

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Физико-математический институт
Кафедра высшей математики

Шатров А. В.

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
МОДЕЛИРОВАНИЮ
ЧАСТЬ 1: МЕТОДОЛОГИЯ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2026

УДК 681.3.062+517.21

ББК 32.973

Шатров А.В.

Системный анализ с приложениями к математическому моделированию.

Часть 1: Методология системного подхода [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.В. Шатров; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. - С-Петербург, 2026. –197 с.

Представлены введение в системный анализ с примерами применения возможностей системного подхода в решении широкого круга задач теории систем и математического моделирования для студентов магистратуры направления 03.04.01 Прикладные математика и физика, ООП 03.04.01_06 Физика и прикладная математика в науке и образовании, а также других специальностей СПбПУ, желающих иметь доступные вспомогательные средства для самостоятельной подготовки по дисциплинам, преподавание которых базируется на серьезных знаниях различных разделов физики, высшей математики и математического моделирования.

Ил. 20. Библиогр.: 35 назв.

© Шатров А.В., 2026

© Санкт-Петербургский политехнический
университет, 2026

Содержание

1.	Введение	6
2.	Основные понятия системного анализа	17
2.1	Определение системного анализа	17
2.2	Понятие системы и системности	19
2.3	Онтология системности	21
2.4	Состояния и основные свойства системы	25
2.5	Классификация систем	27
3	Методология системного анализа.	40
3.1	Принцип системности.	41
3.2	Системный подход – основа методологии системного анализа	42
3.3	Основные закономерности организации материального мира.	55
3.4	Системный анализ в исследовании физико-математических и технических систем и процессов	67
4.	Моделирование систем.	69
4.1	Определение понятия «модель».	70
4.2	Классификация моделей.	71
4.3	Общие требования к моделям.	75
4.4	Базовые физико-математические модели.	82
5.	Моделирование сложных систем.	90
5.1	Декомпозиция сложных систем	91
5.2	Метод анализа иерархий (МАИ)	95

5.2.1	Алгоритм МАИ	96
5.2.2	Пример – покупка дома	98
5.2.3	Синтез локальных приоритетов	105
5.2.4	Синтез глобальных приоритетов	112
6.	Математическая постановка задач системной динамики	115
6.1	Принципы разработки математических моделей (ММ)	115
6.2	Некоторые типовые проблемы разработки ММ	118
6.2.1	Интерполяция, экстраполяция и прогнозирование	118
6.2.2	Линейность и нелинейность	121
6.3	Проблема размерности в моделировании	122
6.3.1	Основы теории размерности	123
6.3.2	Теория подобия. Критерии подобия	125
6.3.3	Приведение задач ММ к безразмерному виду	130
7	Идентификация математических моделей	132
7.1	Постановка задач идентификации математических моделей	133
7.2	Задача параметрической идентификации	137
7.3	Идентификация моделей с помощью регрессионного метода наименьших квадратов (МНК)	138
7.4	МНК для линейной зависимости	145
7.5	Альтернативные методы параметрической идентификации	146
8	Методы оптимизации (МО) в задачах системного анализа	147
8.1	Основные понятия и определения МО. Постановка задач	148

8.2	Постановка задачи математического программирования	152
8.3	Определение выпуклых множеств и выпуклых функций	153
8.4	Типы задач математического программирования	156
8.5	Линейное программирование (ЛП)	158
8.5.1	Математическая формулировка и особенности задач ЛП	158
8.5.2	Графическая интерпретация задач ЛП	160
8.5.3	Симплекс-метод решения задач ЛП	162
8.6	Нелинейное программирование	171
8.6.1	Метод неопределенных множителей Лагранжа	172
8.6.2	Теорема Куна-Таккера	173
8.6.3	Квадратичное программирование	174
9	Многокритериальная оптимизация (МКО)	180
9.1	Постановка задач МКО	180
9.2	Оптимальность по Парето	182
9.3	Преобразование векторного критерия и нормализация частных критериев оптимальности	187
9.4	Свёртка частных критериев в МКО	188
9.5	Обобщенный аддитивный критерий оптимальности	188
	Заключение	192
	Список литературы	195

1. Введение

Курс системного анализа в программе подготовки студентов магистратуры направления 03.04.01 Прикладные математика и физика, ООП 03.04.01_06 Физика и прикладная математика в науке и образовании предусмотрен в первом, втором и третьем семестрах и относится к базовым дисциплинам учебного плана. Дисциплина «Системный анализ» имеет своей целью дать студентам подготовку в области теории математического моделирования систем различной природы, главным образом физических систем; дать навыки по использованию средств математического моделирования для исследования различного рода физико-технических объектов и систем. Дисциплина формирует базовые знания в области теории систем и математического моделирования технических объектов и динамических систем. Для изучения данной дисциплины студенты должны обладать математической подготовкой в объеме курса высшей математики технического вуза.

Составляющим понятий «системный анализ», «системная проблема», «системное исследование» является слово «система», которое появилось в Древней Элладке 2000–2500 лет назад и первоначально означало: сочетание, организм, устройство, организация, строй, союз. Оно также выражало определенные акты деятельности и их результаты (нечто, поставленное вместе; нечто, приведенное в порядок). Метафоризация слова «система» была начата Демокритом (460–360 до н. э.). Образование сложных тел из атомов он уподобляет образованию слов из слогов и слогов из букв. Сравнение неделимых форм (элементов с буквами) – один из первых этапов формирования научно-философского понятия, обладающего обобщенным универсальным значением. На следующем этапе происходят дальнейшая универсализация значения слова, наделение его высшим обобщенным смыслом, что позволяет применять его и к физическим, и к искусственным объектам. С возникновением науки и философии Возрождения (XV в.) связано радикальное преобразование в истолковании бытия. Трактовка бытия как

космоса сменяется рассмотрением его как системы мира. При этом система мира понимается как независимое от человека, обладающее своим типом организации, иерархией, имманентными (свойственными, внутренне присущими какому-либо предмету, явлению, проистекающими из их природы) законами и суверенной структурой. Возникает ряд научных дисциплин, каждая из которых вычленяет в природном мире определенную область и анализирует ее свойственными этим дисциплинам методами.

Важнейшая особенность представлений о системности предмета познания, характерная для науки эпохи Возрождения, состоит в выдвижении на первый план каузального, а не телеологического способа объяснения. Глубокую и основательную разработку идея системной организации научного знания получила в немецкой классической философии. Структура научного знания, принципы и основания построения теоретических систем стали в ней предметом специального философского, логико-методологического анализа. Немецкий математик и философ И.Г. Ламберт (1728–1777) подчеркивал, что «всякая наука, как и её часть, предстает как система, поскольку система есть совокупность идей и принципов, которая может трактоваться как целое. В системе должны быть субординация и координация». Следует отметить, что он анализировал системность науки на основе обобщенного рассмотрения систем вообще, построения общей системологии. Новый этап в интерпретации системности научного знания связан с именем И. Канта (1724–1804). Его заслуга состоит не только в четко осознанном системном характере научно-теоретического знания, но и в превращении этой проблемы в методологическую, в выявлении определенных процедур и средств системного конструирования знания. И.Г. Фихте (1762– 1814), который считает, что принципы полагания формы знания являются одновременно принципами полагания и его содержания. Исходный тезис Фихте – научное знание есть системное целое. Теоретическое естествознание XIX–XX вв. исходит из различения предмета и объекта знания. Подчеркивая активный

характер человеческого познания, новый способ мысли трактует предмет исследований как нечто созданное и создаваемое человеком в ходе освоения природы. Поднимается роль моделей в познании. Целое понимается уже не как простая сумма, а как функциональная совокупность, которая формируется некоторым заранее задаваемым отношением между элементами. При этом фиксируется наличие особых интегративных характеристик данной совокупности – целостность, несводимость к составляющим элементам. Сама эта совокупность, отношение между элементами (их координация, субординация и т.д.) определяются некоторым правилом или системообразующим принципом. Этот принцип относится как к порождению свойств целого из элементов, так и к порождению свойств элементов из целого. Системообразующий принцип позволяет не только постулировать те или иные свойства элементов и системы, но и предсказывать возможные элементы и свойства системной совокупности.

Попытки разработать общие принципы системного подхода были предприняты врачом, философом и экономистом А.А. Богдановым (1873–1928) в работе «Всеобщая организационная наука (тектология)» [1]. Исследования, проведенные уже в наши дни, показали, что важные идеи и принципы кибернетики, сформулированные Н. Винером и особенно У. Росс Эшби, значительно раньше, хотя и в несколько иной форме, были выражены Богдановым. В еще большей мере это относится к общей теории систем (ОТС) Л. фон Берталанфи [2], идейная часть которой во многом предвосхищена автором тектологии. Тектология (греч. – строитель) – весьма оригинальная общенаучная концепция, исторически первый развернутый вариант ОТС. Ее созданием автор хотел бросить вызов марксизму, выдвинув в противовес ему концепцию, которая претендует на универсальность. Для построения тектологии используется материал самых различных наук, в первую очередь естественных. Анализ этого материала приводит к выводу о существовании единых структурных связей и закономерностей, общих для самых разнородных явлений. Основная идея тектологии – признание необходимости

подхода к любому явлению со стороны его организованности (у других авторов – системности). Под организованностью понимается свойство целого быть больше суммы своих частей. Чем больше целое разнится от суммы своих частей, тем больше оно организовано. Тектология рассматривает все явления как непрерывные процессы организации и дезорганизации. Принципы организованности и динамичности тесно связаны с принципом целостного рассмотрения отдельных явлений и всего мира вообще. ОТС и тектология – это две науки об организованности, системности явлений, кибернетика же – наука об управлении этими объектами. Тектология как общая теория включает в сферу своего внимания не только кибернетические принципы, т. е. принципы управления систем, но и вопросы их субординации (иерархических порядков), их распада и возникновения, обмена со средой и веществом и т.д. Австрийский биолог и философ Л. Фон Берталанфи (1901–1972) первым из западных ученых разработал концепцию организма как открытой системы и сформулировал программу построения ОТС. В своей теории он обобщил принципы целостности, организации, эквифинальности (достижения системой одного и того же конечного состояния при различных начальных условиях) и изоморфизма. Начиная со своих первых работ, Л. Берталанфи проводит мысль о неразрывности естественно-научного (биологического) и философского (методологического) исследований. Сначала была создана теория открытых систем, граничащая с современной физикой, химией и биологией. Классическая термодинамика исследовала лишь закрытые системы, т. е. не обменивающиеся веществом с внешней средой и имеющие обратимый характер. Попытка применения классической термодинамики к живым организмам (начало XX в.) показала, что, хотя при рассмотрении органических явлений использование физико-химических принципов имеет большое значение, так как в организме имеются системы, находящиеся в равновесии (характеризующимся минимумом свободной энергии и максимумом энтропии), однако сам организм не может рассматриваться как закрытая система в состоянии равновесия, ибо он не является таковым.

Организм представляет собой открытую систему, остающуюся постоянной при непрерывном изменении входящих в нее веществ и энергии (так называемое состояние подвижного равновесия). В 1940–50 гг. Л. Берталанфи обобщил идеи, содержащиеся в теории открытых систем, и выдвинул программу построения ОТС, являющейся всеобщей теорией организации. Проблемы организации, целостности, направленности, телеологии, саморегуляции, динамического взаимодействия весьма актуальны и для современной физики, химии, физической химии и технологии, а не только для биологии, где подобные проблемы встречаются повсюду. Пока что такие понятия были чужды классической физике. Если до сих пор унификацию наук видели обычно в сведении всех наук к физике, то, с точки зрения Л. Берталанфи, единая концепция мира может быть, скорее, основана на изоморфизме законов в различных областях. В результате он приходит к концепции синтеза наук, которую и противоположность редукционизму (т. е. сведению всех наук к физике) называет перспективизмом. Построенная теория организации является специальной научной дисциплиной. Вместе с тем она выполняет определенную методологическую функцию. В силу общего характера исследуемого предмета (системы) ОТС дает возможность охватить одним формальным аппаратом обширный круг специальных систем. Благодаря этому она может освободить ученых от массового дублирования работ, экономя астрономические суммы денег и времени. К числу недостатков ОТС Л. Берталанфи относятся неполное определение понятия «система», отсутствие особенностей саморазвивающихся систем и теоретического исследования связи, а также условий, при которых система модифицирует свои формы. Но основной методологический недостаток его теории заключается в утверждении автора о том, что она выполняет роль философии современной науки, формируя философски обобщенные принципы и методы научного исследования. В действительности это не так. Ибо для философского учения о методах исследования необходимы совершенно иные (новые) исходные понятия и иная направленность анализа: абстрактное и конкретное

специфически мысленное знание, связь знаний, аксиоматическое построение знаний и др., что отсутствует в ОТС. Однако, учитывая большое методологическое значение работы Л. Берталани, рассмотрим различные направления в разработке теории систем. В соответствии с его взглядами, системная проблематика сводится к ограничению применения традиционных аналитических процедур в науке. Обычно системные проблемы выражаются в полуметафизических понятиях и высказываниях, подобных, например, понятию «эмерджентная эволюция» или утверждению «целое больше суммы его частей», однако они имеют вполне определенное операционное значение. При применении «аналитической процедуры» некоторая исследуемая сущность разлагается на части, и, следовательно, затем она может быть оставлена или воссоздана из собранных вместе частей, причем эти процессы возможны как мысленно, так и материально. Это основной принцип «классической» науки, который может осуществляться различными путями: разложением исследуемого явления на отдельные причинные цепи, поисками «атомарных» единиц в различных областях науки и т. д. Научный прогресс показывает, что этот принцип классической науки, впервые сформулированный Галилеем и Декартом, приводит к большим успехам при изучении широкой сферы явлений. Однако следует отметить, что эти классические методы построены и в большой степени вытекают из принципа идеализации, что не всегда соответствует реальным состояниям и процессам. Таким образом возникают проблемы адекватности при описании реальных систем.

Существуют различные подходы к таким проблемам. Если оставить в стороне подходы в прикладных системных наследованиях, таких как системотехника, исследование операций, линейное и нелинейное программирование и т.д., то наиболее важными являются следующие подходы [3]:

- *«Классическая» теория систем.* Эта теория использует классическую математику и имеет цели: установить принципы, применимые к системам вообще или к их определенным подклассам (например, к закрытым и открытым системам); разработать средства для их исследования и описания и применить эти средства к конкретным случаям. Учитывая достаточную общность получаемых результатов, можно утверждать, что некоторые формальные системные свойства относятся к любой сущности, которая является системой (к открытым системам, иерархическим системам и т.д.), даже если ее особая природа, части, отношения и т.д., не известны или не исследованы. Примерами могут служить: обобщенные принципы кинетики, применимые, в частности, к популяциям молекул или биологических существ, к химическим и биологическим системам; уравнения диффузии, используемые в физической химии и для анализа распространения слухов; понятия устойчивого равновесия и модели статистической механики, применимые к транспортным потокам; аллометрический анализ биологических и социальных систем.
- *Использование вычислительных машин и моделирование.* Системы дифференциальных уравнений, применяемые для «моделирования» или спецификации систем, обычно требуют много времени для решения, даже если они линейны и содержат немного переменных; нелинейные системы уравнений разрешимы только в некоторых частных случаях. По этой причине с использованием вычислительных машин открылся новый подход к системным исследованиям. Дело не только в значительном облегчении необходимых вычислений, которые иначе потребовали бы недопустимых затрат времени и энергии, и замене математической изобретательности заранее установленными последовательностями операций. Важно еще и то, что при этом открывается доступ в такие

области, где в настоящее время отсутствует соответствующая математическая теория и нет удовлетворительных способов решения. Так, с помощью вычислительных машин могут анализировать системы, по своей сложности далеко превосходящие возможности традиционной математики; с другой стороны, вместо лабораторного эксперимента можно воспользоваться моделированием на вычислительной машине и построенная таким образом модель затем может быть проверена в реальном эксперименте. Таким способом Б. Гесс, например, рассчитал 14-звенную цепь реакций гликолиза в клетке на модели, содержащей более 100 нелинейных дифференциальных уравнений. Подобный анализ стал обычным делом в экономических разработках, при исследовании рынка и т. д.

- *Теория ячеек.* Одним из аспектов системных исследований, который следует выделить, поскольку эта область разработана чрезвычайно подробно, является теория ячеек, изучающая системы, составленные из подъединиц с определенными граничными условиями, причем между этими подъединицами имеют место процессы переноса. Такие ячейечные системы могут иметь, например, «цепную» или «сосковую» структуру (цепь ячеек или центральную ячейку, сообщающуюся с рядом периферийных ячеек). Вполне понятно, что при наличии в системе трех и более ячеек математические трудности становятся чрезвычайно большими. В этом случае анализ возможен лишь благодаря использованию преобразований Лапласа и аппарата теорий сетей и графов. Современным развитием этого подхода может служить *теория клеточных автоматов и теория перколяции*.
- *Теория графов.* Многие системные проблемы относятся к структурным и топологическим свойствам систем, а не к их количественным отношениям. В этом случае используется несколько различных подходов. В теории графов, особенно в теории

ориентированных графов (диграфов), изучаются реляционные структуры, представляемые в топологическом пространстве. Эта теория применяется для исследования реляционных аспектов биологии. В формально-логическом смысле она связана с матричной алгеброй, но своими моделями – с тем разделом теории ячеек, в котором рассматриваются системы, содержащие частично «проницаемые» подсистемы, а вследствие этого – с теорией открытых систем.

- *Кибернетика.* В основе кибернетики, т.е. теории систем управления, лежит связь (передача информации) между системой и средой и внутри системы, а также управление (обратная связь) функциями системы относительно среды. Кибернетические модели допускают широкое применение, но их нельзя отождествлять с теорией систем вообще. В биологии и других фундаментальных науках кибернетические модели позволяют описывать формальную структуру механизмов регуляции, например, при помощи блок-схем и графов потоков. Использование кибернетических моделей позволяет установить структуру регуляции системы даже в том случае, когда реальные механизмы остаются неизвестными и система представляет собой «черный ящик», определяемый только его входом и выходом. Таким образом, одна и та же кибернетическая схема может применяться к гидравлическим, электрическим, физиологическим и другим системам. Тщательно разработанная техническая теория сервомеханизмов применяется естественным системам в ограниченном объеме.
- *Теория информации.* По К. Шеннону, математическое выражение для понятия информации изоморфно выражению для энтропии в термодинамике. Считается, что понятие информации можно использовать в качестве меры организации. Хотя теория информации

имеет большое значение для техники связи, ее применение в науке весьма незначительно. Главной проблемой остается выяснение отношения между информацией и организацией, между теорией информации и термодинамикой.

- *Теория автоматов.* Это так называемая теория абстрактных автоматов, имеющих вход, выход, иногда способных действовать методом проб и ошибок и обучаться. Общей моделью теории автоматов является машина Тьюринга, которая представляет собой абстрактную машину, способную печатать (или стирать) на ленте конечной длины цифры 1 и 0. Можно показать, что любой сколь угодно сложный процесс может моделироваться машиной Тьюринга, если этот процесс можно выразить конечным числом операций. В свою очередь, то, что возможно логически (т.е. в алгоритмическом символизме), может также быть сконструировано – в принципе, но не всегда практически – автоматом (т. е. алгоритмической машиной).
- *Теория игр.* Несмотря на то, что теория игр несколько отличается от других рассмотренных системных подходов, все же ее можно поставить в ряд наук о системах. В ней рассматривается поведение «рациональных» игроков, пытающихся достичь максимальных выигрышей и минимальных потерь за счет применения соответствующих стратегий в игре с соперником (или природой). Следовательно, теория игр рассматривает системы, включающие антагонистические силы. С теорией игр непосредственно связана *теория решений*. Эта математическая теория изучает условия выбора между альтернативными возможностями.
- *Теория очередей.* Рассматривает оптимизацию обслуживания при массовых запросах.

Несмотря на неоднородность и явную неполноту проведенного рассмотрения, отсутствие достаточной четкости в различении моделей (например, моделей открытой системы, цепи обратной связи) и математических формализмов (например, формализмов теорий множеств, графов, игр), такое перечисление позволяет показать, что существует целый ряд подходов к исследованию систем, а некоторые из них обладают мощными математическими методами. Проведение системных исследований означает прогресс в анализе проблем, которые ранее не изучались, считались выходящими за пределы науки или чисто философскими. Хорошо известно, что проблема соответствия между моделью и реальностью чрезвычайно сложна и применение математических методов не всегда возможно для получения адекватных результатов исследования. Несмотря на то что математические модели обладают важными достоинствами – четкостью, возможностью строгой дедукции, проверяемостью и т.д., – не следует отказываться от использования моделей, сформулированных в обычном языке. Вербальная модель лучше, чем отсутствие модели вообще или математическая модель, которая при насильственном насаждении фальсифицирует реальность. Многие теории, получившие огромное влияние в науке, являются нематематическими по своему характеру (например, психоаналитическая теория), а в других случаях лежащие в их основе математические конструкции осознаются позднее и охватывают лишь отдельные аспекты соответствующих эмпирических данных (как в теории отбора). Математика, по сути дела, сводится к установлению алгоритмов, которые более точны, чем алгоритмы обычного языка. История науки свидетельствует о том, что описание проблем на обычном языке часто предшествует их математической формулировке, т.е. отысканию алгоритма. Приведем несколько хорошо известных примеров: знаки, используемые для обозначения чисел и счета, эволюционировали от слов естественного языка к римским цифрам (полувербальным, несовершенным, полуалгебраическим) и далее – к арабской численной символике, в которой важное значение имеет

положение знака; уравнения первоначально формулировались в словесной форме, затем – с использованием примитивного символизма, который мастерски применял Диофант и другие основатели алгебры, и, наконец, в современном символизме; для многих теорий, например для теории Дарвина, математические основы определяются значительно позднее, чем создаются. Вероятно, лучше иметь сначала какую-то нематематическую модель со всеми ее недостатками, но охватывающую некоторый не замеченный ранее аспект исследуемой реальности и позволяющую надеяться на последующую разработку соответствующего алгоритма, чем начинать со скороспелых математических моделей. Таким образом, модели, выраженные в обычном языке, оставляют себе место в теории систем. Идея системы сохраняет значение даже там, где ее нельзя сформулировать математически или где она остается скорее направляющей идеей, чем математической конструкцией. Как мы видели ранее, в рамках системного подхода существуют и механистические, и организмические тенденции и модели, пытающиеся познать системы либо с помощью таких понятий, как «анализ», «линейная (включая круговую) причинность», «автомат» и т.д., либо при помощи понятий «целостность», «взаимодействие», «динамика» и им подобных. Эти два типа моделей не исключают друг друга и даже могут использоваться для описания одних и тех же явлений. Прикладная область общей теории систем включает, согласно Берталанфи [2]: 1) системотехнику; 2) исследование операций; 3) инженерную психологию.

2. Основные понятия системного анализа: определения

2.1 Определение системного анализа

Системный анализ – это научная дисциплина, занимающаяся проблемами принятия решений в условиях анализа большего количества информации различной природы. Целью применения системного анализа является

повышение степени обоснованности принимаемого решения, расширение множества вариантов, среди которых производится обоснованный выбор. В максимально упрощенном виде системный анализ – это некоторая методика, позволяющая при принятии решения не упустить из рассмотрения важные стороны и связи изучаемого объекта, процесса, явления. Одной из основных задач системного анализа является выявление проблем, их изучение и формулирование целей, и это зачастую оказывается более трудной задачей, чем последующий выбор лучшего решения. Важное место в системном анализе занимают и проблемы организации, в том числе проблемы управления в иерархических системах, перестройки структур систем и др. Задача уяснения проблем и целей может быть успешно решена при совместной работе специалистов в соответствующей отрасли науки, производства и математиков – системных аналитиков. Другой основной задачей системного анализа является выбор лучшего для достижения цели решения, что, в свою очередь, предполагает наиболее полное перечисление возможных вариантов решения – альтернатив, среди которых и ищется наилучшее решение. Для этого в системном анализе разрабатываются методы выбора решения и обоснования критериев, характеризующих качество решения. Системные исследования – вся совокупность научных и технических проблем, которые при всей их специфике и разнообразии сходны в понимании и рассмотрении исследуемых ими объектов как систем, т. е. множества взаимосвязанных элементов, выступающих в виде единого целого. Соответственно этому системный подход – эксплицитное (разъяснительное) выражение процедур представления объектов как систем и способов их описания, объяснения, предвидения, конструирования и т. д. Общая теория систем, таким образом, выступает в этом случае как обширный комплекс научных дисциплин. Следует, однако, отметить, что при таком истолковании в известной мере теряется определенность задач теории систем и ее содержания. Строго научной концепцией (с соответствующим аппаратом, средствами и т.д.) можно считать лишь общую теорию систем в узком смысле. Что же касается

общей теории систем в широком смысле, то она или совпадает с общей теорией систем в узком смысле (один аппарат, одни исследовательские средства и т.д.), или представляет собой действительное расширение и обобщение общей теории систем в узком смысле и аналогичных дисциплин, однако тогда встает вопрос о развернутом представлении ее средств, методов, аппарата и т.д. Без ответа на этот вопрос общая теория систем в широком смысле фактически остается лишь некоторым проектом (пусть даже очень заманчивым) и вряд ли может быть развита в строгую научную теорию. В системном анализе используется современный математический аппарат и вычислительные системы, однако для описания сложных систем, в том числе предсказания их поведения, оказывается невозможным опираться только на строгие математические методы. Поэтому в системном анализе используются неформальные процедуры – рациональные рассуждения различной природы, и одной из центральных методологических проблем системного анализа, возникающей при изучении сложных систем, является объединение формальных и неформальных методов анализа и синтеза. Основным инструментом, обеспечивающим это объединение, являются имитационные модели, созданные на базе ЭВМ.

2.2 Понятие системы и системности.

Принцип системности – это проявление имеющего исторические традиции системообразующего начала, стремления представить знания в виде некоторой непротиворечивой системы. Непосредственно из принципа системности вытекает системный подход, являющийся общей методологией системных исследований, которая может быть, в свою очередь, представлена в виде набора методологических подходов (принципов) к исследованию системы. При системном подходе система является объектом исследования. Существует много определений системы:

1. Система есть комплекс элементов, находящийся во взаимодействии.
2. Система – это множество объектов вместе с отношениями этих объектов.
3. Система – множество элементов, находящихся в отношениях или связях друг с другом, образующая целостность или органическое единство (толковый словарь) Термины «отношение» и «взаимодействие» используются в самом широком смысле, включая весь набор родственных понятий таких как ограничение, структура, организационная связь, соединение, зависимость и т.д.

Таким образом, система S представляет собой упорядоченную пару $S = (A, R)$, где A – множество элементов; R – множество отношений между A . Система – это полный, целостный набор элементов (компонентов), взаимосвязанных и взаимодействующих между собой так, чтобы могла реализоваться функция системы.

Исследование объекта как системы предполагает использование ряда систем, представлений (категорий) среди которых основными являются:

- 1) Структурное представление связано с выделением элементов системы и связей между ними.
- 2) Функциональное представление систем – выделение совокупности функций (целенаправленных действий) системы и её компонентов направленное на достижение определённой цели.
- 3) Макроскопическое представление – понимание системы как нерасчленимого целого, взаимодействующего с внешней средой.
- 4) Микроскопическое представление основано на рассмотрении системы как совокупности взаимосвязанных элементов. Оно предполагает раскрытие структуры системы.

- 5) Иерархическое представление основано на понятии подсистемы, получаемом при разложении (декомпозиции) системы, обладающей системными свойствами, которые следует отличать от её элемента – неделимого на более мелкие части (с точки зрения решаемой задачи). Система может быть представлена в виду совокупностей подсистем различных уровней, составляющую системную иерархию, которая замыкается снизу только элементами.
- 6) Процессуальное представление предполагает понимание системного объекта как динамического объекта, характеризующегося последовательностью его состояний во времени.

2.3 Онтология системности

Рассмотрим определения других понятий, тесно связанных с системой и ее характеристиками.

Объект. Объектом познания является часть реального мира, которая выделяется и воспринимается как единое целое в течение длительного времени. Объект может быть материальным и абстрактным, естественным и искусственным. Реально объект обладает бесконечным набором свойств различной природы. Практически в процессе познания взаимодействие осуществляется с ограниченным множеством свойств, лежащих в пределах возможности их восприятия и необходимости для цели познания. Поэтому система как образ объекта задаётся на конечном множестве отобранных для наблюдения свойств.

Внешняя среда. Понятие «система» возникает там и тогда, где и когда мы материально или умозрительно проводим замкнутую границу между неограниченным или некоторым ограниченным множеством элементов. Те элементы с их соответствующей взаимной обусловленностью, которые попадают внутрь, – образуют систему. Те элементы, которые остались за пределами границы, образуют множество, называемое в теории систем

«системным окружением» или просто «окружением», или «внешней средой». Из этих рассуждений вытекает, что нелегко рассматривать систему без её внешней среды. Система формирует и проявляет свои свойства в процессе взаимодействия с окружением, являясь при этом ведущим компонентом этого воздействия. В зависимости от воздействия на окружение и характер взаимодействия с другими системами функции систем можно расположить по возрастающему рангу следующим образом:

- пассивное существование; – материал для других систем; – обслуживание систем более высокого порядка; – противостояние другим системам (выживание);
- поглощение других систем (экспансия);
- преобразование других систем и сред (активная роль).

Всякая система может рассматриваться, с одной стороны, как подсистема более высокого порядка (надсистемы), а с другой, как надсистема системы более низкого порядка (подсистема). Например, система «производственный цех» входит как подсистема в систему более высокого ранга – «предприятие». В свою очередь, надсистема «предприятие» может являться подсистемой «корпорации». Обычно в качестве подсистем фигурирует более или менее самостоятельные части систем, выделяемые по определённым признакам, обладающие относительной самостоятельностью, определённой степенью свободы.

Компонент – любая часть системы, вступающая в определённые отношения с другими частями (подсистемами, элементами).

Элемент - часть системы с однозначно определёнными свойствами, выполняющая определённые функции и не подлежащая дальнейшему разбиению в рамках решаемой задачи (с точки зрения исследователя). Понятие элемент, подсистема, система взаимопреобразуемы, система может рассматриваться как элемент системы более высокого порядка (метасистема),

а элемент при углубленном анализе, как система. То обстоятельство, что любая подсистема является одновременно и относительно самостоятельной системой приводит к двум аспектам изучения систем: на макро- и микроуровнях. При изучении на макроуровне основное внимание уделяется взаимодействию системы с внешней средой. Причём системы более высокого уровня можно рассматривать как часть внешней среды. При таком подходе главными факторами являются целевая функция системы (цель), условия её функционирования. При этом элементы системы изучаются с точки зрения организации их в единое целое, влияние на функции системы в целом. На микроуровне основными становятся внутренние характеристики системы, характер взаимодействия элементов между собой, их свойства и условия функционирования. Для изучения системы сочетаются оба компонента.

Структура системы. Под структурой системы понимается устойчивое множество отношений, которое сохраняется длительное время неизменным, по крайней мере в течение интервала наблюдения. Структура системы опережает определенный уровень сложности по составу отношений на множестве элементов системы или что эквивалентно, уровень разнообразия проявлений объекта.

Связи – это элементы, осуществляющие непосредственное взаимодействие между элементами (или подсистемами) системы, а также с элементами и подсистемами окружения. Связь – одно из фундаментальных понятий в системном подходе. Система как единое целое существует именно благодаря наличию связей между её элементами, т.е., иными словами, связи выражают законы функционирования системы. Связи различают по характеру взаимосвязи как прямые и обратные, а по виду проявления (описания) как детерминированные и вероятностные. *Прямые связи* предназначены для заданной функциональной передачи вещества, энергии, информации или их комбинаций – от одного элемента к другому в направлении основного процесса. *Обратные связи*, в основном, выполняют осведомляющие функции,

отражая изменение состояния системы в результате управляющего воздействия на нее. Открытие принципа обратной связи явилось выдающимся событием в развитии техники и имело исключительно важные последствия. Процессы управления, адаптации, саморегулирования, самоорганизации, развития невозможны без использования обратных связей.

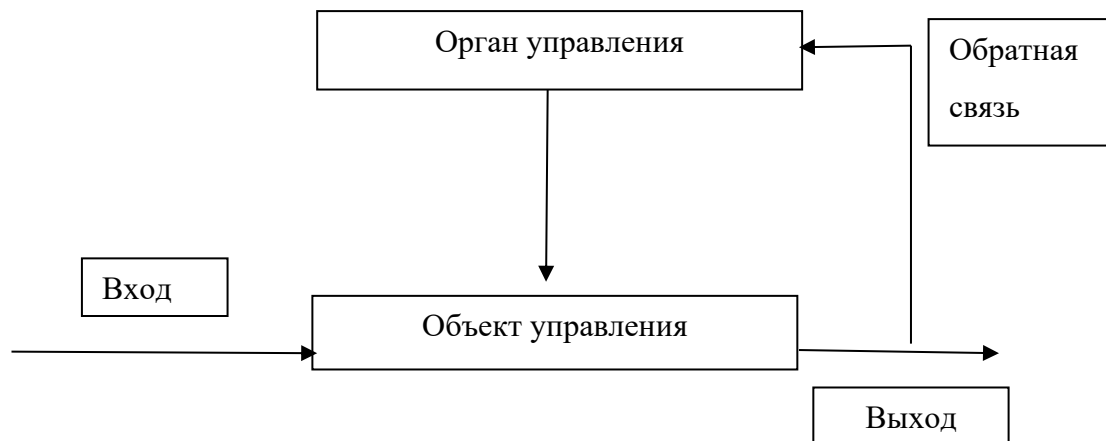


Рис. 1 Схема системы управления с обратной связью

С помощью обратной связи сигнал (информация) с выхода системы (объекта управления) передается в орган управления. Здесь этот сигнал, содержащий информации о работе, выполненной объектом управления, сравнивается с сигналом, задающим содержание и объем работы (например, план). В случае возникновения рассогласования между фактическим и плановым состоянием работы принимаются меры по его устранению. Основными функциями обратной связи являются: – противодействие тому, что делает сама система, когда она выходит за установленные пределы (например, реагирование на снижение качества); – компенсация возмущений и поддержание состояния устойчивого равновесия системы (например, неполадки в работе оборудования); – синтезирование внешних и внутренних возмущений, стремящихся вывести систему из состояния устойчивого равновесия, сведение этих возмущений к отклонениям одной или нескольких управляемых величин (например, выработка управляющих команд на одновременное появление

нового конкурента и снижение качества выпускаемой продукции); – выработка управляющих воздействий на объект управления по плохо формализуемому закону. Например, установление более высокой цены на энергоносители вызывает в деятельности различных организаций сложные изменения, меняют конечные результаты их функционирования, требуют внесения изменений в производственно-хозяйственный процесс путем воздействий, которые невозможно описать с помощью аналитических выражений.

2.4 Состояния и основные свойства системы

Итак, состоянием системы называется совокупность существенных свойств, которыми система обладает в каждый момент времени. Под свойством понимают сторону объекта, обуславливающую его отличие от других объектов или сходство с ними и проявляющуюся при взаимодействии с другими объектами. Рассмотрим основные свойства, характеризующие состояния системы.

- **Эмерджентность** (от англ. emerge – возникать, появляться) - степень несводимости свойств системы к свойствам элементов, из которых она состоит. Это свойство систем, обуславливающее появление новых свойств и качеств, не присущих элементам, входящих в состав системы. Эмерджентность – принцип противоположный редукционизму, который утверждает, что целое можно изучать, расчленив его на части и затем, определяя их свойства, определить свойства целого. Свойству эмерджентности близко свойство целостности системы. Однако их нельзя отождествлять
- **Целостность** - главное свойство системы проявляется как единство, достигаемое посредством определенных взаимосвязей и взаимодействий элементов системы и проявляющиеся в возникновении новых свойств, которыми элементы системы не обладают. Целостность

системы означает, что каждый элемент системы вносит вклад в реализацию целевой функции системы. Целостность и эмерджентность – интегративные свойства системы. Наличие интегративных свойств является одной из важнейших черт системы. Целостность проявляется в том, что система обладает собственной закономерностью функциональности, собственной целью.

- **Организованность** – сложное свойство систем, заключающиеся в наличие структуры и функционирования (поведения). Непременной принадлежностью систем является их компоненты, именно те структурные образования, из которых состоит целое и без чего оно не возможно.
- **Функциональность** – это проявление определенных свойств (функций) при взаимодействии с внешней средой. Здесь же определяется цель (назначение системы) как желаемый конечный результат.
- **Структурность** – это упорядоченность системы, определенный набор и расположение элементов со связями между ними. Между функцией и структурой системы существует взаимосвязь, как между философскими категориями содержанием и формой. Изменение содержания (функций) влечет за собой изменение формы (структуры), но и наоборот.
- **Надёжность** – это свойство сохранения структуры систем, несмотря на гибель отдельных её элементов с помощью их замены или дублирования, а живучесть – как активное подавление вредных качеств. Таким образом, надежность является более пассивной формой, чем живучесть.
- **Адаптируемость.** – это свойство изменять поведение или структуру с целью сохранения, улучшения или приобретение новых качеств в условиях изменения внешней среды. Обязательным условием возможности адаптации является наличие обратных связей.

Всякая реальная система существует в среде. Связь между ними бывает настолько тесной, что определять границу между ними становится сложно. Поэтому выделение системы из среды связано с той или иной степенью идеализации. Можно выделить два аспекта взаимодействия:

- а) содействие (кооперация) - во многих случаях принимает характер обмена между системой и средой (веществом, энергией, информацией);
- б) противодействие (антагонизм) - среда обычно является источником неопределенности для систем. Воздействие среды может быть пассивным либо активным (антагонистическим, целенаправленно противодействующее системе). Поэтому в общем случае среду следует рассматривать не только безразличную, но и антагонистическую по отношению к исследуемой системе.

2.5 Классификация систем

Классификацией называется разбиение на классы по наиболее существенным признакам. Под классом понимается совокупность объектов, обладающие некоторыми признаками общности. Признак (или совокупность признаков) является основанием (критерием) классификации. Система может быть охарактеризована одним или несколькими признаками и соответственно ей может быть найдено место в различных классификациях, каждая из которых может быть полезной при выборе методологии исследования. Обычно цель классификации ограничить выбор подходов к отображению систем, выработать язык описания, подходящий для соответствующего класса. По содержанию различают реальные (материальные), объективно существующие, и абстрактные (концептуальные, идеальные), являющиеся продуктом мышления. Реальные системы делятся на естественные (природные системы) и искусственные (антропогенные). Естественные

системы: системы неживой (физические, химические) и живой (биологические) природы. Искусственные системы: создаются человечеством для своих нужд или образуются в результате целенаправленных усилий. Искусственные делятся на технические (техничко-экономические) и социальные (общественные). Техническая система спроектирована и изготовлена человеком в определенных целях. К социальным системам относятся различные системы человеческого общества. Выделение систем, состоящих из одних только технических устройств почти всегда условно, поскольку они не способны вырабатывать свое состояние. Эти системы выступают как части более крупных, включающие людей – организационно-технических систем. Ниже приведена таблица классификации систем по различным критериям [3].

Таблица 1. Классы систем по различным основаниям классификации

Основания (критерии) классификации	Классы систем
По взаимодействию с внешней средой	Открытые
	Закрытые
	Комбинированные
По структуре	Простые
	Сложные
	Большие
По характеру функций	Специализированные
	Многофункциональные (универсальные)
По характеру развития	Стабильные
	Развивающиеся

По степени организованности	Хорошо организованные
	Плохо организованные (диффузные)
По сложности поведения	Автоматические
	Решающие
	Самоорганизующиеся
	Предвидящие
	Превращающиеся
По характеру связи между элементами	Детерминированные
	Стохастические
По характеру структуры управления	Централизованные
	Децентрализованные
По назначению	Производящие
	Управляющие
	Обслуживающие

Организационная система, для эффективного функционирования которой существенным фактором является способ организации взаимодействия людей с технической подсистемой, называется человеко-машинной системой. Примеры человеко-машинных систем: автомобиль – водитель; самолет – летчик; ЭВМ – пользователь и т.д. Таким образом, под техническими системами понимают единую конструктивную совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих объектов, предназначенная для целенаправленных действий с задачей достижения в процессе функционирования заданного результата. Отличительными признаками

технических систем по сравнению с произвольной совокупностью объектов или по сравнению с отдельными элементами является конструктивность (практическая осуществимость отношений между элементами), ориентированность и взаимосвязанность составных элементов и целенаправленность. Для того чтобы система была устойчивой к воздействию внешних влияний, она должна иметь устойчивую структуру. Выбор структуры практически определяет технический облик как всей системы, так ее подсистем, и элементов. Вопрос о целесообразности применения той или иной структуры должен решаться исходя из конкретного назначения системы. От структуры зависит также способность системы к перераспределению функций в случае полного или частичного отхода отдельных элементов, а, следовательно, надежность и живучесть системы при заданных характеристиках ее элементов.

Абстрактные системы являются результатом отражения действительности (реальных систем) в мозге человека. Их настраивание – необходимая ступень обеспечения эффективного взаимодействия человека с окружающим миром. Абстрактные (идеальные) системы объективны по источнику происхождения, поскольку их первоисточником является объективно существующая действительность. Абстрактные системы разделяют на системы непосредственного отображения (отражающие определенные аспекты реальных систем) и системы генерализирующего (обобщающего) отображения. К первым относятся математические и эвристические модели, а ко вторым – концептуальные системы (теории методологического построения) и языки.

На основе понятия внешней среды системы разделяются на: открытые, закрытые (замкнутые, изолированные) и комбинированные. Деление систем на открытые и закрытые связано с их характерными признаками: возможность сохранения свойств при наличии внешних воздействий. Если система

нечувствительна к внешним воздействиям ее можно считать закрытой. В противном случае – открытой.

Открытой называется система, которая взаимодействует с окружающей средой. Все реальные системы являются открытыми. Открытая система является частью более общей системы или нескольких систем. Если вычленишь из этого образования собственно рассматриваемую систему, то оставшаяся часть – ее среда. Открытая система связана со средой определенными коммуникациями, то есть сетью внешних связей системы. Выделение внешних связей и описание механизмов взаимодействия «система-среда» является центральной задачей теории открытых систем. Рассмотрение открытых систем позволяет расширить понятие структуры системы. Для открытых систем оно включает не только внутренние связи между элементами, но и внешние связи со средой. При описании структуры внешние коммуникационные каналы стараются разделить на входные (по которым среда воздействует на систему) и выходные (наоборот). Совокупность элементов этих каналов, принадлежащих собственной системе называются входными и выходными полюсами системы. У открытых систем, по крайней мере, один элемент имеет связь с внешней средой, по меньшей мере, один входной полюс и один выходной, которыми она связана с внешней средой.

Для каждой системы связи со всеми подчиненными ей подсистемами и между последним, являются внутренними, а все остальные – внешними. Связи между системами и внешней средой также, как и между элементами системы, носят, как правило, направленный характер. Важно подчеркнуть, что в любой реальной системе в силу законов диалектики о всеобщей связи явлений число всех взаимосвязей огромно, так что учесть и исследования абсолютно все связи невозможно, поэтому их число искусственно ограничивают. Вместе с тем, учитывать все возможные связи нецелесообразно, так как среди них есть много несущественных, практически не влияющих на функционирование системы и количество полученных решений (с точки зрения решаемых задач).

Если изменение характеристик связи, ее исключение (полный разрыв) приводят к значительному ухудшению работы системы, снижению эффективности, то такая связь – существенна. Одна из важнейших задач исследователя – выделить существенные для рассмотрения системы в условиях решаемой задачи связи и отделить их от несущественных. В связи с тем, что входные и выходные полюса системы не всегда удастся четко выделить, приходится прибегать к определенной идеализации действий. Наибольшая идеализация имеет место при рассмотрении закрытой системы.

Закрытой системой называется система, которая не взаимодействует со средой или взаимодействует со средой строго определенным образом. В первом случае предполагается, что система не имеет входных полюсов, а во втором, что входные полюса есть, но воздействие среды носит неизменный характер и полностью (заранее) известно. Очевидно, что при последнем предположении указанные воздействия могут быть отнесены собственно к системе, и ее можно рассматривать, как закрытую. Для закрытой системы, любой ее элемент имеет связи только с элементами самой системы. Разумеется, закрытые системы представляют собой некоторую абстракцию реальной ситуации, так как, строго говоря, изолированных систем не существует. Однако, очевидно, что упрощение описания системы, заключающееся в отказе от внешних связей, может привести к полезным результатам, упростить исследование системы. Все реальные системы, если они тесно или слабо связаны с внешней средой – открытые. Если временный разрыв или изменение характерных внешних связей не вызывает отклонения в функционировании системы сверх установленных заранее пределов, то система связана с внешней средой слабо. В противном случае – тесно.

Комбинированные системы содержат открытые и закрытые подсистемы. Наличие комбинированных систем свидетельствует о сложной комбинации открытой и закрытой подсистем. В зависимости от структуры и

пространственно-временных свойств системы делятся на простые, сложные и большие.

Простые системы – системы, не имеющие разветвленных структур, состоящие из небольшого количества взаимосвязей и небольшого количества элементов. Такие элементы служат для выполнения простейших функций, в них нельзя выделить иерархические уровни. Отличительной особенностью простых систем является детерминированность (четкая определенность) номенклатуры, числа элементов и связей как внутри системы, так и со средой.

Сложные системы – характеризуются большим числом элементов и внутренних связей, их неоднородностью и разнокачественностью, структурным разнообразием, выполняют сложную функцию или ряд функций. Компоненты сложных систем могут рассматриваться как подсистемы, каждая из которых может быть детализирована еще более простыми подсистемами и т.д. до тех пор, пока не будет получен элемент. Следует отметить, что не существует однозначного определения сложности

Определение N1[3] : система называется сложной (с гносеологических позиций), если ее познание требует совместного привлечения многих моделей теорий, а в некоторых случаях многих научных дисциплин, а также учета неопределенности вероятностного и невероятностного характера. Наиболее характерным проявлением этого определения является многомодельность

Определение N2: система называется сложной (с физико-математических позиций, согласно теореме А. Н. Тихонова [4]), если в её описании дифференциальными уравнениями существует несколько временных масштабов. Тогда отношения этих временных масштабов порождают малые параметры. Примером могут служить задачи с пограничным слоем в гидродинамике, задачи с краевыми эффектами в механике деформируемого твердого тела и т.д.

Определение N3: систему называют сложной если в реальной действительности существенно проявляются признаки ее сложности. А именно:

- структурная сложность – определяется по числу элементов системы, числу и разнообразию типов связей между ними, количеству иерархических уровней и общему числу подсистем системы. Основными типами считаются следующие виды связей: структурные (в том числе, иерархические), функциональные, каузальные (причинно-следственные), информационные, пространственно-временные;
- сложность функционирования (поведения) – определяется характеристиками множества состояний, правилами перехода из одного состояния в другое состояние, воздействие системы на среду и среды на систему, степень неопределенности перечисленных характеристик и правил;
- сложность выбора поведения – в многоальтернативных ситуациях, когда выбор поведения определяется целью системы, гибкостью реакций на заранее неизвестные воздействия среды;
- сложность развития – определяемая характеристиками эволюционных или скачкообразных процессов.

Естественно, что все признаки рассматриваются во взаимосвязи. Иерархическое построение – характерный признак сложных систем, при этом уровни иерархии могут быть как однородные, так и неоднородные. Для сложных систем присущи такие факторы, как невозможность предсказать их поведение, то есть слабо предсказуемость, их скрытность, разнообразные состояния. Сложные системы можно подразделить на следующие факторные подсистемы:

- решающую, которая принимает глобальные решения во взаимодействии с внешней средой и распределяет локальные задания между всеми другим подсистемами;
- информационную, которая обеспечивает сбор, переработку и передачу информации, необходимой для принятия глобальных решений и выполнения локальных задач; управляющую для реализации глобальных решений;
- гомеостазную, поддерживающую динамическое равновесие внутри систем и регулирующую потоки энергии и вещества в подсистемах;
- адаптивную, накапливающую опыт в процессе обучения для улучшения структуры и функций системы.

Большой системой называют систему, ненаблюдаемую одновременно с позиции одного наблюдателя во времени или в пространстве, для которой существенен пространственный фактор, число подсистем которой очень велико, а состав разнороден. Система может быть и большой, и сложной. Сложные системы объединяет более обширную группу систем, то есть большие – подкласс сложных систем. Основополагающими при анализе и синтезе больших и сложных систем являются процедуры декомпозиции и агрегирования.

Декомпозиция – разделение систем на части, с последующим самостоятельным рассмотрением отдельных частей. Очевидно, что декомпозиция представляет собой понятие, связанное с моделью, так как сама система не может быть расчленена без нарушений свойств. На уровне моделирования, разрозненные связи заменяются соответственно эквивалентами, либо модели систем строятся так, что разложение ее на отдельные части при этом оказывается естественным. Применительно к большим и сложным системам декомпозиция является мощным инструментом исследования.

Агрегирование является понятием, противоположным декомпозиции. В процессе исследования возникает необходимость объединения элементов системы с целью рассмотреть ее с более общих позиций. Декомпозиция и агрегирование представляют собой две противоположные стороны подхода к рассмотрению больших и сложных систем, применяемые в диалектическом единстве. Системы, для которых состояние системы однозначно определяется начальными значениями и может быть предсказано для любого последующего момента времени, называются детерминированными. Стохастические системы – системы, изменения в которых носят случайный характер. При случайных воздействиях данных о состоянии системы недостаточно для предсказания в последующий момент времени. По степени организованности: хорошо организованные, плохо организованные (диффузные). Представить анализируемый объект или процесс в виде хорошо организованной системы означает определить элементы системы, их взаимосвязь, правила объединения в более крупные компоненты. Проблемная ситуация может быть описана в виде математического выражения. Решение задачи при представлении ее в виде хорошо организованной системы осуществляется аналитическими методами формализованного представления системы.

Примеры **хорошо организованных систем**: солнечная система, описывающая наиболее существенные закономерности движения планет вокруг Солнца; отображение атома в виде планетарной системы, состоящей из ядра и электронов; описание работы сложного электронного устройства с помощью системы уравнений, учитывающей особенности условий его работы (наличие шумов, нестабильности источников питания и т. п.). Описание объекта в виде хорошо организованной системы применяется в тех случаях, когда можно предложить детерминированное описание и экспериментально доказать правомерность его применения, адекватность модели реальному процессу. Попытки применить класс хорошо организованных систем для представления сложных многокомпонентных объектов или многокритериальных задач плохо удаются: они требуют недопустимо

больших затрат времени, практически нереализуемы и неадекватны применяемым моделям.

Плохо организованные системы. При представлении объекта в виде плохо организованной или диффузной системы не ставится задача определить все учитываемые компоненты, их свойства и связи между ними и целями системы. Система характеризуется некоторым набором макропараметров и закономерностями, которые находятся на основе исследования не всего объекта или класса явлений, а на основе определенной с помощью некоторых правил выборки компонентов, характеризующих исследуемый объект или процесс. На основе такого выборочного исследования получают характеристики или закономерности (статистические, экономические) и распространяют их на всю систему в целом. При этом делаются соответствующие оговорки. Например, при получении статистических закономерностей их распространяют на поведение всей системы с некоторой доверительной вероятностью. Подход к отображению объектов в виде диффузных систем широко применяется при: описании систем массового обслуживания, определении численности штатов на предприятиях и учреждениях, исследовании документальных потоков информации в системах управления и т. д.

С точки зрения характера функций различаются **специальные, многофункциональные, и универсальные системы**. Для специальных систем характерна единственность назначения и узкая профессиональная специализация обслуживающего персонала (сравнительно несложная). Многофункциональные системы позволяют реализовать на одной и той же структуре несколько функций. Пример: производственная система, обеспечивающая выпуск различной продукции в пределах определенной номенклатуры. Для универсальных систем: реализуется множество действий на одной и той же структуре, однако состав функций по виду и количеству менее однороден (менее определен). Например, комбайн.

По характеру развития определяют 2 класса систем: **стабильные и развивающиеся**. У стабильной системы структура и функции практически не изменяются в течение всего периода ее существования и, как правило, качество функционирования стабильных систем по мере изнашивания их элементов только ухудшается. Восстановительные мероприятия обычно могут лишь снизить темп ухудшения. Отличной особенностью развивающихся систем является то, что с течением времени их структура и функции приобретают существенные изменения. Функции системы более постоянны, хотя часто и они видоизменяются. Практически неизменными остается лишь их назначение. Развивающиеся системы имеют более высокую сложность.

В порядке усложнения поведения рассматриваются: автоматические, решающие, самоорганизующиеся, предвидящие, превращающиеся системы.

Автоматические: однозначно реагируют на ограниченный набор внешних воздействий, внутренняя их организация приспособлена к переходу в равновесное состояние при выводе из него (гомеостаз).

Решающие: имеют постоянные критерии различения их постоянной реакции на широкие классы внешних воздействий. Постоянство внутренней структуры поддерживается заменой вышедших из строя элементов.

Самоорганизующиеся: имеют гибкие критерии различения и гибкие реакции на внешние воздействия, приспособляющиеся к различным типам воздействия. Устойчивость внутренней структуры высших форм таких систем обеспечивается постоянным самовоспроизводством. Самоорганизующиеся системы обладают признаками диффузных систем: стохастичностью поведения, нестационарностью отдельных параметров и процессов. К этому добавляются такие признаки, как непредсказуемость поведения; способность адаптироваться к изменяющимся условиям среды, изменять структуру при взаимодействии системы со средой, сохраняя при этом свойства целостности; способность формировать возможные варианты поведения и выбирать из них наилучший и др. Иногда этот класс разбивают на подклассы, выделяя

адаптивные или самоприспосабливающиеся системы, самовосстанавливающиеся, самовоспроизводящиеся и другие подклассы, соответствующие различным свойствам развивающихся систем. Примеры: биологические организации, коллективное поведение людей, организация управления на уровне предприятия, отрасли, государства в целом, т.е. в тех системах, где обязательно имеется человеческий фактор.

Если устойчивость по своей сложности начинает превосходить сложные воздействия внешнего мира – это **предвидящие** системы: она может предвидеть дальнейший ход взаимодействия.

Превращающиеся системы – это воображаемые сложные системы на высшем уровне сложности, не связанные постоянством существующих носителей. Они могут менять вещественные носители, сохраняя свою индивидуальность. Научные примеры таких систем пока не известны.

Систему можно разделить на виды по признакам структуры их построения и значимости той роли, которую играют в них отдельные составные части в сравнении с ролями других частей. В некоторых системах одной из частей может принадлежать доминирующая роль (ее значимость >> (символ отношения «значительного превосходства») значимость других частей). Такой компонент – будет выступать как центральный, определяющий функционирование всей системы. Такие системы называют **централизованными**.

В других системах все составляющие их компоненты примерно одинаково значимы. Структурно они расположены не вокруг некоторого централизованного компонента, а взаимосвязаны последовательно или параллельно и имеют примерно одинаковые значения для функционирования системы. Это **децентрализованные** системы.

Системы можно классифицировать по назначению. Среди технических и организационных систем выделяют: производящие, управляющие, обслуживающие.

В производящих системах реализуются процессы получения некоторых продуктов или услуг. Они в свою очередь делятся на вещественно-энергетические, в которых осуществляется преобразование природной среды или сырья в конечный продукт вещественной или энергетической природы, либо транспортирование такого рода продуктов; и информационные – для сбора, передачи и преобразования информации и предоставление информационных услуг.

Назначение **управляющих** систем – организация и управление вещественно-энергетическими и информационными процессами.

Обслуживающие системы занимаются поддержкой заданных пределов работоспособности производящих и управляющих систем.

3. Методология системного анализа

Основы научного направления при изучении, применения в исследованиях и на практике составляет методология этого направления. Методологией научного направления называют совокупность подходов и представлений о предметной области данного направления, способах формирования единства и целостности о месте и значимости научного направления в системе научного описания окружающего мира. Методология системного анализа заключается в описании принципов системных исследований и принципиальных подходов. Системные исследования – вся совокупность научных и технических проблем, которые при всей их специфике и разнообразии сходны в понимании и рассмотрении исследуемых ими объектов как систем, т. е. множества взаимосвязанных элементов, выступающих в виде единого целого.

Соответственно этому системный подход – эксплицитное (разъяснительное) выражение процедур представления объектов как систем и способов их описания, объяснения, предвидения, конструирования и т. д. Ниже мы рассмотрим структуру основных методологических принципов системного анализа.

3.1 Принцип системности

Принцип системности можно воспринимать в качестве философского принципа, выполняющего как мировоззренческие, так и методологические функции. Принцип системности предполагает представление об объекте любой природы как о совокупности элементов, находящихся в определенном взаимодействии между собой и с окружающим миром, а также понимание системной природы знаний. Системные представления о природе, ее объектах и знаниях о них имели место еще в античной философии (Платон, Аристотель). История науки характеризуется непрерывно возрастающей специализацией. Относительно простая система представлений о мире, которая позволяла ученому-энциклопедисту еще 200-300 лет назад быть в курсе всех направлений развития науки, исчезла навсегда. В XIX–XX столетиях шел интенсивный процесс обособления наук – *анализ* предметной области отдельных научных направлений. Процесс анализа представлял исследование конкретных проблем какой-либо отрасли знаний. В этом процессе научное направление становилось самостоятельной наукой. Как правило, подобное обособление диктуется необходимостью более углубленного изучения отдельных областей мироздания. Иногда это является следствием амбиций отдельной группы ученых. В любом случае наряду с положительными результатами обособление научных направлений приводит к потере общности критериев и взглядов.

Одновременно с появлением новых наук идет и обратный процесс – *процесс синтеза* знаний. Новые научные достижения возникают в результате ломки междисциплинарных границ. Идет целенаправленное агрегирование знаний и представлений, выявление концептуальной общности целого ряда, казалось бы, различных явлений. В разные периоды истории роль двух противоречивых и взаимосвязанных процессов детализации знаний и их синтеза была различной. В настоящее время важной основой совместной работы ученых различных специальностей при изучении сложнейших явлений мира, процессов развития цивилизации является создание мощных имитационных систем и разработка теории неформальных процедур. Синтезирующая роль математики в общем процессе развития знаний бесспорна. Будущее место математики не столько в совершенствовании ее традиционных разделов, сколько в дальнейшем развитии новых направлений, способных заложить основы междисциплинарных исследований на базе дискретного описания изучаемых процессов и алгоритмов, допускающих вмешательство человека. Принцип системности – это проявление имеющего исторические традиции системообразующего начала, стремления представить знания в виде некоторой непротиворечивой системы. Непосредственно из принципа системности вытекает системный подход, являющийся общей методологией системных исследований, которая может быть, в свою очередь, представлена в виде набора методологических подходов (принципов) к исследованию системы.

3.2 Системный подход – основа методологии системного анализа.

Методология системного анализа включает определение используемых понятий, общую характеристику проблемы системных исследований и системный подход – наиболее общую часть методологии прикладных исследований, её основу. В самом общем виде системный подход – это рассмотрение системы любой степени сложности как – состоящей из

отдельных связанных между собой определенными отношениями частей; – находящейся во взаимодействии с окружающей средой; – находящейся в непрерывном развитии. Приведенные выше общие положения системного подхода представляются (конкретизируются) в виде перечня принципов (подходов), применяемых при исследовании систем. Перечислим эти принципы. Непосредственно из основных положений вытекают следующие основные принципы [3]:

- 1) **Принцип единства:** совместное рассмотрение системы как единого целого и как совокупности частей (элементов).
- 2) **Принцип связности:** рассмотрение любой части системы совместно с её связями с другими частями и с окружающей средой.
- 3) **Принцип развития:** учёт изменяемости системы, её способности к развитию, замене частей, накоплению информации, при этом учитывается и динамика внешней среды, изменение взаимодействия системы с внешней средой. Следующие принципы системного подхода определяют рациональный, целенаправленный подход к рассмотрению структуры и функционирования системы [3].
- 4) **Принцип конечной (глобальной) цели:** особая ответственность за выбор глобальной цели. Вся деятельность системы должна быть в конечном счете подчинена достижению её глобальной цели, которая, в свою очередь, должна быть подчинена глобальной цели всего общества.

Цель организации определяется как состояние организации, которое необходимо, желательно достичь к определенному моменту, затратив на это определенные, ограниченные сверху ресурсы. Без ясного понимания цели любое решение может оказаться просто бессмысленным. Норма и цели. Цель не будет

понята и успешно достигнута, если она не соответствует институтам общества, т.е. формальным и неформальным нормам, существующим в обществе

Неопределенность выбора. Неопределенность выбора цели связана с наличием в сложных системах множества целей и множества критериев, а также, возможно, в первую очередь с неопределенностью динамики внешней среды. Неопределенность в предсказании состояния внешней среды следует обязательно учитывать при формировании совокупности целей и разработке способов их достижения. На неопределенность выбора также влияет следование индивидов принципу «достаточной рациональности» Саймона.

Цель и ресурсы. Выбор целей зависит от материальных, финансовых и кадровых ресурсов организации. Сравнение ресурсов, необходимых для выполнения целей, с имеющимися ресурсами приводит к выделению множества достижимых, обеспеченных ресурсами целей, из которого затем и выбираются окончательно цели.

Цели и критерии. Выбор каждой цели непосредственно определяет содержательную сущность критерия её достижения. Цель и средство достижения цели. Выбор целей производится одновременно с выбором средств достижения целей. Превращение средств в цели – болезнь века. Цели организации порой искусно подменяются целями отдельных лиц или группировок. Самый простой способ обеспечения такой подмены – как раз замена цели средством.

Цели и ценности. На формирование целей влияют субъективные представления о ценностях целей. Каждый индивид имеет свою систему ценностей, которая может не совпадать с системой ценности организации или общества. Представление

организации о ценности конкретной цели – это оценка с позиции вклада достижения конкретной цели в обеспечение желаемого состояния организации. Система ценностей общества выражается через общественное мнение и отражает выработанное обществом на определенном историческом этапе представление о глобальных целях развития человека. Система ценностей формируется опытом человека и историческим опытом общества. Системы ценностей базируются на этике и морали человеческого общества на каждом историческом этапе его развития. Известными этическими системами являются: Стоицизм, согласно которому в практической деятельности следует при достижении желаемого исходить из возможностей и реальных ограничений внешней среды. В казуистической теории основанием для выбора решений является ссылка на авторитет, выбор целей в прошлом в аналогичных задачах. В основе *утилитаризма* – оценка всех явлений с точки зрения их возможности служить средством для достижения какой-либо цели. Наибольший интерес уделяется проблеме измерения индивидуальных предпочтений и их объединению в единую меру.

Анализ целей. При выборе совокупности целей необходимо предусмотреть ряд оценок, в том числе: – проверку целей на реализуемость, выявление препятствий на пути достижения целей: экономических, технических, социальных, юридических и др.; – оценку связей целей нижнего уровня иерархии с целями более высокого уровня; – оценку непротиворечивости (в общем случае характера и степени противоречивости) целей на каждом уровне; – оценку семантической точности формулировок целей, понятных всем индивидам, имеющим отношение к цели; использование принятых определений и обозначений.

- 5) **Принцип функциональности:** совместное рассмотрение структуры системы и функций с приоритетом функций над структурой – изменение функций влечет изменение структуры. Цели определяют задачи, решение которых необходимо для достижения цели. Задачи определяют функции, обеспечивающие решение задач. В организационных системах структура (оргструктура) создается после определения набора функций. Оргструктура реализуется в виде совокупности персонала, методов, алгоритмов, технических устройств различного назначения. При появлении новых задач и соответственно функций может оказаться необходимой корректировка структуры. После создания системы возможно, при наличии квалифицированного персонала, уточнение структуры системы и отдельных функций в рамках существующих целей и задач, т.е. возможно обратное влияние структуры на функции. Зачастую организация, её структура создаются до выяснения целей и задач системы. В результате имеют место параллелизм в работе органов управления, систематические попытки улучшить работу организации путем изменения её структуры.
- 6) **Принцип децентрализации:** сочетание децентрализации и централизации. Сложные системы с полной централизацией медленнее приспосабливаются к изменениям окружающей среды. Информационные каналы в таких системах оказываются перегруженными, что приводит к запаздыванию в обработке информации, появлению ошибок и в конечном счете к снижению качества управления. Высокая степень централизации также приводит к подавлению инициативы и появлению безответственности на нижних уровнях управленческой иерархии – снижению «внутренней

активности» системы. Однако при высокой степени децентрализации затрудняется согласование решений, их направленности на достижение глобальной цели. Для обеспечения целенаправленной деятельности сильно децентрализованной системы необходимо наличие в системе специальных механизмов регуляции, не позволяющих отдельным элементам системы уклоняться в своем поведении от основной цели системы. Все это в значительной мере зависит от вида и задач системы и особенно от условий её функционирования. Оптимальное сочетание централизации и децентрализации обусловлено выполнением следующих положений: – на нижние уровни иерархии следует передавать все задачи, решение которых на этих уровнях возможно, освободив высшие уровни иерархии для решения стратегических задач; – должна быть разработана и принята система делегирования полномочий для всех уровней иерархии управления; – должны существовать механизмы контроля, исключающие принятие на нижних уровнях иерархии решений, противоречащих достижению системой глобальных целей. Реализация оптимального уровня децентрализации зачастую затруднена из-за отсутствия квалифицированного персонала. Возможно, это утверждение находится вне формальной (научной) постановки вопроса. Однако в реальных ситуациях неквалифицированность персонала явление нередкое, и не учитывать это в прикладных исследованиях недопустимо. Не является децентрализацией управление, когда принятое на верхнем уровне решение затем конкретизируется (распараллеливается) на нижних уровнях.

- 7) **Принцип модульного построения:** выделение модулей и рассмотрение системы как совокупности модулей. Модулем

называется группа элементов системы, описываемая только своим входом и выходом. Разбиение системы на взаимодействующие модули (подсистемы) зависит от цели исследования и может иметь различную основу, в том числе материальную (вещественную), функциональную, алгоритмическую, информационную и др. Примером систем, у которых при разбиении на подсистемы вещественная, функциональная и информационные основы слиты, являются системы управления оргсистемами. Разбитие системы на модули способствует более эффективной организации анализа и синтеза систем, так как оказывается возможным, абстрагируясь от второстепенных деталей, уяснить суть основных соотношений, существующих в системе и определяющих исходы системы. Вместо термина модуль зачастую используются термины «блок», «подсистема» и др.

- 8) **Принцип иерархии:** полезно введение иерархии частей и (или) их ранжирование. Иерархия свойственна всем сложным системам. Иерархия в структурах оргсистем (в оргструктурах) неоднозначно связана с характером управления в системе, степенью децентрализации управления. В линейных (древовидных иерархических) оргструктурах реализуется идея полной централизации управления. В то же время в сложных иерархически построенных системах может быть реализована любая степень децентрализации.
- 9) **Принцип свёртки информации:** информация свертывается, укрупняется при движении по ступеням иерархии снизу вверх. Информационные средства управленческих структур на каждом уровне иерархии должны обеспечить решение всего комплекса управленческих задач: анализ ситуации, планирование и принятие решения, контроль за исполнением решений,

выявление и предупреждение конфликтных ситуаций. Качество информации определяется тем, насколько она способствует наилучшему, в каком-либо смысле, решению задач управления. Для того чтобы на верхнем уровне иерархии успешно решались стратегические задачи, необходима информация, достаточно полно описывающая те параметры ситуации, которые определяют стратегические решения, и «не замусоренная» второстепенными подробностями, на решение существенно не влияющими. В рамках каждой сложной системы, в том числе в масштабе страны, формируется информационная среда, которая включает функционирующие во взаимодействии технические средства, технологии, квалифицированный персонал, систему документирования, культуру управления. В России в 90-х годах существенным недостатком, снижающим качество управления на всех уровнях, являлось медленное и беспорядочное формирование единого информационного пространства, и прежде всего информационной сети органов власти. Управленческая информация характеризуется объемом, достоверностью, ценностью, степенью открытости. По объему информация может быть достаточной или недостаточной для принятия решения с необходимой степенью обоснованности. Информация также может быть избыточной, содержащей сведения, ненужные для выработки решения, а порой даже мешающие принятию решения. Достоверность можно определить процентом содержащихся в информации достоверных данных – в общем случае это будет вероятностная характеристика. Понятие ценности всегда следует связывать с наличием новых необходимых для принятия решения данных. По степени открытости информация делится на секретную, конфиденциальную (для служебного пользования) и публичную

(полностью открытую). В качестве показателя качества информации применяется $k_{ин} = \delta P / \delta H$, где δP – повышение качества (эффективности) управления при получении некоторого объёма информации; δH – затраты на приобретение этого объёма информации. Следует заметить, что из этого показателя непосредственно не следуют известные показатели оценки качества некоторых, например, информационных, систем.

- 10) **Принцип неопределённости.** Принцип неопределённости является одним из основных принципов системного подхода. Достаточно типичны случаи, когда задачу необходимо решать при неполноте или нечёткости знаний относительно исследуемой системы, что имеет место вследствие как ограниченных возможностей науки на данном уровне её развития, так и принципиальной ограниченности человеческого познания, а зачастую просто оказывается невозможным получить сколь-нибудь достоверную информацию о будущем, предвидеть все возможные варианты изменения окружающей обстановки. В лучшем случае могут быть получены вероятностные оценки прогнозируемых ситуаций, если эти оценки объективно существуют. Учёт неопределённостей и случайностей возможен с помощью метода гарантийного результата, с помощью статистических оценок (если условия для этого существуют), а также путем уточнения структур, ввода дублирования, расширения совокупности целей и проч. Во всех случаях неполноты знаний о предмете исследования, нечёткой или стохастической входной информации будут носить нечёткий или вероятностный характер и результаты исследований, а принятые на основании этих исследований решения приведут к неоднозначным последствиям. В случае

нечёткой (по своей природе) или неполной (при ограниченных возможностях исследователя) информации как раз очень важно учитывать законы кибернетики об устойчивых состояниях и устойчивых траекториях системы. Необходимо стремиться выявить и оценить все возможные, в том числе кажущиеся маловероятными последствия принимаемых решений, хотя бы на интуитивном уровне, а также предусмотреть обратные связи, которые обеспечат своевременное вскрытие и локализацию нежелательного развития событий. В технических науках эти положения очевидны. При исследовании социально-экономических процессов соответствующие положения зачастую игнорируются, что порой приводит к невосполнимым потерям. Как следствие необходимости принятия решений в условиях неопределенности является использование в системном анализе так называемых рациональных рассуждений. Рассуждения, не строгие и не приемлемые с точки зрения чистой математики, но обеспечивающие при разумном их применении правильные результаты, называются рациональными. При вводе аксиоматики соответствующих шкал достигается необходимая строгость подобных рассуждений. Типичные примеры рациональных рассуждений: «Сегодня погода хорошая», «Автомобиль едет с высокой скоростью». Используются и другие термины, близкие к термину «рациональные»: правдоподобные, эвристические, дискурсивные. Применение рациональных понятий непосредственно связано с интуицией, здравым смыслом. Качество интуиции зависит от степени изучения данной области знания и личных качеств исследователя. Для оценки рационального рассуждения вводится понятие степени достоверности рассуждения, которое может меняться от 0 до 1.

Это некоторая субъективная, размытая в своей основе аналогия вероятностной оценке. Достоверность рационального рассуждения может быть повышена, если прибегнуть к коллективному мнению. Сложное рациональное рассуждение обычно включает физические соображения, ссылки на опыт, интуицию, целесообразность упрощения, а также дедуктивные рассуждения. Важной особенностью рациональных рассуждений является возможность включения в них «размытых нечетких понятий». Различные рассуждения совершенно не равноценны, как по трудности их проведения, так и по вкладу в успех решения задачи. Существует ряд способов повышения правдоподобности рассуждений, некоторые из них: независимый повторный вывод, использование различных моделей, независимые вычисления, сравнение теоретических результатов с физическим экспериментом. Можно привести сколь угодно случаев, когда только при применении здравого смысла и интуиции, т.е. рациональных рассуждений, удаётся получить искомый результат. В системном анализе следует стремиться к таким сочетаниям различных рассуждений, которые с необходимой точностью приведут к цели исследования при минимуме затрат. В зависимости от цели исследования рассматриваются также другие принципы, имеющие более узкую область применения, в том числе.

- 11) **Принцип полномочности:** исследователь должен иметь способность, возможность и право исследовать проблему. Принцип полномочности очень важен при исследовании сложных, в том числе социально-экономических систем. В [7] введено понятие «операция» как совокупность действий, направленных на достижение некоторой цели и предложено

различать руководителя операции (исследования) и исследователя. Руководитель ставит задачу и определяет объем необходимой для проведения исследования информации. Исследователь разрабатывает модель и проводит необходимые исследования в соответствии с поставленной задачей. Утверждается, что на первом этапе исследования – «создания и описания способов действия, которые могут привести к достижению цели» – математику «делать почти нечего» и что исследователь операции, «исследуя операцию в целом, но будучи зачастую лишенным всей полноты информации об операции, в принятии ответственных решений не участвует». Подобное распределение обязанностей между руководителем и исследователем обычно приводит к нежелательным последствиям. Пока руководитель операции будет считать себя свободным от понимания математической модели, а математик полагать нормой работу без детального осмысливания существа задачи и всей имеющейся информации, будут появляться модели, отражающие действительность неадекватно, и вырабатываться рекомендации, которым опасно (или невозможно) следовать или которые обеспечивают поддержку ведомственных, в самом плохом смысле этого слова, решений. При этом математическое моделирование превращается в абстрактное, не имеющее практического смысла формализацию или в инструмент обмана. Этот подход к правам и обязанностям исследователя операций был в дальнейшем исключен в теоретических работах по исследованию операций. Более того, он противоречит основным положениям методологии системного анализа. Возможны два варианта взаимодействия руководителя и исследователя операции. Первый вариант. В одном лице объединяются руководитель (заказчик) и

исследователь операции, т.е. лицо, отвечающее за операцию, руководит и исследованиями, в том числе созданием и использованием необходимых математических моделей. Естественно, руководитель не может быть одинаково компетентным во всех необходимых для исследования областях знания и будет привлекать различных специалистов. При этом он должен быть достаточно подготовлен, чтобы держать в руках все нити исследования, квалифицированно оценивать полученные рекомендации и при необходимости уточнить постановку задачи, состав релевантных факторов, структуру допущений. Время руководителей, некомпетентных в научных методах исследования, прошло. Второй вариант. Поиск решения заказчик поручает группе исследователей с предоставлением всей имеющейся информации. Тогда эта группа отвечает полностью за все этапы работы, начиная с постановки задачи и кончая выработкой рекомендаций, а также, если заказчик следует полученным рекомендациям, за результаты внедрения этих рекомендаций. При работе по этому варианту исследователю для чёткого представления действительной сущности задачи потребуются неоднократные обсуждения с заказчиком существа задачи и условий реализации рекомендаций.

- 12) **Принцип организованности:** решения, выводы, действия должны соответствовать степени детализации системы, ее определенности, организованности. Бессмысленно управлять системой, в которой команды не исполняются. Последние два принципа оказываются весьма важными при рассмотрении организационных систем. Пренебрежение ими делает бессмысленным применение научных подходов к оргсистемам. Перечисленные принципы справедливы равным образом для

задач анализа и синтеза. В моделях систем они должны быть конкретизированы в зависимости от существа системы и решаемой задачи. Представление о том, «что этот принцип означает здесь, в чем его конкретное содержание», приведет к более четкому осмысливанию постановки задачи, сути проводимого исследования. Для применения принципов системного подхода необходимо уметь прогнозировать поведение системы при воздействии на неё внешних сил. Это тем более необходимо, поскольку одной из основных задач синтеза систем является поиск целенаправленных воздействий на систему, приводящих к желаемому результату. Пренебрежение принципами системного подхода приводит к принятию безграмотных решений, порой с непоправимыми последствиями, всё более губительными по мере того, как у лиц, принимающих решение, появляются большие возможности. Примеров подобных последствий, к сожалению, предостаточно. Системный подход способствует развитию системного мышления, более полному и всестороннему учету всех факторов, определяющих поведение системы.

3.3 Основные закономерности организации материального мира

При изучении систем, являющихся фрагментами реального мира, необходимо опираться на законы функционирования этого мира. Проблема описания (моделирования) материального мира сводится прежде всего к описанию механизмов отбора, лежащих в основе причинности всех реальных движений материи, сужению множества виртуальных (мыслимых, согласуемых со связями) движений, отбору реальных движений из числа виртуальных. Переход от одного уровня развития материи к более высокому

сопровождается появлением новых отношений, качественным усложнением структуры систем. Различают три уровня развития материи:

- уровень неживой природы;
- биологический уровень;
- общественный уровень.

А. Основы организации неживой природы

Общим для материального мира являются законы сохранения энергии. Если какое-либо движение не подчиняется этим законам, его следует из рассмотрения исключить. Первый из законов сохранения энергии – закон сохранения количества движения – второй закон Ньютона. Заслуга Ньютона состоит в том, что он первый понял, что ускорение, а не скорость объекта пропорциональна приложенной силе. Законы сохранения энергии дают определенные правила выбора реальных движений из числа виртуальных и поэтому эквивалентны вариационным принципам и могут рассматриваться как следствие последних. Например, закон сохранения из всех мыслимых траекторий перевода объекта из одного состояния в другое выбирает ту траекторию, на которой достигается экстремум функционала. Природа как бы выбирает наиболее экономный способ достижения цели. Поскольку закон сохранения – это некоторый специальный класс соотношений между фазовыми переменными, то связь закона с вариационными принципами позволяет сформулировать его следующим образом [5]:

Соотношение между фазовыми переменными, которое для функционалов, входящих в вариационные принципы, является уравнением Эйлера, называется законом сохранения.

Вариационная формулировка законов сохранения энергии – одно из современных достижений физики. Движение неживой материи всегда можно описать в терминах многокритериальной оптимизации, т.е. состояние материи определяется как соответствующее минимуму функционалов:

$$J_1(x) \rightarrow \min, J_2(x) \rightarrow \min, J_3(x) \rightarrow \min, \dots$$

Функционалы ранжированы. В точках пересечения множества функционалов происходит отбор из виртуальных наилучших в определенном смысле квазистационарных движений. Вариационные принципы уточняются по мере развития человеческих знаний. Для создания моделей реальных систем кроме законов сохранения необходимы дополнительные эмпирические соотношения, связывающие отдельные параметры. Эти дополнительные ограничения не противоречат законам сохранения, но сужают область допустимых траекторий движения материи. Необходимые ограничения выражаются, как правило, в виде формул. (Например, зависимость плотности газа от температуры и давления, зависимость скорости течений в океане от скорости ветра.) Построение соотношений подобного рода называется параметризацией. К числу таких дополнительных ограничений относится второй закон термодинамики, согласно которому следует, что на любой реальной траектории замкнутой системы производная от функционала, называемого энтропией, не может быть отрицательной: $dH/dt \geq 0$. Вторым закон термодинамики не противоречит закону сохранения. Среди множества траекторий, отобранных законом сохранения, реализуются лишь те, вдоль которых энтропия не убывает. В то же время этот принцип способствует правильной параметризации. Принцип неубывания энтропии имеет также глубокий философский смысл. Энтропия трактуется как мера неупорядоченности, степень разрушения организации. Процессы, протекающие в неживом мире, представляются как диалектическое единство противоположностей – сохранения и разрушения материи. Еще два механизма отбора (принципа) вместе с законами сохранения и принципом не убывания энтропии составляют основу организации неживой природы.

Принцип минимума диссипации энергии, который гласит, что среди виртуальных движений, удовлетворяющих законам сохранения, реализуются лишь те, для которых диссипация (рассеивание) энергии минимальна, или, что

одно и то же, минимален рост энтропии. Принцип диссипации энергии строго не доказан. Возможно, справедлив следующий обобщенный принцип диссипации энергии. Если в конкретных условиях возможно несколько типов организации материи, согласующихся с другими принципами отбора, то реализуется та структура, которой отвечает минимальный рост энтропии или максимальное ее убывание. Поскольку убывание энтропии возможно только за счет поглощения энергии, то реализуются только те из возможных форм организации материи, которые способны в максимальной степени поглощать энергию.

Согласно *принципу устойчивости*, реализуются лишь устойчивые формы движения. Неустойчивые формы, если возникают, то быстро разрушаются. **Определение устойчивости**, по Ляпунову [6, 7, 8]: *движение устойчиво, если достаточно малые отклонения от него порождают траектории, которые остаются близкими к исходной траектории на достаточно большом интервале времени*. Приведенное определение является достаточным, если рассматривать конкретный длительный для определенной системы интервал времени. (Например, при полете Москва – Новосибирск автопилот самолета обеспечивает указанный принцип.) Принципы устойчивости и диссипации энергии в ряде случаев противоречат. Например, обе формы движения жидкости – ламинарное и турбулентное – удовлетворяют закону сохранения. Если Q – количество жидкости, протекающее через трубу, мало, то реализуется устойчивый ламинарный режим. Он более экономичен, затраты энергии минимальны. Если внести какое-либо возмущение, оно быстро затухнет. Если $Q > Q_{кр.}$, ламинарный режим становится неустойчивым. Более предметно вопрос о характере течения жидкости рассматривается в гидродинамике [9, 10], где роль критерия при переходе ламинарного течения в турбулентное представляет так называемое число Рейнольдса Re ($Re = \frac{\rho v L}{\mu}$, где ρ, v, L, μ представляют соответственно плотность жидкости, скорость потока, характерный размер области течения,

динамическую вязкость). При больших Re течение становится турбулентным, как отвечающее принципу диссипации, которому отдается предпочтение перед принципом устойчивости. Возможно, этот пример не вполне корректен, – турбулентное движение имеет много форм.

Б. Биологический уровень организации материи

Для биологического уровня развития материи справедливы закономерности неживой материи, хотя в их проявлении имеются определенные особенности, в то же время появляются новые, свойственные только живым организмам законы и тенденции развития. Явления живой природы сложнее. Здесь также имеет место формализация совокупности условий в виде набора функционалов, но ранжирование функционалов для каждого живого существа свое – это оптимальный способ поведения. По мере изменения внешней среды меняется упорядоченность функционалов. Переранжирование функционалов производится адаптационными механизмами. Условный и безусловный рефлекс – механизмы ранжирования. Первое, что нужно ввести при изучении процессов, протекающих в живой материи, это понятия: ***цель, информация, обратная связь, гомеостаз***. Движение в живой природе всегда целенаправленно. Цель однозначно связана с причинностью. Для естественников здесь нет вопросов, но существует философская сторона дела. В основе религиозной теологии лежит представление о высшей цели. Постепенно сложилось понятие, что целенаправленное действие присуще человеку. Гегель уже допускал существование у любого живого существа внутренней целесообразности.

Энгельс отметил, что планомерные действия существуют в зародышевом виде везде, где живой белок существует и реагирует, совершая определенные действия, как следствие на раздражения извне. Отсюда следует определение. Всем живым организмам свойственны целенаправленные действия различной сложности и природы. То есть общей закономерностью у сознательного целеполагания и несознательного функционирования

самоуправляемой системы любой природы является направленность к достижению определенного результата. Здесь не предполагается тождественность разумных, основанных на прогнозе последствий действий человека и рефлексивных действий живых организмов, обладающих генетической памятью. Хотя границу порой провести трудно. Например, городские вороны действуют, базируясь не только на генетической памяти. Когда появляется цель, тогда для отбора движения возникают **управление и отрицательная обратная связь**. Как управление определяется целью, покажем на примере полета стрижа. Ускорение полета является функцией положения крыла, а при приближении к земле и функцией расстояния от земли. Чтобы стриж не разбился при приближении к земле, управление обеспечивает у земли равенство нулю скорости полета. Здесь и существует обратная отрицательная связь, обеспечивающая выполнение принятого решения – достижения поставленной цели.

Таким образом, организация в живом мире рождает совершенно новый механизм развития – обратную связь. Наличие обратной связи – одно из основных отличий живого от неживого. Живое существо – организм, имеющий свои цели и механизмы их реализации. Обратная связь не выводится из законов сохранения, она порождается целенаправленностью действий, что имеет место только в живой природе – это и есть механизм отбора. Отрицательная обратная связь обеспечивает выполнение поставленной цели и в зависимости от вида управляющего сигнала она разделяется на стабилизацию, программное управление и следящие системы. Положительная обратная связь способствует поиску и достижению целей более высокого уровня. Однако при отсутствии контроля положительная обратная связь может привести к выходу на тупиковые ситуации. Принцип обратной связи лежит в основе всех эволюционных процессов, так как в результате действия обратной связи выделяются те индивиды, поведение которых наилучшим образом обеспечивает их стабильное существование при изменении внешних условий. В неживой природе отрицательная обратная связь является

созданием человека – живая материя порождает саму себя и целенаправленно использует неживую материю. Из роли обратной связи непосредственно следует принцип гомеостаза. Согласно принципу гомеостаза, живой организм существует внутри гомеостаза (области гомеостаза) – области пространства параметров внешней среды, в пределах которой обеспечивается (возможна) жизнедеятельность организма. Границы области гомеостаза – это множество критических значений параметров внешней среды, выделяющих область, за пределами которой существование организма невозможно. Механизмы обратной связи приводят к таким реакциям организма, которые отдаляют организм от границ области гомеостатиза, либо способствуют перестройке организма, расширяющей эту область, либо воздействуют на внешнюю среду, изменяя ее в своих интересах. Принцип гомеостаза может быть сформулирован и так: положение организма относительно границы гомеостаза оказывает решающее влияние на состояние организма. Живой организм – всегда открытая система, ему свойствен метаболизм – обмен с внешней средой энергией и веществом. Эмпирически выведено следующее свойство живого организма: так направлять эволюционный процесс, чтобы максимально использовать результаты этого обмена. Это реализуется положительными обратными связями, которые вообще-то противоречат принципу гомеостаза. Необходим компромисс – разрешение противоречия между стремлением к стабильности – сохранению гомеостаза и тенденцией поиска новых, более рациональных способов освоения внешних энергии и вещества. Разрешение этого противоречия – важная особенность эволюционных процессов живой материи [11, 12].

Описание обратных связей в живых организмах приводит к понятию функций поведения организма. Совместно с обратными связями функции поведения образуют замкнутую модель поведения биологических систем. Функции поведения, хотя и являются следствием условий гомеостаза, теоретически описываются сложно и изучаются в основном

экспериментально. Чтобы организм определил свое положение относительно границ гомеостаза и выработал определенное поведение, нужна информация о близости организма к границам. Для этой цели организм должен обладать датчиками (рецепторами) информации и механизмами передачи и обработки информации. Переработать информацию может только живой организм или механизм, построенный человеком. Первоначально управляющие воздействия носили рефлексивный характер. По мере эволюции живых организмов связь между внешними воздействиями и решениями усложнялась, и нервная система перестала быть системой рефлексного типа. Появляется способность прогноза, способность предугадывания. Нервная система стала важным элементом самоорганизации. Когда появились смертные организмы – эукариоты, возник генетический код как обеспечение индивидуальной жизни путем реализации принципа наследственности. Возникновение генетической памяти стимулировало эволюционный процесс. По-видимому, здесь также имел место отбор – живые существа с другими средствами передачи наследственности не выжили. Таким образом, информация в цепях обратных связей о положении организма относительно границ гомеостаза и о новых, более рациональных путях освоения энергии и вещества после соответствующей обработки служит основанием для принятия решений.

Оценкой качества информации может быть только качество (эффективность) решений, принимаемых при использовании информации – насколько полученная информация способствует достижению организмом своей цели. Причем одна и та же информация может иметь различную значимость для разных лиц и при решении различных задач. «Полезная» информация может оказаться помехой. Энтропийная мера количества информации, определенная в теории информации, также важна, но её недостаточно для оценки информации с системных позиций. Итак, задача биосистемы – целенаправленная эволюция с целью сохранения собственной стабильности, удаления от границ гомеостаза. В то же время совершенствование биосистемы заключается в расширении области

гомеостаза и в улучшении качества информации о границах этой области. Биосистема воздействует на окружающую среду, изменяя ее в своих интересах. В живой природе понятие «устойчивость» заменяется законом адаптации. Живые организмы адаптируются к условиям внешней среды и адаптируют внешнюю среду, обеспечивая гомеостаз биологических макросистем. Эволюция – это направленный процесс, один из результатов адаптации. Существуют различные точки зрения относительно направленности эволюции. Согласно Дарвину, мелкие изменения признаков постепенно накапливаются при помощи естественного отбора, но сами по себе мутации (изменения) беспорядочны, случайны. Согласно другой точке зрения, изменения подчиняются определенным закономерностям. По-видимому, имеют место оба процесса, причем больше вероятность таких мутаций, которые требуют меньших энергозатрат. Самостоятельная, весьма важная линия эволюции живой природы, ее самоорганизации – способность к кооперации. Кооперативность совместно с внутривидовой борьбой (снова единство противоположностей) – это две стороны единого процесса самоорганизации. Вначале кооперация – это объединение, чтобы совместно выжить. Далее возникли более сложные объединения организмов – своеобразный сложный организм. Появились биогеоценозы. Биогеоценоз – это такая самостоятельная экосистема, в которой внутренние связи значительно сильнее внешних. Для биогеоценоза характерна иерархия, на нижних уровнях которой располагаются элементарные биогеоценозы. Комбинация биогеоценозов – тоже биогеоценоз. Различные организмы и популяции, входящие в биогеоценоз, имеют свои цели, свои области гомеостаза, причем цели и функции систем более высокого уровня (например, популяций) не выводятся из целей отдельных организмов, а порой просто противоречат им. В моделях популяций следует учитывать верхнюю петлю обратной связи, отражающую коллективное поведение и определяющую реакцию популяции в целом на ее положение относительно границы гомеостаза. Верхняя петля обратной связи относится ко всему биогеоценозу,

понять структуру этой петли порой весьма трудно. Биогеоценоз – это противоречивое единство различных организмов. Спектр противоречий весьма широк и во многом определяет механизмы отбора. Не исключено, что обеспечение гомеостаза одних элементов биогеоценоза приводит к разрушению гомеостаза других.

Действительно, в динамике биологических макросистем основную нагрузку при переносе вещества и энергии несут трофические связи. В этих связях работает закон сохранения. В сложных биогеоценозах, построенных по иерархическому принципу, кроме трофических связей, имеют место более сложные процессы обмена веществом и энергией. На основании проведенных экспериментальных исследований получен интересный результат – стабилизация в экосистемах с иерархической организацией достигается за счет управляющих воздействий верхнего уровня, поэтому усложнение системы связей приводит к повышению степени устойчивости экосистем [13, 14].

В. Особенности эволюции общественных систем (особенности антропогенеза)

Новое качественное усложнение объекта исследования – появление общественных систем – естественно приводит к расширению принципов, изменению действия общих закономерностей. Сложность процессов, протекающих в общественной природе, неизбежно ведет к необходимости при изучении этих процессов сочетания формальных математических методов и неформального мышления. Описание этих процессов предполагает введение представлений о переплетающихся между собой целях, обратных связях и потоках информации. Вначале о направлении развития общественных организмов. Естественный отбор в живой природе привел к двум результатам. Первое направление эволюции привело к слиянию отдельных организмов в общий организм так, что самостоятельное существование отдельного организма стало бессмысленным (например, муравейник). Этот путь эволюции оказался тупиковым. Второе направление эволюции – развитие

индивида, его способности к выбору лучшего движения, к повышению гомеостатической стабильности. Это направление привело к возникновению все более интеллектуальных форм живой материи, в которых развитие сообщества предполагает не только существование у индивидов личных целей, но и развитие индивидуальностей. Эволюция живого организма создавала все новые и новые элементы самопознания. Переход к нерефлексивным формам организации явил собою некоторый скачок эволюционного развития. Это было началом периода антропогенеза, занявшего всего несколько миллионов лет.

Трудовые навыки ускорили процесс совершенствования головного мозга. По мере того, как трудовые навыки, способности к целенаправленной деятельности стали передаваться от индивида к индивиду, от одного поколения к другому, все большее значение приобретали коллективная память и учителя общества. Для использования орудий труда мало генетической памяти. Появился новый вид памяти – коллективная память. Опыт прежних поколений может в полной мере передаваться через отдельных субъектов – учителей. Один из механизмов коллективной памяти – обучение. Передача информации в стаде не носит генетический характер. Старший учит младших – делай, как я. Память и наследственность не одно и то же. Память – это конкретный механизм кодирования, хранения и передачи информации. Наследственность – описание процессов самоорганизации различной природы. Целенаправленные действия наших предков со временем начали управляться интеллектом. Появились большие возможности реализации общих целей, появилось понятие моральных основ функционирования общества. Стадо человекообразных (неантропов), которое могло лучше сохранить носителей памяти и, следовательно, совершенствовать накопленные знания и навыки, создать систему запретов, ограничивающих внутривидовую борьбу, и брать под защиту всех членов общества, приобрело преимущества, которые полностью компенсировали замедление

биологического совершенствования индивидов. Действительно, эволюция человека как биологического вида в основном прекратилась. На смену пришла эволюция общественных отношений, общественных групп, состоящих из индивидов, имеющих свой гомеостаз и входящих в группу с общим гомеостазом. Успеху в отборе способствовало появление коллективного разума. Это последний этап антропогенеза. Для социального уровня организации ранжирование функционалов, формирование их свёртки – прерогатива интеллекта. Стохастичность реализуется через субъективный подход. Изменчивость определяется различием в целях, оценке обстановки и путей достижения целей. Особенность общественных систем – наличие прогнозных оценок изменчивости внешней среды. Участие интеллекта убыстряет процессы ранжирования функционалов, поиск оптимумов. Убыстрению эволюции способствуют конфликтные ситуации, наличие многокритериальной оптимизации. Например, недостаток энергетических ресурсов заставляет искать энергосберегающие технологии. В результате столкновения интересов возникают неоднозначность и неопределенность. Появляются условия действия бифуркационных механизмов. Отсюда скачкообразная, ускоренная эволюция. Модели организационных систем – это модели общественных процессов [15, 16] Особенность этих процессов и соответственно их моделей заключается в том, что в обществе осуществлен переход от эволюции индивида к эволюции общественных групп, состоящих из индивидов, имеющих свой гомеостазис и входящих в группу с общим гомеостазисом.

В общественных отношениях закон сохранения энергии и материи проявляется в производственной деятельности. В экономике этот закон проявляется в балансных соотношениях. Функции поведения как реакция на внешние воздействия обеспечивают замыкание модели. Для общественных процессов характерны многокритериальность и неоднозначность реакций (функций поведения) в цепях обратных связей. В функциях поведения учитываются гипотезы относительно прогнозов последствий решений. Те

системы, где функции поведения определены однозначно, называются рефлексными. Особенностью является также то, что имеет место разная информированность и разные интеллекты, так что необходимо изучать не только цели, но и логические цепочки, объясняющие, как эти цели достигаются. По мере развития общества усиливаются его внутренние противоречия и рассогласования, увеличиваются численно и усложняются контуры обратных связей. Без понимания процессов, возникающих при столкновении интересов, создать модель общества невозможно. Таким образом, общество – это совокупность иерархически организованных цепочек гомеостатических общностей, каждая из которых имеет свои цели и средства их достижения. Каждое звено этой совокупности должно осознать влияние реализации целей верхнего уровня на свою стабильность. В конечном счете развитие общественных отношений должно привести к превращению человечества в единую гомеостатическую общность, т. е. такую общность, где приоритет всегда принадлежит общим целям. В противном случае человечество погибнет.

3.4 Системный анализ в исследовании физико-математических систем и процессов

В основе системного анализа физико-математических и технических систем лежит математическое моделирование как инструмент научного исследования [4, 5, 9, 10]. Математическое моделирование – это методология научной и практической деятельности людей, основанная на построении, исследовании и использовании математических моделей. Математическим моделированием занимался, в сущности, каждый, кто применял математику на практике – от великих ученых древности, до школьников, решающих задачи «на составление уравнений». Однако в самостоятельную научную дисциплину математическое моделирование оформилось лишь в последние несколько десятилетий в связи с широким применением компьютеров. Математическое

моделирование тесно связано с прикладной математикой и с общей теорией систем, но не совпадает с ними, поскольку теория систем, как и другие разделы математики, имеет дело лишь с математическими объектами. Предмет математического моделирования шире и включает, кроме исследования математических объектов, формализацию постановки практической задачи и интерпретацию полученных формальных результатов. Иными словами, началом и концом процесса математического моделирования является окружающая действительность.

Центральным понятием математического моделирования является математическая модель (ММ) – совокупность математических объектов и отношений, которые отображают объекты и отношения, существующие в некоторой области реального мира (предметной области). Выделяют три этапа математического моделирования [9]:

- построение ММ (формализация задачи);
- исследование ММ (анализ модели);
- использование ММ (синтез решения).

В данном пособии рассматриваются все три этапа, но в первой части почти не затрагиваются вопросы синтеза решения, которым посвящена обширная литература по методам оптимизации и принятия решений (см. например, [4, 5, 9, 10, 17, 18]). Этап формализации тесно связан с научно-инженерной дисциплиной, именуемой системным анализом.

На этапе анализа решаются так называемые прямые задачи, т.е. по заданным значениям входов системы определяются ее выходы. Для этапа синтеза характерны обратные задачи, а именно определение входов системы по заданным (желаемым) значениям ее выходов. Использование ММ возможно для различных целей: прогнозирования, исследования, проектирования, управления. Весь опыт человечества показывает, что одни и те же математические модели и методы могут одинаково применяться в различных областях и для различных целей. Это обстоятельство определяет

внутреннее единство математического моделирования и его место в системе подготовки специалистов (об этом см. также [10, 11, 19, 20]). Изучение математического моделирования должно идти вслед за изучением основных теоретических курсов и компьютерных технологий, но предшествовать выполнению основных курсовых и дипломных проектов. Заметим, что при проектировании математическая модель используется для так называемого предварительного синтеза: структура и параметры модели и решения выбираются, когда реальной системы еще не существует. Напротив, в задачах управления синтез решения (выбор управляющего воздействия) осуществляется в процессе работы системы на основе текущей информации о ее поведении (так называемый совмещенный, или управляемый, синтез). Управляемый синтез решения требует больше текущей, но меньше априорной информации, предоставляя новые возможности исследователю, проектировщику или конструктору системы. Вопросы математического моделирования динамических систем подробно будут рассматриваться во второй части учебного пособия. Подробный анализ методов исследования технических систем в контексте конструирования моделей и методологии моделирования рассматриваются в следующем разделе.

4. Моделирование систем

Любое научное исследование осуществляется с помощью определенных процедур, которые представляют так называемый аппарат исследования. Под аппаратной реализацией в системном анализе понимается моделирование поведения сложной системы и процессов принятия решения в ней, а также способы (методология) использования моделей. Моделирование – способ познания мира – основной и единственный инструмент решения всех задач, возникающих перед человеком, инструмент научных исследований: анализа и синтеза.

4.1 Определение понятия «модель»

Существует множество определений понятия «модель». Приведем некоторые из них.

1. Любое абсолютное знание познается через бесконечную цепочку относительных истин, приближенно отражающих те или иные черты объективной реальности. Эти относительные истины и есть модели. Язык описания модели определяет её характер. На математическом языке получается математическая модель [10, 11].
2. Модель является намеренно упрощенной схемой некоторой части реальной жизни, с помощью которой мы надеемся получить рекомендации к решению реальных проблем.
3. Объект M является моделью объекта A относительно некоторой системы S характеристик, если M имитирует A по этим характеристикам.

Модель может применяться в одном из следующих качеств: – средства познания мира, изучения характеристик и поведения реальных объектов в различных условиях; – средства синтеза объектов с требуемыми характеристиками, заданным поведением; – средства обучения и тренировки; – средства общения (язык, письменность). Модель строит исследователь. Модель базируется на объективных законах, но и способствует их пониманию. Модели могут служить для достижения описательной или предписывающей цели. Описательные модели служат для лучшего понимания, объяснения объекта, предписывающие позволяют предсказать и (или) воспроизвести характеристики объекта, определяющие его поведение. Предписывающие модели всегда и описательные. Математическая модель по мере накопления фактов перерастает в математическую теорию, которая сама начинает служить источником информации.

4.2 Классификация моделей

Существует много классификаций моделей, характеризующих свойства моделей, особенности их применения, происхождение. Понимание классификаций моделей является одним из условий их грамотного применения. При этом оказывается полезным ответить на следующие вопросы. Какого вида (типа) модель более всего подходит для решения поставленной задачи? К какому классу относится разрабатываемая модель и в чём особенности её использования? Приведём некоторые основные классификации [3, 10, 11].

1. В зависимости от особенностей возникновения модели могут быть разделены на три группы:
 - а) феноменологические, возникающие в результате наблюдения объекта, явления, его осмысливания;
 - б) асимптотические – их появление результат дедукции. Новая модель появляется как частный случай более общей модели. Переход от феноменологических моделей к асимптотическим характеризует определённую зрелость науки;
 - в) модели ансамблей – возникли в результате процесса индукции. Новая модель является обобщением или синтезом отдельных моделей. В моделях ансамблей свойства отдельных объектов исследуются с учётом взаимодействия объектов. Модели ансамблей не могут быть получены путем механического объединения моделей отдельных объектов в модель системы. При объединении объектов в систему внутренние свойства объектов могут изменяться, что особенно заметно при изучении социально-экономических систем.
2. В зависимости от способа описания свойств моделируемого объекта различают модели
 - а) вербальные,

- b) изобразительные,
- c) аналоговые,
- d) символические.

Вербальные – это словесные, описательные модели.

В **изобразительных** моделях изучаемые свойства (отношения) объекта представлены этими же свойствами (отношениями), но, как правило, в другом масштабе. Например, модель самолёта для продувки в аэродинамической трубе, модель солнечной системы в планетарии, модель гидроузла в конструкторской организации.

В **аналоговых** моделях свойства объекта отображаются набором специфических свойств модели. Так, при аналоговом моделировании полёта самолёта параметры (координаты, скорость) самолёта отображаются в модели значениями напряжения, силы тока. Другой пример: множество точек земной поверхности с одинаковой высотой над уровнем моря отображаются на карте соответствующей линией – горизонталью.

В **символических (знаковых)** моделях представление величин и отношений между ними осуществляется с помощью букв, чисел и других знаков. Основное преимущество этих моделей – «вариантность». Одним знаковым описанием кодируются физически различные системы. Большое число конкретных значений параметров системы и соответственно число вариантов её поведения могут быть изучены на одной и той же модели. При исследовании объекта могут быть использованы все четыре типа моделей. Вербальные и изобразительные модели при этом могут рассматриваться в качестве инструмента первого приближения решения задачи. Возможны комбинации различных типов моделей. Так, в тренажёры включают и аналоговые, и знаковые блоки

3. В зависимости от способа отображения объекта различают модели **аналитические и имитационные.**

В *аналитических* моделях используются полученные из различных соображений зависимости между выходными и входными переменными модели, в том числе, при необходимости, зависимости для вычисления критериальной функции. При этом для заданных входных возмущений обеспечивается вычисление исходов модели без имитации реальных процессов, протекающих в объекте. Для аналитических моделей наиболее характерны вербальные и знаковые способы описания.

Имитационная модель имитирует исследуемый объект, течение реального процесса. Для имитационных моделей используются все способы описания. Термин «реальный процесс» здесь и далее используется в смысле процесс «существующий» или «способный принять форму существования». Это равным образом относится к аналитическим и имитационным моделям. Выбор между аналитической и имитационной моделями определяется задачами исследования, уровнем знаний об объекте и квалификацией исследователя. Для лучшего уяснения разницы между аналитическими и имитационными моделями рассмотрим пример моделирования случайного блуждания частицы по целочисленным точкам действительной прямой, при котором на каждом шаге частица с вероятностью p смещается по числовой оси на $+1$ и с вероятностью $q = 1-p$ – на -1 . Пусть i – начальное положение частицы, j – положение частицы через n шагов, $n = 0, 1, 2, \dots$, $P_n(i \rightarrow j)$ – вероятность перехода частицы за n -шагов из состояния i в состояние j . Попасть из i в j возможно, если в направлении от i к j сделано m из n шагов, где $m = (n + |j - i|)/2$ должно быть целым, т.е. разность $|j - i|$ должна иметь ту же четность, что и n . Естественно, переход из состояния i в состояние j невозможен, если $n < |j - i|$. Вероятность перехода из i в j будет зависеть от двух величин m и n .

$$P_n(i \rightarrow j) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Таким образом, построена аналитическая модель (распределение вероятностей), с помощью которой можно получить вероятность нахождения частицы через n шагов в любом j -ом состоянии, если начальное i -ое состояние

частицы известно. При имитационном моделировании, чтобы получить искомую вероятность, потребуется провести серию из N испытаний. При каждом отдельном испытании моделируется движение частицы длительностью в n шагов, начиная с i -го начального состояния. При этом для определения направления движения частицы на каждом шаге разыгрывается случайная величина, принимающая значение $+1$ или -1 с заданными вероятностями. При каждом испытании записывается, где оказалась частица после n шагов.

Пусть после N испытаний, каждое из которых состояло из n -шагов, частица K -раз оказалась в состоянии j . Тогда $P_n(i \rightarrow j) = K/N$. Для получения результата потребуется $n \cdot N$ раз разыгрывать случайную величину, и «хорошая» точность может быть получена при $N = 40 \div 50$. Для данного простого случая преимущество аналитической модели очевидно. В более сложных случаях, например, трёхмерного блуждания или блуждания с поглощающими экранами, преимущество аналитической модели (такие модели известны) будет неочевидным.

4. По отношению к управлению модели разделяются на **описательные** (не содержащие управлений) и **конструктивные**. В конструктивных моделях, содержащих управление, может ставиться задача достижения одного из трёх видов оптимумов: равномерного, статистического, минимаксного.
5. В зависимости от цели исследования можно выделить модели **функциональные**, созданные для изучения преобразования системой входных сигналов, и **структурные**, предназначенные для изучения внутренней структуры системы.
6. По отношению к предметной области (ПО) модели делятся на **независимые от ПО**, **настраиваемые на ПО**, **ориентированные на ПО**. Модели, предназначенные для изучения внутренней структуры объекта, необходимо перед их применением наполнить конкретной

информацией. Модель без наполнения конкретной информацией называется *общей, абстрактной*. При этом возможны различные уровни абстракции. Модели с высоким уровнем абстракции изучаются самостоятельно. Полученные при этом результаты имеют общую значимость для всех случаев их наполнения конкретной информацией. Модель, наполненная информацией из конкретной предметной области, называется *конкретной*. Задача наполнения общей модели информацией при существенном объеме последней привела к разработке баз и банков данных. Базы обеспечивают хранение данных, в банках, кроме хранения информации, указания способа и форм её вызова, предусматривается совокупность обслуживающих операций, в том числе набор алгоритмов обработки информации. В зависимости от характеристик объекта, вида входной информации и цели исследования разрабатываются следующие виды моделей:

7. *детерминистические, стохастические, модели с неопределенностями;*
8. *непрерывные, дискретные и дискретно-непрерывные;*
9. *статические и динамические;*
10. *линейные и нелинейные.* В последней классификации используются отдельные свойства модели. В реальной модели будет иметь место «набор» свойств. Так, например, некоторая модель является дискретной, стохастической, линейной, динамической. Существуют и другие, кроме рассмотренных выше, классификации моделей.

4.3 Общие требования к моделям

Системные качества моделей приводят к значительному взаимодействию «целое - часть», «часть - целое» на микро и макроуровне. В физических системах элементарные частицы и микродинамика (микроуровень) через

вклад элементарных частиц в коллективные поля и термодинамические переменные взаимодействует с макроуровнем (коллективные поля и термодинамические потенциалы, замкнутые динамики макроскопических параметров порядка). Макроуровень в свою очередь взаимодействует с микроуровнем через силы, порождаемые коллективным полем, действующие на элементарные частицы и определяющие их динамику. В социальных системах микроуровень (индивиды и их высказывания, знания, решения, суждения и поведение) через культурную и экономическую деятельность индивидов взаимодействует с макроуровнем (цивилизация с интеллектуальными, культурными, социальными, экономическими, материальными компонентами). Через социальные «силы» и социально-экономическое окружение происходит обратное взаимодействие. Общие требования к моделям непосредственно вытекают из особенностей методологии системного подхода и могут быть сформулированы следующим образом:

А. *Требование адекватности модели* моделируемой системе относительно совокупности характеристик, обеспечивающих достижение поставленной цели исследования. Поскольку модель ориентирована на решение конкретной задачи, в ней должны быть учтены все те свойства, которые, безусловно, влияют на результаты решения этой задачи. Излишние подробности, не влияющие или слабо влияющие на результаты, должны быть исключены. Подобные подробности могут заметно усложнить эксперимент и ухудшить точность решения. Введем понятие «фактор-система» («фактор-действительность»). Под фактор-системой будем понимать результат отождествления элементов системы друг с другом, т.е. объединения элементов системы в классы эквивалентности, причем каждый класс эквивалентности может быть представлен любым своим

членом. Отождествление проводится таким образом, что несущественные для решаемой задачи второстепенные детали опускаются, но на фактор-системе сохраняются все отношения и свойства между элементами системы, а также между системой и окружающей средой, существенные для этой задачи. Между элементами системы и фактор-системы существует неоднозначное соответствие. Фактор-система является так называемым гомоморфным отображением системы, соответственно множеству элементов системы, отнесенных при отождествлении к одному классу, соответствует в фактор-системе один элемент – представитель этого класса. Модель, в свою очередь, можно рассматривать как изоморфное представление фактор-системы, т.е. гомоморфное отображение исходной системы. Создание модели, изоморфной моделируемой системе, невозможно, так как реальный мир, реальная действительность имеет бесконечную размерность. Какими бы разнообразными ни были модели любой сложной системы, все они содержатся во множестве подмножеств этой системы. Таким образом, модель, адекватная моделируемой системе, – это модель, изоморфная фактор-системе, в которой обеспечивается совпадение модели с объектом в той мере и с такой степенью точности (степенью закругления), с которой это достаточно для решения поставленной задачи. Справедливо следующее положение: точность любого описания (модели) – это точность соглашения о неразличимости отождествляемого. При построении модели, адекватной решаемой задаче, возникает проблема равнопрочности этапов исследования. Причём существует равнопрочность различного «уровня». Обратимся к рис.2.

Выделяемая из реального мира фактор-действительность должна быть, как отмечалось выше, адекватна задаче исследования.

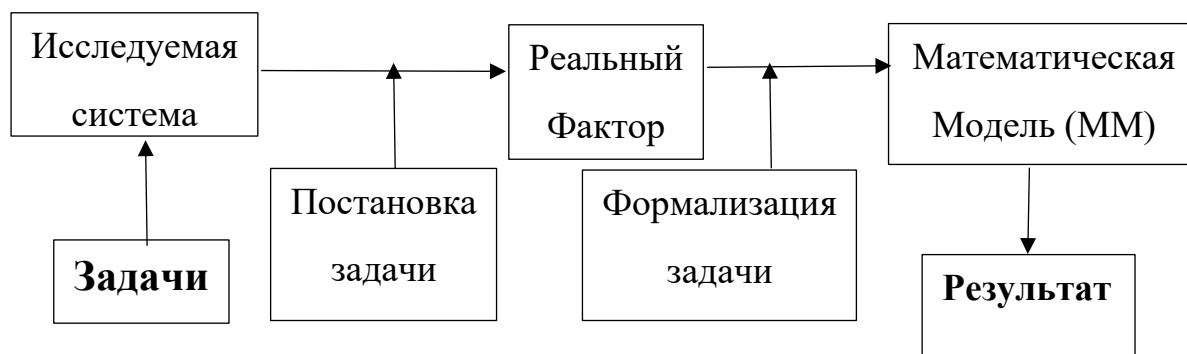


Рис. 2 Построение правдоподобной модели

Далее, при моделировании различают внешнее и внутреннее правдоподобие. При наиболее полном внешнем правдоподобии математическая модель полностью изоморфна (точно отображает) выделенной фактор-действительности, т.е. есть уверенность, что математическая модель обеспечит при её реализации результат, который мог бы быть получен при экспериментировании на реальном объекте при игнорировании деталей, не влияющих на решение поставленной задачи. Внутреннее правдоподобие определяет, насколько конкретная реализация модели совпадает с математической моделью. Чтобы определить внутреннее правдоподобие, необходимо сравнить реакцию на входной сигнал конкретной реализации модели с реакцией на тот же сигнал математической модели. Внутреннее правдоподобие зависит от принятых вычислительных методов и используемой при реализации модели техники. Определяют также адекватность качественную (адекватность функционального описания) и количественную (совпадение исходов модели и объекта при одинаковых входах). Трудности возникают как при выделении фактор-действительности и формализации задачи, так и при реализации модели. Известны две крайние точки зрения. Первая – это стремление во всех случаях обеспечить максимальное внешнее правдоподобие. После чего не исключено, что для реализации модели потребуется вводить существенные упрощения. Другая крайность – при

формализации модель упрощается так, что можно было бы, используя известные вычислительные методы, полностью обеспечить внутреннее правдоподобие. Модели, в которых при небольшом внешнем правдоподобии используются весьма точные математические методы, весьма распространены, хотя оценка целесообразности такого подхода обычно не делается. Может оказаться оправданным стремление к некоторому компромиссу между внешним и внутренним правдоподобиями, т.е. к «равнозначности» этих двух этапов создания модели. Разумная степень такой равнозначности должна быть выбрана в каждом конкретном случае. Иногда возникают и чисто модельные трудности в реализации модели, являющиеся следствием не сложности системы, а неудачно выбранной структуры математической модели. Своеобразный уровень должен быть также установлен между качеством входной информации и внутренним правдоподобием. Нет смысла применять сложные вычислительные методы, если необходимые для расчета исходные данные отсутствуют или они известны с большими погрешностями. Если для расчетов на разработанной модели необходимо знание параметров и переменных, которые в ближайшем будущем не будут получены, надо отказаться от этой модели и заменить её другой, пусть менее точной, но опирающейся на доступную информацию. Пренебрежение при создании модели к оценке доступности источников информации – ошибка типичная. Во многих случаях исследования, претендующие на роль прикладных, начинаются с перечисления параметров, которые полагаются известными. Как, с какой точностью они будут получены – такой вопрос даже не ставится. Модели, созданные без учета имеющейся информации, следует называть «информационно-уродливыми», а соответствующие «прикладные исследования» – бессмысленными абстрактными упражнениями. Всё это в полной мере относится к использованию математических моделей социально-экономических, биологических и других систем, которые называют мягкими вследствие характерных для этих систем слабой конструктивности, расплывчатости

причинно-следственных связей, неоднозначности реакции на внешние возмущения. Для подобных систем справедлив принцип конструктивного поведения Дж. Форестера, согласно которому дать удовлетворительный прогноз о поведении сложной системы, используя только собственный опыт и интуицию, как правило, невозможно – сложная система реагирует на внешнее воздействие зачастую совсем иначе, чем это ожидает интуиция, основанная на общении с достаточно простыми системами. Ранее уже отмечалось, что в этом случае требуется перейти к интуиции более высокого порядка и для изучения подобных систем развиваются новые методологические подходы, при этом система исследуется не как часть реального мира, а как системно организованный процесс её изучения, предполагающий возможность различных интерпретаций исследуемой системы. В таких случаях конструируется сразу несколько моделей, отвечающих различным картинам мира участников исследования, и создается некоторая структура для сравнения результатов, полученных на различных моделях, отвечающих различным картинам мира. То есть модель мягкой системы на обеспечение необходимой адекватности в общем случае не претендует. Результаты исследования, полученные на моделях, сравниваются с реалиями мира, возможные последствия рекомендаций, полученных с помощью моделей, тщательно изучаются.

В. *Требование достаточной простоты* и адекватности в общем случае взаимосвязаны. Могут быть случаи, когда требуемую адекватность получить не удастся вследствие невозможности создания модели соответствующей сложности. Однако не исключаются случаи, когда более простая модель обеспечивает лучшую адекватность – ввод в модель второстепенных, не нужных для решения задачи деталей не способствует лучшему пониманию существа дела. Справедливо положение: из всех моделей лучшей является

наиболее простая, обеспечивающая необходимую адекватность.

- С. **Требование замкнутости модели.** Если известно начальное состояние системы и известны на некотором интервале внешние воздействия и управления, то модель объекта должна позволить определить на этом интервале все переменные, характеризующие состояние объекта.
- Д. **Требование устойчивости.** Модель должна быть устойчива (вычислительный процесс не должен расходиться) для тех условий и возмущений, для которых устойчив моделируемый объект. Следует отметить, что существует много показателей устойчивости. Устойчивость модели (сходимость метода) в каждом конкретном случае связана с определенными условиями. Например, иногда при включении в модель аналоговой ЭВМ неустойчивость возникает вследствие собственных «люфтов» ЭВМ. И при использовании в модели цифровой ЭВМ неустойчивость может, вследствие особенностей вычислительного процесса, появиться там, где в моделируемом непрерывном процессе устойчивость гарантирована.
- Е. **Требование аддитивности.** Должна быть предусмотрена возможность уточнения структуры модели и обновления модельной информации.
- Ф. **Требование удобства.** Вся используемая в модели информация, в том числе все промежуточные и конечные результаты должны представляться оперативно в удобной форме. Соответственно в модель должен быть включен набор средств, способствующих плодотворному взаимодействию человека и модели, в том числе сервисные программы, обеспечивающие простоту и удобство использования модели.

4.4 Базовые физико-математические модели.

Математические модели в физике окончательно оформлены после фундаментальных работ И. Ньютона. Это стало возможным благодаря применению принципа идеализации при описании реальных процессов и систем. Разумеется, что основы принципа идеализации Ньютоном были известны и усвоены в рамках западной традиционной цивилизации, заложенной в древнегреческой философии. Западная наука началась, когда древнегреческие философы научились видеть мир, разделенный на предметы, а предмеры – расчлененными на качества. Гениальные греки совершили эволюционный переход в терминах «целое – общее – частное»: они ввели понятие длины без ширины, пространство без времени, количества без качества, атомы без свойств. Однако научное определение принципа идеализации явно было сформулировано Галилеем. Вот как Галилей представлял движение тел: «... Дабы рассмотреть этот вопрос научно, следует отбросить все указанные трудности (сопротивление воздуха, трение и т.д.) и, сформулировав и доказав теоремы для случая, когда сопротивление отсутствует, применять их с теми ограничениями, какие нам подсказывает опыт» [21]. Важно при этом понимать, что принцип идеализации не входит в число врожденных понятий человека, ему надо учить. По высказыванию А.А. Андропова «...Мандельштам утверждал, что вопросы идеализации должны занимать фундаментальное место во всяком преподавании физики – как в школьном, так и в университетском. Уже школьник должен сознавать, что в любой физической теории мы работаем с идеальными моделями реальных вещей и процессов» [22].

Один из важнейших примеров – **модели динамических систем**. Допустим, что мы создаем модель объекта, обладающего следующими свойствами:

1. Объект может быть однозначно описан конечным набором величин $x_1, x_2, \dots, x_n$. Эти величины называют фазовыми переменными. Пространство, в котором они определены, называют фазовым пространством, а их число n - числом степеней свободы или размерностью пространства.

2. Состояние объекта может меняться с течением времени t , т.е. переменные x_i зависят только от времени и при этом являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t .

3. Фазовая скорость изменения переменных по физическому (или иному в контексте моделирования) смыслу определяется как производная от соответствующей величины по времени $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}, \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}, \dots, \dot{x}_n = \frac{dx_n}{dt}$ и может зависеть только от независимой переменной t .

В таких случаях модель объекта может быть описана в терминах теории обыкновенных дифференциальных уравнений [4-8, 10, 19, 23]:

$$F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) = 0 \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Выражение (4.1) определяет неявную форму задания системы n дифференциальных уравнений, а выражение (4.2) – явную форму. Обычно систему (4.2) называют нормальной системой дифференциальных уравнений или динамической системой. Если в системах (4.1) и (4.2) в качестве переменной отсутствует явно время t , то динамическая система называется автономной.

Величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно интерпретировать как координаты движущейся материальной точки в фазовом пространстве. Величины $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}, \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}, \dots, \dot{x}_n = \frac{dx_n}{dt}$ при этом имеют смысл скоростей движения или фазовых скоростей и определяют в фазовом пространстве векторное поле.

Задача теории дифференциальных уравнений состоит в том, чтобы по векторному полю определить траекторию движения точки в фазовом пространстве. При этом данному дифференциальному уравнению принадлежит единственная траектория $x_i(t)$, если системам (4.1) и (4.2) поставить в соответствие начальные условия:

$$\begin{aligned}x_1(0) &= x_{10} \\x_2(0) &= x_{20} \\&\dots\dots\dots \\x_n(0) &= x_{n0}\end{aligned}\tag{4.3}$$

Рассмотрим несколько примеров базовых физических моделей в терминах динамических систем.

Динамическое описание колебательных систем [7, 8]

Движение фазовой точки соответствует эволюции состояния системы (4.2) с течением времени. Траектория точки, стартующей из состояния (4.3), представляет собой фазовую траекторию или интегральную кривую. В большинстве случаев интегральные кривые совпадают с фазовой траекторией. Однако интегральные кривые, проходящие через особые точки, состоят из нескольких фазовых траекторий. Точки фазового пространства, для которых правые части системы (4.2) тождественно равны нулю, остаются неизменными с течением времени и называются *неподвижными точками* или *особыми точками*. Множество особых точек определяет *состояние равновесия* динамической системы (ДС). Размерность фазового пространства определяется числом уравнений ДС. Кроме размерности фазового пространства часто используется понятие *числа степеней свободы* ДС. Под числом степеней свободы понимается число независимых координат и импульсов, характеризующих движение n материальных точек. Движение каждой материальной точки подчиняется второму закону Ньютона и описывается уравнением второго порядка.

Пример 1. Рассмотрим гармонический осциллятор

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.4)$$

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0 \quad (4.5)$$

Путем замены уравнение (4.4) приводится к системе двух уравнений

$$\dot{x} = y \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = -\omega_0^2 x \\ \dot{x} = y \end{cases} \quad (4.6)$$

Пример 2. Рассмотрим пример движения маятника с диссипативным трением. Уравнение движения представляется по 2-му закону Ньютона дифференциальным уравнением 2-го порядка

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = 0 \quad (4.7)$$

С начальными условиями

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Запишем уравнение (4.7) в виде нормальной системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\beta x - \alpha y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\beta x - \alpha y \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= v_0 \end{aligned}$$

Приведённые примеры представляют собой простейший вид динамических систем: линейные автономные динамические системы. Как известно из теории дифференциальных уравнений, такие системы всегда имеют решение, вид которых определяется из типа фундаментальных систем решений в зависимости от собственных значений матрицы коэффициентов правых частей системы уравнений вида (4.2). Если нас интересует поведение решений систем вида (4.2), то для этого используются методы качественной теории дифференциальных уравнений [7, 8, 23].

Пример 3. Линейные динамические системы являются предельно-идеалистическим представлением реальных процессов. Их распространение можно объяснить чрезвычайным удобством (вследствие упрощающих

допущений) в научном исследовании и техническом воплощении. Однако практически все процессы в сложных системах описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Рассмотрим примеры движения с нелинейными функциями $f_i(x_1, x_2, \dots)$. Уравнение движения нелинейного осциллятора представляется по 2-му закону Ньютона дифференциальным уравнением 2-го порядка, например, такого вида:

$$\ddot{x} + \sin x = 0 \quad (4.10)$$

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$$

Преобразование (4.10) в нормальную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases} \quad (4.11)$$

На рис. 4,5 представлены фазовый портрет и траектория системы (4.11)

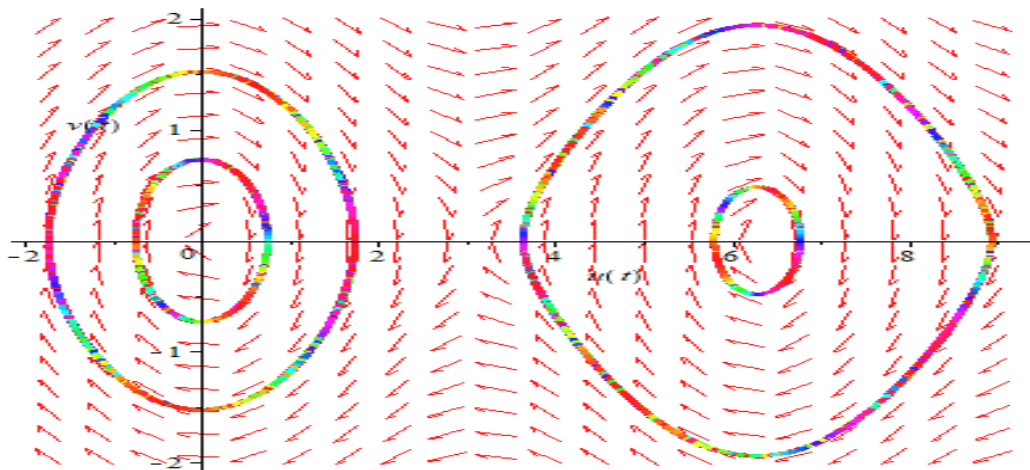


Рис. 4 Фазовый портрет с начальными условиями $[u(0) = 0.7, v(0) = 0.25]$,
 $[u(0) = 1.7, v(0) = 0.25]$, $[u(0) = 3.7, v(0) = 0.25]$, $[u(0) = 6.7, v(0) = 0.25]$

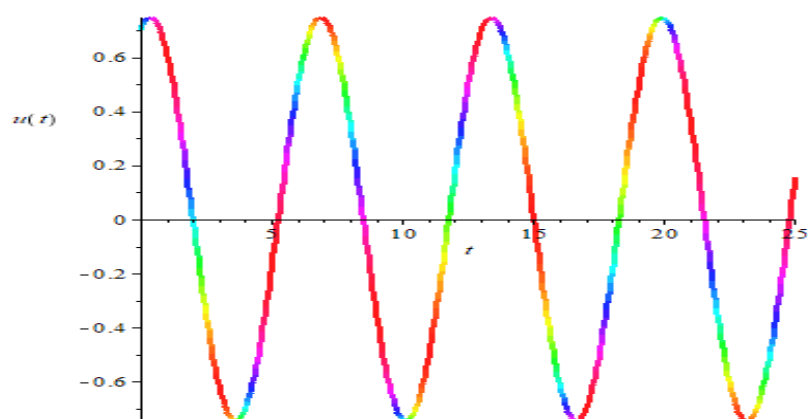


Рис. 5 Фазовая траектория с начальными условиями $[u(0) = 0.7, v(0) = 0.25]$

Решения нелинейного осциллятора ожидаемо представляются периодическими функциями, а фазовый портрет – замкнутыми концентрическими кривыми, что выражает тот факт, что колебания нелинейного маятника близки к гармоническим. При этом точки равновесия расположены на оси Ox $x_k = \pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ при этом $x_k = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ являются точками устойчивого равновесия, а $x_k = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ точками неустойчивого равновесия. В окрестности точек устойчивого равновесия траектории фазового портрета замкнутые кривые, а через точки неустойчивого равновесия проходят кривые, называемые сепаратрисами, их конфигурацию можно определить по стрелкам, задающим поле направлений на рис. 4. Следует отметить, что решение системы (4.11) получено численным методом, а его графическое представление удобно получить в математических пакетах типа Maple или wxmaxima.

Пример 4. В рассмотренных выше примерах **1** и **3** полная энергия системы сохраняется. Такие системы называются *консервативными*. Если в системе (как в примере **2**) возможны потери энергии, то такие системы называются *диссипативными*. В диссипативных системах могут существовать так называемые притягивающие множества – *аттракторы*. Аттрактором в теории динамических систем называют множество, к которому приближается решение (притягивающее множество). Понятие аттрактора нелинейной

динамической системы связано с понятием устойчивости. Решение $x = x(t, x_0)$ задачи $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\delta(\varepsilon)$, что при $\|\Delta x_0\| < \delta(\varepsilon)$ для всех $t > 0$ выполняется неравенство

$$\|x(t, x_0 + \Delta x_0) - x(t, x_0)\| < \varepsilon$$

Аттракторы, изучение которых важно с точки зрения устойчивости поведения динамических систем, являются математическими образами установившихся режимов. В терминологии системной динамики оперируют также понятиями «устойчивый аттрактор» и «неустойчивый аттрактор». Тем самым расширяется толкование динамики вблизи аттрактора решения – могут возникать ситуации, когда требование устойчивости по Ляпунову в окрестности аттрактора не выполняется. Примером аттрактора является предельный цикл – множество, к которому стремятся фазовые траектории (устойчивый предельный цикл) или от которого удаляются фазовые траектории (неустойчивый предельный цикл). Появление предельных циклов обусловлено особыми свойствами дифференциальных уравнений. Примером системы с предельным циклом является **нелинейный осциллятор Ван дер Поля**, уравнение которого имеет вид [7]

$$\ddot{x} = \mu[(3x^2 - 1)\dot{x} - x] \quad (4.12)$$

Для приведения его к виду нормальной системы используется метод Льенара.

Получить нормальную систему можно следующим образом:

- 1) проинтегрируем уравнение (4.12) по x ;
- 2) интеграл от x обозначим за y , следовательно, производная от него (или от функции y) будет равна $\dot{x}$.

В результате (4.12) приводится к виду, где $\varepsilon = \frac{1}{\mu}$

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = x(x^2 - 1) - y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases} \quad (4.13)$$

Отличительным признаком уравнения Ван дер Поля является наличие малого параметра при производной. Его роль в нелинейном осцилляторе – параметр возбуждения, обеспечивающего существование периодического асимптотически устойчивого движения, так называемого автоколебания, математическим образом которого является предельный цикл Пуанкаре, изображаемый в фазовом пространстве замкнутой линией, к которой со временем стягиваются фазовые траектории. Система (4.13) не имеет аналитического решения. Для получения фазового портрета воспользуемся опцией *DEtools→phaseportrait* пакета Maple

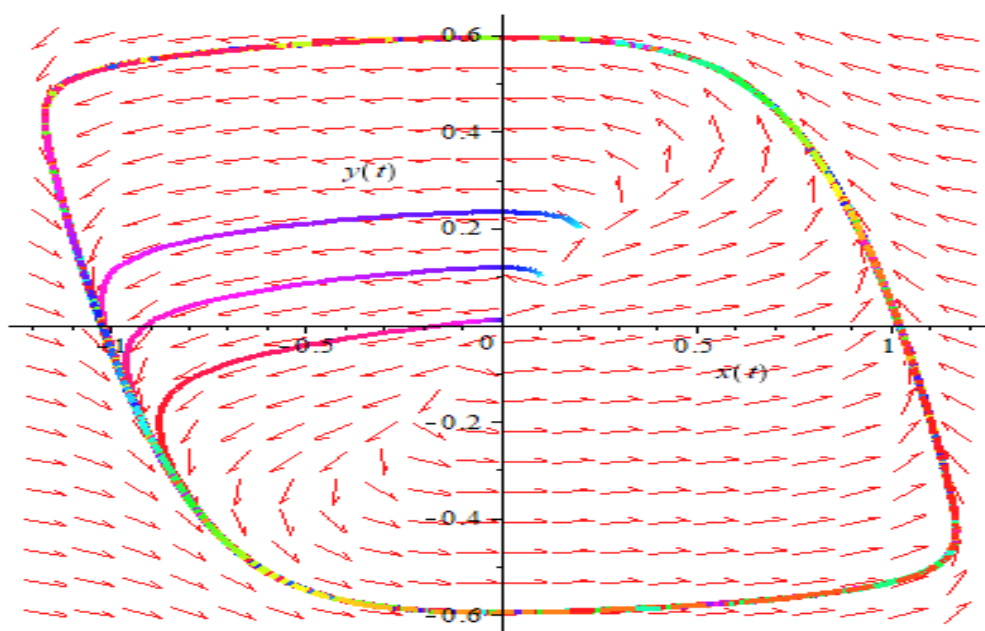


Рис. 6. Устойчивый предельный цикл $\varepsilon = 0.1$, $[x(0) = 0.01, y(0) = 0.01]$, $[x(0) = 0.1, y(0) = 0.1]$, $[x(0) = 0.2, y(0) = 0.2]$

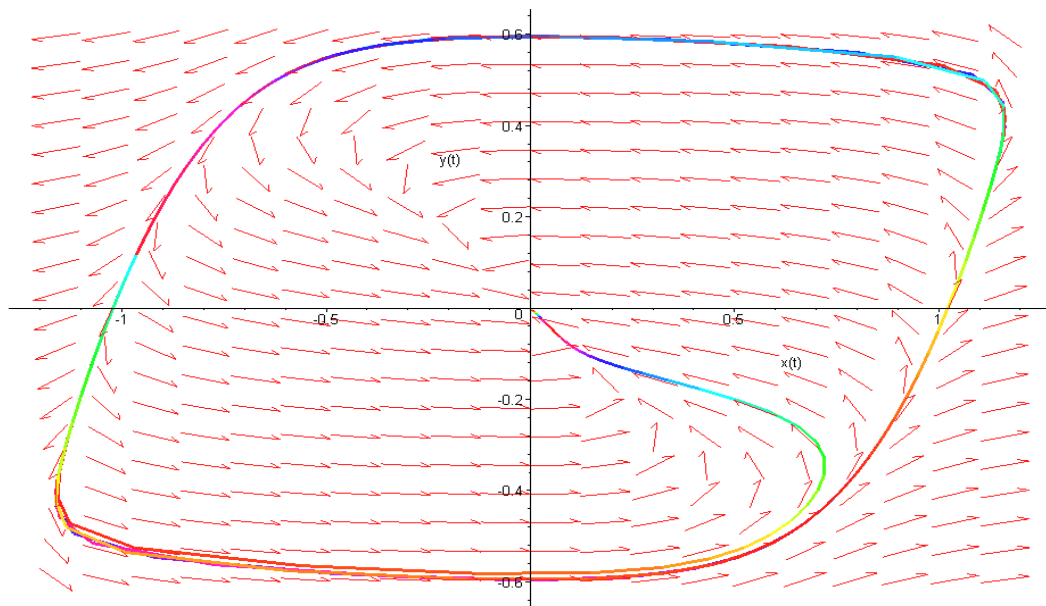


Рис. 6. Неустойчивый предельный цикл $\varepsilon = -0.1$, $x(0) = 0.5$, $y(0) = -0.2$.

5. Моделирование сложных систем

Несмотря на философскую привлекательность системного подхода на проблему сложности со многих точек зрения, решение любой задачи в конце концов следует определенному плану с определенной линией поведения. Поэтому трудно спорить с редукционизмом, не предлагая лучшей альтернативы. Прагматическое системное исследование синтезирует редукционизм и холизм, во-первых, концептуализируя проблемы в терминах их системных характеристик, и, во-вторых, идентифицируя те компоненты, которые в наибольшей степени влияют на систему. Другими словами, системный подход должен заимствовать наши врожденные способности декомпозировать сложные события на составные элементы, одновременно концептуализируя и идентифицируя отношения меняющейся интенсивности взаимодействия, характеризующий уровень взаимосвязи между элементами системы. Однако теория систем до сих пор критикуется за отсутствие жизнеспособной методологии. Несмотря на недостатки, теория систем предоставила концептуальную основу для построения новой методологии, которая позволяет нам описывать систему и ее проблемы в терминах

взаимосвязанной иерархии. Эта методология также предлагает средства для установления упорядочения приоритетов и измерения интенсивности взаимодействия компонент, описывающих структуру системы иерархии. Эта методология учитывает роль человеческого элемента в сложных техногенных, социальных и организационных системах и примиряет многочисленные и противоречивые устремления, имеющиеся у людей, чьи интересы затрагивает поведение системы. При этом необходимо понимать, что концепция взаимосвязанной иерархии, являясь продолжением и следствием принципа идеализации, возможна в результате *декомпозиции* сложной системы.

5.1 Декомпозиция сложных систем

Декомпозиция, как процесс расчленения, позволяет рассматривать любую исследуемую систему как сложную, состоящую из отдельных взаимосвязанных подсистем, которые, в свою очередь, также могут быть расчленены на части. В качестве систем могут выступать не только материальные объекты, но и процессы, явления и понятия. В общей теории систем доказано, что большинство систем могут быть декомпозированы на базовые представления подсистем. К ним относят:

- последовательное (каскадное) соединение элементов;
- параллельное соединение элементов;
- соединение с помощью обратной связи.

Проблема проведения декомпозиции состоит в том, что в сложных системах отсутствует однозначное соответствие между законом функционирования подсистем и алгоритмом, его реализующим. Поэтому осуществляется формирование нескольких вариантов (или одного варианта, если система отображена в виде иерархической структуры) декомпозиции системы. Кроме того, необходимо понимать, что процесс декомпозиции осуществляется в рамках взаимодействия части и целого. Закономерность

целостности/эмерджентности проявляется в системе в появлении у нее новых свойств, отсутствующих у элементов. Для того чтобы глубже понять закономерность целостности, необходимо, прежде всего, учитывать две ее стороны:

1. свойства системы (целого) Q_s не является простой суммой свойств составляющих ее элементов (частей): $Q_s \neq \sum_{i=1}^N Q_i$
2. свойства системы (целого) зависят от свойств составляющих ее элементов (частей): $Q_s = f(q_i)$

Кроме этих двух основных сторон, следует иметь в виду, что объединенные в систему элементы, как правило, утрачивают часть своих свойств, присущих им вне системы, т.е. система как бы подавляет ряд свойств элементов. Но, с другой стороны, элементы, попав в систему, могут приобрести новые свойства. Обратимся к закономерности, двойственной по отношению к закономерности целостности. Ее называют физической аддитивностью, независимостью, обособленностью. Свойство физической аддитивности проявляются у системы, как бы распавшейся на независимые элементы; тогда становится справедливым $Q_s = \sum_{i=1}^N Q_i$ В этом крайнем случае и говорить о системе уже нельзя. Рассмотрим промежуточные варианты – две сопряженные закономерности, которые можно назвать прогрессирующей факторизацией – стремлением системы к состоянию с все более независимыми элементами, и прогрессирующей систематизацией – стремлением системы к уменьшению самостоятельности элементов, т. е. к большей целостности. В этом процессе декомпозиции важным аспектом является установление порядка – *иерархии* внутренней структуры сложной системы.

Рассмотрим закономерности иерархической упорядоченности систем Эта группа закономерностей характеризует и взаимодействие системы с ее окружением – со средой (значимой или существенной для системы), надсистемой, подчиненными системами.

Коммуникативность. Эта закономерность составляет основу определения системы, где система не изолирована от других систем, она связана множеством коммуникаций со средой, представляющей собой, в свою очередь, сложное и неоднородное образование, содержащее надсистему (метасистему – систему более высокого порядка, задающую требования и ограничения исследуемой системе), подсистемы (нижележащие, подведомственные системы), и системы одного уровня с рассматриваемой. Такое сложное единство со средой названо закономерностью коммуникативности, которая, в свою очередь легко помогает перейти к иерархичности как закономерности построения всего мира и любой выделенной из него системы.

Иерархичность. Закономерности иерархичности или иерархической упорядоченности были в числе первых закономерностей теории систем, которые выделил и исследовал Л. фон. Берталанфи. Необходимо учитывать не только внешнюю структурную сторону иерархии, но и функциональные взаимоотношения между уровнями. Например, в биологических организациях более высокий иерархический уровень оказывает направляющее воздействие на нижележащий уровень, подчиненный ему, и это воздействие проявляется в том, что подчиненные члены иерархии приобретают новые свойства, отсутствовавшие у них в изолированном состоянии (подтверждение положения о влиянии целого на элементы, приведенного выше), а в результате появления этих новых свойств формируется новый, другой «облик целого» (влияние свойств элементов на целое). Возникшее таким образом новое целое приобретает способность осуществлять новые функции, в чем и состоит цель образования иерархий. Выделим основные особенности иерархической упорядоченности с точки зрения полезности их использования в качестве моделей системного анализа:

1. В силу закономерности коммуникативности, которая проявляется не только между выделенной системой и ее окружением, но и между

уровнями иерархии исследуемой системы, каждый уровень иерархической упорядоченности имеет сложные взаимоотношения с вышестоящим и нижележащим уровнями. Эта конкретизация закономерности иерархичности объясняет неоднозначность использования в сложных организационных системах понятий «система» и «подсистема», «цель» и «средство» (элемент каждого уровня иерархической структуры целей выступает как цель по отношению к нижележащим и как «подцель», а начиная с некоторого уровня, и как «средство» по отношению к вышестоящей цели), что часто наблюдается в реальных условиях и приводит к некорректным терминологическим спорам.

2. Важнейшая особенность иерархической упорядоченности как закономерности заключается в том, что закономерность целостности/эмерджентности (т.е. качественные изменения свойств компонентов более высокого уровня по сравнению с объединяемыми компонентами нижележащего) проявляется в ней на каждом уровне иерархии. При этом объединение элементов в каждом узле иерархической структуры приводит не только к появлению новых свойств у узла и утрате объединяемыми компонентами свободы проявления некоторых своих свойств, но и к тому, что каждый подчиненный член иерархии приобретает новые свойства, отсутствовавшие у него в изолированном состоянии.

Учитывая, что наиболее распространенным способом представления целей в системах организационного управления являются древовидные иерархические структуры («деревья целей»), рассмотрим основные рекомендации по их формированию:

- приемы, применяющиеся при формировании древовидных иерархий целей, можно свести к двум подходам: а) формирование структур «сверху» – методы структуризации, декомпозиции, целевой или

целенаправленный подход, б) формирование структур целей «снизу» – морфологический, лингвистический, тезаурусный, терминальный подход; на практике обычно эти подходы сочетаются;

- цели нижележащего уровня иерархии можно рассматривать как средства для достижения целей вышестоящего уровня, при этом они же являются целями для уровня нижележащего по отношению к ним;
- в иерархической структуре по мере перехода с верхнего уровня на нижний происходит как бы смещение рассмотренной выше «шкалы» от цели-направления к конкретным целям и функциям, которые на нижних уровнях структуры могут выражаться в виде ожидаемых результатов конкретной работы с указанием критериев оценки ее выполнения, в то время как на верхних уровнях иерархии указание критериев может быть выражено в общих требованиях.

5.2 Метод анализа иерархий

Принцип идентичности и декомпозиции предусматривает структурирование проблем в виде иерархии или сети, что является первым этапом применения *метода анализа иерархий* (МАИ) [24]. В наиболее элементарном виде иерархия строится с вершины (целей — с точки зрения управления), через промежуточные уровни (критерии, от которых зависят последующие уровни) к самому низкому уровню (который обычно является перечнем альтернатив). Существует несколько видов иерархий. Самые простые — доминантные иерархии, которые похожи на перевернутое дерево с основой в вершине. Холлархии — это, по существу, доминантные иерархии с обратной связью. Китайский ящик (или модулярные иерархии) растет в размерах от простейших элементов или компонент (внутренние ящики) ко все более крупным совокупностям (внешние ящики). В биологии интерес представляют неогенетические иерархии, в которых новые верхние уровни возникают

последовательно в течение эволюции. Мы сконцентрируем внимание на доминантных иерархиях, хотя теория, описанная ниже, распространяется и на другие иерархические формы. Иерархия считается полной, если каждый элемент заданного уровня функционирует как критерий для всех элементов нижестоящего уровня. В противном случае иерархия — неполная. Нетрудно понять процесс определения весов в случае неполной иерархии, так как используются приоритеты соответствующего элемента, по отношению к которому производится оценка, т. е. иерархия может быть разделена на подиерархии, имеющие общий самый верхний элемент.

5.2.1. Алгоритм метода анализа иерархий (МАИ).

Отдельным этапам метода можно уделять больше внимания в одних ситуациях, чем в других. Перечислим последовательность этапов [24]:

1. Очертите проблему и определите, что вы хотите узнать.
2. Постройте иерархию, начиная с вершины (цели — с точки зрения управления), через промежуточные уровни (критерии, по которым зависят последующие уровни) к самому нижнему уровню (который обычно является перечнем альтернатив).
3. Постройте множество матриц парных сравнений для каждого из нижних уровней — по одной матрице для каждого элемента примыкающего сверху уровня. Этот элемент называют направляемым по отношению к элементу, находящемуся на нижнем уровне, так как элемент нижнего уровня влияет на расположенный выше элемент. В полной простой иерархии любой элемент воздействует на каждый элемент примыкающего сверху уровня. Элементы любого уровня сравниваются друг с другом относительно их воздействия на направляемый элемент. Таким образом, получаем квадратную матрицу суждений. Попарные сравнения проводятся в терминах доминирования одного из элементов над другим. Эти суждения затем выражаются в целых числах (см. табл.

- 1 для величин суждений). Если элемент А доминирует над элементом Б, то клетка, соответствующая строке А и столбцу Б, заполняется целым числом, а клетка, соответствующая строке Б и столбцу А, заполняется обратным к нему числом (дробью). Если элемент Б доминирует над элементом А, то происходит обратное: целое число ставится в позицию Б, А, а обратная величина автоматически в позицию А, Б. Если считается, что А и Б одинаковы, в обе позиции ставится единица.
4. На этапе 3 для получения каждой матрицы требуется $n(n - 1)/2$ суждений (напомним, что при каждом парном сравнении автоматически приписываются обратные величины).
 5. После проведения всех парных сравнений и ввода данных по собственному значению можно определить согласованность. Затем, используя отклонение λ_{max} от n , проверяем индекс согласованности (ИС), далее, сравнивая с соответствующими средними значениями для случайных элементов, получаем отношение согласованности (ОС).
 6. Этапы 3, 4 и 5 проводятся для всех уровней и групп в иерархии.
 7. Теперь используется иерархический синтез для взвешивания собственных векторов весами критериев и вычисляется сумма по всем соответствующим взвешенным компонентам собственных векторов уровня иерархии, лежащего ниже.
 8. Согласованность всей иерархии можно найти, перемножая каждый индекс согласованности на приоритет соответствующего критерия и суммируя полученные числа. Результат затем делится на выражение такого же типа, но со случайным индексом согласованности (СИС), соответствующим размерам каждой взвешенной приоритетами матрицы. Отметим, во-первых, что приемлемым является ОС около 10% или менее. В противном случае качество суждений следует улучшить, возможно пересмотрев способ, следуя которому задаются вопросы при

проведении парных сравнений. Если это не поможет улучшить согласованность, то, вероятно, задачу следует более точно структурировать, т. е. сгруппировать аналогичные элементы под более значащими критериями. Потребуется возврат к этапу 2, хотя пересмотра могут потребовать только сомнительные части иерархии.

При проведении оценок следует иметь в виду все сравниваемые элементы, чтобы сравнения были релевантными. Нетрудно убедиться в том, что для проведения обоснованных численных сравнений не следует сравнивать более чем 7 ± 2 элементов. В таком случае маленькая погрешность в каждой относительной величине меняет ее не очень значительно. Если это так, то каким образом работать с более широким классом объектов? Ответ таков: посредством иерархической декомпозиции. Элементы группируются (в качестве первой оценки) в сравниваемые классы приблизительно из семи элементов в каждом. Элемент с наивысшим весом в классе также включается в следующий класс элементов с большими весами и как своеобразный стержень между двумя классами придает однородность шкале. Процедура повторяется от одного класса к смежному классу, пока все элементы не будут взвешены соответствующим образом.

В некоторых задачах с большим числом альтернатив нам не всегда нужно проводить парные сравнения между ними. Вместо этого вводим субкритерии (например, высокий, средний, низкий) и устанавливаем важность этих субкритериев по отношению к критериям. Затем берем каждую альтернативу, проверяем, который из субкритериев описывает ее наилучшим образом, и принимаем приоритет этого субкритерия. Далее складываем все приоритеты для этой альтернативы, и, наконец, нормализуем величины альтернатив, чтобы получить их общий приоритет.

5.2.2. Пример – покупка дома.

Семья среднего достатка решила купить дом. В результате обсуждения удалось определить восемь критериев, которым, как казалось, должен

удовлетворять дом. Эти критерии можно разбить на три кластера: экономический, географический и физический. Хотя можно было начать с исследования сравнительной важности кластеров, члены семьи чувствовали, что им хочется определять сравнительную важность всех факторов, не имея дела с кластерами. Задача заключалась в выборе одного из трех домов-кандидатов. Первый шаг состоит в декомпозиции и представлении задачи в иерархической форме. На первом (высшем) уровне находится общая цель **C** – дом. На втором уровне находятся восемь факторов или критериев, уточняющих цель, и на третьем (нижнем) уровне находятся три альтернативы (дома-кандидаты: **C1**, **C2**, **C3**), которые должны быть оценены по отношению к критериям второго уровня. Далее следует определение критериев и графическое представление иерархии. У членов семьи были следующие критерии:

1. **A1-Размеры дома:** емкость хранилищ; размеры комнат; число комнат; общая площадь дома.
2. **A2-Логистика** (удобство автобусных маршрутов): близкая автобусная стоянка.
3. **A3-Локация** (Окрестности): интенсивность движения транспорта; безопасность; хороший вид; низкие налоги; ухоженные окрестности.
4. **A4-История** (Когда построен дом).
5. **A5-Двор:** включает пространство перед домом, сзади, сбоку, а также расстояние до соседей.
6. **A6-Инфраструктура:** посудомоечная машина; удаление мусора; кондиционирование воздуха; система сигнализации и другие подобные устройства, имеющиеся в доме.
7. **A7-Общее состояние:** потребность в ремонте; стены, ковер, драпировки, чистота; электропроводка; крыша; водопроводная система.

8. **А8-Финансовые условия:** допускаемая закладная, условия продажи и банковский кредит.

Ниже на рис. 7 приведена диаграмма иерархии задачи выбора дома.

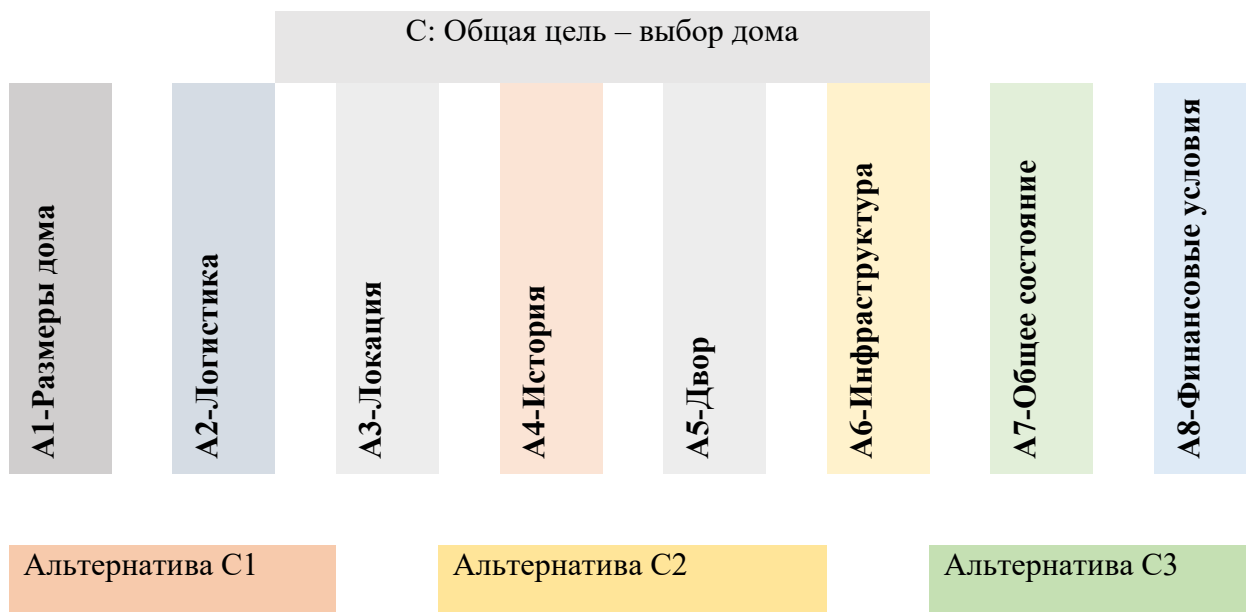


Рис. 7 Декомпозиция задачи иерархической формой

Закон иерархической непрерывности требует, чтобы элементы нижнего уровня иерархии были сравнимы попарно по отношению к элементам следующего уровня и т. д. вплоть до вершины иерархии. Например, надо получить имеющие смысл ответы на вопросы такого типа: «Насколько дом А лучше дома Б или В по критерию окрестности?» или «Насколько по отношению к основной цели размеры дома важнее расположения к автобусным маршрутам?» и т. д. Когда есть сомнения относительно того, какие уровни ввести в иерархию, закон иерархической непрерывности обеспечивает связь. Целью построений является получение приоритетов элементов на последнем уровне, наилучшим образом отражающих относительное воздействие на вершину иерархии. Для количественной оценки приоритетов необходимо тем или иным способом дать численные значения относительной важности критериев (факторов)

Таблица 1. Шкала относительных важностей

Интенсивность относительной важности	Определение	Объяснения
1	Равная важность	Равный вклад двух видов деятельности в цель
3	Умеренное превосходство одного над другим	Опыт даёт легкое превосходство одному виду деятельности над другим
5	Существенное или сильное превосходство	Опыт даёт сильное превосходство одному виду деятельности над другим
7	Значительное превосходство	Превосходство дается настолько сильное, что оно становится практически значительным
9	Очень сильное превосходство	Превосходство одного вида деятельности над другим подтверждается наиболее сильно
2,4,6,8	Промежуточные решения между двумя соседними суждениями	Применяются в компромиссном случае
Обратные величины приведенных выше чисел		В соответствие с построением матрицы с обратной симметрией

В МАИ элементы задачи сравниваются попарно по отношению к их воздействию («весу», или «интенсивности») на общую для них характеристику. Для проведения субъективных парных сравнений разработана шкала, описанная выше в табл. 1. Эта шкала оказалась эффективной не только во многих приложениях, ее правомочность доказана теоретически при сравнении со многими другими шкалами.

Важно отметить, что МАИ требует структурирования проблемы участниками в процессе решения; в этом простом примере члены семьи составляют иерархию в соответствии с их потребностями, пониманием ограничений (например, денежных средств) и существующими вариантами выбора. Этот этап требует обсуждения, чтобы быть уверенными, что критерии и

альтернативы отражают весь диапазон предпочтений и восприятия участников.

Проведем парные сравнения, приводящие к матричной форме — квадратной таблице $\{a_{ij}\}$, обладающей свойством обратной симметрии $a_{ij} = 1/a_{ji}$, где элементы a_{ij} представляют собой «веса», или «интенсивности» критериев A_i .

Таблица 2. Матрица парных сравнений для уровня 2

А-общая цель	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
A1-Размер дома	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4
A2-Логистика	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7
A3-Локация	1/3	3	1	6	3	4	6	1/5
A4_История	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8
A5-Двор	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6
A6-Инфраструктура	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6
A7-Общее состояние	3	5	1/6	7	5	5	1	1/2
A8-Финансовые условия	4	7	5	8	6	6	2	1

Отметим, что клетки матрицы заполнены в соответствии с субъективными суждениями членов семьи на основании их предпочтений, восприятии ограничений, возможностей, с использованием шкалы от 1 до 9. Например, на вопрос: какова важность размеров относительно удобства автобусных маршрутов по отношению к общей, цели? Члены семьи пришли к соглашению, что размеры существенно важнее, и поэтому они внесли 5 в соответствующую клетку матрицы; 1/5 автоматически заносится в симметричную относительно диагонали клетку, что соответствует противоположному сравнению. Для большей ясности эти оценки помечены черточками (см. табл. 2). Когда в дискуссии участвует несколько человек, по многим суждениям часто происходят споры и людям предлагается

подтвердить свои суждения всевозможными доводами, суть которых определяется информацией, которой они располагают. В таких случаях обсуждение обычно сосредоточивается на допущениях, из которых следуют суждения, а не на самих суждениях. Иногда группа принимает геометрическое среднее разных оценок в качестве общей для обратно-симметричных суждений. Если возникают значительные расхождения, различные мнения могут быть сгруппированы и использованы для получения ответов. Те суждения в группе, в которых последовательно обнаруживается наибольшая согласованность, обычно получают всеобщую поддержку. Метод анализа иерархий охватывает одинаково как факторы, по которым возможно проведение определенных измерений, так и неосязаемые факторы, по которым требуются суждения. В конечном счете обнаруживается, что так называемые «твердые» оценки не имеют значения сами по себе, отдельно от их утилитарной интерпретации. Следует внимательно проверить возможную взаимозависимость критериев, например, таких, как состояние и время постройки дома, чтобы избежать ощутимых перекрытий. Поэтому суждения о сравнительной важности таких вещей, как состояние и время постройки дома, должны производиться настолько независимо, насколько возможно. Теперь перейдем к парным сравнениям элементов на нижнем уровне (табл. 3).

Таблица 3. Матрицы парных сравнений для 3-го уровня

A1-Размер дома	C1	C2	C3	A2-Логистика	C1	C2	C3
C1	1	6	8	C1	1	7	1/5
C2	1/6	1	4	C2	1/7	1	1/8
C3	1/8	1/4	1	C3	5	8	1
A3-Локация	C1	C2	C3	A4_История	C1	C2	C3
C1	1	8	6	C1	1	1	1

C2	1/8	1	1/4	C2	1	1	1
C3	1/6	4	1	C3	1	1	1
A5-Двор	C1	C2	C3	A6- Инфраструктура	C1	C2	C3
C1	1	5	4	C1	1	8	6
C2	1/5	1	1/3	C2	1/8	1	1/5
C3	1/4	3	1	C3	1/6	5	1
A7-Общее состояние	C1	C2	C3	A8-Финансовые условия	C1	C2	C3
C1	2	1/2	1/2	C1	1	1/7	1/5
C2	2	1	1	C2	7	1	3
C3	2	1	1	C3	5	1/3	1

Сравниваемые попарно элементы — это возможные варианты выбора дома. Сравнивается, насколько более желателен или хорош тот или иной дом для удовлетворения каждого критерия второго уровня. Получаем восемь матриц суждений размерностью 3х3, поскольку имеется восемь критериев на втором уровне и три дома, которые попарно сравниваются по каждому из критериев. Матрицы вновь содержат суждения членов семьи. Для того чтобы понять суждения, дадим краткое описание домов.

Дом С1. Это — самый большой дом, вокруг хорошие окрестности, неинтенсивное движение транспорта, налоги на дом невелики. Двор больше, чем у домов С2 и С3. Тем не менее общее состояние не очень хорошее, нужна основательная починка и проведение малярных работ. Из-за того, что дом финансируется банком с высокой процентной ставкой, финансовые условия можно считать неудовлетворительными.

Дом С2. Этот дом немножко меньше дома С1, расположен далеко от автобусных остановок, вокруг интенсивное движение транспорта. Дом

довольно мал, и в нем отсутствуют основные современные удобства. С другой стороны, общее состояние очень хорошее. Кроме того, на дом можно получить закладную с довольно низкой процентной ставкой; это означает, что финансовые условия вполне удовлетворительны.

Дом С3. Этот дом очень маленький, и в нем нет современных удобств. В окрестности — высокие налоги, но дом в хорошем состоянии и представляется безопасным. Двор больше, чем у дома С2, однако несравненно меньше обширного Пространства вокруг дома С1. Общее состояние дома — хорошее, и в нем красивые ковры и обои. Финансовые условия намного лучше, чем для дома С1, но не так хороши, как для дома С2.

На этом этапе в нашем примере семья построила иерархию, составила матрицы и выразила субъективные парные суждения. Однако, что все эти цифры означают и как они помогут определить тот дом, который следует купить? Далее опишем, каким образом сочетаются иерархическая декомпозиция и шкала относительной важности для получения осмысленных подходов к многокритериальным проблемам планирования.

5.2.3 Синтез локальных приоритетов

Из группы матриц парных сравнений мы формируем набор локальных приоритетов, которые выражают относительное влияние множества элементов на элемент примыкающего сверху уровня. Находим относительную силу, величину, ценность, желательность или вероятность каждого отдельного объекта через «решение» матриц, каждая из которых обладает обратносимметричными свойствами. Для этого нужно вычислить множество собственных векторов для каждой матрицы, а затем нормализовать результат к единице, получая тем самым вектор приоритетов. Вычисление собственных векторов — не очень сложная задача, однако может потребовать довольно много времени. К счастью, имеются несложные пути получения хорошего приближения к приоритетам. Одним из наилучших путей является

геометрическое среднее. Это можно сделать, перемножая элементы в каждой строке и извлекая корни n -й степени, где n — число элементов. Полученный таким образом столбец чисел нормализуется делением каждого числа на сумму всех чисел. Иной способ заключается в нормализации элементов каждого столбца матрицы и затем в усреднении каждой строки. Таким образом мы можем определить не только порядок приоритетов каждого отдельного элемента, но и величину его приоритета. Попросту говоря, если задано десять видов десерта на выбор, то имеется возможность не только расположить их в порядке нашего предпочтения, но и разрешить вопрос о сравнительной интенсивности нашего желания попробовать каждый из них. Перечень других способов аппроксимации приоритетов дан в [24]. При использовании любого метода аппроксимации существует опасность изменения порядка ранжирования и поэтому получения нежелательных результатов. Подход, основанный на собственном векторе, использует информацию, которая содержится в любой, даже несогласованной матрице, и позволяет получать приоритеты, основанные на имеющейся информации, не производя арифметических преобразований данных. Для индивидуума или группы лиц идея заключается в том, чтобы решить, хотят они или нет изменить суждения. Сложная математика не может «улучшить» то, что индивидуум не хочет менять. Рассмотрим процедуру получения векторов локальных приоритетов как одну из предложенных аппроксимаций собственных векторов. Когда матрица имеет такой вид как в таблице 4, получается, что в действительности x_1, x_2, x_3, x_4 есть не что иное, как w_1, w_2, w_3, w соответственно. Из отношений, $\frac{w_i}{w_j}$ определим каждую компоненту w_i . Важно отметить, что в матрице суждений нет отношения в виде $\frac{w_i}{w_j}$, а имеются только целые числа или их обратные величины из шкалы. Эта матрица в общем случае несогласованная.

Таблица 4. Построение вектора приоритетов

	A_1	A_2	A_3	A_4	Собственный вектор	Нормализация	Вектор приоритетов
A_1	$\frac{w_1}{w_1}$	$\frac{w_2}{w_1}$	$\frac{w_3}{w_1}$	$\frac{w_4}{w_1}$	$\sqrt[4]{\frac{w_1 w_2 w_3 w_4}{w_1 w_1 w_1 w_1}}$ $= a_1$	$x_1 = \frac{a_1}{\sum_1^4 a_i}$	Y_1
A_2	$\frac{w_1}{w_1}$	$\frac{w_1}{w_1}$	$\frac{w_1}{w_1}$	$\frac{w_1}{w_1}$	$\sqrt[4]{\frac{w_1 w_2 w_3 w_4}{w_2 w_2 w_2 w_2}}$ $= a_2$	$x_2 = \frac{a_1}{\sum_1^4 a_i}$	Y_1
A_3	$\frac{w_1}{w_1}$	$\frac{w_1}{w_1}$	$\frac{w_1}{w_1}$	$\frac{w_1}{w_1}$	$\sqrt[4]{\frac{w_1 w_2 w_3 w_4}{w_3 w_3 w_3 w_3}}$ $= a_3$	$x_3 = \frac{a_1}{\sum_1^4 a_i}$	Y_1
A_4	$\frac{w_1}{w_1}$	$\frac{w_1}{w_1}$	$\frac{w_1}{w_1}$	$\frac{w_1}{w_1}$	$\sqrt[4]{\frac{w_1 w_2 w_3 w_4}{w_4 w_4 w_4 w_4}}$ $= a_4$	$x_4 = \frac{a_1}{\sum_1^4 a_i}$	Y_1
					$\sum_1^4 a_i$		

Для согласованности матрицы необходимо определить дополнительные параметры. Это *индекс согласованности* (ИС), *случайная согласованность* (СС) и *отношение согласованности* (ОС). Если разделить ИС на число, соответствующее случайной согласованности матрицы того же порядка, получим отношение согласованности (ОС). Величина ОС должна быть порядка 10% или менее, чтобы быть приемлемой. В некоторых случаях можно допустить 20%, но не более. Если ОС выходит из этих пределов, то участникам нужно исследовать задачу и проверить свои суждения. Для определения СС в

работе [24] приводится таблица значений СС в зависимости от размерности матрицы парных сравнений или числа критериев.

Таблица 5 значений случайной согласованности матрицы парных сравнений

Число столбцов n (критериев) матрицы парных сравнений	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайная согласованность (СС)	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

Индекс согласованности в каждой матрице и для всей иерархии может быть приближенно получен вычислениями вручную. Сначала суммируется каждый столбец суждений, затем сумма первого столбца умножается на величину первой компоненты нормализованного вектора приоритетов, сумма второго столбца — на вторую компоненту и т. д. Затем полученные числа суммируются. Таким образом можно получить величину, обозначаемую λ_{max} . Для индекса согласованности имеем $ИС = (\lambda_{max} - n)/(n - 1)$, где n число сравниваемых элементов.

Для обратно-симметричной матрицы всегда $\lambda_{max} \geq n$.

Определение λ_{max} можно выполнить приближенно по указанному алгоритму, который представлен в таблице 7 для приведенного примера

В сравнительно больших матрицах (например, от 7 до 9 элементов) часто трудно достигнуть высокого уровня согласованности. Тем не менее уровень согласованности должен соответствовать тому риску, который сопутствует работе с несогласованными результатами.

Таблица 7. Вычисление параметра λ_{max} для определения согласованности матрицы парных сравнений

A_{ij}	A_1	A_2	A_3	A_4	Вектор локальных приоритетов	Вычисление произведений $P_j = S_j \cdot Y_j$
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	Y_1	$P_1 = S_1 \cdot Y_1$
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	Y_2	$P_2 = S_2 \cdot Y_2$
A_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	Y_3	$P_3 = S_3 \cdot Y_3$
A_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	Y_4	$P_4 = S_4 \cdot Y_4$
Sum, S_j	$\sum_1^4 a_{j1}$	$\sum_1^4 a_{j2}$	$\sum_1^4 a_{j3}$	$\sum_1^4 a_{j4}$		$\lambda_{max} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$

Для завершения синтеза метода МАИ рассмотренные процедуры надо повторить на каждом уровне иерархии. Приоритеты синтезируются, начиная со второго уровня вниз. Локальные приоритеты перемножаются на приоритет соответствующего критерия на вышестоящем уровне и суммируются по каждому элементу в соответствии с критериями, на которые воздействует этот элемент. (Каждый элемент второго уровня умножается на единицу, т. е. на вес единственной цели самого верхнего уровня.) Это дает составной, или глобальный, приоритет того элемента, который затем используется для взвешивания локальных приоритетов элементов, сравниваемых по отношению к нему как к критерию и расположенных уровнем ниже. Процедура продолжается до самого нижнего уровня.

Для иллюстрации этих идей на конкретной задаче вернемся к семье, покупающей дом. В табл.8 представлена еще раз матрица попарных сравнений для второго уровня иерархии, которая, как помнит читатель, содержит восемь критериев, воспринимаемых как воздействующие на общую цель — «Дом». На этот раз вычислим вектор приоритетов, собственное значение λ_{max} , индекс согласованности и отношение согласованности. Отметим, что отношение

согласованности несколько выше, чем нам хотелось бы, однако семья решила не пересматривать суждения, так как их не интересовали строго согласованные результаты.

Таблица 8. Результаты расчета параметров матрицы парных сравнений для 2-го уровня иерархии покупки дома.

А-общая цель	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Вектор приоритетов	Параметры
A1-Размер дома	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4	0.173	λ_{max} = 9.669
A2-Логистика	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7	0.054	ИС=0.238
A3-Локация	1/3	3	1	6	3	4	6	1/5	0.188	СС=1.41
A4_История	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8	0.018	ОС=0.169
A5-Двор	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6	0.031	
A6-Инфраструктура	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6	0.036	
A7-Общее состояние	3	5	1/6	7	5	5	1	1/2	0.167	
A8-Финансовые условия	4	7	5	8	6	6	2	1	0.333	

Столбец под номером 10 таблицы 8 показывает относительные значения вектора приоритетов. Как теперь интерпретировать полученные таким образом приоритеты? Ясно, что наличие адекватного финансирования воспринимается семьей как наиболее важный критерий при выборе дома. Фактически он почти в 2 раза важнее размеров (0.333 против 0.173) и намного более важен, чем время постройки (История), который имеет низкий приоритет, равный 0.018. Действительно, можно было бы выбрать для

рассмотрения только 3 или 4 наиболее важных критерия — скажем финансирование, окрестности, размеры и общее состояние, при проведении последующих вычислений, так как они окажут наибольшее влияние на окончательный выбор дома. Для того чтобы проделать это, следует просто сложить приоритеты наиболее важных критериев и разделить каждый на сумму, получив таким образом новый нормализованный вектор-приоритетов для более легкого исследования набора критериев. В этом примере тем не менее сохраняются все критерии для проведения с помощью МАИ всего процесса в полном объеме. В табл. 9 вновь вводятся парные сравнения для третьего уровня иерархии, иллюстрирующие сравнительную желательность домов С1, С2 и С3 по отношению к критериям второго уровня. Видно, что дом С2 — лучший по критерию финансирования, а дом С1 воспринимается как лучший относительно размеров и удобства автобусных маршрутов.

Таблица 9 Результаты расчета параметров матриц парных сравнений для 3-го уровня иерархии

А1- Размер дома	С 1	С 2	С 3	Вектор приоритетов	Параметры	А2- Логистика	С 1	С 2	С 3	Вектор приоритетов	Параметры
С1	1	6	8	0.754	$\lambda_{max}=3$.136	С1	1	7	1/5	0.233	$\lambda_{max}=3$.247
С2	1/6	1	4	0.181	ИС=0.068	С2	1/7	1	1/8	0.005	ИС=0.124
С3	1/8	1/4	1	0.065	ОС=0.117	С3	5	8	1	0.713	ОС=0.213
А3- Локация	С 1	С 2	С 3	Вектор приоритетов	Параметры	А4_История	С 1	С 2	С 3	Вектор приоритетов	Параметры

C1	1	8	6	0.745	λ_{max} = 3.130	C1	1	1	1	0.333	λ_{max} = 3.000
C2	1/ 8	1	1/ 4	0.065	ИС=0.06 8	C2	1	1	1	0.333	ИС=0.0
C3	1/ 6	4	1	0.181	ОС=0.11 7	C3	1	1	1	0.333	ОС=0.0
A5- Двор	C 1	C 2	C 3	Вектор приорит етов	Парамет ры	A6- Инфраструктура	C 1	C 2	C 3	Вектор приорит етов	Парамет ры
C1	1	5	4	0.674	$\lambda_{max}=3.08$	C1	1	8	6	0.747	λ_{max} = 3.197
C2	1/ 5	1	1/ 3	0.101	ИС=0.04 3	C2	1/ 8	1	1/ 5	0.060	ИС=0.09 9
C3	1/ 4	3	1	0.226	ОС=0.07 4	C3	1/ 6	5	1	0.193	ОС=0.17 0
A7- Общесостояние	C 1	C 2	C 3	Вектор приорит етов	Парамет ры	A8- Финансовые условия	C 1	C 2	C 3	Вектор приорит етов	Парамет ры
C1	2	1/ 2	1/ 2	0.200	λ_{max} = 3.000	C1	1	1/ 7	1/ 5	0.072	λ_{max} = 3.065
C2	2	1	1	0.400	ИС=0.0	C2	7	1	3	0.650	ИС=0.03 2
C3	2	1	1	0.400	ОС=0.0	C3	5	1/ 3	1	0.278	ОС=0.05 6

5.2.4. Синтез глобальных приоритетов

Следующим этапом является применение принципа синтеза глобальных приоритетов. Для выявления обобщенных, или глобальных, приоритетов домов в матрице локальные приоритеты располагаются по отношению к

каждому критерию, каждый столбец векторов умножается на приоритет соответствующего критерия и результат складывается вдоль каждой строки.

Таблица 10. Вычисление обобщенных или глобальных приоритетов.

Критерии	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Обобщенные (глобальные) приоритеты
Приоритеты	0.173	0.054	0.188	0.018	0.031	0.036	0.167	0.333	
C1	0.754	0.233	0.745	0.333	0.674	0.747	0.200	0.072	0.396
C2	0.181	0.055	0.065	0.333	0.101	0.060	0.400	0.650	0.341
C3	0.650	0.713	0.181	0.333	0.226	0.193	0.400	0.278	0.263

Вычисление глобальных приоритетов производится следующим образом:

$$Z_1 = 0.754 \cdot 0.173 + 0.233 \cdot 0.054 + 0.745 \cdot 0.188 + 0.333 \cdot 0.018 + 0.674 \cdot 0.031 + 0.2 \cdot 0.167 + 0.072 \cdot 0.333 = 0.396$$

Дом C1, который был наименее желателен с точки зрения финансовых условий (критерий с наивысшим приоритетом), вопреки ожиданию оказался победителем. Этот дом и был куплен. Семья сделала выбор безоговорочно. При анализе можно убедиться, что исход не был удивительным, если принять во внимание тот факт, что дом C1 превосходил остальные дома по четырем из семи критериев, по которым не было ничейных результатов. Пример также показывает, что следует быть осторожным, решив исключить из рассмотрения какие-то критерии после первых вычислений. В качестве заключения по рассмотренному примеру перечислим несколько дополнительных соображений применения алгоритма МАИ:

1. Решайте простую проблему так, как в примере с покупкой дома.
2. Просмотрите много примеров (см. [24]).
3. Определите общую цель — какую задачу вы стараетесь решить?

Цели должны отражать предположения относительно причины

возникновения проблемы в системе, а не просто ее проявления. (Например, низкий уровень морали служащих — причина низкой производительности. Низкая продуктивность не является проблемой, это проявление.)

4. Установите предположения (внешние и внутренние), которые отражены в вашем определении проблемы. Жизнеспособны ли эти предположения? Если нет, формулируйте новые цели.
5. Определите отклонения или предвзятые мнения, которые могут влиять на определение проблемы.
6. Установите, на кого будет влиять ваше определение проблемы.
7. Выясните, как они определяют проблему. Можете ли вы предоставить им возможность участвовать в построении иерархии?
8. Определите, нет ли других определений проблемы, более жизнеспособных, чем ваше (повторите этапы 4—8 для всех альтернативных определений).
9. Рассмотрите вашу проблему как часть нескольких проблем любой общей цели.
10. Разработайте структуру и усовершенствуйте ее, чтобы приспособить к проблеме.
11. Проведите мозговой штурм любого возможного аспекта проблемы. Затем организуйте перечень всех критериев, расположенных в положительном или отрицательном направлении, в виде иерархии, группируя факторы в сравнимых классах.
12. Убедитесь, что вы можете ответить на вопросы о важности элементов уровня относительно элементов примыкающего сверху уровня.
13. Для каждого уровня сформулируйте письменные вопросы, на которые вы собираетесь отвечать.

6. Математическая постановка задач системной динамики

Математическая постановка (формализация) задачи — создание математической модели — завершает этап постановки задач системной динамики. Математическая модель начинается с момента, когда формулируется система аксиом, описывающая не только сам объект, но некоторую алгебру, т.е. совокупность правил, определяющих допустимые операции над объектом. При формализации задачи должны быть определены функциональные зависимости, связывающие переменные и параметры модели. Формализация задачи существенно зависит от знания исследуемого объекта, задачи исследования, а также вида создаваемой модели. Общего метода подбора зависимостей (отношений, функций) не существует. Чем больше функциональных зависимостей известно исследователю, чем больше он может привлечь и критически осмыслить аналогий, тем успешнее будет его деятельность по разработке модели. Полезными могут также оказаться, благодаря наглядности, графические представления. Относительно просто устанавливается структура асимптотических моделей. Задача сводится к уточнению структуры модели, определению значения ее параметров и входных переменных. В моделях ансамблей обязательной и сложной задачей является выявление изменений в свойствах подсистем при объединении их в систему. Наибольшие трудности возникают при разработке феноменологических моделей.

6.1 Принципы разработки математических моделей (ММ)

На основе опыта разработки моделей предложены основные варианты (принципы) подхода к разработке моделей при различной доступности информации относительно структуры системы и протекающих в ней процессов.[4, 5, 7, 9, 10]

Принцип 1. Система достаточно проста и прозрачна, так что ее можно обследовать и понять, например, путем наблюдения или расспросов людей, работающих с системой. Непосредственно по результатам изучения системы можно сконструировать ее модель.

Принцип 2. Если структура системы очевидна, но методы описания не ясны, можно воспользоваться сходством исследуемой системы с другой, в том числе, возможно, более простой, описание которой известно.

Принцип 3. Структура системы неизвестна, но ее можно определить путем анализа данных о функционировании системы. Фактически будет получена гипотеза о структуре, которую затем необходимо проверить экспериментально.

Принцип 4. Анализ данных о работе системы не позволяет определить влияние отдельных переменных на показатели работы системы, возникает необходимость в проведении эксперимента с целью выявления релевантных факторов и их влияния на работу системы. При этом предполагается возможность проведения соответствующего эксперимента на системе.

Принцип 5. Достаточные описательные данные о системе отсутствуют. В этом случае может быть построена достаточно подробная модель искусственной действительности, используемая для накопления статистики о возможном функционировании системы путем статистических испытаний гипотез о реальном мире. Рекомендуется при создании математической модели действовать в следующем порядке:

- подыскать аналогии; – подобрать и рассмотреть специальные примеры, характерные для решаемой задачи;
- принять решение о выборе класса (типа) модели, в том числе решить будет модель аналитической, имитационной, комбинированной;

- записать соображения, характеризующие закономерности, имеющие место в системе, при необходимости провести дополнительные исследования;
- если модель не поддается описанию, найти способы упрощения проблемы. При определении отношений между элементами системы, а также между системой и окружающей средой необходимо точно установить причинно-следственные связи.

В общем случае некоторые модельные соотношения выводятся непосредственно при анализе системы, но часть соотношений принимаются без вывода и являются постулатами модели, от их качества в значительной мере зависит адекватность модели. Постулаты имеют различное происхождение.

- 1) Некоторые постулаты вытекают из универсальных физических законов, в том числе законов с ограниченной областью действия.
- 2) Феноменологические законы – хорошо эмпирически обоснованные, но имеющие ограниченную область действия. Применение такого закона должно быть обусловлено попаданием исследуемого явления в зону действия закона.
- 3) Полуэмпирические законы, действенность которых зависит от условий применения. Чаще всего эти законы базируются на «слепой» обработке экспериментальных данных.

Применение подобных законов следует контролировать рациональными рассуждениями. На этапе формализации важно правильно ограничить число степеней свободы, не «заложить» вычислительную неразрешимость задачи. Проблема размерности существенно ограничивает возможности эффективного применения многих математических методов. При этом понятие размерности необходимо рассматривать не только исходя из числа степеней свободы объекта, но и учитывая масштабные инварианты входящих величин в описании задачи.

6.2 Некоторые типовые проблемы разработки ММ

При разработке модели сложной системы очень часто полезно начать с создания «грубой» модели, в которой учитывается по возможности наименьшее число «основных» переменных и параметров. По мере уточнения подробностей относительно функционирования системы переменные и параметры можно выстроить в некоторую иерархическую последовательность. Классический пример подобной иерархии – небесная механика:

1-й шаг: грубая модель – планеты – материальные точки, подчиняющиеся законам Ньютона. Определены законы Кеплера.

2-й шаг – учитывается размер планет и движение солнца. Уточняются траектории движения всех тел.

3-й шаг – учет релятивистских эффектов.

Иногда удобно иерархию переменных связывать с масштабами переменных, например, различать переменные быстро, нормально и медленно меняющиеся. Последние на некотором временном интервале при моделировании можно «заморозить». После получения первого варианта формализации проанализировать все допущения и уточнить математическую постановку.

6.2.1 Интерполяция, экстраполяция, прогнозирование

При разработке моделей часто возникает задача поиска аналитических зависимостей, близких к функциям, описывающих реальные закономерности. Простейшая задача заключается в следующем. На интервале наблюдения T в некоторые фиксированные моменты $t_1, t_2, \dots, t_n$ наблюдаются значения функции $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_n)$. Требуется восстановить ее значение в другие моменты. Пусть из каких-либо соображений известен вид функции $f(t, a_1, a_2, \dots, a_m)$, где $a_1, a_2, \dots, a_m$ – неизвестные коэффициенты. Если

коэффициенты определяются из условия совпадения $f(t)$ в точках $t_1, t_2, \dots, t_n$ с данными наблюдений, то имеет место способ приближения, называемый интерполяцией. Ясно, что для вычисления параметров функции необходимо определенное число наблюдений (измерений) в зависимости от вида искомой функции. Так, для определения коэффициентов полинома n -ой степени необходимо (в детерминированном случае) не менее $n+1$ наблюдений. Следует отметить, что процедуры интерполяции и экстраполяции осуществляются в рамках такого понятия, как аппроксимация функций. Если вид функций заранее неизвестен, приходится прибегать к оценке выдвигаемых гипотез о виде функции. Поскольку обычно значения функций в точках наблюдения определяются с ошибками, возникает задача наилучшего в каком-либо смысле приближения к реальной зависимости при минимальном (или заданном) числе измерений и конкретном виде (спектре) ошибок наблюдения. Проблема минимизации ошибок вычисления параметров искомой функции рассматривается в теории вероятностей. При этом необходимо учитывать наличие ошибок двух видов: систематических – следствие несовпадения выбранной аналитической функции реальной зависимости и случайных – результат ошибок единичных замеров, которые на интервале наблюдения могут иметь различный спектральный состав. С целью снижения случайных составляющих увеличивается интервал наблюдения и количество измерений, но это далеко не всегда дает желаемый результат. Может оказаться, что на интервале наблюдения процесс не стационарен, т.е. аппроксимируемая функция на интервале наблюдения меняет свой вид, при этом появляется еще один источник систематических ошибок. Качество сглаживания случайных составляющих не однозначно связано с количеством измерений на интервале наблюдения, поскольку зависит от спектрального состава ошибок измерения. Для учета различных обстоятельств разработаны специальные алгоритмы. Продолжение полученной в результате приближения функции за пределы интервала наблюдения называется экстраполяцией. Известно, что всякое научное представление есть экстраполяция (с наблюдаемых ситуаций на

ненаблюдаемые, с измеренных величин на неизмеренные и т.д.). Систематическое использование методов экстраполяции может служить признаком зрелости той или иной области знаний как науки. Задача экстраполяции значительно, порой принципиально, усложняется, если на интервале экстраполяции условия существования системы меняются.

Прогнозирование можно рассматривать как расширение понятия экстраполяции на общий случай существования системы в будущем, в том числе, когда условия существования системы – характер экзогенных переменных на интервале экстраполяции изменяется, что может привести к изменению целей и структуры системы. В таком случае классические методы экстраполяции – продолжение подобранной на интервале наблюдения аналитической зависимости на время экстраполяции – приводят к неверным результатам и выводам. Задача подбора функций и отношений между экзогенными и эндогенными переменными в общем случае статистическая. Для прогноза поведения системы на заданном интервале необходима гипотеза относительно релевантных факторов, воздействующих на систему на этом интервале. Если релевантные факторы на интервалах наблюдения и прогноза неизменны, то могут быть найдены устойчивые (неизменные для этих интервалов) зависимости – «тренды». Будет иметь место так называемое прогнозирование «от прошлого к будущему». В настоящее время темпы изменения производительных сил настолько высоки, что гипотеза о неизменности релевантных факторов, определяющих поведение системы, оказывается чаще неверной как для интервала наблюдения, так и интервала прогноза. Вместе с тем взаимосвязь систем в мире стала столь тесной, что состояние и развитие конкретной системы невозможно рассматривать вне этих связей. Вероятностные связи усложнились, вид и число неопределенностей возросли. В этих условиях потребовалось перейти к так называемому прогнозированию «от настоящего к будущему». При этом в результате наблюдения системы отправными для прогноза полагаются значения параметров системы в конце интервала наблюдения – текущие значения. Для

прогноза изменения параметров в будущем выдвигаются гипотезы относительно окружающей среды, релевантных факторов, влияющих на поведение системы, экзогенных переменных, реализующих это влияние. Прогноз имеет вариантный характер, и только в лучшем случае удастся выявить все возможные варианты развития системы и дать им вероятностные оценки.

6.2.2 Линейность и нелинейность

Как уже отмечалось выше (пункт 4.4 данного пособия) линейные модели являются упрощением существующей реальности и их применение обосновано простотой математического анализа. Линейные динамические системы характеризуются однозначностью стационарного решения, устойчивостью решения по отношению к типу уравнения и начальным условиям. Таким образом, линейные динамические системы являются предельно-идеалистическим представлением реальных процессов. Их распространение можно объяснить чрезвычайным удобством (вследствие упрощающих допущений) в научном исследовании и техническом воплощении. Однако практически все процессы в сложных системах описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Содержательные нелинейные модели динамических систем изучаются в математической физике, биофизике, экологии и экономике.

Приведем некоторые высказывания, предостерегающие от необоснованного пренебрежения нелинейностями. «Мир, в котором мы живем, удивительно нелинеен. Конечно, это делает нашу жизнь сложнее, но зато интереснее, перспективнее, освобождает нас от чувства монотонности, вселяет в нас оптимизм. Ловушкой при математическом моделировании является пристрастие человека к линейности. Это особенно проявляется в тех случаях, когда соответствующие гипотезы и допущения сформулированы

заранее. Представление о линейности мира привело к тому, что большинство аналитических методов, которым отдавалось предпочтение в прошлом, основано на использовании линейных систем уравнений. Ошибки и искажения возникают часто исключительно по этой причине». Необходимо помнить эти предостережения. В то же время следует иметь в виду, что методы исследования линейных систем очень развиты и обоснованное применение линейной модели для нелинейной системы часто оказывается весьма эффективным. Линейная модель полезна в начале цепочки моделей, последовательно приближающихся к модели с требуемой адекватностью. Линейная модель часто позволяет сразу получить оценку порядка значений выходных переменных. Иногда нелинейную задачу удастся просто свести к последовательности линейных моделей. Линеаризацией нелинейной задачи (например, методом «замораживания коэффициентов») можно получить линейную модель для достаточно корректной оценки воздействия на систему малых возмущений. Вопрос о возможности и целесообразности перехода от нелинейности к линейности решается в каждой задаче конкретно на рациональном уровне.

6.3 Проблема размерности в моделировании

Размерность как понятие в математическом моделировании имеет несколько аспектов. Во-первых, математически размерность модели связывают с размерностью пространства, в котором рассматривается эта модель. При формальном описании модели размерность совпадает с числом независимых переменных или числом степеней свободы модели. В этом аспекте размерность порождает проблему, которую называют «проклятием размерности», что очевидно обусловлено трудностями решения многомерных задач. Например, в теории дифференциальных уравнений существуют два раздела принципиально отличающихся по выбору методов решения: обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ – DE=Differential

Equation), зависящие от одной независимой переменной и дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП – PDE=Partial Differential Equation), зависящие от нескольких независимых переменных. Известно, что для DE разработаны методы и алгоритмы решений: аналитические, качественные (графо-аналитические) и численные, в то же время практически не существует общих способов решения PDE, кроме ситуаций, когда удаётся свести PDE к форме DE. Обычно, такие ситуации называют автомодельностью PDE.

6.3.1 Основы теории размерности

Во-вторых, размерность модели связывают или обуславливают с физическими размерностями входящих величин. Теория, которая рассматривает вопросы моделирования с этой точки зрения, называется теорией размерности. В основе этой теории лежит концепция подобия (теория подобия). Основу теории подобия составляет так называемая **π -теорема**. В свою очередь теорема подобия основывается на принципах и понятиях теории размерности. Согласно **π -теореме** [5, 9, 25, 26] уравнение, выражающее некоторую физическую закономерность и содержащее K размерных величин (из которых n величин имеют независимые размерности), может быть преобразовано в уравнение, связывающее $(K - n)$ независимых безразмерных комплексов. Эти безразмерные комплексы составлены из указанных K величин. Независимыми называются комплексы, которые не могут быть получены в виде степенной функции остальных комплексов. В гидродинамике в качестве параметров с независимыми размерностями принимают базовые величины: характерный линейный размер, время и массу. Наиболее востребованы методы теории размерности именно в задачах гидродинамики. Размерность любой гидродинамической величины может быть выражена через размерности базовых величин.

В качестве примера рассмотрим случай трёх основных единиц (количество единиц может быть произвольным): длины L , массы M и времени

T . Например, это могут быть сантиметр, грамм и секунда или метр, килограмм и секунда. Все возможные единицы, которые могут быть получены из этих трёх, имеют вид:

$$U(a, b, c) = L^a \cdot M^b \cdot T^c \quad (6.1)$$

Размерностью физической величины (6.1) называют выражение вида L^a, M^b, T^c , которое однозначно определяется набором степеней a, b, c . Если положить $b = c = 0$, то a задаёт обычную геометрическую размерность: $a = 1$ для единицы длины, $a = 2$ для единицы площади, $a = 3$ для единицы объёма. Если $a = b = c = 0$, то получается безразмерная единица. Три числа, задающие единицу измерения, складываются при умножении единиц и умножаются на n при возведении в степень n :

$$U(0,0,0) = 1; U(a, b, c) \cdot U(d, e, f) = U(a + d, b + e, c + f);$$

$$[U(a, b, c)]^n = U(na, nb, nc) \quad (6.2)$$

Если мы решаем какую-либо физическую задачу, то часто бывает полезно провести оценку из соображений размерности. Мы знаем (или можем вычислить), в каких единицах должен измеряться ответ X для (6.2). Эта единица задаётся как $U = U(a, b, c)$. Также мы знаем (или можем вычислить), в каких единицах задаются параметры задачи. Пусть таких параметров будет 3 ($P1, P2$ и $P3$), а их единицы измерения

$$U_1 = U(a_1, b_1, c_1); U_2 = U(a_2, b_2, c_2); U_3 = U(a_3, b_3, c_3) \quad (6.3)$$

Будем искать ответ в виде

$$X = k \cdot P1^A P2^B P3^C \dots \dots \dots \quad (6.4)$$

где k — безразмерный параметр ($[k] = 1$). Аналогичная формула для (6.4) должна выполняться для единиц измерения:

$$[X] = [P1]^A [P2]^B [P3]^C \quad (6.5)$$

$$U = U_1^A U_2^B U_3^C \quad (6.6)$$

Из полученных равенств (6.4) – (6.6), очевидно, следует:

$$a = Aa_1 + Ba_2 + Ca_3$$

$$b = Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 \tag{6.7}$$

$$c = Ac_1 + Bc_2 + Cc_3$$

Таким образом мы получили систему (6.7) из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными A, B, C .

Если система (6.7) не имеет решения, то это означает, что задача не может быть решена (в ней не хватает размерных параметров). В научных задачах обычно параметров больше, чем основных единиц измерения, система уравнений имеет бесконечно много решений. Это связано с тем, что из заданных параметров можно построить один или несколько безразмерных параметров. Во многих случаях понимание задачи позволяет отбросить лишние параметры как несущественные и всё-таки получить оценку из соображений размерности. Анализ размерностей применялся физиками начиная, по крайней мере, с XIX века.

6.3.2 Теория подобия. Критерии подобия

Теория размерности непосредственно связана с теорией подобия. Для целей рационального моделирования основным является понятие *подобных явлений*.

Определение: Явления называются подобными, если они отличаются только численными значениями определяющих размерных параметров и притом так, что для них соответствующие безразмерные критерии подобия $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ совпадают.

Рассмотрим два подобных явления – *натурное* и *модельное*. Пусть для этих явлений имеется некоторая зависимость определяемой и определяющих размерных величин: $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$a = f(a_1, a_2, \dots a_n) \quad (6.8)$$

Будем считать, что у нас поставлена задача сравнения двух исследуемых явления в модельном (m) и натурном (n) представлении. Теория подобия требует, чтобы функциональные связи этих явлений в натурном и модельном представлении определялись одинаково

$$\begin{aligned} a^{(n)} &= f(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots a_n^{(n)}) \\ a^{(m)} &= f(a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \dots a_n^{(m)}) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Допустим, что первые k из заданных размерных величин (6.8) $a_1, a_2, \dots a_k$ являются величинами с независимыми размерностями, а оставшиеся $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots a_n$ имеют размерности, зависящие от предыдущих, тогда число $m=n-k$ определяет число безразмерных критериев подобия $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_m$. Данные условия разделения по размерностям выполняются и для состояний (6.9). При этом выполняется условие совпадения критериев подобия для натуральных и модельных явлений:

$$\begin{aligned} \pi^{(n)} &= \Phi(\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \dots \pi_m^{(n)}) \\ \pi^{(m)} &= \Phi(\pi_1^{(m)}, \pi_2^{(m)}, \dots \pi_m^{(m)}) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Требование подобия заключается в выполнении равенства $\pi^{(n)} = \pi^{(m)}$. Зависимость между критериями π_i определяется теоремой подобия или π -теорема

π -теорема – представляет собой центральное (и по существу, единственное содержательное) утверждение анализа размерностей [25, 26].

Теорема: Пусть существует физическая закономерность, выраженная в виде зависимости некоторой размерной, вообще говоря, величины от размерных же определяющих параметров. Эта зависимость может быть представлена в виде зависимости безразмерной величины от безразмерных комбинаций определяющих параметров. Количество этих безразмерных комбинаций

меньше общего числа размерных определяющих параметров на количество определяющих параметров с независимой размерностью.

Согласно π -теореме уравнение, выражающее некоторую физическую закономерность и содержащее K размерных величин (из которых n величин имеют независимые размерности), может быть преобразовано в уравнение, связывающее $m = k - n$ независимых безразмерных комплексов. Эти безразмерные комплексы составлены из указанных k величин. Независимыми называются комплексы, которые не могут быть получены в виде степенной функции остальных комплексов. В гидродинамике в качестве параметров с независимыми размерностями принимают базовые величины: характерный линейный размер L , время T и массу M . Наиболее востребованы методы теории размерности именно в задачах гидродинамики. Размерность любой гидродинамической величины может быть выражена через размерности базовых величин. Иногда в качестве базовых величин выбирают линейный размер l , скорость V и плотность ρ . Если произвольную гидродинамическую величину, не входящую в состав параметров с независимыми размерностями, обозначить через Π_i , то безразмерный комплекс, характеризующий влияние данной размерной величины Π_i на движение жидкости (π -член), выражается как

$$\frac{l^\alpha \cdot V^\beta \cdot \rho^\gamma}{\Pi_i} = L^0 \cdot M^0 \cdot T^0 \quad (6.11)$$

где L, M, T - размерности длины, массы, времени соответственно. Очевидно, что размерности базовых величин таковы

$$[l] = L, [V] = LT^{-1}, [\rho] = ML^{-3} \quad (6.12)$$

Определим π -член, отражающий влияние силы тяжести (т.е. ускорение силы тяжести g). Для этого применим (6.11) с учетом (6.12)

$$\frac{[l]^\alpha \cdot [V]^\beta \cdot [\rho]^\gamma}{[g]} = L^0 \cdot m^0 \cdot T^0 \text{ или } L^\alpha \cdot \left(\frac{L}{T}\right)^\beta \cdot \left(\frac{m}{L^3}\right) \cdot (L^{-1} \cdot T^2) = L^0 \cdot m^0 \cdot T^0. \quad (6.13)$$

Тогда из (6.13) следует:

$$\alpha + \beta - 3\gamma - 1 = 0, \gamma = 0, \beta - 2 = 0. \quad (6.14)$$

Решая систему (6.14), получим $\alpha = -1, \beta = 2, \gamma = 0$.

Откуда π - критерий, отражающий влияние силы тяжести на движение жидкости, равен

$$\pi_g = Fr = \frac{V^2}{g \cdot l}. \quad (6.15)$$

Этот безразмерный комплекс называется числом Фруда. В зарубежной литературе часто применяют число Фруда в виде

$$Fr = \sqrt{\pi_g} = \frac{V}{\sqrt{g \cdot l}}.$$

Рассмотрим пример использования условия подобия по критерию числа Фруда. Обычно критерий Фруда используется для оценки поверхностного волнового движения. В реальных морских акваториях поверхностное волновое движение является важным фактором перемешивания различных загрязнений: нефтяных разливов, антропогенных поверхностно активных веществ (ПАВ), водорослей и т.п. Здесь обозначены: l, V, g - длина волны, скорость перемещения волн, ускорение свободного падения соответственно. Чтобы выполнить оценку реального поверхностного движения, используем экспериментальную установку, создающую волнообразное поверхностное движение. Например, если параметры волнообразного течения в установке:

$h = 0.06$ м, - глубина потока в метрах, $\lambda = 0.30$ м, - характерный размер, длина волны в метрах, то по ним можно вычислить число Фруда экспериментальное.

Исходя из теории гравитационных волн, получим выражение для скорости $v = \sqrt{gh} \cong 0.77$. Подставляя в формулу для вычисления числа Фруда, получим:

$$Fr = \frac{gh}{g\lambda} = 0.2$$

Это означает, что в реальных условиях волновое движение тоже должно проходить при числе Фруда, равном 0.2. Известно, что средняя глубина в мелководной акватории равна величине порядка 10 м. Для определения

натурных значений скорости, используем соотношение между высотой волн h и длиной волн λ , которые характерны для мелководной части моря:

$h = aW\sqrt[3]{D}$, $\lambda = zW\sqrt[3]{D}$,¹ где W – скорость ветра, D – разгон ветра (расстояние, на котором ветер не меняет направления и скорость), $a = 0.0151H^{0.342}$, $z = 0.1041H^{0.573}$.

Отсюда следует: для высоты волн h м получим $\lambda \sim 2.5$ м. Таким образом, для числа Фруда $Fr = 0.2$ в эксперименте для натурального объекта получим $h \sim 0.5$ м. Данный случай характеризует спокойное (докритическое) движение и соответствует поверхностному волнению с таким же значением числа Фруда. Отметим, что в большинстве гидродинамических задач используют в качестве основного критерия число Рейнольдса, отражающее влияние сил инерции и вязкости

$$\pi_v = Re = \frac{VL}{\rho\nu}.$$

Рассмотрим процедуру получения критерия Рейнольдса. На рис. 8 представлена схема течения жидкости с прямоугольным полубесконечным каналом.

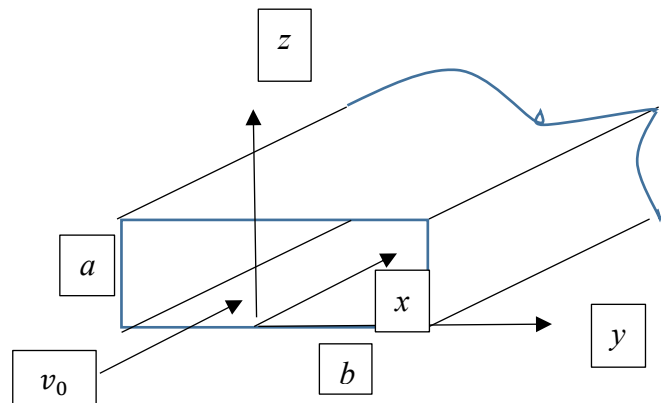


Рис 8. Схема течения вязкой жидкости в канале

Набегающий поток несжимаемой вязкой жидкости со скоростью v_0 втекает в прямоугольный полубесконечный канал высотой a и шириной b . Плотность жидкости ρ , вязкость - μ . Тогда $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, v_0, \rho, \mu, a, b)$, где x, y, z, a, b

¹ <http://flot.com/publications/books/shelf/vasiliev/18.htm#1>

имеют размерность длины, размерности остальных величин соответственно равны $[v_0] = \frac{m}{sec}$, $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$, $[\mu] = \frac{kg}{m \cdot sec}$

Если в качестве основных переменных выбрать v_0, ρ, μ то можно представить в соответствие π - теореме уравнение, выражающее физическую закономерность скорости от остальных параметров в виде:

$$\vec{v} = v_0 \vec{f}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}, 1, 1, \frac{\mu}{\rho a v_0}, 1, \xi\right), \xi = \frac{b}{a} \quad (6.16)$$

Как можно видеть из этой закономерности, течение в разных условиях «1» и «2» будут подобными при совпадении геометрических факторов $\xi_1 = \xi_2$ и двух безразмерных соотношений $\left(\frac{\mu}{\rho a v_0}\right)_1 = \left(\frac{\mu}{\rho a v_0}\right)_2$. Эти соотношения определяют критерий, который называется числом Рейнольдса: $Re = \frac{\rho a v_0}{\mu}$.

6.3.3 Приведение задач математического моделирования к безразмерному виду

В предыдущих разделах были рассмотрены примеры использования методов теории размерности и подобия в анализе и решении некоторых задач системной динамики. Были продемонстрированы приемы и способы получения безразмерных комплексов, которые представляли критерии подобия. Важно при этом обратить внимание на тот факт, что в выражении (6.16) все переменные являются безразмерными. Полученные при этом критерии подобия типа числа Рейнольдса дают возможность качественной оценки состояния модели. Процедура приведения исходной модели к безразмерному виду удобна не только с точки зрения получения критериальных зависимостей, но и тем, что в полученных уравнениях уменьшается число неизвестных параметров модели. Следует отметить, что процедура приведения уравнений математической модели не является единственной и её применение может быть в другой, чем это предписано

условиями π - теоремы. Метод Релэя рекомендует использовать масштабы величин, входящих в исходное уравнение, составлять как комбинации параметров уравнения. Рассмотрим это на примере базовой модели «хищник – жертва» часто используемой в биофизике. Пусть $x(t), y(t)$ популяции условных «жертв» и «хищников». Их поведение в модели описывается следующим образом [17-19]:

- 1) Изменение популяции жертв $\frac{dx(t)}{dt}$ растет пропорционально количеству $x(t)$ с коэффициентом a ;
- 2) При встрече с популяцией хищников жертвы погибают, популяция уменьшается с коэффициентом b ;
- 3) Популяция хищников из-за внутренней конкуренции вымирает, следовательно, изменение $\frac{dy(t)}{dt}$ уменьшается с коэффициентом смертности c :
- 4) При встрече хищников с популяцией жертв популяция хищников растет с коэффициентом насыщения d .

Таким образом, модель описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy\end{aligned}\tag{6.17}$$

Отметим, что система уравнений (6.17) записана в размерных переменных: $[x]$, $[y]$ как количественные переменные выразим *шт.* Размерности констант a, b, c, d определим из системы (6.17), записанной для размерностей

$$\begin{aligned}\frac{d[x]}{d[t]} &= [a] \cdot [x] - [b] \cdot [x][y] \\ \frac{d[y]}{d[t]} &= -[c] \cdot [y] + [d] \cdot [x][y]\end{aligned}\tag{6.18}$$

Из системы (6.18) по правилам действия с размерностями принимая размерность времени $[t] = T$, найдем размерность коэффициентов a, b, c, d .

$$[a] = \frac{1}{T}, [b] = \frac{1}{T \cdot \text{шт}^2}, [c] = [a] = \frac{1}{T}, [d] = [b] = \frac{1}{T \cdot \text{шт}^2}$$

Зная размерности коэффициентов, выберем комбинации для определения масштабов величин x, y, t . Следует заметить, этот выбор является не единственным. Удобнее взять в качестве масштабов для x комбинацию $\frac{a}{d}$, для y комбинацию $\frac{c}{b}$, для времени t комбинацию $\frac{1}{a}$. После того, как размерные переменные разделим на их масштабы, введем новые безразмерные переменные: $u = \frac{xd}{a}, v = \frac{yb}{c}, \tau = \frac{t}{1/a} = ta$. Выражая старые переменные через новые и подставляя их в уравнения (6.17), получим безразмерный вид модели:

$$\frac{du}{d\tau} = u - \alpha uv;$$

$$\frac{dv}{d\tau} = -\alpha v + uv \quad (6.19)$$

Заметим, что в системе (6.19) только один неизвестный параметр $\alpha = \frac{c}{a}$, который имеет критериальный характер. Учитывая, что коэффициенты a, c определяют рост и убыль популяций x, y соответственно, числовые значения критерия α качественно характеризуют состояние модели: величина α по определению неотрицательна, при $\alpha < 1$ и фиксированном c наблюдается рост популяции жертв, при $\alpha > 1$ соответственно снижение численности в популяции жертв.

7. Идентификация математических моделей

Формальное представление модели как правило в виде алгебраических, дифференциальных, интегральных уравнений как правило содержит определенное количество параметров, при этом не всегда имеется полная информация о значениях этих параметров. Процесс их подбора называется идентификацией модели.

7.1 Постановка задачи идентификации модели

В основе различных методов идентификации (опытного отождествления модели с объектом-оригиналом), лежит идея мысленного эксперимента с «черным ящиком», сформулированная Н. Винером.

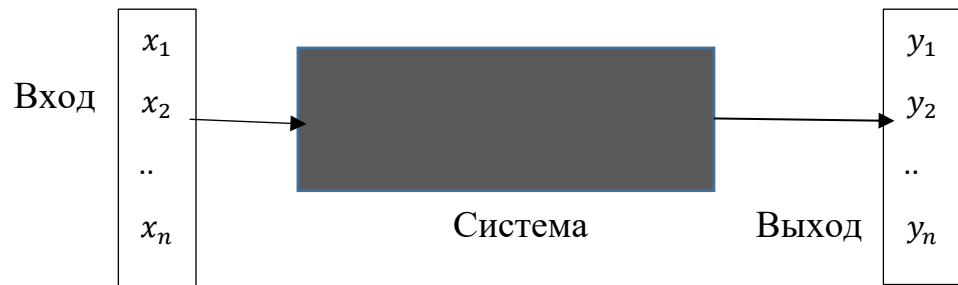


Рис. 9. Схема модели системы «черный ящик»

В теоретическом случае «черный ящик» представляет собой некую систему, о структуре и внутренних свойствах которой ничего неизвестно исследователю, возможная схема которого представлена на рисунке 9.

Известными считаются входные характеристики, т.е. внешние факторы $\vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, воздействующие на этот объект (процесс), а также выходные характеристики $\vec{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, представляющие собой реакции системы на входные воздействия, доступные для измерений в любой момент времени.

Задача заключается в том, чтобы по измеряемым характеристикам

(наблюдаемым данным) на входах $\vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и выходах $\vec{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ установить свойства объекта или иначе, построить модель.

Задача идентификации формулируется следующим образом: *по результатам наблюдений над входными и выходными переменными системы должна быть построена оптимальная в некотором смысле модель, т.е. формализованное представление этой системы.* Решение этой задачи допускает возможное применение двух стратегий [26, 27]:

1. реализуется активный эксперимент;
2. выполняется пассивный эксперимент.

При проведении активного эксперимента на вход системы подаются специальные сформированные тестовые сигналы, характеристики которых определены на основании заранее разработанного плана проведения исследований.

Преимущества активного эксперимента заключаются в том, что необходимая информация о свойствах и характеристиках изучаемого объекта получается при минимальном объеме первичных экспериментальных данных и соответственно при минимальной трудоемкости опытных работ за счет оптимального планирования эксперимента.

К недостаткам следует отнести необходимость выведения объекта из естественного состояния работы (режима функционирования), что не всегда представляется возможным.

При проведении пассивного эксперимента объект функционирует в естественном режиме, при этом выполняются систематические измерения, и осуществляется регистрация значений его входных и выходных характеристик. Следует отметить, что реализация пассивного эксперимента позволяет исследователю получить необходимую информацию об объекте, но при этом существенно увеличивается нужный объем данных. Такое увеличение объема данных, примерно на 2-3 порядка больше, по сравнению с активным экспериментом, приводит к увеличению размерности обрабатываемых массивов информационных данных.

На практике при построении идентифицируемых моделей целесообразно применение смешанной стратегии проведения эксперимента. При этом для одной части входных переменных, допускающих измерения характеристик (например, по техническим условиям, экономической целесообразности, безопасности и другим обстоятельствам), проводится активный эксперимент. Для другой части значимых переменных результаты активного эксперимента дополняют измерениями, полученными при проведении пассивного эксперимента. «Черный ящик» представляет собой теоретически граничный случай, поскольку практически всегда имеется

некоторый объем исходной априорной информации об изучаемом процессе или явлении, т.е. приходится иметь дело с «серым», отчасти прозрачным ящиком.

В этой связи различают три основных класса постановки задачи идентификации объекта [26]:

1. *Для сложных и слабо изученных объектов системного характера достоверные исходные данные о внутренних свойствах и структурных особенностях достаточно малы, или почти отсутствуют.* Поэтому задача идентификации, в этом случае, должна включать в себя с одной стороны, определение зависимостей, связывающих входы и выходы (обобщенного оператора), а с другой - определение внутренней структуры объекта. В такой постановке задача не разрешима, даже теоретически. Непосредственным результатом идентификации является только определение зависимостей входы-выходы, причем не в параметрической форме – в виде таблиц или кривых. Для того чтобы говорить о структуре модели, необходимо перейти к параметрической форме их представлений. Однако, как известно, не существует однозначной связи между функциональной зависимостью и порождающей эту зависимость математической структурой. Каждую непараметрическую зависимость вход-выход можно аппроксимировать различными способами и соответственно построить ряд практически равноценных моделей, характеризующихся собственной структурой, собственным набором параметров и их значений. Основанием для предпочтения той или иной параметрической модели могут быть только данные, той или иной параметрической модели могут быть только данные, внешние по отношению к процессу идентификации, например, основанные на теоретических соображениях. Если таких данных нет, то в рассматриваемой ситуации исследователь получает имитационную модель, которая воспроизводит с тем или иным приближением характеристики объекта.

2. *Второй класс задач идентификации характеризуется тем, что имеются априорные данные о структуре моделируемого объекта. Однако какой вклад в характеристики объекта или его модели вносит тот или иной входной параметр заранее неизвестно и это предстоит определить на основе проведения эксперимента, а также получить количественную оценку соответствующих параметров.*
3. *Третий класс задач связан с относительно простыми и хорошо изученными объектами, структура которых известна точно и речь идет только о том, чтобы по экспериментальным данным оценить значения всех или некоторых входящих в исследуемую структуру параметров (параметрическая идентификация). Это наиболее часто встречаемый на практике класс задач.*

Независимо от характера решаемой задачи на основе идентификации, построение модели основывается на результатах измерений соответствующих величин переменных. При этом необходимо учитывать следующие требования, предъявляемые к процессу измерений:

- эксперимент должен быть обеспечен необходимыми средствами измерения надлежащей точности (датчики, измерительные преобразователи, средства регистрации);
- измерительный комплекс со всеми его компонентами требует метрологического обеспечения, т.е. градуировки, аттестации и периодичности проверки.

Реальные свойства подавляющего большинства сложных объектов, а также неизбежные случайные погрешности измерений, лежащие в основе идентификации, имеют статистический характер, что приводит к получению больших объемов выборочных экспериментальных данных с их последующей обработкой. Поэтому на практике построение моделей путем идентификации неизбежно связано с использованием информационно-вычислительной техники как при получении первичных данных (автоматизация эксперимента), так и для их последующей обработки и использования.

7.2 Задача параметрической идентификации

Пусть в результате каких-либо экспериментов над объектом проведены измерения входных $\vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и выходных $\vec{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ характеристик системы. Требуется определить вид (структуру) и параметры некоторого оператора $\tilde{A}$, определяющего соответствие между переменными $\vec{X}$ и $\vec{Y}$, то есть: $\vec{Y} = \tilde{A}(\vec{X})$.

В реальных условиях переменные измеряются с погрешностями ξ_i, ξ_j соответственно. Будем считать, что эти погрешности считаются некоррелированными и аддитивными с полезной информацией, т.е. имеют вид:

$$x_i = x_i + \xi_i, i = 1, 2, \dots, n$$

$$y_j = y_j + \xi_j, j = 1, 2, \dots, n$$

В зависимости от априорной информации об объекте различают *задачи идентификации в узком и широком смысле*.

Задача идентификации в узком смысле (параметрическая идентификация) состоит в оценивании параметров и состояния системы по результатам наблюдений над входными и выходными переменными, полученными в условиях функционирования объекта. При этом известна структура системы и задан класс моделей, к которому данный объект относится.

Если априорная информация об объекте отсутствует или очень мала, то предварительно приходится решать задачи с целью установления структуры модели изучаемого объекта. В этом случае имеет место идентификация в широком смысле, т.е. **структурная идентификация**.

К этим задачам относятся: выбор структуры системы и задание класса моделей, оценивание степени стационарности и линейности объекта и действующих переменных, оценивание степени и формы влияния входных переменных на выходные, выбор информативных переменных и другие.

Задача параметрической идентификации сводится к отысканию таких оценок параметров $\tilde{A}$, которые обеспечивают близость расчетных $\tilde{Y}$ и экспериментальных $\vec{Y}$ значений выходных характеристик при одинаковых значениях входных характеристик $\vec{X}$

Отметим, что в общем случае необходимо выполнить измерения компонент вектора $\vec{y}$, которые могут осуществляться при повторениях эксперимента. В качестве критериев количественной меры близости модели $\tilde{y}_j$ и y_j оригинала чаще всего используются максимальные δ_y , средние m_y и среднеквадратичные σ_y . Оптимальное значение меры близости достигается при выполнении условия $\lim_{j \rightarrow \infty} \delta_y = 0$.

$$\delta_y = \max_j (\tilde{y}_j - y_j), j = 1, 2, \dots, m \quad (7.1)$$

$$m_y = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (\tilde{y}_j - y_j), j = 1, 2, \dots, m \quad (7.2)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{j=1}^M \varepsilon (\tilde{y}_j - y_j)^2}, j = 1, 2, \dots, m \quad (7.3)$$

Где $\varepsilon = \left(\frac{M}{M-1}\right)^2$ оценка смещенности при вычислении среднеквадратичной величины σ_y . Для минимизации могут быть использованы известные численные методы решения экстремальных задач. Наличие большого количества существующих методов идентификации отражает разнообразие используемых математических моделей и методов их исследования.

7.3 Идентификация моделей с помощью метода наименьших квадратов (МНК)

Регрессионный анализ представляет собой статистический метод, обладающий широкими возможностями, который успешно применяется в инженерной практике. В последнее время в связи с развитием и внедрением быстродействующих ЭВМ статистические методы используются для идентификации моделей, в том числе для идентификации динамических,

многомерных процессов, систем диагностики и управления в реальном масштабе времени. Регрессионный анализ основывается на двух главных принципах. [27]

1. Методы применяются для линейных по идентифицируемым параметрам моделям.

Структура математической модели процесса представляется функцией вида:

$$y_j = \sum_{i=1}^k a_i f_i(\bar{x}) \quad (7.4)$$

где a_i оцениваемый параметр; $f_i(\bar{x})$ известная функция, $\bar{x}$ вектор входных воздействий, y_j выходная переменная, (можно рассматривать только одну выходную переменную y в предположении, что все y_j не зависят друг от друга). Возможно представление идентифицируемой модели в следующей форме:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^k a_i f_i(\bar{x})}{1 + \sum_{j=1}^l b_j \varphi_j(\bar{x})} \quad (7.5)$$

где a_i, b_j оцениваемые параметры; $f_i(\bar{x})$ и $\varphi_j(\bar{x})$ априорно известные заданные функции. На практике чаще всего в качестве $f_i(\bar{x})$ и $\varphi_j(\bar{x})$ выбираются степенные функции, а соответственно выражения (7.4) и (7.5) представляют полиномиальные, либо дробно-рациональные зависимости. При этом точность описания достигается увеличением числа членов полинома, обеспечивающих их сходимость к реальному процессу. Важно отметить, что модель практически никогда не соответствует физической сущности моделируемого реального процесса. Однако простота вычислений, удобство практического использования привела к широкому применению в инженерных исследованиях регрессионных методов. При этом следует учитывать, что удачно выбранный вид полинома позволяет существенно сократить размерность модели, а значит и трудоемкость вычислительного процесса, как при идентификации, так и при использовании модели.

2. Минимизируемой функцией ошибки (разности между прогнозируемой моделью и данными эксперимента) при регрессионном анализе является сумма квадратов ошибок выходной характеристики. Регрессионные модели могут быть как линейными, так и нелинейными с любым числом входов и выходов.

Рассмотрим случай идентификации системы, содержащей n входных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ с $n+1$ параметрами $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ и один выход y . Представим структуру модели в виде линейного алгебраического уравнения вида:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \quad (7.6)$$

Параметры (коэффициенты) уравнения (7.6) подлежат определению. В результате идентификации мы должны получить вектор оценок $\tilde{a} = \{\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n\}$ истинного вектора $\bar{a} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Этому вектору $\tilde{a}$ будет соответствовать оценка значения выходной величины $\tilde{y}$. Для определения значений $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n$ произведем N последовательных измерений величины y , соответствующих в определенном смысле произвольному набору величин $x_1, x_2, \dots, x_n$. В результате получим вектор выходных характеристик

$$\bar{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}. \quad (7.7)$$

По набору N входных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, будет соответственно N расчетных значений выходной величины $\tilde{Y}$

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x_1^{(1)} + \tilde{a}_2 x_2^{(1)} + \dots + \tilde{a}_n x_n^{(1)} \\ \tilde{y}_2 = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x_1^{(2)} + \tilde{a}_2 x_2^{(2)} + \dots + \tilde{a}_n x_n^{(2)} \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (7.8)$$

Разница между экспериментальным и расчетным значением $(\bar{y} - \tilde{y})$, характеризует погрешность каждой модели в каждом из измерений. Суммарную погрешность будем характеризовать величиной:

$$J = \sum_{i=1}^N (y_i - \tilde{y}_i)^2 \quad (7.9)$$

Определение оценок параметров $\tilde{a}_i$ обеспечивается существованием минимума функционала (7.9), необходимыми условиями которого является равенство нулю частных производных функционала J по неизвестным параметрам $\tilde{a}_i$

$$\frac{\partial J}{\partial a_j} = 2 \left[\sum_i^N (y_i - \tilde{y}_i) \sum_j^M \frac{\partial}{\partial a_j} (\tilde{y}_i) \right] = 0 \quad (7.10)$$

Алгоритм решения системы уравнений (7.10) называется методом наименьших квадратов. Очевидно, что решение системы уравнений (7.10) зависит от вида функции $\tilde{y}_i$. Это означает на практике выбор аппроксимации $\tilde{y}_i$ так как её точное значение неизвестно. Для этого используется доступная апостериорная информация о поведении y_i , например графическое представление $y_i = f(x_i)$. Будем искать аппроксимацию в классе линейных по параметрам a_j функций:

$$\tilde{y} = \sum_{j=0}^M a_j f_j(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

где $f_j(x_1, x_2, \dots, x_k)$ известные заданные функции, a_j - неизвестные коэффициенты. Система уравнений (7.10) в матричной форме принимает вид:

$$(F^T F) \hat{a} = F^T Y \quad (7.11)$$

где обозначены:

F – информационная матрица размерностью $N \times (M + 1)$;

$$\begin{pmatrix} f_{10}(x_{11}, \dots, x_{1k}) & \dots & f_{1M}(x_{11}, \dots, x_{1k}) \\ f_{20}(x_{21}, \dots, x_{2k}) & \dots & f_{2M}(x_{21}, \dots, x_{2k}) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{N0}(x_{N1}, \dots, x_{Nk}) & \dots & f_{NM}(x_{N1}, \dots, x_{Nk}) \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

F^T – транспонированная информационная матрица размерностью $(M + 1) \times N$;

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \dots \\ \tilde{a}_M \end{pmatrix} - \text{вектор-столбец неизвестных коэффициентов;}$$

Y - вектор-столбец выходных переменных y_i .

Пример: пусть результаты 10 проведенных экспериментальных исследований представлены в таблице 10.

Таблица 10. Результаты измерения выходных переменных y_i при двух факторах (входных переменных) x_1, x_2 .

№ измерения, i	x_{i1}	x_{i2}	y_i
1	$x_{11} = -2$	$x_{12} = 1$	5.3
2	$x_{21} = 1$	$x_{22} = 2$	-7.5
3	$x_{31} = 3$	$x_{32} = 1$	-4.8
4	$x_{41} = 2$	$x_{42} = 4$	-36.4
5	$x_{51} = 3$	$x_{52} = 2$	-17.2
6	$x_{61} = -1$	$x_{62} = -2$	-9.6
7	$x_{71} = 3$	$x_{72} = 2$	12.9
8	$x_{81} = 4$	$x_{82} = -2$	26.4
9	$x_{91} = 5$	$x_{92} = -1$	50.7
10	$x_{10\ 1} = 3$	$x_{10\ 2} = 5$	-65.3

Задача решается в предположении, что структура модели известна и представлена, например, уравнением вида:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2 \quad (7.13)$$

Рассчитаем элементы информационной матрицы (7.12):

$$\begin{aligned}
 f_{10} &= 1, f_{11} = x_{11} = -2, f_{12} = x_{11} \cdot x_{12} = -2, f_{13} = x_{12}^2 = 1 \\
 f_{20} &= 1, f_{21} = x_{21} = 1, f_{22} = x_{21} \cdot x_{22} = 2, f_{23} = x_{22}^2 = 4 \\
 f_{30} &= 1, f_{31} = x_{31} = 3, f_{32} = x_{31} \cdot x_{32} = 3, f_{33} = x_{32}^2 = 1 \\
 f_{40} &= 1, f_{41} = x_{41} = 2, f_{42} = x_{41} \cdot x_{42} = 8, f_{43} = x_{42}^2 = 16 \\
 f_{50} &= 1, f_{51} = x_{51} = 3, f_{52} = x_{51} \cdot x_{52} = 6, f_{53} = x_{52}^2 = 4 \\
 f_{60} &= 1, f_{61} = x_{61} = -1, f_{62} = x_{61} \cdot x_{62} = 2, f_{63} = x_{62}^2 = 4 \\
 f_{70} &= 1, f_{71} = x_{71} = 3, f_{72} = x_{71} \cdot x_{72} = 6, f_{73} = x_{72}^2 = 4 \\
 f_{80} &= 1, f_{81} = x_{81} = 4, f_{82} = x_{81} \cdot x_{82} = -8, f_{83} = x_{82}^2 = 4 \\
 f_{90} &= 1, f_{91} = x_{91} = 5, f_{92} = x_{91} \cdot x_{92} = -5, f_{93} = x_{92}^2 = 1
 \end{aligned}$$

$$f_{10\ 0} = 1, f_{10\ 1} = x_{10\ 1} = 3, f_{10\ 2} = x_{10\ 1} \cdot x_{10\ 2} = 15, f_{10\ 3} = x_{10\ 2}^2 = 25$$

Таким образом, произведение транспонированной информационной матрицы на прямую равно

$$(F^T F) = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 0 & 79 \\ 15 & 87 & -22 & 204 \\ 0 & -22 & 846 & 168 \\ 79 & 204 & 168 & 1219 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу вычисленному произведению $(F^T F)$

$$(F^T F)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.212 & -0.004757 & 0.002519 & -0.013 \\ -0.004757 & 0.02 & 0.00166 & -0.00323 \\ 0.002519 & 0.00166 & 0.00132 & -0.0005403 \\ -0.013 & -0.00323 & -0.0005403 & 0.00298 \end{pmatrix}$$

Продолжая вычисления по формуле (7.11), найдем элементы матричного произведения $(F^T F)^{-1} \cdot F^T$:

0.203	0.159	0.192	0.00998	0.16	0.169	0.158	0.12	-0.075	-0.097
-0.051	0.00484	0.056	-0.00674	0.05	-0.036	-0.085	0.054	0.021	-0.00747
-0.00299	0.00416	0.00944	0.00676	0.012	0.00183	-0.011	-0.00553	-0.027	0.012
-0.00347	-0.00843	-0.022	0.013	-0.017	-0.00197	-0.00882	-0.013	0.018	0.026

Умножая полученное произведение на вектор выходных значений, получим

$$(F^T F)^{-1} \cdot F^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 1.966 \\ 1.034 \\ -3.004 \\ -1.021 \end{pmatrix}$$

Последний результат, исходя из формулы (7.11) даёт выражения для коэффициентов искомого вектора

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \end{pmatrix}.$$

И, следовательно, вид аппроксимирующей зависимости выглядит следующим образом:

$$y = 1.966 + 1.034x_1 - 3.004x_1x_2 - 1.021x_2^2 \quad (7.14)$$

Для определения эффективности приближения (7.14) необходимо рассчитать сумму квадратов отклонений (невязок) экспериментально определенных y_i и рассчитанных по (7.14) значений $\hat{y}_i$.

Таблица 11. Итоговые результаты расчета по МНК для зависимости
(7.14)

№ измерения, i	x_{i1}	x_{i2}	y_i	$\hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
1	2	1	5.3	4.886	0.1714
2	1	2	-7.5	-7.093	0.1656
3	3	1	-4.8	-4.966	0.0276
4	2	4	-36.4	-36.336	0.0041
5	3	2	-17.2	-17.042	0.0250
6	-1	-2	-9.6	-9.16	0.1936
7	3	2	12.9	12.806	0.0088
8	4	-2	26.4	26.048	0.1239
9	5	-1	50.7	50.878	0.0317
10	3	5	-65.3	-65.521	0.0488

Суммируя показатели последнего столбца табл. 11, получим значение функционала (7.9)

$$J = \sum_{i=1}^N (y_i - \tilde{y}_i)^2 = 0.8005 \quad (7.15)$$

Несмотря на отличное от нуля значение функционала, эффективность приближения (7.14) вполне удовлетворительно, что показывает график экспериментальных y_i и расчетных $\tilde{y}_i$ значений $\tilde{y}_i$:

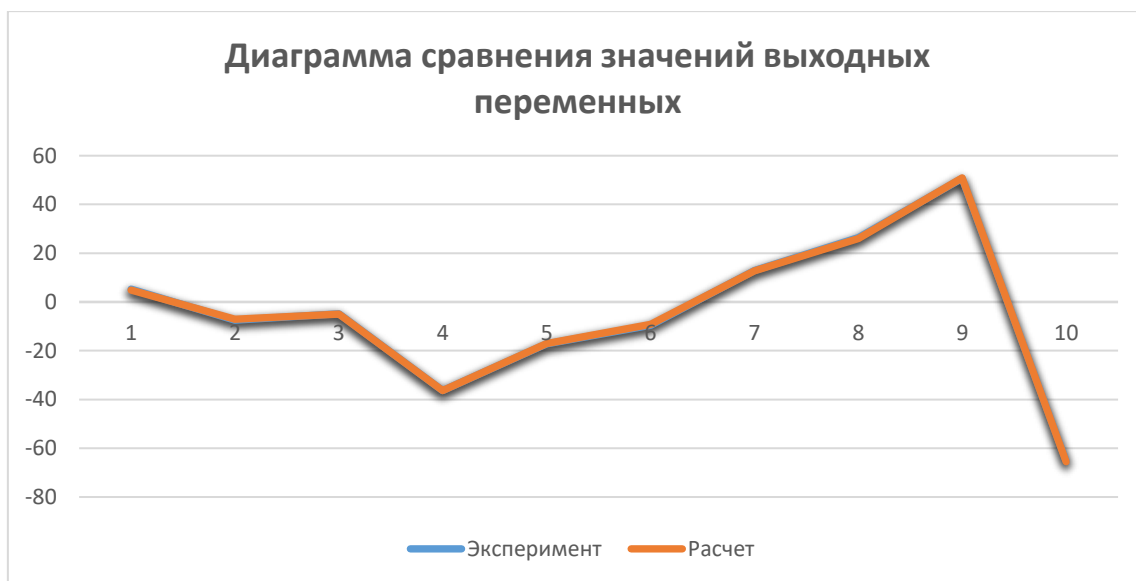


Рис. 10 Результаты расчета по МНК

7.4 МНК для линейной зависимости

Для случая линейной зависимости

$$y = ax + b \quad (7.17)$$

нахождение параметров регрессии существенно упрощается и допускает аналитическое решение. Составим функционал для двух переменных и найдем, при каких значениях a и b , этот функционал принимает минимальное значение:

$$J(a, b) = \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2 \rightarrow \min \quad (7.18)$$

По необходимому признаку экстремума частные производные функции (5) должны быть равны нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial a} = -\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial b} = -\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b) \cdot 1 = 0 \end{cases} \quad (7.19)$$

Преобразуем уравнения системы (7.19) следующим образом:

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^N x_i^2)a + (\sum_{i=1}^N x_i)b = (\sum_{i=1}^N x_i y_i) \\ (\sum_{i=1}^N x_i)a + ab = (\sum_{i=1}^N y_i) \end{cases} \quad (7.20)$$

Таким образом, получается система линейных уравнений с двумя неизвестными a и b . Коэффициенты при неизвестных a и b (соответствующие суммы) находятся из исходной табличной зависимости и являются постоянными для данной выборки. При различных значениях x_i главный определитель этой системы отличен от нуля. Следовательно, система линейных уравнений (7.20) имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{N(\sum_{i=1}^N x_i y_i) - (\sum_{i=1}^N x_i)(\sum_{i=1}^N y_i)}{N(\sum_{i=1}^N x_i^2) - (\sum_{i=1}^N x_i)^2} \quad (7.21)$$

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^N y_i) - a \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^N x_i) \quad (7.22)$$

Подставим найденные значения a и b в уравнение (7.17) и получим искомую линейную функцию.

7.5 Альтернативные методы параметрической идентификации

Метод наименьших квадратов не является единственным и наилучшим способом параметрической идентификации. Для этого можно использовать численные методы поиска минимума функции J . Такие алгоритмы реализованы во многих математических пакетах. Например, в языке Python можно использовать функцию `curve_fit` пакета `scipy.optimize`. В условиях общедоступности вычислительной техники использование аппроксимации нелинейной кривой является, как правило, предпочтительным. Заметим, однако, что для корректного физического анализа экспериментальных результатов выбор формы кривой (функции f) должен основываться на теории физического явления. При этом всегда необходимо отдельно проверять качество получившейся аппроксимации (хотя бы «на глаз» по виду получающегося графика): ведь даже «наилучшие» параметры кривой отнюдь не означают, что общее отклонение результатов от теории мало. Более строго степень отклонения эксперимента от теории можно анализировать с помощью разбираемого далее метода хи-квадрат. Метод наименьших квадратов приходится использовать, когда погрешности экспериментальных точек не известны. Если же известны оценки погрешностей σ_i для каждой точки, то предпочтительным является более общий метод минимума хи-квадрат [27] (метод Пирсона), минимизирующий следующую «сумму хи-квадрат»:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\Delta y_i}{\sigma_{yi}} \right)^2 \rightarrow \min \quad (7.23)$$

где $\Delta y_i = y_i - f(x_i, \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$. Каждое слагаемое суммы (7.23) представляет квадрат отклонения, нормированного на соответствующую погрешность. Из-за этого экспериментальные точки с меньшей точностью (большей погрешностью) будут иметь меньший вес в итоговой сумме. Метод хи-квадрат вполне соответствует интуитивному представлению о том, как теоретическая зависимость должна проходить через экспериментальные точки. Ясно, что чем ближе данные к модельной кривой, тем меньше будет сумма (7.16). При этом чем больше погрешность точки, тем в большей степени

дозволено результатам измерений отклоняться от модели. Метод минимума χ^2 является частным случаем более общего метода максимума правдоподобия (см. ниже), реализующийся при нормальном (гауссовом) распределении ошибок. Если все погрешности одинаковы: $\sigma_{y_i} = \text{const}$, метод минимума хи-квадрат эквивалентен МНК. Также, подобно МНК, здесь подразумевается, что погрешность измерений существенна только для данных $\{y_i\}$ по вертикальной оси. Поэтому оси x и y графика следует выбирать так, чтобы относительная ошибка по оси абсцисс была значительно меньше, чем по оси ординат: $\sigma x/x \ll \sigma y/y$. Как и для МНК, метод минимума хи-квадрат позволяет записать аналитические выражения для построения наилучшей прямой. А в общем случае задача о поиске минимума χ^2 должна решаться численно. В языке Python для этого также может быть использована упомянутая выше функция `curve_fit` пакета `scipy.optimize`. Важно, что помимо наилучших параметров кривой, метод χ^2 даёт возможность аналитически ответить на вопрос, насколько хорошо экспериментальные точки укладываются на теоретическую прямую.

8. Методы оптимизации в задачах системного анализа

Методы оптимизации (МО) находят широкое применение в различных областях науки и техники [17, 18]. Существенные успехи достигнуты в проектировании отдельных элементов, устройств и систем, в решении задач организационно-экономического управления, планировании стратегий капитальных вложений и т.д. В наиболее общем смысле теория оптимизации представляет собой совокупность фундаментальных математических результатов и численных методов, которые позволяют найти наилучший вариант из множества альтернатив и избежать при этом полного перебора и оценивания возможных решений. Знание методов оптимизации является необходимым для инженерной деятельности при создании новых, более эффективных и менее дорогостоящих систем, а также при разработке методов повышения качества функционирования существующих систем. При

постановке задачи оптимизации необходимо осуществлять выбор критерия, на основе которого можно оценить наилучший проект или множество наилучших условий функционирования системы. Критерии оптимизации могут основываться на технологических факторах, когда требуется минимизировать количество потребляемой энергии, максимизировать надежность или точность, обеспечить максимальное быстродействие, или на экономических факторах, когда требуется максимизировать прибыль, минимизировать затраты или издержки в единицу времени и т.п. В любом случае с математической точки зрения требуется найти максимальное или минимальное значение некоторой функции или функционала, представляющих собой математическую модель требования качества.

8.1 Основные понятия и определения МО. Постановка задачи

При решении задач оптимизации очень важным является этап формализации задачи, когда составляется ее математическая модель и выбирается критерий, по которому производится оптимизация. Математическая модель описывает постановку задачи с помощью математических символов. Рассмотрим задачи оптимизации двух типов: параметрической оптимизации и оптимизации управления. [21, 30]

- 1) **Задача параметрической оптимизации.** Пусть проектируемое устройство описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \\ \dots \\ \varphi_k = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{cases} \quad (8.1)$$

Вектор $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ характеризует внутренние параметры устройства, которые не зависят друг от друга, могут варьироваться в некоторых пределах и называются управляемыми параметрами. Составляющие вектора $\varphi_k = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$ называются выходными параметрами устройства. Например, при проектировании электронной схемы управляемыми параметрами являются значения сопротивлений, емкостей и индуктивностей, а выходными параметрами – временные и

частотные характеристики. Область изменения управляемых параметров, как правило, ограничена. Ограничения на переменные x характеризуют условия работоспособности устройства и определяют некоторую область D , $x^T \in D$. Принадлежность к области D может быть выражена с помощью неравенств вида $g_j(x_1, x_2, \dots, x_k) \leq 0$ где g_j – заданные функции. Критерий оптимальности задается некоторой функцией $F = F(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Экстремальное значение функции F численным образом характеризует свойство одного из наиболее важных технико-экономических показателей проектируемого устройства. Сформулируем задачу.

Найти значения переменных $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, обеспечивающих экстремальное значение критерия оптимальности $F = F(x_1, x_2, \dots, x_k)$ и удовлетворяющих системе ограничений $g_j(x_1, x_2, \dots, x_k) \leq 0$, $j = 1, \dots, m$, т.е. $\max_{x_k \in D} F(x_1, x_2, \dots, x_k)$ или $\min_{x_k \in D} F(x_1, x_2, \dots, x_k)$

Если система ограничений имеет единственное решение, то выбора нет и задача оптимизации не имеет смысла. Если же существует множество решений, то из них всегда можно выбирать то, которое обеспечивает экстремум функции $F(x)$.

2) **Задача оптимизации управления.** Для того чтобы сформулировать эту задачу, рассмотрим обобщенную структурную схему системы управления (рис. 1.1), состоящую из двух звеньев: устройства управления (УУ) и объекта управления (ОУ).

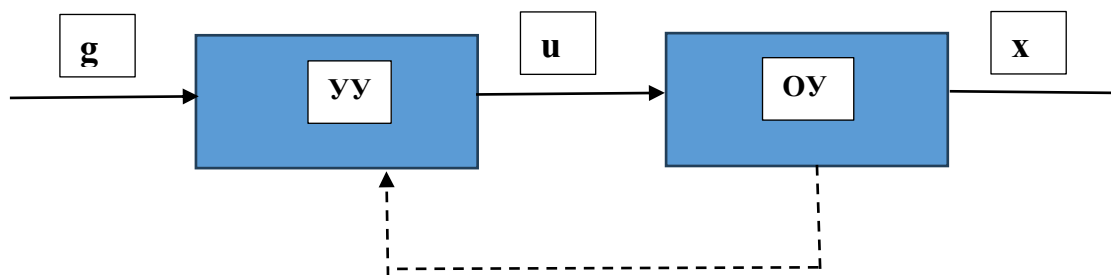


Рис. 1.1 Обобщенная схема системы управления

ОУ характеризуется вектором состояния $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, составляющие которого могут иметь самую различную природу и сущность. Так, например, при описании механических систем величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ представляют собой координаты, или скорости движущихся частей. Переменная x считается доступной для измерения и контроля. Управляющее воздействие $u^T = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ вырабатывается УУ и сознательно меняется для достижения определенных целей. Изменение вектора u во времени или в пространстве координат $u_1, u_2, \dots, u_r$ называется алгоритмом управления. Если УУ формирует вектор управления u на основании информации об изменении x , то СУ замкнута. Если УУ не получает никакой информации об ОУ, то система разомкнута. Разомкнутые системы работают по жесткому алгоритму. Вектор g характеризует внешние команды, служащие для запуска и перестройки. Способ управления объектом, дающий наилучший в некотором смысле результат, и реализующую его систему называют оптимальными. Для количественного обоснования предпочтения одного способа управления перед другим необходимо определить цель управления.

Мера, характеризующая эффективность достижения цели, определяет критерий оптимизации. Критерий оптимизации задается некоторым функционалом $J = M\{F[x(t), \dot{x}(t), u(t), t]\}$, который в каждом конкретном случае имеет точную математическую форму. В реальных системах величина J является показателем качества или пригодности управления. Работа ОУ может считаться оптимальной при максимальном КПД, максимальном быстродействии, максимальной точности, при минимальных затратах энергии и т.д. Предполагается, что свойства ОУ изменять нельзя, а УУ можно выбирать или синтезировать для получения оптимального алгоритма управления. В дальнейшем будут рассматриваться такие ОУ, которые характерны для систем автоматического управления и могут быть описаны системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad (8.2)$$

называемых уравнениями состояния. В реальных системах управляющее воздействие и переменные состояния подвержены различного рода ограничениям. Ограничения на управление, как правило, вызваны ограниченностью энергетических ресурсов системы. Переменные состояния ограничиваются из соображений безопасности, прочности, устойчивости. Такие ограничения могут задаваться в виде неравенств

$$x_i \leq a_i, i = 1, 2, \dots, n; u_j \leq b_j, j = 1, 2, \dots, r \quad (8.4)$$

Множество U всех значений управления u , которые удовлетворяют поставленным ограничениям, образует область допустимых управлений. Множество X , которому принадлежат все возможные значения компонент вектора x , образует область допустимых значений вектора состояния. Кроме того, на переменные состояния могут накладываться граничные (или краевые) условия, задающие значение x в начальный и конечный моменты времени $x(0) = x_0, x(T) = x_T$.

Сформулируем задачу оптимизации управления. Известно:

- 1) уравнения состояния (8.2);
- 2) система ограничений, наложенных на переменные состояния и управляющие воздействия (8.3) и (8.4);
- 3) граничные условия состояния ОУ ($x(0) = x_0, x(T) = x_T$).

Найти такой алгоритм управления $u^(t) \in U$, который обеспечивает экстремум некоторому функционалу $J = M\{F[x(t), \dot{x}(t), u(t), t]\} \rightarrow \text{extr}$, заданному на управлениях $u(t)$ и соответствующим им значениях $x(t) \in X$, и переводит ОУ из начального состояния $x(0)$ в заданное $x(T)$. Здесь $x(t)$ – решение системы (8.2) с начальными условиями $x(0) = x_0$, соответствующее управлению $u^*(t)$.*

Для решения задач параметрической оптимизации используют методы математического программирования; для решения задач оптимизации управления – вариационные методы, принцип максимума Понтрягина, динамическое программирование.

8.2 Постановка задач математического программирования.

К задачам математического программирования (МП) относятся задачи оптимизации, в которых отыскивается экстремум заданной скалярной функции многих переменных при ограничениях в форме системы равенств и неравенств. Все они с формальной точки зрения могут быть сведены к следующей постановке [9, 17, 18, 29, 30]

Найти значения переменных, $x_1, x_2, \dots, x_n$ доставляющие экстремальное значения некоторой функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и удовлетворяющие m уравнениям и неравенствам

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_j, j = 1, 2, \dots, m \quad (8.5)$$

Предполагается, что функции $F(x)$ и g_j известны, а b_j – заданные постоянные величины. Условия (8.5) называются ограничениями. Как правило, отдельно оговариваются ограничения на знак переменных так как методы их учета могут быть иными, чем сложных ограничений типа (8.5). Могут налагаться условия целочисленности переменных. Кратко условия задачи МП можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \min_{x_i \in X} \{ F(x) \mid g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) [\leq, =, \geq] b_j, j = 1, 2, \dots, m \} \\ \text{или} \max_{x_i \in X} \{ F(x) \mid g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) [\leq, =, \geq] b_j, j = 1, 2, \dots, m \} \end{aligned} \quad (8.6)$$

Если при определении экстремума (8.6) ограничиться рассмотрением минимизации, задача не теряет общности, так как максимизация функции $F(x)$ эквивалентна минимизации функции $-F(x)$.

Функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется целевой функцией, или функцией цели. Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющие совокупности заданных ограничений (8.5), представляют собой допустимое решение задачи, и называются планом задачи. Допустимое решение, доставляющие экстремум функции цели $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называется оптимальным решением, или оптимальным планом. Не каждая задача математического программирования имеет планы, так как не каждая система ограничений имеет решение. Основные виды экстремума функций конечного числа переменных. Пусть $F(x)$

определена в некоторой области R переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Если на переменные не накладывается никаких ограничений, т. е. область R не ограничена, то экстремум функции $F(x)$ называется **безусловным**, а в противном случае – **условным**. Простейшая задача оптимизации связана с нахождением значений переменных, обеспечивающих экстремум функции цели при отсутствии ограничений, т.е. с нахождением безусловного экстремума функции. Безусловным **глобальным минимумом (максимумом)** функции называется наименьшее (наибольшее) в пределах всей рассматриваемой области R значение этой функции. Если в некоторой точке $x_0 \in R$ функция $F(x)$ имеет меньшее (большее) значение, чем во всех точках x_i , принадлежащих некоторой малой окрестности точки x_0 , то говорят, что в этой точке имеет место локальный минимум (максимум) функции $F(x)$.

Очевидно, что если в пределах области R имеется всего один минимум (максимум), то он является глобальным. При наличии ограничений область R ограничивается областью допустимых значений переменных X . В этом случае точки экстремума должны обязательно принадлежать области X и сам экстремум называется **условным**. При этом экстремумы называются **граничными**, если они имеют место в граничных точках области и **внутренними**, если соответствуют внутренним точкам области X .

8.3 Определение выпуклых множеств и выпуклости функций

Одним из важнейших понятий, используемых в математическом программировании, является понятие выпуклости [29]. Точечные множества S называются выпуклыми, если для любых двух точек, взятых из этого множества: $x^1, x^2 \in S \Rightarrow [\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2] \in S, \alpha \in [0,1]$. Геометрически это означает, что если две точки принадлежат множеству S , то и весь отрезок, соединяющий эти точки, принадлежит S . На рис. 12 а, показано несколько примеров выпуклых, а на рис. 12, б – несколько примеров невыпуклых множеств. Аналогично дается определение выпуклой функции

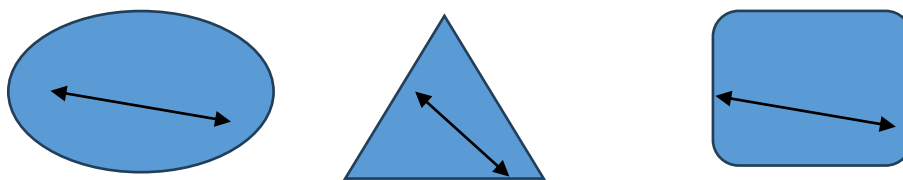


Рис. 12 а. Примеры выпуклых множеств

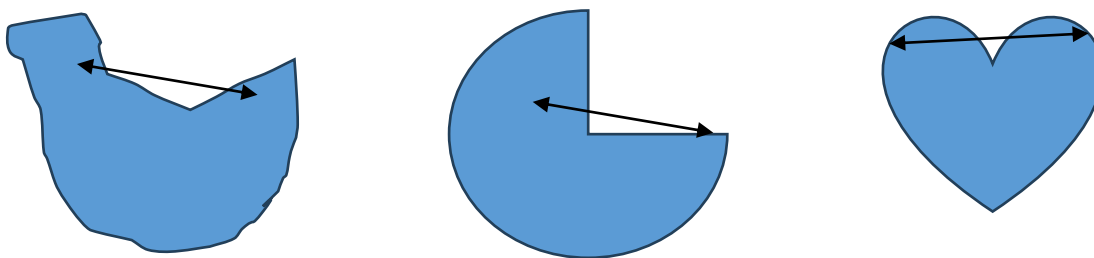


Рис. 12 б. Примеры невыпуклых множеств

. Функция $F(x)$ является выпуклой на выпуклом множестве S , если для любых двух точек x^1, x^2 выполняется соотношение:

$$F(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \leq \lambda F(x^1) + (1 - \lambda)F(x^2), \lambda \in [0, 1] \quad (8.7)$$

Функция $F(x)$ с числовыми значениями, определенная на выпуклом множестве точек K , называется вогнутой, если для любой пары точек x^1, x^2 и для всех чисел λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, выполняется неравенство

$$F(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \geq \lambda F(x^1) + (1 - \lambda)F(x^2).$$

Если имеют место строгие неравенства, то функция является строго вогнутой или строго выпуклой. Данное определение выпуклости (вогнутости) годится для любого типа функции. Следует, однако заметить, что данное определение отличается от принятого в классическом курсе математического анализа с «точностью до наоборот».

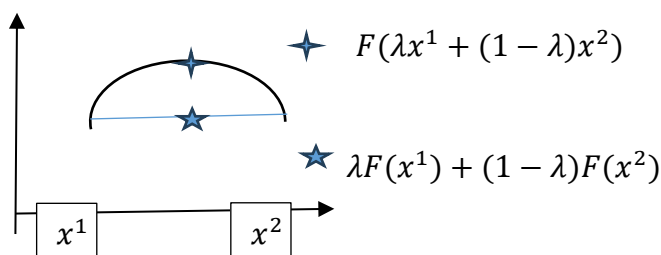


Рис. 13 Вогнутая функция

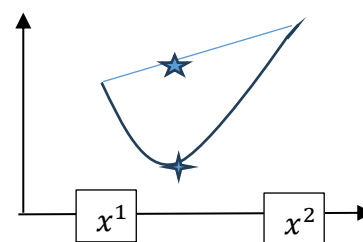


Рис. 14 Выпуклая функция

Для дважды дифференцируемой функции $F(x)$ имеет место следующий критерий. Дифференцируемая функция $F(x)$ строго выпукла в некоторой окрестности точки $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, если выполняются следующие условия:

$$\left. \begin{array}{l} F''_{1,1}(x^0) < 0, \\ F''_{2,2}(x^0) < 0, \\ F''_{3,3}(x^0) < 0, \\ \dots \\ \left| \begin{array}{cc} F''_{1,1}(x^0) & F''_{1,2}(x^0) \\ F''_{2,1}(x^0) & F''_{2,2}(x^0) \end{array} \right| > 0, \\ \left| \begin{array}{ccc} F''_{1,1}(x^0) & F''_{1,2}(x^0) & F''_{1,3}(x^0) \\ F''_{2,1}(x^0) & F''_{2,2}(x^0) & F''_{2,3}(x^0) \\ F''_{3,1}(x^0) & F''_{3,2}(x^0) & F''_{3,3}(x^0) \end{array} \right| < 0, \\ \dots \end{array} \right\} \quad (8.8)$$

т.е. если знаки этих определителей чередуются указанным образом. Здесь $F''_{i,j}(x^0)$ - частная производная второго порядка, вычисленная в точке x^0 .

Матрица размера $n \times n$, составленная из элементов $F''_{i,j}(x^0)$, называется матрицей Гессе (Hesse) (8.8). По значениям ее главных миноров можно судить о выпуклости или вогнутости функции. Функция $F(x)$ строго вогнута в малой окрестности точки x^0 , если все главные миноры ее матрицы Гессе строго отрицательны (9, 17).

Для практических вычислений удобно пользоваться таким правилом:

- 1) если $n=2$, то для выпуклости необходимо, чтобы $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} < 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} < 0$ и определитель матрицы Гессе положителен;
- 2) если $n=3$, то для выпуклости необходимо, чтобы $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} < 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} < 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} < 0$ и определитель матрицы Гессе отрицателен

- 3) при произвольных пространствах большей размерности требование выпуклости для четных n совпадают с 1). Для нечетных – с 2)

Весьма распространены относящиеся к данному типу модели квадратичного программирования, в которых целевая функция $F(x)$ является квадратичной функцией переменных $x_1, \dots, x_n$. Существует большое число алгоритмов решения такого типа задач, в которых функция $F(x)$ вогнута (выпукла). В отличие от невыпуклых функций, которые могут иметь любое число локальных минимумов, выпуклая функция имеет только глобальный минимум. Задача нахождения минимального значения выпуклой функции $F(x)$ в случае, когда область допустимых значений переменных определяется системой выпуклых неравенств (8.5), называется задачей выпуклого программирования. Любой локальный минимум задачи выпуклого программирования является глобальным минимумом. Это свойство задач выпуклого программирования значительно облегчает поиск их решения.

8.4 Типы задач математического программирования (МП)

В зависимости от вида функций цели и типа ограничений задачи МП подразделяются на ряд более частных задач:

- **линейное программирование:** функция цели $F(x)$ и ограничения (8.5) являются линейными функциями переменных x_i
- **нелинейное программирование:** функция цели $F(x)$ и (или) ограничения 8.5) являются нелинейными;
- **сепарабельное программирование:** специальный случай выпуклого программирования при условии, что $F(x)$ и все $g_i(x)$ - сепарабельные функции относительно операции сложения, т.е. выполняются условия:
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n F_j(x_j), g_i(x) = \sum_{j=1}^n g_{i,j}(x_j), i \in 1:m.$$
- **Дробно-нелинейное программирование** заключается в максимизации (минимизации) функции вида $F(x) = \frac{F_1(x)}{F_2(x)}$. В частном случае, когда в

числителе и знаменателе – линейные функции (так называемая задача дробно-линейного программирования), задача сводится к линейной.

- **целочисленное программирование** – это задачи, в которых переменные x могут принимать только целые значения
- **стохастическое программирование**: коэффициенты в целевой функции или в ограничениях являются случайными величинами
- **Невыпуклое программирование**. Функция $F(x)$ и (или) какие-либо $g_i(x)$ не выпуклы. Надежных методов решения задач такого типа пока не существует.

Задача оптимального управления представляет специальный раздел теории оптимальных систем и заключается в отыскании такого алгоритма управления $u^*(t) \in U$, который переводит ОУ из заданного начального состояния x_0 в конечное x_T и обеспечивает экстремум выбранному критерию качества при соблюдении заданных ограничений. Рассмотрим задачу, в которой критерий оптимальности задан функционалом

$$J = \int_{t_0}^T \{F[x(t), \dot{x}(t), u(t), t]\} dt + G[x(T), T], \quad (8.9)$$

представляющему собой сумму интегральной и терминальной составляющей. Здесь $G[x(T), T]$ – терминальная функция, она не зависит от управляющего воздействия, а определяется только состоянием объекта в конечный момент времени. При этом должны удовлетворяться уравнения состояния системы

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad (8.10)$$

с условиями

$$x(0) = x_0, x(T) = x_T \quad (8.11)$$

и ограничениями, наложенными на переменные состояния и управляющие воздействия (8.3) и (8.4)

$$\begin{aligned} x_i &\leq a_i, i = 1, 2, \dots, n; u_j \leq b_j, j = 1, 2, \dots, r, \\ g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) &\{\leq, =, \geq\} b_j, j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (8.12)$$

Задачу оптимального управления фактически можно свести к задаче МП [9, 17, 18]. Чтобы пояснить это, надо представить интеграл (8.9) в виде суммы, разбив интервал $[t_0, T]$ на N временных подинтервалов:

$$\int_{t_0}^T \{F[x(t), \dot{x}(t), u(t), t]\} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \{F[x(t_k), \dot{x}(t_k), u(t_k), t_k]\} \Delta t,$$

$$\Delta t = t_k - t_{k-1} \quad (8.13)$$

Уравнения состояния (8.11) при таком разбиении можно представить следующим образом:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = f[x(t_k), \dot{x}(t_k), u(t_k), t_k], \Delta x = x(t_k) - x(t_{k-1}) \quad (8.14)$$

Ограничения представляются в виде:

$$g[x(t_k), t_k] \leq 0, g[u(t_k), t_k] \leq 0 \quad (8.15)$$

Таким образом, задачу оптимального управления для непрерывной системы (8.9) – (8.12) можно свести к бесконечной последовательности конечных (разностных) уравнений в терминах МП. При решении практических задач число переменных может быть уменьшено до приемлемой величины. Большая часть работ, посвященных решению задач оптимального управления методами МП, относится к линейным системам. При этом задача оптимального управления сводится к решению задачи линейного программирования (ЛП).

8.5 Линейное программирование

8.5.1 Математическая формулировка и основные особенности задачи линейного программирования

В наиболее общем виде задача ЛП формулируется следующим образом. Найти значения переменных $x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$, доставляющих экстремум линейной функции цели (Lotov)

$$F(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \text{extr} \quad (8.16)$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{r=1}^n c_l x_r \leq b_l, l = 1, 2, \dots, p \quad (8.17)$$

$$\sum_{r=1}^n c_i x_r \geq b_i, i = p + 1, 2, \dots, p + q \quad (8.18)$$

$$\sum_{r=1}^n c_k x_r = b_k, k = p + q + 1, 2, \dots, m \quad (8.19)$$

Здесь $c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ – транспонированный n -мерный вектор постоянных коэффициентов, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n -мерный вектор переменных, m – общее число ограничений. Ограничения (8.17)–(8.19) можно записать в матричной форме:

$$Ax \{ \geq, \leq, = \} B \quad (8.20)$$

В сформулированной задаче (8.17) – (8.20) имеется q ограничений типа неравенств и $m - q$ ограничений типа равенств. Если ограничения типа неравенств отсутствуют, то такая форма записи задачи ЛП называется канонической. Общая форма записи ограничений может быть приведена к канонической путем введения дополнительных переменных. Дополнительные неотрицательные переменные вводятся таким образом, чтобы привести ограничения неравенства к виду равенств. В зависимости от знака неравенств (8.16) и (8.17) будут иметь место следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n c_l x_r + x_{n+l} &= b_l, l = 1, 2, \dots, p; \\ \sum_{r=1}^n c_i x_r + x_{n+i} &= b_i, i = p + 1, 2, \dots, p + q \end{aligned} \quad (8.21)$$

Введение дополнительных переменных не изменяет функции цели и не влияет на оптимальное решение задачи. В дальнейшем можно ограничиться задачей максимизации функции цели. При этом общность не ограничивается, так как максимизация функции $F(x)$ эквивалентна минимизации функции $-F(x)$. Теперь задача ЛП может быть сформулирована в следующей канонической форме

$$\max_{x \in X} \{c^T x \mid A_1 x = B, x \geq 0, i = 1, 2, \dots, N\} \quad (8.22)$$

Рассмотрим особенности задач ЛП. Система ограничений (8.21) представляет собой m линейных алгебраических уравнений с N неизвестными переменными. Если $N=m$ и матрица A_1 неособенная, то существует единственное решение системы и варьировать переменные для обеспечения

минимума $F(x)$ оказывается невозможным. Если $N < m$, то некоторые уравнения являются зависимыми и могут быть исключены, при этом возвращаемся к случаю, когда $m = N$. Это означает, что задача ЛП имеет смысл только при $N > m$, т.е. когда общее число неизвестных больше числа ограничений. В этом случае из множества решений системы (8.22) необходимо выбрать такое, которое придает целевой функции максимальное значение. Отметим, что при отсутствии ограничений функция цели (8.21) не имеет экстремума. Поэтому экстремум, если он существует, обязательно будет граничным, а не внутренним. Так как все ограничения линейны, то множество допустимых решений является выпуклым. Следовательно, экстремум целевой функции в задаче ЛП, если он существует, всегда является глобальным.

8.5.2 Графическая интерпретация задачи ЛП

Для более полного представления о задаче ЛП сделаем её геометрическую интерпретацию. Совокупность любого числа линейных ограничений выделяет в пространстве $x \in \{X: (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ некоторый выпуклый многогранник, ограничивающий область допустимых значений переменных (ОДЗП). Геометрическую интерпретацию и решение задачи нетрудно получить лишь в простейших случаях при $n = 2$ или $n = 3$. Рассмотрим задачу:

$$\max_{x \in X} \{F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \mid a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 \leq b_j, j = 1, 2, \dots, m\} \quad (8.23)$$

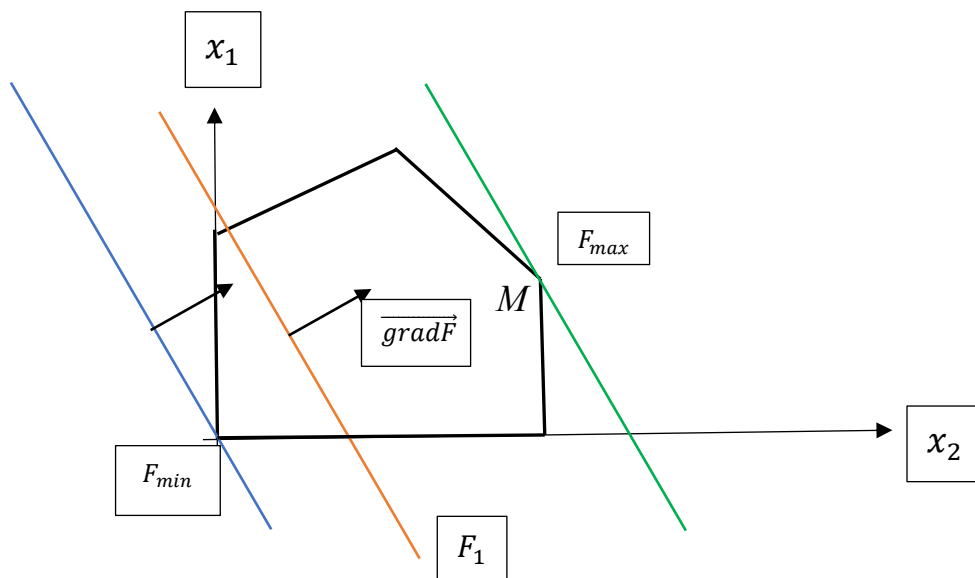


Рис. 15. Графическая интерпретация решения задачи ЛП

Каждое из ограничивающих неравенств определяет полуплоскость, лежащую по одну сторону прямой $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 = b_j, j = 1, 2, \dots, m$. ОДЗП получится в результате пересечения m полуплоскостей. Условия неотрицательности позволяют ограничиться рассмотрением положительного квадранта.

На рис. 15 показан один из возможных вариантов ОДЗП в виде замкнутого многоугольника для случая $m = 3$. Координаты x_1 и x_2 любой точки, принадлежащей области, удовлетворяют системе ограничений задачи. Чтобы найти оптимальное решение, зададим функции цели некоторое постоянное значение $F_1 = const$ и построим прямую $F_1 = c_1x_1 + c_2x_2$, которая будет отсекают на оси ординат отрезок $\frac{F_1}{c_2}$, а на оси абсцисс отрезок $\frac{F_1}{c_1}$. Если задать другие значения функции цели и изобразить соответствующие линии, то получим семейство параллельных прямых, которые называются линиями уровня функции цели. Направление стрелки $\overrightarrow{grad F}$ показывает направление увеличения целевой функции. Величину функции цели можно характеризовать расстоянием d от начала координат до линии уровня в соответствии с выражением $F_{max} = \frac{F_1}{c_1} \sin \alpha$.

В теории ЛП доказано, что если оптимальное решение задачи существует и единственно, то оно достигается в некоторой вершине многоугольника решений. Очевидно, что целевая функция достигает максимального значения тогда, когда её линия будет проходить через точку M . Координаты этой точки будут оптимальным решением задачи. Минимальное значение рассматриваемой функции будет достигаться в начале координат. Таким образом, если требуется определить такие x_1 и x_2 , которые обеспечивают максимум функции цели, то геометрически это означает, что необходимо провести прямую $F = const$, проходящую хотя бы через одну вершину области и имеющую максимальное расстояние d от начала координат. В случае минимизации это расстояние должно быть минимальным.

8.5.3 Симплекс-метод решения задач ЛП

Симплекс-метод – один из наиболее эффективных методов численного решения задач ЛП [17, 18, 34]. Суть понятия «симплекс» заключается в следующем. Для тела в k -мерном пространстве симплексом называется множество, состоящее из $k+1$ вершин этого тела. Так, при $k = 2$, т.е. на плоскости, симплексом будут вершины треугольника; при $k = 3$ симплексом являются вершины четырехгранника, например тетраэдра, и т.д. Такое название методу дано по той причине, что в его основе лежит последовательный перебор вершин ОДЗП с целью определения координат той вершины, в которой функция цели имеет экстремальное значение. Решение задачи с помощью симплекс-метода разбивается на два основных этапа. На первом этапе находят одно из решений, удовлетворяющее системе ограничений (8.16)-(8.18). Системы, в которых переменных больше, чем ограничений $N > m$, называются неопределенными. Они приводятся к определенным системам ($N = m$) путем приравнивания к нулю $N-m$ каких-либо переменных. При этом остается система m уравнений с m неизвестными, которая имеет решение, если определитель системы отличен от нуля. В симплекс-методе вводится понятие базисных переменных, или базиса. Базисом называется любой набор из m таких переменных, что определитель, составленный из коэффициентов при этих переменных в m -ограничениях, отличен от нуля. Остальные $N-m$ переменных называются небазисными или свободными переменными. Если принять, что все небазисные переменные равны нулю, и решать систему ограничений относительно базисных переменных, то получим базисное решение. В системе из m уравнений с N неизвестными общее число базисных решений при $N > m$ определяется числом сочетаний $C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!}$. Базисное решение, в котором все $x_i > 0$, называется допустимым базисным решением. Таким образом, первый этап завершается нахождением допустимого базисного решения, хотя бы и неудачного. На втором этапе производится последовательное улучшение найденного решения. При этом осуществляется переход от одного допустимого базисного

решения к другому таким образом, чтобы значение целевой функции улучшилось.

На втором этапе производится последовательное улучшение найденного решения. При этом осуществляется переход от одного допустимого базисного решения к другому таким образом, чтобы значение целевой функции улучшилось. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто наименьшее (или наибольшее) значение функции цели. Геометрически это означает переход по ребрам из одной вершины многогранника допустимых значений в другую по направлению к той, в которой значение функции цели достигает экстремума. Симплекс-метод дает оптимальную процедуру перебора базисных решений и обеспечивает сходимость к экстремальной точке за конечное число шагов. Вычисления на втором этапе ведутся по следующей схеме:

- 1) базисные переменные и функция цели выражаются через небазисные переменные;

- 2) по определенному правилу выбирается та из небазисных переменных, изменение значения которой способно улучшить значение $F(x)$, и она вводится в базис;

- 3) определяется, какая из базисных переменных должна быть выведена из базиса, при этом новый набор базисных переменных, образующийся на каждом шаге, отличается от предыдущего только одной переменной;

- 4) базисные переменные и функция цели выражаются через новые небазисные переменные, и повторяются операции 2) и 3). Если на определенном шаге окажется, что изменение значений любой из небазисных переменных не может улучшить $F(x)$, то последнее базисное решение оказывается оптимальным.

Пример. На приобретение оборудования для нового участка выделено 20 тыс. у.е. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 72 m^2 . Может быть заказано оборудование двух видов: 1) оборудование стоимостью 5 тыс. у.е., занимающее площадь 6 m^2 и дающее 8 тыс. ед.

продукции за смену; 2) оборудование стоимостью 2 тыс. у.е., занимающее площадь 12 м^2 и дающее за смену 4 тыс. ед. продукции. Найти оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий максимум общей производительности участка. Обозначим неизвестное количество оборудования первого и второго видов соответственно через x_1, x_2 . Функция цели может быть записана следующим образом $F(x) = 8x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$. Ограничения по площади: $6x_1 + 12x_2 \leq 72$; ограничения по стоимости: $5x_1 + 2x_2 \leq 20$; ограничения на знак переменных: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Разделим коэффициенты первого из ограничений на 6 и приведем ограничения к виду равенств, вводя дополнительные переменные x_3, x_4 :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 20 \end{cases} \quad (8.24)$$

Таким образом, ограничения задачи приведены к системе из двух алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными. Процедура решения задачи следующая:

1-й шаг. Выберем в качестве базисных переменных (БП) x_2, x_4 , так как определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, составленный из коэффициентов при этих переменных в ограничениях задачи отличен от нуля. Тогда x_1, x_3 будут небазисными переменными (НП). Выразим БП и $F(x)$ через небазисные. Из (8.24) следует:

$$x_2 = 6 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \quad (8.25)$$

$$x_4 = 8 - 4x_1 + x_3 \quad (8.26)$$

$$F(x) = 24 + 6x_1 - 2x_3 \quad (8.27)$$

На каждом шаге решения задачи НП приравниваются к нулю, следовательно, БП и $F(x)$ будут равны свободным членам в соответствующих выражениях:

$$x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 0, x_4 = 8, F(x) = 24$$

Из базиса исключают ту переменную, которая раньше обратится в нуль при введении в базис 1-й x_1 . Анализируя (3.11) и (3.12), определяем, что из базиса следует исключить x_4 . На следующем шаге местами поменяются переменные x_1 и x_4 .

2-й шаг. Теперь 2-й шаг: x_1, x_2 – базисные переменные, x_3 и x_4 – небазисные.

Выразим БП и $F(x)$ через НП. Из (8.25)- (8.27) следует:

$$x_1 = 2 + \frac{1}{4} x_3 - \frac{1}{4} x_4 \quad (8.28)$$

$$x_2 = 5 - \frac{5}{8} x_3 + \frac{1}{8} x_4 \quad (8.29)$$

$$F(x) = 36 - \frac{1}{2} x_3 - \frac{3}{4} x_4 \quad (8.30)$$

Это решение соответствует координатам вершины В на рис. 16. Найденное решение будет оптимальным, так как улучшить значение $F(x)$ нельзя, переменные x_3 и x_4 входят в выражение для функции цели с отрицательными коэффициентами. Таким образом, максимальная производительность участка $F^*(x)=36$ тыс. ед. продукции за смену будет обеспечена при закупке 2 единиц оборудования первого вида и 5 ед. оборудования второго вида. Дополнительные переменные x_3 и x_4 имеют смысл неиспользованных ресурсов. В данном примере все ресурсы по площади и по стоимости использованы полностью, максимальные значения: $x_1^* = 2, x_2^* = 5$.

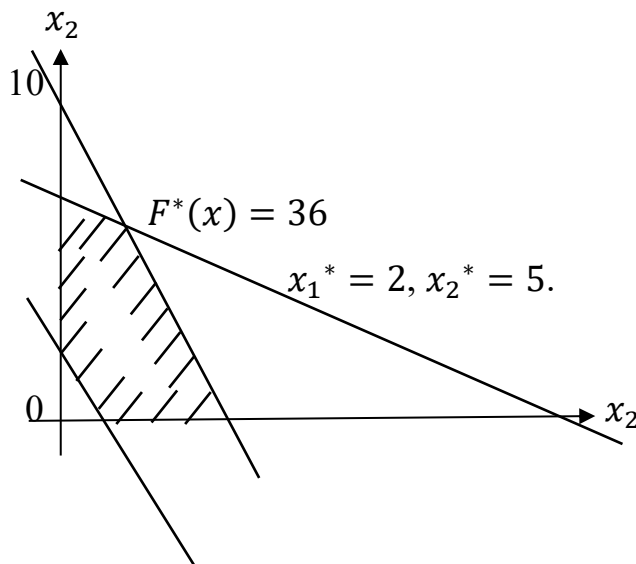


Рис. 16 Графическая интерпретация к решению задачи симплекс-методом

Для обеспечения алгоритмичности симплекс метода, процедуру его реализации оформляют в виде симплекс-таблиц. Симплекс-таблица составляется для каждой итерации по определенным правилам, что облегчает перебор базисных решений и позволяет избежать случайных ошибок. Рассмотрим следующую задачу ЛП:

$$\max_{x \in X} \{F(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \mid \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq b_j, j = 1, 2, \dots, m\} \quad (8.31)$$

Если в условии задачи есть ограничения со знаком $\geq$, то их можно привести к виду $\sum_{i=1}^n c_i x_i \mid \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq b_j$, умножив обе части неравенства на -1 . Введем m дополнительных переменных $x_{n+j} \geq 0$ и преобразуем ограничения к виду равенств

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i + x_{n+j} = b_j, j = 1, 2, \dots, m \quad (8.32)$$

Предположим, что все исходные переменные задачи $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ небазисные. Тогда дополнительные переменные будут базисными, и частное решение системы ограничений имеет вид

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, x_{n+j} = b_j \quad (8.33)$$

$$F(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i + F_0 = 0 \quad (8.34)$$

Начальная симплекс-таблица (табл.12) составляется на основании уравнений (8.31) - (8.34).

Таблица 12. Заполнение симплекс-таблиц для задачи ЛП.

Базисные переменные	Свободные члены в системе ограничений	Небазисные переменные					
		x_1	x_2	$\dots$	x_l	$\dots$	x_n
x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1l}	$\dots$	a_{1n}
x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2l}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{n+r}	b_r	a_{r1}	a_{r2}	$\dots$	a_{rl}	$\dots$	a_{rn}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{ml}	$\dots$	a_{mn}
$F(x)_{max}$	F_0	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_l$	$\dots$	$-c_n$

Если перед дополнительными переменными x_{n+j} стоит знак «+», как в (8.32), то все коэффициенты перед переменными x_i и свободный член b_j заносятся в таблицу без изменения. Коэффициенты функции цели при ее максимизации заносятся в нижнюю строку таблицы с противоположными знаками.

Свободные члены в таблице определяют решение задачи. Алгоритм решения задачи следующий:

1-й шаг. Просматриваются элементы столбца свободных членов. Если все они положительные, то допустимое базисное решение найдено и следует перейти к *шагу 5* алгоритма, соответствующему нахождению оптимального решения. Если в начальной симплекс-таблице есть отрицательные свободные члены, то решение не является допустимым и следует перейти к *шагу 2*.

2-й шаг. Для нахождения допустимого решения осуществляется пересчет симплекс-таблицы, при этом нужно решать, какую из небазисных переменных включить в базис и какую переменную вывести из базиса. Для этого выбирают любой из отрицательных элементов столбца свободных членов и просматривают элемент строки, в которой он находится. В этой строке выбирают любой отрицательный элемент и соответствующий ему столбец определит переменную (например, x_1), которую следует исключить из небазисных и ввести в базис на следующем шаге. Столбец, соответствующий переменной x_1 , называется ведущим, или разрешающим. Если в строке с отрицательным свободным членом нет отрицательных элементов, то система ограничений несовместна и задача не имеет решения. Одновременно из БП исключается та переменная, которая первой изменит знак при увеличении выбранной НП x_1 . Это будет x_{n+r} , индекс r которой определяется из условия: $\frac{b_r}{a_{rl}} = \min \left\{ \frac{b_j}{a_{jl}} \right\}$. т.е. та переменная, которой соответствует наименьшее отношение свободного члена к элементу выбранного ведущего столбца. Это отношение называется симплексным отношением. Следует рассматривать только положительные симплексные отношения. Строка, соответствующая переменной x_{n+r} , называется ведущей, или разрешающей. Элемент таблицы a_{rl} , стоящий на пересечении ведущей строки и ведущего столбца, называется ведущим, или разрешающим элементом. Нахождением ведущего элемента заканчивается работа с каждой очередной таблицей.

3-й шаг. Рассчитывается новая симплекс-таблица, элементы которой пересчитываются из элементов таблицы предыдущего шага и помечаются штрихом, т.е. $a'_{rl}, b'_r, c'_l, F'_0$. Пересчет элементов производится по следующим формулам:

$$a'_{rl} = \frac{1}{a_{rl}}; a'_{ri} = \frac{a_{ri}}{a_{rl}}; a'_{jl} = \frac{a_{jl}}{a_{rl}} \quad (8.35)$$

$$a'_{ji} = a_{ji} - a_{ri} \frac{a_{jl}}{a_{rl}}; \quad (8.36)$$

$$b'_r = \frac{b_r}{a_{rl}}; b'_j = b_j - b_r \frac{a_{jl}}{a_{rl}}; \quad (8.37)$$

$$c'_l = \frac{c_l}{a_{rl}}; c'_j = c_j - c_r \frac{a_{rj}}{a_{rl}}; \quad (8.38)$$

$$F'_0 = F_0 - b_r \frac{c_l}{a_{rl}}; \quad (8.39)$$

Сначала в новой таблице заполняются строка и столбец, которые в предыдущей таблице были ведущими. Выражение (8.35) означает, что элемент a'_{rl} на месте ведущего равен обратной величине элемента предыдущей таблицы. Элементы строки a'_{rl} делятся на ведущий элемент, а элементы столбца a_{jl} также делятся на ведущий элемент, но берутся с противоположным знаком. Элементы b'_r, c'_l рассчитываются по тому же принципу.

4-й шаг. Анализ новой таблицы начинается с 1-го шага алгоритма. Действие продолжается, пока не будет найдено допустимое базисное решение, все элементы столбца свободных членов должны быть положительными.

5-й шаг. Считаем, что допустимое базисное решение найдено. Просматриваем коэффициенты строки функции цели $F(x)$. Признаком оптимальности симплекс-таблицы является неотрицательность коэффициентов при небазисных переменных в F -строке.

6-й шаг. Рассчитываем новую таблицу по правилам, изложенным на 3-м шаге. Процедура продолжается до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение или сделан вывод, что оно не существует. Если в процессе оптимизации решения в ведущем столбце все элементы неположительные, то ведущую строку выбрать невозможно. В этом случае функция в области допустимых решений задачи не ограничена сверху и

$F(x)_{max} \rightarrow \infty$. Если же на очередном шаге поиска экстремума одна из базисных переменных становится равной нулю, то соответствующее базисное решение называется вырожденным. При этом возникает так называемое заикливание, характеризующееся тем, что с определенной частотой начинает повторяться одинаковая комбинация БП (значение функции F при этом сохраняется) и невозможно перейти к новому допустимому базисному решению. Заикливание является одним из основных недостатков симплекс-метода, но встречается сравнительно редко. На практике в таких случаях обычно отказываются от ввода в базис той переменной, столбцу которой соответствует максимальное абсолютное значение отрицательного коэффициента в функции цели, и производят случайный выбор нового базисного решения.

Пример. Решить задачу

$$\max_{x \in X} \{F(x) = -2x_1 + 5x_2 \mid 2x_1 + x_2 \leq 7, x_1 + 4x_2 \geq 8, x_2 \leq 4, x_1, x_2 \geq 0\} \quad (8.40)$$

симплексным методом и дать геометрическую интерпретацию процесса решения.

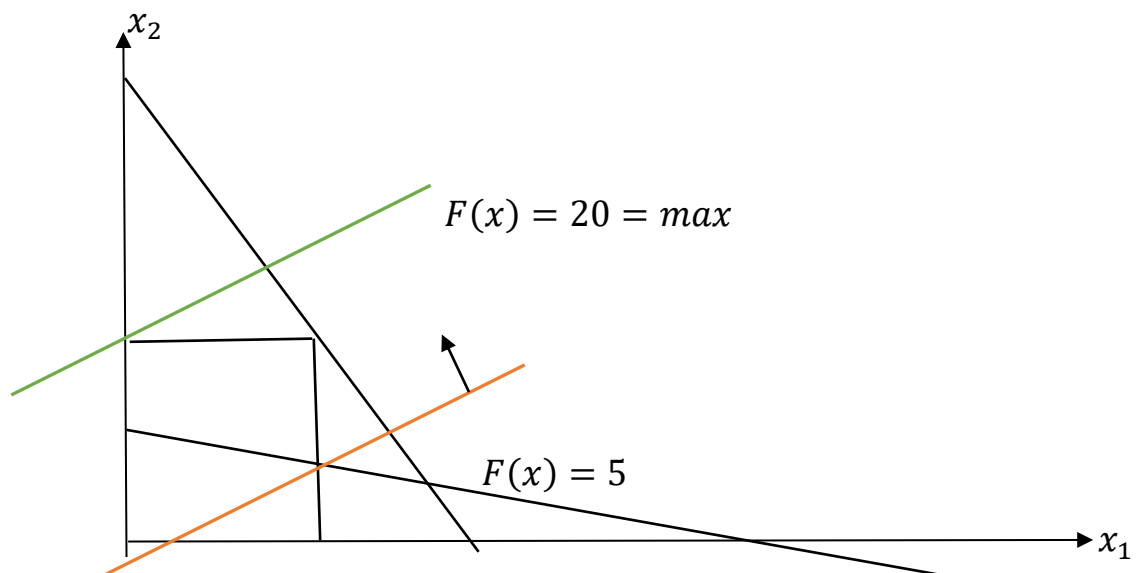


Рис. 17 Геометрическая интерпретация решения задачи (8.41)-(8.45)

Решим задачу с помощью симплекс-таблиц. Умножим второе ограничение на (-1) и введём дополнительные переменные, чтобы неравенства привести к виду равенств, тогда:

$$F(x) = -2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \quad (8.41)$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \quad (8.42)$$

$$-x_1 - 4x_2 + x_4 = -8 \quad (8.43)$$

$$x_2 + x_5 = 4 \quad (8.44)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \quad (8.45)$$

Исходные переменные $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, принимаем в качестве небазисных, а дополнительные $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$ считаем базисными и составляем симплекс-таблицу. Решение, соответствующее табл.13, не является допустимым; ведущий элемент обведен желтым цветом и выбран в соответствии с шагом 2 приведенного ранее алгоритма. Следующая табл. 14 определяет допустимое базисное решение, ему соответствует вершина ОДЗП $[0,2]$ на рис.17. Ведущий элемент выделен синим цветом и выбран в соответствии с 5-м шагом алгоритма решения задачи.

Таблица 13. Симплекс таблица 1-го шага

Базисные переменные	Свободные члены в системе ограничений	Небазисные переменные	
		x_1	x_2
x_3	7	2	1
x_4	-8	-1	-4
x_5	4	0	1
$F(x)$	0	2	5

Таблица 14. Симплекс таблица 2-го шага

Базисные переменные	Свободные члены в системе ограничений	Небазисные переменные	
		x_1	x_4
x_3	5	7/4	1/4
x_2	2	1/4	-1/4
x_5	2	-1/4	1/4
$F(x)$	10	13/4	-5/4

Таблица 15. Симплекс таблица 3-го шага

Базисные переменные	Свободные члены в системе ограничений	Небазисные переменные	
		x_1	x_5
x_3	3	2	-1
x_2	4	0	1
x_4	8	-1	4
$F(x) = \max$	20	2	5

Табл. 15 соответствует оптимальному решению задачи, следовательно:

$$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 3, x_4 = 8; F(x) = -2x_1 + 5x_2 = 20 \quad (8.46)$$

8.6 Нелинейное программирование

В нелинейном программировании (НП) рассматриваются задачи отыскания экстремума функции многих переменных при наличии ограничений на переменные в виде неравенств, при этом функция цели или хотя бы одно ограничение нелинейны. Задача НП формулируется следующим образом. Найти значения переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ минимизирующие скалярную целевую функцию $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при наличии ограничений вида $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_j, j = \overline{1, m}$ (или $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_j, j = \overline{1, m}$), где по крайней мере одна из функций $F(x)$ или $g(x)$ является нелинейной. Методы решения задач НП по сравнению с задачами ЛП обладают большим многообразием. Экстремум в задачах НП может достигаться не только в вершине или на границе области допустимых значений переменных, но и внутри области. Допускаются любые соотношения между количеством переменных n и числом m ограничений задачи. Решение задач НП может давать два или несколько экстремумов, что требует дополнительных проверок результата решения.

8.6.1 Метод неопределенных множителей Лагранжа

Метод отыскания условного экстремума функции многих переменных в задачах с ограничениями равенствами при отсутствии требований неотрицательности и целочисленности переменных был предложен Лагранжем и называется методом множителей Лагранжа. Пусть все ограничения имеют вид равенств

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_j, j = \overline{1, m} \quad (8.47)$$

Преобразуем их к виду

$$b_j - \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_j(x) = 0.$$

Будем полагать, что функции $F(x)$ и $g(x)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные. Образует вспомогательную функцию $L(x, \lambda)$ объединив функцию $F(x)$ с ограничениями, используя неотрицательные постоянные множители:

$$L(x, \lambda) = F(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) \quad (8.48)$$

Справедлива следующая теорема: если функция $F(x)$ достигает своего экстремума при условиях (8.47) в точке $x_i \in X$, то существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, что для функции $L(x_i, \lambda_j)$ в точке выполняются необходимые условия безусловного экстремума, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 \quad (8.49)$$

Функция $L(x, \lambda)$ называется функцией Лагранжа, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – неопределенными множителями Лагранжа. Таким образом, вычисление условного экстремума функции $F(x)$ сводится к отысканию безусловного экстремума функции Лагранжа (8.48). Задача состоит в нахождении $n + m$ неизвестных, включающих n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и m множителей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ Лагранжа. Для их определения используется система из m ограничений и n уравнений (8.49), являющихся условиями экстремума функции Лагранжа. Множители Лагранжа имеют определенный смысл. Предположим, что правые части системы ограничений (8.47) могут в

некоторых пределах изменяться. Если рассматривать функцию Лагранжа как функцию вектора b , то имеет место соотношение:

$$\frac{\partial L}{\partial b_j} = \lambda_j \quad (8.50)$$

Условие (8.50) показывает связь между ограничениями и множителями Лагранжа в том смысле, что множители Лагранжа являются оценками реакции целевой функции на изменение граничных условий.

8.6.2 Теорема Куна-Таккера

Одной из важнейших теорем в теории НП является теорема Куна-Таккера, обобщающая классический метод неопределенных множителей Лагранжа на задачи с ограничениями неравенствами вида $g_j(x) \leq 0$ и ограничениями на знак переменных $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$. Пусть имеется следующая задача:

$$\min_{x \in X} \{F(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m\} \quad (8.51)$$

Функции $F(x), g_j(x)$ являются при этом выпуклыми. Введем функцию Лагранжа $L(x, \lambda) = F(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)$, используя совокупность неопределенных множителей Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, это позволяет ввести следующее утверждение.

Теорема Куна-Таккера. Пусть существует вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, такой, что $x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$, и $g_j \leq 0, j = \overline{1, m}$. Тогда для того, чтобы вектор $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ был оптимальным решением задачи (8.51), необходимо и достаточно, чтобы существовал неотрицательный m -мерный вектор $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, такой что

$$L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}) \leq L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}^*) \quad (8.52)$$

Выражение (8.52) означает, что функция $L(x, \lambda)$ в точке (x_i^*, λ_j) при фиксированном x_i^* имеет глобальный максимум в области $x \in X$, а при фиксированном λ_i^* она имеет глобальный минимум в $x \in X$. Экстремальная точка $(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)$ с такими свойствами называется седловой точкой, а теорему Куна -Таккера часто называют теоремой о седловой точке. Итак, задаче (8.48)

минимизации $F(x)$ соответствует задача нахождения седловой точки (минимаксная задача) для функции L , в которой из всех ограничений сохраняются только ограничения на знак. Если $F(x), g_j(x)$ являются дифференцируемыми функциями, то условия теоремы Куна-Таккера записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) \geq 0 \\ x_i^* \frac{\partial L}{\partial x_i}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) = 0 \\ x_i^* \geq 0, i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (8.53)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) \geq 0 \\ \lambda_j^* \frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) = 0 \\ \lambda_j^* \geq 0, j = \overline{1, m} \end{cases} \quad (8.54)$$

Для точек, где, в точке минимума должно выполняться условие $\frac{\partial L}{\partial x_i}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) = 0$, а на границе области, где $x_i^* = 0$, отклонения от оптимальной точки возможны только в сторону увеличения x_i^* , при этом $\frac{\partial L}{\partial x_i}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) > 0$. Аналогично по переменной λ_j^* для внутренних точек ($\lambda_j^* > 0$) выполняется равенство нулю производной, а для граничных точек ($\lambda_j^* = 0$) первая производная для случая максимума должна быть неположительной, т.е. $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) < 0$. Условия (8.53) и (8.54) эквивалентны (8.52), т.е. являются необходимыми и достаточными для оптимальности x^* в случае выпуклости $F(x)$ и всех ограничений задачи.

8.6.3 Квадратичное программирование

Ранее, в п. 8.4 были даны определения и необходимые условия существования оптимального решения задачи нелинейного программирования (ЗНП). В числе этих условий рассматривались требования выпуклости (вогнутости) целевой функции, а также выпуклость множества, определяемого системой ограничений. Эти условия выполняются при рассмотрении задач

квадратического программирования. Задача МП, в которой функция цели представляет квадратичную форму, а все ограничения линейны, носит название задачи квадратичного программирования. В общем случае функция цели задачи квадратичного программирования (КП) может быть представлена следующим образом:

$$F(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i,k=1}^n x_i d_{ik} x_k = C^T x + x^T D x \quad (8.55)$$

Где $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ – вектор переменных; $C^T = [c_1, c, \dots, c_n]$ – постоянный вектор; $D = \{d_{ik}\}$ – постоянная симметричная матрица размерности $n \times n$. Симметричность этой матрицы необходима для существования квадратичной формы функции цели. Линейные ограничения задачи КП имеют такой же вид, как и в задаче ЛП $Ax \leq B$, где A – постоянная матрица размерности $m \times n$, B – m -мерный постоянный вектор. Задача КП, записанная в сжатой форме, имеет следующий вид

$$\min\{F(x) = C^T x + x^T D x | Ax \leq B, x \geq 0\} \quad (8.56)$$

Одним из условий применения теоремы Куна-Таккера является требование к выпуклости функции $F(x)$ и всех ограничений. Ограничения задачи КП линейны и, следовательно, выпуклы. Для того, чтобы функция (8.55) была выпуклой, необходимо, чтобы матрица D была положительно полуопределенной, т.е. $x^T D x \geq 0$ для всех x . Функция Лагранжа для задачи (8.56) имеет вид:

$$L(x, \lambda) = C^T x + x^T D x + \lambda^T (Ax - B) \quad (8.57)$$

Применим условия теоремы Куна-Таккера к рассматриваемой задаче. Найдем частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial x} = C + 2Dx + A^T \lambda \geq 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = Ax - B \leq 0$$

Введем дополнительные неотрицательные переменные, чтобы привести неравенства к виду равенств:

$$C + 2Dx + A^T \lambda - V = 0$$

$$Ax - B + W = 0$$

Очевидно, что $\frac{\partial L}{\partial x} = V$; $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -W$,

следовательно, уравнения Куна-Таккера (8.53) и (8.54) можно представить как

$$x_i^* \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow x^T V = 0$$

$$\lambda_j^* \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 \Rightarrow \lambda^T W = 0$$

Таким образом, решение задачи КП сводится к решению следующей системы уравнений

$$\begin{cases} Ax + W = B \\ 2Dx + A^T \lambda - V = -C \\ x^T V = 0 \\ \lambda^T W = 0 \\ x \geq 0, \lambda \geq 0, v \geq 0, w \geq 0 \end{cases} \quad (8.58)$$

Вектор x^* удовлетворяющий системе уравнений (8.58), является оптимальным решением задачи КП. Существуют различные специальные методы определения x^* . Рассмотрим один из них, позволяющий свести решение задачи КП к задаче ЛП. Необходимые и достаточные условия (8.58) для решения задачи (8.56) можно трактовать следующим образом: найти значения x^* , удовлетворяющие системе линейных уравнений и ограничений (8.58). Такое решение может быть получено для задачи (8.56) с условиями (8.58) симплекс методом. Сохранение условий (8.58) на протяжении всего процесса вычислений обеспечивается выполнением следующего дополнительного правила:

- при переходе к очередному базисному решению переменная w_j не должна включаться в базис, если там уже присутствует λ_j ; переменная λ_j не должна включаться в базис, если там уже присутствует w_j ;
- при переходе к очередному базисному решению переменная i не должна включаться в базис, если там уже присутствует x_i ; переменная x_i не должна включаться в базис, если там уже присутствует v_i .

Таким образом, дополнительное правило запрещает одновременное присутствие переменных x_i и v_i с одинаковым индексом i и переменных λ_j и

w_j с одинаковым индексом j в числе переменных отличных от нуля. Допустимое базисное решение, удовлетворяющее нелинейным ограничениям (8.58), будет являться оптимальным решением задачи (8.56).

Пример. Найти максимальное значение функции

$$F(x) = -2x_1^2 + 18x_1 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 12x_2 \quad (8.59)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}, \quad (8.60)$$

используя условия теоремы Куна-Таккера.

1-й шаг. Составляется функция Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = F(x) + \sum_{j=1}^2 \lambda_j g_j(x)$$

$$g_1(x) = -2 + 2x_1 + x_2 \geq 0$$

$$g_2(x) = 4 - x_1 - x_2 \geq 0$$

Точка экстремума является седловой точкой с максимумом по x и минимумом по λ , т.е. $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0$. А так как: $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = g_j(x)$, то ограничения приводятся к виду

$g_j(x) \geq 0$ и записывается функция Лагранжа

$$L(x, \lambda) = -2x_1^2 + 18x_1 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 12x_2 + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) \quad (8.61)$$

2-й шаг. Условия теоремы Куна-Таккера записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) \geq 0 \\ x_i^* \frac{\partial L}{\partial x_i}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) = 0 \\ x_i^* \geq 0, i = \overline{1, n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) \geq 0 \\ \lambda_j^* \frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) = 0 \\ \lambda_j^* \geq 0, j = \overline{1, m} \end{cases}$$

Частные производные функции Лагранжа определяют ограничения задачи в соответствии с выражениями:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -4x_1 + 18 - 2x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_1 + 12 - 2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -2 + 2x_1 + x_2 \geq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 4 - x_1 - x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (8.62)$$

3-й шаг. Ограничения приводятся к виду равенств введением дополнительных неотрицательных переменных v_1, v_2, w_1, w_2 . Одновременно свободные члены переносятся в правую часть, тогда:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -4x_1 + 18 - 2x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 + v_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_1 + 12 - 2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 + v_2 \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -2 + 2x_1 + x_2 - w_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 4 - x_1 - x_2 - w_2 = 0 \end{cases} \quad (8.63)$$

Получена система из четырех линейных алгебраических уравнений, содержащая 8 неизвестных.

4-й шаг. Находится решение системы с помощью симплекс-процедуры. На первом шаге в базис включаются все введенные дополнительные переменные, тогда первая симплекс-таблица соответствует табл. 13. Строка для функции цели отсутствует. Процедура решения иллюстрируется симплекс-таблицами 16-18.

Таблица 16. Симплекс-таблица первого шага для задачи КП (8.59)-(8.63)

Базисные переменные	Свободные члены в системе ограничений	Небазисные переменные			
		x_1	x_2	λ_1	λ_2
v_1	-18	-4	-2	2	-1
v_2	-12	-2	-2	1	-1
w_1	-2	-2	-1	0	0
w_2	4	1	1	0	0

Таблица 17. Симплекс-таблица второго шага для задачи КП (8.59)-(8.63)

Базисные переменные	Свободные члены в системе ограничений	Небазисные переменные			
		x_1	v_2	λ_1	λ_2
v_1	-6	-2	-1	1	0
x_2	6	1	-1/2	-1/2	1/2
w_1	4	-1	-1/2	-1/2	-1/2
w_2	-2	0	1/2	1/2	-1/2

Таблица 18. Симплекс-таблица третьего шага для задачи КП (8.59)-(8.63)

Базисные переменные	Свободные члены в системе ограничений	Небазисные переменные			
		v	v_2	λ_1	λ_2
x_1	3	-1/2	1/2	-1/2	0
x_2	3	-1/2	-1/4	0	1/2
w_1	7	-1/2	0	-1	1/2
w_2	-2	0	1/2	1/2	-1/2

Таблица 19. Симплекс-таблица четвертого шага для задачи КП (8.59)-(8.63)

Базисные переменные	Свободные члены в системе ограничений	Небазисные переменные			
		v_1	v_2	λ_1	w_2
x_1	3	-1/2	1/2	-1/2	0
x_2	1	1/2	1/4	1/2	1
w_1	5	-1/2	1/2	-1/2	1
λ_2	4	0	-1	-1	-2

Решение, определяемое табл. 19, соответствует допустимому базисному решению $x_1 = 3, x_2 = 1, w_1 = 5, \lambda_2 = 4$. Кроме того, выполняется условие, $x_1 v_1 = x_2 v_2 = \lambda_1 w_1 = \lambda_2 w_2 = 0$, поэтому $x_1^* = 3, x_2^* = 1$ является оптимальным решением задачи, при этом $F_{max} = 41$.

9. Многокритериальная оптимизация (МКО)

В инженерных приложениях часто встречаются случаи, когда систему необходимо оптимизировать по нескольким критериям одновременно. Ответ в таких задач не единственный и представляет собой множество Парето-оптимальных решений. Зная его локальную геометрию и несколько оптимальных точек, можно эффективно находить решение задачи. В данном разделе рассматриваются решения гладких нелинейных задач многокритериальной оптимизации с ограничениями, позволяющий находить как одну Парето-оптимальную точку, так и восстанавливать весь Парето-фронт.

9.1 Постановка задач МКО

В задачах, которые были рассмотрены до сих пор, был только один критерий оптимальности, одна цель, однако зачастую свести задачу к одному критерию достаточно трудно, так как целей может быть много. В этом случае оптимизацию производят по нескольким частным критериям $Q_i(\vec{x}), i = \overline{1, s}$, а полученные задачи называют задачами многокритериальной или векторной оптимизации [31-33]. Многокритериальная оптимизация представляет собой попытку получить наилучшее значение для некоторого множества характеристик рассматриваемого объекта, то есть найти некоторый компромисс между теми частными критериями $Q_i(\vec{x})$, по которым требуется оптимизировать решение. Постановку задачи можно представить следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1(\vec{x}) = \min(\max), \\ Q_2(\vec{x}) = \min(\max), \\ \dots \\ Q_s(\vec{x}) = \min(\max), \\ g_1(\vec{x}) \leq b_1, \\ g_2(\vec{x}) \leq b_2, \\ \dots \\ g_m(\vec{x}) \leq b_m \\ \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad (9.1)$$

Различные методы решения подобных задач представлены в литературе [40], [42], [45]. Приведем несколько причин, приводящих к многокритериальным задачам [32].

- 1) Одной из причин, приводящей к МКО, является множественность технических требований, которые предъявляются к характеристикам проектируемого устройства. Их можно свести к системе неравенств: $q_i(\vec{x}) \leq q_i^+$, где q_i^+ представляет собой предельное значение i -го технического требования. В этом случае частные критерии оптимальности обычно отсутствуют в явном виде и используется значение i -го критерия: $Q_i(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } q_i(\vec{x}) \leq q_i^+ \\ \alpha_i(q_i(\vec{x}) - q_i^+), & \text{если } q_i(\vec{x}) > q_i^+ \end{cases}$ с весом $\alpha_i \in (0,1)$, где вес определяется важностью требования.
- 2) Следующей причиной многокритериальности является необходимость обеспечения оптимальности проектируемого устройства при различных условиях его функционирования, то есть обеспечение экстремальных значений критерия оптимальности при неопределенности условий, в которых приходится работать устройству. При этом неопределенность может иметь либо количественный характер, выраженный с помощью параметра ν , что приводит к задаче оптимизации по этому параметру.

- 3) При постановке задачи оптимального проектирования одним из основных вопросов является выбор критерия оптимальности $Q_i(\vec{x})$. С одной стороны, критерий должен иметь конкретный физический смысл, а с другой - от него требуется, чтобы он как можно полнее характеризовал проектируемое устройство. Однако требования функциональной полноты трудно удовлетворить с помощью только одного скалярного показателя, так как он обычно описывает конкретное свойство устройства. В связи с этим приходится рассматривать совокупность показателей (9.1), каждый из которых имеет наглядную физическую интерпретацию и позволяет оценить качество оптимального решения x_i^* с различных точек зрения.

Многокритериальная задача оптимизации вместе со множеством возможных, (допустимых) решений включает набор целевых функций (называемых также частными критериями оптимальности) $Q_1(\vec{x}), Q_2(\vec{x}), \dots, Q_s(\vec{x})$. Набор частных критериев оптимальности образует вектор-функцию (векторный критерий), которую далее будем обозначать через $\vec{Q} = \{Q_1(\vec{x}), Q_2(\vec{x}), \dots, Q_s(\vec{x})\}$. Наряду с множеством допустимых решений D_x удобно рассматривать множество D_q – область критериев $D_q = \{D_{q_1}(\vec{x}), D_{q_2}(\vec{x}), \dots, D_{q_s}(\vec{x})\}$. Каждому решению $x_r \in D_x$ соответствует один вполне определенный векторный критерий $D_{q_r}(\vec{x})$. С другой стороны, каждой оценке $D_{q_r}(\vec{x})$ могут отвечать несколько решений x_i . Таким образом, между множествами $D_{q_r}(\vec{x})$, D_q имеется тесная связь, и поэтому выбор решения из D_x в указанном смысле равносильен выбору соответствующей оценки из D_q .

9.2 Оптимальность по Парето

При существовании в задаче нескольких частных критериев рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации [31,33], как задачу нахождения

такого вектора $\vec{x} \in D_x$, который обеспечивает одновременно минимальное значение каждому частному критерию оптимальности

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Q_1(\vec{x}), \min Q_2(\vec{x}), \dots \min Q_s(\vec{x}), \\ D_x = \{x | g_i(\vec{x}) \leq b_1, i = \overline{1, n}\} \end{array} \right. \quad (9.2)$$

Любые два векторных критерия $Q^k = \{Q_1^k, Q_2^k, \dots, Q_s^k\}$, $Q^l = \{Q_1^l, Q_2^l, \dots, Q_s^l\}$ являются противоречивыми, если:

$$Q_i^k \geq Q_i^l, i \in I_1; Q_j^k \leq Q_j^l, j \in I_2; I_1 \cup I_2 = \{1, 2, \dots, s\}$$

и по крайней мере одно из этих соотношений является строгим. В случае доминирования $\vec{Q}^k \geq \vec{Q}^l$ и хотя бы для одного i это неравенство строгое, альтернатива x_i может быть исключена из рассмотрения, так как вектор $\vec{Q}^k$ лучше вектора $\vec{Q}^l$ по всем частным критериям.

Понятие доминирования заключается в том, что существует некоторая система принятия решения, основанная на предпочтительности одного решения перед другим. Для этого рассматриваются две математические формализации понятия предпочтительности. Заметим, что для каждого частного критерия можно установить соотношения “лучше” ($>$), «хуже» ($<$) или “равноценны” ($\sim$) между любой парой его значений y'_j, y''_j , поэтому в дальнейшем будем использовать также соотношение “не хуже”, обозначаемое $y'_j \geq y''_j$, которое означает, что либо $y'_j > y''_j$, либо $y'_j \sim y''_j$.

Определение 1. Будем говорить, что точка $y'_j \in W$ доминирует точку $y''_j \in W$ по Парето и обозначать $y'_j \succ_p y''_j$, если для всех критериев $j = \{1, 2, \dots, s\}$ имеем $y'_j \geq y''_j$ и хотя бы для одного частного критерия i имеем $y'_i > y''_i$.

Определение 2. Будем говорить, что точка $y'_j \in W$ доминирует точку $y''_j \in W$ по Слейтеру и обозначать $y'_j \succ_s y''_j$, если для всех критериев $j = \{1, 2, \dots, s\}$ выполнено $y'_j > y''_j$. Отметим, что доминирование по Слейтеру в последнее время все чаще (особенно в англоязычных публикациях) довольно неудачно называют слабым доминированием по Парето.

Определение 3. Будем говорить, что точка $y'_j \in W$ равноценна точке $y''_j \in W$ и обозначать $y'_j \approx y''_j$, если это выполняется для всех критериев $j = \{1, 2, \dots, s\}$.

Доминирование по Парето и по Слейтеру позволяет определить понятие оптимального решения задачи выбора решений при нескольких критериях.

Определение 4. Критериальная точка $y^0 \in Y$ называется оптимальной по Парето, если $y^0 \in Y: \{y \in Y | y \succ_p y^0\} = \emptyset$. Такая точка называется также недоминируемой (или неулучшаемой) по Парето (на Y), а также Парето-эффективной.

Определение 5. Критериальная точка $y^0 \in Y$ называется оптимальной по Слейтеру, если $y^0 \in Y: \{y \in Y | y \succ_s y^0\} = \emptyset$. Такая точка называется также недоминируемой по Слейтеру (на Y) или слабо эффективной. Обратим внимание на то, что множество оптимальных элементов (и по Парето, и по Слейтеру) обычно состоит более чем из одной точки множества Y .

Определение 6. Множество критериальных точек, оптимальных по Парето на Y , называют множеством Парето в пространстве критериев, а также парето-оптимальным, парето-эффективным или недоминируемым множеством в пространстве критериев и обозначают $P(Y)$.

Определение 7. Множество критериальных точек, оптимальных по Слейтеру на Y , называют множеством Слейтера или слабо эффективным множеством¹⁾ в пространстве критериев и обозначают $S(Y)$. Поскольку требования к точкам, оптимальным по Парето, жестче, чем к точкам, оптимальным по Слейтеру, то $P(Y) \subseteq S(Y)$. Доминирование по Парето и по Слейтеру, а также отношение равноценности, определенные для пар точек критериального пространства, порождают соответствующие отношения и в пространстве решений:

$$x' \succ_p x'' \Leftrightarrow Q(x') \succ_p Q(x'')$$

$$x' \succ_s x'' \Leftrightarrow Q(x') \succ_s Q(x'')$$

$$x' \approx x'' \Leftrightarrow Q(x') \approx Q(x'')$$

Множества недоминируемых элементов множества принято обозначать через $P(X)$ и $S(X)$. Множество $P(X)$ называют множеством оптимальных по Парето,

Парето-эффективных или неувлучшаемых решений, $S(X)$ — множеством решений, оптимальных по Слейтеру, а также множеством слабо эффективных решений.

Определение 8. Решением задачи выбора при нескольких критериях называют множество $P(X)$.

Непосредственное использование определений 1-8 для построения решения задачи МКО на практике ограничивается использованием 2-х критериев. Это обусловлено бинарными правилами сравнения критериев. Конечно, существуют алгоритмы, обеспечивающие возможность выбора при числе критериев больше 2-х. Таковы, например, эволюционные алгоритмы. К эволюционным алгоритмам относятся генетические алгоритмы, часто используемые для решения оптимизационных задач. Идея алгоритма состоит в том, что каждая точка пространства параметров является членом некоторой популяции P размера N . Начальная популяция выбирается случайно. В многомерном случае, как правило, заранее задается определенное количество популяций и их размер, а затем Парето-оптимальные решения выбираются из всех точек, вычисленных алгоритмом. Одним из самых популярных генетических алгоритмов, используемых для решения задач многокритериальной оптимизации, является NSGA2 [35, 36].

Рассмотрим пример непосредственного использования понятий и определения Парето-оптимального решения.

Пример. Необходимо выбрать автомобиль, имеющий невысокую цену, малый расход топлива и достаточную мощность двигателя. Информация по четырем маркам представлена в таблице 20.

Таблица 20. Данные по характеристикам 4-х марок автомобилей

Q\X	VW	Opel	Ford	Toyota
Q1: Price ,1000 Euro	16.2	14.9	14.0	15.2
Q2: Fuel consumption, L/100 km	7.2	7.0	7.5	8.2
Q3: Power, kW	66.0	62.0	55.0	71.0

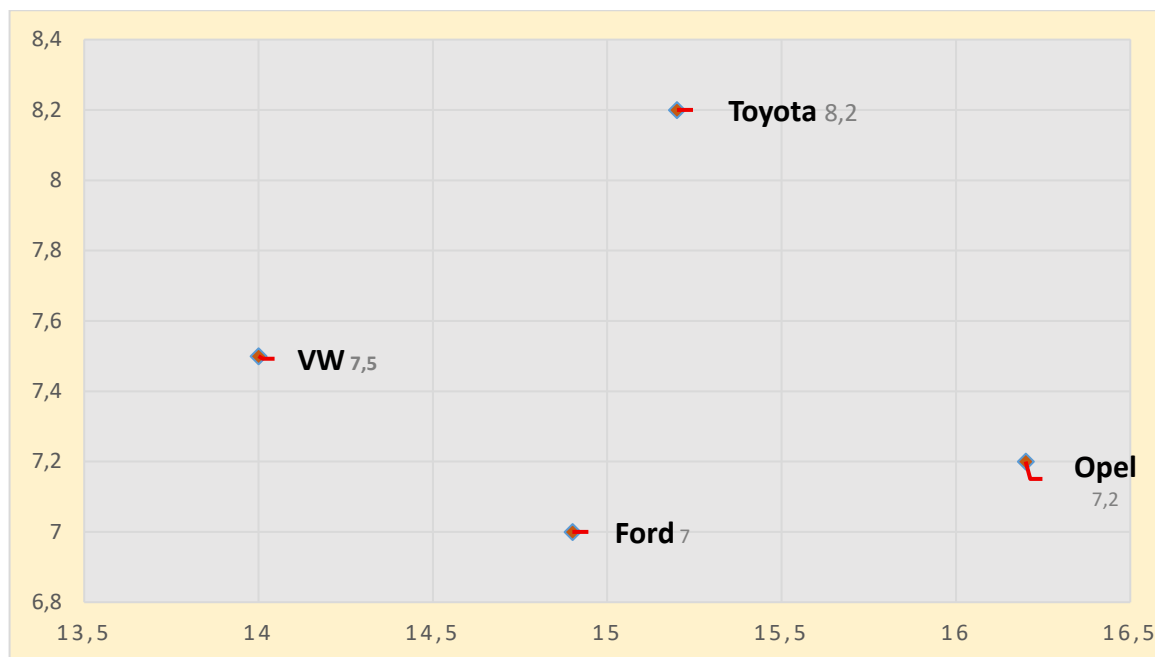


Рис. 18 Диаграмма рассеяния по критериям Q_1, Q_2 (цена, расход)

На рисунке 18 показаны значения переменных $X = \{VW, Opel, Ford, Toyota\}$ в пространстве критериев Q_1, Q_2 . Эффективный выбор или Парето-оптимальное решение составит пара $(VW, Ford)$.

9.3 Преобразования векторного критерия и нормализация частных критериев оптимальности

При решении задачи многокритериальной оптимизации часто возникает необходимость преобразования векторного критерия оптимальности $\vec{Q} = \{Q_1(\vec{x}), Q_2(\vec{x}), \dots, Q_s(\vec{x})\}$ в другой векторный критерий $\psi(\vec{Q})$. Очевидно, чтобы не исказить смысл исходной задачи, новый критерий должен быть эквивалентен исходному критерию на всем множестве допустимых решений D_x . Преобразование $\psi(\vec{Q})$, дающее эквивалентный исходному векторный критерий, называется допустимым преобразованием вектора $\vec{Q}$, так как сохраняет истинность отношений предпочтения для преобразованного вектора, то есть если для некоторых решений имеет место $\vec{x}^k, \vec{x}^l \in D_x: \vec{Q}(\vec{x}^k) \succ \vec{Q}(\vec{x}^l)$, то это предпочтение сохраняется и для вектора $\psi\vec{Q}(\vec{x}^k) \succ \psi\vec{Q}(\vec{x}^l)$. Важным применением допустимого преобразования является нормализация частных критериев оптимальности. Под нормализацией

понимается приведение частных критериев к единому безразмерному виду. Пусть частные критерии оптимальности имеют одинаковую шкалу измерения $[\alpha, \beta]$ и приведены к безразмерному типу при помощи положительного линейного преобразования (ДонОпт):

$$Q_i^+ = \max_{x \in D_x} Q_i(x), Q_i^- = \min_{x \in D_x} Q_i(x): \psi(Q(\vec{x})) = \frac{\tilde{Q}_i(\vec{x}) - Q_i^-}{Q_i^+ - Q_i^-} (\beta - \alpha) + \alpha$$

9.4 Свёртка частных критериев в МКО

Метод свёртывания является наиболее распространенным методом решения многокритериальных задач, учитывающим относительную важность частных критериев оптимальности с помощью построения скалярной функции $F(x)$, являющейся обобщенным критерием относительно векторного критерия $\vec{Q} = \{Q_1(\vec{x}), Q_2(\vec{x}), \dots, Q_s(\vec{x})\}$ и решения однокритериальной задачи оптимизации

$$\min_{x \in D_x} F(\vec{w}, \vec{Q}(x)), \quad (9.3)$$

где $\vec{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$ весовые коэффициенты относительной важности частных критериев $Q_1(\vec{x}), Q_2(\vec{x}), \dots, Q_s(\vec{x})$. В качестве обобщенных критериев могут быть использованы функции F следующего вида:

а) аддитивный критерий оптимальности (линейная свёртка)

$$F(\vec{w}, \vec{Q}(x)) = \sum_{i=1}^s w_i Q_i(\vec{x}) \quad (9.4)$$

б) мультипликативный критерий оптимальности

$$F(\vec{w}, \vec{Q}(x)) = \prod_{i=1}^s w_i Q_i(\vec{x}) \quad (9.5)$$

в) среднестепенной (среднегеометрический) критерий оптимальности

$$F(\vec{w}, \vec{Q}(x)) = \left[\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s w_i Q_i(\vec{x}) \right]^{1/s} \quad (9.6)$$

Существуют и другие способы свёртывания критериев многокритериальных задач, обусловленных спецификой и содержательными особенностями МКО. Рассмотрим несколько типовых примеров.

9.5 Обобщенный аддитивный критерий оптимальности

В качестве обобщенного критерия (обобщенной линейной свёртки) будем использовать аддитивный критерий оптимальности при дополнительном условии для весовых коэффициентов $\vec{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$, определяющем нормирование в виде $\sum_{i=1}^s w_i = 1$. Величина w_i определяет важность i -го критерия оптимальности и задает в количественном измерении предпочтение $Q_i(\vec{x})$ -го критерия над другими критериями оптимальности. Решение задачи нахождения минимального значения каждого частного критерия оптимальности $\min_{x \in D_x} (Q_i(\vec{x}))$ может быть сведено к минимизации аддитивной функции

$$\min_{x \in D_x} F(\vec{w}, \vec{Q}(x)) = \min_{x \in D_x} \sum_{i=1}^s w_i Q_i(\vec{x}) \quad (9.7)$$

Этот метод свертывания векторного критерия $\vec{Q}(x)$, называемый методом взвешенных сумм, позволяет создавать приоритет более важным частным критериям оптимальности за счет увеличения для них значений w_i . При этом относительно частных критериев $\vec{Q}(\vec{x}^k), \vec{Q}(\vec{x}^l)$ принимается допущение, что они количественно соизмеримы между собой. Таким образом, выбрав обобщенный критерий оптимальности в виде аддитивной (линейной) функции, мы от субъективизма при выборе предпочтения между векторными критериями $\vec{Q}(\vec{x}^k), \vec{Q}(\vec{x}^l)$, переходим к субъективизму, связанному с назначением численных значений коэффициентов w_i . В связи с этим возникает вопрос: «Как выбирать численные значения весовых коэффициентов w_i .?». Получить ответ на этот вопрос в какой-то степени можно, если имеется дополнительная информация о важности частных критериев оптимальности.. Для неравноценных критериев, то есть критериев, для которых ЛПР может установить приоритет по важности, значения весовых коэффициентов выбираются в соответствии с важностью критерия. Рассмотрим некоторые способы и числовые приемы, позволяющие по информации о качестве значений частных критериев оптимальности определять значения весовых коэффициентов.

Способ 1. Выбрать значения весовых коэффициентов одинаковыми. Для равноценных критериев, то есть критериев, для которых невозможно установить приоритет по важности, значения весовых коэффициентов выбираются осреднением по общему их количеству: $w_i = \frac{1}{s} \Rightarrow \sum_{i=1}^s w_i = 1$

Способ 2. Для каждого частного критерия оптимальности $\vec{Q}(\vec{x}^k)$ вычисляется коэффициент относительного разброса:

$$\delta_i = \frac{Q_i^+ - Q_i^-}{Q_i^+}, Q_i^+ = \max_{x \in D_x} Q_i(x), Q_i^- = \min_{x \in D_x} Q_i(x), \quad (9.8)$$

который определяет максимально возможное отклонение по i -му частному критерию. Весовые коэффициенты получают наибольшее значение для тех критериев, относительный разброс которых в области наиболее значителен

$$w_i = \frac{\delta_i}{\sum_{k=1}^s \delta_k}, i = \overline{1, s} \quad (9.9)$$

Пример. В качестве примера рассмотрим конкретную числовую задачу с двумя критериями в следующей постановке:

$$\begin{cases} \min_{x \in D_x} Q_1(x) = \min\{4(x-2)^2 + 5\} \\ \min_{x \in D_x} Q_2(x) = \min\{(x-4)^2 + 1\} \\ D_x = \{x | 0 \leq x \leq 5\} \end{cases}$$

Составим таблицу по условиям задачи, ограничиваясь целыми значениями x_i в области допустимых решений D_x .

x_i / Q_i	0	1	2	3	4	5
$Q_1(x)$	21	9	5	9	21	41
$Q_2(x)$	17	10	5	2	1	2

Следуя рекомендациям (9.8), (9.9), вычислим весовые коэффициенты w_i

$$Q_1^+ = 41, Q_1^- = 5, \delta_1 = \frac{41 - 5}{41} = \frac{36}{41}$$

$$Q_2^+ = 17, Q_2^- = 1, \delta_2 = \frac{17 - 1}{17} = \frac{16}{17}$$

$$w_1 = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} = \frac{\frac{36}{41}}{\left(\frac{36}{41} + \frac{16}{17}\right)} = 0.48$$

$$w_2 = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} = \frac{\frac{16}{17}}{\left(\frac{36}{41} + \frac{16}{17}\right)} = 0.52$$

Вычислим линейную свёртку критериев $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, используя формулы (9.8), (9.9):

$$\begin{aligned} F(x, w_1, w_2) &= w_1[4(x^2 - 4x + 4) + 5] + w_2[x^2 - 8x + 17] = \\ &= (4w_1 + w_2)x^2 - 16(w_1 + w_2)x + 21w_1 + 17w_2 \end{aligned}$$

Подставляя вычисленные значения весовых коэффициентов w_1, w_2 , получим

$$F(x, w_1, w_2) = 2.44x^2 - 11.84x + 18.2$$

Эта квадратичная функция имеет единственный экстремум в области D_x , который является оптимальным решением $x^* = 2.43$.

Если использовать методику определения весовых коэффициентов по **способу 1**, $w_i = \frac{1}{s} = \frac{1}{6} = 0.1(6) \approx 0.17$, то соответствующее выражение аддитивного оптимального критерия имеет вид

$$F(x) = 0.83x^2 - 4x + 5.3$$

Соответственно оптимальное решения для такого выбора весовых коэффициентов дает значение для оптимального решения $x^* = 2.4$.

Наконец, если использовать методику выбора Парето-оптимального решения, то выбирая среди целых чисел-альтернатив допустимого множества D_x получим $x^* = 2$. Так как в качестве допустимого множества выбраны только целые значения, фронт Парето достаточно грубо приближает оптимальное решение, его можно уточнить, дополнив дробными значениями чисел-альтернатив допустимого множества D_x .

Ниже, на рис 19, 20 представлены графики, иллюстрирующие результаты расчетов приведенного примера. Следует отметить, что решения, полученные тремя различными способами, демонстрируют вполне удовлетворительные по порядку близости результаты

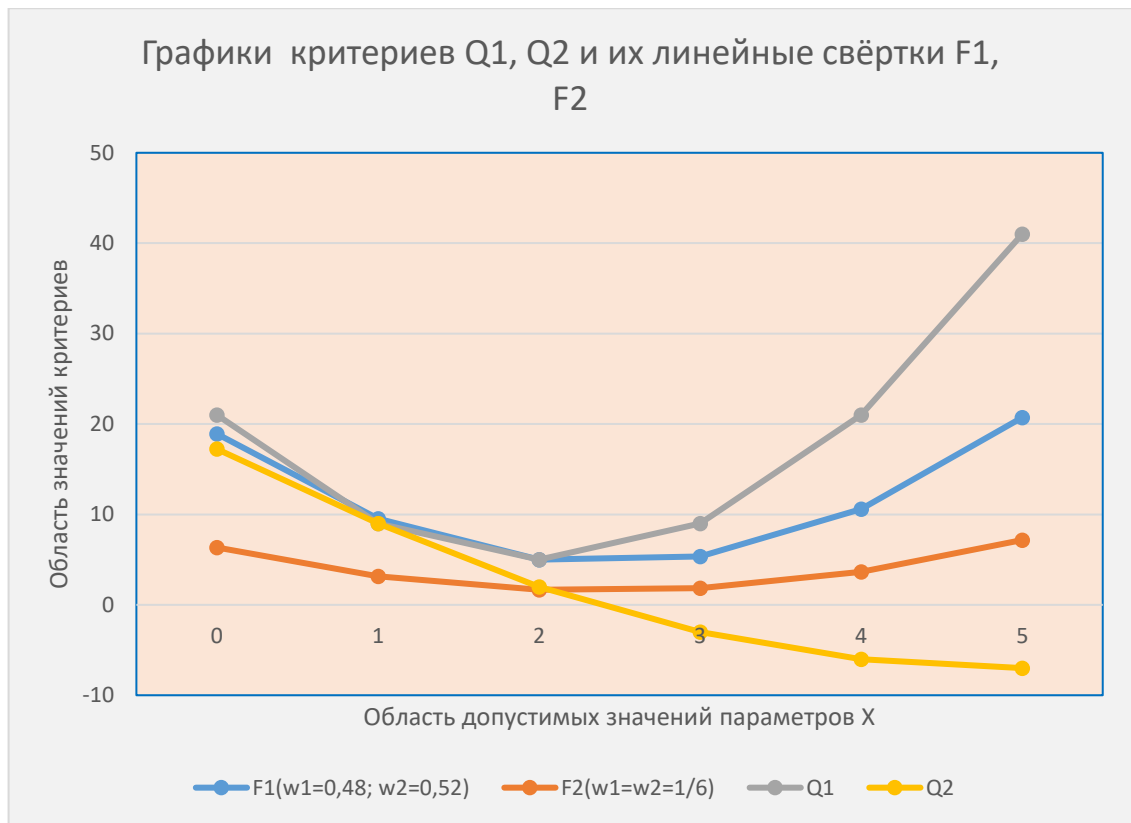


Рис. 19 Результаты расчета аддитивных критериев оптимальности

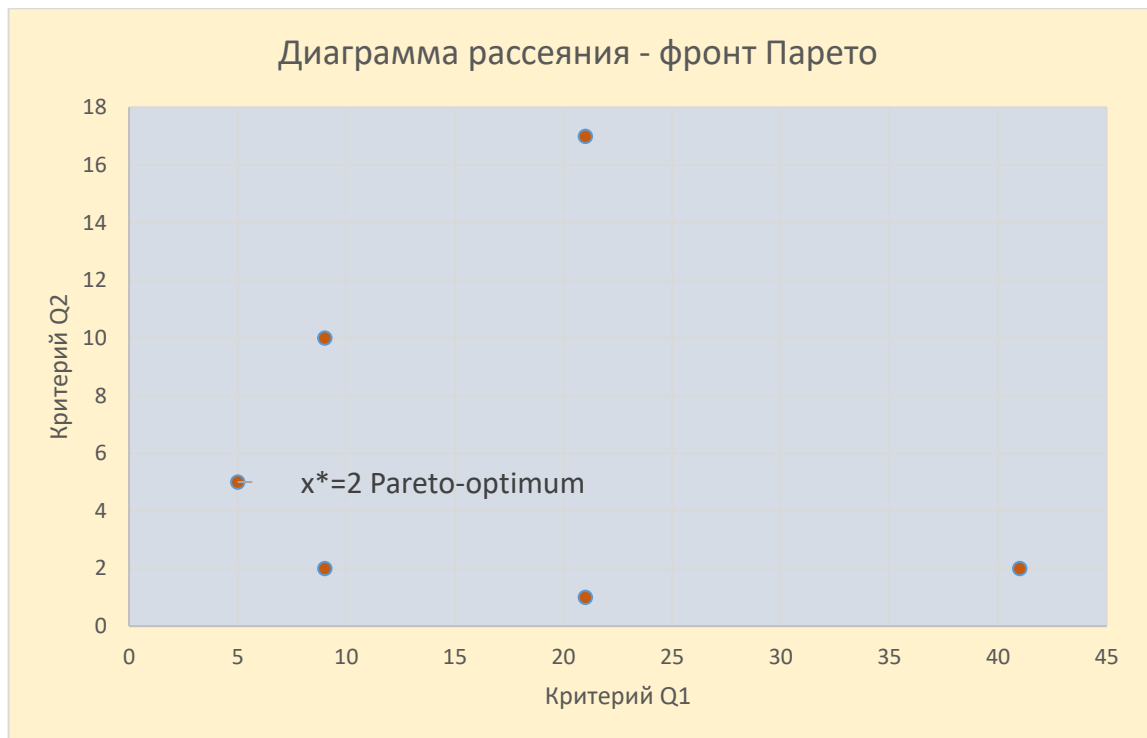


Рис. 20 Парето-оптимальное решение

Заключение

Формирование свойств системности в истории развитии техники открыло путь к становлению сложных технических систем и комплексов. Они обеспечивают революционные перемены в технологии и организации производства, многократное повышение производительности труда, снижение материалоемкости и энергоемкости, улучшение качества продукции, рост фондоотдачи. В своем развитии технические системы прошли через ряд исторически последовательных уровней: от древних кремниевых, составных орудий к простейшим машинам XVII–XVIII вв. и затем – к современным техническим системам: сложным и большим.

Машинный период развития техники характеризуется появлением совокупности элементов, находящихся отношениях и связях между собой, формированием определенной целостности структурного и функционального единства. Это уже – основополагающее системное свойство, ибо характеризует взаимодействие на базе наличия общих структурных элементов. В полной мере оно реализуется при создании управляющих устройств (в третьем периоде) и в превращении их в необходимый составной элемент машин как технических систем. В дальнейшем это обуславливает повышение уровня автоматизации технических систем. Итак, каждому периоду исторического развития техники присуще становление характеристик структурного и функционального целого, которые в своей совокупности образуют это целое не сводящиеся к сумме частей.

В современных технических системах системные свойства проявляются в следующем:

- движение к целостности, функциональному единству (общей цели, общему назначению), приводящее к сложному иерархическому строению системы;
- увеличение разнообразия типов частей системы, выполняемых ими функций, что обуславливает различия в их абсолютной стоимости и т.д.;
– усложнение поведения;

- наличие и умножение связей (количественных и качественных, положительных и отрицательных, одноплановых и многоплановых, полезных и вредных, внутрисистемных и межсистемных...);
- повышение уровня автоматизации, означающее, в частности, увеличение степени относительной самостоятельности ТС в ее поведении;
- нерегулярное, статистически распределенное во времени поступление внешних воздействий; нелинейности характеристик; многоаспектность (техническая и др.);
- контринтуитивность (причина и следствие жестко однозначно не связаны ни во времени, ни в пространстве).

Современные технические объекты представляют собой сложные динамические системы, которые характеризуются следующими свойствами:

- возмущенное движение сложных динамических систем описывается дифференциальными уравнениями высокого порядка;
- сложные динамические системы, как правило, являются дискретно-континуальными, математические модели возмущенного движения которых содержат как обыкновенные дифференциальные уравнения, так и дифференциальные уравнения в частных производных;
- сложные динамические системы обычно являются нелинейными системами, содержащими нелинейные динамические звенья с неаналитическими характеристиками, которые не могут быть линеаризованы классическими методами;
- внешние возмущения, действующие на сложные динамические системы, имеют, как правило, широкие амплитудные и частотные спектры;
- значения параметров сложных динамических систем часто являются нестабильными и изменяются во времени в зависимости от режимов работы технического объекта и от характеристик окружающей среды;

Данное учебное пособие представляет собой первую часть, определенную как основы методологии системного анализа. В значительной степени эта часть посвящена математическому моделированию динамических систем и имитационному моделированию внешних возмущений, действующих на динамические системы. Рассматриваются так называемые базовые математические модели, принципы исследования их поведения. Уделено внимание таким важным проблемам математического моделирования как декомпозиция математических моделей, в смысле разделения «быстрых» и «медленных» движений, а также проблемам идентификации математических моделей, в смысле адекватности математической модели реальному техническому объекту. Последние разделы пособия посвящены вопросам и методам выбора оптимальных решений. Методы оптимизации находят широкое применение в различных областях науки и техники. Критерии оптимизации могут основываться на технологических факторах, когда требуется минимизировать количество потребляемой энергии, максимизировать надежность или точность, обеспечить максимальное быстроедействие, или на экономических факторах, когда требуется максимизировать прибыль, минимизировать затраты или издержки в единицу времени и т.п. В любом случае с математической точки зрения требуется найти максимальное или минимальное значение некоторой функции или функционала, представляющих собой математическую модель требования качества.

Список литературы

1. Богданов А.А. Тектология: Всеобщая организационная наука. /Издание международного института А. Богданова //Редакционная колл. В.В. Попков и др.— М.: Финансы. — 2003. — 496 с.
2. Берталанфи, Л. фон. Общая теория систем. Критический обзор. Архивная копия от 25 мая 2012 // Исследования по общей теории систем: Сборник переводов / Общ. ред. вст. ст. В. Н. Садовского и Э. Г. Юдина. — М.: Прогресс, 1969. С. 28.
3. Перегудов Ф. И., Тарасенко Ф. П. Введение в системный анализ. — М. : Высшая школа, 1989. — С. 367.
4. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М. : Физматлит, 2001. — С. 320.
5. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. — М. : Наука, 1981. — С. 488.
6. Ляпунов А.А. Собрание сочинений. Т.1.-М.: Изд. АН СССР. -1954
7. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости – М.: Наука, 1967.
8. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Шиманский-Гайер Л. Динамическое и статистическое описание колебательных систем.-М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». -2005. С. 156.
9. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. – М.: Фазис: ВЦ РАН.- 2000. – С. 412
10. Неймарк Ю. И. Математические модели в естествознании и технике. — Н. Новгород : Изд-во Нижегородского гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского, 2004. — С. 401.
- 11.Свирижев Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. — М. : Наука, 1987. — С. 368.
- 12.Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». -2003. С. 184.

- 13.Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М.: Наука, 1985. – 182 с.
- 14.Пригожин И., Стингерс И. Порядок из хаоса – М.: Мир, 1982. – С. 360.
- 15.Милованов В.П. Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация.-М: Эдиториал УРСС, 2001. - 264с.
- 16.Занг В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. – М.: Мир, 1999.
- 17.Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
- 18.Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-пресс, 2002
- 19.Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику. М.: Едиториал УРСС, 2002. – С. 256
- 20.Будущее прикладной математики: Лекции для молодых исследователей. От идей к технологиям / Под ред. Г.Г. Малинецкого. -М.: КомКнига. – 2008.- С. 512
- 21.Галилей Г. Пробирных дел мастер. М.: Наука, 1987. – 272 с.
- 22.Рытов С.М. В лаборатории колебаний. Воспоминания об академике М.А. Леонтовиче. М.: Наука, 1990. – с. 35-48
- 23.Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. - Наука, 1990. – 488 с.
- 24.Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем: пер с англ. -М.: Радио и связь, 1991. -224
- 25.Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977 – С. 440
- 26.Романов А.С. и др. Теория подобия и размерности. Пограничный слой // Методические указания к подготовке и изучению курса лекций по дисциплине «Нелинейные процессы переноса». – М.: Изд. МГТУ.- 2011. – С. 48
- 27.Сквайрс Дж. Практическая физика. — М.: Мир, 1971
- 28.Обработка результатов учебного эксперимента : учебно-методическое пособие. / сост. Попов П. В., Нозик А. А. — М.: МФТИ, 2024. — 48 с

29. А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. [15] Р. Штойер Многокритериальная оптимизация: теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992.
30. Галеев, Э. М. Оптимизация. Теория, примеры, задачи : учебное пособие. – М. : Эдиториал УРСС, 2010. – 336 с.
31. А.В. Лотов, В.А. Бушенков, Г.К. Каменев, О.Л. Черных Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.
32. В.В. Подиновский, В.Д. Ногин Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
33. Лотов А.В., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений: Учебное пособие. – М.: МАКС Пресс, 2008. – 197 с
34. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х кн. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 496 с.
35. Kalyanmoy Deb, Amrit Pratap, Sameer Agarwal, and TAJM Meiyarivan: A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA2. Evolutionary Computation, IEEE Transactions on, 6(2):182–197, 2002.
36. Kalyanmoy Deb: Introduction to evolutionary multiobjective optimization. In Multiobjective Optimization, pages 59–96. Springer, 2008.