:

$$\gamma(n) = \frac{q^2(n)}{s^2(m)}$$

где

$$q^2(n) = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - y_i)^2$$

$$s^2(n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}_i)^2$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Для того, чтобы гипотеза о стохастической независимости уровней временного ряда отвергалась, необходимо выполнение следующего условия

$$\gamma(n) \le \gamma_{\alpha}^{\min}(n)$$

Если число уровней ряда составляет более 60, величина $\gamma_{\alpha}^{\min}(n)$ находится по формуле:

$$\gamma_{\alpha}^{\min}(n) = 1 + \frac{u_{\alpha}}{\sqrt{n + 0{,}5\left(1 + u_{\alpha}^{2}\right)}},$$

где u_{α} - α-квантиль нормированного нормального распределения.

Величина $\gamma_{\alpha}^{\min}(n)$ для n ≤ 60 может быть определена на основе уже существующих статистических расчетов. В таблице 11 приведены значения $\gamma_{\alpha}^{\min}(n)$ для различных уровней значимости при $n \in [4;20]$.

Таблица 11. Значение $\gamma_{\alpha}^{\min}(n)$, применяемое для расчета критерия Аббе

Длина ряда динамики (n)	$\gamma_{\alpha}^{\min}(n)$		
	α = 0,001	α = 0,01	α = 0,05
4	0,295	0,313	0,390
5	0,208	0,269	0,410
6	0,182	0,281	0,445
7	0,185	0,307	0,468
8	0,202	0,331	0,491
9	0,221	0,354	0,512
10	0,241	0,376	0,531
11	0,260	0,396	0,548
12	0,278	0,414	0,564
13	0,295	0,431	0,578
14	0,311	0,447	0,591
15	0,327	0,461	0,603
16	0,341	0,474	0,614
17	0,355	0,487	0,624
18	0,368	0,499	0,633
19	0,381	0,510	0,642
20	0,393	0,520	0,650

1.5.4. Расчет показателей, характеризующих тенденцию динамики

Для анализа динамики развития явления используют статистические показатели, позволяющие сравнивать между собой различные уровни ряда. Если все уровни ряда сравнивают с начальным, то соответствующий показатель называют базисным, если же с предыдущим уровнем – цепным.

Рассмотрим наиболее часто используемые показатели временных рядов, которые можно разбить на две группы: индивидуальные (частные) характеристики и сводные (обобщающие) характеристики.

К индивидуальным показателям интенсивности изменения явления относятся:

- абсолютное изменение (прирост);
- темпы роста;
- темпы прироста;
- абсолютное значение одного процента прироста.

Абсолютное изменение (прирост) имеет такую же единицу измерения, что и уровень ряда, но с обязательным дополнением единицы времени, за которую происходит изменение:

$$\Delta_{0t} = y_t - y_1 \text{ – базисное;}$$

$$\Delta_t = y_t - y_{t-1} \text{ – цепное.}$$

Здесь y_t, y_1 – соответственно текущий и базовый уровни ряда.

Ускорение (только цепное)

$$\Delta_t' = \Delta_t - \Delta_{t-1}.$$

Коэффициент или темп роста

$$K_t = \frac{y_t}{y_1} \text{ – базисный;}$$

$$K_t = \frac{y_t}{y_{t-1}} \text{ – цепной.}$$

Темп роста получают из коэффициента роста умножением на 100 %

$$T_t = \frac{y_t}{y_1}100 \text{ – базисный;}$$

$$T_t = \frac{y_t}{y_{t-1}}100 \text{ – цепной.}$$

Темп прироста

$$T_{\text{пр}} = (K_t - 1)100 = T_t - 100.$$

Вторая группа показателей динамического ряда содержит обобщающие характеристики, к которым относятся его средние показатели и характеристики вариации уровней. Система средних показателей динамики включает в себя:

- средний уровень ряда;
- средний абсолютный прирост;
- средний темп роста;
- средний темп прироста.

Средний уровень ряда – это показатель, обобщающий итоги развития явления за единичный интервал или момент из имеющейся временной последовательности. Средний уровень характеризует наиболее типичную величину уровней, центр ряда.

Расчет среднего уровня ряда динамики определяется видом этого ряда и величиной интервала, соответствующего каждому уровню.

Для интервальных рядов с равными периодами времени средний уровень ряда определяется по формуле средней арифметической простой:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n},$$

где n – общая длина временного ряда или общее число равных временных отрезков, каждому из которых соответствует свой уровень y_t, $t = 1, 2, ..., n$.

В интервальных рядах с неравноотстоящими уровнями используется формула средней арифметической взвешенной:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t \tau_t}{\sum_{t=1}^{n} \tau_t},$$

где τ_t – длина t-го временного интервала.

Для моментных рядов:

- средняя хронологическая (для моментного ряда с равноудаленными уровнями)

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1}{2} + \sum_{t=2}^{n-1} y_t + \frac{y_n}{2}}{n-1};$$

- средняя для моментного ряда с неравноудаленными уровнями

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (y_t + y_{t+1}) \tau_t}{2 \sum_{t=1}^{n-1} \tau_t},$$

где τ_t – время, в течение которого уровень остается неизменным.

Средний абсолютный прирост является обобщающим показателем изменения явления во времени. Он показывает, на сколько в среднем за единицу времени изменяется уровень ряда, и рассчитывается как простая средняя арифметическая показателей абсолютных цепных приростов. Средний абсолютный прирост рассчитывается по формулам в зависимости от способа нумерации интервалов (моментов):

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum \Delta_t}{n-1}.$$

Средний темп роста (изменения)

$\bar{T}_{\text{р}} = \sqrt[n-1]{K_2 K_3 \ldots K_n}\, 100 = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}\, 100$ – для периодов одинаковой продолжительности;

$$\overline{T}_{р} = \sqrt[\sum_{t=2}^{n}\tau_t]{K_2^{\tau_1} K_3^{\tau_2} \ldots K_n^{\tau_n}}\, 100$$ – для периодов различной продолжительности.

Средний темп прироста

$$\overline{T}_{пр} = \overline{T}_{р} - 100 .$$

Если показатели уровня ряда принимают как положительные, так и отрицательные значения (прибыль и убыток за ряд лет), то темпы роста и прироста не рассчитываются и не имеют экономической интерпретации.

Взаимосвязь цепных и базисных коэффициентов роста:

- произведение всех цепных коэффициентов роста равно конечному базисному коэффициенту роста;
- отношение последующего базисного коэффициента роста к предыдущему базисному коэффициенту роста равно промежуточному цепному коэффициенту роста.

Такие взаимосвязи проявляются только в том случае, когда темпы роста (цепные и базисные) выражены в коэффициентах.

Для характеристики показателей ряда динамики применяют методы, которые позволяют осуществить прогноз, найти недостающие компоненты ряда. Используя показатель среднего темпа роста и последний показатель ряда динамики, осуществляют прогноз на будущее (экстраполируют ряд динамики).

1.5.5. Сглаживание временных рядов

Под тенденцией, или трендом, понимается общее направление к росту, снижению или стабилизации уровня явления с течением времени. Рост и снижение уровней могут происходить по-разному: равномерно, ускоренно или замедленно. Практически уровни ряда динамики очень редко растут (или снижаются) строго равномерно или систематически. Именно из-за существования отклонений от строгой закономерности принято говорить не просто о росте или снижении уровня, а о его тенденции к росту или снижению. Такие отклонения могут объясняться тем, что с течением времени изменяются либо комплекс основных причин и факторов, от которых зависит уровень явления, либо сила их действия, либо внешние условия, в которых происходит развитие явления. Могут изменяться также направление и сила влияния второстепенных факторов. Поэтому при анализе динамики ставится задача выявления не просто тенденции развития, а основной тенденции, достаточно стабильной на протяжении данного этапа развития. Для решения данной задачи используются различные методы, которые принято разделять на две группы:

- аналитические, при использовании которых заранее предполагается вид зависимости, описывающей тенденцию ряда, с последующей оценкой параметров модели сглаживания;
- алгоритмические или механические, которые не предполагают априорных знаний сглаживающей кривой, ориентируясь лишь на алгоритм расчета сглаженных уровней ряда.

Методы механического сглаживания. При использовании этих методов производится сглаживание каждого отдельного уровня ряда с использованием фактических значений соседних с ним уровней. Для сглаживания временных рядов часто используются методы простой и взвешенной скользящей средней, экспоненциального сглаживания.

В основе этих методов лежит простая идея: если «индивидуальный» разброс значений члена временного ряда $x(t)$ около своего среднего (сглаженного) значения μ характеризуется дисперсией σ^2, то разброс среднего из N членов временного ряда около того же значения будет характеризоваться гораздо меньшей величиной дисперсии, равной σ^2/N.

Метод простой скользящей средней. Согласно этому методу определяется количество наблюдений, входящих в интервал сглаживания. Сглаживание временного ряда по методу скользящей средней заключается в замене исходных уровней ряда y_t сглаженными значениями y'_t, которые получаются как среднее значение определенного числа уровней исходного ряда, симметрично окружающих значение y_t. В результате получается временной ряд y'_t, меньше подверженный колебаниям. Возможны два варианта расчета:

1) Если интервал сглаживания нечетный, т.е. $g = 2p+1$, то

$$y'_t = \frac{y_{t-p} \_ y_{t-p+1} + \ldots + y_{t+p-1} + y_{t+p}}{2p+1} = \frac{\sum\limits_{i=t-p}^{t+p} y_i}{2p+1} \quad .$$

2) Если интервал сглаживания четный, т.е. $g = 2p$, то

$$y'_t = \frac{{}^1\!/_2\, y_{t-p} + y_{t-p+1} + \ldots + y_{t+p-1} + {}^1\!/_2\, y_{t+p}}{2p} = \frac{{}^1\!/_2\, y_{t-p} + \sum\limits_{i=t-p+1}^{t+p-1} y_i + {}^1\!/_2\, y_{t+p}}{2p} \, .$$

При использовании скользящей средней с длиной активного участка $g = 2p+1$ первые и последние p уровней ряда сгладить нельзя, их значения теряются. Очевидно, что потеря значений последних точек является существенным недостатком, т. к. для исследователя последние «свежие» данные обладают наибольшей информационной ценностью.

Для восстановления потерянных значений временного ряда можно использовать следующий прием:

1) Вычисляется средний прирост $\Delta_у$ на последнем активном участке $(y_{n-g},\ldots,y_n)$:

$$\Delta_y = \frac{y_n - y_{n-g}}{g-1} \, .$$

где g – длина активного участка.

2) Определяются значения последних $p = (g–1)/2$ уровней сглаженного временного ряда с помощью последовательного прибавления среднего абсолютного прироста Δ_y к последнему сглаженному значению.

Аналогичная процедура применяется для восстановления первых p уровней временного ряда. Важным свойством процедуры сглаживания является полное устранение периодических колебаний из временного ряда, если длина интервала сглаживания берется равной или кратной периоду колебаний. Если развитие процесса носит нелинейный характер, то применение метода простой скользящей средней может привести к значительным искажениям исследуемого процесса.

Метод взвешенной скользящей средней. Этот метод отличается от предыдущего тем, что сглаживание внутри интервала производится не по прямой, а по кривой более высокого порядка. Чаще всего используются полиномы 2-го и 3-го порядков. Так как при простой скользящей средней выравнивание на каждом активном участке производится по прямой (полиному первого порядка), то метод простой скользящей средней может рассматриваться как частный случай метода взвешенной скользящей средней. Простая скользящая средняя учитывает все уровни ряда, входящие в активный участок сглаживания, с равными весами, а взвешенная средняя приписывает каждому уровню вес, зависящий от удаления уровня до уровня, стоящего в середине активного участка. Выравнивание с помощью взвешенной скользящей средней осуществляется следующим образом. Для каждого активного участка подбирается полином вида

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots,$$

параметры которого оцениваются по методу наименьших квадратов. При этом начало отсчета переносится в середину активного участка. Нет необходимости каждый раз заново вычислять весовые коэффициенты при уровнях ряда, входящих в активный участок сглаживания, так как они будут одинаковыми для каждого активного участка. При этом веса обладают свойствами:

- симметричность относительно центрального уровня,
- сумма весов с учетом общего множителя равна 1,
- наличие как положительных, так и отрицательных весов позволяет сглаженной кривой сохранять различные изгибы кривой тренда.

Существуют приемы, позволяющие с помощью дополнительных вычислений получить сглаженные значения для p начальных и конечных уровней ряда при длине интервала сглаживания $g = 2p + 1$.

Метод экспоненциального сглаживания. Рассмотренные методы простой и взвешенной скользящей средней не дают возможности сгладить первые и последние p наблюдений временного ряда.

Отсутствие сглаженных первых наблюдений не так важно по сравнению с последними наблюдениями, особенно если целью исследования является прогнозирование развития процесса. Есть методы, позволяющие получить сглаженные значения последних уровней так же, как и всех остальных. К их числу относится метод экспоненциального сглаживания. Особенность этого метода заключена в том, что в процедуре выравнивания каждого наблюдения используются только значения предыдущих уровней, взятых с определенным весом. Вес каждого наблюдения уменьшается по мере его удаления от момента, для которого определяется сглаживаемое значение. Сглаженное значение наблюдения ряда S_t на момент времени t определяется по формуле:

$$S_t = \alpha y_t + (1-\alpha)S_{t-1}$$

где α – сглаживающий параметр, характеризующий вес выравниваемого наблюдения, причем $0 < \alpha < 1$. От численного значения параметра α зависит, насколько быстро будет уменьшаться вес предшествующих наблюдений и в соответствии с этим степень их влияния на сглаживаемый уровень. Чем больше значение параметра α, тем меньше сказывается влияние предшествующих уровней и соответственно меньшим оказывается сглаживающее воздействие экспоненциальной средней. Задачу выбора параметра, определяющего начальные условия, предлагается решать следующим образом: если есть данные о развитии процесса в прошлом, то их среднее значение можно принять в качестве y_0, если таких сведений нет, то в качестве y_0 используют исходное (первое) значение наблюдения временного ряда.

Аналитические методы выравнивания динамического ряда состоят в следующем. На основе фактических данных ряда подбирается наиболее подходящая для отражения тенденции развития явления математическая формула (аппроксимирующая функция), по которой рассчитываются выравненные (теоретические) значения. Таким образом, уровни ряда рассматриваются как функция от времени, а задача выравнивания сводится к определению вида функции, отысканию ее параметров по эмпирическим данным и расчету теоретических уровней по выбранной формуле.

1.5.6. Выделение периодических составляющих временного ряда

Спектральный анализ. С помощью преобразования Фурье любой ряд динамики можно представить в виде суммы конечного числа гармоник. Но часто исследователю нужны не все гармоники, а лишь основные, порождающие основную часть дисперсии процесса.

Рассмотрим реализацию $x(t)$ длиной T, принадлежащую стационарному случайному процессу и имеющую нулевое среднее значение. При дискретном временном параметре такая реализация представлена N (т.к. $T=N^x\Delta t$) значениями временного ряда $\{x(t)\}$.

Дискретное преобразование Фурье дает значения спектральной плотности на частотах:

$$f_k = \frac{k}{T} = \frac{k}{\Delta t \times N},\ k = 0,\ldots, N-1$$

При этом коэффициенты Фурье определяются в виде:

$$X\left(f_k\right) = \Delta t \times \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \times e^{ij2\pi k/N}$$

Оценку спектральной плотности:

$$\widetilde{S}\left(f_k\right) = \frac{1}{\Delta t \times N}\left|X_i\left(f_k\right)\right|^2$$

можно рассматривать как характеристику степени тесноты связи между $x(i)$ и гармонической компонентой с периодом $2\pi/w$.

Вейвлет-анализ. Классический анализ Фурье основан на возможности исследования функций во временной ($|t| < \infty$) и частотной ($|\nu| < \infty$) областях с помощью прямого и обратного преобразования Фурье. Однако преобразование Фурье не позволяет достаточно полно исследовать иррегулярные функции, т.е. функции, характеристики которых эволюционируют во времени. Например, преобразование Фурье не отличает сигнал, представляющий собой сумму двух синусоид, от сигнала, состоящего из тех же синусоид, но включенных последовательно. Для устранения этого недостатка нужно локализовать преобразование Фурье на промежутках конечной длины.

Интегральным вейвлет–преобразованием функции $f(t) \in L^2(R)$ называется выражение

$$W(a,b) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \ ,$$

где a, $b \in R$, $a \neq 0$.

Функция $\psi(t)$ называется вейвлетом.

Вейвлет – это математическая функция, позволяющая анализировать различные частотные компоненты данных. График функции выглядит как волнообразные колебания с амплитудой, уменьшающейся до нуля вдали от начала координат. Существует много разных видов вейвлетов, например, вейвлет Морле, вейвлет Добеши, вейвлет Гаусса, вейвлет Хаара, MHat-вейвлет и другие.

Параметр a определяет размер вейвлета и называется масштабом. Его аналогом в Фурье-анализе является период (частота) гармонического колебания. Понятие масштаба – более широкое (хотя и менее наглядное), чем понятие периода. Связано это с тем, что в Фурье-преобразовании функциональный вид ядра преобразования зафиксирован, в то время как вейвлет-преобразование одной и той же функции можно получить с помощью различных базисных вейвлетов (т.е. в разных системах масштабов).

Параметр b задает временную локализацию вейвлета и называется сдвигом. Этот параметр не имеет аналога в Фурье-преобразовании.

Обратное интегральное вейвлет-преобразование задается выражением

$$f(t) = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(a,b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{1}{a^{1/2}} \frac{dadb}{a^2},$$

где C_ψ – нормирующий коэффициент:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}|^2 |\omega|^{-1} dw < \infty .$$

Практические аспекты вейвлет-анализа. Будем считать, что временной ряд задан значениями функции, следующими друг за другом с постоянным шагом Δt:

$$f_k = f(t_k),\ t_k = \Delta t\, k,\ k = 0,1,\ldots N\text{-}1.$$

Для оценки вейвлет-преобразования этой последовательности воспользуемся следующим выражением:

$$W(a,b) = \frac{1}{n(a,b)} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \psi^*\left(\frac{t_k - b}{a}\right),$$

где

$$n(a,b) = \sum e^{-\frac{1}{B}\left(\frac{t_k - d}{a}\right)^2}.$$

Для вейвлета Морле $b = \alpha^2$.

Введем оценку локального спектра энергии

$$S(a_i, b_j) = |W_a(a_i, b_j)|^2 .$$

Эту функцию обычно называют скалограммой, подчеркивая тем самым ее способность описывать распределение энергии по масштабам. Поскольку это распределение локализовано во времени с помощью параметра сдвига b, уместно называть локальной скалограммой.

1.5.7. Фрактальный анализ временных рядов

Фрактальными можно назвать эволюционные процессы, ВР показателей которых обладают долговременной памятью. К их числу относятся чаще всего природные ВР либо ВР основных показателей эволюционных процессов.

Фрактальный анализ позволяет выявить устойчивость тенденции ряда. Одной из составляющих фрактального анализа является R/S-анализ. История создания методологии R/S – анализа восходит к середине XX-го века, когда гидролог Херст решил проверить предположение о том, что ряды объемов стока рек подчиняются нормальному закону, он в результате ввел новую статистику – показатель Херста *(H)*. Как оказалось, этот показатель имеет широкое применение в анализе ВР благодаря своей устойчивости. Он содержит минимальные предположения об изучаемой системе и может классифицировать временные ряды. Он может отличить случайный ряд от неслучайного, даже если случайный ряд не гауссовский. Херст обнаружил, что большинство природных систем не следуют случайному блужданию – гауссовскому, т.е. поведение ВР показателей этих систем не подчиняется нормальному закону. Херст измерял колебания воды в резервуаре относительно среднего с течением времени и ввел безразмерное отношение посредствам деления размаха R на стандартное отклонение наблюдений S. Этот способ анализа стал называться методом нормированного размаха (*R/S*-анализа).

В представленном ВР Z последовательно выделяем его начальные отрезки

$$Z_\tau = z_1, z_2 ,\dots z_\tau , \tau = 3, 4\dots,n ,$$

для каждого из которых вычисляем текущее среднее

$$\overline{Z}_\tau = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{\tau} Z_i .$$

Далее для каждого фиксированного τ вычисляем накопленное отклонение для отрезков длины t:

$$X_{\tau,t} = \sum_{i=1}^{t}\left(z_i - z_\tau\right), t = 1,\dots,\tau .$$

После чего вычисляем разность между максимальным и минимальным накопленными отклонениями (размах)

$$R = R(\tau) = max(X_{\tau,t}) - min(X_{\tau,t}).$$

Этот размах нормируется, т.е. представляется в виде дроби $R\backslash S$, где $S = S(\tau)$ – стандартное отклонение для отрезка ВР Z_τ , $3 \leq \tau < n$.

Херст ввел следующее соотношение:

$$R/S=(a\cdot N)^H,$$

где R/S – нормированный размах, N – число наблюдений, a – константа, H – показатель Херста.

Имеются три различных классификации для показателя Херста:

1) $H = 0.5$. Указывает на *случайный* ряд. События случайны и некоррелированны. Настоящее не влияет на будущее. Функция плотности вероятности может быть нормальной кривой, однако это не обязательное условие.

2) $0 \leq H < 0.5$. Данный диапазон соответствует *антиперсистентным,* или *эргодическим*, рядам. Такой тип системы часто называют «возврат к среднему». Если система демонстрирует «рост» в предыдущий период, то, скорее всего, в следующем периоде начнется спад. И наоборот, если шло снижение, то вероятен близкий подъем. Устойчивость такого антиперсистентного поведения зависит от того, насколько H близко к нулю.

3) $0.5 < H < 1.0$. Имеем *персистентные,* или *трендоустойчивые,* ряды. Если ряд возрастает (убывает) в предыдущий период, то, вероятно, что он будет сохранять эту тенденцию какое-то время в будущем. Чем ближе H к 0.5, тем более зашумлен ряд и тем менее выражен его тренд.

Существует еще и четвертая характеристика показателя Херста, когда $H > 1$. В этом случае говорят о статистике Леви и о процессе (или временном ряде) с фрактальным временем, о временных точках разрыва производной. Это означает, что происходят независимые скачки амплитуды, распределенные по Леви за время, определенное величиной скачка, и растущее вместе с ним.

Часть 2. Моделирование временных рядов

2.1. Построение моделей тренда

Встречающиеся во многих исследованиях временные ряды наряду с флуктуациями и нерегулярностями имеют общую тенденцию изменения. После обнаружения наличия тенденции перед исследователем возникает задача построения уравнения, описывающего данную тенденцию. Во многих случаях желательно делать выводы о тренде на основании самого наблюдаемого ряда, хотя при этом может быть известно, что тренд возникает в силу действия каких-то иных факторов. В ряде случаев, когда теория не может указать явный вид тренда как функции времени, тем не менее, возможно приблизить тренд полиномом достаточно низкой степени.

Аналитическим выравниванием ВР называется нахождение аналитической функции $\hat{y} = f(t)$, характеризующей основную тенденцию изменения уровней ряда с течением времени. Сама функция $f(t)$ носит название кривой роста. При аналитическом выравнивании исходят из предположения, что аддитивная модель временного ряда может быть представлена как сумма двух компонент $y(t) = f(t) + \varepsilon(t)$, где $\varepsilon(t)$ – случайная компонента с нулевой средней и постоянной дисперсией выражает ошибку модели из-за действия случайных факторов. Чаще всего в качестве кривой роста применяются следующие функции: линейная, парабола второго и более высоких порядков, гиперболическая, экспоненциальная, потенциальная, степенная и другие.

Рассмотрим некоторые виды моделей тренда.

2.1.1. Прямолинейный тренд и его свойства

Самым простым типом линии тренда является прямая линия, описываемая линейным уравнением тренда:

$$\hat{y}_i = a + bt_i \ ,$$

где $\hat{y}_i$ – предсказанные значения ВР для некоторого момента времени t;

a - свободный член уравнения, численно равный среднему выравненному уровню для момента или периода времени, принятого за начало отсчета, т.е. для $t_i = 0$;

b - средняя величина изменения уровней ряда за единицу изменения времени;

t_i - номера моментов или периодов времени, к которым относятся уровни временного ряда (год, квартал, месяц, дата).

Среднее изменение уровней ряда за единицу времени - главный параметр и константа прямолинейного тренда. Следовательно, этот тип тренда подходит для отображения тенденции примерно равномерных изменений уровней: равных в среднем абсолютных приростов или абсолютных сокращений уровней за равные промежутки времени. Практика показывает, что такой характер динамики встречается достаточно часто. Итак, равномерная тенденция динамики (или застоя) - это результат сложения влияния большого количества факторов на изменение изучаемого показателя.

Основные свойства прямолинейного тренда:

- равные изменения за равные промежутки времени;
- если средний абсолютный прирост – положительная величина, то относительные приросты или темпы прироста постепенно уменьшаются;
- если среднее абсолютное изменение – отрицательная величина, то относительные изменения или темпы сокращения постепенно увеличиваются по абсолютной величине снижения к предыдущему уровню;
- если тенденция к сокращению уровней, а изучаемая величина является по определению положительной, то среднее изменение b не может быть больше среднего уровня a;
- при линейном тренде ускорение, т.е. разность абсолютных изменений за последовательные периоды равно нулю.

Прямая линия является одним из видов парабол - параболой 1-го порядка.

2.1.2. Параболический тренд и его свойства

В качестве параболического будем рассматривать тренд, выраженный параболой 2-го порядка:

$$\hat{y}_i = a + bt + ct^2 ,$$

где свободный член a - это средний (выравненный) уровень тренда на момент или период, принятый за начало отсчета времени, т.е. t = 0;
b - это средний за весь период среднегодовой прирост, который уже не является константой, а изменяется равномерно со средним ускорением, равным 2с, которое и служит константой, главным параметром параболы 2-го порядка.

Следовательно, тренд в форме параболы 2-го порядка применяется для отображения таких тенденций динамики, которым свойственно примерно постоянное ускорение абсолютных изменений уровней. Процессы такого рода встречаются на практике гораздо реже, чем процессы с равномерным изменением, но, с другой стороны, любое отклонение процесса от строго равномерного прироста (или сокращения) уровней можно интерпретировать как наличие ускорения. Более того, существует строгое математическое правило: чем выше порядок параболы, тем ближе линия тренда к уровням исходного временного ряда. Парабола 2-го порядка как уравнение тренда применяется к различным процессам, которые на некотором, как правило, непродолжительном, этапе развития имеют примерно постоянное ускорение абсолютного прироста уровней.

Основные свойства тренда в форме параболы 2-го порядка:

- неравные, но равномерно возрастающие или равномерно убывающие абсолютные изменения за равные промежутки времени;
- парабола по своей математической форме имеет две ветви: восходящую с увеличением уровней признака и нисходящую с их

уменьшением. Трендом, как правило, считают только одну ветвь, либо восходящую, либо нисходящую;

- так как свободный член уравнения а, как значение показателя в начальный момент (период) времени, как правило, величина положительная, то характер тренда определяется знаками параметров b и с;
- при $b > 0$ и $c > 0$ имеем восходящую ветвь, т.е. тенденцию к ускоренному росту уровней;
- при $b < 0$ и $c < 0$ имеем нисходящую ветвь – тенденцию к ускоренному сокращению уровней;
- при $b > 0$ и $c < 0$ имеем либо восходящую ветвь с замедляющимся ростом уровней, либо обе ветви параболы, восходящую и нисходящую, если их по существу можно считать единым процессом;
- при $b < 0$ и $c > 0$ имеем либо нисходящую ветвь с замедляющимся сокращением уровней, либо обе ветви - восходящую и нисходящую, если их можно считать единой тенденцией;
- в зависимости от соотношений между его параметрами цепные темпы изменений могут либо уменьшаться, либо некоторое время возрастать, но при достаточно длительном периоде рано или поздно темпы роста обязательно начинают уменьшаться, а темпы сокращения уровней при $b < 0$ и $c < 0$ обязательно начинают возрастать (по абсолютной величине относительного изменения).

В тех случаях, когда по существу изучаемого процесса допусти- мо считать единым трендом обе ветви параболы, представляет боль- шой интерес решение задачи о нахождении того периода или момента времени, когда уровень тренда достигает максимума (когда b>0, c<0) или минимума (если b<0, c>0). Экстремальная точка параболы $\hat{y}_i = a + bt + ct^2$ достигается при нулевом значении первой производной:

$$\frac{df}{dt} = \left(a + bt + ct^2\right)' = b + 2ct$$

Из равенства b + 2ct = 0 имеем: t = -b/2c. Например, если $\hat{y}_i = 100 + 20t + 2t^2$, то максимум парабола имеет при t = -5.

Максимальное значение уровня тренда при t = 5 составит 150.

Если имеем параболу при b < 0, а c > 0, например, $\hat{y}_i = 100 + 20t + 2t^2$, то минимальное значение тренда достигается при t = 5, и это минимальное значение составит 50.

Параболы 3-го и более высоких порядков редко применяются для выражения тенденции динамики и слишком сложны для получения надежных оценок параметров при ограниченной длине временного ряда.

2.1.3. Экспоненциальный тренд и его свойства

Применить обычный МНК для оценивания параметров большинства нелинейных моделей невозможно. Одним из способов решения этой проблемы является преобразование нелинейной модели к линейному виду. Для этого можно использовать следующие процедуры:

1) логарифмирование;

2) замена переменных;

3) потенцирование.

Рассмотрим экспоненциальный тренд вида:

$$\hat{y}_i = ak^{t_i} \quad \text{или} \quad \hat{y}_i = \exp[\ln a + \ln k t_i]$$

Свободный член экспоненты а равен выравненному уровню, т.е. при t=0. Основной параметр экспоненциального тренда k является постоянным темпом изменения уровней (ценным). Если k>1, имеем тренд с возрастающими уровнями, причем это возрастание не просто ускоренное, а с возрастающим ускорением и возрастающими производными всех более высоких порядков. Если k<1, то имеем тренд, выражающий тенденцию постоянного, но замедляющегося сокращения уровней, причем замедление непрерывно усиливается. Экстремума экспонента не имеет и при t→∞ стремится либо к ∞ при k > 1, либо к 0 при k<1.

Экспоненциальный тренд характерен для процессов, развивающихся в среде, не создающей никаких ограничений для роста уровня. Из этого следует, что на практике он может развиваться только на ограниченном промежутке времени, так как любая среда рано или поздно создает ограничения, любые ресурсы со временем исчерпаемы. Экспоненциальный рост объема реализации и производства происходит при возникновении новых видов продукции и их освоении промышленностью: при появлении цветных телевизоров, видеомагнитофонов, пейджеров и т.п., но когда производство начинает наполнять рынок, приближаться к спросу, экспоненциальный рост прекращается.

Основные свойства экспоненциального тренда:

- абсолютные изменения уровней тренда пропорциональны самим уровням;
- экспонента экстремумов не имеет: при $k > 1$ тренд стремится к $+\infty$, при $k < 1$ тренд стремится к нулю;
- уровни тренда представляют собой геометрическую прогрессию: уровень периода с номером $t = m$ есть ak^m;
- при $k > 1$ тренд отражает ускоряющийся неравномерно рост уровней, при $k < 1$ тренд отражает замедляющееся неравномерно уменьшение уровней.

2.1.4. Гиперболический тренд и его свойства

Из различных форм гипербол рассмотрим только наиболее простую:

$$\hat{y}_i = a + \frac{b}{t}$$

Если основной параметр гиперболы $b > 0$, то этот тренд выражает тенденцию замедляющегося снижения уровней и при $t \to \infty$, $\hat{y} \to a$. Таким образом, свободный член гиперболы - это предел, к которому стремится уровень тренда.

Такая тенденция наблюдается, например, при изучении процесса снижения затрат любого ресурса (труда, материалов, энергии) на единицу данного вида продукции или ее себестоимости в целом. Затраты ресурса не могут стремиться к нулю, значит, экспонента не соответствует сущности процесса; нужно применить гиперболическую формулу тренда.

Если параметр b < 0, то с возрастанием t, т.е. с течением времени, уровни тренда возрастают и стремятся к величине a при $t \to \infty$.

При расчете гиперболического тренда нельзя нумеровать года от середины ряда, так как значения $1/t_i$ должны быть всегда положительными. Основные свойства гиперболического тренда:

- абсолютный прирост или сокращение уровней, ускорение абсолютных изменений, темп изменения - все эти показатели не являются постоянными; при $b > 0$ уровни замедленно уменьшаются, отрицательные абсолютные изменения, а также положительные ускорения тоже уменьшаются, цепные темпы изменения растут и стремятся к 100%;
- при $b < 0$ уровни замедленно возрастают, положительные абсолютные изменения, а также отрицательные ускорения и цепные темпы роста замедленно уменьшаются, стремясь к 100%.

Таким образом, гиперболический тренд описывает тенденцию такого процесса, показатели которого со временем затухают, т.е. происходит переход от движения к застою.

2.1.5 Логарифмический тренд и его свойства

Если изучаемый процесс приводит к замедлению роста какого-то показателя, но при этом рост не прекращается, не стремится к какому-либо ограниченному пределу, то гиперболическая форма тренда уже не подходит. Тем более не подходит парабола с отрицательным ускорением, по которой замедляющийся рост перейдет со временем в снижение уровней. В указанном случае тенденция изменения лучше всего отображается логарифмической формой тренда:

$$\hat{y}_i = a + b \ln t_i$$

Логарифмы возрастают значительно медленнее, чем сами числа (номера периодов t_i), но рост логарифмов неограничен. Подбирая начало отсчета периодов (моментов) времени, можно найти такую скорость снижения абсолютных изменений, которая наилучшим образом отвечает фактическому временному ряду.

Основные свойства логарифмического тренда:

- если $b > 0$, то уровни возрастают, но с замедлением, а если $b < 0$, то уровни тренда уменьшаются, тоже с замедлением;
- абсолютные изменения уровней по модулю всегда уменьшаются со временем;
- ускорения абсолютных изменений имеют знак, противоположный самим абсолютным изменениям, а по модулю постепенно уменьшаются;
- темпы изменения (цепные) постепенно приближаются к 100% при $t \to \infty$.

Логарифмический тренд, как и гиперболический, отражает постепенно затухающий процесс изменений. Различие состоит в том, что затухание по гиперболе происходит быстро при приближении к конечному пределу, а при логарифмическом тренде затухающий процесс продолжается без ограничения гораздо медленнее.

2.1.6. Логистический тренд и его свойства

Логистическая форма тренда подходит для описания такого процесса, при котором изучаемый показатель проходит полный цикл развития. Начиная, как правило, от нулевого уровня, значения уровней растут сначала медленно, затем темп роста ускоряется, в середине цикла ускорение становится нулевым, т.е. рост происходит по линейному тренду, затем, в завершающей части цикла, рост замедляется по гиперболе по мере приближения к предельному значению показателя.

С одной стороны, логистическую тенденцию можно считать объединением трех разных по типу тенденций: параболической с ускоряющимся ростом на первом этапе, линейной - на втором и гиперболической с замедляющимся ростом - на третьем этапе. Но есть доводы и в пользу рассмотрения всего цикла развития как особого единого типа тенденции со сложными, переменными свойствами, но постоянным направлением изменений в сторону увеличения или уменьшения уровней.

Рассмотрение таких временных рядов, как проявление единой логистической тенденции, позволяет уже на первом этапе рассчитать всю траекторию развития, определить сроки перехода от ускоренного роста к замедленному, что чрезвычайно важно при планировании производства или реализации нового вида товара, спрос на который будет проходить все этапы логистической тенденции вплоть до насыщения рынка.

В диапазоне изменения уровней от нуля до единицы уравнение логистического тренда имеет вид:

$$\hat{y}_i = \frac{1}{e^{a_0 + a_1 t_i} + 1}$$

При $a_0 > 0$, $a_1 < 0$, с ростом номеров периодов времени t_i получаем логистическую тенденцию роста уровней, причем если нужно начать рост почти от нулевой величины, то a_0 должно быть примерно равно 10. Чем больше модуль a_1, тем быстрее возрастание уровней. При $a_0 < 0$ и $a_1 > 0$ имеем логистический тренд со снижением уровней, причем если снижение должно начаться почти от единицы, то a_0 должно быть примерно равно -10. Чем больше a_1, тем быстрее будут снижаться уровни.

Если же диапазон изменения уровней ограничен не нулем и единицей, а любыми значениями, определяемыми исходя из существа задачи, обозначаемыми y_{max} и y_{min}, то формула логистического тренда принимает вид:

$$\hat{y}_i = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{e^{a_0 + a_1 t_i} + 1} + y_{\min}$$

2.2. Распознавание типа тренда и оценка его параметров

2.2.1. Графический анализ для распознавания типа тенденции

Как правило, тип тренда должен соответствовать характерным особенностям процесса. На практике зачастую используется графический анализ для распознавания типа тенденции.

Графическое изображение во многих случаях позволяет приближенно выявить тип тенденции временного ряда. Но для этого следует соблюдать следующие правила построения графика:

- точное соблюдение масштаба как по величине уровней ряда, так и по времени;
- временные интервалы откладывают по оси абсцисс, величины уровней ряда - по оси ординат;
- по каждой оси следует установить такой масштаб, чтобы ширина графика была примерно в 1,5 раза больше его высоты;
- если уровни ряда на всем протяжении периода много больше нуля и между собой различаются не более чем на 20-30%, то следует обозначить перерыв на оси ординат, увеличить масштаб так, чтобы меньший из уровней ненамного превышал разрыв оси;
- если уровни ряда различаются в десятки, сотни и тысячи раз, ось ординат следует разметить в логарифмическом масштабе, чтобы равные отрезки означали различие уровней в одинаковое число раз. Интерпретация вида графика будет другой: при линейном масштабе график, близкий к прямой линии, означает линейную тенденцию, а при логарифмическом масштабе оси ординат прямая линия показывает экспоненциальную тенденцию;
- необходимо строго соблюдать равенство промежутков времени на равных отрезках оси абсцисс. Логарифмический масштаб по времени не рекомендуется, так как он крайне затруднит интерпретацию графика.

Следует отметить, что не всегда график позволяет выбрать тип линии тренда. Трудно графически отличить параболу от экспоненты, логарифмическую кривую от гиперболы и т.д. Оценка типа тренда по типу графика включает субъективные моменты, что может привести к ошибке. Есть много способов объективной, статистико-математической оценки пригодности того или иного типа линии.

2.2.2. Оценка параметров линейного, параболического и гиперболического трендов с помощью метода наименьших квадратов

Основой методики проверки статистических гипотез о типе тренда является метод наименьших квадратов (МНК), который дает оценки параметров, отвечающие принципу максимального правдоподобия. Суть данного принципа состоит в том, что сумма квадратов отклонений фактических уровней от тренда (от выравненных по уравнению тренда уровней) должна быть минимальной для данного типа уравнения.

Данная методика близка к методике корреляционно- регрессионного анализа связей - парной регрессии. Однако между ними есть и принципиальные различия: выступающий при расчете уравнения тренда в качестве независимой переменной ряд номеров периодов или моментов времени не является случайной варьирующей переменной регрессионного анализа. Ряд значений времени - это жестко упорядоченный ряд величин, и, следовательно, не может быть речи о корреляции между ним и значениями зависимой переменной - варьирующих уровней показателя, изменяющегося во времени.

Для уравнения *прямой линии тренда* величина параметров a и b определяется по МНК путем приравнивания к нулю частных первых производных функции

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a - bt_i^2\right).$$

Тогда система нормальный уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} t_i + b\sum_{i=1}^{n} t_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i t_i \end{cases}$$

Решая эти уравнения с двумя неизвестными по данным фактического временного ряда y_i, получаем значения a и b. Если номера периодов (моментов) времени отсчитываются от начала ряда так, что первый период (момент) обозначен номером t = 1, то свободный член a есть уровень тренда для предыдущего периода (момента), а не первого в ряду, как часто ошибочно полагают. Для первого периода уровень тренда ŷ = a + b, для второго ŷ = a + 2b и т.д.

Однако рациональнее начало отсчета времени перенести в середину ряда, т.е. при нечетном n - на период (момент) с номером (n+1)/2, а при четном числе уровней ряда - на середину между периодом с номером n/2 и (n/2)+1. В последнем случае все номера периодов t_i будут дробными. При нумерации периодов времени точно от середины ряда половина номеров t_i будет отрицательными числами (аналогично годам до нашей эры), а половина - положительными, их сумма равна нулю. В таком случае система нормальных уравнений МНК распадается на два уравнения с одним неизвестным в каждом:

$$na = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$b\sum_{i=1}^{n} t_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i t_i$$

Откуда имеем:

$$a = \frac{\sum_{i=2}^{n} y_i}{n} = \bar{y};$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2}$$

Зачастую многие компьютерные программы не предусматривают такого упрощения, и нумерация периодов (моментов) в них производится с начала ряда, с номера t = 1, причем пользователь об этом не предупреждается.

Уравнение параболического (II порядка) тренда, Для вычисления параметров a, b, c по МНК три частные производные функции $f(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y})^2$ приравниваются к нулю, и после преобразований получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} na+b\sum_{i=1}^{n}t_i+c\sum_{i=1}^{n}t_i^2=\sum_{i=1}^{n}y_i \\ a\sum_{i=1}^{n}t_i+b\sum_{i=1}^{n}t_i^2+c\sum_{i=1}^{n}t_i^3=\sum_{i=1}^{n}y_it_i \\ a\sum_{i=1}^{n}t_i^2+b\sum_{i=1}^{n}t_i^3+c\sum_{i=1}^{n}t_i^4=\sum_{i=1}^{n}y_it_i^2 \end{cases}$$

При переносе начала отсчета периодов (моментов) времени в середину ряда суммы нечетных степеней номеров этих периодов $\sum t_i$ и $\sum t_i^3$ обращаются в нуль. При этом второе уравнение обращается в уравнение с одним неизвестным, откуда:

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_it_i}{\sum_{i=1}^{n}t_i^2}$$

Образуется система из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} na+c\sum_{i=1}^{n}t_i^2=\sum_{i=1}^{n}y_i \\ a\sum_{i=1}^{n}t_i^2+c\sum_{i=1}^{n}t_i^4=\sum_{i=1}^{n}y_it_i^2 \end{cases}$$

В данной системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n}t_i^2=\frac{n^3-n}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n}t_i^4=\frac{3n^5-10n^3+7n}{240}$$

Гиперболическое уравнение тренда отличается от линейного уравнения тем, что вместо первой степени включает номера периодов времени (моментов) в минус первой степени: $1/t_i$. Соответственно нормальные уравнения метода наименьших квадратов получат вид:

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} + b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{t_i} \end{cases}$$

Однако при этом нельзя, в отличие от линейного тренда, переносить начало отсчета периодов времени в середину, так как гипербола не имеет постоянного параметра изменения уровней на протяжении всего периода, и все величины $1/t_i$ должны быть положительными.

2.2.3. Логарифмирование как инструмент оценки параметров экспоненциального, логарифмического и логистического уравнений тренда

Данные типы трендов объединены в одну группу в связи с необходимостью при оценке их параметров прибегать к логарифмированию. При расчете логарифмического уравнения тренда логарифмируют номера периодов (моментов) времени, а при расчете параметров экспоненциального и логистического трендов - сами уровни. Поскольку отрицательные числа не имеют действительных логарифмов, если нужно логарифмировать номера периодов времени, то нельзя переносить начало их отсчета в середину ряда. Если же сами уровни могут принимать отрицательные значения, например, уровни финансового результата от реализации, уровни температуры воздуха или почвы, то необходимо перенести начало отсчета уровней на величину, алгебраически меньшую реального наименьшего уровня. По окончании расчета тренда нетрудно восстановить обычные единицы измерения.

Для экспоненциального уравнения тренда формула уравнения имеет вид:

$$\hat{y}_i = ak^{t_i} .$$

Для нахождения параметров a и k уравнение логарифмируем:

$$\ln \hat{y}_i = \ln a + t_i \ln k$$

В такой форме, т.е. для логарифмов, уравнение соответствует линейному, следовательно, метод наименьших квадратов дает для логарифмов a и k нормальные уравнения, аналогичные таковым для параметров a и b линейного тренда:

$$\begin{cases} n\ln a + \ln k\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i \\ \ln a\sum_{i=1}^{n} t + \ln k\sum_{i=1}^{n} t_i^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i \ln y_i \end{cases}$$

Так как номера периодов времени не логарифмируются, можно перенести начало отсчета в середину ряда и упростить систему:

$$\begin{cases} n\ln a = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i \\ \ln k\sum_{i=1}^{n} t_i^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i \ln y_i \end{cases}$$

Отсюда получаем систему:

$$\begin{cases} \ln a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \ln y_i}{n} \\ \ln k = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_i \ln y_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2} \end{cases}$$

Особенность *логарифмического уравнения тренда* заключается в том, что логарифмировать необходимо номера периодов (моментов) времени. Следовательно, все номера должны быть положительными числами. Однако это вовсе не означает, что нумерацию следует начинать с числа 1. Дело в том, что величина логарифма быстро возрастает при переходе от единицы к двум: натуральный логарифм единицы равен нулю, а логарифм двух равен 0,693, имеем рост на 0,693; в то же время логарифм четырех равен 1,386, а логарифм пяти равен 1,609, имеем прирост лишь на 0,223 и т.д. Если и уровень изучаемого ряда вначале возрастает втрое быстрее, чем между четвертым и пятым периодом, тогда нумерация от единицы допустима. Если же уменьшение прироста уровней происходит значительно медленнее, нумерацию периодов (моментов) следует начинать не с единицы, а с большего числа.

Логистическое уравнение тренда имеет вид:

$$\hat{y}_i = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{e^{a_0 + a_1 t_i} + 1} + y_{\min}$$

При расчете этого уравнения логарифмируют величину, производную от уровней ряда, но не номера периодов (моментов) времени, эту нумерацию рациональнее проводить от середины ряда.

Особенностью логистического тренда является этап обоснования значений максимального и минимального уровней временного ряда.

Это обоснование осуществляется на основе, во-первых, уровней фактического ряда, во-вторых, теоретических, т.е. внешних по отношению к статистике, соображений. относящихся к содержанию изучаемого процесса.

Уравнение логистического тренда в общем виде непосредственно логарифмировать невозможно. Для этого необходимо преобразовать его в форму:

$$\frac{\hat{y}_{\max} - \hat{y}_{\min}}{\hat{y}_i - y_{\min}} - 1 = e^{a_0 + a_1 t}$$

Произведем замену переменной:

$$\frac{\hat{y}_{\max} - \hat{y}_{\min}}{\hat{y}_i - y_{\min}} - 1 = \hat{\xi}, \quad \hat{\xi} = e^{a_0 + a_1 t}$$

Тогда получим:

$$\ln \hat{\xi} = a_0 + a_1 t_i$$

Условие метода наименьших квадратов:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\ln \xi_i - \ln \hat{\xi}_i \right)^2 \to \min$$

2.3. Моделирование периодических колебаний временного ряда

2.3.1. Основные методы выявления периодической компоненты

Для проверки предположения о существенности периодической компоненты ряда динамики целесообразно использовать такие критерии случайности, которые имеют наибольшую мощность относительно альтернативной гипотезы о цикличности ряда. Наиболее простым для применения и зрительно понятным является критерий «пиков» и «ям». В основе этого критерия лежит подсчет числа экстремальных точек ряда p, который осуществляется следующим образом:

$$p_t = \begin{cases} 1, & \text{если } y_{t-1} < y_t < y_{t+1} \\ \text{или} & y_{t-1} > y_t > y_{t+1} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

где t = n + 1,

n – число наблюдений в ряду динамики.

Для случайного ряда математическое ожидание числа экстремальных точек:

$$\bar{p} = \frac{2 \times (n-2)}{3}$$

Проверка гипотезы сводится к сравнению $\bar{p}$ с расчетным значением $\hat{p}$. Если эти значения близки, то можно отказаться от дальнейшей проверки и признать ряд случайным. Если же $\bar{p}$ и $\hat{p}$ значительно отличаются друг от друга, то проводится дальнейшая проверка гипотезы, основанная на подсчете фаз различной длины.

Фазой называется интервал между двумя соседними уровнями, для которых $p_t = 1$. Для определения длины фазы l достаточно просто найти разности индексов двух соседних экстремальных точек, затем подсчитать число фаз N_1, N_2, N_3, длин $l_1=1$, $l_2=2$, $l_3=3$. Теоретическое значение числа фаз длины l для случайного ряда следующее:

$$\hat{N}_1 = \frac{2\times(n-1-2)\times(1^2-3\times1+1)}{(1+3)}$$

Естественная процедура проверки случайности сводится к сравнению наблюдаемых значений N_1, N_2, N_3, с теоретическим значением N_1. Однако при небольшом числе наблюдений n критерий χ^2 здесь непосредственно использовать нельзя, так как в этом случае длины фаз l_i не являются независимыми. Доказано, что при разбиении длины фазы на три группы: $l_1=1$, $l_2=2$, $l_3=3$, (две степени свободы) - статистика χ^2 может быть использована в обычной форме (ν = 2,5) при χ^2 = 6.3. Расчетные значения χ^2 в случае трех групп длин фазы определяются по формуле:

$$\chi^2 = \sum_{l=1}^{3} \frac{(N_l - \hat{N}_l)}{N_l}$$

Если $\chi^2 \geq 6.3$, то колебания исходного ряда нельзя считать чисто случайными и ряд содержит периодическую составляющую. Этот критерий весьма чувствителен к периодическим колебаниям и имеет практически нулевую эффективность относительно альтернативы наличия тренда, поэтому он может применяться непосредственно к исходному ряду динамики в отличие от других критериев, которые требуют, чтобы из ряда динамики предварительно была выделена систематическая составляющая. После того как установлена периодическая составляющая, проводится ее анализ.

2.3.2. Методы измерения сезонных колебаний. Индексы сезонности

При рассмотрении квартальных или месячных данных многих социально-экономических явлений часто обнаруживаются определенные, постоянно повторяющиеся колебания, которые существенно не изменяются за длительный период времени. Они являются результатом влияния природно-климатических условий, общих экономических факторов, а также ряда многочисленных разнообразных факторов, которые частично являются регулируемыми. В статистике периодические колебания, которые имеют определенный и постоянный период, равный годовому промежутку, носят название сезонных колебаний, или сезонных волн, а динамический ряд в этом случае называют тренд-сезонным, или просто сезонным рядом динамики.

В качестве наиболее распространенных методов измерения сезонной волны, как правило, рассматриваются следующие группы.

1. Методы, основанные на применении средней арифметической:

- метод абсолютных разностей;
- метод отношений средних помесячных к средней за весь период;
- метод отношений помесячных уровней к средней данного года.

2. Методы, основанные на применении относительных величин:

- метод относительных величин;
- метод относительных величин на основе медианы;
- метод У. Персонса (цепной метод).

3. Методы, основанные на применении механического выравнивания:

- метод скользящих средних;
- метод скользящих сумм и скользящих средних.

4. Методы, основанные на применении аналитического выравнивания:

- выравнивание по прямой;
- выравнивание по параболе и экспоненте;
- выравнивание по ряду Фурье.

Сезонные колебания характеризуются специальными показателями, которые называются индексами сезонности (I_S). Совокупность этих показателей отражает сезонную волну. Индексами сезонности являются процентные отношения фактических внутригодовых уровней к постоянной или переменной средней.

Для выявления сезонных колебаний обычно берут данные за несколько лет, распределенные по месяцам. Данные за несколько лет (не менее трех) используют для того, чтобы выявить устойчивую сезонную волну, которая не отражала бы случайные условия одного года.

Для вычисления индексов сезонности применяют различные методы. Если ряд динамики не содержит ярко выраженной тенденции в развитии, то индексы сезонности вычисляют непосредственно по эмпирическим данным без их предварительного выравнивания:

$$I_s = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}} \times 100\% ,$$

где $\bar{y}_i$ - средняя величина уровня для каждого одноименного периода

$\bar{y}$ - общее среднее значение за весь период наблюдения.

Если ряд динамики содержит определенную тенденцию в развитии, то прежде чем вычислить сезонную волну фактические данные нужно обработать так, чтобы выявить общую тенденцию. Обычно для этого прибегают к аналитическому выравниванию ряда динамики.

В общем виде формулу расчета индекса сезонности данным способом можно записать так:

$$I_s = \frac{\left[\sum y_i / \bar{y}_i\right]}{n} .$$

Для сопоставления величины сезонных колебаний по различным территориям или периодам может быть рассчитан коэффициент сезонности, представляющий собой среднеквадратическое отклонение:

$$k_s = \sigma = \sqrt{\frac{(i_c - 1)^2}{n}}$$

где i_c - индекс сезонности для каждого периода (квартала, месяца, дня и т.д.)

n – число таких периодов (кварталов, месяцев, дней и т.д.)

Стоит отметить, что величина k_s прямо пропорциональна величине сезонных колебаний. Соответственно, чем больше данное значение, тем выше величина сезонных колебаний.

2.3.3. Моделирование сезонных колебаний с помощью фиктивных переменных

Рассмотрим метод моделирования временного ряда, содержащего сезонные колебания, основанный на включении в модель фиктивных переменных.

Количество фиктивных переменных принимается равным числу наблюдений в пределах одного цикла колебаний без единицы. Например, при моделировании поквартальных данных необходимо ввести три дополнительные переменные

$$z_1 = \begin{cases} 1, & весна \\ 0, & не\ весна \end{cases}; \quad z_2 = \begin{cases} 1, & лето \\ 0, & не\ лето \end{cases}; \quad z_3 = \begin{cases} 1, & осень \\ 0, & не\ осень \end{cases}.$$

Зиме в этом случае соответствуют нулевые значения всех фиктивных переменных. Уравнение регрессии с учетом фиктивных переменных принимает вид:

$$y_t = a + b \times t + c_1 \times z_1 + c_2 \times z_2 + c_3 \times z_3 + \varepsilon_t$$

Коэффициенты c_i характеризуют отклонение уровней первых трех сезонов по отношению к последнему. Фактор времени в этой модели позволит учесть влияние тенденции. Поэтому модель с фиктивными переменными может рассматриваться как частный случай аддитивной модели временного ряда.

Поскольку фиктивные переменные принимают только два возможных значения 1 или 0, то практически имеем модель тенденции для каждого квартала.

Иными словами, параметры c_i при фиктивных переменных отражают изменение уровня ряда соответствующего квартала под воздействием сезонности по сравнению с кварталом.

Часто в практических исследованиях сезонность изучают по месячным данным, ибо сезонность может проявлять себя и внутри квартала. В этом случае применение модели с фиктивными переменными потребует информации не менее, чем за 7–8 лет, чтобы на каждый параметр модели приходилось достаточное число степеней свободы и можно было получить надежные оценки параметров. При ограниченной по числу лет информации изучение сезонности по месячным данным целесообразно вести по аддитивной модели, основанной на разложении уровней временного ряда по компонентам.

2.3.4. Аналитическое выравнивание сезонных колебаний с помощью ряда Фурье

В ВР нередко содержатся периодические колебания вокруг общей тенденции. В таких случаях становится целесообразным применение гармонического анализа, целью которого является выявление и измерение периодических колебаний в рядах динамики. Задача гармонического анализа состоит в выявлении гармоник, несущих основную информацию о наблюдаемом процессе. С помощью преобразования Фурье любой ВР можно представить в виде суммы конечного числа гармоник.

После проведения аппроксимации ряда полиномом низкой степени и удаления тренда, в зависимости от того, обнаружены по спектральному анализу и вейвлет-анализу значимые и устойчивые гармоники или нет, проводится гармонический анализ.

С помощью преобразования Фурье любой ВР можно представить в виде суммы конечного числа гармоник.

Для каждой точки этого ряда справедливо выражение

$$y_t = f(t) + \sum\left(a_k \cos\left(kt\frac{2\pi}{n}\right) + b_k \sin\left(kt\frac{2\pi}{n}\right)\right), t = 1,2,\ldots,n$$

Здесь y_t – фактический уровень ряда в момент (интервал) времени t;
f(t) – выровненный уровень ряда в тот же момент времени,
a_k, b_k – параметры колебательного процесса (гармоники) с номером k, в совокупности оценивающие размах отклонения от общей тенденции и сдвиг колебаний относительно начальной точки. Общее число колебательных процессов, которые можно выделить для ряда, состоящего из n уровней, равно n/2. Обычно ограничиваются меньшим числом наиболее важных гармоник, выделяемых с помощью спектрального и вейвлет-анализа. Параметры гармоники с номером k определяются по формулам:

$$\varepsilon_t = y_t - f(t);$$

$$a_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t \times \cos\left(kt\frac{2\pi}{n}\right), k = 1,2,\ldots,\frac{n}{k}-1$$

$$b_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t \times \sin\left(kt\frac{2\pi}{n}\right), k = 1,2,\ldots,\frac{n}{k}-1$$

$$a_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t \times \cos(\pi t); \quad b_{\frac{n}{2}} = 0$$

Ряд Фурье с двумя гармониками имеет вид:

$$y_t = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t$$

Чаще всего описание временного ряда не превышает четырех гармоник.

Этот метод хорошо подходит для аналитического выражения периодических колебаний, имеющих синусоидальную форму.

Ряды Фурье представляют собой декомпозицию динамического ряда на составляющие, которые связаны с частотой колебаний уровней. Построение таких рядов зависит от наличия или отсутствия тенденции в ряду динамики. При отсутствии тенденции, т.е. при стационарном динамическом ряде, методика построения ряда Фурье применяется непосредственно к уровням временного ряда. Если же в изучаемом ряду динамики наблюдается тенденция, то ряд Фурье применяется к отклонениям от тенденции.

В экономике чаще всего встречаются динамические ряды с наличием тенденции. В этом случае при существовании периодических колебаний ряд Фурье может быть использован, если привести ряд к стационарному виду. Для этой цели можно найти линейный тренд $\hat{y}_t = a + b_t$ и применить ряд Фурье к остаточным величинам $e_t = y_t - \hat{y}_t$. Возможен и другой путь решения: ряд Фурье строится по первым разностям, что равносильно учету линейного тренда. Иными словами, по ряду динамики определяются цепные абсолютные приросты: $\Delta_t = y_t - y_{t-1}$, которые далее используются как информационная база для построения ряда Фурье.

Таким образом, очевидно, что ряд Фурье может использоваться для отображения и прогнозирования динамики с сезонными колебаниями. При этом амплитуда колебаний не должна превышать четыре квартала или 12 месяцев, так как сезонные колебания – это внутригодичные колебания. Вместе с тем сезонные колебания могут изучаться и с помощью иных моделей, позволяющих не только учесть сезонность, но и измерить ее количественно, что имеет, несомненно, практическое значение.

2.4. Моделирование случайной составляющей временного ряда

2.4.1. Модели авторегрессии

Модель авторегрессии 1-го порядка – AR(1) может быть определена выражением:

$$y(t) = \alpha \times y(t-1) + \varepsilon(t)$$

где α – некоторый числовой коэффициент, не превосходящий по абсолютной величине единицу ($|\alpha| \leq 1$), а ε(t) – последовательность случайных величин, образующих белый шум.

В качестве предварительного порядка модели AR(p) можно рассматривать такое число p, начиная с которого все последующие оценки выборочной частной автокорреляционной функции отклоняются от нуля не более чем на $\frac{\pm 2}{\sqrt{n}}$. Окончательный подбор порядка модели AR(p) процесса связан со статистической значимостью полученных коэффициентов модели и детальным изучением поведения остатков, получаемых вычитанием из исходного ряда значений подобранной модели. Если полученные остатки ведут себя как белый шум, то процесс подбора модели можно считать завершенным. В противном случае следует изменить порядок модели или перейти к более сложным комбинированным моделям авторегрессии-скользящего среднего.

В общем виде авторегрессионный процесс p-го порядка – AR(p) может быть записан так:

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \ldots + \beta_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Параметры β_j ($j = 1,\ldots,p$) модели обычно оцениваются МНК при предположениях, что случайная величина ε_t распределена нормально и независимо от t и коэффициенты модели по абсолютной величине значения меньше единицы.

2.4.2. Модели скользящего среднего

В частном случае общего линейного процесса, когда только первые q из весовых коэффициентов β_j – ненулевые, процесс имеет вид:

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \ ,$$

где символы $-\theta_1$, $-\theta_2,\ldots$, $-\theta_q$ используются для обозначения конечного набора параметров β, участвующих в линейном процессе.

Процесс называется моделью скользящего среднего порядка q и сокращенно обозначается MA(q).

2.4.3. Модели авторегрессии-скользящего среднего

На практике для получения экономичной параметризации анализируемого процесса иногда бывает необходимо включить в модель как члены, описывающие авторегрессию, так и члены, моделирующие остаток в виде скользящего среднего. Такой линейный процесс имеет вид:

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \ldots + \beta_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

и называется процессом авторегрессии-скользящего среднего порядка (p, q). Сокращенное обозначение для него ARMA (p,q).

При очень общих условиях стационарный ARMA-процесс может быть представлен как бесконечный AR-процесс или как бесконечный MA-процесс. Использование ARMA-процессов позволяет строить более компактные модели реальных временных рядов по сравнению со схожими по поведению AR- или MA-процессами.

2.4.4. Авторегрессионная модель с условной гетероскедастичностью

Если задано распределение вероятностей y_t, условное по предопределенным к моменту t величинам y_{t-1}, y_{t-2} ,…, составляющим информационное множество Ω_t, то одношаговым прогнозом значения y_t на основе этой информации является условное математическое ожидание $M(y_t|\Omega_t)$, ошибкой прогноза – условная дисперсия $D(y_t|\Omega_t)$.

Оба этих выражения в принципе допускают зависимость от Ω_t. Если же условная дисперсия в действительности постоянна и не зависит от истории процесса, то такой процесс обладает свойством условной гомоскедастичности.

Рассмотрим в качестве примера авторегрессию

$$y_t = \gamma \times \gamma_{t-1} + \varepsilon_t \ ,$$

где ε – белый шум с дисперсией σ^2 . Условное среднее равно $\gamma \times \gamma_{t-1}$, тогда как условная дисперсия равна σ^2 и не зависит от истории процесса, который поэтому является условно гомоскедастичным. Являются таковыми и все процессы ARMA.

Далее рассматриваются процессы, обладающие свойством условной гетероскедастичности, т.е. такие условная дисперсия которых зависит от истории процесса и более точно характеризует степень присущей прогнозам неопределенности.

Модель ARCH, т.е. модель с авторегрессионной условной гетероскедастичностью (autoregressive conditional heteroskedasticity), предложена Р. Энглом в 1982 г. для моделирования кластеризации волатильности. Процесс ARCH p-го порядка, $\{\varepsilon_e\}_{t=-\infty}^{t=+\infty}$, задается следующим соотношением для условной дисперсии ε_t:

$$\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1} \approx N\left(0, \sigma_t^2\right),$$

$$\sigma_t^2 = \mu + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \gamma_p \varepsilon_{t-p}^2 \ .$$

Здесь $\Omega_{t-1} = \left(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2,\ldots}\right)$ - предыстория процесса ε_t, а σ_t^2 - условная по предыстории дисперсия ε_t, т.е. $\sigma_t^2 = D(\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1}) = M\left(\varepsilon_t^2 \mid \Omega_{t-1}\right)$.

Условную дисперсию часто называют волатильностью процесса. Для того чтобы условная дисперсия оставалась положительной, требуется выполнение соотношений $\mu > 0, \gamma_1,...,\gamma_p \geq 0$.

Смысл модели ARCH состоит в том, что если абсолютная величина ε_t оказывается большой, то это приводит к повышению условной дисперсии в последующие периоды. В свою очередь при высокой условной дисперсии более вероятно появление больших (по абсолютной величине) значений ε_t. Наоборот, если значения ε_t в течение нескольких периодов близки к 0, то это приводит к понижению условной дисперсии в последующие периоды практически до уровня μ. В свою очередь, при низкой условной дисперсии более вероятно появление малых (по абсолютной величине) значений ε_t.

Таким образом, ARCH-процесс характеризуется инертностью условной дисперсии (кластеризацией волатильности).

Модель GARCH (generalized ARCH – обобщенная модель ARCH), предложенная Т. Боллерслевом, является альтернативной модификацией модели ARCH, позволяющей получить более длинные кластеры при малом числе параметров. Модель GARCH дает возможность обойтись меньшим количеством параметров по сравнению с моделью ARCH, если речь идет об условной дисперсии.

Модель GARCH(p, q) описывается формулой:

$$\sigma_t^2 = \mu + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 + ... + \gamma_p\varepsilon_{t-p}^2 + \delta_1\sigma_{t-1}^2 + ... + \delta_q\sigma_{t-q}^2 = \mu + \sum_{j=1}^{p}\gamma_j\varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{q}\delta_j\sigma_{t-j}^2$$

При этом предполагается, что

$$\mu > 0, \quad \gamma_1,...,\gamma_p \geq 0, \quad \delta_1,...,\delta_q \geq 0 .$$

На практике, как правило, достаточно взять p = 1 и q = 1. Изредка используют GARCH(1,2) или GARCH(2,1).

Как и в модели ARCH, σ_t^2 служит условной дисперсией процесса:

$$\varepsilon_t \mid \Omega_t \approx N\left(0, \sigma_t^2\right) .$$

Процесс GARCH можно записать в эквивалентной форме, если обозначить

$$\eta_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 :$$

$$\varepsilon_t^2 = \mu + \sum_{j=1}^{m} \left(\delta_j + \gamma_j\right)\varepsilon_{t-j}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^{q} \delta_j \eta_{t-j}$$

где m = max(p, q).

В этой записи подразумевается $\gamma_j = 0$ при $j > p$ и $\delta_j = 0$ при $j > q$.

Стандартным методом оценивания для моделей GARCH является метод максимального правдоподобия. Оценки максимального правдоподобия являются состоятельными и асимптотически эффективными.

Важнейший вывод, который следует из анализа модели ARCH, состоит в том, что наблюдаемые изменения в дисперсии (волатильность) ВР могут иметь эндогенный характер, т.е. порождаться определенной нелинейной моделью, а не какими-то внешними структурными сдвигами.

Часть 3. Анализ качества моделей. Устойчивость моделей

3.1. Анализ качества моделей

Применение критериев качества позволяет выявить степень адекватности модели наблюдениям и ее пригодности для аппроксимации в данном выборочном пространстве по известным внутренним, а также смешанным и внешним статистическим мерам соответствия.

Внутренние меры соответствия. К внутренним мерам соответствия относятся меры качества, полученные по построенной по исходным данным модели, такие как:

1) остаточная сумма квадратов:

$$SS_e = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 .$$

2) стандартная ошибка наблюдений:

$$\sigma = \sqrt{\frac{SS_e}{\nu_e}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{n-p}} ,$$

где p – число параметров модели.

3) коэффициент множественной корреляции:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)\left(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}}\right)^2}} .$$

4) коэффициент множественной детерминации R^2.

5) скорректированный коэффициент множественной корреляции:

$$R_c = \sqrt{1 - \frac{n\left(1 - R^2\right)}{n-p}} .$$

6) скорректированный коэффициент множественной детерминации R_c^2

7) наблюдаемое значение F-статистики:

$$F = \frac{R^2 (n-p)}{\left(1 - R^2\right)(p-1)} .$$

Смешанные меры соответствия. В регрессионном анализе различают несколько видов ошибок прогноза. Для модели, в которой отсутствует смещение, можно предложить вычислять дисперсию отдельного прогноза – дисперсию оценки регрессии, или дисперсию оценки отдельного отклика Y. Для серии наблюдений необходимо ввести обобщенную (среднюю) дисперсию.

Одну из смешанных мер, основанных на формуле для отдельного прогноза, предложил Меллоус. Используя наблюдения, по которым строилась регрессионная модель, он вводит шкалированную сумму дисперсий, подсчитанную для n наблюдений.

Общим свойством таких мер является прямое или косвенное включение составляющей, характеризующей систематическую ошибку модели. К ограничениям смешанных мер согласия следует отнести использование гипотезы о несмещенности полной модели. Кроме того для смешанных мер используются те же наблюдения, что и для внутренних критериев.

Из рассмотренных мер наиболее удобной представляется мера C_p. С ее помощью можно оценить, какая из конкурирующих моделей обеспечивает более точный прогноз с учетом в целом случайных и систематических ошибок.

К смешанным мерам относятся:

1) мера Меллоуса:

$$C_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{\sigma^2} + 2p - n.$$

2) мера:

$$J_p = \frac{n+p}{n-p} SS_e.$$

3) усредненная дисперсия для MY:

$$D\hat{y} = \frac{\sigma^2 C_p}{n}.$$

4) усредненная дисперсия для Y:

$$Dy = \frac{\sigma^2 C_p}{n} + \sigma^2.$$

Внешние меры соответствия. Основаны либо на анализе устойчивости коэффициентов модели в выборочном пространстве, либо на анализе расхождений между прогнозом и известным наблюдаемым значением для объектов, не участвовавших в получении модели.

Выборка наблюдений делится на две части – обучающую и контрольную. Обучающая выборка наблюдений используется для построения модели, тогда как контрольная последовательность (помимо возможности проверки устойчивости коэффициентов модели) дает возможность оценить несмещенность модели, т.е. качество прогноза по мерам, основанным на разностях между наблюденным значением отклика и его прогнозом или на их функциях.

Для временных рядов контрольной выборкой является часть наблюдений в конце ряда, не использованная при построении комплексной модели.

К внешним мерам соответствия относятся:

1) сумма квадратов отклонений:

$$SS_{ed} = \sum_{i=1}^{k} (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

где k – объем контрольной выборки.

2) случайная ошибка (внешнее среднеквадратическое отклонение):

$$\sigma_\Delta = \sqrt{\frac{SS_{ed}}{\nu_{ed}}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} \Delta_i^2}{k-p}},$$

где k – объем контрольной выборки, p - число регрессоров в модели,

$\Delta_i = y_i - \hat{y}_i$

3) «внешний» коэффициент множественной корреляции:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{k}(y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(y_i - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^{k}(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2}}.$$

3.2. Диагностика остатков

После выполнения расчетов с применением МНК уточняется степень соблюдения основных предположений регрессионного анализа и теоремы Гаусса-Маркова.

Алгоритм проверки соблюдения предположений предназначен для получения оптимальной модели. Существует возможность диагностики соблюдения предположений регрессионного анализа на основе следующих предположений: определенность модели, независимость регрессоров, нормальность распределения ошибок, нулевое значение математического ожидания ошибок, постоянство дисперсии, независимость ошибок. Для диагностики регрессионной модели существует набор специальных процедур, таких как t-критерий, χ^2 -критерий, F-критерий, критерии проверки на нормальность, критерий Бартлетта, критерий Дарбина-Уотсона и др.

Модель, признанная пригодной к использованию, может быть либо недоопределенной, либо избыточной (переопределенной). Признаком избыточности является наличие регрессоров, для которых значения частных t-статистик оказываются меньше критического $t_T(\alpha/2; n - p)$.

Недоопределенность модели исследуется лишь визуально по соответствующим графикам остатков. Автоматически подсчитывается заполнение тренда. Результат выдается в процентном соотношении.

Для оценки степени независимости регрессоров (отсутствие мультиколлинеарности) проверяется гипотеза о независимости переменных H_0: Det|R||=1, где Det |R| – определитель матрицы парных коэффициентов корреляции между факторами.

На практике часто проверяется матрица парных коэффициентов корреляции. Если в матрице имеются статистически значимые коэффициенты корреляции, то мультиколлинеарность считается обнаруженной.

Проверка нормальности распределения может быть осуществлена как графическими методами, так и с помощью статистических критериев.

Из статистических критериев используется критерий χ^2, при котором проверяется гипотеза H_0: $d \sim N(0, 1)$. Для проверки нормальности могут быть использованы критерий Шапиро-Уилка, критерий Колмогорова-Смирнова и другие.

Для анализа предположения о равенстве нулю математического ожидания применяется критерий проверки значения среднего. Нарушение этого предположения сигнализирует об ошибках в расчетах.

Нарушение условия однородности наблюдений или постоянства дисперсии обычно проверяется по графикам остатков, а также статистическими критериями. Например, критерий равенства (неравенства) двух дисперсий позволяет проверить гипотезу об однородности дисперсий в двух нормальных совокупностях с параметрами (μ_1, σ_1^2) и (μ_2, σ_2^2) объемом n_1, n_2; критерий Бартлетта позволяет проверить гипотезу об однородности дисперсий в нескольких (более двух) нормальных совокупностях.

Для проверки нарушения условия независимости ошибок привлекаются графики остатков (d, T), где T – время наблюдения. Наряду с графическим представлением используется и аналитический критерий Дарбина-Уотсона.

3.3. Измерение устойчивости уровней ряда

3.3.1. Устойчивость временного ряда

Первоначально следует определить, что именно включается в понятие устойчивости временного ряда. При анализе динамики исследователь стремится выделить изменения показателя под влиянием основополагающих причин и под влиянием случайных факторов. Однако это разделение - условный прием. Динамика показателя, как правило, включает в себя направленные изменения (тенденцию) и случайные колебания вокруг этого тренда. Отсюда возникает необходимость отдельного рассмотрения устойчивости уровней ряда и устойчивости тенденции динамики. Можно сказать, что устойчивость временного ряда обеспечивается наличием тренда, тенденции изменения и минимизацией колебаний фактических уровней временного ряда около этого тренда. Достижение устойчивого роста результативных показателей часто является основной задачей в экономике и других областях человеческой деятельности.

Самой простой оценкой устойчивости уровней временного ряда, по аналогии с размахом вариации, является размах колеблемости средних уровней за благоприятные и неблагоприятные периоды времени. К благоприятным периодам относятся те периоды, когда уровни были выше трендовых, к неблагоприятным - периоды с уровнями ниже трендовых:

$$R = \bar{y}_b - \bar{y}_{nb}$$

где $\bar{y}_{b,}$ $\bar{y}_{nb}$ - средняя величина из уровней за благоприятные и неблагоприятные периоды соответственно.

В качестве оценки устойчивости уровней может использоваться и соотношение средних уровней за благоприятные и неблагоприятные периоды. Этот показатель называется индексом устойчивости уровней динамического ряда; чем ближе его значение к единице, тем меньше колеблемость, а значит, выше устойчивость.

$$i_{\bar{y}} = \frac{\bar{y}_b}{\bar{y}_{nb}}.$$

К обобщающим абсолютным показателям отклонений фактических уровней от тренда относят среднее линейное отклонение и среднее квадратическое отклонение:

$$\bar{l}_t = \frac{\sum |y_i - \hat{y}_i|}{n-p}; \quad \sigma_t = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p}}$$

где y_i - фактический уровень; $\hat{y}_i$ - выравненный уровень; n - количество уровней ряда; p - число параметров уравнения.

Среднее квадратическое отклонение часто называют точностью модели. Оба показателя являются абсолютными величинами, характеризующими колеблемость фактических уровней около тренда, имеющими те же единицы измерения, что и сам признак.

Для сравнения степени колеблемости по показателям с разными единицами измерения используются относительные показатели.

Они рассчитываются соотношением абсолютных значений со средним уровнем временного ряда:

коэффициент линейной колеблемости:

$$V_i = \frac{\bar{l}_i}{\bar{y}} \times 100\%,$$

коэффициент колеблемости:

$$V_\sigma = \frac{\sigma_t}{\bar{y}} \times 100\%.$$

На основе коэффициента колеблемости определяют коэффициент устойчивости:

$$K_{\text{уст}} = 100 - V_\sigma.$$

Если коэффициент колеблемости составил 10%, то коэффициент устойчивости соответственно равен 90%. Это означает, что среднее колебание относительно среднего уровня составляет 10%.

При этом следует помнить, что вероятность того, что конкретные колебания не превысят среднеквадратического отклонения составляет 68,3%, если распределение колебаний по их величине близко к нормальному распределению.

3.3.2. Измерение устойчивости тенденции динамики

Для оценки устойчивости тенденции динамики чаще всего используется коэффициент рангов Спирмена, рассчитываемый по формуле

$$\rho = 1 - \frac{6\sum \Delta^2}{n^3 - n},$$

где Δ — разница рангов; n — количество уровней ряда.

Прежде чем использовать формулу, необходимо пронумеровать периоды времени и уровни ряда в порядке возрастания, т.е. каждому периоду времени и каждому уровню присваивается номер в порядке возрастания. В случае совпадения значений уровней ряда им присваивается ранг, равный частному от деления суммы рангов, приходящихся на эти значения, на число совпадающих значений.

Коэффициент рангов может принимать значения от 0 до 1 по абсолютному значению. Значение коэффициента +1 означает, что ранги периодов и ранги уровней совпадали, т.е. с ростом номеров периодов увеличивались ранги уровней, следовательно, имеет место устойчивый, непрерывный рост. Если коэффициент рангов равен нулю, то это свидетельство отсутствия устойчивого роста.

При коэффициенте —1 следует говорить об устойчивом снижении показателя. Реальные значения коэффициента рангов Спирмена находятся между этими значениями. По их приближенности к единице (или минус единице) следует делать вывод об устойчивом росте (или снижении).

Для оценки устойчивости тенденции может быть использован индекс корреляции

$$I_r = \sqrt{1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}},$$

где y_i - фактические уровни; $\hat{y}_i$ - выравненные уровни; $\bar{y}$ - средний уровень ряда.

Индекс корреляции показывает степень сопряженности колебаний фактических уровней с колебаниями теоретических уровней, происходящих под влиянием комплекса основополагающих факторов.

Важно отметить, что при оценке устойчивости временного ряда следует одновременно использовать показатели, характеризующие устойчивость уровней ряда, и показатели устойчивости тенденции динамики. На практике даже при полной устойчивости роста может присутствовать колеблемость уровней (коэффициент устойчивости меньше 100%).

Литература

Алексеева В.А. Анализ временных рядов: учебное пособие / В. А. Алексеева. – Ульяновск : УлГТУ, 2020. – 147 с.

Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – М.:Мир, 1976. – 758 с.

Бокс Дж., Дженкинс Т. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. – М.: Мир, 1974. – 242 с.

Витязев В.В. Спектрально-корреляционный анализ равномерных временных рядов: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2001. – 48с.

Витязев В.В. Вейвлет-анализ временных рядов: учебное пособие. – СПб.: Изд. С.-Петерб. унив-та, 2001. – 58 с.

Канторович Г.Г. Анализ временных рядов // Экономический журнал ВШЭ. – 2002. – № 4. – С. 498–523.

Попова, И. Н. Анализ временных рядов: учебник для вузов. - Москва: Изд-во Юрайт, 2024. — 74 с.

Сурина А.В. Современные проблемы инноватики. Статистический анализ инновационной деятельности: Учеб. пособие. - СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. - 111 с.

Сурина А.В. Теория вероятностей: Основные формулы: Учеб. пособие. - СПб., 2022 – 56 с.,

Теория статистики : учебник / под ред. проф. Г.Л. Громыко. – 4-е изд., перераб. и доп. - Москва : ИНФРА-М, 2021. – 465 с.

Приложение 1.

Основные термины

Автокорреляция – наличие сильной корреляционной зависимости между последовательными значениями уровней временного ряда.

Анализ – метод научного исследования объекта или их совокупности путем рассмотрения их отдельных сторон и частей.

Инерционность – предполагает сохранение присущих социально-экономическим явлениям и процессам тенденций и закономерностей прошлого и настоящего в будущем.

Интервальный ряд динамики – ряд числовых значений определенного статистического показателя, характеризующего размеры изучаемого явления за определенные промежутки /периоды, интервалы/ времени.

Моментный ряд – ряд числовых значений определенного статистического показателя, характеризующего размеры изучаемого явления на определенные даты, моменты времени.

Признак – общее свойство, характерная черта или иная особенность единиц совокупности, которые могут быть наблюдаемы или измерены.

Принцип инерционности – предполагает сохранение, присущих социально-экономическим явлениям, тенденций и закономерностей прошлого и настоящего в будущем.

Ранг – порядковый номер значения признака, расположенного в порядке возрастания или убывания величин.

Ранжирование – общее свойство, характерная черта или иная особенность единиц совокупности, которые могут быть наблюдаемы или измерены.

Результативный признак – предполагает сохранение, присущих социально-экономическим явлениям, тенденций и закономерностей прошлого и настоящего в будущем.

Ряд динамики – это количественное вероятностное утверждение в будущем о состоянии объекта, с относительно высокой степенью достоверности, на основе анализа тенденций и закономерностей прошлого и настоящего.

Связные временные ряды – это научно-обоснованное, основанное на системе установленных причинно-следственных связей и закономерностей, выявление состояния и вероятных путей развития явлений и процессов.

Статистическая информация – порядковый номер значения признака, расположенного в порядке возрастания или убывания величин.

Статистическая закономерность – форма проявления причинной связи, выражающаяся в последовательности, регулярности, повторяемости событий с достаточно высокой степенью вероятности, если причины, порождающие события, не изменяются или изменяются незначительно. Статистические закономерности устанавливаются на основе анализа массовых данных.

Статистическая совокупность – множество единиц, обладающих массовостью, однородностью, определенной целостностью, взаимозависимостью состояний отдельных единиц и наличием вариации.

Тенденция – основное направление, закономерность развития явления.

Тенденция автокорреляции – тенденция изменения связи между отдельными уровнями временного ряда.

Тенденция дисперсии – это изменения отклонений эмпирических значений временного ряда от значений, полученных по уравнению тренда.

Тенденция среднего уровня – аналитически выражается в виде математической функции, вокруг которой варьируют фактические значения изучаемого явления.

Тренд – это некоторая математическая функция, которая описывает тенденцию изменения явления.

Экстраполяция – нахождение уровней за пределами изучаемого временного ряда, то есть продление временного ряда на основе выявленной закономерности изменения уровней в изучаемый отрезок времени.

Приложение 2.

Графическое представление динамики

Довольно часто изучение динамики какого-либо явления начинается с построения или изучения графического изображения одного или нескольких временных рядов. Наиболее распространенным видом используемых графиков для этих целей является линейная диаграмма. Она строится в прямоугольной системе координат, где по оси абсцисс откладываются периоды или моменты времени, по оси ординат — уровни ряда динамики. Соединенные точки, характеризующие значения показателя в определенный момент или период времени, представляют собой линейную диаграмму. Крайне важным моментом при построении графика динамического ряда является масштаб. Если для изображения на графике по оси ординат выделяется узкий участок оси, то график будет представлять очень незначительные изменения показателя за изучаемый период, если увеличить диапазон на оси, то временные изменения будут выглядеть более значительно.

Для сравнения динамики нескольких показателей в одной системе координат может применяться соответствующее количество кривых.

При необходимости могут использоваться две или три шкалы одновременно, если отражается динамика двух или нескольких признаков, имеющих разные единицы измерения. Однако на одном графике рекомендуется применять не более трех-четырех кривых.

Кроме линейной диаграммы при анализе динамических рядов часто используют столбиковые, фигурные, радиальные диаграммы.

Столбиковые диаграммы строятся на горизонтальной оси, на которой откладываются промежутки или моменты времени. Вертикальная ось может присутствовать и отражать значения уровней ряда либо нет, тогда значения показателей указываются на (над) соответствующими столбиками. По высоте столбиков можно судить о динамике анализируемого показателя.

Фигурные диаграммы не дают точного отображения, их используют для агитационных, пропагандистских целей, так как они очень наглядны. В отличие от столбиковой диаграммы в основе графика не столбики, а какие-либо фигуры, образы, размер которых отражает размер показателей. Радиальные диаграммы применяют для изображения сезонных явлений.

Основные правила построения графика ВР:

- точное соблюдение масштаба как по величине уровней ряда, так и по времени;
- временные интервалы откладывают по оси абсцисс, величины уровней ряда - по оси ординат;
- по каждой оси следует установить такой масштаб, чтобы ширина графика была примерно в 1,5 раза больше его высоты;
- если уровни ряда на всем протяжении периода много больше нуля и между собой различаются не более чем на 20-30%, то следует обозначить перерыв на оси ординат, увеличить масштаб так, чтобы меньший из уровней ненамного превышал разрыв оси;
- если уровни ряда различаются в десятки, сотни и тысячи раз, ось ординат следует разметить в логарифмическом масштабе, чтобы равные отрезки означали различие уровней в одинаковое число раз. Интерпретация вида графика будет другой: при линейном масштабе график, близкий к прямой линии, означает линейную тенденцию, а при логарифмическом масштабе оси ординат прямая линия показывает экспоненциальную тенденцию;
- необходимо строго соблюдать равенство промежутков времени на равных отрезках оси абсцисс. Логарифмический масштаб по времени не рекомендуется, так как он крайне затруднит интерпретацию графика.

Приложение 3.

Кривые роста

На практике различают четыре основных типа экономического роста:

I – постоянный рост (с постоянным или близким к нему абсолютным цепным приростом);

II – увеличивающийся рост (с увеличивающимся абсолютным цепным приростом);

III – уменьшающийся рост (с уменьшающимся абсолютным цепным приростом);

IV – рост с качественными изменениями динамических характеристик на протяжении исследуемого периода.

Для каждого типа роста наиболее часто в практике экономических исследований встречаются следующие виды функций трендов.

<u>I тип роста</u>

1. Линейная функция: $f(t)=\alpha_0+\alpha_1 t$

2. Линейно-гиперболическая функция: $f(t)=\alpha+\beta t+\frac{\gamma}{t}, \quad \beta>0, \quad \gamma>0$

3. Линейно-логарифмическая функция 2-го порядка:

$$f(t)=\alpha_0+\alpha_1\ln(t)+\alpha_2\ln^2(t), \quad \alpha_1>0, \quad \alpha_2>0$$

<u>II тип роста</u>

1. Показательная функция: $f(t)=\alpha(1+\beta)^t, \quad \alpha>0, \quad \beta>0$

2. Парабола 2-го порядка: $f(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2, \quad \alpha_1>0, \alpha_2>0$

3. Парабола 3-го порядка: $f(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t^3, \quad \alpha_1>0, \alpha_2>0, \alpha_3>0$

4. Обобщенная функция:

$$f(t)=\alpha\times\exp\left(\int_0^t \rho(\tau)d(\tau)\right),$$

где $\rho(\tau)$ - линейная, параболическая или другая функция, $\alpha>0$.

III тип роста

1. Степенная функция: $f(t) = \alpha t^{\beta}, \quad \alpha > 0, 0 < \beta < 1$

2. Линейно-логарифмическая функция: $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(t), \quad \alpha_1 > 0$

3. Парабола 2-го порядка: $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2, \quad \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$

4. Гипербола 1-го порядка: $f(t) = \alpha_0 + \dfrac{\alpha_1}{t}, \quad \alpha_1 < 0$

5. Гипербола 2-го порядка: $f(t) = \alpha_0 + \dfrac{\alpha_1}{t} + \dfrac{\alpha_2}{t^2}, \quad \alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$

6. Модифицированная экспонента: $f(t) = \alpha + \beta e^{-t}, \quad \beta < 0$

IV тип роста

1. Линейно-логарифмическая функция 2-го порядка:

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(t) + \alpha_2 \ln^2(t), \quad \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$$

2. Парабола 3-го порядка: $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3, \quad \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0$

3. Логистическая функция: $f(t) = \dfrac{\alpha}{1 + \beta e^{-\gamma t}}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$

4. Первая функция Торнквиста: $f(t) = \dfrac{\alpha t}{\beta + t}, \quad \alpha > 0, \beta > 0$

5. Кривая Гомперца: $f(t) = \alpha \beta^{\gamma t}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$