

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО**

ИНСТИТУТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК И КИБЕРБЕЗОПАСНОСТИ
ВЫСШАЯ ШКОЛА КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

С.А. Нестеров

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2026

УДК 681.51.01

Нестеров С. А. **Основы теории управления** : Учебное пособие. Изд. 2-ое: испр. и дополн. Санкт-петербургский политехнический университет Петра Великого. СПб., 2026. - 129 с.

Настоящее пособие предназначено для студентов обучающихся по направлению 09.03.01. «Информатика и вычислительная техника».

Основное внимание направлено на дополнительное или самостоятельное изучение теоретического лекционного материала по одноименному курсу для дальнейшего применения при выполнении практических заданий (упражнений, задач и примеров) и лабораторных работ, позволяющее приобрести умение и навык использования теоретических основ.

В пособии рассмотрены линейные непрерывные и дискретные системы, нелинейные системы и общее понятие об адаптивных структурах.

Пособие также может быть использовано студентами, обучающимися по направлению «Автоматизация и управление» по программе «Управление и информатика в технических системах».

© Нестеров С. А., 2026

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1. Основные понятия	4
2. Исторический обзор	7
3. Фундаментальные принципы управления	8
4. Виды систем управления и их характеристики	9
5. Теория непрерывных линейных систем управления (СУ)	11
5.1. Математические модели (ММ) линейных систем управления (ЛСУ)	11
5.1.1. Дифференциальное уравнение (ДУ) и передаточная функция (ПФ)	11
5.1.2. Уравнения в переменных (пространстве) состояния	13
5.1.3. Временные функции и характеристики (ВФ и ВХ)	14
5.1.4. Частотные функции и характеристики (ЧФ и ЧХ)	15
5.1.5. Диаграмма взаимосвязи вариантов ММ	17
5.2. Типовые звенья ЛСУ	18
5.3. Вычисление ПФ линейных СУ и построение их характеристик	32
5.4. Метод пространства (переменных) состояния	37
5.5. Управляемость, наблюдаемость, минимальность	42
5.6. Анализ линейных систем управления	47
5.6.1. Устойчивость линейных СУ	47
5.6.1.1. Алгебраические критерии устойчивости	48
5.6.1.2. Частотные критерии устойчивости (Михайлова, Найквиста)	50
5.6.1.3. Влияние параметров ее устойчивость	55
5.6.2. Качество процессов управления и методы его исследования	55
5.6.2.1. Точность СУ	56
5.6.2.2. Способы устранения установившейся ошибки ..	57

5.6.2.3.	Ошибка при гармоническом воздействии	59
5.6.2.4.	Оценка ошибки при случайных воздействиях.....	60
5.6.3.	Показатели качества в переходных процессах	66
5.6.3.1.	Прямые показатели качества	66
5.6.3.2.	Частотные показатели качества	68
5.6.3.3.	Корневые показатели качества	69
5.6.3.4.	Интегральные показатели качества	70
5.7.	Синтез линейных систем управления (ЛСУ)	72
5.8.	Измерение и оценивание переменных состояния	86
6.	Дискретные системы	90
6.1.	Математическое описание дискретных систем	92
6.1.1.	Решение разностных уравнений и дискретная передаточная функция	96
6.1.2.	Частотные характеристики дискретных систем	100
6.2.	Устойчивость дискретных систем	101
6.3.	Установившиеся режимы ДС (точность)	102
6.4.	Качество в переходных режимах	103
6.5.	Компьютерные (цифро-аналоговые, цифровые) СУ	104
7.	Нелинейные системы (НЛСУ)	106
7.1.	Метод фазового пространства	108
7.2.	Устойчивость нелинейных систем	113
7.3.	Абсолютная устойчивость	115
7.4.	Приближенные методы исследования НЛСУ	116
7.4.1.	Алгебраические методы исследования автоколебаний .	118
7.4.2.	Частотные методы исследования автоколебаний	119
8.	Понятие об адаптивных системах	120
8.1.	Экстремальные системы	123
8.2.	Беспоисковые СНС	125
	Список литературы	127

1. Основные понятия.

В окружающем нас мире протекают различные процессы:

- технические:
 - производственные;
 - транспортные;
- энергетические;
- информационные;
- биологические;
- экономические;
- организационные и тд.

Человек целенаправленно воздействует на них для достижения определённого результата, состоящее из 2-х видов операций:

- рабочие → механизация (большие энергозатраты, малый интеллект)
- управление → организация рабочего процесса для достижения

определённой цели.

Операции управления также частично (АСУ) или полностью (САУ) могут выполнять технические устройства → АВТОМАТИЗАЦИЯ.

Кибернетика – наука об общих законах управления живой и неживой природы (Норберт Винер).

Техническая кибернетика – наука об управлении техническими устройствами .

Совокупность технических средств, выполняющих процесс называется объектом управления (**ОУ**) – преобразует управляющее воздействие u , а также измеряемые датчиками f_1 и неизмеряемые f_2 возмущения в выходной сигнал y .

Устройство, формирующее целенаправленное воздействие на ОУ на основе информации о измеряемых возмущениях f_1 , задающем воздействии (уставке) v и реальном выходном сигнале ОУ y – управляющее устройство (**УУ**).

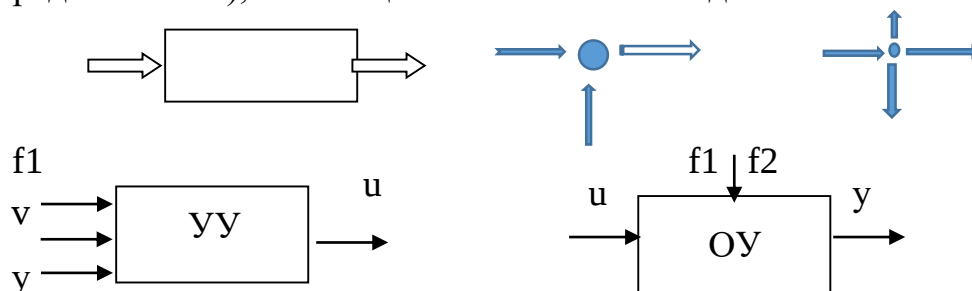
Управление состоит из 4 элементов:

- формирование задачи управления, т.е. желаемого поведения ОУ;
- получение информации о реальном поведении ОУ;
- выработки решения о необходимых действиях;
- исполнение решения.

Соединение ОУ и УУ в определённую конфигурацию образует **систему управления (СУ)**.

Соединение осуществляется согласно причинно-следственным связям, при этом каждый элемент (ОУ и УУ) представляется в виде блока с входными и выходными сигналами и односторонним распространением изменений.

Для лучшего представления СУ применяют СХЕМЫ (наглядные представления), состоящими из блоков и соединений.



Выделяют 2 вида схем:

- функциональные – в которых в блоках описываются исполнимые функции,
- структурные – в которых в блоках отражены соответственно математические преобразования.

Для ОУ: $y = A(u, f1, f2)$, где A – оператор:

- 1) статический (безынерционный) → статическая характеристика, алгебраическое уравнение;
- 2) динамический (с инерцией) → дифференциальные, интегральные или разностные уравнения.

Математическое описание (модель) осуществляется на базе законов физических процессов и приближениями и допущениями → математическая

модель не может быть точной. Увеличение точности модели увеличивает порядок и сложность уравнений.

Для УУ : $U = V(v, f1, y)$ - закон (алгоритм) управления.

Основная задача ТУ – техническое проектирование СУ, т.е. поиск (придумывание) такой конфигурации и компонентов системы, которые позволяли бы ей выполнить поставленные задачи, - сложный итерационный процесс с элементами творчества, возможных компромиссов, допустимых рисков, включающий 2 процесса:

- *анализ* – изучение процессов в СУ для более глубокого понимания и точного математического описания;
- *синтез* – создание новых конфигураций и законов.

Процесс синтеза может быть представлен следующей последовательностью:

- 1) Определение целей управления (точность, быстрота, гладкость и т.д.);
- 2) Выбор переменных ОУ, подлежащих управлению;
- 3) Формулировка требований;
- 4) Выбор конфигурации и исполнительного механизма;
- 5) Получение математической модели ОУ, выбор измерителей - датчиков;
- 6) Выбор УУ, определение закона и ключевых параметров;
- 7) Оптимизация параметров и анализ качества СУ.

Если качество не удовлетворяет требованиям изменяют конфигурацию СУ и переходят к 4 пункту. Если удовлетворяет требования переходят к реализации (воплощению).

2. Исторический обзор

Управление различными процессами с целью облегчения жизни человека имеет давнюю и увлекательную историю. Уже в начале н.э. древние греки и арабы интуитивно применяли принципы управления для поддержания воды или масла.

Общепризнанным I регулятором промышленного назначения считается центробежный регулятор Джеймса Уатта (1769 – 1784гг) для управления скоростью вращения вала паровой машины.

В России I регулятором считается построенных в Барнауле И.И. Ползуновым – автоматический поплавковый регулятор питания котла.

До 19860-1970гг. появление СУ происходила благодаря изобретательству и регуляторы и объект рассматривались отдельно. Коренное изменение в подходе к проблеме и в методологии исследований внесли работы

Дж.Максвелла и И.А.Вышнеградского, осуществивших **системный подход**.

К концу 1950 годов процесс формирования классической ТАУ завершился.

В 60-70 годах предложены модели СУ в переменных состояниях и разработана теория оптимального управления, заложившие основу, т.н. современной ТАУ.

В дальнейшем активно исследуются робастные (грубые, малочувствительные к погрешностям настройки) системы, адаптивные, самоорганизующиеся, строятся СУ с использованием децентрализованных (распределённых) структур и иерархической организацией.

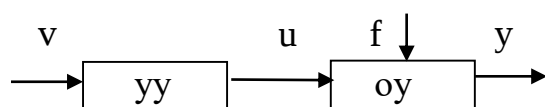
Развиваются системы высокой степени автономности, применяется искусственный интеллект, нейро-сетевые подходы, базы данных и знаний.

3. Фундаментальные принципы управления

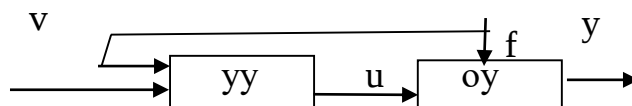
Определяют какая и каким образом используется информация.

Выделяют 3 принципа :

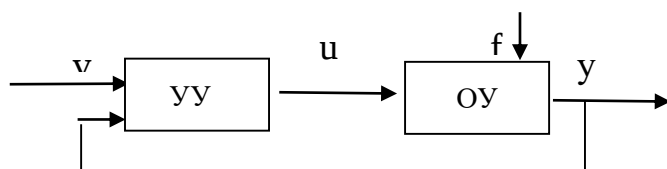
- Командного (разомкнутого) управления (по заданной цели) на основе информации о поведении объекта и его математической модели (ММ) при условии малого влияния помех по рассчитанному закону управления (ЗУ) формируется сигнал управления (наиболее простой и конкретный по применению способ):



- Компенсации (управление по возмущению). Для достижения точности при влиянии помех – создание инвариантности (независимости) y от f:



- Обратной связи (управление по отклонению без измерения помехи, независимо от причин рассогласования задания и выхода) лежит в основе подавляющего большинства процессов управления:



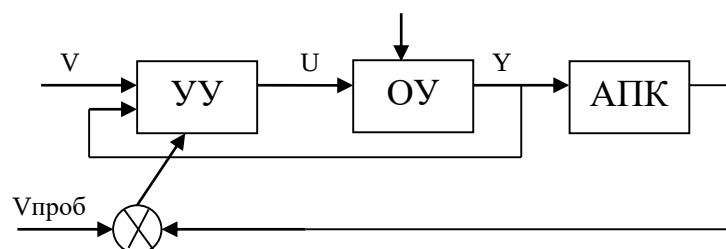
Комбинирование принципов позволяет построить наилучшие СУ.

4. Виды систем управления и их характеристики

Определяются целью управления и условиями функционирования.

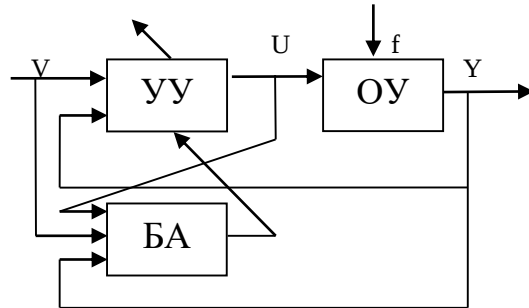
7 основных:

1. *стабилизации* (V и $Y = const$) – целью является обеспечение точности – при статическом объекте требуется астатический регулятор (с интегралом);
2. *программного управления* – задан закон желаемого изменения выхода ОУ как функция времени или пространственных координат ($V = V_{\text{зад}}(t, \dots)$);
3. *следящие* ($V = \text{var}$);
4. *экстремальные* (системы с поиском экстремума показателя качества) . Для поиска экстремума необходимы пробные и поисковые движения, а также анализатор изменения показателя качества (АПК);



5. *оптимального управления* – показатель качества имеет аналитическую зависимость от параметров УУ и можно заранее вычислить наилучшие значения;

6. *адаптивные (приспосабливающиеся)* – если неизвестны или изменяются условия работы, параметры ОУ → необходима коррекция ЗУ;



7. *интеллектуальные* - дополнительно организуется процедура обучения управляющего устройства.

По структуре (конфигурации) бывают:

- одноконтурные и многоконтурные;
- одномерные и многомерные;
- односвязные и многосвязные.

По свойствам:

- *детерминированные* – одинаковое поведение в одинаковых условиях и *недетерминированные* (стохастические) – при одинаковых условиях выходной сигнал имеет разброс описываемый вероятностным распределением.;
- *линейные* (действуют принципы суперпозиции и гомогенности) и *нелинейные* - на практике означает присутствие нелинейных элементов;
- стационарные и нестационарные;
- непрерывные и дискретные (импульсные и цифровые).

5. Теория линейных непрерывных систем управления (СУ)

5.1. Математические модели (ММ) линейных систем управления (ЛСУ)

Под ММ понимают соотношения, связывающие вход и выход, которые определяются физикой процессов. Необходимо, чтобы ММ адекватно отражала поведение и была максимально простой (до 80-90% усилий при анализе и синтезе СУ) – это противоречиво и в процессе синтеза СУ ММ меняется (уточняется) от простой к сложной.

Для получения ММ СУ составляют описания отдельных, входящих в неё процессов (звеньев) и их совокупность в соответствии с конфигурацией системы дает уравнение всей СУ.

5.1.1. Дифференциальное уравнение (ДУ) и передаточная функция (ПФ)

В общем случае звенья и системы описываются нелинейным дифференциальным уравнением (НЛДУ) произвольного порядка:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y, u^{(m)}, u^{(m-1)}, \dots, \dot{u}, u) = 0, n \geq m,$$

где $y^{(i)}, u^{(j)}$ – временные производные $\left(\frac{d^k}{dt^k}\right)$, при равенстве $=0$, которых

существует установившийся режим $F(0, 0 \dots 0, y^0, 0, 0 \dots 0, u^0) = 0$ - дающий уравнение статики (описание рабочей точки). Если F и её частные производные по аргументам непрерывны в рабочей точке, то при малых отклонениях от неё процессы можно описать упрощенным линеаризованным уравнением (согласно теореме Тейлора):

$$\sum_{i=0}^n a_i \Delta y^{(i)} = \sum_{j=0}^m b_j \Delta u^{(j)}, \text{ где } a_i = \left. \frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} \right|_0, b_j = - \left. \frac{\partial F}{\partial u^{(j)}} \right|_0, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m} \quad \text{и}$$

вводя оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$ можно получить алгебраическую

операторную форму уравнения и операторную передаточную функцию :

$$(ОКПФ): \sum_{i=0}^n a_i p^{(i)} \Delta y = \sum_{j=0}^m b_j p^{(j)} \Delta u \Rightarrow \Delta y = W(p) \Delta u, W(p) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n b_i p^i}, p = \frac{d}{dt}.$$

Строгий переход от ДУ к ПФ осуществляется с помощью преобразования

$$\text{Лапласа (t) или Фурье (s)} \quad x(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = L\{x(t)\}, \quad s = \delta + j\omega - \text{комплексная}$$

$$\text{переменная, } L - \text{оператор Лапласа и обратно } x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta_0 - j\infty}^{\delta_0 + j\infty} x(s) e^{st} ds = L^{-1}\{x(s)\}$$

В любой литературе описаны ограничения на $x(t)$ и основные свойства преобразования: линейности, дифференцируемости и интегрируемости оригинала, учет чистого запаздывания, представление умножения изображений (свертки функций), предельных значений, разложения:

$$1. \quad L\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha L\{x_1(t)\} + \beta L\{x_2(t)\}$$

$$2. \quad L\left\{\dot{x}(t)\right\} = s x(s) - x(0), \quad x(0) = \lim_{t \rightarrow +0} x(t)$$

$$L\{x^{(n)}(t)\} = s^n x(s) - s^{n-1} x(0) - s^{n-2} x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0), \quad x^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} x^{(k)}(t),$$

$$k = 0, \overset{\rightarrow}{n-1}$$

$$3. \quad L\left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{x(s)}{s}$$

$$4. \quad L\{x(t - \tau)\} = e^{-s\tau} L\{x(t)\} = e^{-s\tau} x(s)$$

$$5. \quad x_1(s) - x_2(s) = L\left\{\int_0^t x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau\right\} = L\left\{\int_0^t x_2(\tau) x_1(t - \tau) d\tau\right\}$$

$$6. \quad x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s x(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

$$7. \quad x(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad \left. \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} \text{ степеней} = \sum_i^n \frac{B(s_i)}{\left. \frac{dA}{ds} \right|_{s=s_i} (s-s_i)} \quad A(s) = 0 \rightarrow s_i \quad i = \overrightarrow{0, n}$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{B(s_k)}{\left. \frac{dA}{ds} \right|_{s=s_k}} e^{s_k t} - \text{если простые.}$$

Если есть кратные:

$$x(t) = \sum_{k=1}^e \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}} [x(s)(s-s_k)^n e^{st}].$$

Передаточная функция в форме изображений Лапласа (комплексная

передаточная функция - КПФ) при нулевых начальных условиях совпадает с операторной формой (ОПФ) с точностью до обозначения ($p = s$).

Если звено нестационарное (имеет изменяемые во времени коэффициенты) или ненулевые начальные условия, то формула не полна требует дополнения. Следует отметить, что если ДУ полностью описывает процесс, то ПФ (если числитель и знаменатель имеют одинаковые множители (нули)) может иметь редукцию и не давать полной картины процесса при произвольных начальных условиях.

5.1.2. Уравнения в переменных (пространстве) состояния

От 1 уравнения n - порядка переходят к n уравнениям первого порядка и записывают их в векторно-матричной форме.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

При этом, как видим, появился новый внутренний вектор переменных – x характеризующих состояние объекта. Эти переменные могут иметь или не иметь физический смысл, и выбор базиса многовариантен, соответственно изменяются элементы матриц A, B, C .

При этом переход к ПФ при нулевых начальных условиях осуществляется с использованием оператора дифференцирования (p) или по изображению Лапласа (s)

$$\begin{aligned} pX &= Ax + Bu \Rightarrow y = C \underbrace{(pE_{n \times n} - A)^{-1} Bu}_{W(p) \text{ или } W(s)} \\ y &= Cx \end{aligned}$$

5.1.3. Временные функции и характеристики (ВФ и ВХ)

Под временными функциями (характеристиками) понимают зависимости (графики) изменения во времени выхода при типовых входных сигналах и нулевых начальных условиях. Выделяют два типовых воздействия:

1. $u(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$ - функция Хэвисайда (ступенька, скачок),
2. $u(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$ - дельта-функция Дирака (импульс)

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \left| \begin{array}{l} 1(t) = \frac{1}{p} \\ \delta(t) = 1 \end{array} \right.$$

График реакции на $1(t)$ – называется переходной характеристикой $h(t) \rightarrow$ функция, описывающая график, называется переходной функцией (Пер.Ф).
График реакции на $\delta(t)$ - называется импульсной переходной (весовой) характеристикой $\omega(t) \rightarrow$ функция, описывающая график, импульсной переходной (весовой) функцией (ИПер.Ф):

$$\omega(t) = \frac{dh(t)}{dt}; \quad h(t) = \int_0^t \omega(t) dt$$

Из интегрального исчисления известна формула Дюамеля или

$$\text{(уравнение свертки)} \quad y(t) = h(t)u(0) + \int_0^t h(t-\tau)\dot{u}(\tau)d\tau = \int_0^t \omega(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Из передаточной функции и операторного представления $\delta(t)$, $1(t)$ можно

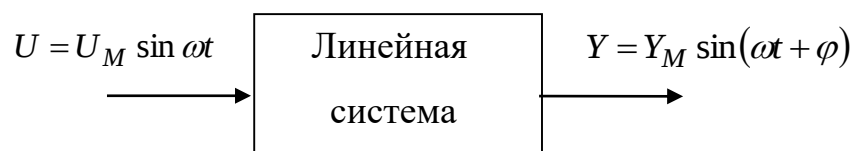
$$\text{показать: } u(p) = \delta(p) = 1, \quad y(p) = W(p)u(p) = W(p) = L\{\omega(t)\}$$

$$y(t) = \omega(t) = L^{-1}\{W(p)\}$$

$$u(t) = 1(t), \quad u(p) = \frac{1}{s}, \quad y(p) = \frac{W(s)}{s} = L\{h(t)\}$$

$$y(t) = h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}.$$

5.1.4. Частотные функции и характеристики (ЧФ и ЧХ)



ЧФ – описывают вынужденные установившиеся движения на выходе при гармоническом входе. Для получения ЧФ в ПФ подставляют $p = j\omega$

$$(s = \delta + j\omega) \quad W(p) = \frac{\sum b_j p^{(j)}}{\sum a_i p^{(i)}} \Rightarrow W(j\omega) - \text{частотная передаточная функция или}$$

АФЧ функция – комплексная функция от действительной переменной ω

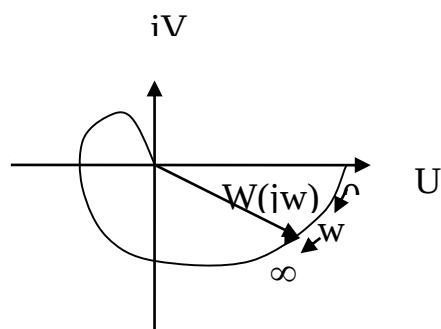
$$\text{равна: } U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$U(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega) \quad A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$$

$$V(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega)$$

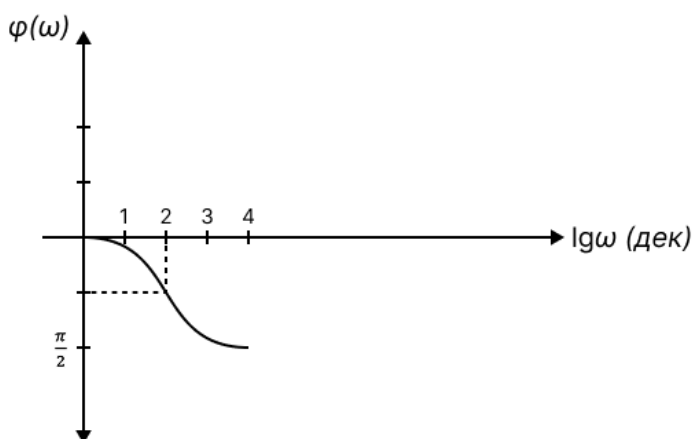
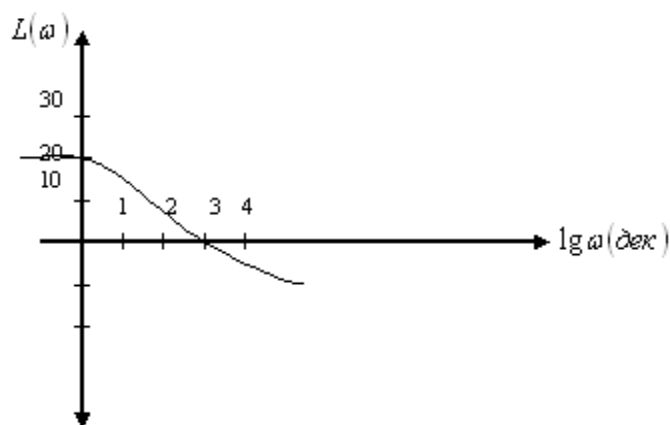
$$\frac{Y_M}{U_M} = A(\omega) = |W(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg W(j\omega) - \text{сдвиг.}$$

При изменении частоты ($0 \rightarrow \infty$) конец вектора рисует кривую в комплексной плоскости (годограф) – называется АФЧХ (Диаграмма Найквиста):



Могут быть построены $A(\omega) = \text{АЧХ}$, $\varphi(\omega) = \text{ФЧХ}$ – амплитудная и фазовая частотные характеристики.

Учитывая значительный диапазон изменения как ω так и A - практическое применение нашли логарифмические интерпретации - ЛАЧХ и ЛФЧХ (Диаграмма Боде).



$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|$$

Белл – единица, соответствующая 10-кратному усилению мощности ($\approx A^2$).

Для амплитуды (коэффициента) используется меньшая единица – децибелл и дополнительный множитель = 20. Частота по оси абсцисс откладывается в

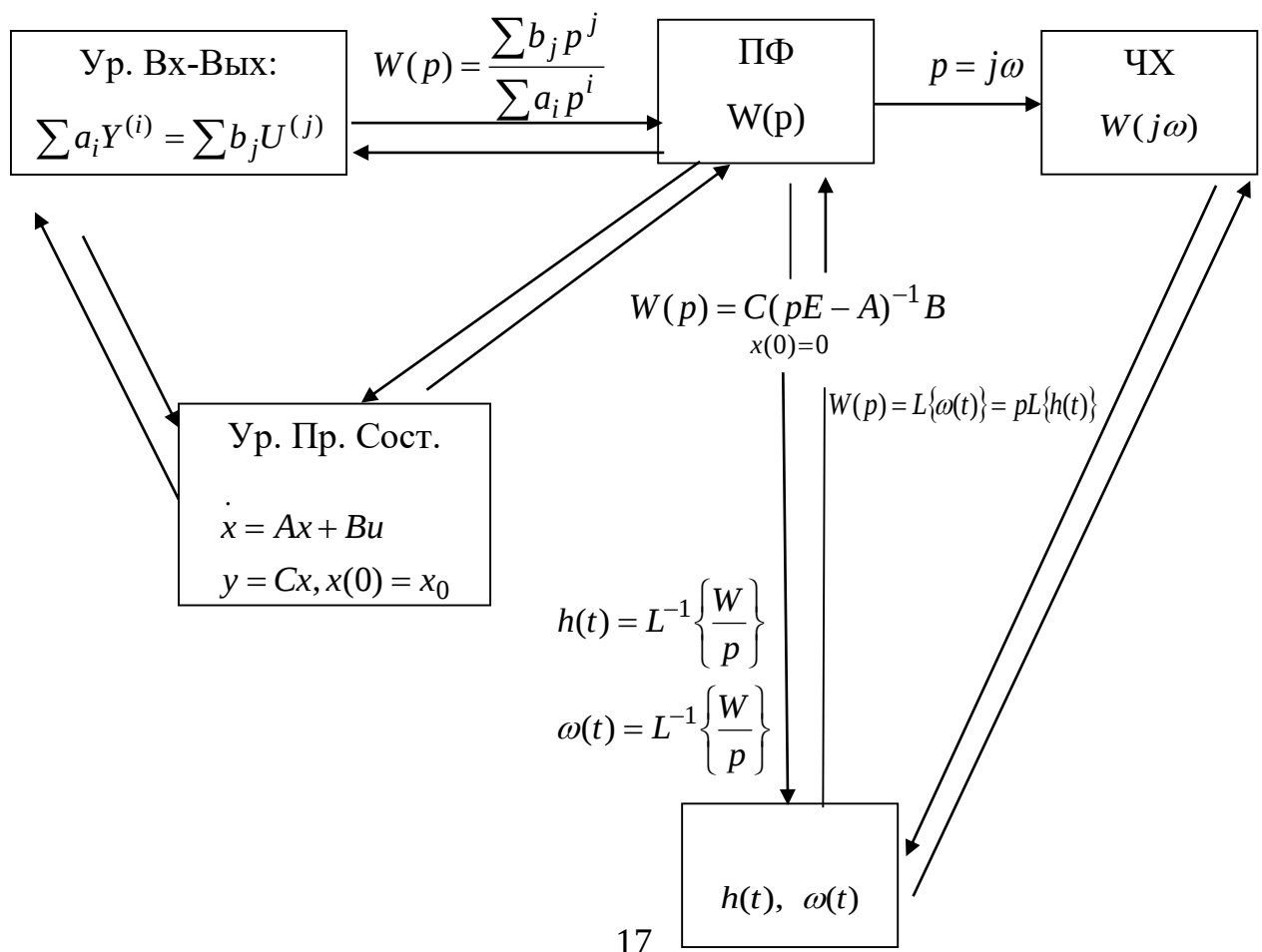
логарифмическом масштабе с единицами измерения – декада (десятикратное изменение).

Частотные характеристики можно снять экспериментально с помощью специальной аппаратуры (генератор регулируемой частоты и устройства для измерения амплитуды и фазы колебаний) или аналитически рассчитать из $W(p)$ подставляя $p = j\omega$.

Связь между временными и частотными зависимостями :

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} \omega(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \omega(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

5.1.5. Диаграмма взаимосвязи вариантов ММ.



5.2. Типовые звенья ЛСУ

Для исследования процессов в реальных системах пользуются идеализированными ММ, которые лишь приближённо характеризуют процессы в заданном диапазоне частот.

ММ локального процесса элемента называют **звеном** СУ. Вообще в качестве звена может рассматриваться не только элемент, но и соединение элементов или часть СУ.

Звенья, как и системы, могут описываться ДУ высокого порядка, но их всегда можно представить соединением звеньев 1 или 2 порядков.

Звенья, имеющие легко представляемый физический смысл и ПФ которых выражается простыми множителями или дробями с «левыми» или «нулевыми» корнями называются типовыми (элементарными).

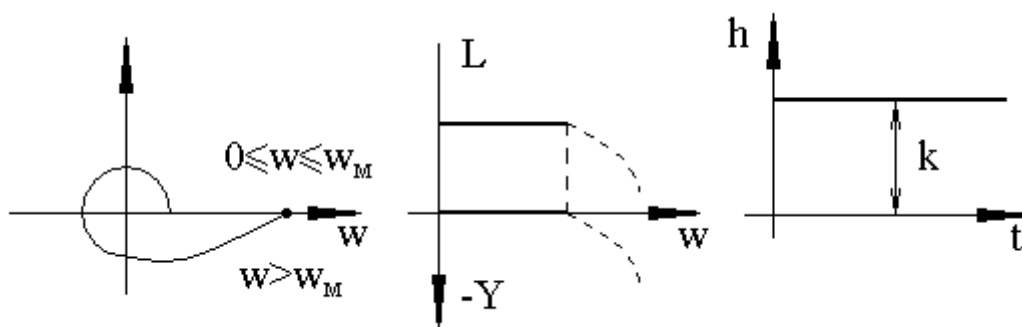
При описании реального звена к типовому необходимо оговаривать диапазон частот, в котором выполняется ММ. Выход за пределы нарушает точность и требует учета дополнительных эффектов. Следовательно, усложняется ММ.

1. Пропорциональное (безынерционное) звено :

$$y = kU \quad W(p) = k$$

$$U(\omega) = k, \quad V(\omega) = 0$$

$$A(\omega) = k, \quad \varphi(\omega) = 0$$



$$L(\omega) = 20 \lg k$$

$$h(t) = k1(t)$$

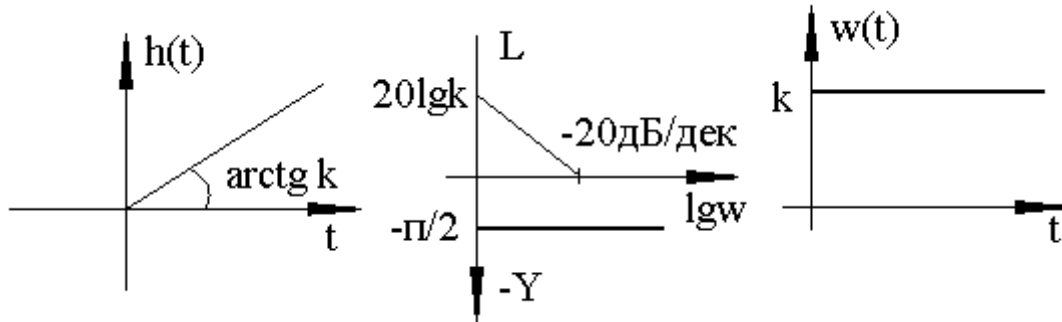
$$\omega(t) = \delta(t)$$

2. Интегрирующее звено :

$$y = k \int_0^t U(t) dt + y_0 \quad W(p) = K/p = 1/Tr \quad W(j\omega) = -jK/\omega$$

$$W(j\omega) = -j \frac{k}{\omega} \quad U(\omega) = 0, \quad V(\omega) = -k\omega$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega}, \quad \gamma(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$



$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega$$

$$h(t) = kt$$

$$\omega(t) = k$$

3. Дифференцирующее звено :

(реально не существует, используется как приближение)

$$y = k \frac{dU}{dt} \quad W(p) = kp(Tp) \quad W(j\omega) = jk\omega = k\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$$

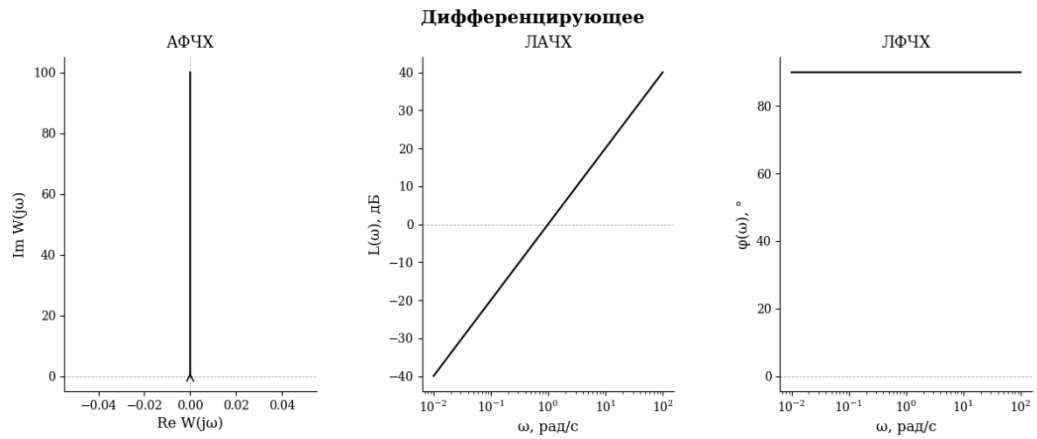
$$U(\omega) = 0, \quad V(\omega) = k\omega$$

$$A(\omega) = k\omega, \quad \gamma(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega$$

$$h(t) = \delta(t)$$

$$\omega(t) = \delta(t)$$



4. Аперидическое звено первого порядка:

(инерционное звено) – 2 параметра

$$y + T \frac{dU}{dt} = kU \quad W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}$$

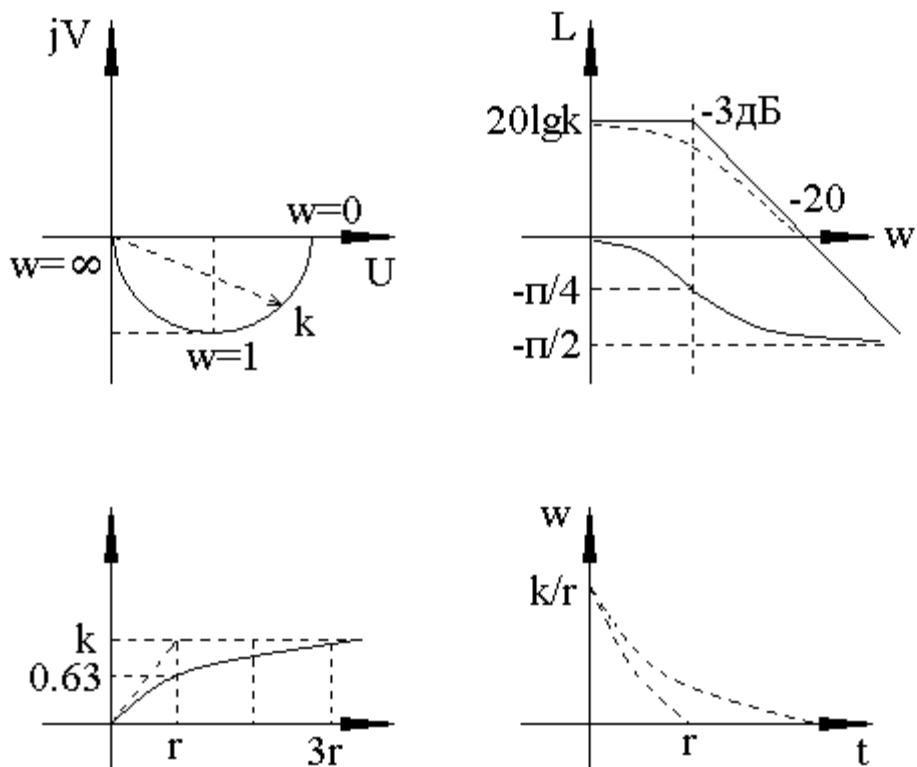
$$U(\omega) = \frac{k}{1 + T^2 \omega^2} \quad V(\omega) = \frac{-kT\omega}{1 + T^2 \omega^2}$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} \quad \gamma(\omega) = -\arctg \omega T$$

$L(\omega) = 20 \lg k - 10 \lg(1 + T^2 \omega^2)$. Асимптоты—линейные отрезки.

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{k}{1 + pT} * \frac{1}{p} \right] = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) * 1(t) \quad \dot{h}(t) = \dot{h}(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$$

$\omega = \frac{1}{T}$ - сопрягающая частота (перелома, перегиба).



5. Форсирующее звено :

$$y = k \left(U + T \frac{dU}{dt} \right) \quad W(p) = k(1 + Tp)$$

$$W(j\omega) = k(1 + j\omega T)$$

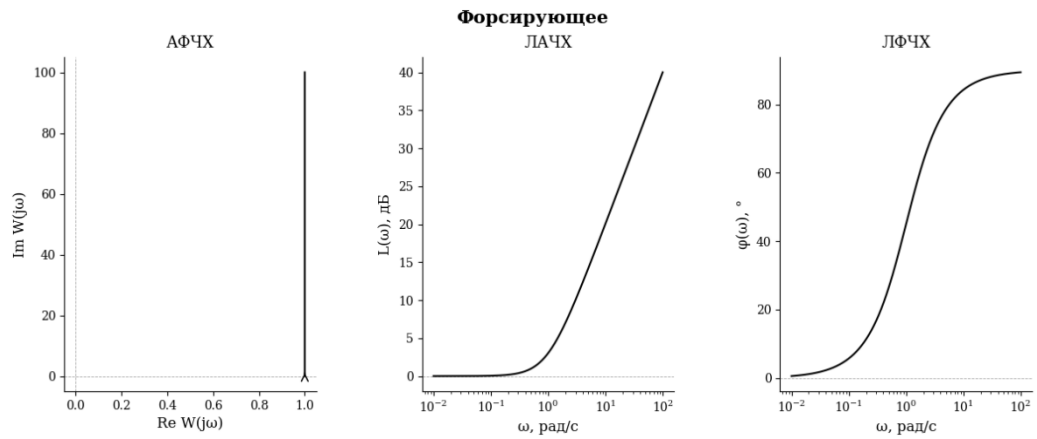
$$U(\omega) = k, \quad V(\omega) = k\omega T$$

$$A(\omega) = k\sqrt{1 + T^2\omega^2}, \quad \gamma(\omega) = \arctg \omega T$$

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg(1 + T^2\omega^2)$$

$$h(t) = k(1(t) + T\delta(t))$$

$$\omega(t) = k[\delta(t) + T\delta(t)]$$



6. Инерционно-дифференцирующее звено :

(реальное дифференцирующее)

$$y + T \frac{dy}{dt} = k \frac{dU}{dt} \quad W(p) = \frac{kp}{Tp + 1}$$

$$W(j\omega) = \frac{kj\omega}{1 + j\omega T}$$

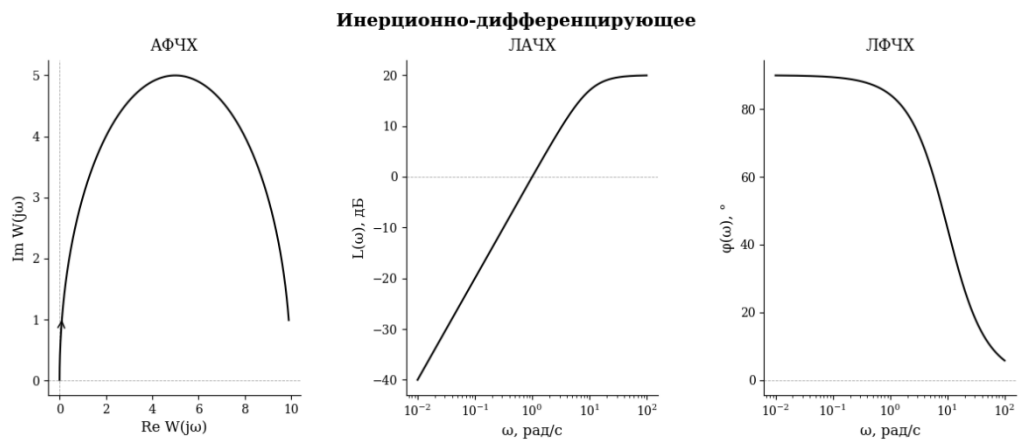
$$A(\omega) = \frac{k\omega}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$

$$\gamma(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega T$$

$$L(\omega) = 20 \lg k\omega + 10 \lg(1 + T^2 \omega^2)$$

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{kp}{1 + Tp} \cdot \frac{1}{p} \right] = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$$

$$\dot{\omega}(t) = \dot{h}(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$$



7. Инерционно-форсирующее звено :

(упругое)

$$y + T \frac{dy}{dt} = k \left(U + T_0 \frac{dU}{dt} \right) \quad W(p) = \frac{k(1 + pT_0)}{1 + pT}$$

$$W(j\omega) = k \frac{1 + j\omega T_0}{1 + j\omega T}$$

$$A(\omega) = \frac{k}{T} \sqrt{\frac{1 + T^2 \omega^2 \tau^2}{1 + T^2 \omega^2}}$$

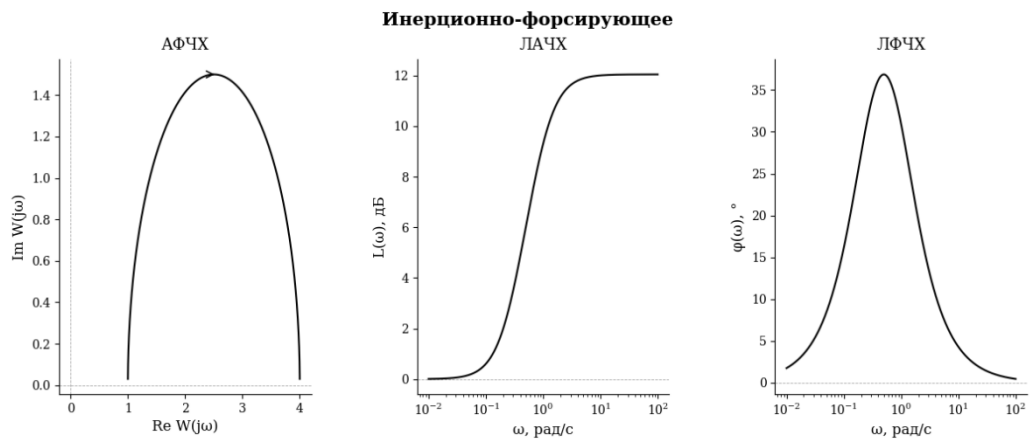
$$\gamma(\omega) = \arctg \omega T_0 - \arctg \omega T$$

$$\tau = \frac{T_0}{T} < 1 \text{ (если интегрирующее и инерционное)}$$

$$\tau = \frac{T_0}{T} > 1 \text{ (если дифференцирующее и реально-дифференцирующее)}$$

$$h(t) = L^{-1} \left[k \frac{1 + pT_0}{1 + pT} \cdot \frac{1}{p} \right] = k \left[1 - e^{-\frac{t}{T}} + \frac{T_0}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right] \cdot 1(t)$$

$$\omega(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{k}{T} (1 - \tau) e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t) + k\tau \delta(t)$$



8. Изодромное звено:

(интегрально-пропорциональное)

$$T \frac{dy}{dt} = k \left(T \frac{du}{dt} + u \right), \quad \text{Tr}Y(p) = k(Tp + 1)U(p), \quad W(p) = k \frac{Tp + 1}{Tp}$$

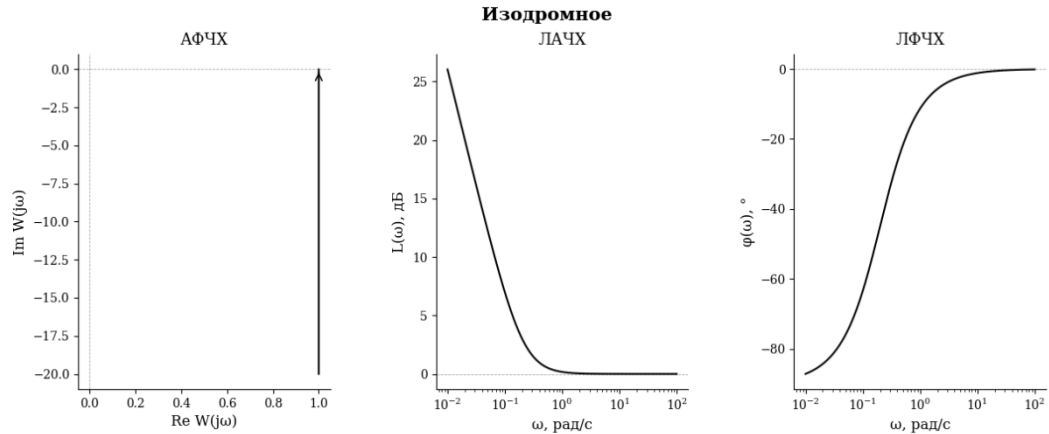
$$W(j\omega) = k \frac{Tj\omega + 1}{Tj\omega}$$

$$A(\omega) = k \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T^2}{\omega^2 T^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctan(\omega T)$$

$$L(\omega) = 20 \lg(k) - 10 \lg(1 + \omega^2 T^2)$$

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{k(Tp + 1)}{Tp * p} \right] = k \left[1 + \frac{t}{T} \right] 1(t)$$

$$\omega(t) = L^{-1} \left[k \frac{Tp + 1}{Tp} \right] = \frac{k}{T} * 1(t)$$



9. Колебательное звено :

(консервативное $\xi=0$, апериодическое $\xi \geq 1$)

$$y + 2\xi T \frac{dy}{dt} + T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} = kU \quad W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$$

$$0 \leq \xi \leq \infty \quad \frac{1}{T} = \omega_0 \text{ — резонансная частота}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi \omega_0 \frac{dy}{dt} + y \omega_0^2 = k \omega_0^2 U$$

а) колебательное звено ($0 < \xi < 1$)

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - T^2 \omega^2) + j2\xi T \omega}$$

$$U(\omega) = \frac{k(1 - T^2 \omega^2)}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}$$

$$V(\omega) = \frac{-2k\xi T \omega}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}}$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2}, & \omega \leq \frac{1}{T} \\ -\pi + \arctg \frac{2\xi T \omega}{T^2 \omega^2 - 1}, & \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

$$y(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2}, & \omega \leq \frac{1}{T} \\ -\pi + \arctg \frac{2\xi T \omega}{T^2 \omega^2 - 1}, & \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

$$L(\omega) = 20 \lg k - 10 \lg \left[(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2 \right]$$

Вблизи точки резонанса $\omega_0 = \frac{1}{T}$ точное значение зависит от ξ - степени

затухания, а вдали практически нет. Решая характеристическое уравнение

$$T^2 p^2 + 2\xi T p + 1 = 0 \rightarrow p_{1,2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{1 - \xi^2}}{T} = -\beta \pm j\omega_M.$$

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{k}{1 + 2\xi T p + T^2 p^2} \cdot \frac{1}{p} \right] = k \left[1 - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_M t + \frac{\beta}{\omega_M} \sin \omega_M t \right) \right] \cdot 1(t)$$

$$h(t) = k \left[1 - \frac{\sqrt{\beta^2 + \omega_M^2}}{\omega_M} e^{-\beta t} \sin(\omega_M t + y) \right] \cdot 1(t)$$

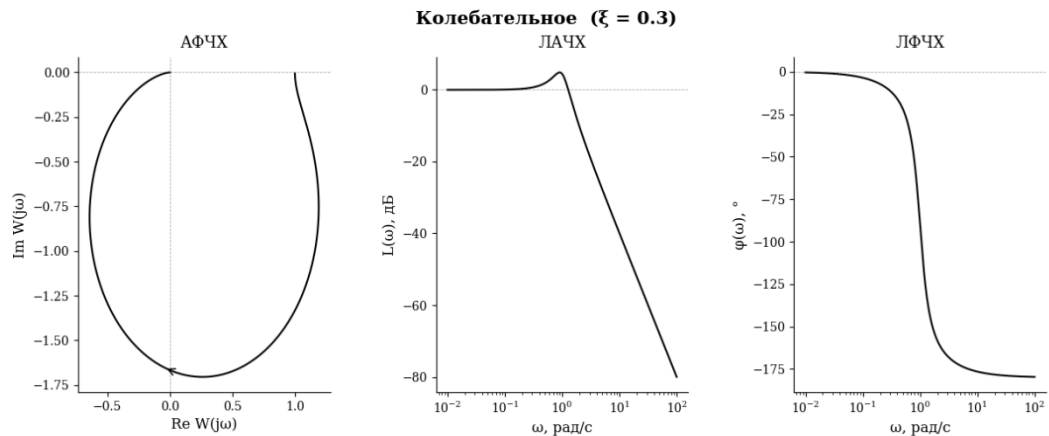
$$y = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$$

$$\dot{h}(t) = \dot{h}(t) = \frac{k\omega_0^2}{\omega_M} e^{-\beta t} \sin \omega_M t$$

$$\ln \frac{A_1}{A_2} = \beta T_M, \quad \omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_M^2 + \beta^2} = \frac{1}{T}$$

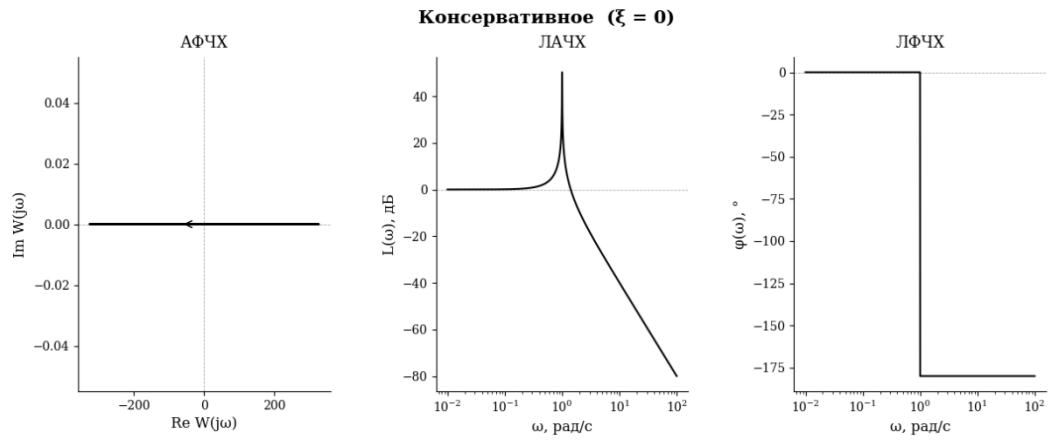
$$\xi = \beta T$$



б) консервативное ($\xi=0$)

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1} \quad W(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2 \omega^2}$$

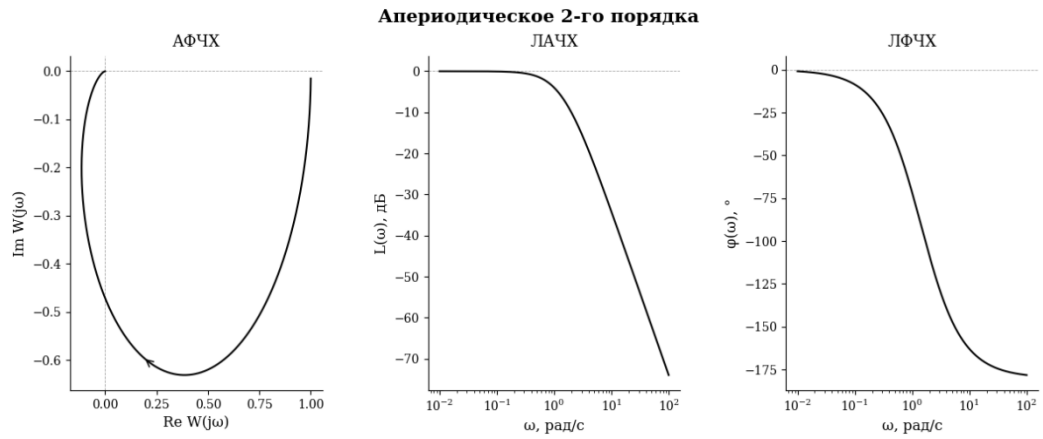
$$h(t) = k(1 - \cos \omega t) \quad \dot{h}(t) = k\omega \sin \omega t$$



в) апериодическое звено 2 порядка ($\xi > 1$)

$$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} \quad T_{1,2} = \frac{T}{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}} \quad \text{— как последовательное соединение}$$

двух апериодических звеньев первого порядка.



Для наглядного представления процессов в линейных системах удобно уравнение n-порядка преобразовать к системе n - дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, f, V) \\ \frac{dx_n}{dt} = \Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, f, V) \end{cases} \quad \text{при} \quad \text{нач. усл } x_i(t=0) = x_{i0}$$

При этом желательно, чтобы x_i имели реальный физический смысл (изменение отклонения от заданного, его скорость, ускорение и т.д.).

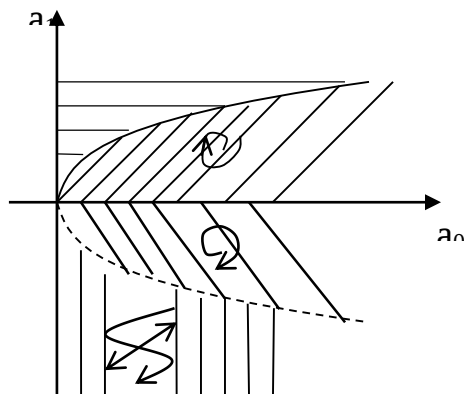
Каждому значению физического процесса $x_i, i = \overline{1, n}$ при t_i в фазовом пространстве $\bar{x}$ соответствует изображающую точку и изменения во времени даёт траекторию (фазовую). Совокупность таких фазовых траекторий (фазовый портрет) даёт полное представление о поведении системы.

Рассмотрим фазовый портрет линейной системы 2 порядка:

$\ddot{x} + 2h\dot{x} + w^2x = 0, \quad 2h = a_1, w^2 = a_0; \quad x(0) = x_0$, где ω -частота свободных колебаний, a_0 ω^2 -упругая сила, $2h\dot{x}$ -демпфирование (коэффициент затухания).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -2hy - w^2x \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = -2h - w^2 \frac{x}{y}$$

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - w^2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$$

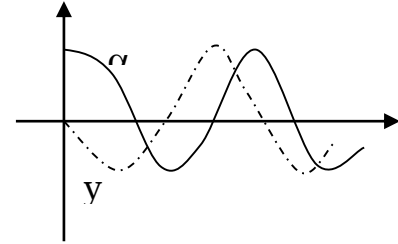
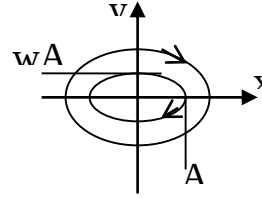


$$1) \quad a_1=0, a_0>0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} = \pm j\sqrt{w_0^2}$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + y), \quad y = \frac{dx}{dt} = A \cos(\omega t + \beta)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{w^2 A^2} = 1 - \text{ЭЛЛИПС}$$

Особая точка называется «**ЦЕНТР**»



$$2) \quad a_1^2 < 4a_0, \quad a_0 > 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\text{корни компл.с отриц.вещ.}$$

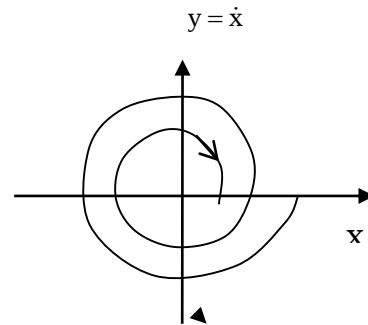
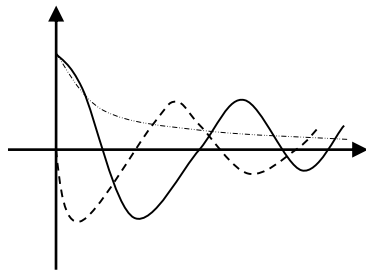
$$a_1 > 0$$

$$-\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} = -\frac{a_1}{2} \pm j\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} = -h \pm j\sqrt{\omega^2 - h^2}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{<0}$

$$x(t) = Ae^{-ht} \sin(\omega_1 t + \beta); \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - h^2}$$

$$y(t) = A\omega e^{-ht} \cos(\omega_1 t + \beta + \delta), \quad \delta = \arctg \frac{h}{\sqrt{\omega^2 - h^2}}$$

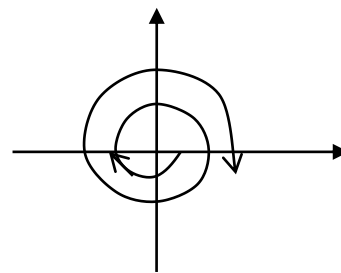
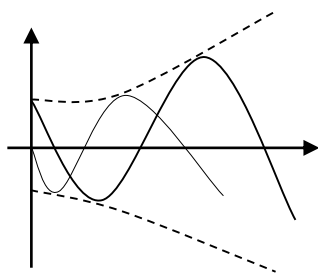


Особая точка называется «**устойчивый фокус**».

$$3) \quad a_1 < 0, \quad \frac{a_1^2}{4} < a_0, \quad a_0 > 0 \quad - \quad \lambda_{1,2} = \text{комплексные с положительными}$$

вещественными частями – выражения для решения те же, но с

расходящимися экспоненциальным членом – «**неустойчивый фокус**» :

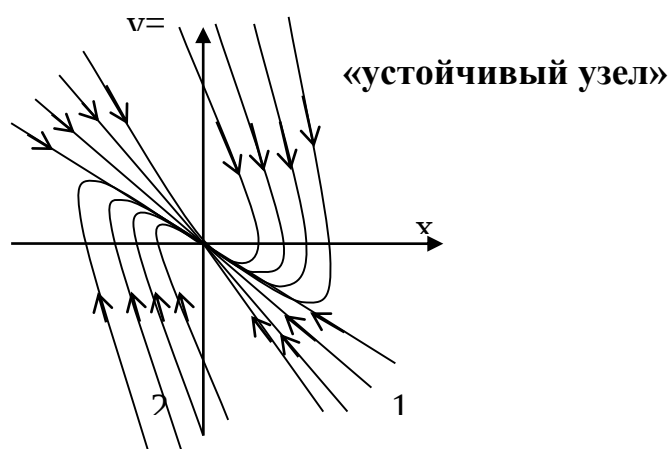
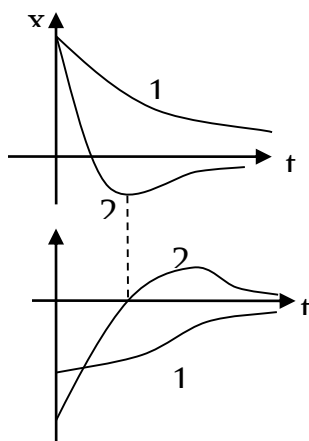


4) $a_1 > 0, a_0 > 0, a_1^2 > 4a_0$ - $\lambda_{1,2}$ = отрицательные вещественные корни

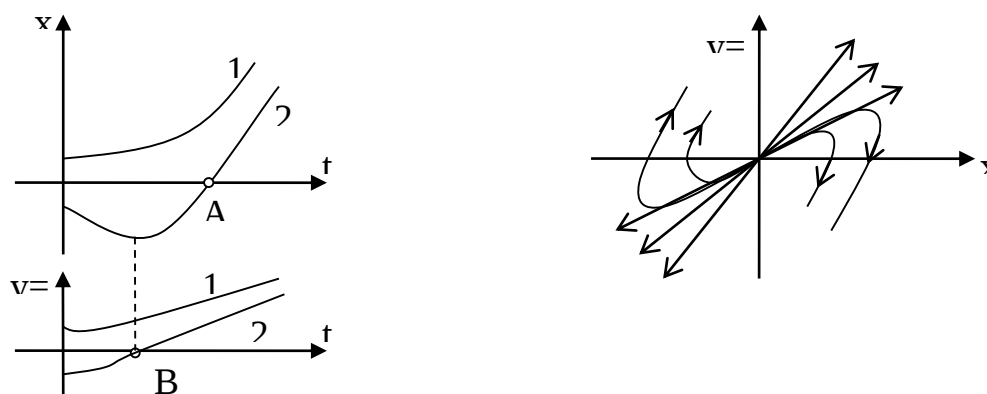
$x(t) = c_1 e^{-\alpha_1 t} + c_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad y = \frac{dx}{dt} = -\alpha_1 c_1 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_2 c_2 e^{-\alpha_2 t}$ - аperiodически уменьшающиеся

процессы :

Особая точка называется -



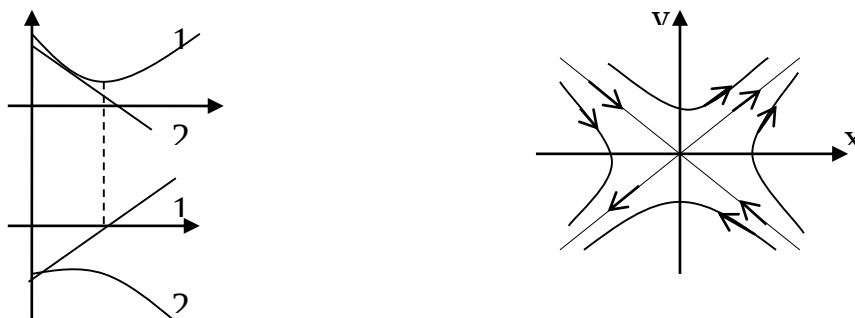
5) $a_1 < 0, a_0 > 0 - \lambda_{1,2} \quad a_1^2 > 4a_0$



положительные вещественные корни – аperiodически

увеличивающиеся процессы – особая точка : «**неустойчивый узел**»

б) $a_0 < 0, a_1$ любое $\lambda_{1,2}$ = вещественные разных знаков



Особая точка называется «**СЕДЛО**» - всегда неустойчивые процессы.

Подводя итог для линейных систем – подчеркнём, что переход из одной области плоскости $[a_0, a_1]$ (т.е. изменение параметров) в другую, с другим типом процессов называется **БИФУРКАЦИЕЙ**.

У всех рассмотренных выше звеньев с затухающими процессами между $L(\omega)$ и $Y(\omega)$ существует взаимно однозначное соответствие (преобразование Гильберта) или проще мнемоническим правилом :

L (наклон)	Y (фаза)
-20n	$-\frac{\pi}{2} \text{ n}$
“0”	0°
+20n	$+\frac{\pi}{2} \text{ n}$

Такие звенья называют **минимально-фазовые (МФЗ)**.

Математически, это определяется тем, что все нули (корни числителя) и полюса (корни знаменателя) ПФ имеют отрицательные или нулевые вещественные части (неположительные).

Звено называется **неминимально-фазовым (НМФЗ)**, если хотя бы один корень (нуль или полюс) ПФ имеет положительную вещественную часть.

Примеры:

$$W(p) = \frac{k}{Tp - 1} \quad \text{или} \quad = k(Tp - 1)$$

И сдвиг фазы у них больше, чем у МФЗ.

$$h(t) = k(e^{\frac{t}{T}} - 1) \cdot 1(t) \quad \omega(t) = k e^{\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$$

К неминимально-фазовым относят также звено чистого запаздывания :

$$W(p) = k e^{-p\tau}, \quad W(j\omega) = k e^{-j\tau\omega} = k(\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau)$$

$$U(\omega) = k \cos \omega\tau \quad V(\omega) = -k \sin \omega\tau$$

$$A(\omega) = k \quad y(\omega) = -\omega\tau$$

$$L(\omega) = 20 \lg k$$

$$h(t) = k \cdot 1(t - \tau) \quad \omega(t) = k \cdot \delta(t - \tau)$$

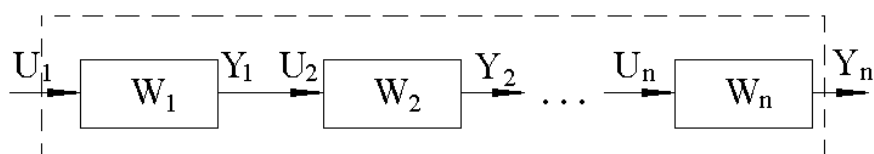
Кроме того, для распределённых систем существуют иррациональные и трансцендентные звенья (и соответствующие им ПФ).

5.3. Вычисление ПФ линейных СУ и построение их характеристик

Зная ММ всех элементов (звеньев) СУ и способ их взаимодействия (отображаемых структурной схемой) можно вычислить ПФ ЛСУ.

Для этого, прежде всего, определим порядок вычисления для трёх основных типов соединений:

1. Последовательное



$$y_i(p) = W_i(p) \cdot U_i(p) \quad U_{i+1}(p) = y_i(p) \text{ для } i = \overline{1, n}$$

$$W_{\text{носл}}(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p)$$

$$y_n(p) = W_1 \cdot W_2 \cdot \dots \cdot W_n U_1(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p) \cdot U_1(p)$$

$$W_i(j\omega) = A_i(\omega) \cdot e^{jY_i(\omega)}$$

Согласно правилу умножения векторов

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\text{носл}}(\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega) \\ L_{\text{носл}}(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega) \\ Y_{\text{носл}}(\omega) = \sum_{i=1}^n Y_i(\omega) \end{array} \right.$$

При последовательном соединении МФ звеньев система будет тоже МФазовой. Если хотя бы одно звено НМФ (неустойчивое), то и вся система будет НМФ (неустойчивой).

Переходная и весовая функции последовательного соединения находятся по ПФ соединения и не могут быть получены суммированием или умножением характеристик отдельных звеньев.

На основе этих формул можно определять параметры МФ системы по её экспериментально ЛАЧХ. Определяем вид ПФ звеньев и их параметры, и находим произведение.

2. Параллельное

$$y = \sum_{i=1}^n y_i \Rightarrow W_{nap}(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p)$$

Учитывая, что $W_i(j\omega) = A_i(\omega) \cdot e^{jY(\omega)} = U_i(\omega) + jV_i(\omega)$ и правило сложения векторов можно записать

$$W_{nap}(j\omega) = U_{nap}(\omega) + jV_{nap}(\omega) = \sum U_i(\omega) + j \sum V_i(\omega)$$

Для построения ЛАХ параллельного соединения используют приближённый способ: при частотах где есть доминирующая составляющая $A_k \gg A_i, i \neq k$, $i = \overline{1, n}$ ЛАХ совпадает с ней, всеми остальными пренебрегают.

$$A(\omega) \approx A_k \quad L_{соед}(\omega) \approx L_k(\omega)$$

ЛФХ строят либо как объединение участков $Y_k(\omega)$, либо из взаимно однозначного соответствия между L и Y для МФ систем.

При параллельном соединении устойчивых звеньев результирующее звено также устойчивое, так как знаменатель суммы дробей не может иметь других полюсов кроме исходных.

Иначе с минимально-фазовостью: алгебраическая сумма даже минимально-фазовых ПФ может иметь нули в правой полуплоскости, то есть дать НМФ систему.

При параллельном соединении переходная и весовая функции (и характеристики) складываются:

$$h_{nap}(t) = \sum h_i(t)$$

$$\omega_{nap}(t) = \sum \omega_i(t)$$

Это свойство позволяет по переходной функции (характеристики) системы найти её ПФ в виде параллельного соединения таких звеньев, сумма переходных функций (характеристик) которых будет давать переходную

функцию системы, то есть

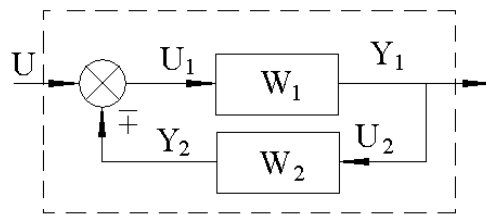
$$h(t) \approx k_0 1(t) + a_0 t \cdot 1(t) + a_1 (t - t_1) 1(t - t_1) + \dots + a_n (t - t_n) 1(t - t_n).$$

Переходя от оригинала выхода к изображению, получаем:

$$y(p) \approx \frac{k_0}{p} + \frac{a_0}{p^2} + \frac{a_1}{p^2} \cdot e^{-pt_1} + \frac{a_2}{p^2} \cdot e^{-pt_2} + \dots + \frac{a_n}{p^2} \cdot e^{-pt_n},$$

учитывая $U(p) = \frac{1}{p} \quad W(p) = py(p) = k_0 + \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p} \cdot e^{-pt_1} + \dots + \frac{a_n}{p} \cdot e^{-pt_n}$

3. Соединение типа обратной связи (параллельное встречное)



Описывается системой уравнений:

$$U_1 = V \mp y_2$$

$$y_2 = W_2 U_2 \quad U_2 = y_1 \quad y_1 = W_1 U_1$$

$$y_1 = W_1 (V \mp y_2) = W_1 (V \mp W_2 y_1) \Rightarrow y_1 = \frac{W_1}{1 \pm W_1 W_2} V$$

$$W_{oc}(j\omega) = \frac{W_{np}(p)}{1 \pm W_{раз}(j\omega)} \quad W_{раз}(j\omega) = W_{np}(j\omega) \cdot W_{обр}(j\omega)$$

Для соединения ОС используется также приближённый метод. В диапазоне частот, где $|W_{np}(j\omega) \cdot W_{обр}(j\omega) = W_{раз}(j\omega)| \ll 1$ ($L_{np} + L_{обр} < 0$), пренебрегая вторым слагаемым в знаменателе $\Rightarrow W_{oc}(j\omega) \approx W_{np}(j\omega)$, $L_{oc}(\omega) \approx L_{np}(\omega)$ и в другом диапазоне частот, где $|W_{np} \cdot W_{обр}| \gg 1$ ($L_{np} + L_{обр} > 0$), пренебрегаем в

знаменателе “1” $\Rightarrow W_{oc}(j\omega) \approx \pm \frac{1}{W_{обр}(j\omega)}$, $L_{oc}(\omega) \approx -L_{обр}(\omega)$

Так как соединяя в ОС устойчивые и МФ звенья мы можем говорить о корнях числителя (нулях) ПФ соединения, то для анализа свойств

(устойчивости, МФазовости) соединения необходимо вычислить корни знаменателя ПФ соединения. В случае МФазовости по ЛАХ можно построить ЛФХ, иначе требуется построение и анализа АФЧХ звеньев и системы.

Принято говорить, если $W_{\text{обр}} = \text{пропорциональное звено} = k$, то обратная связь называется **жёсткой** (пропорциональной).

Если $W_{\text{обр}} = pT$ или $\frac{pT}{pT + 1}$, то обратная связь называется **гибкой** (дифференцирующей).

Если $W_{\text{обр}} = \frac{1}{pT}$, то обратная связь называется **интегрирующей**.

Однако трёх основных преобразований (соединений) недостаточно, если СУ имеет **перекрещивающиеся** связи, то есть часть системы входит в несколько цепочек.

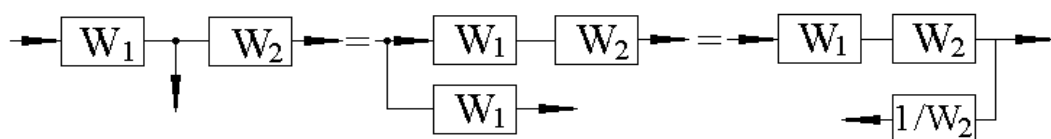
В этом случае применяются **эквивалентные преобразования** из теории структурных схем разработанной академиком Петровым Борисом Николаевичем.

В любой системе существует три элемента:

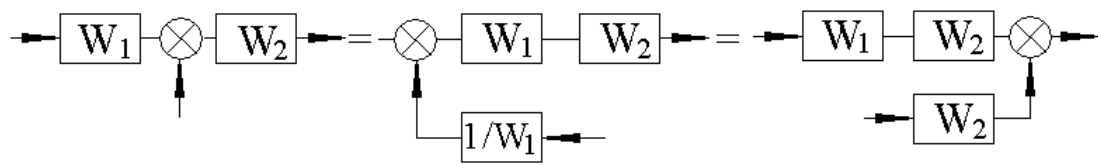
- а) звено
- б) узел разветвления
- в) суммирующий узел

Эквивалентные преобразования:

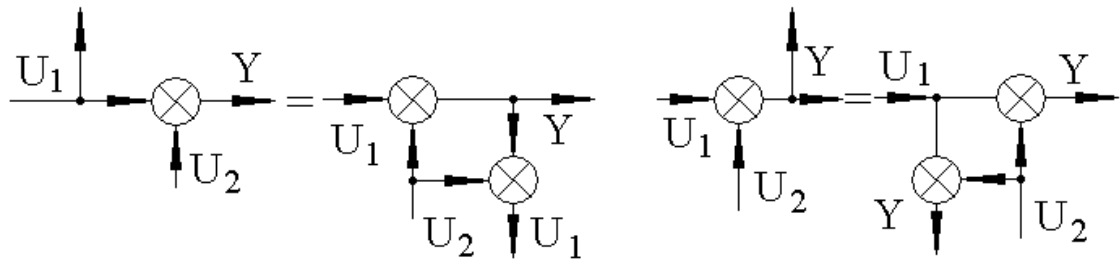
1. Перенос узла разветвления через звено



2. Перенос суммирующего узла через звено



3. Перемена мест узла разветвления и суммирования



Кроме таких преобразований, в 1953 году Мейсоном (Мезоном) для многоконтурных систем была предложена следующая формула:

$$W(p) = \frac{\left[\left(\sum_{k=1}^r W_{np.k} \right) \prod_{i=1}^s (1 + W_{pi}) \right]^*}{\left[\prod_{i=1}^s (1 \pm W_{pi}) \right]^*},$$

где $W_{np.k}$ — ПФ всех прямых путей между узлами вх-вых;

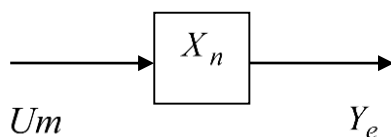
W_{pi} — ПФ разомкнутого контура, взятая с плюсом для ООС;

$\prod_{i=1}^s$ — произведение всех S – контуров;

звёздочка означает исключения из [] всех членов, содержащих произведения ПФ одних и тех же звеньев (включая звенья с ПФ=1).

5.4. Метод пространства (переменных) состояния

Метод основан на понятии *состояние*, которое описывается совокупностью (вектором) переменных $x_i, i = \overrightarrow{1, n}$, позволяющих однозначно определить поведение системы в будущем, если известно их значение в исходный момент и приложенные к системе воздействия.

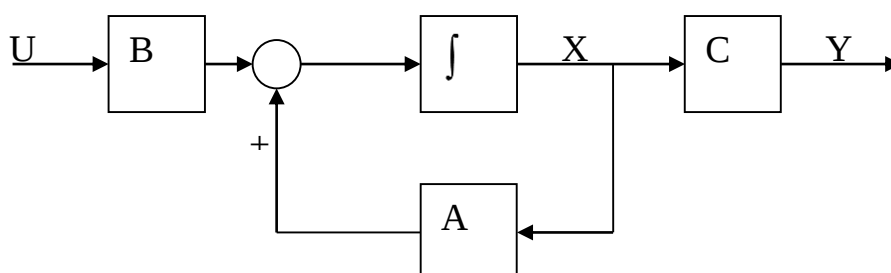


Вызван к жизни тем, что количество входных данных (m) и выходных (e) меньше сложности (порядка n) поведения объекта.

Уравнения записываются в форме Коши:

- $\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$ - как правило $m < n$ и $D=0$

$Y = Cx + Du$ - матрица D появляется, если $m \geq n$



Решение имеет вид:

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \text{ где}$$

e^{At} - называется фундаментальной (переходной) функцией (матрицей), которая может быть найдена как сумма бесконечного ряда:

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots \text{ ряд сходится для всех конечных значений времени } (t),$$

для вычисления ограничиваются конечным числом членов ряда (2,3...).

Переходная матрица (матричная экспонента) e^{At} также может быть вычислена через обратное преобразование Лапласа

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(pE - A)^{-1}],$$

где преобразование применяется к каждому элементу матрицы

$$(pE - A)^{-1} = \frac{(pE - A)^*}{\det(pE - A)},$$

где $(pE - A)^*$ — присоединённая матрица.

Для всех элементов можно использовать формулы разложения и таблицу преобразований Лапласа.

При этом переход от УПС к ПФ единствен: $W(p) = C(pE - A)^{-1}B$,

а от ПФ к уравнениям ПС — не единствен и зависит от выбора базиса.

Получение уравнений состояния:

1. Нормальная форма управления:

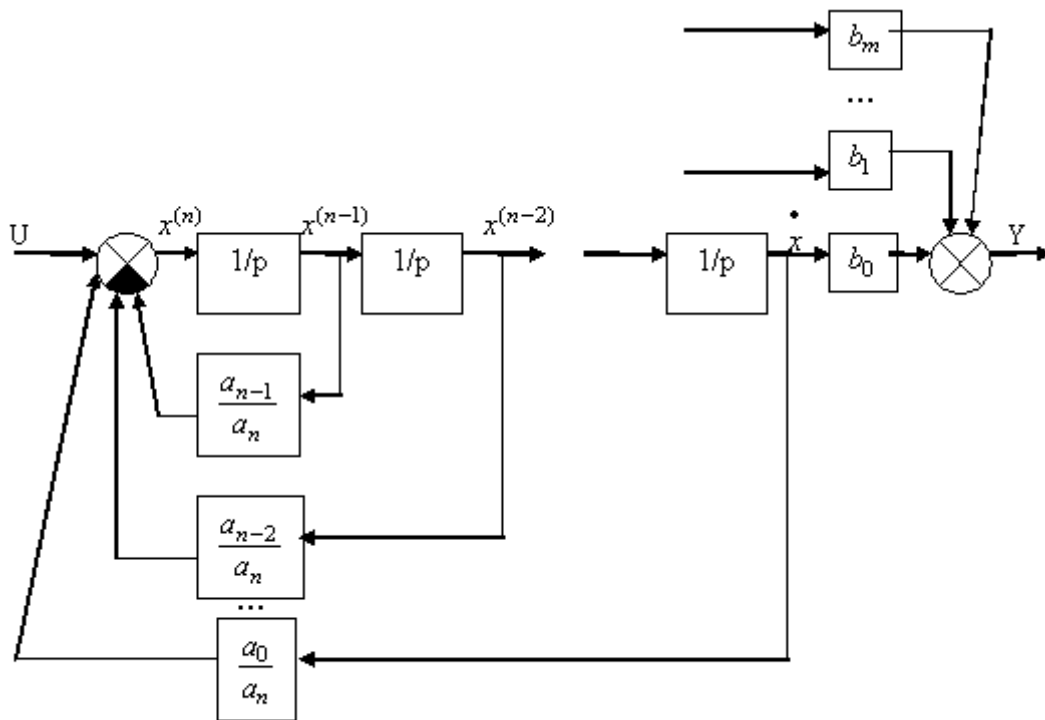
$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p_j}{\sum_{i=0}^n a_i p_i} \longrightarrow \frac{Y(p)}{\sum b_j p_j} = \frac{U(p)}{\sum a_i p_i} = x$$

Вводим вектор состояния как $X = \begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \end{pmatrix}$ саму переменную и (n-1) её

временных производных тогда:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i p_i x = u \\ \sum_{j=0}^m b_j p_j = y \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}, \text{ где } A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ -\frac{a_0}{a_n} & \dots & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \frac{a_0}{a_n} & & & & \frac{a_n}{a_n} \end{vmatrix} \quad - \text{ матрица}$$

$$\text{Фробениуса, } B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}, C = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_m]$$



2. Нормальная форма наблюдения:

$$\sum_{i=0}^n a_i p^{(i)} Y(p) - \sum_{j=0}^m b_j p^{(j)} U(p) = 0 \quad - \text{ запишем в форме Горнера:}$$

$$m = n - 1$$

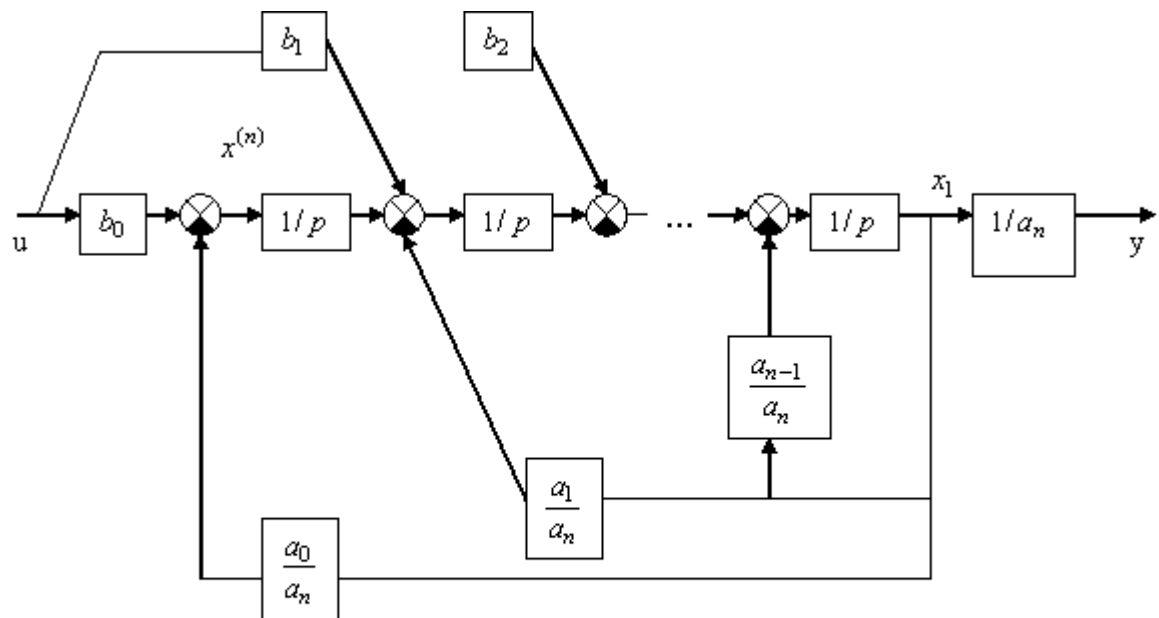
$$p[p[\dots[p[a_n y] + a_{n-1} y - b_{n-1} u] + a_{n-2} y - b_{n-2} u] \dots] + a_0 y - b_0 u = 0$$

$$\underbrace{\underbrace{\quad}_{x_1}}_{x_2}$$

и т.д. до $n - 1$ порядка.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_n y \\ x_2 = p x_1 + a_{n-1} y - b_{n-1} u \\ \dots\dots\dots \\ x_n = p x_{n-1} + a_1 y - b_1 u \\ 0 = p x_n + a_0 y - b_0 u \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x_1}{a_n} \\ p x_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} x_1 + x_2 - b_{n-1} u \\ p x_2 = -\frac{a_{n-2}}{a_n} x_1 + x_3 - b_{n-2} u \\ \dots\dots\dots \\ p x_{n-1} = -\frac{a_1}{a_n} x_1 + x_n - b_1 u \\ p x_n = -\frac{a_0}{a_n} x_1 - b_0 u \end{array} \right.$$

$$pX = \begin{bmatrix} -\frac{a_{n-1}}{a_n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{n-3}}{a_n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_0}{a_n} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} u; \quad y = \left(\frac{1}{a_n}, 0 \dots 0 \right) X$$



3. Канонические формы Лурье (например, в случае простых корней):

Если $w(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$ $p_i = \text{корни } \{Q\}$; $b_i = \frac{R(p_i)}{Q'(p_i)}$; $i = \overrightarrow{1, n}$, то

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & - & - \\ 0 & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{bmatrix} = \text{diag} \begin{bmatrix} p_i \\ i=\overrightarrow{1, n} \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{l} \text{а) } B = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}; \quad C = (b_1 \quad \dots \quad b_n) \\ \text{б) } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad C = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1) \end{array}$$

Переход от одной формы к другой означает переход от одного базиса к другому $x^* = px$, от одного набора матриц (A, B, C) к другому (A^*, B^*, C^*) при неизменной передаточной функции. Существуют различные варианты расчета матрицы преобразования. При этом перемена базиса и матриц не изменяет свойств системы.

Для приведения матрицы любого базиса с матрицей A общего вида к канонической форме размещением по главной диагонали корней характеристического уравнения (собственных чисел матрицы) используется преобразование:

$$A_d = M^{-1}AM$$

где матрица M составлена из столбцов собственных векторов матрицы A .

Если базис выбран в нормальной форме управления с матрицей Фробениуса A_F , то переход к канонической форме A_d осуществляется с помощью матрицы Вандермонда M_B , строки которой имеют вид:

Матрица Вандермонда (записана в столбцовом виде для собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$):

$$M_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Преобразование к диагональной форме:

$$A_d = M_B^{-1} A_F M_B$$

И тогда матрица общего вида A может быть приведена к форме A_F следующим преобразованием:

$$A_F = M_B M^{-1} A M M_B^{-1}$$

где M — матрица перехода к нормальной форме управления (управляемости). Если корни характеристического уравнения комплексные $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, то матрица Вандермонда имеет вид:

$$M_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

и приводит к получению канонической формы в виде:

$$A_d = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

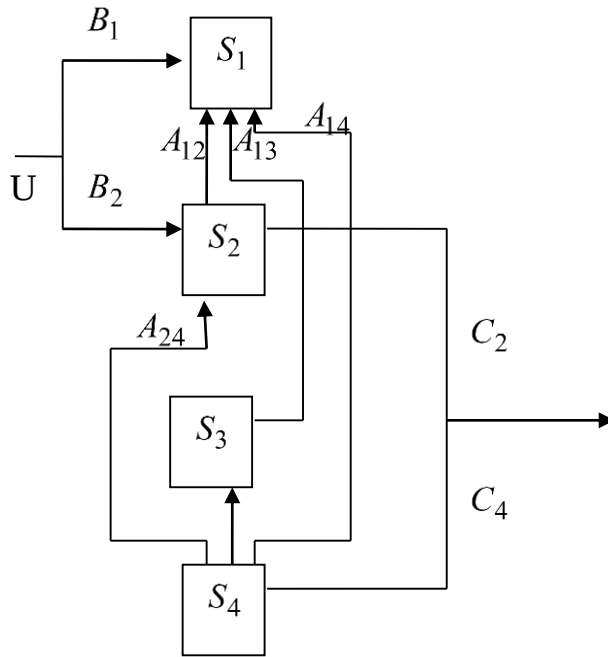
5.5. Управляемость, наблюдаемость, минимальность

Использование ММ “вход-выход” и ПФ для анализа и синтеза показало, что возможно сокращение нулей и полюсов, оказывающих существенное влияния на динамику, пренебрежения которыми приводило к ошибкам. Управлять состоянием системы $X(t)$ можно изменяя вход $U(t)$, а наблюдать состояние можно, измеряя $y(t)$, отсюда два вопроса:

- Можно ли, выбрав соответствующим образом вход $U(t)$ перевести ОУ из произвольного исходного $X(t_0)$ в произвольно заданное $X(t_k)$?
- Можно ли, наблюдая выход $y(t)$ в течении длительного времени определить исходное состояние ОУ $X(t_0)$?

Ответ на первый вопрос связан с понятием **управляемости**, второй вопрос — **наблюдаемости**. Судить об управляемости или наблюдаемости в общем случае сложно. Любая сложная система может быть декомпозирована на четыре подсистемы:

- S_1 - управляемые, ненаблюдаемые.
- S_2 - управляемые, наблюдаемые.
- S_3 - неуправляемые, ненаблюдаемые.
- S_4 - неуправляемые, наблюдаемые.



$$\begin{bmatrix} \bullet \\ x_1 \\ \bullet \\ x_2 \\ \bullet \\ x_3 \\ \bullet \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad W(p) = C(pE - A)^{-1}B = C_2(pE - A_{22})^{-1}B_2$$

Особенно плохо, когда неуправляемые или ненаблюдаемые части имеют правые (неустойчивые) полюса, так как такое поведение ОУ или не обнаруживает себя, либо не может быть изменено U . Так как такая

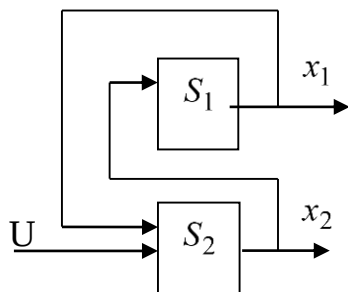
декомпозиция часто затруднена, Калман предложил алгебраические условия, которые позволят проверять свойства объектов:

Необходимое и достаточное условие полной управляемости системы $\{A, B, C\}_n$ заключается в том, что матрица управляемости

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \text{ имеет } rang = n \text{ (т.е. } \det' U \neq 0 \text{)}$$

Примеры:

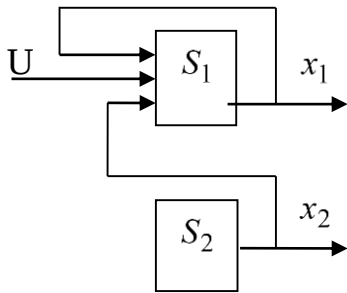
a) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases} \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u$



$$U = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{AB} \quad \det U = -1 \neq 0 \quad rang U = 2 \text{ - полностью}$$

управляемая.

b) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$



$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \det U = 0 \quad \text{rang} U = 1 < 2$$

-

- не полностью управляемая.

Необходимым и достаточным условием **полной наблюдаемости** является условие, чтобы матрица наблюдаемости для системы $\{A, B, C\}_n$

$$N = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} \text{ имела } \text{rang} = n$$

$$\bullet \quad x_1 = x_2 \quad y = x_1 = (1 \ 0) \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{rang} N = 2 \quad \det N = 1 \neq 0$$

•

$$x_2 = x_1 + u$$

$$C^T \ A^T C^T = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

полностью наблюдаема.

•

$$\text{a) } x_1 = x_1 + x_2 + u$$

•

$$x_2 = 0$$

$$y = x_1 - x_2 = (1 \ -1) \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det N = 0, \quad \text{rang} N = 1 < 2$$

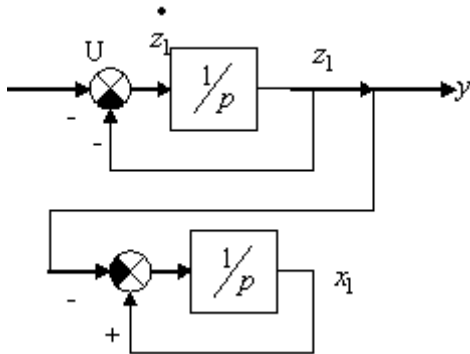
- не полностью наблюдаема.

С точки зрения ПФ :

$$\begin{aligned} W(p) &= C(pE - A)B = (1 \ -1) \begin{vmatrix} p & -1 \\ -1 & p \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = (1 \ -1) \cdot \frac{\begin{vmatrix} p & 1 \\ 1 & p \end{vmatrix}}{p^2 - 1} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{(1 \ -1) \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ p \end{vmatrix}}{p^2 - 1} = \\ &= \frac{1 - p}{(p - 1)(p + 1)} = \frac{-1}{p + 1} \end{aligned}$$

Для иллюстрации проведем смену базиса :

$$\begin{aligned} \bullet \quad z_1 &= x_1 - x_2 = x_2 - x_1 - u = -(x_1 - x_2) - u \\ \bullet \quad z_1 &= -z_1 - u \quad y = z, \quad z_1 = x_1 - x_2; \quad x_2 = x_1 - z_1 \\ \bullet \quad x_1 &= x_2 = x_1 - z_1 \end{aligned}$$



Очевидная аналогия между критериями управляемости и наблюдаемости говорит об их дualности (двойственности). То есть можно рассмотреть две системы:

$$\begin{array}{ll} \bullet \quad \dot{x} = Ax + Bu & \\ S - \{A, B, C\} & y = Cx \\ \bullet \quad \dot{z} = A^T z + C^T u & \text{Условие управляемости для } S \\ S^* - \{A^T, C^T, B^T\} & w = B^T z \end{array}$$

является условием наблюдаемости для S^* и наоборот.

$$\left. \begin{array}{l} S \\ S^* \end{array} \right\} \text{ дуальные объекты}$$

Так как с точки зрения описания «вход-выход» $W(p) = W_2(p)$ - передаточная функция управляемой и наблюдаемой подсистемы, то при условии, что неуправляемая и ненаблюдаемые подсистемы имеют левые корни (полюса), то объект можно описать только уравнением S_2 . В этом случае ММ имеет минимальную размерность.

Если это не так, то требуется дополнительный анализ.

Матрицы управляемости для различных базисов с наборами матриц (A, B, C) и (A*, B*, C*) могут быть использованы для расчета матриц преобразований:

$$p = U^* U^{-1}, \quad U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix}, \quad U^* = \begin{bmatrix} B^* & (A^*)^1 B^* & \dots & (A^*)^{n-1} B^* \end{bmatrix}$$

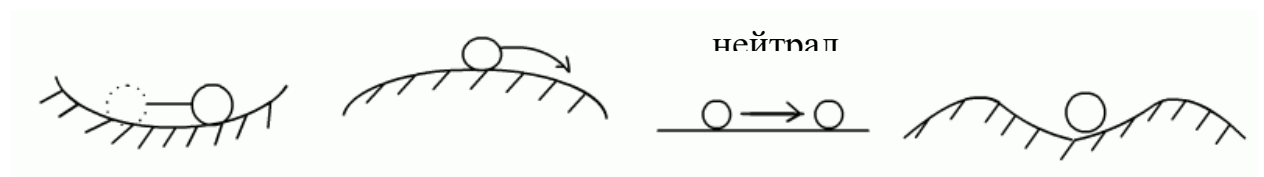
$$U^* = pU, \quad p^{-1} = U(U^*)^{-1}; \quad A^* = pAp^{-1}, \quad B^* = pB, \quad C^* = Cp^{-1}$$

5.6. Анализ линейных систем управления

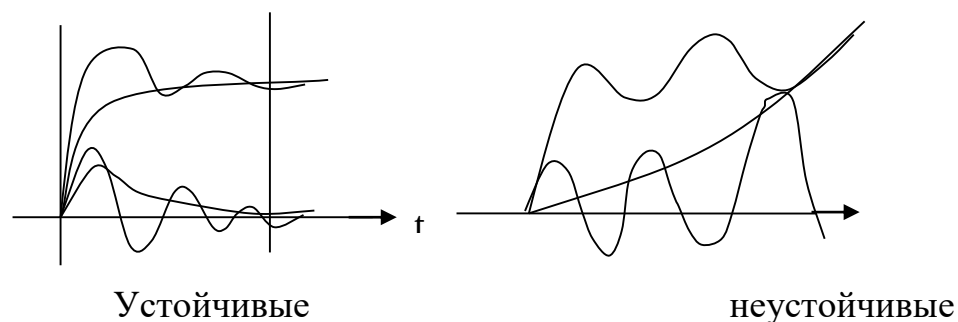
При проектировании СУ важно проводить анализ и исследование её свойств. Ключевым свойством является устойчивость.

5.6.1. Устойчивость линейных САУ

В простейшем случае понятие устойчивости – способность системы возвращаться в положение равновесия после исчезновения возмущений (внешних сил), которые вывели её из равновесия. Если система неустойчива, то не возвращается в равновесие или совершает вокруг него недопустимые колебания. Простейшая интерпретация представлена ниже :



Об устойчивости системы можно судить по временным характеристикам



Строгое определение устойчивости и общую постановку задачи ещё в 1892г. дал А.М.Ляпунов, а также сформулировал теоремы для условий устойчивости, как линейных так и нелинейных систем.

Для линейных СУ требование устойчивости (асимптотической устойчивости) сводится к отрицательности вещественных частей полюсов ПФ системы. Если хотя бы один полюс (корень характеристического уравнения) имеет положительную действительную часть, то система неустойчива. Если есть один нулевой корень, то после возмущения система перейдёт на другой постоянный уровень – т.е. нейтральна – т.н. апериодическая граница устойчивости, при двух система неустойчива. Если есть пара мнимых корней, то система находится на колебательной границе устойчивости. Это следует из рассмотрения решения линейного дифференциального уравнения. Поэтому прямой способ определения устойчивости состоит в решении характеристического уравнения (нахождении полюсов ПФ) – однако это легко только для уравнений 1 и 2 порядка и громоздко и практически непригодно для более высоких. И важное значение приобретают правила, отвечающие за знак вещественных частей полюсов без их вычисления – **критерии устойчивости**, которые также позволяют изучать как влияет на устойчивость изменения тех или иных параметров системы (критерии бывают алгебраические и частотные – которые математически эквивалентны, но более удобны в конкретных исследованиях).

5.6.1.1. Алгебраические критерии устойчивости

Были сформулированы в конце XIX века независимо А.Гурвицем и Э.Дж.Раусом на основе анализа характеристического уравнения системы и сложились в форме определителей (что удобно для систем до 3-4 порядков) и в табличной (алгоритмической) форме.

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = a_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) =$$

$$= a_n p^n - a_n \sum_{i=1}^n p_i p^{n-1} + \dots - a_n (-1)^n \prod_{i=1}^n p_i = 0$$

Нетрудно видеть, что необходимым условием является один знак (например положительный) всех коэффициентов. Если не выполняется, то дальше можно не проверять – система неустойчива, если выполняется, то ещё не ясно и требуется дополнительный анализ.

Пример: $(p+2)(p^2 - p + 4) = p^3 + p^2 + 2p + 8$

Для анализа составляется Δ_n определитель Гурвица и положительность

его и диагональных миноров достаточно для устойчивости .

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \Delta_{n-1} > 0$$

Для 3 порядка: $D(n) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0$; $a_i > 0 \rightarrow a_2 a_1 > a_0 a_3$

Для 4 порядка: $D(n) = a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 \rightarrow a_i > 0 \rightarrow a_n > 0$

$$\rightarrow \Delta_{n-1} = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{bmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} - a_0 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 [a_2 a_3 - a_1 a_4] - a_0 a_3^2 = \underline{a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2}$$

Для более высоких порядков удобнее составлять таблицу Рауса:

	1	2	...
1	a_n	a_{n-2}	...
2	a_{n-1}	a_{n-3}	...
3 $r_3 = \frac{c_{11}}{c_{21}}$	$C_{31} = C_{12} - r_3 C_{22}$	$C_{3,2}$	...
4 $r_4 = \frac{c_{21}}{c_{31}}$	$C_{41} = C_{22} - r_4 C_{32}$		...
...	...	...	...

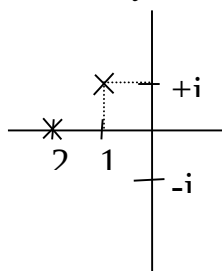
$$r_i = \frac{c_{i-2,1}}{c_{i-1,1}}, \quad c_{i,1} = c_{i-2,2} - r_i c_{i-1,2}$$

Необходимо и достаточно для устойчивости, чтобы были положительны все элементы 1 столбца.

Пример:

$$D(p) = p^3 + 4p^2 + 6p + 4 = (p+2)(p^2 + 2p + 2) = p^3 + 2p^2 + 2p + 2p^2 + 4p + 4 = \\ = (p+2)(p+1+j)(p+1-j)$$

24>4 → устойчива по Гурвицу



	1	6	0
	4	4	0
1/4	5>0	0	
4/5	4>0	0	
5/4	0		

Из анализа таблицы получаем устойчива по Раусу.

Критерий Рауса-Гурвица даёт не только ответ «устойчива или нет», но и позволяет исследовать степень устойчивости системы (определить её относительную устойчивость), т.е. удаление от оси ординат её полюсов.

$$D_c(p-1) = (p-1)^3 + 4(p-1)^2 + 6(p-1) + 4 = p^3 + p^2 + p + 1$$

- степень устойчивости = 1 (при сдвиге на 1 имеем границу устойчивости).

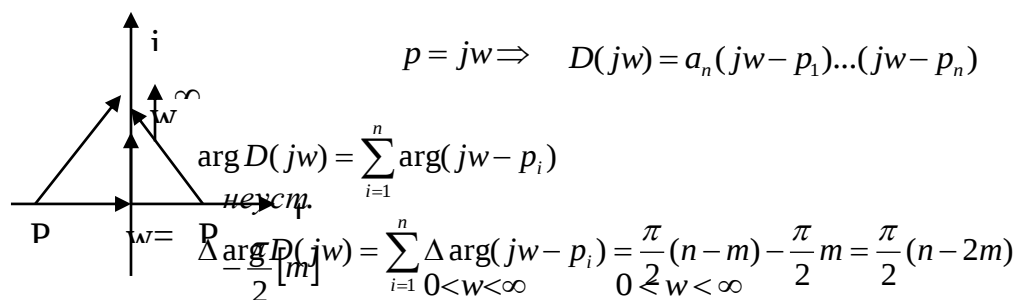
5. 6.1.2. Частотные критерии устойчивости (Михайлова, Найквиста)

В основе частотных критериев устойчивости лежит известный в теории функций комплексного переменного **ПРИНЦИП АРГУМЕНТА**:

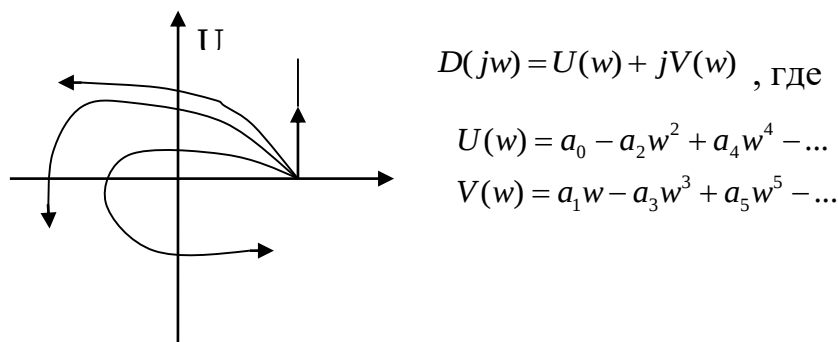
Для $D(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0 = a_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)$ — p_i — корни $D(p)$ [полюса]

уст.

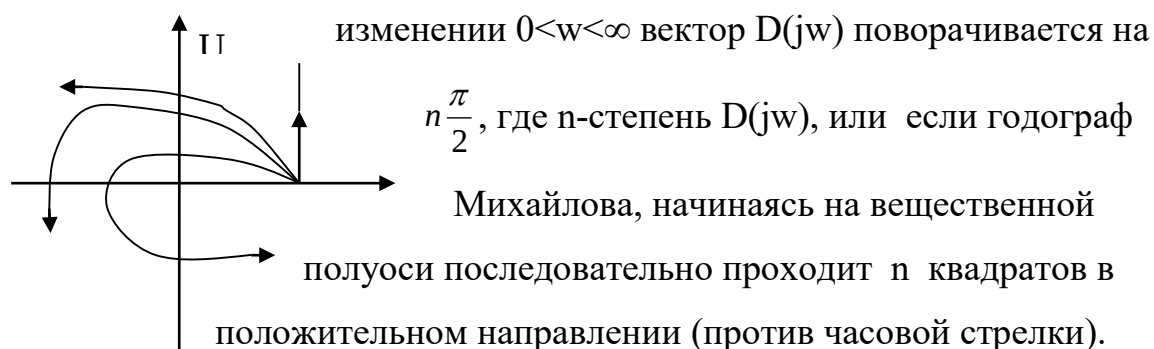
$$+ \frac{\pi}{2} [n - m]$$



Геометрическое место конца вектора $D(jw)$ при $0 < w < \infty$ называется годографом $D(jw)$ – годографом Михайлова.



Критерий Михайлова (1938): СУ устойчива (т.е. $m=0$), если при

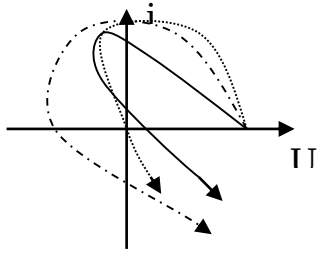


Если порядок или число квадратов нарушается – система неустойчива.

Если годограф проходит через ноль – граница устойчивости.

Для расчётного построения используется принцип нахождения точек пересечения осей U и jV .

Увеличение свободного члена a_0 смещает годограф Михайлова параллельно вправо вплоть до границы устойчивости, поэтому пересечение отрицательной вещественной полуоси характеризуют максимально возможное увеличение K усиления в замкнутой системе.



Критерий Найквиста (1932) : Разработан американцем Г.Найквистом. Позволяет судить об устойчивости замкнутой СУ (ЗС) по виду АФЧХ разомкнутой части, считая что замыкание осуществляется единичной ООС.

Если $W_p(p) = \frac{K(p)}{D(p)}$, то $W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1+W_p(p)}$

и для получения характеристического полинома замкнутой системы (ЗС)

$$F(p) = 1 + W_p(p) = \frac{D(p) + K(p)}{D(p)},$$

получаем выражение где числитель – характеристический полином ЗС, знаменатель – характеристический полином разомкнутой части системы (РС).

Возможны 3 случая состояния РС:

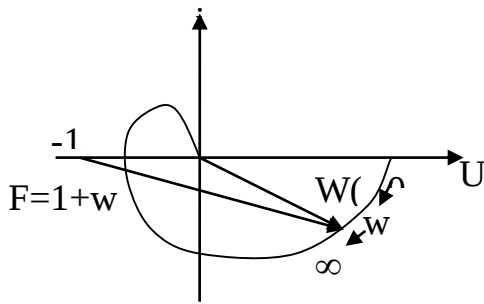
а) Устойчива: $\Delta \arg D(j\omega) = n \frac{\pi}{2}$ - по критерию Михайлова -
 $0 < \omega < \infty$

тогда для устойчивости ЗС требуется чтобы $\Delta \arg [D(j\omega) + K(j\omega)] = n \frac{\pi}{2}$
 $0 < \omega < \infty$

отсюда следует :

$$\Delta \arg F(j\omega) = \Delta \arg [D(j\omega) + K(j\omega)] - \Delta \arg D(j\omega) = 0 \Rightarrow$$

замкнутая система устойчива, если годограф устойчивой разомкнутой системы не охватывает (.) (-1, -j0).



б) Неустойчива:

т.е. m правых полюсов

$$\Delta \arg D(jw) = \frac{\pi}{2} (n - 2m) \\ 0 < w < \infty$$

Для устойчивости ЗС требуется чтобы: $\Delta \arg [D(jw) + K(jw)] = \frac{\pi}{2} n$, тогда

$$\Delta \arg F(jw) = n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} (n - 2m) = m\pi = \frac{m}{2} 2\pi \quad (2\pi - \text{оборотов вокруг оси в}$$

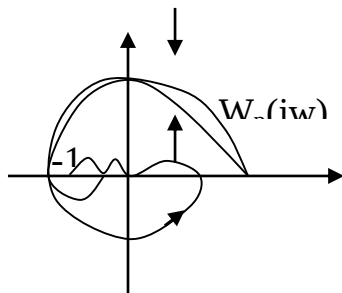
положительном направлении – против часовой стрелки)

ЗС устойчива, если при изменении w от 0 до ∞ годограф разомкнутой

системы $W_p(jw)$ охватывает точку $(-1, j0)$ $m/2$ раз в положительном

направлении, где m – число правых корней или количество переходов оси

$[-\infty, -1]$ – сверху вниз > снизу вверх на $m/2$



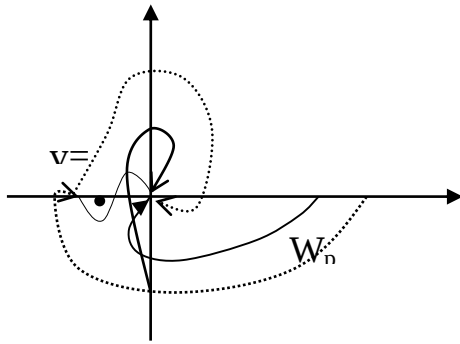
переходы: «+»

«-»

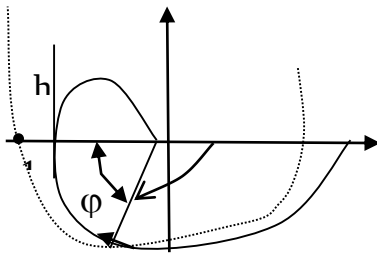
в) Нейтральна: имеет нулевые корни $W_p(p) = \frac{K(p)}{P^v D_1(p)} = \frac{1}{P^v} W_p^1(p)$. Дополняем

мысленно дугой бесконечного радиуса до положительной полуоси и также

как ранее проверяем охват критической точки.



Критерий Найквиста работает для АФЧХ разомкнутой системы независимо от того, как она была получены (расчётно или экспериментально). А так же позволяет легко оценивать изменения, которые могут произойти при введении дополнительного усиления или запаздывания.



Запас по фазе $\varphi = \pi - \psi(w)$, где $|W(w_c)| = 1$

- характеризует возможное дополнительное запаздывание.

Запас по амплитуде: h – характеризует возможное увеличение K до критического, когда годограф пройдёт через точку $(-1, j0)$.

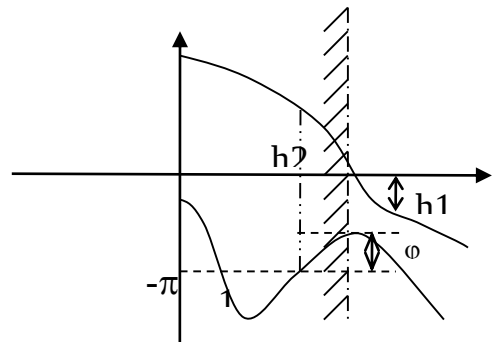
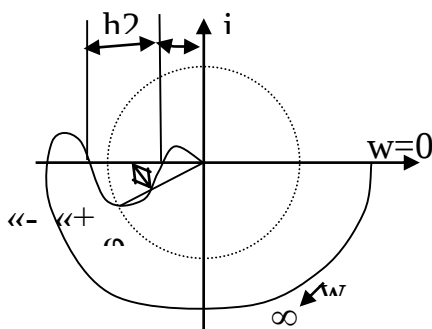
Логарифмический вариант критерия устойчивости :

Получил широкое применение в инженерной практике, что обусловлено тем, что строить ЛАФЧХ значительно проще чем годограф.

Как было сказано, устойчивость связана с числом переходов АФХ отрезка $(-\infty, -1)$ отрицательной вещественной полуоси. Когда АФХ $W(jw)$ пересекает отриц. вещественную полуось $\rightarrow$ ЛФЧ пересекает линию $\pm\pi(2i+1)$ $i = \overline{0, k}$.

Переходы не опасны с точки зрения устойчивости, если они происходят справа от точки $(-1, j0)$, т.е. при этом $|W(jw)| < 1$ и ЛАХ – отрицательна.

Положительному переходу $\downarrow$ через $(-\infty, -1)$ для $W(jw)$ соответствует пересечение ЛФХ при $L(w) > 0$ асимптот ЛФХ $\pm\pi(2i+1)$ снизу вверх, а отриц. – сверху вниз.



Для устойчивости ЗС необходимо и достаточно, чтобы разности между числом «+» и «-» переходов ЛФЧ прямых $\pm\pi(2i+1)$ $i=0,1,\dots$ в тех областях, где $L(w)>0$ была равна $m/2$.

Обычно, необходимо чтобы запас уст. по фазе $\geq 30^\circ$; запас устойчивости по амплитуде $\geq 6\text{дБ}$ (2 кратный по коэффициенту усиления).

5.6.1.3. Влияние параметров системы на её устойчивость

Исследование влияния параметров осуществляется с помощью любого из критериев (Гурвица, Михайлова) 2 основными методами:

- путём анализа перемещения корней х.у. в плоскости корней – метод корневого годографа (1948г Теодорчик).
- путём анализа числа корней х.у. в правой полуплоскости в пространстве параметров системы – метод Д-разбиения пространства параметров (1948г. Неймарк Ю.И.).

5.6.2. Качество процессов управления и методы его исследования

Устойчивость САУ – необходимое, но далеко не достаточное условие её пригодности. Ибо при отработке различных воздействий (возмущений, уставок) она может оказаться – недостаточно точной; - недостаточно быстро действующей; - недостаточно плавной (сильно колебательной).

Комплекс требований, определяющих поведение СУ в установившемся и переходном процессе объединяется понятием – **качества процесса управления** (качества СУ).

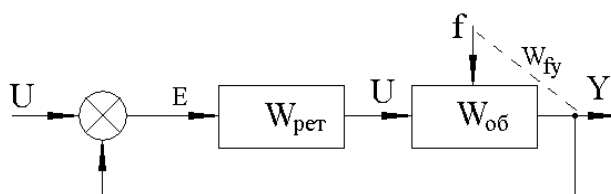
Задача анализа (исследования) – установить какое влияние оказывает выбор структуры и значений параметров на процесс управления и показатели качества, удовлетворяет ли тот или иной вариант заданным требованиям. Выбор структуры и параметров СУ в соответствии с требованиями качества относится к **задаче синтеза**.

5.6.2.1. Точность СУ

СУ в зависимости от воздействия могут находиться в одном из двух режимов:

1. *переходной* (сразу при подаче воздействий) ,
2. *стационарный (установившийся)* - через некоторое время после окончания переходного процесса:
 - а) *статический* (когда СУ находится в покое, в следствии того, что внешние воздействия не меняются во времени);
 - б) *динамический* (когда внешние воздействия функции времени - степенные - $at^k, k=1,2$ и т.д. , гармоническое - $asinwt$, случайные сигналы с постоянными статическими свойствами).

Для исследования *точности* САУ в установившихся режимах используют положение операционного исчисления о конечном значении.



$$Y_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p)$$

$$Y(p) = \frac{V(p) \cdot W_{\text{пет}} W_{\text{об}} + f(p) \cdot W_{\text{fy}}}{1 + W_{\text{пет}} \cdot W_{\text{об}}}$$

$$Y_{\text{уст}} = \frac{\prod k_i}{1 + \prod k_i} \cdot V_0 + \frac{k + y}{1 + \prod k_i} \cdot F_0$$

W_{fy} - ПФ от места возмущения до выхода.

При этом ошибка $\varepsilon(p) = \frac{V(p) - f(p) \cdot W_{\text{fy}}}{1 + W_{\text{пет}} \cdot W_{\text{об}}} = V(p) - Y(p)$ определяется

свойствами звеньев САУ и характеристиками помехи.

Для статических систем (все звенья имеют конечный коэффициент передачи при $p=0$)

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{1 + \prod k_i} \cdot V_0 + \frac{-k_{\text{fy}}}{1 + \prod k_i} \cdot F_0 = \varepsilon_{V0} + \varepsilon_{f0}$$

$\prod k_i$ — $k_{\text{раз}}$ коэффициент усиления разомкнутой системы

ε_{V0} — статическая ошибка по уставке,

ε_{f0} — статическая ошибка по возмущению.

Мерой *статической точности* — **статизмом** — называют отношение модуля статической ошибки к соответствующему воздействию, выраженное в процентах.

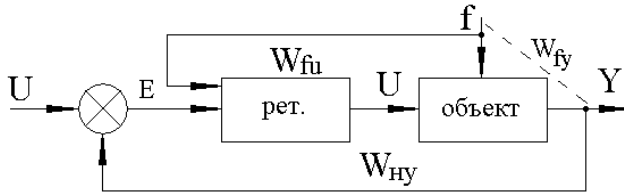
Если разомкнуть систему на входе регулятора, то $\varepsilon_0 = V_0 - k_{\text{fy}} \cdot F_0$, —

видно, что замыкание ОС увеличивает точность (уменьшает ошибку) в

$(1 + k_{\text{раз}})$ раз. Однако увеличение $k_{\text{раз}}$ ограничено **устойчивостью**. Поэтому выработаны другие способы устранения статической ошибки.

5. 6.2.2. Способы устранения установившейся ошибки

1. компенсация возмущений — введение дополнительного канала:



$$Y(p) = \frac{W_{fy} \cdot f(p) + W_{fu} \cdot W_{uy} \cdot f(p)}{1 + W_{pet} \cdot W_{ob}}$$

При $W_{fu} = -\frac{W_{fy}}{W}$ — система становится **инвариантной** к возмущению.

2. введение интегрирующего звена (ИЗ) в систему:

$$W_{paz}(p) = \frac{1}{p} \cdot W_{paz}(p) \quad \lim_{p \rightarrow 0} W'_{paz}(p) = k_{paz}$$

$$\varepsilon_0 = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{V_0}{p} - W_{fy} \cdot \frac{F_0}{p}}{1 + \frac{1}{p} \cdot W'_{paz}(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pV_0}{p + W'_{paz}(p)} - \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pW_{fy} \cdot F_0}{p + W'_{paz}(p)}$$

Система с ИЗ (астатический элемент) → астатическая, причем ИЗ может быть введено как в УУ так и в объект – ошибка по установке равна нулю, сложнее с ошибкой по возмущению.

Если ИЗ входит и в $W_{fy}(p) = \frac{1}{p} \cdot W'_{fy}(p)$, $\lim_{p \rightarrow 0} W'_{fy}(p) = k_{fy}$ то.

$$\varepsilon_{f0} = -\frac{k_{fy} \cdot F_0}{k_{paz}} \neq 0$$

Чтобы ошибка по возмущению $\varepsilon_0 = 0$, необходимо чтобы ИЗ находилась вне

W_{fy} .

Однако, при подаче на вход такой системы линейно-растущего сигнала

$$f(t) = F_1 \cdot t, \quad F_1 = \dot{f} = const, \quad f(p) = \frac{F_1}{p^2}$$

$$\varepsilon_{f1} = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{-k_{fy} \cdot \frac{F_1}{p^2}}{1 + \frac{1}{p} \cdot k_{paz}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-k_{fy} F_1}{p + k_{paz}} = -\frac{k_{fy}}{k_{paz}} \cdot F_1 \text{ — кинетическая ошибка.}$$

А при подаче квадратично-растущего сигнала с постоянным ускорением

$$f(t) = \frac{F_2}{2} \cdot t^2, \quad F_2 = \ddot{f}(t), \quad F(p) = \frac{F_2}{p^3}$$

$$\varepsilon_{f_2} = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{-k_{fy} \cdot \frac{F_2}{p^3}}{1 + \frac{1}{p} \cdot k_{paz}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-k_{fy} \cdot F_2}{p(p + k_{paz})} = \infty$$

Если в систему ввести второе ИЗ – то есть сделать астатическую систему

$$\text{второго порядка, то } \varepsilon_{f_2} = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-k_{fy} \cdot F_2}{p + k_{paz}} = -\frac{k_{fy}}{k_{paz}} \cdot F_2.$$

Отсюда правило: Если порядок астатизма системы выше степени по времени воздействия, то ошибка равна нулю. Если они равны – то ошибка постоянна, и если ниже, то равна бесконечности.

Однако, реализовать замкнутую систему с высоким порядком астатизма сложно, так как СУ содержащая два ИЗ уже структурно - неустойчива и не может быть реализована без специальных корректирующих устройств.

Величина установившихся ошибок зависит в этом случае как от величины воздействия F_0, F_1, F_2 , так и от качества системы, которая описывается **добротностью** – отношением параметра возмущения к ошибке, вызванной этим возмущением (для статических сигналов величина обратная статизму)

$$D = \frac{F_i}{\varepsilon_{fi}} = \frac{k_{paz}}{k_{fy}}.$$

5.6.2.3. Ошибка при гармоническом воздействии

$f(t) = F \sin \omega t$ — динамическая ошибка тоже имеет синусоидальный характер

$$\text{и } \varepsilon(t) = \left| \frac{W_{fy}(j\omega)}{1 + W_{paz}(j\omega)} \right| \cdot F \cdot \sin \left(\omega t - \arg \left| \frac{W_{fy}(j\omega)}{1 + W_{paz}(j\omega)} \right| \right), \quad E_M = \left| \frac{W_{fy}(j\omega)}{1 + W_{paz}(j\omega)} \right|_{\omega}$$

оценивается либо по максимальному E_M либо по эффективному

(среднеквадратическому) значению $\Delta = \frac{E_M}{\sqrt{2}}.$

5.6.2.4. Оценка ошибки при случайных воздействиях

Как уставка так и возмущения могут быть **стационарно случайными процессами** – то есть в отличие от случайных величин зависимыми от времени и имеющими соответственно *временные* и частотные свойства, которые описываются корреляционной функцией R и спектральной плотностью S .

Вспомним основные понятия.

На основе функций распределения $F(x)$ или плотности вероятности

$$\text{случайного процесса } p(x): p(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

в практике исследования СУ получили более простые числовые характеристики:

1. *Математическое ожидание (МО)*

$$M[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot p(x, t) dx = \tilde{x} \text{ — среднее по множеству (ансамблю процессов),}$$

которое для эргодических случайных процессов может заменяться

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \text{ — средним по времени.}$$

2. *Среднее значение квадрата и дисперсия (D)* (мера отклонения от среднего - разброс)

$$\tilde{x}^2(t) = M\left[\left\{x^0(t)\right\}^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \cdot p(x, t) dx = D_x(t) + m_x^2$$

$$D_x(t) = M\left[\left\{x^0(t)\right\}^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \{x - m_x\}^2 \cdot p(x, t) dx$$

$$x^0(t) = m_x + x^0(t)$$

$$D_x = \overline{\{x^0(t)\}^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - \bar{x}) \cdot (x(t) - \bar{x}) dt$$

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)} \text{ — среднее квадратическое отклонение.}$$

Хотя ни MO ни D не характеризуют статическую взаимосвязь между случайными процессами в различные моменты времени они важны, но недостаточны.

3. Автокорреляционная функция

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_x(\tau) = M[x^0(t_1) \cdot x^0(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^0(t) \cdot x^0(t + \tau) * p\{x(t), x(t + \tau)\} dx dx$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - \bar{x}) \cdot (x(t + \tau) - \bar{x}) dt \rightarrow D_x = R_x(0) \text{ — характеризует}$$

влияние предыдущего значения на последующее.

4. Взаимнокорреляционная функция

$$R_{xy}(\tau) = M[x^0(t_1) \cdot y^0(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^0(t_1) - y^0(t_1 + \tau) * p\{x(t), y(t + \tau)\} dx dy$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - \bar{x}) \cdot (y(t + \tau) - \bar{y}) dt \text{ — характеризует взаимную связь двух}$$

случайных процессов.

Если случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ - статически не связаны, имеют нулевые средние (то есть централизованы), то $R_{xy}(\tau)$ при всех $\tau=0$ - обратное верно лишь для процессов с нормальным законом распределения.

Корреляционные функции могут вычисляться и для неслучайных (регулярных) функций времени, понимая под этим просто результат формальной операции: так для $x(t) = A \rightarrow R_x(\tau) = A^2$,

$$x(t) = A \sin(\omega t + y) \rightarrow R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau.$$

4. Спектральная плотность $S_x(\omega)$ случайного процесса $x(t)$ — характеризует частотный состав сигнала и получается как изображение Фурье автокорреляционной функции

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$$

а используя формулу Эйлера $e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau$ получим:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cdot \sin \omega \tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \text{ учитывая}$$

четность и нечетность.

И обратно $\rightarrow$ по формуле обратного преобразования Фурье по известной $S_x(\omega)$ можно найти соответствующую

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cdot \cos \omega \tau d\omega.$$

$$\text{Учитывая что } D_x = \sigma_x^2 = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega$$

Взаимная спектральная плотность $S_{xy}(j\omega)$ — определяется как преобразование Фурье от взаимной корреляционной функции

$$S_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \text{ — не является четной и поэтому комплексная}$$

$$\text{функция и } R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

5. Предполагая, что случайный процесс имеет эффективную полосу частот -

$\Delta\omega_{эфф}$, где $S_x(\omega_{эфф}) \approx S_x(0)$ и остальных где $S_x(\omega_{эфф}) \approx 0$, можно

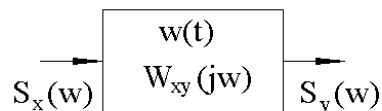
приблизительно вычислять

$$D_x = R_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_{эфф}} S_x(0) d\omega = \frac{1}{2\pi} S_x(0) \cdot \Delta\omega_{эфф} \rightarrow \Delta\omega_{эфф} = \frac{2\pi D_x}{S_x(0)} \quad \Delta f = \frac{\Delta\omega_{эфф}}{2\pi} = \frac{D_x}{S_x(0)}.$$

При прохождении случайного процесса через линейную динамическую

систему, характеризуемую либо ИПФ $w(t)$ - весовой функцией, либо АЧФ

$W_{xy}(j\omega)$ принято считать, что ошибки можно оценивать следующим образом:



$$x(t) = m_x + x^0(t) \qquad y(t) = m_y + y^0(t)$$

$$y(t) = m_y + y^0(t) \quad W_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) e^{-j\omega t} dt$$

$m_x(t)$, $m_y(t)$ — не случайные и связаны через W_{xy} .

$$S_y(\omega) = W_{xy}(j\omega) \cdot W_{xy}(-j\omega) \cdot S_x(\omega) \quad m_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) m_x(t - \tau) d\tau$$

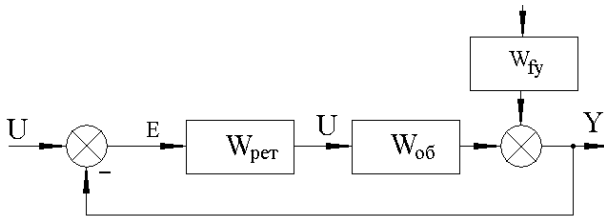
$R_y(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t_1) \cdot \omega(t_2) \cdot R_x(\tau + t_1 + t_2) dt_1 dt_2$ — либо как результат двукратного интегрирования

$$R_y(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{xy}(j\omega)|^2 S_x(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega$$
 — либо через спектральную плотность

входного сигнала.

Менее интересны: $R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau - t) \omega(t) dt$ $S_{xy}(j\omega) = W(j\omega) \cdot S_x(\omega)$

Точность СУ при случайных сигналах



$$V(t) = m_v(t) + V^0(t) \quad f(t) = m_f(t) + f^0(t)$$

Тогда и $e = m_e(t) + e^0(t)$

$$m_e(t) = \frac{1}{1 + W_{пет} \cdot W_{об}} \cdot m_x(t) + \frac{W_{fy}}{1 + W_{пет} \cdot W_{об}} \cdot m_f(t)$$
 и при стационарных

случайных сигналах и постоянных воздействиях:

$$m_e = \frac{1}{1 + k_c} m_x + \frac{k_{fy}}{1 + k_c} m_f = const.$$

Центрированные составляющие $V^0(t)$ и $f^0(t)$ обычно задаются или корреляционными функциями $R_v(\tau)$ и $R_f(\tau)$ или спектральными плотностями $S_v(\omega)$ и $S_f(\omega)$. При взаимной коррелированности V^0 и f^0 задается также R_{vf} и S_{vf} .

По ним находят корреляционную функцию и спектральную плотность

$$\text{ошибки } R_e(\tau), S_e(\omega) \quad S_e(\omega) = \left| \frac{1}{1+W_c(j\omega)} \right|^2 S_v(\omega) + \left| \frac{W_{fy}(j\omega)}{1+W_c(j\omega)} \right|^2 S_f(\omega)$$

$$\text{соответственно дисперсию ошибки } D_e=R_e(0) \quad D_e = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_e(\omega) d\omega$$

$$\text{и среднеквадратическую ошибку: } \sigma = e_{\text{ср.кв.адр}} = \sqrt{e^2(t)} = \sqrt{m_e^2(t) + D_e}.$$

Вычисление интеграла производят либо аналитически с помощью стандартных формул, либо графоаналитическим интегрированием (для $n>4$) :

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}}{|a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n|^2} d\omega$$

$$\text{для } n=1 \quad J_1 = \frac{b_0}{2a_0a_1}$$

$$n=2 \quad J_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0b_1}{a_2}}{2a_0a_1}$$

$$n=3 \quad J_3 = \frac{-a_2b_0 + a_0b_1 - \frac{a_0a_1b_2}{a_3}}{2a_0(a_0a_3 - a_1a_2)}$$

$$n=4 \quad J_4 = \frac{b_0(-a_1a_4 + a_2a_3) - a_0a_3b_1 + a_0a_1b_2 + \frac{a_0b_3(a_0a_3 - a_1a_2)}{a_4}}{2a_0(a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - a_1a_2a_3)}.$$

Пример:

Следящая система с пропорциональным регулятором управляющим

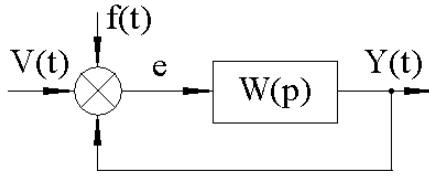
двигателем $W(p) = \frac{k}{p(Tp+1)}$. На входе полезный случайный процесс с

корреляционной функцией - экспоненциального типа

$$S_v(\omega) = \frac{2D_v\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2D_vT_v}{1 + \omega^2T_v^2} \text{ и помеха типа «белый шум»}$$

$$R_f(\tau) = \underbrace{N}_{\text{const}} \delta(\tau) \rightarrow S_f(\omega) = N, \text{ и корреляция между ними отсутствует.}$$

Пример :



1) Находим ПФ $W_{ve}(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{p(Tp+1)}{p(Tp+1)+k}$

$$W_{fe}(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{k}{p(Tp+1)+k}$$

2) $S_e(\omega) = \left| \frac{j\omega(1+j\omega T)}{T(j\omega)^2 + (j\omega) + k} \right|^2 \cdot S_v(\omega) + \left| \frac{k}{T(j\omega)^2 + (j\omega) + k} \right|^2 S_f(\omega)$

3) $\sigma_v^2 = D_e^v = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{j\omega(1+j\omega T)}{T(j\omega)^2 + (j\omega) + k} \right|^2 \cdot \frac{2D_v T_v}{1+\omega^2 T_v^2} d\omega =$
 $= \frac{2D_v T_v}{1+\omega^2 T_v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[T^2(j\omega)^4 - (j\omega)^2]}{[TT_v(j\omega)^3 + (T+T_v) \cdot (j\omega)^2 + (1+kT_v) \cdot (j\omega) + k]^2} d\omega = 2D_v T_v \cdot \frac{1}{2T_v} \cdot \frac{T+T_v+kTT_v}{T+T_v+kT_v^2}$

4) $\sigma_f^2 = D_e^f = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 N d\omega}{|T(j\omega)^2 + (j\omega) + k|^2} = k^2 N \cdot \frac{0 + \frac{T \cdot 1}{k}}{2 \cdot T \cdot 1} = \frac{kN}{2}$

5) $\sigma^2 = D_e = D_e^v + D_e^f = D_v \cdot \frac{T+T_v+kTT_v}{T+T_v+kT_v^2} + \frac{kN}{2}$

6) $\min D: \frac{\partial D}{\partial k} = 0 = \frac{D_v}{T+T_v+kT_v^2} TT_v + D_v \frac{(T+T_v+kTT_v) \cdot (-T_v^2)}{(T+T_v+kT_v^2)^2} + \frac{N}{2} =$

$$= \frac{D_v TT_v (T+T_v+kT_v^2) - D_v T_v^2 (T+T_v+kTT_v) + \frac{N}{2} (T+T_v+kT_v^2)}{(T+T_v+kT_v^2)^2}$$

$k \neq -\frac{T+T_v}{T_v^2} \quad D_v T^2 T_v - D_v T_v^3 + \frac{N}{2} (T+T_v) + \frac{N}{2} k T_v^2 = 0$

$$k = \frac{2}{NT_v^2} \cdot \left[D_v T_v^3 - D_v T^2 T_v + \frac{N}{2} (T+T_v) \right] = \frac{2D_v}{N} \left(T_v - \frac{T^2}{T_v^2} \right) - \frac{T+T_v}{T_v^2}$$

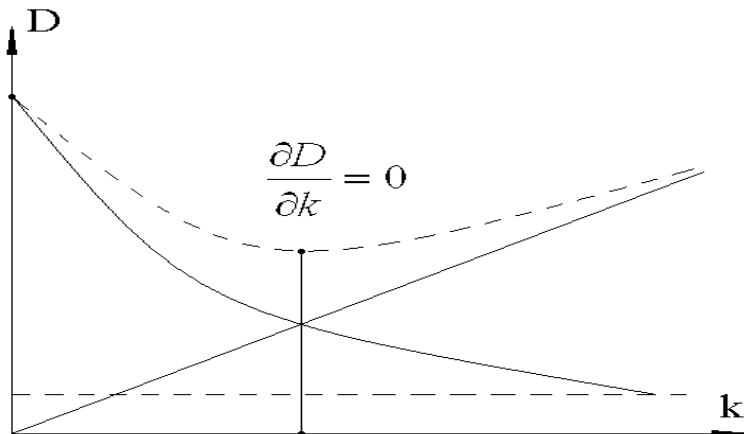
При конкретных данных: $D_v=100\text{В}$, $T_v=20\text{с}$, $N=0.01\text{В}^2/\text{Гц}$, $T=0.1\text{с}$

$$k \neq \frac{0.1+20}{(20)^2} \approx 0.05$$

$$k_{onm} = \frac{2 \cdot 100}{0.01} \cdot \left(20 - \frac{(0.1)^2}{20} \right) - \frac{0.1+20}{(20)^2} =$$

$$= 20 \cdot 2 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} - 0.05 - \frac{1}{4} \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^5 - 10 - 0.05 - 0.00025$$

$$7) \quad k=5 \text{ 1/c} \rightarrow \sigma^2 = D_e = \frac{0.1+20+5 \cdot 0.1 \cdot 20}{0.1+20+5 \cdot 20^2} \cdot 100 + \frac{5 \cdot 0.01}{2} \approx 1.5B^2 \quad \sigma = 1,22B$$



$$\frac{-D_v T_v (T_v^2 - T^2)}{(T + T_v + k T_v^2)^2} + \frac{N}{2} = 0 \quad (T + T_v + k T_v^2)^2 = \frac{2 D_v T_v (T_v^2 - T^2)}{N}$$

$$k_{onm} = \frac{1}{T_v^2} \left[\sqrt{\frac{2 D_v T_v (T_v^2 - T^2)}{N}} - T - T_v \right] = \sqrt{\frac{2 D_v (T_v^2 - T^2)}{N T_v^3}} - \frac{T + T_v}{T_v^2}.$$

5.6.3. Показатели качества в переходных процессах

5. 6.3.1. Прямые показатели качества

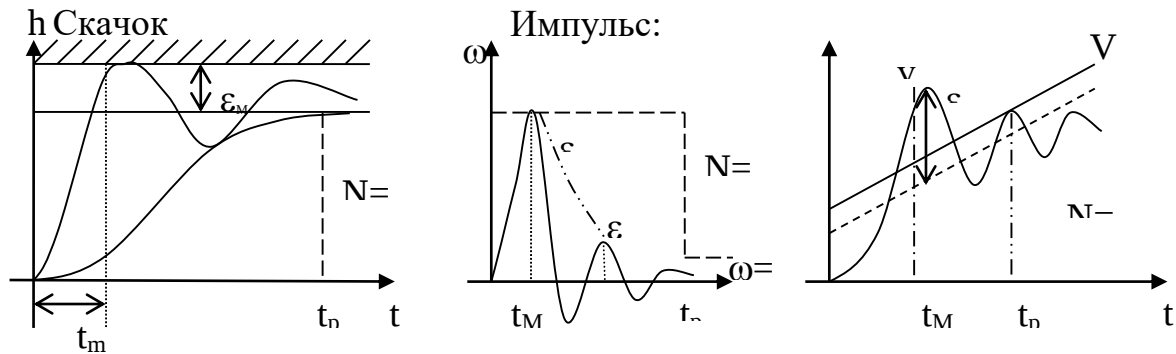
Определяются при рассмотрении переходных и установившихся процессов при наиболее часто встречающихся или наиболее тяжёлых для СУ воздействиях – ТИПОВЫХ – назначаемых в виде определённых функций времени:

– скачок, импульс;

- степенное по времени (t) (линейно-, квадратично- растущие и тд.);
- гармоническое (синусоидальное);
- случайные сигналы с постоянными статистическими свойствами.

Реакции на скачок , импульс или линейно – растущий входной сигнал могут иметь следующий вид :

Линейно-растущее



Процесс может носить монотонный или колебательный характер.

Показатели качества:

1. Установившееся рассогласование – определяет

$$\text{точность системы } \varepsilon_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$$

2. время регулирования t_p – характеристика

$$\text{быстродействия системы: } |\varepsilon(t) - \varepsilon_{уст}| \leq \delta_{доп} \text{ при } t \geq t_p, \text{ где}$$

$\delta_{доп}$ - заранее заданное значение, определяющееся требуемой точностью.

3. Максимальное перерегулирование (максимальный

$$\text{выброс, отклонение) } \varepsilon_m \rightarrow \sigma = \frac{\varepsilon_m}{y_0} \cdot 100\% (\text{безразмерна})$$

4. время максимального перерегулирования $t_m (\varepsilon_m)$

5. Число перерегулирований N в интервале $0 \leq t \leq t_p$, или

характеризуют плавность протекания процессов (демпфирование системы) колебательность

$$(\text{декремент затухания}) - \xi = \frac{\Delta h_2}{\Delta h_1} \cdot 100\% = \frac{\varepsilon_{m2}}{\varepsilon_{m1}} \cdot 100\%$$

Первые 3 показателя – дают зону, характеризующую рассогласование системы (отклонение выходного сигнала от требуемого значения).

Сами процессы рассчитываются или строятся :

- классическим или операторным методом;
- частотным методом с использованием обратного преобразования Фурье

$$w(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} W(j\omega) \cos(\omega t) d\omega$$

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} W(j\omega) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega$$

- с помощью моделирования на аналоговых или цифровых ЭВМ.

По истечении времени, достаточного для затухания переходного процесса ($t > t_p$) СУ работает в вынужденном установившемся режиме.

Однако при проведении исследования (анализа) качества переходных процессов, использовать прямые показатели не удобно. Поэтому, в 1945-60 годах были разработаны **косвенные** показатели – критерии качества:

- частотные (преимущество – применение экспериментальных характеристик),
- корневые (наглядность анализа изменения полюсов и нулей),
- интегральные (численное значение оценки качества в виде

функционала $I = \int_0^T F[h(t)] dt$ и применение методов оптимизации).

5.6.3.2. Частотные критерии качества

Служат для оценки качества по АФХ, АЧХ, ФЧХ и логарифмическим ЧХ.

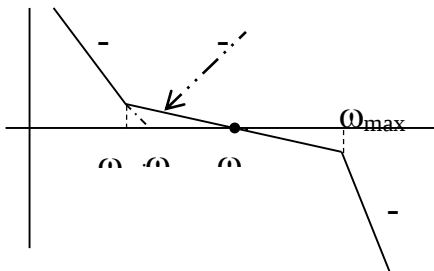
Используются следующие величины:

- показатель колебательности M – отношение максимума АЧХ

замкнутой системы к её значению при $\omega=0$: $M = \frac{A_{z\max}(\omega)}{A_z(0)} = \frac{\max |w_z(j\omega)|}{|w_z(0)|}$,

чем выше M -тем хуже СУ (рекомендуется $1,1 \leq M \leq 1,5$);

- резонансная частота $\omega_{p(M)} = \omega \left\{ \max_{\omega} |w_3(j\omega)| \right\}$ в точке максимума;
- полоса пропускания системы $0 \leq \omega \leq \omega_0 [A_3(\omega_0) \geq 0,707 A_3(0)]$ или диапазон положительных частот $\omega_n [U(\omega_n) \geq 0,2 U(0)]$ - не должна быть слишком широкой, иначе на выходе сильно скажутся высокочастотные помехи.
- частота среза $\omega_{cp} [A_{\text{ЧХ раз.сист.}} = 1, L(\omega) = 0]$ - равная $\approx \omega_t$ – частоте затухающих колебаний в ЗС, позволяющая оценить как время максимума переходной характеристики $t_{n \max} = \frac{\pi}{\omega t}$, так и время переходного процесса $t_{n.n.} \approx \frac{(1 \div 4)\pi}{\omega t}$, (1-4) в зависимости от $M[\sigma]$;
- запасы устойчивости по модулю ΔL и по фазе $\Delta \varphi$ - характеризуют склонности системы к колебаниям, выбираются в пределах $6 \leq \Delta L \leq 25 \text{ дБ}, 30 \leq \Delta \varphi \leq 60^\circ$ — это в типовом случае предполагает, что на частоте среза наклон ЛАХ -20 дБ/дек.



$$\omega_{\min} \leq \frac{M-1}{M} \omega_0 = \left(\frac{M-1}{M} \right)^{3/2} \omega_{cp}$$

$$\omega_{\max} \geq \frac{M+1}{M} \omega_0 = \sqrt{\frac{(M+1)(M^2-1)}{M^3}} \omega_{cp}$$

$$\omega_{cp} = \sqrt{\frac{M}{M-1}} \omega_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{M-1}{M}} \omega_{cp}$$

5.6.3.3. Корневые критерии качества

Определяют характер переходных процессов на основе анализа полюсов и нулей ПФ ЗС. (Хотя анализ влияния нулей затруднён). По характеристическому полиному проще всего вычислить среднее геометрическое модулей корней:

$$W_{33}(p) = \frac{K(p)}{D(p)}, D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = a_n \prod_{i=1}^n (p - p_i) = 0$$

$$p_1 p_2 \dots p_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}, \omega_0 = \left| \sqrt[n]{p_1 p_2 \dots p_n} \right| = \left| \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}} \right| - \text{относительная мера быстрогодействия}$$

Для более точной оценки по расположению можно указать:

а) степень устойчивости $\eta = |\alpha_{\min}|$ и $t_{н.н.} \leq \frac{3}{\eta}$ - верхнюю границу длительности процесса;

б) степень колебательности $\mu = \max \left| \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right|$ - влияет на перерегулирование $\sigma \leq e^{-\pi/\mu}$.

Для точного анализа строят корневой годограф, т.е. траектории движения корней характеристического уравнения ЗС на комплексной плоскости при изменении варьируемого параметра.

5.6.3.4. Интегральные критерии качества

В новейшей литературе по ТУ подчёркивается важность математической формулировки понятия качества и её численной оценки. Для этого разработаны специальные функции от функций – функционалы – обычно интегрального вида от линейных и квадратичных форм:

$$I_t = \int_0^{\infty} 1 dt = T; I_{0i} = \int_0^{\infty} t^i |\Delta y(t)| dt, I_i = \int_0^{\infty} \left[\Delta y^2(t) + \sum \tau_i [\Delta y^{(i)}(t)]^2 \right] dt, i = 0, 1, \dots \text{которые чаще всего}$$

имеют положительную величину и при изменении параметров регулятора (УУ) системы могут быть больше или меньше, а в практическом смысле характеризуют обобщённое отклонение выхода от заданного значения.

Тогда, находя минимум функционала, решается задача выбора наилучших параметров регуляторов. Для типовых ПФ ЗС вычислены зависимости I_i – от параметров ПФ.

В векторно-матричной постановке задача формулируется так:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, x(t_0 = 0) = x_0 \\ y = cx \end{cases} \quad \text{необходимо найти } U=U(t), \text{ которое}$$

доставляет
$$\min_U I = \int_0^\infty [x^T Q x + U^T R U] dt ,$$

где Q и R – весовые матрицы – определяют вклад различных координат в обобщённую сумму.

5.7. Синтез линейных систем управления (СУ)

Под синтезом СУ понимается задача выбора структуры и расчета параметров управляющего устройства, обеспечивающего заданные статические и динамические характеристики СУ.

При этом могут решаться следующие задачи:

- обеспечение устойчивости (стабилизация) или повышение запаса устойчивости (демпфирование);
- повышение точности регулирования (устранение или уменьшение статической, кинетической и т.п. ошибок воспроизведения уставки, устранения или уменьшения влияния возмущений);
- улучшение переходных процессов (увеличение быстродействия, уменьшение перерегулирования и колебательности).

Задачи эти могут быть иногда решены совместно, иногда они противоречивы. Тогда в зависимости от назначения системы одни становятся основными, а другие на второй план:

так в системе стабилизации (с const или редко меняемой уставкой) запас устойчивости может быть значительно меньше, чем в следящей, в системах стабилизации необходимо обеспечивать минимальное влияние возмущений, а в следящих важно быстродействие и минимизация ошибок воспроизведения изменений уставки.

Требования в отношении быстродействия должны соответствовать мощности исполнительного элемента, а преобразования сигналов в УУ не приводить к существенному повышению уровня помех.

При этом предполагается, что некоторые функциональные элементы системы определены техническим заданием (математическая модель управляемого процесса $y = f(u)$, исполнительные и измерительные устройства) и представляют неизменяемую часть системы.

В УУ желательно использовать типовые регуляторы, а именно: П-, ПИ-, ПД-, ПИД- (законы, алгоритмы), с нахождением наилучших настроек.

Если этого недостаточно, в систему вводятся дополнительные элементы – корректирующие устройства. По способу включения в схему:

- Последовательные – $W_{yy} = W_{рег} \cdot W_{посл.корр.}$.
- Параллельные - $W_{yy} = W_{рег} + W_{пар.корр.}$.
- Местная ОС - $W_{yy} = W_{рег} \cdot \frac{1}{1 + W_{рег} W_{МОС}}$ - которые могут быть жесткими

(имеющими статический коэффициент) и гибкими (содержащими дифференцирующее действие). Иногда МОС охватывает наиболее инерционные части ОУ.

- Между различными видами коррекции можно установить соответствие.

В зависимости от вида объекта, формулирования требований и методов решения возможны различные варианты.

1. Частотный синтез управляющих устройств

Частотный метод наиболее удобен, когда у ОУ – один вход и один выход, и состоит в построение реальных и желаемых характеристик САУ, их сопоставлении и выборе на основе этого изменяемых коэффициентов типового регулятора, структуры и параметров корректирующих звеньев.

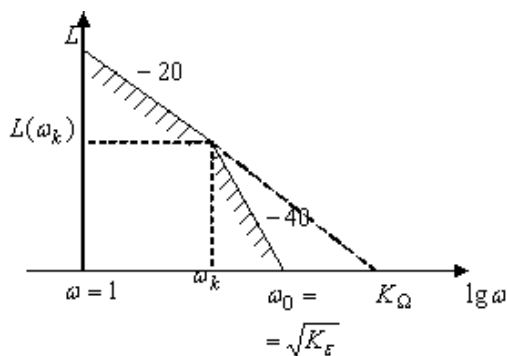
Для минимально-фазовых систем достаточно одной ЛАЧХ. Построение желаемой нельзя полностью формализовать, но есть общие рекомендации:

1. Характеристики нескорректированной (исходной) САУ и желаемая должны совпадать в максимально широком диапазоне. Иначе реализация корректирующего устройства резко изменяется, особенно при увеличении частоты среза и повышении коэффициента в области высоких частот.

2. В НЧ-области наклон ЛАХ должен составлять $-20\nu \text{ дБ/дек}$ (где ν - порядок астатизма, ν чаще всего равна единице) при $\omega=1$ иметь ординату $\geq 20 \lg K$, где K – коэффициент усиления всей системы (по добротности), обеспечивающий необходимую точность

$$D = \frac{F_i}{\varepsilon f_i} \text{ при степенном воздействии или ЛАХ должна проходить}$$

выше запрещенной области, где не выполняются требования точности обработки синусоидальных сигналов:



Для максимально возможных скорости и ускорения системы:

$\Omega_{\max}$ и $\varepsilon_{\max}$ наихудший случай будет при отработке уставки

$$V = \frac{\Omega_{\max}^2}{\varepsilon_{\max}} \sin \frac{\varepsilon_{\max}}{\Omega_{\max}} t, \text{ что при заданной допустимой ошибке } \Delta \text{ даст}$$

$$\text{координату точки } A_k \quad \omega_k = \frac{\varepsilon_m}{\Omega_m} \quad L(\omega_k) = 20 \lg \frac{\Omega_m^2}{\varepsilon_m \Delta}.$$

По допустимому ускорению и ошибке Δ определяется и базовая частота

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\Delta}} \text{ граница между НЧ средне-Ч диапазонами.}$$

3. На частоте среза: $\omega_{cp} \geq \frac{(1-k)\pi}{t_p}$ ($k=1 \div 4$ по величине δ или M), где

ЛАХ – пересекает ось, определяющей быстродействие, наклон

ЛАХ должен быть -20 дБ/дек и диапазон частот такого участка

$\omega_2 \div \omega_3$ определяется допустимым показателем колебательности M

$$\omega_2 \leq \frac{M-1}{M} \omega_0; \quad \omega_3 \geq \frac{M+1}{M} \omega_0$$

или запасами устойчивости ΔL и $\Delta \varphi$.

4. ВЧ-часть ЛАХ мало влияет на свойства и поэтому берется максимально близким к некорректированной.

5. По ЛАХ $L_{нс}$ и $L_{жел}$ легко вычисляется $L_{кор.уст.} = L_{жс} - L_{нс} = L_{посл}$ которая может быть пересчитана в корректирующие устройства другого типа (параллельное, с обратной связью).

После частотного синтеза обязательно проверяют полученные качества по анализу переходного процесса.

2. Синтез модального управления

Модой – называется составляющая решения д.у. соответствующая конкретному полюсу. Синтез модального управления предполагает формирование таких пропорциональных ОС по состоянию, которые обеспечивают заданное расположение полюсов системы:

$$\begin{aligned} & \overset{A_{\text{замкн.}}}{\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx \end{array} \right.}, \quad u = -kx \longrightarrow \dot{x} = \overbrace{(A - Bk)}^{\bullet} x \\ & \quad \quad \quad u = -[k_n, k_{n-1}, \dots, k_1]x - k_0 V \end{aligned}$$

Если уравнения заданы в нормальной форме:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{vmatrix};$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix} \longrightarrow W_p(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}; \quad c = (b_m, b_{m-1}, \dots, b_0, 0, 0 \dots 0)$$

характеристический полином разомкнутой системы:

$$D_p = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

а полюса замкнутой системы $\lambda_i, i = \overrightarrow{1, n}$ дают характеристический полином

замкнутой системы: $D_3 = (p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \dots (p - \lambda_n) = p^n + a_1^* p^{n-1} + \dots + a_n^*$, то

учитывая вид матрицы В получим:

$$A_{замк} = (A - Bk) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ \underbrace{-a_n - k_n}_{-a_n^*} & -a_{n-1} - k_{n-1} & \dots & \dots & \underbrace{-a_1 - k_1}_{-a_1^*} \end{vmatrix} \longrightarrow k_i = a_i^* - a_i, i = \overrightarrow{1, n}$$

Если уравнение в общем виде, то необходим перевод в нормальную форму с помощью матрицы $P = U^* U^{-1}$. Учитывая, что смена базиса не меняет свойств (полюсов) системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}} = P\bar{x} \\ p = \bar{U}U^{-1} \end{cases}$$

$$\varphi_{\bar{A}} = p^n + \sum_{i=1}^n a_i p^{n-i}; \varphi_{\bar{K}} = p^n + \sum_{i=1}^n \alpha_i p^{n-i}; \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u(\bar{A} - \bar{B}\bar{k})\bar{x}; u = -\bar{k}\bar{x};$$

$$\bar{k} = (\alpha_n - a_n, \dots, \alpha_1 - a_1); u = -kx \Rightarrow \dot{\bar{x}} = (A - Bk)x$$

$$U = \begin{vmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{vmatrix}; \bar{U} = \begin{vmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \dots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{vmatrix}$$

$$u = -\bar{k}\bar{x} = -\bar{k} \cdot px; \underline{k = \bar{k} \cdot p}$$

Аккерман предложил более компактную формулу расчета:

$$k = [0, 0, \dots, 0, 1] \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1}}_{\text{матрица управляемости}} \cdot (A^n + a_1^* A^{n-1} + \dots + a_{n-1}^* A + a_n^* I)$$

матрица управляемости

Следует отметить, что метод модального управления не гарантирует равенство 0 – установившейся ошибки. Для обеспечения равенства уставки и выходного сигнала в установившемся режиме вводится масштабирующий коэффициент уставки:

$$k_0 = \frac{a_n^*}{b_m}; \quad y(\infty) = V; \quad u = -kx + k_0V$$

Другим вариантом, позволяющим асимптотически отслеживать уставку с нулевой установившейся ошибкой является введение в структуру регулятора (системы) интегрирующих звеньев (1 – для скачкообразного изменения уставки, 2 – для линейного и т.д.):

$$u = -kx - k_1 \int_0^t (x-v)dt - k_2 \int_0^t \int_0^t (x-v)dt_1 dt_2 - \dots$$

Пример:

$$1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = (1, 0)$$

$$|pI - A| = \begin{vmatrix} p & -1 \\ 2 & p-3 \end{vmatrix} = p(p-3) + 2 = p^2 - 3p + 2$$

$$\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -3 \longrightarrow D_3(p) = (p+1)(p+3) = p^2 + 4p + 3$$

$$u = -kx = : k_1 = 4 - (-3) = 7, \quad k_2 = 3 - 2 = 1$$

$$= -(7; 1) \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = -(7; 1) \begin{vmatrix} \dot{x} \\ x \end{vmatrix} \quad k_0 = 3 \quad u = -x_1 - 7\dot{x} + 3v$$

$$\frac{d}{dt} x = \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \dot{x} = -2x + 3\dot{x} + (-x - 7\dot{x} + 3v) = -3x - 4\dot{x} + 3v$$

$$\dot{x} = 0 \longrightarrow 3x = 3v \quad x = v$$

$$2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 + 2u \end{aligned} \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad u = (k_1, k_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

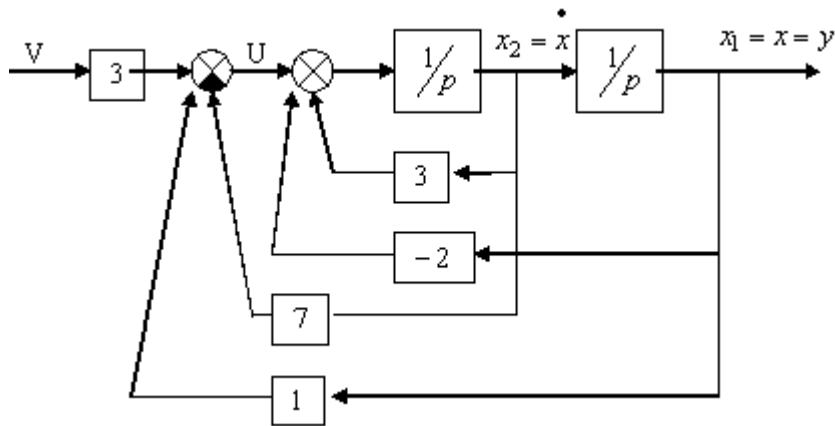
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = |B, AB| = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det U = 4 - 6 = -2 \neq 0 \quad \text{rang} U = 2 = n$$

$$|pE - A| = \begin{vmatrix} p-1 & -1 \\ 0 & p-2 \end{vmatrix} = (p-1)(p-2) = p^2 - 3p + 2 = D_p$$

$$D_3(p) = p^2 + 4p + 3$$

$$\bar{k} = |\bar{k}_1, \bar{k}_2| = |3 - 2, \quad 4 - (-3)| = |1, 7|$$

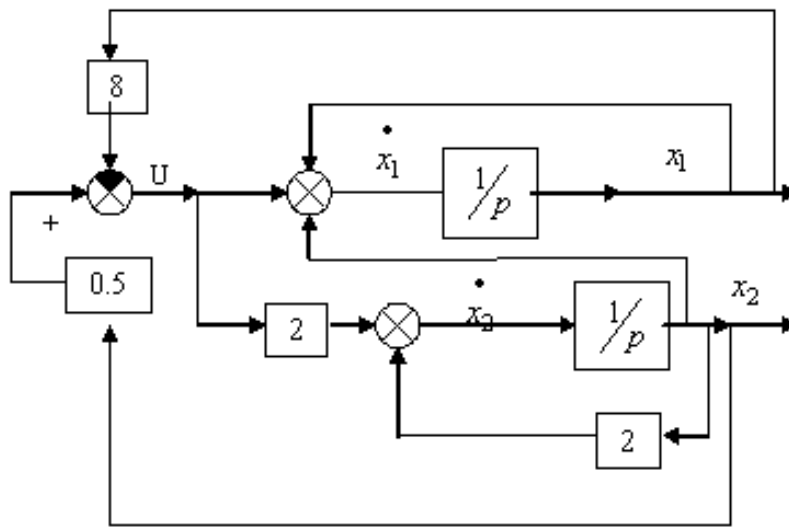


$$P = U^* U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^T}{-2} = \begin{bmatrix} -2 & -1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$U^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(k_1, k_2) = (\bar{k}_1, \bar{k}_2) P = (1, 7) \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (8 \quad -0.5)$$



Расчет по формуле Аккермана дает аналогичный результат :

$$k = [0 \dots 1] \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = [0,1] \begin{bmatrix} -2 & -1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right) = [0,1] \begin{bmatrix} -2 & -1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} = [0,1] \begin{bmatrix} -16 & -36.5 \\ 8 & -0.5 \end{bmatrix} = [8 \quad -0.5]$$

3. Синтез по интегральным критериям (оптимального управления)

Оптимальной называется такая система управления, которая обеспечивает наилучшие качества в каком-либо определенном смысле при заданных реальных условиях работы и ограничениях. Таким образом при синтезе ОС требуется добиться не просто заданных показателей (точности, быстродействия, запаса устойчивости), а максимально возможных, которые в этом случае описываются в математической форме функционалами:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} F(x, U, t) dt,$$

а при поиске $U = \text{ext} J(x, U, t)$ учитываются, как взаимосвязи переменных, присущие реальным объектам и процессам в форме :

алгебраических уравнений $G(x, U) = 0,$

дифференциальных уравнений $\Phi(x, U, t) = \dot{x} - Ax - BU = 0$

и интегральных уравнений
$$I(x, U, t) = \int_0^t \varphi(x, U, t) dt = 0,$$

так и ограничения на пределы изменения координат и управлений :

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \quad \underline{U} \leq U \leq \bar{U}.$$

В результате даже для систем невысокого порядка решение задачи оказывается сложным, а полученная система нелинейной. При этом получаемое в результате синтеза решение в форме $U = U(t)$ (программное, разомкнутая система) с большими проблемами переводится в форму $U = U(x)$ (замкнутая, оптимальная система) и переходят к различным упрощениям, приближениям — субоптимальным системам.

Для нахождения экстремума функционала (как при нахождении экстремума функции) необходимо задавать изменение его аргументов, которыми являются X и U — вариации δX , δU вместо (dx, dt) .

Поэтому разработаны Эйлером, Лагранжем методы вариационного исчисления (вместо дифференциального).

Аналогично, условию экстремума функции $(\frac{d\varphi}{dx} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \geq 0)$

для функционала F — необходимое условие экстремума сформулировано в форме уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{U}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \min &\rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \geq 0 \\ \max &\rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \leq 0 \end{aligned} \quad \text{а вид экстремума определяется}$$

условием Лежандра.

Однако учет реальных связей потребовал перейти от задачи поиска экстремума $J(x, U, t)$ к решению задачи на условный экстремум (то есть при учете выполнения условий – уравнений объекта и ограничений), когда вместо F берется функция Лагранжа:

$L(x, U, t, \lambda) = F(x, U, t) + \lambda^T \Phi(x, U, t)$, где $\lambda(t)$ — множители Лагранжа.

И уравнения Эйлера составляются для формулы Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial U} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad \text{— уравнения Эйлера - Лагранжа}$$

При определении оптимального уравнения классическим методом вариационного исчисления уравнения Эйлера-Лагранжа, имеющие двойное дифференцирование, принято приводить к канонической форме уравнений — **гамильтоновой** — введением функции Гамильтона $H = p^T \dot{x} - F(x, U, t)$

, где $p^T = \|p_1, p_2 \dots p_n\|$ - канонические переменные $p_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$, $i = \overline{1, n}$ и после

преобразований записывают:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Дифференцирование по времени отделено от дифференцирования по переменным.

Для общей задачи Лагранжа канонические переменные p_i равны множителям Лагранжа $\lambda_i \rightarrow H = \lambda^T \dot{x} - L(x, U, t, \lambda)$ и учитывая, что в форме уравнений состояния $\dot{U}$ -исключены уравнения вариационной задачи для объекта n -порядка с Γ -управлениями записывается в форме системы $2n + \Gamma$ канонических дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left\| \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \right\| = Ax + BU \quad (i = \overline{1, n}) \\ \dot{\lambda} &= -\left\| \frac{\partial H}{\partial x_i} \right\| = \left\| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\| + \lambda^T \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\| \quad (i = \overline{1, n}) \end{aligned}$$

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial H}{\partial U_j} = \frac{\partial F}{\partial U_j} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial U_j} = 0 \quad (j = n+1, \dots, n+\Gamma), \text{ где } \varphi_i - \text{составляющие}$$

$$\Phi = \|\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n\|^T$$

Для консервативных механических систем, формула Гамильтона H имеет простой физический смысл — совпадает с полной механической энергией (кинетической + потенциальной) и $H = \text{const}$ — имеет смысл закона сохранения энергии.

Пример:

Найти оптимальное уравнение для ОУ:

$$T\ddot{x}(t) + x(t) = kU(t) \text{ или } \dot{x} = -ax + bU = -\frac{1}{T}x + \frac{k}{T}U; \quad x(0) = x_0, \quad U(0) = 0$$

$$\text{Из условия } \min_{t_0} J = \int_{t_0}^{t_k} (qx^2 + \Gamma U^2) dt; \quad t_k \rightarrow \infty$$

Составим формулы Лагранжа и Гамильтона:

$$L = qx^2 + \Gamma U^2 + \lambda(\dot{x} + ax - bU);$$

$$H = \lambda\dot{x} - qx^2 - \Gamma U^2 - \lambda(\dot{x} + ax - bU) = -qx^2 - \Gamma U^2 + \lambda(-ax + bU);$$

Запишем уравнение вариационной задачи:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} = -ax + bU \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 2qx + \lambda a \longrightarrow \dot{x} = -ax + \frac{b^2}{2\Gamma} \lambda \quad U_{\text{opt}}(t) = \frac{b}{2\Gamma} \lambda(t) \\ 0 &= -\frac{\partial H}{\partial U} = 2\Gamma U - \lambda b \\ \dot{\lambda} &= 2qx + a\lambda \end{aligned}$$

Для определения корней составим определитель $\Delta(p) = 0$

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} -a-p & \frac{b^2}{2\Gamma} \\ 2q & a-p \end{vmatrix} = (p+a) \cdot (p-a) - \frac{b^2 q}{\Gamma} = p^2 - \left(a^2 + \frac{b^2 q}{\Gamma} \right) = 0$$

$$p_1 = \sqrt{a^2 + \frac{b^2 q}{\Gamma}}, \quad p_2 = -\sqrt{a^2 + \frac{b^2 q}{\Gamma}}$$

Условию устойчивости удовлетворяет только $p_2 < 0$, поэтому решение системы имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{p_2 t} \\ \lambda(t) &= C_2 e^{p_2 t} \end{aligned} \quad C_1 = x(0) = x_0, \quad C_2 = \frac{2q}{p_2 - a} \cdot C_1 = \frac{(p_2 + a) \cdot 2\Gamma}{b^2} \cdot C_1$$

В итоге:

$$U_{onm}(t) = \frac{b}{2\Gamma} \lambda(t) = \frac{bq}{\Gamma(p_2 - a)} \cdot C_1 e^{p_2 t} = \frac{p_2 + a}{b} \cdot C_1 e^{p_2 t} = U(t)$$

В данном случае легко перейти к уравнению по выходным координатам:

$$U_{onm}(t) = \frac{bq}{\Gamma(p_2 - a)} \cdot x(t) = \frac{p_2 + a}{b} \cdot x(t) = k_{onm} x(t)$$

Такое решение определяет структуру оптимального регулятора в форме пропорциональной отрицательной обратной связи.

Полученный результат является справедливым и для многомерного случая, то есть для линейного динамического объекта $\dot{x} = Ax + BU$, $x(0) = x_0$, минимум интегральному квадратичному критерию (функционалу)

$$\min J = \int_{t_0}^{\infty} (x^T Q x + U^T R U) dt \quad \text{доставляет управление} \quad U_{onm}(t) = k_{onm} x(t) \quad \text{в}$$

форме пропорциональных обратных связей.

То есть структура управления определена (задача называется – АКОР – аналитическое конструирование оптимальных регуляторов) и необходимо найти только значения параметров. В данном случае, опуская выкладки, можно показать, что управление можно получить, как результат решения матричного дифференциального уравнения Риккати:

$$U_{onm}(x) = -R^{-1} B^T k(t) \cdot x(t), \quad \text{где} \quad \dot{k}(t) = -k(t)A - A^T k(t) + k(t)BR^{-1}B^T k(t) - Q$$

При этом для объектов управления с постоянными параметрами решение в асимптотике ($t \rightarrow \infty$) результат сходится к стационарному решению, когда

$$\dot{k}(t) = 0, \quad k(t) = \bar{k}, \quad \text{где} \quad \bar{k}A + A^T \bar{k} - \bar{k}BR^{-1}B^T \bar{k} = -Q, \quad \text{а}$$

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

- положительно определенная симметричная матрица из постоянных положительных коэффициентов $(k_{ij} = k_{ji}), (k_{ij} > 0)$.

При решении задач методом классического вариационного исчисления предполагается, что искомые функции являются гладкими непрерывными и на координаты объекта X и управления U не наложено ограничений в виде неравенств — поэтому возможности классического метода вариационного исчисления **ограничены**.

В технике и экономике существует класс объектов и процессов, управление которыми осуществляется на основе ограниченного числа решений, принимаемых последовательно в некоторые фиксированные моменты времени. Определение уравнения связано с решением задачи по методу многошагового выбора, предложенного американцем Р.Беллманом и названным **динамическим программированием (ДП)**.

В основу положен принцип оптимальности, согласно которому оптимальное уравнение определяется конечной целью управления и состоянием системы в данный момент независимо от предыстории.

В методе ДП вводится вспомогательная функция Беллмана

$$S(t, x) = \min \left[\int_{t_0}^T F(x, U, t) dt \right]$$

и на основании принципа оптимальности получают нелинейное дифференциальное уравнение Беллмана в частных производных:

$$\min \left\{ F(x, U, t) + \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \varphi_i(x, U, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \right] \right\} = 0 \text{ при условиях } \dot{x}_i(t) = \varphi_i(x, U, t);$$

$$x(t) \in X \quad U(t) \in U \quad t_0 \leq t \leq T$$

Аналитическое решение в форме $U_{opt}(x)$ удается найти только в частных случаях (при этом $S(t, x)$ выбирается как функция Ляпунова), поэтому применяется численный метод решения на ЭВМ, наиболее подходящий для оптимизации дискретных систем.

В ряде практических задач оптимизации экстремум функционала при заданных уравнениях объекта $\dot{x} = Ax + BU = \Phi(x, U)$ обеспечивается при управлении $U(t)$ выходящем на ограничение $|U_i| \leq U_i$, образуется перелом гладкой функции, появляются разрывы в изменении производных. В этом случае классическое вариационное исчисление не работает и коллективом ученых под руководством академика Л.С. Понтрягина (Болтянский, Гамкрелидзе, Мищенко и др.) разработан **принцип максимума (ПМ)**.

Суть его заключается в преобразовании уравнения для критерия

$$J = \int_{t_0}^T f_0(x, U) dt \text{ из интегральной формы в дифференциальную}$$

$\dot{x}_0 = f_0(x, U)$, $x_0 = J$, образованием расширенного вектора задачи $[x_0, X]$ и формирования новой функции Гамильтона для неклассических вариационных задач:

$$H^* = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(x, U) = \psi^T(t) \cdot f(x, U), \quad f(x, U) = [f_0(x, U), \Phi(x, U)],$$

$\psi(t) = [\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n(t)]^T$ ($\psi_0 = -1$), которая достигает **максимума** при оптимальном уравнении $U_{opt}(t)$.

Решение ищется из необходимого условия $\frac{\partial H^*}{\partial U} = 0$ и соответственно записываются канонические уравнения Гамильтона:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H^*}{\partial \psi_i} \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= -\frac{\partial H^*}{\partial x_i} \end{aligned} \quad i = \overline{1, n}$$

Это позволяет свести решение задачи оптимизации к стандартной задаче поиска решения системы дифференциальных уравнений первого порядка. Наибольшее применение ПМ нашел при оптимизации из условия минимума времени переходного процесса (максимального быстродействия), так как в

этом случае $\min J = \int_{t_0}^T f_0(x, U) dt = T - t_0 \Rightarrow \underline{f_0(x, U) = 1}$ — подынтегральная

функция имеет простейшее выражение

$H^* = -1 + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(x, U) = -1 + \psi^T A x + \psi^T B U$. От управления зависит только

третье слагаемое и $H^* = \max$ при условии:

$U = U \text{sign} \psi^T B$, то есть $U = +U$ если $\psi^T B = B^T \psi > 0$, $U = -U$ если $\psi^T B = B^T \psi < 0$

То есть оптимальная система является релейной с особым законом

переключения по знаку вспомогательной функции $B^T \psi$, где $\dot{\psi} = -A^T \psi$

$(\psi(t) = e^{-A^T t} \psi(0))$, где однако поиск $\psi(0)$ — приводит либо к итерационному решению, либо к системе трансцендентных уравнений, трудно-решаемых в общем виде.

Неудобство использования решения, полученного в разомкнутом виде

$U = U(t)$, преодолевается применением метода фазового пространства, когда строится гиперповерхность переключения знаков управления $S(x) = 0$ и $U_{opt} = -U \text{sign}[S(x)]$.

Введение дополнительных ограничений на координаты объекта $|x| \leq X$ или

условий на управление (например: $I = \int_0^T |U| dt$ — расход энергии управления)

приводит к усложнению задачи и соответственно решения.

5.8. Измерение и оценивание переменных состояния.

При синтезе модального управления и оптимальных систем управление получено как функция от переменных состояния (фазовых координат).

Однако, возможность их измерения датчиками часто отсутствует, из-за несовершенства аппаратуры (датчиков) и абстрактности (математичности базиса, отсутствием физической природы) самих переменных. Поэтому

измеряемые датчиками переменные выхода Y (обычно меньшей размерности $l \leq n$) связывают с переменными состояния уравнением наблюдения $Y = Cx$, где $(\dot{x} = Ax + BU)$.

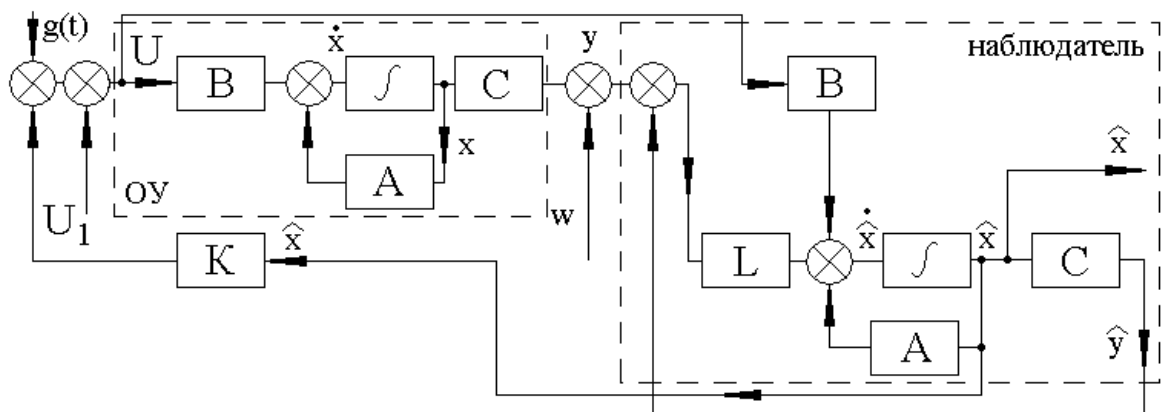
В связи с этим возникает проблема **наблюдаемости** и восстанавливаемости. Р.Калманом для линейных систем был установлен критерий полной наблюдаемости:

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} = n$$

Если условие выполняется, то возможно асимптотическое восстановление переменных состояния $\hat{x}$ по измерениям U и Y для параметрически известного объекта (A, B, C) с помощью соответствующего устройства называемого **наблюдателем** (идентификатором состояния). В 1964г. Люенбергер предложил синтез такого устройства следующим образом:

Для объекта управления : $\dot{x} = Ax + BU, y = Cx$

Наблюдатель строится в форме : $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BU + L(y - C\hat{x}), C\hat{x} = \hat{y}$



Ошибка $\delta_x = x - \hat{x}$ будет удовлетворять уравнению:

$$\dot{\delta}_x = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + BU - A\hat{x} - BU - L(Cx - C\hat{x}) = (A - LC) \cdot (x - \hat{x}) = (A - LC)\delta_x$$

Из уравнения видно, что выбором L можно обеспечить $\delta_x \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ необходимую скорость убывания ошибки и $\hat{x} \rightarrow x$ соответствия оценки переменным состояниям. Для ОУ с постоянными параметрами и стационарного наблюдателя ошибка δ_x тем быстрее $\rightarrow 0$, чем больше L , однако, при этом наблюдатель Люенбергера становится слишком чувствительным к шумам измерения и действующим на ОУ помехам (возмущениям случайного характера).

Оптимальная матрица L в этом случае определяется на основании учета параметров реальных помех. Такая задача (оптимальной фильтрации) была решена Р.Калманом в предположении, что на входной U и выходной Y сигналы аддитивно наложены помехи в виде стационарно независимых белых гауссовых шумов с нулевыми математическими ожиданиями:

$$M[U] = 0, \quad M[U(t)^T U(t + \tau)] = Q\delta(\tau), \quad Q = Q^T > 0$$

$$M[w] = 0, \quad M[w(t)^T w(t + \tau)] = p \cdot \delta(\tau), \quad M[U(t) \cdot w^T(t + \tau)] = 0, \quad p = p^T \geq 0$$

$$L = k_\Phi \cdot C^T p^{-1}, \quad Ak_\Phi + k_\Phi A^T - k_\Phi C^T p^{-1} C k_\Phi + BQB^T = 0$$

Полученный фильтр Калмана - Бьюси обеспечивает минимум среднеквадратичной ошибки оценки состояния.

Кроме наблюдателей полного порядка разработаны варианты пониженной размерности, исходя из предположения, что восстанавливать уже измеряемый сигнал Y не нужно и по нему можно найти часть вектора X . После получения оценки $\hat{x}$, разработанный ранее регулятор оптимального управления пропорционального типа может быть реализован в виде:

$$U = -k_{pez} \hat{x} + g(t), \quad g(t) \text{ — задающее воздействие.}$$

При этом общая динамика может быть представлена совместной системой:

$$\begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{\delta}_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - Bk_{pez} & Bk_{pez} \\ 0 & A - LC \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ \delta_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B \\ 0 \end{vmatrix} g(t)$$

$$D_{sc}(\lambda) = (A - Bk_{pez}) \cdot (A - LC) = D_{pez}(\lambda) \cdot D_{наб}(\lambda)$$

И характеристический полином (ХП) замкнутой системы в следствии треугольного строения блочной матрицы равен произведению характеристических полиномов системы управления с регулятором (без наблюдателя) по X и характеристического полинома самого наблюдателя. Видно, что они могут «независимо» выбираться, с учетом того, что наблюдатель должен быть в 2 – 4 раза более быстродействующим, чем регулятор.

Такой вариант построения системы был строго обоснован математически, а идеи построения получили названия:

- принцип стохастической эквивалентности (утверждает возможность замены реальных переменных состояния X оценками $\hat{x}$, вычисляемыми по выходу Y с помехами)
- принцип разделения (позволяет разделять синтез регулятора и синтез наблюдателя для линейных объектов)

6. Дискретные системы (импульсные, цифровые)

Ранее рассматривались СУ с непрерывными сигналами, в которых передается и преобразуется каждое мгновенное значение. В отличие от этих в дискретных СУ некоторые или все сигналы могут носить квантованный по времени и/или уровню характер и изменение переменных имеют разрывы.

Дискретные системы можно разделить на два типа:

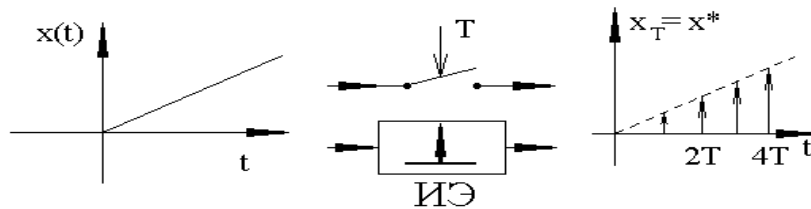
- Собственно дискретные, состояние которых принято рассматривать только в дискретные моменты времени и из счетного (конечного) числа возможных значений, а промежуточные интервалы либо не существуют либо не имеют значения. Пример: монетные автоматы, системы релейной автоматики, ЦВМ и т.д.
- Дискретные системы, которые получаются в результате рассмотрения непрерывных сигналов только в дискретные моменты времени или из ограниченного набора значений, либо это делается из удобства (исследование непрерывной системы на ЭВМ), либо возникает естественно, когда непрерывные объекты управляются цифровыми регуляторами.

Квантование сигналов (дискретизация) может осуществляться с помощью различных видов модуляции (устройство называется Модулятором):

- АИМ(амплитудно-импульсная) - непрерывный сигнал определяет амплитуду импульсов имеющих определенную длительность γ и период следования T .
- ШИМ(широтно-импульсная) - непрерывный сигнал определяет ширину или длительность импульса τ .
- ЧИМ(частотно-импульсная) - непрерывный сигнал определяет частоту повторения импульсов при заданной амплитуде и длительности.
- ВИМ(время-импульсная) – непрерывный сигнал определяет фазу.

При этом АИМ является линейным преобразованием, а ШИМ и ЧИМ нелинейным.

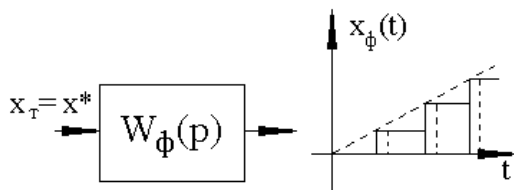
Структурно АИМодулятор может быть представлен последовательным соединением идеального импульсного ключа — преобразует непрерывный сигнал в решетчатую последовательность.



$$x_T(t) = x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT), \text{ где } \delta(t) \text{ — единичная импульсная функция.}$$

$$\delta(t) = 1, \text{ при } t = 0, \delta(t) = 0, \text{ при } t > 0;$$

$$\delta(t - kT) = 1, \text{ при } t = kT, \delta(t - kT) = 0, \text{ при } t \neq kT; \text{ и формирователя (фиксатора) значения } x(kT) \text{ на заданную длительность } \gamma \leq T.$$



$$W_{\phi}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-\gamma p} = \frac{1 - e^{-\gamma p}}{p} \text{ при } \gamma \ll T \rightarrow W_{\phi}(p) \approx \gamma,$$

$$\gamma = T \rightarrow W_{\phi}(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$$

Если амплитуда импульсов реализуется с любой точностью — системы называются **импульсные**; с малой дискретностью (шагом округления), что соответствует ограниченной но высокой точности представления сигнала в ЦВМ — системы называются **цифровыми**; и с заметной дискретностью, дающей значительную ошибку квантования по амплитуде — системы называются **дискретными**.

6.1. Математическое описание дискретных систем

В дискретной (импульсной) системе на вход поступает последовательность импульсов и несмотря на то, что НЧ описывается ЛДУ и сам ИЭ – линеен – нельзя получить ДУ системы из-за разрывного характера x^* . Переходят к так называемым разностным уравнениям, где аналогом операции

дифференцирования $\frac{dy}{dt}$ служат прямая (правая) $\Delta y(k) = y(k+1) - y(k)$ или обратная (левая) $\nabla y(k) = y(k) - y(k-1)$ разности. Двойного дифференцирования $\frac{d^2 y}{dt^2}$ — вторые разности:

$$\Delta^2 y(k) = \Delta(\Delta y(k)) = \Delta y(k+1) - \Delta y(k) = y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)$$

$$\nabla^2 y(k) = \nabla(\nabla y(k)) = \nabla y(k+1) - \nabla y(k) = y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)$$

И в итоге вместо ЛДУ $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y + a_0 y = b_m U^{(m)} + \dots + b_0 U$ получается ЛРУ:

$$a_n \Delta^n y(k) + a_{n-1} \Delta^{n-1} y(k) + \dots + a_1 \Delta y(k) + a_0 y(k) = b_m A^m U(k) + \dots + b_0 U(k)$$

$$a_n^* y(k+n) + a_{n-1}^* y(k+n-1) + \dots + a_1^* y(k+1) + a_0^* y(k) = b_m^* U(k+m) + \dots + b_0^* U(k)$$

Аналогом операции интегрирования $\int_0^T y(t) dt$ является суммирование

$$\sum_{k=0}^n y(k) \cdot \Delta t, \quad n = \frac{T}{\Delta t}, \quad \text{где } \Delta t \text{ шаг квантования (по методу прямоугольников).}$$

Разностные уравнения по существу являются рекуррентными и позволяют последовательно вычислять $y(i)$ при заданных начальных условиях и легко программируются.

Общее решение неоднородности ЛРУ также состоит из переходной вынужденной составляющей, причем переходная ищется как сумма некрatных корней с произвольными постоянными, определяемыми по начальным условиям.

Пример:

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

$$y(t) = Ce^{\lambda t} \xrightarrow{t=kT} y(kT) = Ce^{\lambda kT} = Cz^k, \quad (z = e^{\lambda T})$$

$$Cz^{k+2} + C \cdot 3z^{k+1} + C \cdot 2z^k = 0 \xrightarrow{z \neq 0} z^2 + 3z + 2z = 0, \quad z_1 = -1, \quad z_2 = -2$$

$$y(k) = C_1(-1)^k + C_2(-2)^k$$

$$y(0) = 1 = C_1 + C_2, \quad y(1) = 0 = -C_1 - 2C_2, \quad C_1 = 2, \quad C_2 = -1$$

$$\underline{y(k) = 2(-1)^k - (-2)^k}, \quad y(2) = -2, \quad y(3) = 6$$

Процесс расходящийся, что кстати видно по корням, ибо условием затухания свободного движения будет $|Z_i| < 1, \quad i = \overline{1, n}$.

Решение ЛРУ дает значение выхода лишь в дискретные моменты $kT \quad (k = \overline{0, n})$,

что во многих случаях достаточно, но не всегда. Если необходимо получить информацию о выходе в другой момент используется последовательность

$$y(kT + \varepsilon T) = y(t)|_{t=(k+\varepsilon)T}, \quad \text{где } 0 \leq \varepsilon \leq 1 \text{ и РУ со смещенным аргументом}$$

$$a_n^* y(k+n, \varepsilon) + a_{n-1}^* y(k+n-1, \varepsilon) + \dots + a_0^* y(k, \varepsilon) = b_m^*(\varepsilon) U(k+m) + \dots + b_0^*(\varepsilon) U(k),$$

которое при $\varepsilon = 0$, соответствует исходному.

Как и для непрерывных систем ЛРУ n порядка может быть заменен системой уравнений первого порядка и представлено в векторно-матричной форме :

$$x[k+1] = A^* x[k] + B^* U[k] \quad Y[k] = Cx[k] \quad \text{при этом матрицы ЛРУ}$$

вычисляются как $A^* = e^{A\Delta t}, \quad B^* = \int_0^{\Delta t} e^{A\tau} B d\tau = (e^{A\Delta t} - E)AB$ и их собственные

числа λ^* связаны с собственными числами ЛДУ соотношением $\lambda^* = e^{\lambda \Delta t}$ и

для устойчивого решения $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \Rightarrow |\lambda_i^*| < 1$, а значения вектора состояния

совпадают в точках квантования.

При малых Δt часто применяют приближенную модель:

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x[k+1] - x[k]}{\Delta t} = Ax(t) + BU(t) = Ax[k] + BU[k],$$

$$x[k+1] = [E + A\Delta t] \cdot x[k] + B\Delta t U[k] \Rightarrow A^* E + A\Delta t, \quad B^* = B\Delta t$$

При этом необходимо контролировать условие устойчивости $|1 + \lambda_i \Delta t| < 1$ для всех i .

Естественно, что аналогичность ВМ формы уравнений позволяет говорить, что сохраняются все формы критериев управляемости, наблюдаемости, методик модельного синтеза и оптимальных по интегральным критериям уравнений.

Аналогично ЛДУ для ЛРУ может быть введено понятие преобразования Лапласа и Фурье.

$$x(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt$$

$$x(j\omega) = F\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x^*(p) = L\{x^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kpT}$$

$$x^*(j\omega) = F\{x^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-j\omega kT}$$

— выражение представляет собой бесконечный ряд по степеням $e^{pT} (e^{j\omega T})$ и

поэтому вводят переменную $Z = e^{pT}$ и производят отображение с p -плоскости на Z -плоскость. Тем самым вводится более удобное так называемое Z -преобразование:

$$x(z) = Z\{x^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

И аналогично для смещенной последовательности:

$$x(z, \varepsilon) = Z\{x^*(z, \varepsilon)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT, \varepsilon) z^{-k}$$

Примеры Z – преобразования:

$$1) Z\{\delta(t)\} = 1, Z\{\delta(t - kT)\} = z^{-k}$$

$$2) Z\{1(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

$$Z\{t\} = \frac{Tz}{(z - 1)^2}$$

$$3) Z\{e^{-akT}\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + (e^{aT} z)^{-1} + \dots = \frac{1}{1 - (e^{aT} z)^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$Z\{1 - e^{-akT}\} = \frac{(1 - e^{aT})z}{(z - 1) \cdot (z - e^{-aT})};$$

$$4) Z\{\sin wkT\} = \frac{z \sin wT}{z^2 - 2z \cdot \cos wT + 1}; Z\{\cos wkT\} = \frac{z(z - \cos wT)}{z^2 - 2z \cdot \cos wT + 1}.$$

При этом существует взаимосвязь между знаменателями выражений

$$x(p) \text{ и } x(z), \text{ то есть } \frac{\dots}{(p - p_1)^n} \leftrightarrow \frac{\dots}{(z - z_1)^n}, z_1 = e^{p_1 T}.$$

Свойства Z – преобразования.

1. Линейность

$$Z\{\alpha x_1(kT) + \beta x_2(kT)\} = \alpha Z\{x_1(kT)\} + \beta Z\{x_2(kT)\} = \alpha x_1(z) + \beta x_2(z)$$

2. Запаздывание (сдвиг по времени вправо).

$$Z\{x(kT - dT)\} = Z^{-d} Z\{x(kT)\}$$

3. и упреждение (сдвиг по времени влево)

$$Z\{x(kT + dT)\} = Z^d \left[x(z) - \sum_{i=0}^{d-1} x(iT) z^{-i} \right].$$

$$4. \text{ Изменение масштаба по переменной } Z \quad Z\{x(kT)e^{-akT}\} = x(ze^{aT})$$

$$5. \text{ Начальное значение } \lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} x(z).$$

$$6. \text{ Конечное значение } \lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z} x(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)x(z)$$

если все полюсы $(z - 1)x(z)$ — находятся внутри круга $|z| \leq 1$.

7. Сумма всех ординат $\sum_{i=0}^{\infty} x(iT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)Z^{-k} (z=1) = \lim_{z \rightarrow \infty} x(z) = x(1)$.

8. Обратное Z – преобразование

В отличие от преобразования Лапласа и обратного преобразования, для которого они взаимно однозначны $x(t) \leftrightarrow x(p)$, для Z – преобразования и обратного Z – преобразования это не выполняется $\frac{x(t) \rightarrow x(z)}{x(z) \rightarrow x(t)}$, так как не

учитывается поведение в промежутках между точками квантования (kT) . И естественно есть только взаимно однозначное преобразование $x(kT) \leftrightarrow x(z)$.

На практике обратное Z – преобразование вычисляют, записывая $x(z)$ как сумму элементарных табулированных членов. Или просто для дробно – рациональных функций разделив числитель на знаменатель получить ряд

Лорана $x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + \dots$ и получить оригинал в точке

квантования $x(t = kT)$, $k = \overline{0, \infty}$.

6.1.1. Решение разностных уравнений и дискретная передаточная функция

При решении ЛРУ в форме $\sum_{i=0}^n a_i^* y(k+i) = \sum_{j=0}^m b_j^* U(k+j)$ при заданных

начальных условиях: $y(i), i = \overline{0, n-1}, U(j), j = \overline{0, m}$.

Для входа начальные условия не задаются. К правой и левой частям применяют Z – преобразование:

$A^*(z)Y(z) - Y_0(z) = B^*(z)U(z)$, где $Y_0(z)$ — сумма членов, определяемых

начальными условиями. $A^*(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$,

$B^*(z) = b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0$

Тогда можно написать:

$$Y(z) = \frac{B^*(z)}{A^*(z)} \cdot U(z) + \frac{1}{A^*(z)} \cdot Y_0(z)$$

Для решения РУ необходимо знать начальные условия $y(i) \ i = \overline{0, n-1}$, которые зависят от действующей в правой части входной последовательности.

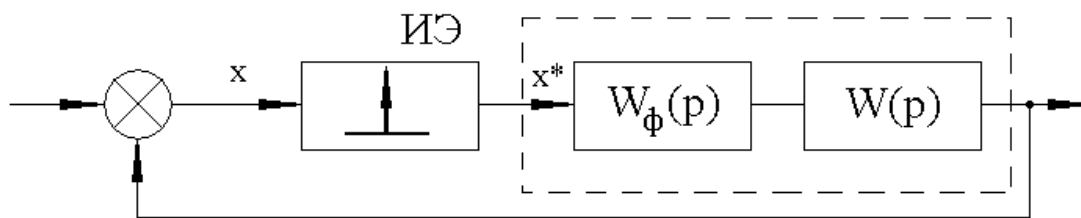
Поэтому, более удобны РУ вида:

$$a_n^* y(i) + a_{n-1}^* + \dots + a_0^* y(i-n) = b_m^* U(i+m-n) + \dots + b_0 U(i-m), \ i = \overline{0, n} \text{ с нач. усл.}$$

$y(-i) = y_i, \ i = \overline{0, n}$ — записанные для сдвига влево по t (запаздывания), так как естественно до $t=0$, входная последовательность равна нулю, и

начальные условия $\equiv 0$ и $Y(z) = \frac{B^*(z)}{A^*(z)} \cdot U(z) = W(z) \cdot U(z)$ — дискретная

передаточная функция (как и для непрерывных систем) есть отношение изображений выхода к входу при нулевых начальных условиях.



СУ с АИМ принято представлять в виде ИЭ и приведенной непрерывной (линейной) части с $W_{nn}(p) = W_\phi(p) \cdot W(p)$.

Однако, ОУ имеет непрерывную аналоговую природу и описывается дифференциальными уравнениями, и поэтому $Y(z) = Z\{W_\phi(p) \cdot W_{oy}(p)\} \cdot U(z)$,

то есть $W(z) = Z\{W_\phi(p) \cdot W_{oy}(p)\}$ при этом

$$Z\{W_\phi(p) \cdot W_{oy}(p)\} \neq Z\{W_\phi(p)\} \times Z\{W_{oy}(p)\}$$

$$W_\phi(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \text{ — ПФ формирователя.}$$

При формирователе — экстраполяторе нулевого порядка с $\gamma = 1$

$$W_\phi(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}; \quad z = e^{pT} \Rightarrow$$

$$W(z) = Z\left\{\frac{1 - e^{-Tp}}{p} \cdot W_{oy}(p)\right\} = (1 - z^{-1}) \times Z\left(\frac{W_{oy}(p)}{p}\right), \quad (1 - z^{-1}) = \frac{z - 1}{z}.$$

Пример:

1. Если $W_{oy}(p) = \frac{k_0}{1+T_0 p} \Rightarrow W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k_0}{p(1+T_0 p)} \right\} =$

$$= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k_0}{p} - \frac{k_0 T_0}{1+T_0 p} \right\} = \frac{z-1}{z} k_0 \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{T_0}}} \right) = k_0 \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z(z-d-z+1)}{(z-1)(z-d)} = k_0 \frac{1-d}{z-d},$$

$$d = e^{-\frac{T}{T_0}}$$

2. Если $W_{oy}(p) = \frac{k_0}{1+T_0 p}$, то $W_\phi(p) = 1$ — без экстраполятора на входе

$$W(z) = \frac{\frac{k_0}{T_0} - z}{z - e^{-\frac{T}{T_0}}}.$$

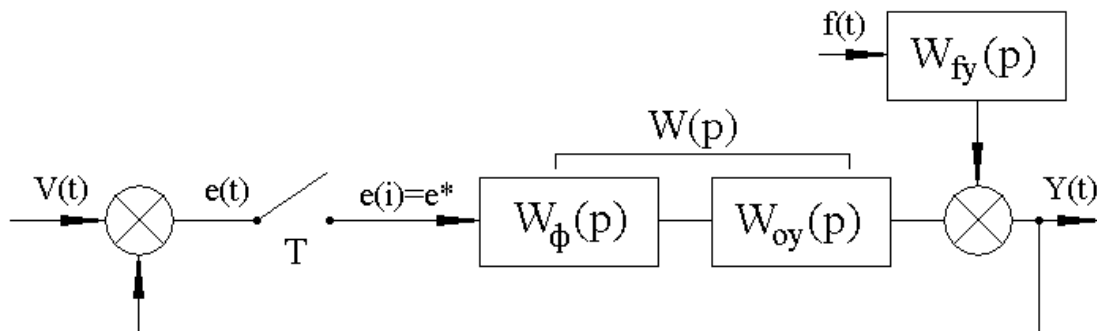
3. При $W_{oy}(p) = \frac{k_0}{p(1+T_0 p)} \Rightarrow W(z) = \frac{k_0(z-1)}{z} Z \left\{ \frac{1}{p^2} - \frac{T_0}{p(1+T_0 p)} \right\} =$

$$= \frac{k_0(z-1)}{z} \cdot \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{T_0(1-d)z}{(z-1) \cdot (z-d)} \right] = \frac{k_0[(T-T_0(1-d))z + T_0(1-d) - Td]}{(z-1) \cdot (z-d)}.$$

В ряде случаев для получения более полной информации об изменении выхода применяется так называемая модифицированная ДПФ:

$$W(z, \varepsilon) = \frac{Y(z, \varepsilon)}{U(z)} = z_\varepsilon \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\}, \text{ где } Y(z, \varepsilon) = z_\varepsilon \{y(i, \varepsilon)\}$$

При замыкании импульсной системы,



вводя мысленные ИЭ, принято записывать:

$$Y(z) = z \{W(p)\} = z \{W_\phi(p) \cdot W_{oy}(p)\}, \text{ где}$$

$$W(z) = z\{W(p)\} = z\{W_\phi(p) \cdot W_{oy}(p)\}, \quad V(z) = z\{V(i)\},$$

$W_{fy}F(z) = z\{W_{fy}(p) \cdot F(p)\} \neq W_{fy}(z) \cdot F(z)$ — и это изображение можно определить поэтому только для заданных воздействий.

Свойства ДПФ:

$$1. \text{ для статических систем } k = \frac{Y(k \rightarrow \infty)}{U(i \rightarrow \infty)} = \lim_{z \rightarrow 1} W(z) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i^*}{\sum_{i=0}^n a_i^*};$$

2. для систем с астатизмом (то есть с «чистым» интегратором) — ПФ

$$\text{имеет полюс } Z=1 \text{ и } W(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{\sum_{j=0}^{m-1} b_j^* z^j}{\sum_{i=0}^{n-1} a_i^* z^i};$$

3. для систем со звеном с запаздыванием

$$W_{zan}(p) = e^{-\tau p} \Rightarrow W_{zan}(z) = z^{-\frac{\tau}{T}} \text{ и } \frac{Y(z)}{U(z)} = W(z) \cdot z^{-\frac{\tau}{T}};$$

$$4. \text{ для реализуемости ДПФ в форме } W(z) = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} b_j^* z^j}{\sum_{i=0}^{n-1} a_i^* z^i}, \quad n \geq m, \quad a_n^* \neq 0;$$

5. ДПФ может быть записана и в форме

$$W(z^{-1}) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b'_0 + b'_1 z^{-1} + \dots + b'_m z^{-m}}{a'_0 + a'_1 z^{-1} + \dots + a'_n z^{-n}} = w(0) + w(1) \cdot z^{-1} + \dots + w(i) \cdot z^{-i} + \dots$$

не может содержать членов с z^i в положительной степени, отсюда требование $\rightarrow$ если $b'_0 \neq 0$, то $a'_0 \neq 0$ и так далее;

6. связь с импульсной переходной функцией, то есть если $U(0) = 1$, $U(k) = 0$ при $k > 0$ получим последовательность значений ИПФ $y(0) = b'_0$,

$$y(1) = b'_1 - a'_1 y(0) - a'_2 y(0);$$

Как и для непрерывных систем для ДПФ справедливо преобразование от уравнений состояния к передаточной функции:

$$x[k+1] = A^* x[k] + B^* U[k], \quad Y[k] = Cx[k]$$

$$Y(z) = C(Ez - A^*)^{-1} B^* \cdot U(z) = W(z) \cdot U(z).$$

6.1.2. Частотные характеристики дискретных систем

Для построения АФЧХ дискретной системы можно использовать

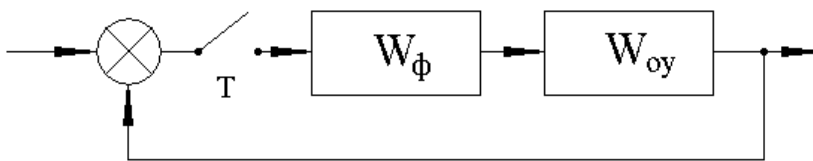
преобразования $z = e^{pT} = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T = \frac{1 + jtg \frac{\omega T}{2}}{1 - jtg \frac{\omega T}{2}}$. Подставив в

$W(z)$ — найдем частотную передаточную функцию (ЧПФ) разомкнутой системы $W(e^{j\omega T})$ — причем достаточно ограничиться диапазоном $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$ —

так как функция периодическая. Однако, трансцендентность выражений (из-за e) и периодичность — делает анализ неудобным $\rightarrow$ переходят к псевдочастоте с помощью билинейного преобразования

$$z = \frac{1 + j\lambda \frac{T}{2}}{1 - j\lambda \frac{T}{2}}, \quad \lambda = \frac{2}{T} tg\left(\frac{\omega T}{2}\right).$$

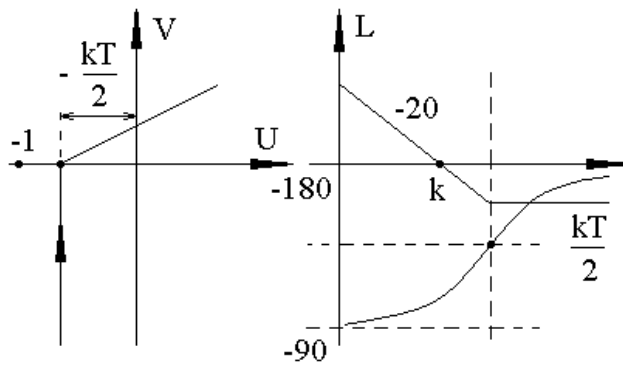
Пример:



$$W_{oy}(p) = \frac{k}{p}; \quad W_{np.n}(z) = Z\left\{\frac{k}{p^2}\right\} = \frac{zkT}{(z-1)^2}$$

$$W_{раз}(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{zkT}{(z-1)^2} = \frac{kT}{z-1}$$

$$W_{раз}(j\lambda) = \frac{k\left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}{j\lambda} = -\frac{kT}{2} - j\frac{k}{\lambda} = \frac{k}{\lambda} \sqrt{1 + \lambda^2 \frac{T^2}{4}} \cdot e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{\lambda T}{2}\right)}$$



И при $\frac{kT}{2} > 1$ — система неустойчива.

6.2. Устойчивость дискретных систем

Из требования устойчивости для непрерывных систем полюса

$p_i = \alpha_i \pm j\beta_i (i = \overline{1, n})$ должны быть в левой полуплоскости из $z = e^{pT}$

следует $z_i = e^{(\alpha_i \pm j\beta_i)T} = e^{\alpha_i T} (\cos \beta_i T \pm j \sin \beta_i T)$ и $|z_i| = e^{\alpha_i T} < 1$ —

полюса $W_{замк}(z)$ или корни ХП $D(z)$ должны быть расположены внутри единичного круга. Если хотя бы один корень вне, то система неустойчива.

Окружность единичного радиуса представляет собой границу устойчивости.

Если в $D(z)$ имеется один корень $z=1$, а остальные внутри $|z| < 1$ — граница

апериодической устойчивости. Если в $D(z)$ пара комплексных корней на

круге $\text{Re}^2 Z_{i,i+1} + \text{Im}^2 Z_{i,i+1} = 1$, а остальные внутри, то это граница

колебательной устойчивости. Причем вещественная часть корней $\text{Re} Z_{i,i+1}$

может быть положительной, отрицательной или нулевой. Типичной для

дискретных систем является так называемая граница устойчивости третьего

типа, которая соответствует наличию корней $z_i = -1$ — в этом случае в

системе устанавливаются незатухающие колебания с периодом $2T$.

Исследование устойчивости дискретных систем представляет собой более сложную задачу из-за влияния дополнительного параметра T .

Принадлежность корней Z_i кругу единичного радиуса устанавливается с помощью критерия Шур – Кона (аналога критерия Гурвица), который требует составлять и анализировать определители вплоть до $2n \times 2n$ порядка — поэтому он неудобен и применяется редко.

Удобнее с помощью билинейного преобразования (которое отображает круг единичного радиуса в левую полуплоскость) перейти от $D(z) = 0$ к $D(w) = 0$, для которого условие устойчивости, как для непрерывных систем, однако возрастает количество ограничений на параметры системы.

Пример:

$$1. \quad a_1 z + a_0 = 0 \rightarrow a_1 \cdot \frac{1+w}{1-w} + a_0 = 0 \Rightarrow a_1(1+w) + a_0(1-w) = 0, (a_1 - a_0)w + a_1 + a_0 \rightarrow$$

$$a_1 - a_0 > 0 \text{ и } a_1 + a_0 > 0.$$

$$2. \quad a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \rightarrow (a_2 - a_1 + a_0)w^2 + 2(a_2 - a_0)w + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \rightarrow$$

$$a_2 - a_1 + a_0 > 0, a_2 - a_0 > 0, a_2 + a_1 + a_0 > 0.$$

3. при $n=3$ уже пять неравенств и так далее.

Для применения частотных критериев с теми же формулировками, что и для непрерывных производят замену $w = j\lambda \frac{T}{2}$. При этом вместо числа правых полюсов ПФ, учитывается число полюсов $w(z)$ с $|Z_i| > 1$ или число правых полюсов $D(w)$.

6.3. Установившиеся режимы ДС (точность)

Для оценки точности дискретных САУ используют значение ошибки в типовых режимах. В частности, для статического режима используют известные теоремы о конечном значении $e_{ycm} = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z)$,

$$E(z) = \frac{V(z)}{1 + W_{paz}(z)} \text{ и для постоянного возмущения } F_{cm} \quad e_{ycm} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{W_{fy}(z)}{1 + W_p(z)} \cdot F_{cm}.$$

Необходимость в формулах возникает только при $\gamma < 1$.

При $\gamma = 1$ сигнал на выходе будет постоянен и дискретная система может рассматриваться как непрерывная.

Вынужденную составляющую ошибки в случае полиномиального

воздействия $f(k) = \sum_{i=0}^n a_i k^i$ можно записать как $\varepsilon[k] = \sum_{i=0}^n C_i \frac{f^{(i)}[k]}{i!}$, где

$C_i = \frac{d^i W_\varepsilon(e^{pT})}{dp^i} \Big|_{p=0}$, (T – шаг квантования) — коэффициенты разложения ПФ

по ошибке в ряд МакЛорена по степени p .

В режиме движения по гармоническому закону w_k обычно мала $\ll \frac{2}{T}$ и

псевдочастота λ_k практически совпадает с реальной w_k и для расчетов

используется формула $\varepsilon_{\max} = \frac{g_{\max}}{|1 + W(jw_k)|}$.

6.4. Качество в переходных процессах

Оценка качества осуществляется построением кривой переходного процесса, что при использовании Z-преобразования сравнительно легко:

1. Если $Y(z) = W(z) \cdot V(z) = \frac{G(z)}{H(z)}$ — дробно-рациональная функция Z , то для

нахождения оригинала используют теорему разложения:

$$y[k] = \sum \frac{G(z_i)}{H'(z_i)} \cdot z_i^{k-1}, \text{ где } z_i \text{ — простой полюс, } H'(z_i) = \left. \frac{dH}{dz} \right|_{z=z_i}.$$

2. Вычислить $y[k]$ можно без нахождения полюсов, используя разложение $Y(z)$ в ряд Лорана. Из определения Z-преобразования следует

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y[k] z^{-k} = y[0] + y[1] z^{-1} + \dots$$

Практически ряд Лорана получают делением числителя на знаменатель, начиная со старших степеней полиномов.

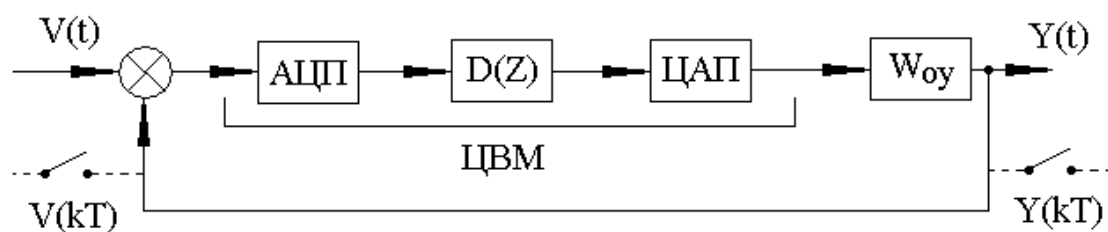
Следует помнить, что максимальное значение последовательности $y[k]$ может не совпадать с максимумом переходной характеристики $y[t]$, но это не имеет существенного значения для определения запаса устойчивости.

Специфической особенностью дискретных систем является возможность существования в них переходных процессов конечной длительности (то есть тех, которые полностью заканчивается в момент $t = kT$, $k = \text{конечн.}$). Для этого корни характеристического уравнения должны располагаться в начале координат на плоскости Z .

6.5. Компьютерные (цифроаналоговые, цифровые) СУ

Под такими СУ принято понимать системы, в которых УУ реализуется на ЭВМ или специализированном цифровом вычислительном устройстве. Это позволяет реализовывать алгоритмы управления высокой сложности, решать дополнительные задачи при формировании управления (повышение достоверности входной информации за счет обработки информации с датчиков, восстановление не измеряемых координат, идентификация неизвестных параметров ОУ, оптимизация и самонастройка и тому подобное), обеспечивать высокую стабильность и надежность операций.

Структура в этом случае следующая:



$$W_{\text{раз}}(z) = D(z) \cdot (1 - z^{-1}) \cdot Z \left\{ \frac{W_{\text{oy}}(p)}{p} \right\}$$

$$W_{\text{зам}}(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{W_{\text{раз}}(z)}{1 + W_{\text{раз}}(z)}$$

При этом даже в простейшем случае компьютер может реализовать:

- ПИД закон управления

$$U(k) = k_n e(k) + k_n (U(k-1) + T e(k)) + k_d \cdot \frac{1}{T} [e(k) - e(k-1)]$$

$$D_{nkd}(z) = k_n + \frac{k_n T z}{z-1} + k_d \frac{z-1}{T z}$$

- Различные корректирующие устройства

$$W_{ky}(p) = \frac{k(p+a)}{(p+b)} \Rightarrow W_{ky}(z) = C \frac{z-A}{z-B}$$

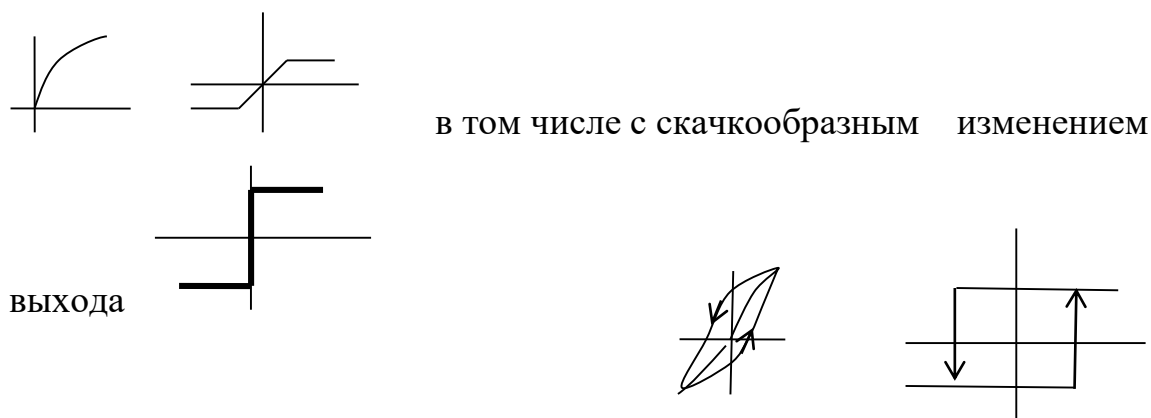
$$A = e^{-aT}, B = e^{-bT}, C = k \frac{a}{b} \cdot \frac{1-B}{1-A}$$

при $T \leq 0.1$ $f_{проп} = 0.1 \cdot \frac{\omega_{проп}}{2\pi}$ — полоса пропускания замкнутой непрерывной системы.

7. Нелинейные СУ

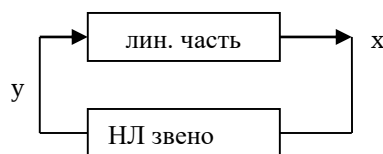
Нелинейной называется система содержащая 1 или несколько элементов описывающихся НЛ уравнением. Этот элемент (звено) может быть

- статическим (описывается алгебраическим уравнением $y=f(x)$) или
- динамическим (описывается НЛ дифференциальным уравнением $F_2(y_1, \dot{y}, \dots) = F_1(x_1, x, \dots)$) при этом нелинейности может оказывать существенное или несущественное влияние на функционирование, могут иметь гладкий или кусочно-линейный характер :



, а также иметь неоднозначность.

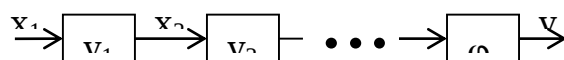
Для анализа процессов в НЛСАУ принято локализовать нелинейную часть и представить систему в виде:

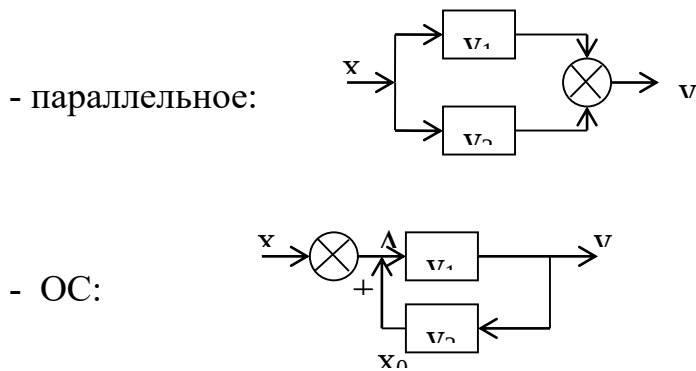


где, линейная часть, описывается ПФ $W_L(p) = \frac{x(p)}{y(p)} = \frac{R(p)}{Q(p)} = c(E_p - A)^{-1}B$, а НЛ

звено может представлять из себя объединение нескольких нелинейностей.

Объединение осуществляется с помощью трёх основных соединений: - последовательное:



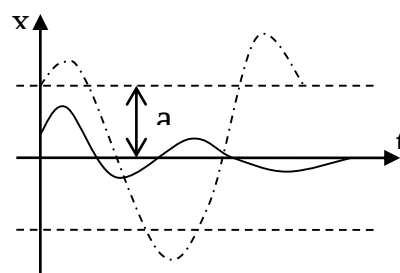


ПОС делает нелинейность сильнее, а ООС более линеаризованной.

Процессы в НЛСУ имеют целый ряд весьма существенных особенностей, которые не встречаются в линейных. Из-за этих особенностей анализ любых свойств становится сложнее. Так для устойчивости НЛ системы, в отличие от линейной, кроме структуры и параметров имеют значение амплитуда воздействия, начальные условия. Кроме статического состояния возможен новый вид установившегося процесса – автоколебания, т.е. устойчивые собственные колебания с постоянной амплитудой при отсутствии внешних колебательных воздействий. И на плоскости (в пространстве) параметров выделяется не 2 вида областей (устойчивости и неустойчивости), в больше:

- область устойчивого состояния;
- область устойчивого движения (автоколебаний);
- область неустойчивости;
- области более сложных случаев (многочастотных режимов, хаотического движения и т.д.).

И само понятие устойчивости для НЛ систем приобретает различные смыслы:



- устойчивость «в малом» -
т.е. при малых воздействиях или
начальных отклонениях
переменных, не меняющих “тип”

присущего исходному состоянию движения (типа особой точки) ;

- устойчивость «в большом» - когда система стремится к установившемуся движению при значительных отклонениях – меняющих «тип» движения :
- устойчивости «в целом», когда система стремится к допустимому состоянию равновесия или установившемуся движению при любых воздействиях и отклонениях.

Для исследования устойчивости «в большом» и «в целом» используют специальные методы, наиболее известные из них:

1. Прямой (второй) метод Ляпунова;
2. исследование абсолютной устойчивости методом В.М.Попова.

7.1.Метод фазового пространства.

Ранее мы уже разбирали метод фазового пространства. Освежим наши знания:

Для наглядного представления процессов в системах (как линейных так и нелинейных) удобно управление n -порядка преобразовать к системе n - дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, f, V) \\ \frac{dx_n}{dt} = \Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, f, V) \end{cases} \quad \text{при} \quad \text{нач. усл } x_i(t=0) = x_{i0}$$

При этом желательно, чтобы x_i имели реальный физический смысл (изменение отклонения от заданного, его скорость, ускорение и т.д.).

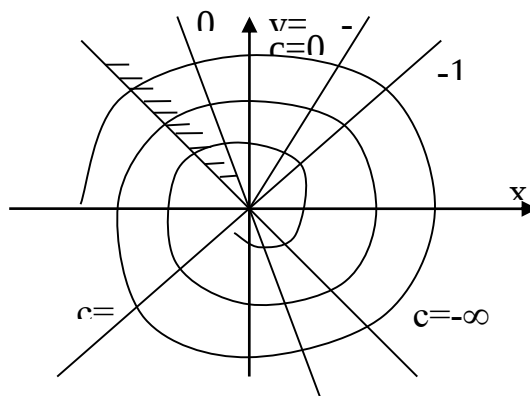
Каждому значению физического процесса $x_i, i = \overline{1, n}$ при t_i в фазовом пространстве $\bar{x}$ соответствует изображающую точку и изменения во времени даёт траекторию (фазовую). Совокупность таких фазовых траекторий (фазовый портрет) даёт полное представление о поведении системы.

Построение фазового портрета для НЛ систем сложнее, т.к. не разработан универсальный математический аппарат решения таких уравнений.

Существует общий подход – метод **изоклин**, состоящий в следующем:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = f(x, y) \end{cases} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y} = c \rightarrow (-\infty, \infty) - \text{наклон фазовых траекторий из 1}$$

условия, $\frac{f(x, y)}{y} = c$ - алгебраическое уравнение кривой с соответствующим наклоном – 2 условие.

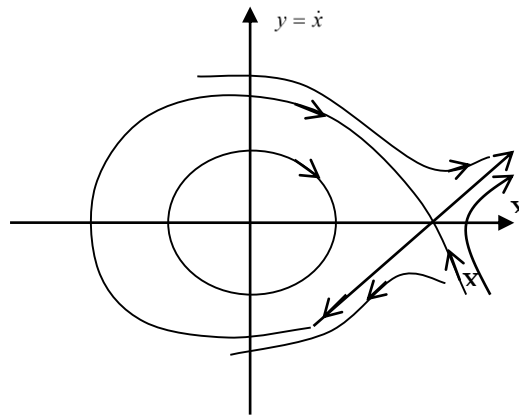


Реальные СУ, которые в малом характеризуются расходящимися процессами при увеличении координат меняют характер и устанавливается «**предельный устойчивый цикл**» - -1 «особая линия НЛ системы», к которому стягиваются также процессы с начально большими значениями.

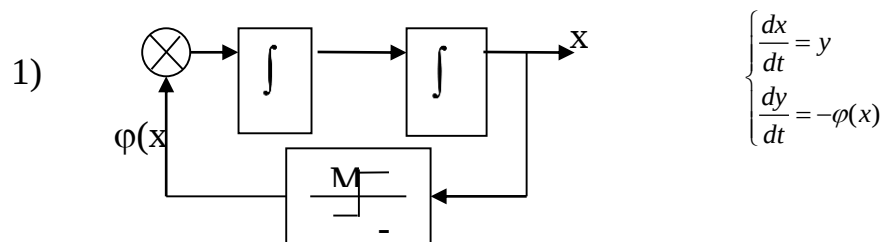
По аналогии с фокусами и узлами может быть так же «**неустойчивый предельный цикл**» - «2 особая линия НЛ системы».

А если упругая сила w^2x является нелинейной функцией $= \varphi(x)$ с корнем $x=x_a$ (при $x > x_a$ меняет знак на “-”), то фазовый портрет может иметь 2 особые точки:

$x=0$ – “центр” и $x=x_a$ – седло и фазовая плоскость распадается на 3 области из которой 1 имеет устойчивые процессы. Линия, разграничивающая области – называется «сепаратриссой» – 3 тип особой линии.



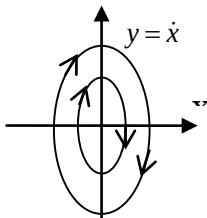
Для получения других особых линий рассмотрим примеры релейных систем:



$$\varphi(x) = \begin{cases} M, x > 0 \\ -M, x < 0 \end{cases}$$

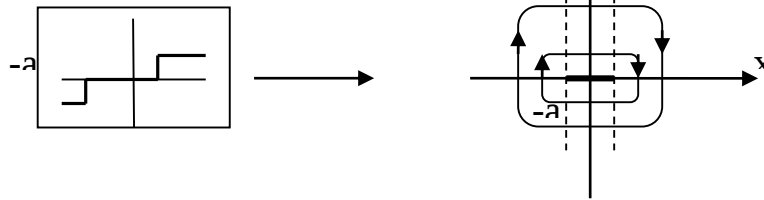
$$\frac{dy}{dx} = \mp M / y \rightarrow y dy = \mp M dx \rightarrow \frac{y^2}{2} \pm Mx = c$$

$$y^2 = 2(c + Mx) \quad y^2 = 2(c - Mx)$$

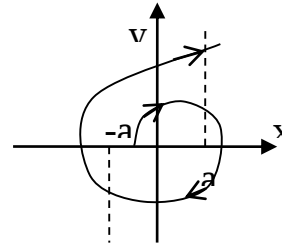
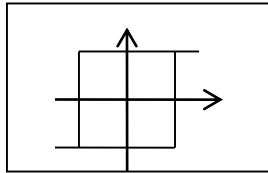


Решение ищут методом «припасовывания» или «сшивания» - это точный метод определения процессов в кусочно-линейных системах. Для каждого интервала записывают решение с неизвестными произвольными постоянными, приравнивая каждую постоянную в конце предыдущего и начале следующего интервала, находят произвольную постоянную.

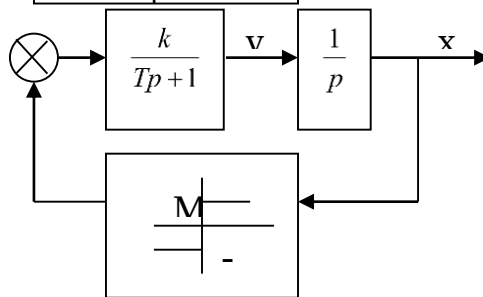
2)



3)



4)

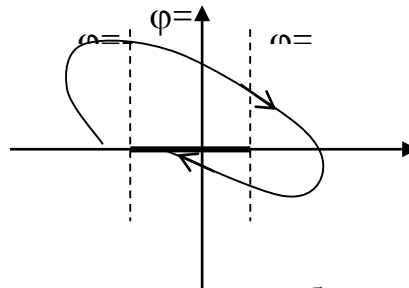
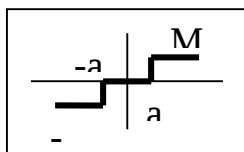


$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{T_y} (y + k\phi(x))$$

$$x = c - T\{y + \ln(y + ky)\}$$

$$\frac{T_y dy}{y + ky} = -dx$$

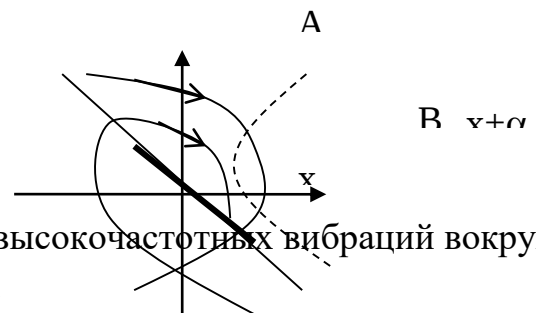
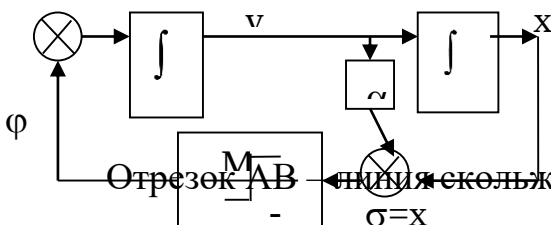
5)



Линия которая вызовет статическую ошибку в среднем $a/2$.

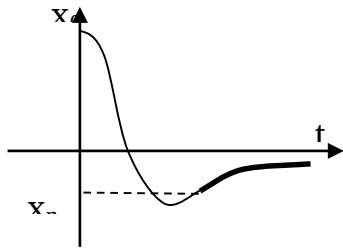
$$y = \dot{x}$$

6)



Отрезок АВ — линия скольжения — режим высокочастотных вибраций вокруг линии переключения. $\frac{dx}{dt} \alpha - x = 0 \Rightarrow x(t) = x_{non} \cdot e^{-\frac{t}{\alpha}}$ - ут зависит от параметров

объекта, а также координатных и параметрический возмущений.



7.2. Устойчивость нелинейных систем.

Итак, для нелинейных систем характерны 2 основных невозмущённых режима движений :

- состояние покоя;
- предельный устойчивый цикл (автоколебания).

Под действием возмущений (изменением начальных условий) – возмущённое движение может быть:

- устойчивым, т.е. с течением времени быть ограничено отличным от невозмущённого;
- асимптотически устойчивым, т.е. с течением времени стремящимся и совпадающим с невозмущённым;
- неустойчивым, т.е. с течением времени сколь угодно сильно отличающимся от невозмущённого.

А.М. Ляпунов создал 2 общих метода исследования нелинейных систем:

Первый метод Ляпунова: основан на линеаризации уравнений, описывающих поведение системы относительно невозмущённого с использованием разложения в ряд Тейлора и отбрасывания всех членов большего порядка малости. Такой подход подходит для непрерывных гладких дифференцируемых нелинейностей → получаемые линейные уравнения 1 приближения (уравнения в вариациях) исследуются методами анализа линейных систем. Естественно этот метод справедлив только при малых возмущениях.

Второй метод Ляпунова: позволяет получить достаточные условия устойчивости равновесия «*в большом*» и основывается на построении специальных формул Ляпунова. В его основе 2 теоремы (без доказательства):

1. Если существует знакоопределённая функция $V(x_1, \dots, x_n)$ производная по времени которой dV/dt , вычисленная с учётом дифференциальных уравнений системы представляет собой знакпостоянную функцию

противоположного V знака или $\equiv 0$, то невозмущённое движение устойчиво.

2. Если кроме того, функция dV/dt знакоопределена, то невозмущённое движение устойчиво асимптотически.

Уточним, что знакопостоянной называется функция, принимающая при всех своих значениях аргументы, только одного знака или 0.

А знакоопределённую такую знакопостоянную, которая принимает значения 0, только при нулевом значении всех аргументов (в начале координат).

Уяснить смысл функции Ляпунова и сформировать теорему легко с помощью понятий фазового пространства: $V(x...) = c$ — образует в фазовом пространстве — замкнутую поверхность, охватывающую начало координат. При чем при $c_3 < c_2 < c_1$ — стягивающихся к нему. А противоположный знак производной означает, что система движется внутрь поверхности.

Задача нахождения функции Ляпунова, которая для данной системы дала бы необходимое и достаточное условие устойчивости, весьма сложна и практически пока не разрешима. Поэтому, если функция Ляпунова найдена то устойчивость доказана, а если не найдена, то это ещё не значит что движение не устойчиво.

Для линейных и близких к ним систем функцию Ляпунова проще всего задавать в виде квадратичных форм от координат:

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad \text{где для положительной определённости требуется}$$

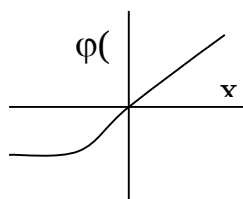
положительный определитель Сильвестра $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} > 0$ и его

диагональных миноров.

Существенное расширение возможностей даёт предложенная А.И.Лурье и В.И.Постниковым форма функции Ляпунова для систем с однозначной безынерционной нелинейностью в виде:

$$V(x_1, \dots, x_n) = \sum \sum \alpha_{ij} x_i x_j + \beta \int_0^x \varphi(\xi) d\xi, \text{ где}$$

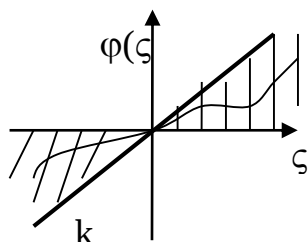
$$x \cdot \varphi(x) > 0, \quad \varphi(0) = 0.$$



удовлетворяет условию:

7.3. Абсолютная устойчивость.

Если положения равновесия системы асимптотически устойчиво в целом при любой нелинейной функции из заданного класса и определённых характеристиках линейной части, то систем называется **абсолютно устойчивой**. При этом линейную часть обычно характеризуют ПФ $W(p) = c(Ep - A)^{-1}B$, а нелинейность секторным ограничением:



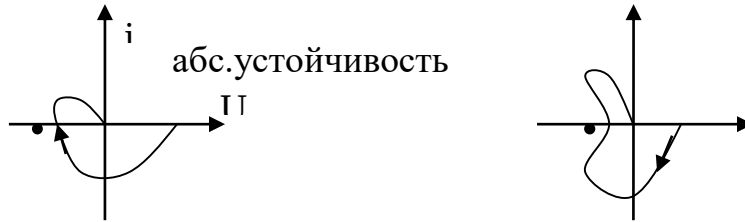
В 1962г. В.А.Якубовичем и независимо Р.Каманом была доказана лемма, на которой по существу основывается современная теорема абсолютной устойчивости. Согласно ей ПФ линейной части должна иметь левые (устойчивые) полюса, вещественная часть которых по модулю больше чем предельный коэффициент передачи нелинейности.

В наиболее удобной форме это требование формализовано в **частотном критерии В.М.Попова**:

Система с устойчивой и вполне управляемой линейной частью абсолютно устойчива в классе стационарных нелинейных характеристик $\varphi(x)$, лежащих

в секторе $(0, K)$, если через точку $-1/K$ на вещественной оси комплексной плоскости (U, jV) можно провести прямую так, чтобы преобразованная частотная характеристика $W^n(j\omega) = \frac{\operatorname{Re}[W(j\omega)]}{U_n^*(\omega)} + \frac{j\omega \operatorname{Im}[W(j\omega)]}{V_n^*(\omega)}$, лежала справа от этой прямой т.е.

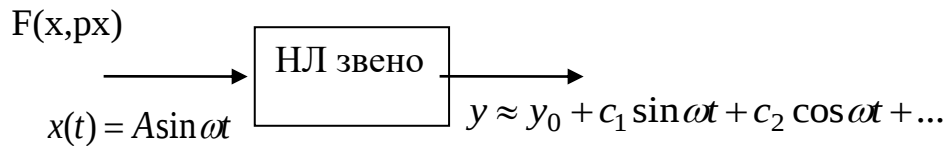
$$U_n^*(\omega) - \tau V_n^*(\omega) + \frac{1}{k} > 0 \quad \text{при любых } \tau.$$



7.4. Приближённые методы исследования нелинейных систем.

Существование во многих динамических нелинейных системах периодических движений (колебаний) без внешних воздействий, порождённых устойчивым предельным циклом, и их практически синусоидальный характер на выходе линейной части спровоцировал попытки применять для анализа таких процессов линейный математический аппарат, заменяя НЛ элемент – эквивалентным линейным.

В итоге учёными Крыловым и Боголюбовым была предложена идея метода гармонической линеаризации безынерционных нелинейных звеньев. Идея состоит в том, что на основе рассмотрения прохождения через такое НЛ звено входного гармонического сигнала на выходном сигнале выделить и математически описать прежде всего гармонику той же частоты, рассматривая получающийся несинусоидальный периодический сигнал на выходе как сумму различных гармоник ряда Фурье.



$$\begin{cases} y_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \omega t, A \omega \cos \omega t) d\omega t \\ c_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A \omega \cos \psi) \sin \psi d\psi \\ c_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A \omega \cos \psi) \cos \psi d\psi \end{cases}$$

$$\sin \omega t = \frac{x}{A}; \cos \omega t = \frac{\dot{x}}{a\omega}$$

Учитывая

$$y(t) = y_0 + \frac{c_1}{a\omega} \dot{x} + \dots$$

можно заменить для 1 гармоник нелинейное преобразование эквивалентом:

$$F(x, px) = K_{\Gamma 0}(A) + K_{\Gamma 1}(A)x + K_{\Gamma}^1(A) \frac{px}{\omega} - \text{где } K_{\Gamma} - \text{коэффициенты гармонической}$$

линеаризации и описать нелинейное звено передаточной функцией

$$W_{\text{нл}}(p) = K_{\Gamma}(A) + \frac{K_{\Gamma}^1(A)}{\omega} p$$

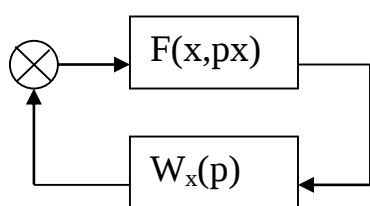
Что касается гармоник более высоких частот, то для реальных объектов выполняется «гипотеза фильтра НЧ», т.е. их влияние на выходе линейной части несущественно.

Для симметричных нелинейностей – $K_{\Gamma 0} = 0$.

Для однозначных $K_{\Gamma 1} = 0$.

Для типовых нелинейностей зависимости $K_{\Gamma 0}(A)$ и $K_{\Gamma 1}(A)$ – легко вычисляются хотя и носят нелинейный характер.

7.4.1. Алгебраический способ исследования автоколебаний.



Пусть $w_L(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$ - устойчива

(т.е. не имеет правых полюсов)

$$W_H(pA) = K_F^2(A) + K_F^1(A) \frac{P}{\omega}$$

Х.П. замкнутой системы:

$$Q(p)x + R(p) \cdot A(\text{нбзч}) = 0$$

$$Q(p)x + R(p) \cdot \left[K_F(A) + \frac{K_F^1(A)}{\omega} p \right] x = 0$$

$$Q(j\omega) = x_Q + jy_Q$$

$$R(j\omega) = x_R + jy_R$$

$$p = j\omega \Rightarrow Q(j\omega) + R(j\omega)(K_F(A) + jK_F^1(A)) = 0$$

По критерию Михайлова: $\left. \begin{matrix} \text{Re} = 0 \\ \text{Im} = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} X_Q(\omega) + X_R(\omega) \cdot K_F(A) - Y_R(\omega) \cdot K_F^1(A) = 0 \\ Y_Q(\omega) + Y_R \cdot K_F(A) + X_R \cdot K_F^1(A) = 0 \end{cases}$

Получаем 2 уравнения для нахождения A и ω - автоколебаний. Для

однозначных нелинейностей $K_F^1(A) = 0$ - условия упрощаются:

$$K_F(A) = -\frac{Y_Q}{Y_R}, \quad X_Q(\omega) \cdot Y_R(\omega) - X_R(\omega) \cdot Y_Q(\omega) = 0 \text{ и частота автоколебаний не}$$

зависит от нелинейности, а определяется только $W_{\text{лин}}$.

Необходимо отметить, что система из 2 уравнений может давать несколько

решений (особенно для неоднозначных нелинейностей) и требуется

проверять устойчивость (возможность существования) полученных решений

следующим условием:

$$\frac{\partial \text{Re}}{\partial A} \cdot \frac{\partial \text{Im}}{\partial \omega} - \frac{\partial \text{Re}}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \text{Im}}{\partial A} > 0$$

Если в линейной части параметры могут меняться

(например $K_{\text{усил}}$), то рассматривая

$$\begin{cases} \text{Re}(A, \omega, k) = 0 \\ \text{Im}(A, \omega, k) = 0 \end{cases} \quad \text{можно получить} \quad A = f_1(k), \quad \omega = f_2(k).$$

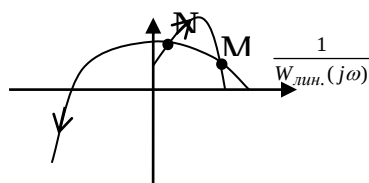
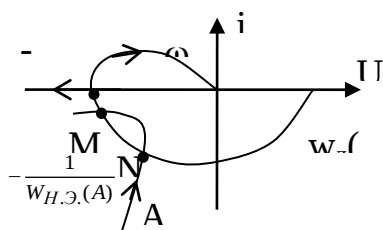
7.4.2. Частотный способ исследования автоколебаний

Базируется на графоаналитическом анализе на комплексной плоскости с $W(j\omega) = W_{\text{лин.}}(j\omega) \cdot W_{\text{н.э.}}(A) = -1$ использованием критерия Найквиста для АФЧХ, т.е. сигнал пройдя по контуру должен иметь ту же амплитуду и после инверсии ту же фазу (условие баланса фаз и амплитуд).

Метод гармонического баланса и условие автоколебаний:

$$W_{\text{лин.}}(j\omega) = -\frac{1}{W_{\text{н.э.}}(A)} - \text{Гольдфарбом Л.С.}$$

$$\frac{1}{W_{\text{лин.}}(j\omega)} = -W_{\text{н.э.}}(A) - \text{Когенбургером Р.(США)}$$



При этом Гольдфарб показал, что если двигаться по кривой $-\frac{1}{W_{\text{н.э.}}}$ в сторону

возрастания A , то точка входа в контур соответствует неустойчивому решению (N), а точка выхода (M) – устойчивому.

Для обратных характеристик – наоборот.

8. Понятие об адаптивных СУ

Термин «адаптация» заимствован ТУ из области, где обозначает способность приспособления к изменениям.

Причины применения принципов адаптации в ТУ:

1. Изменчивость и сложность характеристик объектов и внешней среды.
2. Рост требований к характеристикам СУ, при отсутствии возможности полного априорного изучения их.

Адаптация – это процесс изменения параметров, структуры СУ или управление воздействиями:

- На основе информации, получаемой во время управления.
- С целью достижения определенного (оптимального) качества управления.
- При начальных неопределенных и/или изменяющихся условиях работы.

Отличие адаптивных систем от оптимальных в том, что наилучшее качество при текущем изменении условий достигается при различных заранее не определяемых параметрах УУ за счет действия дополнительных элементов, образующих «вторичный» контур. Естественно, это усложняет систему, снижает надежность. Однако, зачастую это принципиально необходимо для нормального функционирования или целесообразно, так как получаемый выигрыш превышает затраты.

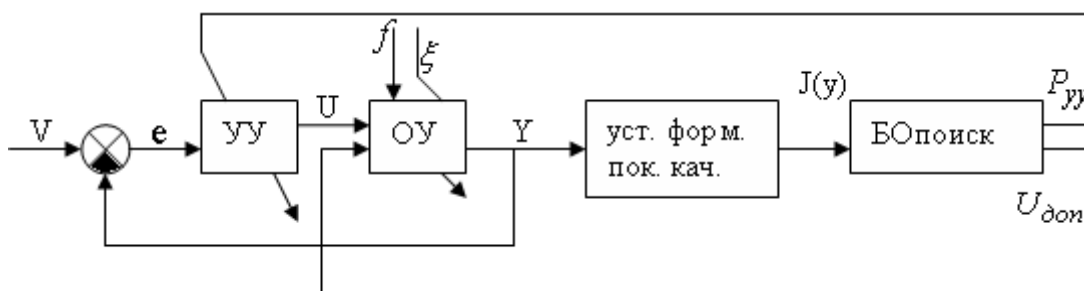
Не рассматривая полную *классификацию адаптивных систем* отметим лишь их сложившееся деление на два класса:

- *Самоорганизующиеся* системы, использующие минимальный объем априорной информации и поэтому реализующими сложные и медленные процедуры выработки управлений.

- *Самонастраивающиеся*, в которых априорной информации о процессе управления достаточно для формирования принципов обеспечения его оптимальности (процесса управления).

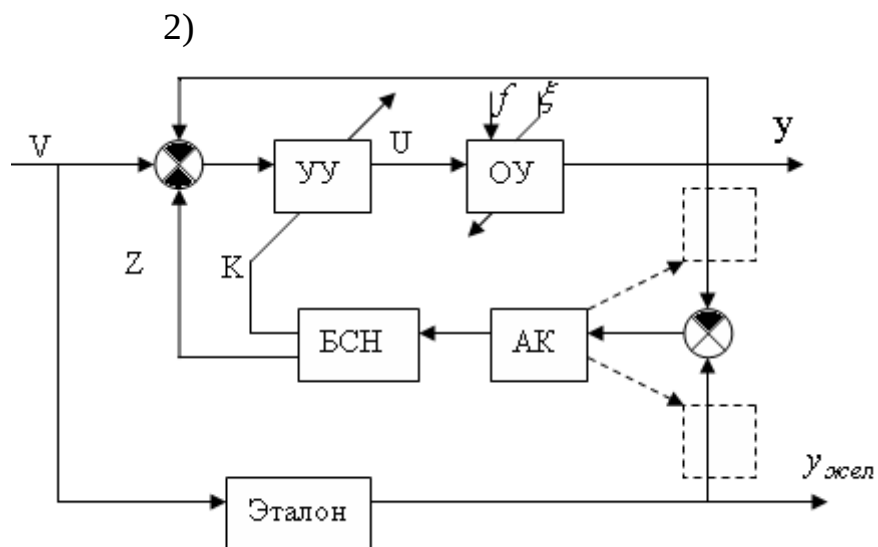
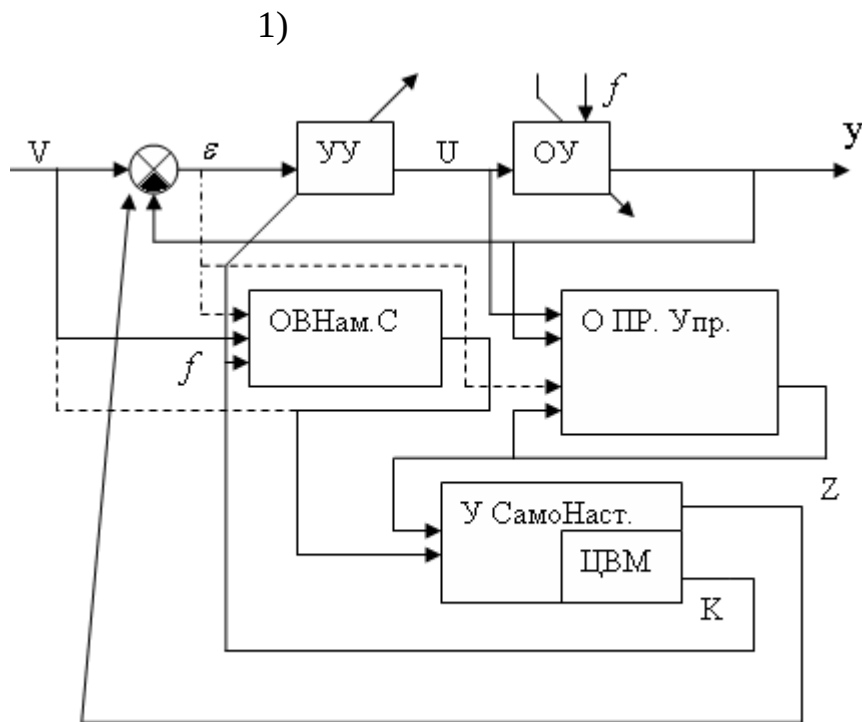
В зависимости от условий эксплуатации СУ (критичности времени и величин отклонения от оптимального режима работы), возможности контроля или аналитического описания показателя качества (функционала) и установления его зависимости от изменений в УУ сформировались две группы систем:

- *Поисковые (экстремальные)* системы, в которых не удалось установить заранее аналитической связи изменений в УУ с показателем качества и *оптимальность* достигается с помощью процедуры поиска. Структура системы имеет вид:



Естественно, на организацию поиска требуется время и данные, поэтому такой подход реализуется при медленном тренде (дрейфе) условий оптимальной работы.

- *Беспоисковые (аналитические)* системы, в которых за счет априорного анализа условий оптимальности отсутствует поиск, и ускорение оптимизации достигается либо с использованием процедур оценивания и идентификации, либо сравнения с эталоном (желаемым поведением).



В первом случае разделены (во времени) процессы изучения (оценки) и коррекции $УУ$ – так называемый идентификационный (непрямой) подход. Во втором случае коррекция $УУ$ осуществляется на основе устранения рассогласования поведений эталона и реальной системы – так как прямой (безидентификационный) подход.

8.1. Экстремальные системы

Задача экстремальной настройки формируется следующим образом: на множестве возможных состояний или настраиваемых параметров X определена целевая функция или функционал качества $J(x)$. Необходимо обеспечить переход от исходной точки X_0 в точку экстремума, определяемую

условиями $\frac{dJ(x)}{dx} \Big|_{x=x_{\text{экс}}} = 0$ - необходимое и $\frac{d^2 J(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_{\text{экс}}} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$ - достаточное,

для $\begin{pmatrix} \min \\ \max \end{pmatrix}$, иначе точка только стационарная ($\smile$). Так как связь между

экстремумом $x_{\text{экс}}$ и возможными состояниями X сложна, то поиск осуществляется последовательными приближениями, и наличие итеративной процедуры является существенной чертой таких систем. На процедуру поиска влияют многие факторы:

- Общее число переменных (при увеличении множества приходится принимать специальные меры ускорения).
- Вид целевой функции (униmodalная или многоэкстремальная).
- Дрейф экстремума и влияние инерционностей, приводящий к ошибкам поиска.
- Ограничения области поиска, длительности поиска, точности используемой информации.
- Непрерывность или дискретность поиска и т.д.

По способу поиска экстремума все системы делятся на:

- 1) Сканирование или регулярного перебора
- 2) Пошагового сравнения с запоминанием ext
- 3) С модулированным сигналом или синхронным детектированием

В качестве информации используются значения критерия качества.

4) С определением производной $\frac{dJ}{dx}$ или её знака для

одномерных и градиента для многомерных (метод Гаусса-Зейделя, метод градиента, метод наискорейшего спуска) с реализацией различных способов движения к экстремуму.

5) Случайного поиска. При этом последовательность поиска может состоять только из рабочих шагов или также

включать дополнительные тестовые $\begin{pmatrix} \text{пробные} \\ \text{поисковые} \end{pmatrix}$.

Экстремальные системы оценивают по их помехоустойчивости и по качеству процессов поиска. Требования к процессам поиска аналогичны требованиям к обычным СУ:

- Устойчивость процесса поиска, сходящегося к допустимой окрестности глобального экстремума;
- Точность попадания в достаточно малую область экстремума, характеризующуюся амплитудой и периодом колебаний («рысканий»);
- Быстродействие, характеризующее время выхода на экстремум при изменениях в положении экстремума;
- Минимизация потерь на поиск экстремума, под которыми понимают среднее за период отклонение параметра экстремума из-за «рысканий» около точки экстремума. При этом снижение потерь ограничено влиянием помех.

Как собственные («рыскания»), так и вынужденные (при моделирующих воздействиях), колебания необходимы для получения информации о положении относительно x_{ext} и отражают специфику экстремальных систем. Из-за наличия нелинейной экстремальной характеристики, а также релейных обычно элементов блока организации поиска экстремальные системы являются нелинейными, анализ которых можно выполнить методами теории НЛ систем (методом гармонической линеаризации), однако, аналитическое

исследование трудоемко и возможно только в частных случаях и наиболее целесообразно исследование методом моделирования.

8.2. Беспойсковые СНС

Беспойсковое определение условий экстремума функционала качества, возможное за счет априорно установленной аналитической связи между критерием и настраиваемыми параметрами, позволяет отказаться от поисковых затрат и получить процесс адаптации, соизмеримый с темпом переходных процессов в основном контуре управления.

Характерные особенности БСНС:

- Наличие не менее двух контуров (основной и самонастройки);
- Изменение свойств основного контура с помощью элементов с переменными параметрами, характеристиками или структурой, определяет, что БСНС – нелинейные нестационарные системы;
- Закон формирования сигнала СН обычно довольно сложен и требует применения ЦВМ, входящих квантование по t и уровню;
- Необходимость повышенной чувствительности к V изменениям, требует повышенных K усиления и работы БСНС вблизи границы устойчивости;
- Процесс адаптации в контуре СН должен быть быстрее, чем возникающие отклонения в ОУ, то есть работать как бы с неизвестным, но стационарным объектом (т.н. гипотеза квазистационарности);
- Контур СН должен быть спроектирован так, чтобы изменения в УУ могли компенсировать возможные изменения в ОУ (т.н. условия согласования);
- Изменение уставок и возмущений должно быть достаточно разнообразным, чтобы проявлялись все свойства

основного контура и соответственно их можно было бы настраивать (т.н. гипотеза о «частотном богатстве» сигналов).

При построении (проектировании) БСНС основным является синтез контура СН, выполняющийся в несколько этапов:

- 1) Анализ причин существенного изменения качества и обуславливающий применения СН;
- 2) Выбор критерия СН и принципа построения контура;
- 3) Синтез алгоритмов идентификации;
- 4) Определение закона коррекции настраиваемых параметров УУ;
- 5) Синтез модели (эталона) или анализатора характеристик или свойств.

После синтеза проводится исследование БСНС с целью оценки качества процессов СН, при котором используют все методы теории управления: гармонической линеаризации и фазового портрета, численной и статической теории, математического моделирования.

В настоящий момент разработка таких систем доведена до построения промышленных регуляторов АСУ ТП с использованием ЦВМ.

Список литературы

1. Бесекерский Виктор Антонович, Попов Евгений Павлович (каф. Автоматики и электроники, академия им. Можайского). Теория систем автоматического управления изд.4, переработанное и дополненное – СПб. Изд. «Прогрессия», 2004г, 752с (серия специалист).
2. Ричард К.Дорф (проф. Электротехники и ВТ Калифорнийского университета, Т. Дэвис). Современные системы управления. Перевод с англ. Б.И. Копылова – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002 – 832с.
3. Чарльз Л. Филиппс (проф. университета Оберна, шт. Алабама), Райс Д. Харрорбор (проф. Университета Пенсаколы, шт. Флорида). Системы управления с обратной связью. Перевод с англ. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001-616 с.
4. ТАУ: учебник для ВУЗов в 2 частях / Под. Ред. А.А.Воронова. – М.: ВШ, I-ч – 1986г. 367с, II-ч – 1986г. 504с.
5. Певзнер Л.Д. Теория систем управления. – М.:Изд-во МГТУ,2002-472 с.
6. Попов Е.П.
 - 6.1.Теория линейных САРиУ: М.: Наука, 1989г., 304с.
 - 5.2.Теория нелинейных САРиУ: М.: Наука, 1989г., 256с. ВШ - 1983г. I и II
7. Иванов В.А., Ющенко А.С. – Теория дискретных САУ – М.: Наука – 1983г. – 336с
8. Куо. Б. Теория и проектирование цифровых СУ, пер. с англ., - М.: Машиностроение, 1986г. – 448с.
9. Чураков В.П. – Оптимальные и адаптивные системы – М.: ЭАИ – 1987г. – 256с.

Нестеров Сергей Александрович

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Санкт – Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Подписано в печать . Формат 60х84 1/16 .

Усл. печ. л. 7,8 Тираж . Заказ .

195251, Санкт – Петербург, Политехническая ул., 29 .

Тел.: (812) 552 – 77 – 17 ; 550 – 40 – 14