Министерство науки и образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Н. В. Филимоненкова

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2026

Филимоненкова Н. В. Элементы теории пределов: учеб. пособие / Н. В. Филимоненкова. – СПб., 2026. – 72 с.

В учебном пособии представлены базовые понятия, факты и методы теории пределов числовых последовательностей и числовых функций одной переменной. Предложен новый подход, основанный на проективно расширенной числовой прямой, который позволяет, с одной стороны, изложить необходимый материал полно и связно, с другой стороны – достаточно просто и кратко, что важно в техническом вузе. Теория сопровождается примерами и задачами. Пособие предназначено для изучения курса «Высшая математика» бакалаврами инженерных направлений, в частности, «Прикладная информатика», «Математическое обеспечение информационных систем», «Математика и компьютерные науки».

© Филимоненкова Н. В.

Оглавление

§0 Расширенная числовая прямая. Окрестность точки……..4
§1 Предел числовой последовательности……....6
1.1 Понятие предела последовательности……..6
1.2 Предел монотонной последовательности, определение числа *e*…..…13
§2 Предел числовой функции……..16
2.1 Два определения предела функции……16
2.2 Локальные характеристики функций……..22
§3 Свойства пределов……...29
3.1 Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, свойства конечных пределов……29
3.2 Правила 1, 2, 3 раскрытия неопределенностей……...34
3.3 Предельный переход в неравенстве. Замечательные пределы……42
§4 Эквивалентные бесконечно малые (большие) функции……..45
4.1 Определение и свойства отношения эквивалентности……..45
4.2 Правило 4 раскрытия неопределенностей……..49
§5 Порядок малости (роста) функции……55
5.1 Сравнение бесконечно малых (больших) функций……...55
5.2 Степенная шкала……...59
§6 Непрерывность и разрывы……64

§0. Расширенная числовая прямая. Окрестность точки

Символом $\mathbb{R}$ обозначается множество вещественных чисел, его геометрический образ – числовая прямая.

Окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называют любой интервал, содержащий точку a, и обозначают $U(a)$. *Проколотой окрестностью* называют окрестность без самой точки a:

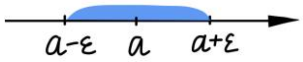
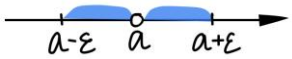
$$\overset{\circ}{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$$

У точки a имеется много окрестностей: одни шире, другие у́же, одни симметричные относительно точки a, другие несимметричные. Как правило, рассматривают симметричные и небольшие окрестности точки $a \in \mathbb{R}$, называя их ε-*окрестностями*:

$$U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$$

ε – маленькое положительное число

Рассматривают также односторонние окрестности точки a. Все виды ε-окрестностей точки $a \in \mathbb{R}$, а также их расшифровка неравенствами, описаны в следующей таблице:

Двусторонняя ε-окрестность точки a	$U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ 	$x \in U_\varepsilon(a) \quad \Leftrightarrow \quad \lvert x-a \rvert < \varepsilon$
Проколотая двусторонняя ε-окрестность точки a	$\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon; a) \cup (a; a+\varepsilon)$ 	$x \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(a) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \lvert x-a \rvert < \varepsilon$
Правосторонняя ε-окрестность точки a	$U^+_\varepsilon(a) = [a; a+\varepsilon)$	$x \in U^+_\varepsilon(a) \quad \Leftrightarrow \quad x \in U_\varepsilon(a), x \ge a:$ $a \le x < a+\varepsilon$
Правосторонняя проколотая ε-окрестность точки a	$\overset{\circ}{U}{}^+_\varepsilon(a) = (a; a+\varepsilon)$	$x \in \overset{\circ}{U}{}^+_\varepsilon(a) \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(a), x > a:$ $a < x < a+\varepsilon$
Левосторонняя ε-окрестность точки a	$U^-_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon; a]$	$x \in U^-_\varepsilon(a) \Leftrightarrow x \in U_\varepsilon(a), x \le a:$ $a-\varepsilon < x \le a$
Левосторонняя проколотая ε-окрестность точки a	$\overset{\circ}{U}{}^-_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon; a)$	$x \in \overset{\circ}{U}{}^-_\varepsilon(a) \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(a), x < a:$ $a-\varepsilon < x < a$

Для удобства построения теории пределов принято дополнять числовую прямую еще одной, бесконечно удаленной, точкой:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ – } \textbf{расширенная числовая прямая}$$

Символы ∞, $+\infty$ и $-\infty$ следует воспринимать как один и тот же элемент, рассматриваемый с разных точек зрения:

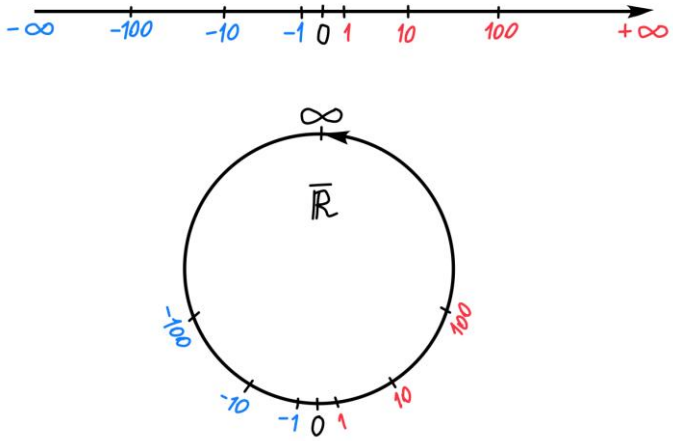
∞ – бесконечно удалённая точка;

$+\infty$ – приближение к ∞ с положительного направления числовой оси;

$-\infty$ – приближение к ∞ с отрицательного направления числовой оси.

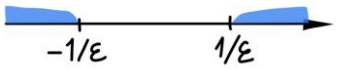
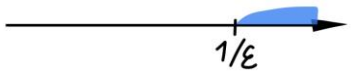
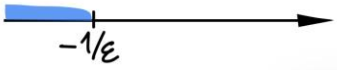
Таким образом, $+\infty$ и $-\infty$ указывают на одну и ту же бесконечно удаленную точку, но уточняют, с какой стороны происходит к ней приближение.

Расположение точки ∞ становится понятнее, если свернуть числовую прямую в кольцо:



Замечание. Во многих учебных ресурсах и компьютерных программах используется другая модель расширенной числовой прямой, в которой $+\infty$ и $-\infty$ считаются разными бесконечно удаленными точками. У каждой модели есть свои преимущества. Расчет пределов почти не зависит от используемой модели (разница будет в дальнейшем указана). Выбранная нами модель позволяет изложить теорию пределов лаконичнее и проще, без потери связности.

Опишем ε-окрестности бесконечно удаленной точки:

Двусторонняя ε-окрестность ∞	$U_\varepsilon(\infty)=\left(-\infty;-\frac{1}{\varepsilon}\right)\cup\left(\frac{1}{\varepsilon};+\infty\right)$ 	$x\in U_\varepsilon(\infty) \Leftrightarrow \lvert x\rvert>\frac{1}{\varepsilon}$
Односторонние ε-окрестности ∞	$U_\varepsilon(+\infty)=\left(\frac{1}{\varepsilon};+\infty\right)$ 	$x\in U_\varepsilon(+\infty) \Leftrightarrow x>\frac{1}{\varepsilon}$
	$U_\varepsilon(-\infty)=\left(-\infty;-\frac{1}{\varepsilon}\right)$ 	$x\in U_\varepsilon(-\infty) \Leftrightarrow x<-\frac{1}{\varepsilon}$

Поскольку ε считается маленьким положительным числом, то

$\frac{1}{\varepsilon}$ – большое положительное число,

$-\frac{1}{\varepsilon}$ – большое отрицательное число.

Для бесконечно удаленной точки нет разницы между окрестностью и проколотой окрестностью (по сути, рассматриваются только проколотые окрестности).

§1. Предел числовой последовательности

1.1 Понятие предела последовательности

Числовой последовательностью называется числовая функция натурального аргумента $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. При каждом $n\in\mathbb{N}$ значение этой функции $x=f(n)\in\mathbb{R}$ принято обозначать x_n. Поэтому числовую последовательность чаще записывают не в виде функции, а в виде пронумерованного числового множества:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots\},\ x_n\in\mathbb{R}.$$

Примеры числовых последовательностей:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\ldots\right\},\quad \left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}=\{-1,1,-1,1,-1,1,\ldots\},\quad \left\{\cos^2\pi n\right\}_{n=1}^{\infty}=\{1,1,1,1,1,\ldots\}.$$

Последний пример – это одна из *стационарных* последовательностей, так называют последовательность, у которой x_n принимает постоянное значение.

Определение 1.1 (предел числовой последовательности)

Значение $a\in\overline{\mathbb{R}}$ называется *пределом* числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любой окрестности точки a существует номер n_0, начиная с которого все члены последовательности x_n принадлежат этой окрестности.

На формальном языке:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad\Leftrightarrow\quad \forall U(a)\ \exists n_0:\ x_n\in U(a)\ \ \forall n\ge n_0.$$

На формальном языке для ε-окрестностей:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\ \exists n_0:\ n\ge n_0\Rightarrow x_n\in U_{\varepsilon}(a). \qquad (1)$$

Обозначается	Читается
$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$	предел x_n (при стремлении n к ∞) равен a
$x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$	x_n стремится к a (при стремлении n к ∞)
$x_n\to a$ при $n\to\infty$	

Замечания:

- По традиции пишут $n\to\infty$, хотя $n\in\mathbb{N}$ и подразумевается $n\to+\infty$.
- Грубый смысл предела: чем больше становится номер n, тем ближе x_n подходит к точке a, причем подходит сколь угодно близко. В определении 1.1 меру этой «близости» выражает окрестность точки a, поэтому она считается маленькой (для большой окрестности утверждение тривиально).
- Номер n_0 в определении 1.1 зависит от произвольно выбранной окрестности точки a (от произвольно выбранного числа ε). В общей ситуации чем меньше окрестность (чем меньше ε), тем больше n_0.
- Бывают последовательности, не имеющие предела: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ не существует.

Проиллюстрируем определение предела в разных случаях. Для каждого случая в формальной записи (1) расшифруем окрестность неравенствами (см. § 0).

1. Конечный предел: $a \in \mathbb{R}$. Окрестность в формуле (1) можно расшифровать двойным неравенством или неравенством с модулем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ n \geq n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

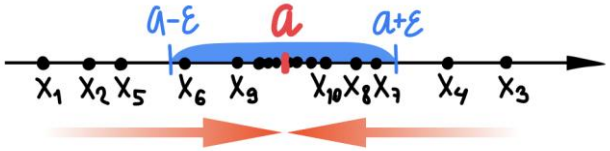


Рис. 1.1: для выбранной ε-окрестности наименьшее $n_0 = 6$.

2. Бесконечный предел: $a = +\infty$, $a = -\infty$, $a = \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

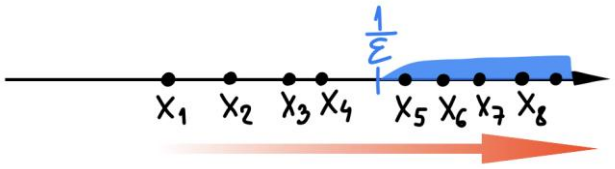


Рис. 1.2: для выбранной ε-окрестности наименьшее $n_0 = 5$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n < -\frac{1}{\varepsilon}$$

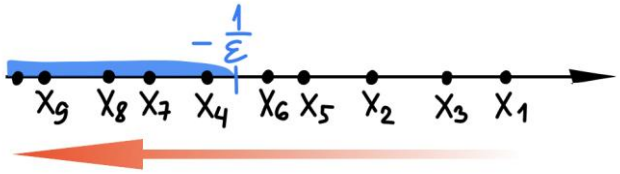


Рис. 1.3: для выбранной ε-окрестности наименьшее $n_0 = 7$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

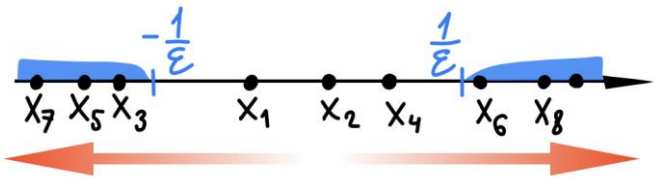


Рис. 1.4: для выбранной ε-окрестности наименьшее $n_0 = 5$.

Лемма 1.2 (единственность предела последовательности)
Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует, то он единственный.

Доказательство.
▷ Проведем доказательство методом рассуждений от противного. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два различных предела: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $a \neq b$.

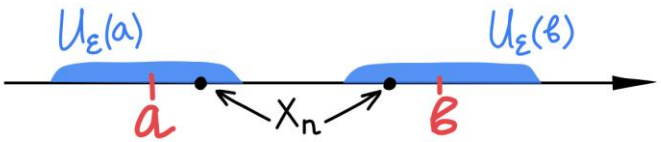
По определению предела имеем:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_1 :\ n \geq n_1 \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(a) \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \;\Leftrightarrow\; \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_2 :\ n \geq n_2 \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(b) \end{cases}$$

У двух различных точек a и b числовой прямой (возможно, расширенной) всегда можно указать непересекающиеся ε-окрестности:

$$\exists \varepsilon > 0:\ U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing .$$

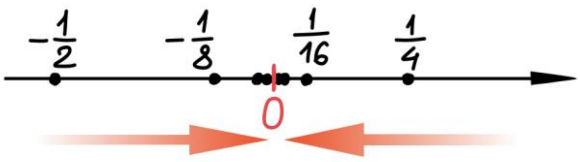
Рассмотрим именно для такого ε номера n_1, n_2. Положим $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тогда если $n \geq n_0$, то x_n попадает в обе окрестности $U_\varepsilon(a)$ и $U_\varepsilon(b)$, что невозможно, так как окрестности не пересекаются:



Получившееся противоречие говорит о том, что предположение о двух различных пределах одной и той же последовательности является неверным. Следовательно, верно противоположное: последовательность может иметь только один предел. ◁

Задача 1. Записать последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в развернутом виде (списком элементов), изобразить несколько элементов последовательности на числовой прямой. Найти значение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и записать формальное определение этого предела.

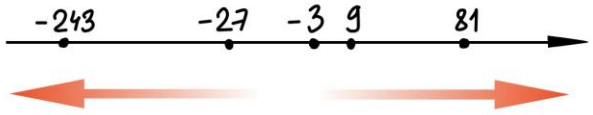
1. $\left\{\dfrac{(-1)^n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \ldots\right\}$



Значение предела: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n} = 0$.

Формальное определение предела: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ n \geq n_0 \Rightarrow \left|\dfrac{(-1)^n}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$.

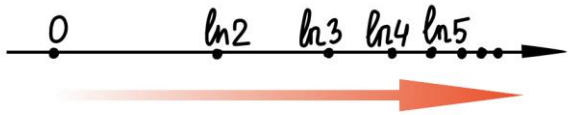
2. $\{(-3)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-3, 9, -27, 81, \ldots\}$



Значение предела: $\lim\limits_{n\to\infty}(-3)^n = \infty$.

Формальное определение предела: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ n \geq n_0 \Rightarrow\ \left|(-3)^n\right| > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

3. $\{\ln n\}_{n=1}^{\infty} = \{0, \ln 2, \ln 3, \ln 4, \ldots\}$



Значение предела: $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = \infty$ – тоже верный, но менее точный результат).

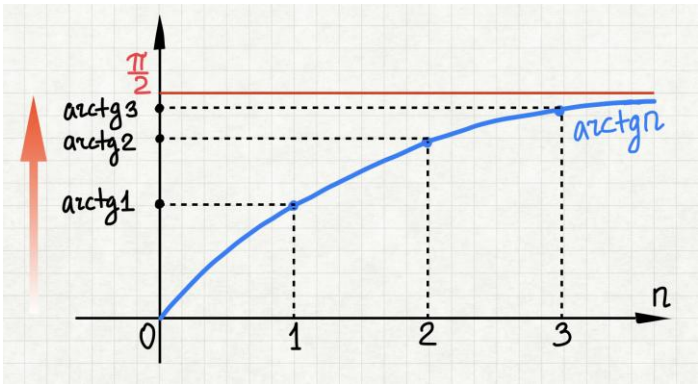
Формальное определение предела: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ n \geq n_0 \Rightarrow\ \ln n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

4. $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$



Значение предела: $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ не существует.

5. $\{\operatorname{arctg} n\}_{n=1}^{\infty} = \{\operatorname{arctg} 1, \operatorname{arctg} 2, \operatorname{arctg} 3, \operatorname{arctg} 4, \ldots\}$

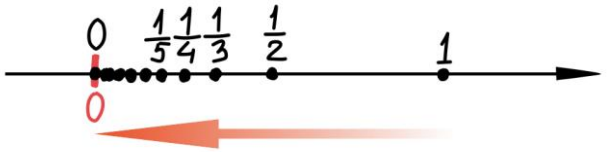


При помощи графика арктангенса изобразим элементы этой последовательности на оси ординат.

Значение предела: $\lim\limits_{n\to\infty}(\operatorname{arctg} n) = \dfrac{\pi}{2}$.

Формальное определение предела: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ n \geq n_0 \Rightarrow\ \left|\operatorname{arctg} n - \dfrac{\pi}{2}\right| < \varepsilon$.

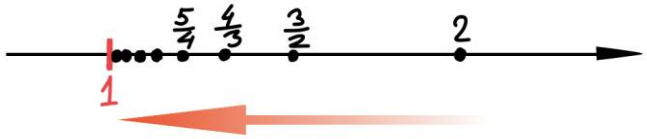
6. $\left\{\frac{(-1)^n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{0,1,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{4},\ldots\right\}$



Значение предела: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+1}{n}=0$.

Формальное определение предела: $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0:\ n\ge n_0\Rightarrow\left|\frac{(-1)^n+1}{n}-0\right|<\varepsilon$.

7. $\left\{\frac{n}{n-1}\right\}_{n=2}^{\infty}=\left\{2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\ldots\right\}=\left\{1+\frac{1}{n-1}\right\}_{n=2}^{\infty}$



Значение предела: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1$.

Формальное определение предела: $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0:\ n\ge n_0\Rightarrow\left|\frac{n}{n-1}-1\right|<\varepsilon$.

Задача 2. Доказать по определению 1.1, что следующие пределы имеют указанные значения.

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}=0$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1$

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=+\infty$

Решение.

а. Надо доказать, что $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0:\ n\ge n_0\Rightarrow\left|\frac{(-1)^n}{2^n}-0\right|=\underbrace{\frac{1}{2^n}<\varepsilon}_{(2)}$.

Доказать это утверждение – значит, предъявить формулу, которая по любому заранее заданному числу $\varepsilon>0$ определяла бы подходящий номер n_0. Для этого нужно решить неравенство (2) относительно $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2^n}<\varepsilon\ \Leftrightarrow\ 2^n>\frac{1}{\varepsilon}\ \Leftrightarrow\ n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}.$$

В качестве n_0 можно взять наименьшее натуральное число, удовлетворяющее этому неравенству, поэтому

$$n_0=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\quad(\left[x\right]-\text{целая часть числа }x)$$

Например, для $\varepsilon = 0,03$ получаем $n_0 = \left[\log_2 \frac{100}{3}\right] + 1 = 6$.

Проверим, что если $n \geq 6$, то $\frac{1}{2^n} < 0,03$. Действительно, для $n = 6$ получаем верное неравенство $\frac{1}{64} \approx 0,016 < 0,03$, для $n = 7,8,9$ и т.д. оно будет тем более верным.

Упражнение. Выполнить пункты [b], [c] задачи 2. Выяснить, какая из последовательностей [a] и [b] стремится к своему пределу быстрее, какая – медленнее.

Определение 1.3 (характеристики числовых последовательностей)
[в квадратных скобках указаны подходящие примеры из задачи 1]
Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

возрастает, если $x_n \leq x_{n+1} \ \forall n$; [3, 5]

убывает, если $x_n \geq x_{n+1} \ \forall n$; [7]

монотонная, если она является либо возрастающей, либо убывающей; [3, 5, 7]

сходится, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$, т. е. имеет конечный предел; [1, 5, 6, 7]

расходится, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует; [2, 3, 4]

бесконечно малая, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; [1, 6]

бесконечно большая, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; [2, 3]

ограниченная, если $\exists c > 0 : |x_n| \leq c \ \forall n$; [1, 4, 5, 6, 7]

отделена от нуля, если $\exists c > 0 : |x_n| \geq c \ \forall n$. [2, 4, 5, 7]

Заметим, что последовательность [3] из задачи 1 тоже отделена от нуля, но не целиком, а начиная с номера $n = 2$.

Если последовательность сходится, т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, говорят, что она сходится к числу a.

Понятия ограниченности и отделенности от нуля связаны определенной симметрией. Ограниченность можно интерпретировать как отделенность последовательности от бесконечности.

Лемма 1.4 (об ограниченности сходящейся последовательности)
Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Верно следующее:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq \infty \quad \Leftrightarrow \quad \exists c > 0 : |x_n| \leq c \ \forall n$$

[последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится] $\Leftrightarrow$ [последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена]

Доказательство.
Есть два подхода к доказательству утверждений типа $\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}$:

доказать импликации $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ и $\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}$

либо

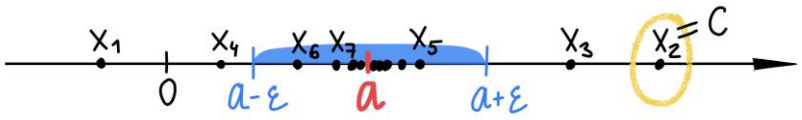
доказать импликации $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ и *не* $\mathrm{A} \Rightarrow$ *не* B

Будем использовать второй подход.

▷ Докажем импликацию $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \infty$. Обозначим значение предела: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$. По определению 1.1

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \; n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$$

Выберем любое значение $\varepsilon > 0$. Очевидно, что внутри окрестности $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ содержится бесконечное число членов последовательности, а вне окрестности $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ – лишь конечное число членов: из них и из концов интервала $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ можно выбрать наибольшее по модулю значение $c > 0$, которое и будет ограничивать всю последовательность: $|x_n| \leq c \; \forall n$



Таким образом, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена.

Докажем импликацию *не* $\mathrm{A} \Rightarrow$ *не* B. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. По определению 1.1

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \; n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Тогда последовательность не ограничена: $\forall c > 0 \; \exists n : |x_n| > c$. Достаточно взять $\varepsilon = \dfrac{1}{c}$.

◁

Примеры использования леммы 1.4:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n} = 0 \neq \infty \quad \Rightarrow$ последовательность $\left\{\dfrac{(-1)^n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена;

$\lim\limits_{n\to\infty} (\operatorname{arctg} n) = \dfrac{\pi}{2} \neq \infty \quad \Rightarrow$ последовательность $\{\operatorname{arctg} n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена;

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1 \neq \infty \quad \Rightarrow$ последовательность $\left\{\dfrac{n}{n-1}\right\}_{n=2}^{\infty}$ ограничена.

Лемма 1.4′

Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Верно следующее:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists c > 0 \; \exists n_0 : |x_n| \geq c \; \forall n \geq n_0$$

Вторая часть формулы означает, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ отделена от нуля, начиная с некоторого номера n_0.

Упражнение. Доказать лемму 1.4′.

Замечание. Лемма 1.4 дает критерий ограниченной последовательности только в случае существования предела. Лемма 1.4′ дает критерий отделенной от нуля последовательности

тоже только в случае существования предела. Если предел последовательности не существует, то эти леммы не применимы и надо проверять ограниченность и отделенность от нуля по определению 1.3. Например, рассмотрим последовательность

$$\left\{\cos\frac{\pi n}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\ldots\right\}$$

Выписаны ее значения при $n=1,2,3,4,5,6$. При следующих n значения будут повторяться в силу периодичности косинуса. Такая последовательность не имеет предела:

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi n}{3}\ \text{не существует.}$$

Значит, для этой последовательности нельзя использовать леммы 1.4, 1.4′.
Но она является ограниченной по определению 1.3, так как

$$\left|\cos\frac{\pi n}{3}\right|\le 1\ \ \forall n.$$

Также она является отделенной от нуля по определению 1.3, так как

$$\left|\cos\frac{\pi n}{3}\right|\ge\frac{1}{2}\ \ \forall n.$$

1.2. Предел монотонной последовательности, определение числа *e*

Теорема 1.5 (о пределе монотонной последовательности)

Всякая возрастающая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, равный ее супремуму: предел конечный, если она ограничена сверху, или бесконечный, если она не ограничена сверху.

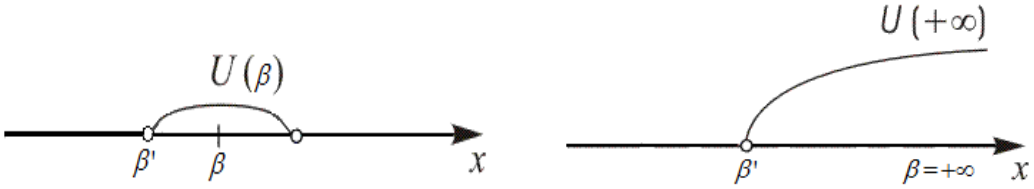
Всякая убывающая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, равный ее инфимуму: предел конечный, если она ограничена снизу, или бесконечный, если она не ограниченна снизу.

Доказательство.

▷ Проведем доказательство первой части теоремы.

Пусть последовательность возрастает и $\beta=\sup\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\beta\in\overline{\mathbb{R}}$.

Рассмотрим произвольную окрестность $U(\beta)$ и обозначим символом β' её левый край. На рисунках изображена окрестность точки β в конечном и в бесконечном случае:



Используем определение супремума, точной верхней грани числового множества. Поскольку супремум – это верхняя грань, то $x_n\le\beta\ \ \forall n\ge 1$. Поскольку супремум – наименьшая из верхних граней, то $\exists n_0:\ x_{n_0}>\beta'$ (иначе верхнюю грань можно было бы еще уменьшить).

Так как последовательность $\sup\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает, то $x_n>\beta'\ \ \forall n\ge n_0$. Таким образом:

$$\forall U(\beta)\ \exists n_0:\ x_n\in(\beta';\beta]\subset U(\beta)\ \ \forall n\ge n_0.$$

По определению 1.1 предела это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$.

Вторая часть теоремы доказывается аналогичным образом. ◁

Примеры использования теоремы 1.5:

последовательность $\{\operatorname{arctg} n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает, поэтому имеет предел, равный супремуму:

$$\lim_{n\to\infty}(\operatorname{arctg} n)=\sup\{\operatorname{arctg} n\}_{n=1}^{\infty}=\frac{\pi}{2};$$

последовательность $\{\ln n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает, поэтому имеет предел, равный супремуму:

$$\lim_{n\to\infty}\ln n=\sup\{\ln n\}_{n=1}^{\infty}=+\infty;$$

последовательность $\left\{\frac{n}{n-1}\right\}_{n=2}^{\infty}$ убывает, поэтому имеет предел, равный инфимуму:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=\inf\left\{\frac{n}{n-1}\right\}_{n=2}^{\infty}=1.$$

Замечание. Согласно теореме 1.5 монотонность числовой последовательности является достаточным условием для существования предела. Однако это достаточное условие не является необходимым. Например, последовательность $x_n=(-1)^n/n$ имеет предел, равный 0, но не является монотонной.

Пример использования теоремы 1.5 для определения числа e

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такого вида:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Выпишем несколько первых членов последовательности:

$$x_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2,\quad x_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2{,}25,\quad x_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}\approx 2{,}37,$$

$$x_4=\left(1+\frac{1}{4}\right)^4=\frac{625}{256}\approx 2{,}44,\quad x_5=\left(1+\frac{1}{5}\right)^5=\frac{7776}{3125}\approx 2{,}49,\quad x_6=\left(1+\frac{1}{6}\right)^6=\frac{117649}{46656}\approx 2{,}52\ldots$$

Докажем, что эта последовательность является возрастающей и ограниченной сверху. Для этого используем формулу бинома Ньютона для натуральной степени двучлена:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k,\ C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{k!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-k)}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

Полагая здесь $a=1$, $b=\frac{1}{n}$, получим развернутое представление для x_n:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!\cdot n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Все слагаемые положительны. При увеличении n каждое слагаемое увеличивается и количество слагаемых увеличивается. Следовательно, последовательность x_n возрастает.

Оценим сверху значения x_n:

$$x_n<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}<$$

$$< 1 + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \right)}_{\text{геометрическая прогрессия}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n} \right) < 1 + 2 = 3 .$$

Таким образом, показано, что последовательность x_n является возрастающей и ограниченной сверху. Следовательно, по теореме 1.5 она имеет конечный предел. Этот предел обозначается символом *e*:

$$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}$$

Чему равно число *e*? Выше доказано, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ строго возрастает, отсюда $e > x_1 = 2$. Также доказано, что число 3 является верхней гранью для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. По теореме 1.5 предел совпадает с супремумом (наименьшей верхней гранью), отсюда $e \le 3$. Таким образом, $2 < e \le 3$.

В более подробных курсах математического анализа доказывается, что число e является иррациональным и имеет следующее приближенное значение:

$$e \approx 2,72 \ (e = 2,7182818284...)$$

Число e используется как основание экспоненциальной функции $y = e^x$ и основание натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$.

§2. Предел числовой функции

Пусть $f(x)$ – числовая функция одной вещественной переменной (ФОП).

Обозначается	Читается
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ $f(x)\to a$ при $x\to x_0$ $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} a$	предел $f(x)$ равен a при стремлении x к x_0 предел $f(x)$ в точке x_0 равен a $f(x)$ стремится к a, когда x стремится к x_0 если x стремится к x_0, то $f(x)$ стремится к a

Классификация пределов функции:

I. В зависимости от значения предела:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\in\mathbb{R}$ – конечный предел;

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty,\ +\infty,\ -\infty$ – бесконечный предел;

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует.

II. В зависимости от точки x_0:

$x_0\in\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ – двусторонний предел в точке x_0;

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ – односторонний (правосторонний) предел в точке x_0 ($x\to x_0$ и $x>x_0$);

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ – односторонний (левосторонний) предел в точке x_0 ($x\to x_0$ и $x<x_0$);

$x_0=\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ – двусторонний предел в бесконечно удаленной точке;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ – односторонние пределы в бесконечно удаленной точке.

2.1 Два определения предела функции

Существуют два подхода к определению предела функции. Первый подход (через предел последовательности) принадлежит немецкому математику Гейне. Второй (через окрестности точек) принадлежит французскому математику Коши. В обоих определениях функция $f(x)$ должна быть определена вблизи точки x_0, но может быть не определена в самой точке x_0.

Определение 2.1 (двусторонний предел по Гейне, рис. 2.1)

Пусть $x_0, a\in\overline{\mathbb{R}}$ и функция $f(x)$ определена на множестве $X\subset\mathbb{R}$, включающем некоторую проколотую окрестность точки x_0.

Значение a называется *пределом* функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности точек из области определения функции, которые стремятся к x_0 и не равны x_0, их образы стремятся к a.

На формальном языке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \quad\Leftrightarrow\quad \forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X,\ x_n\neq x_0,\ x_n\to x_0 \ \Rightarrow\ f(x_n)\to a.$$

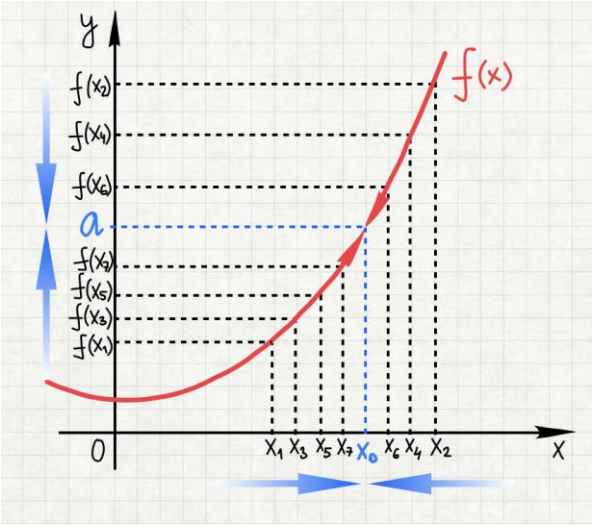


Рис. 2.1

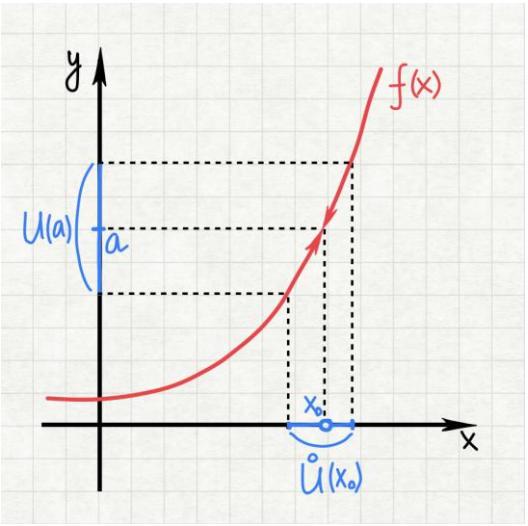


Рис. 2.2

Определение 2.2 (двусторонний предел по Коши, рис.2.2)

Пусть $x_0, a \in \overline{\mathbb{R}}$ и функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$, включающем некоторую проколотую окрестность точки x_0.

Значение a называется *пределом* функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой окрестности $U(a)$ существует проколотая окрестность точки x_0, образ которой принадлежит $U(a)$.

На формальном языке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall U(a)\, \exists \overset{\circ}{U}(x_0) :\ f(x) \in U(a)\ \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)\ . \tag{1}$$

На формальном языке ε-окрестностей:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 :\ x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(a)\,. \tag{2}$$

Замечания:

- Грубый смысл определения 2.1: чем ближе x подходит к точке x_0, тем ближе $f(x)$ подходит к точке a, причем подходит сколь угодно близко.
- В определении 2.2 мера «близости» выражена при помощи окрестностей, поэтому они считаются маленькими (для больших окрестностей утверждение тривиально). В (1) окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0)$ зависит от произвольно выбранной окрестности $U(a)$: в общей ситуации чем меньше $U(a)$, тем меньше $\overset{\circ}{U}(x_0)$. В (2) число δ зависит от произвольно выбранного ε: в общей ситуации чем меньше ε, тем меньше δ.
- Функция может не иметь предела в точке x_0, тогда пишут: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

Определения 2.1 и 2.2 – это определения *двустороннего* предела функции $f(x)$ в точке x_0. Чтобы получить *односторонний* предел, надо рассматривать аргументы x слева или справа от точки x_0, т. е. из односторонней проколотой окрестности точки x_0. Приведем краткие версии определений *правостороннего* и *левостороннего* пределов в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ и *односторонних* пределов в бесконечно удаленной точке.

Определение 2.1' (односторонние пределы по Гейне)

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x_n \to x_0,\ x_n > x_0 \ \Rightarrow\ f(x_n) \to a$$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x_n \to x_0,\ x_n < x_0 \ \Rightarrow\ f(x_n) \to a$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x_n \to +\infty \ \Rightarrow\ f(x_n) \to a$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x_n \to -\infty \ \Rightarrow\ f(x_n) \to a$$

Определение 2.2' (односторонние пределы по Коши)

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ x \in \overset{\circ}{U}{}^{+}_{\delta}(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(a)\,;$$

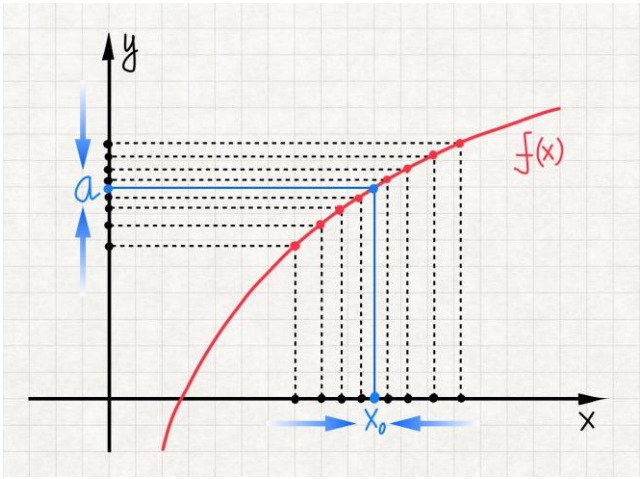
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ x \in \overset{\circ}{U}{}^{-}_{\delta}(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(a)\,;$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ x \in U_{\delta}(+\infty) \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(a)\,;$$

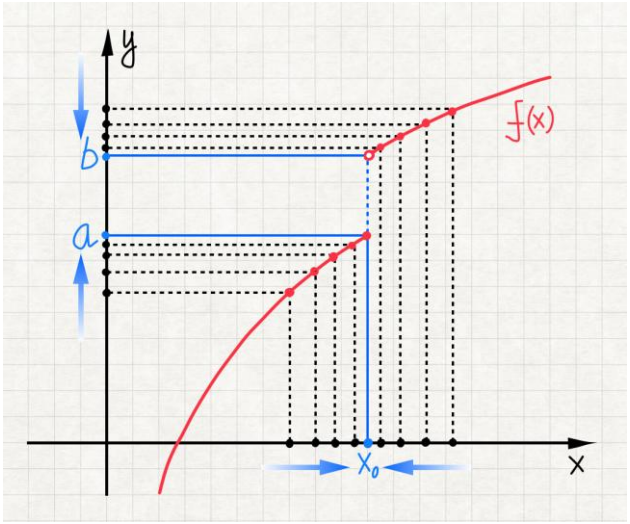
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ x \in U_{\delta}(-\infty) \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(a)\,.$$

Проиллюстрируем пределы в разных случаях, пользуясь определением по Гейне.
Пусть $x_0, a, b \in \mathbb{R}$.

1. Конечный предел в конечной точке:

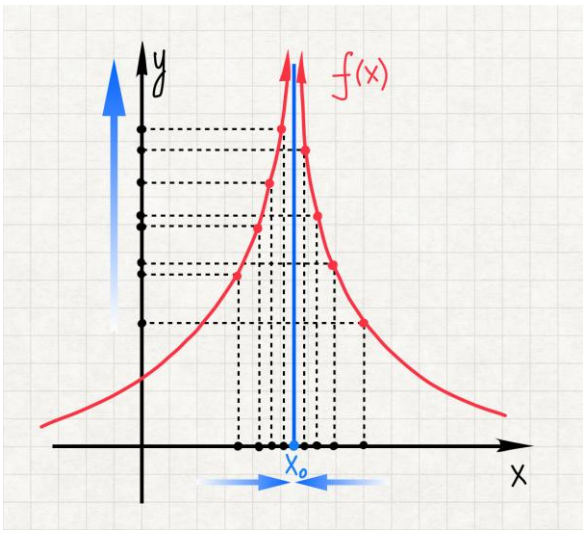


$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$

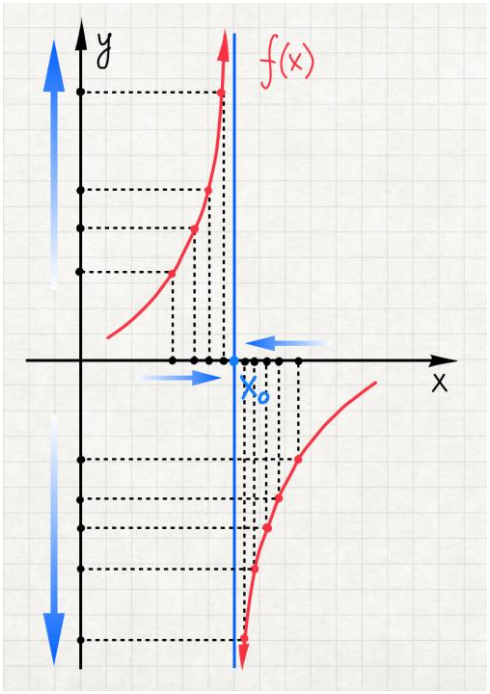


$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a,\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b,\quad \nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

2. Бесконечный предел в конечной точке:

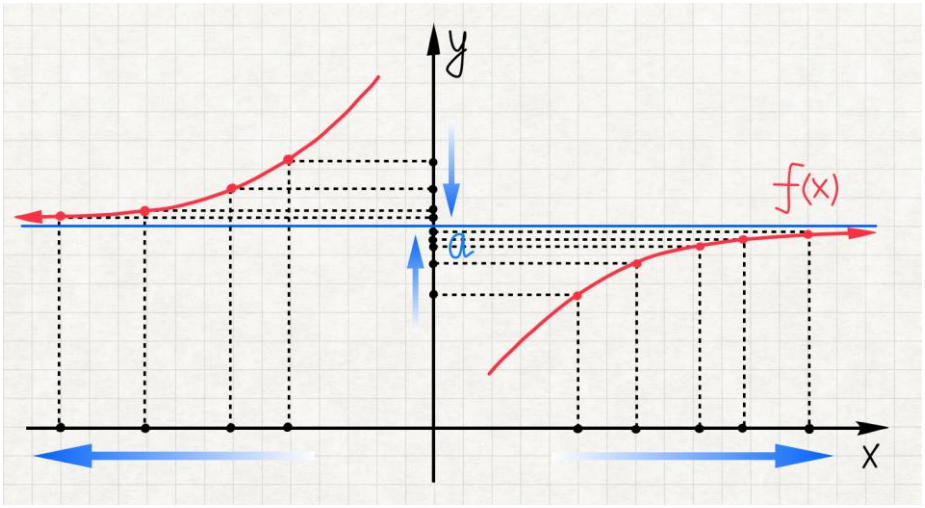


$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

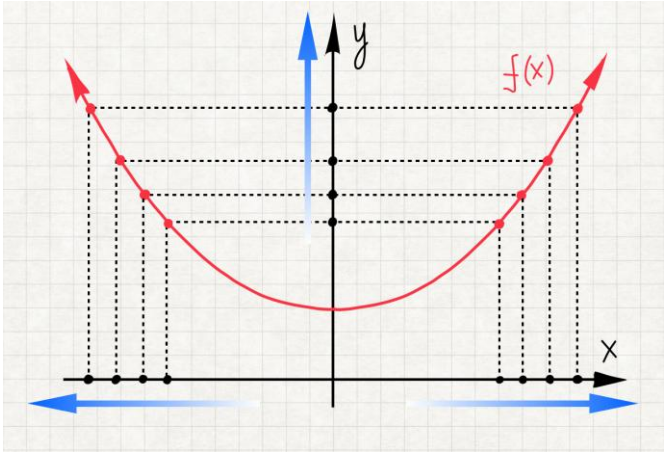


$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

3. Конечный предел в бесконечно удаленной точке: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$



4. Бесконечный предел в бесконечно удаленной точке: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$



Упражнение. Проиллюстрировать другие случаи:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = a$, $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$, $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

Теорема 2.3
Определения предела функции 2.1 (по Гейне) и 2.2 (по Коши) равносильны.

Доказательство.
Есть два подхода к доказательству утверждений типа $\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}$: доказать импликации $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ и $\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}$ либо доказать импликации $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ и *не* $\mathrm{A} \Rightarrow$ *не* B. Будем использовать второй подход.

▷ I. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ (по Коши). Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a). \qquad (3)$$

Докажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ (по Гейне).

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, которая $x_n \neq x_0, x_n \to x_0$, и покажем, что (3) гарантирует $f(x_n) \to a$.

Напомним, что согласно определению 1.1 предела последовательности

$$f(x_n) \to a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0:\ n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(a). \qquad (4)$$

Зафиксируем произвольное значение $\varepsilon > 0$ и соответствующее ему значение $\delta > 0$ из (3). Из определения 1.1 и (3) вытекает следующее:

$$x_n \to x_0, x_n \neq x_0 \quad \Rightarrow \quad \exists n_0:\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \overset{(3)}{\Rightarrow} f(x_n) \in U_\varepsilon(a)\ .$$

Ввиду произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем (4).

II. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq a$ (по Коши). Это значит, что

$$\exists \varepsilon > 0:\ \forall \delta > 0\ \ \exists x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0):\ f(x) \notin U_\varepsilon(a). \qquad (5)$$

Докажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq a$ (по Гейне). Это значит, что

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X, x_n \neq x_0:\ x_n \to x_0 \ \text{ и } \ f(x_n) \not\to a. \qquad (6)$$

Возьмем значение ε, наличие которого гарантирует (5), и рассмотрим для него разные значения δ:

$\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists x_1 \in \overset{\circ}{U}_1(x_0):\ f(x_1) \notin U_\varepsilon(a)$;

$\delta = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \exists x_2 \in \overset{\circ}{U}_{1/2}(x_0): \ f(x_2) \notin U_\varepsilon(a)$;

$\delta = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \exists x_3 \in \overset{\circ}{U}_{1/3}(x_0): \ f(x_3) \notin U_\varepsilon(a)$;

…

$\delta = \dfrac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \exists x_n \in \overset{\circ}{U}_{1/n}(x_0): \ f(x_n) \notin U_\varepsilon(a)$.

Таким образом, на основе (5) построена такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ и $f(x_n) \not\to a$ (рис. 2.3, 2.4).

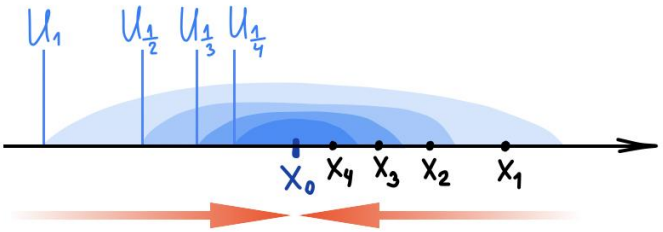


Рис. 2.3

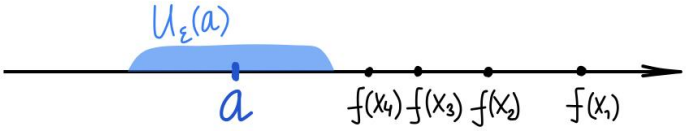


Рис. 2.4

Значит, из (5) вытекает (6). ◁

Равносильность определений предела по Коши и по Гейне дает право при доказательстве свойств предела пользоваться тем определением, которое удобнее.

Лемма 2.4 (единственность предела функции)
Если предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует, то он единственный.

Действительно, определение предела по Гейне сводит предел функции к пределу последовательности. Тогда единственность предела функции вытекает из единственности предела последовательности (лемма 1.2).

Лемма 2.5 (связь двустороннего предела и односторонних пределов)
Пусть $x_0, a \in \overline{\mathbb{R}}$. Двусторонний предел функции $f(x)$ в точке x_0 существует и равен a тогда и только тогда, когда существуют оба односторонних предела и оба равны a:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a.$$

В частности, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

Доказательство.
Докажем эту лемму для случая $x_0 \in \mathbb{R}$ (случай $x_0 = \infty$ доказывается аналогичным образом).
▷ Напомним определения двустороннего и односторонних пределов по Коши:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ x\in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)\Rightarrow f(x)\in U_{\varepsilon}(a) \tag{7}$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=a \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0:\ x\in \overset{\circ}{U}^{+}_{\delta_1}(x_0)\Rightarrow f(x)\in U_{\varepsilon}(a) \tag{8}$$

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=a \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2>0:\ x\in \overset{\circ}{U}^{-}_{\delta_2}(x_0)\Rightarrow f(x)\in U_{\varepsilon}(a) \tag{9}$$

Если выполнено (7), то (8) и (9) также верны, так как в них можно взять $\delta_1=\delta_2=\delta$.
Если выполнены (8) и (9), то (7) также верно, так как в нем можно взять $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

$\triangleleft$

2.2 Локальные характеристики функций

Локальными характеристиками функции называются свойства функции вблизи данной точки, т.е. в проколотой окрестности точки.

Определение 2.6 (локальные характеристики функции)
Пусть $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$. Функция $f(x)$ называется

бесконечно малой в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$;

бесконечно большой в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$;

ограниченной в точке x_0, если она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0:

$$\exists \overset{\circ}{U}(x_0)\ \exists c>0:\ |f(x)|\le c\ \ \forall x\in \overset{\circ}{U}(x_0); \tag{10}$$

отделенной от нуля в точке x_0, если она отделена от нуля в некоторой проколотой окрестности точки x_0:

$$\exists \overset{\circ}{U}(x_0)\ \exists c>0:|f(x)|\ge c\ \forall x\in \overset{\circ}{U}(x_0). \tag{11}$$

Для всех локальных характеристик вместо слов «в точке x_0» могут использоваться выражения «в окрестности x_0», «при $x\to x_0$».

Замечание. Определение 2.6 описывает поведение функции во всей проколотой окрестности точки x_0, т.е. и справа, и слева от x_0. При необходимости каждую из локальных характеристик можно модифицировать для описания поведения функции только справа или только слева от точки x_0. Например, функцию можно назвать бесконечно малой справа от точки x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=0$.

Понятия локально ограниченной и отделенной от нуля функции связаны определенной симметрией. Условие (10) означает, что для аргументов $x\in \overset{\circ}{U}(x_0)$ график функции

располагается в горизонтальной полосе от $-c$ до c, рис. 2.5. Условие (11) означает, что для аргументов $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ график функции располагается вне этой полосы, рис. 2.6.

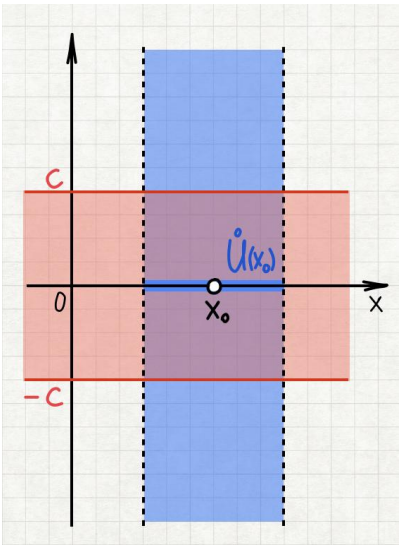


Рис. 2.5

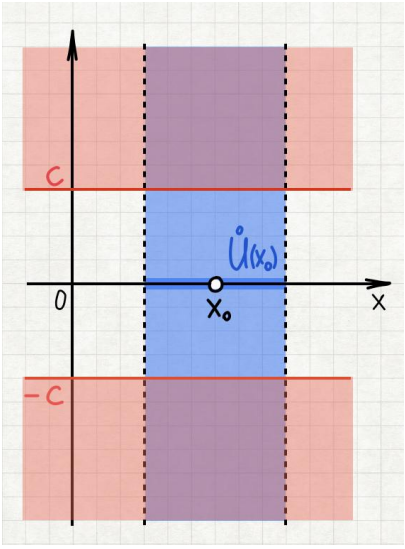


Рис. 2.6

Ограниченную функцию можно было бы назвать функцией, отделенной от бесконечности.

Если функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, то ограниченность и отделенность от нуля можно установить по значению предела. Следующая лемма аналогична леммам 1.4, 1.4′ для числовых последовательностей.

Лемма 2.7

Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ и существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Верно следующее:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \infty \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \text{ ограничена в точке } x_0;$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \text{ отделена от нуля в точке } x_0.$$

Доказательство.

▷ Докажем только критерий ограниченности:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \infty \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \text{ ограничена в точке } x_0.$$

Обозначим предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. По определению 2.2

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(a). \tag{12}$$

Распишем окрестности неравенствами, используя договоренности §0.

Пусть $a \neq \infty$, т.е. $a \in \mathbb{R}$. Выберем любое значение $\varepsilon > 0$. Тогда из (12) следует, что в соответствующей проколотой окрестности точки x_0 значения $f(x)$ ограничены по модулю:

$$f(x) \in U_{\varepsilon}(a) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x) - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \le \underbrace{|a| + \varepsilon}_{=c}.$$

Согласно определению 2.6 функция ограничена в точке x_0.

Пусть $a=\infty$. Тогда (12) можно расшифровать следующим образом:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ x\in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)\Rightarrow |f(x)|>\frac{1}{\varepsilon} \tag{13}$$

Тогда функция не ограничена в точке x_0 по определению 2.6. Действительно, для любого (сколь угодно большого) числа $c>0$ можно взять в (13) $\varepsilon=\frac{1}{c}$, и тогда $|f(x)|>c$ в соответствующей проколотой окрестности точки x_0.

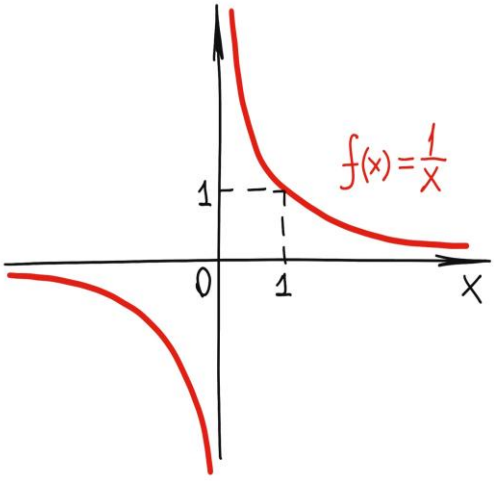
◁

Упражнение: доказать критерий отделенности от нуля в лемме 2.7.

Замечание. Лемма 2.7 дает критерий ограниченной и отделенной от нуля функции в точке x_0 только в случае существования предела функции в точке x_0. Если предел не существует, то лемма 2.7 не применима и надо проверять ограниченность и отделенность от нуля по определению 2.6 (см. пункт 5 в задаче ниже).

Задача. По графику функции $f(x)$ найти пределы в нескольких точках $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ и значения функции в конечных точках $x_0\in\mathbb{R}$. Указать локальные характеристики функции в каждой из этих точек, используя определение 2.6 и лемму 2.7.

1. $f(x)=\frac{1}{x}$



Точка $x_0=1$: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$, $f(1)=1$.

Функция $f(x)$ в точке $x_0=1$ не бесконечно большая (определение 2.6), не бесконечно малая (определение 2.6), ограниченная (определение 2.6 или лемма 2.7), отделена от нуля (определение 2.6 или лемма 2.7).

Точка $x_0=0$: $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$, $f(0)$ не существует.

Замечание: односторонние пределы в нуле часто обозначаются короче, чем в остальных точках: $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to +0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -0} f(x)$.

Функция $f(x)$ в точке $x_0=0$ бесконечно большая (определение 2.6), не бесконечно малая (определение 2.6), не ограниченная (определение 2.6 или лемма 2.7), отделена от нуля (определение 2.6 или лемма 2.7).

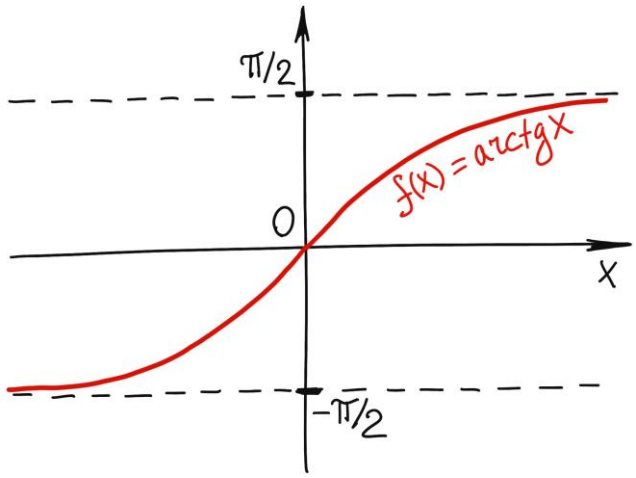
Замечание. Компьютерные программы обычно пишут, что предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ не существует.

Это объясняется тем, что компьютер использует другую модель расширенной числовой прямой (см. замечание в §0), в которой значение $+\infty$ правостороннего предела и значение $-\infty$ левостороннего предела считаются разными.

Точка $x_0=\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

Функция $f(x)$ в точке $x_0=\infty$ не бесконечно большая (определение 2.6), бесконечно малая (определение 2.6), ограниченная (определение 2.6 или лемма 2.7), не отделена от нуля (определение 2.6 или лемма 2.7).

2. $f(x)=\operatorname{arctg} x$



Точка $x_0=0$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, $f(0)=0$.

Функция $f(x)$ в точке $x_0=0$ не бесконечно большая (определение 2.6), бесконечно малая (определение 2.6), ограниченная (определение 2.6 или лемма 2.7), не отделена от нуля (определение 2.6 или лемма 2.7).

Точка $x_0=\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x$ не существует, так как односторонние пределы не равны (лемма 2.5).

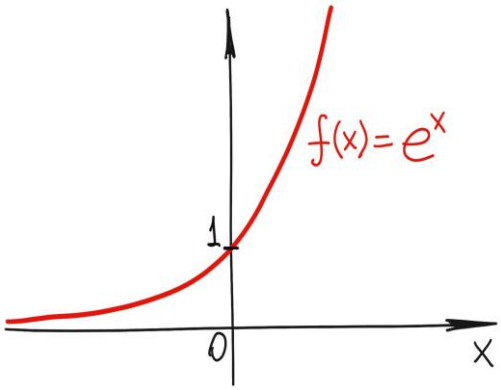
Поскольку пределы функции на $+\infty$ и на $-\infty$ различны, то укажем сначала локальные характеристики функции по-отдельности на $+\infty$ и на $-\infty$.

Функция $f(x)$ в точке $x_0=+\infty$ не бесконечно большая (определение 2.6), не бесконечно малая (определение 2.6), ограниченная (определение 2.6 или лемма 2.7), отделена от нуля (определение 2.6 или лемма 2.7).

Функция $f(x)$ в точке $x_0=-\infty$ не бесконечно большая (определение 2.6), не бесконечно малая (определение 2.6), ограниченная (определение 2.6 или лемма 2.7), отделена от нуля (определение 2.6 или лемма 2.7).

Оказалось, что локальные характеристики функции одинаковы на $+\infty$ и на $-\infty$, поэтому они таковы же и в точке $x_0=\infty$.

3. $f(x)=e^x$

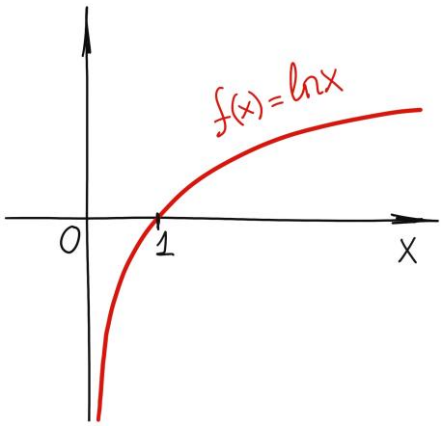


Точка $x_0=\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ не существует, так как односторонние пределы не равны (лемма 2.5).

Функция $f(x)$ в точке $x_0=+\infty$ бесконечно большая (определение 2.6), не бесконечно малая (определение 2.6), не ограниченная (определение 2.6 или лемма 2.7), отделена от нуля (определение 2.6 или лемма 2.7).

Функция $f(x)$ в точке $x_0=-\infty$ не бесконечно большая (определение 2.6), бесконечно малая (определение 2.6), ограниченная (определение 2.6 или лемма 2.7), не отделена от нуля (определение 2.6 или лемма 2.7).

4. $f(x)=\ln x$



Точка $x_0=1$: $\lim\limits_{x\to1} f(x)=0$, $f(1)=0$.

Функция $f(x)$ в точке $x_0=1$ не бесконечно большая (определение 2.6), бесконечно малая (определение 2.6), ограниченная (определение 2.6 или лемма 2.7), не отделена от нуля (определение 2.6 или лемма 2.7).

Точка $x_0=0$: $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=-\infty$ (говорить о двустороннем пределе некорректно, так как функция $f(x)=\ln x$ не определена слева от точки 0), $f(0)$ не существует.

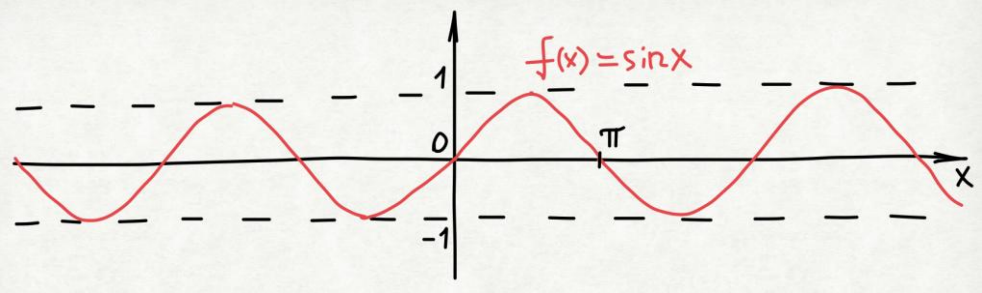
Функция $f(x)$ в точке $x_0=0$ (справа) бесконечно большая (определение 2.6), не бесконечно малая (определение 2.6), не ограниченная (определение 2.6 или лемма 2.7), отделена от нуля (определение 2.6 или лемма 2.7).

Точка $x_0 = +\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Функция $f(x)$ в точке $x_0 = +\infty$ бесконечно большая (определение 2.6), не бесконечно малая (определение 2.6), не ограниченная (определение 2.6 или лемма 2.7), отделена от нуля (определение 2.6 или лемма 2.7).

5. $f(x) = \sin x$

Точка $x_0 = \infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ не существуют.



Функция $f(x)$ в точке $x_0 = \infty$ не бесконечно большая (определение 2.6), не бесконечно малая (определение 2.6), ограниченная (определение 2.6), не отделена от нуля (определение 2.6).

К функции $f(x) = \sin x$ в точке $x_0 = \infty$ не применима лемма 2.7, поскольку предел не существует. Для проверки ограниченности и отделенности от нуля использовано определение 2.6.

Функция $f(x) = \sin x$ ограничена в точке $x_0 = \infty$, так как она вообще всюду ограничена:

$$|\sin x| \le 1 \quad \forall x .$$

Функция $f(x) = \sin x$ не отделена от нуля в точке $x_0 = \infty$, поскольку при $x \to \infty$ эта функция регулярно принимает нулевые значения. Действительно, рассмотрим произвольную окрестность точки $x_0 = \infty$:

$$x \in U_\varepsilon(\infty) \quad \Leftrightarrow \quad |x| > \frac{1}{\varepsilon}$$

Очевидно, не существует такого числа $c > 0$, что $|\sin x| \ge c$ при $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$.

6. Функция $f(x)$ задана своим графиком (рис.).

Найдем по графику пределы и значения функции в нескольких точках $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Точка $x_0 = 6$: $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = -2$, $f(6) = -2$.

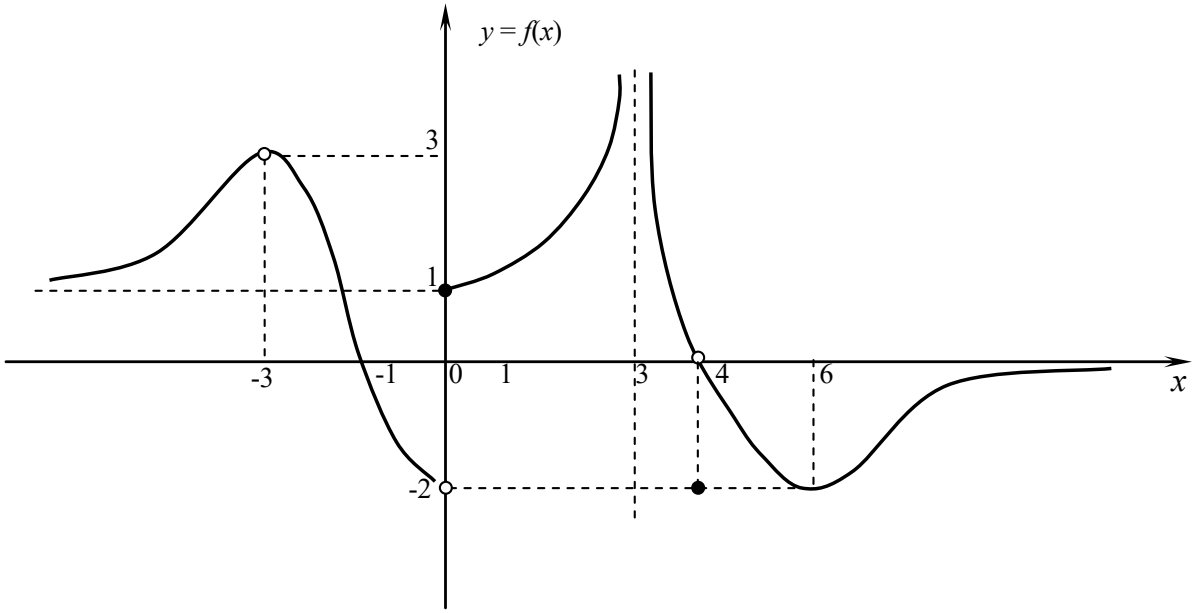
Точка $x_0 = -3$: $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 3$, $f(-3)$ не существует.

Точка $x_0 = 4$: $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 0$, $f(4) = -2$.

Точка $x_0 = 0$: $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не существует, $f(0) = 1$.

Точка $x_0 = 3$: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \infty$, точнее $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = +\infty$, $f(3)$ не существует.

Точка $x_0 = \infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ не существует.



Упражнение: указать локальные характеристики функции $f(x)$ в каждой из рассмотренных точек x_0.

Замечание: если односторонние пределы $f(x)$ в точке x_0 разные, то следует сначала отдельно указывать локальные характеристики функции – справа и слева от точки x_0. Соблюдается принцип: функция $f(x)$ является бесконечно малой/бесконечно большой/ограниченной/отделенной от нуля в точке x_0 тогда и только тогда, когда $f(x)$ является бесконечно малой/бесконечно большой/ограниченной/отделенной от нуля справа и слева от точки x_0.

Например, в точке $x_0 = 0$ функция $f(x)$ имеет разные односторонние пределы и следующие локальные характеристики: не бесконечно большая (определение 2.6), не бесконечно малая (определение 2.6), ограниченная (определение 2.6), отделена от нуля (лемма 2.7). Эти локальные характеристики одинаковы для данной функции слева и справа от точки $x_0 = 0$.

§3. Свойства пределов (числовых последовательностей и функций)

В этом параграфе свойства пределов сформулированы на примере двустороннего предела функции, но аналогичные свойства справедливы и для односторонних пределов функции, а также для предела последовательности.

3.1 Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, свойства конечных пределов

Лемма 3.1 (свойства бесконечно малых функций)
Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Верны следующие утверждения в точке x_0:

1. $f(x)$, $g(x)$ – бесконечно малые $\Rightarrow$ $f(x)+g(x)$ – бесконечно малая;

2. $f(x)$ – бесконечно малая, $g(x)$ – ограниченная $\Rightarrow$
$f(x)\cdot g(x)$ – бесконечно малая,
$f(x)+g(x)$ – ограниченная;
3. $f(x)\neq 0$ – бесконечно малая, $g(x)$ отделена от нуля
$\Rightarrow$ $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ – бесконечно большая, в частности $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно большая.

Лемма 3.1′ (свойства бесконечно больших функций)
Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Верны следующие утверждения в точке x_0:

1. $f(x)$, $g(x)$ – бесконечно большие одного знака $\Rightarrow$ $f(x)+g(x)$ – бесконечно большая того же знака;

2. $f(x)$ – бесконечно большая, $g(x)$ – ограниченная $\Rightarrow$
$f(x)+g(x)$ – бесконечно большая,
$\dfrac{g(x)}{f(x)}$ – бесконечно малая, в частности $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая.
3. $f(x)$ – бесконечно большая, $g(x)$ отделена от нуля
$\Rightarrow$ $f(x)\cdot g(x)$ – бесконечно большая.

Доказательство леммы 3.1.

▷ Используем определение 2.6 (локальные характеристики функции), определение 2.2 (предел по Коши) и договоренности §0 для выражения ε-окрестностей неравенствами.

Пункт 1

Функции $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малы в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. Это означает, что

$$\forall \varepsilon_1\ \exists \delta_1:\ x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon_1; \qquad (1)$$

$$\forall \varepsilon_2\ \exists \delta_2:\ x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(x_0) \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon_2. \qquad (2)$$

Покажем, что функция $f(x)+g(x)$ бесконечно мала в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)=0$:

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta:\ x\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\Rightarrow\big|f(x)+g(x)\big|<\varepsilon. \tag{3}$$

Зафиксируем произвольное значение $\varepsilon>0$. Рассмотрим $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\dfrac{\varepsilon}{2}$ в (1), (2) и соответствующие значения δ_1, δ_2. Тогда (3) выполняется, так как в нем можно взять $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$:

$$x\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)=\overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0)\cap\overset{\circ}{U}_{\delta_2}(x_0)\ \Rightarrow\ \big|f(x)+g(x)\big|\le\big|f(x)\big|+\big|g(x)\big|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Пункт 2

Функция $f(x)$ бесконечно мала в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. Это означает, что

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta:\ x\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\Rightarrow\big|f(x)\big|<\varepsilon; \tag{4}$$

Функция $g(x)$ ограничена в точке x_0. Это означает, что

$$\exists\delta_0>0\ \exists c>0: x\in\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)\Rightarrow\big|g(x)\big|\le c. \tag{5}$$

Покажем, что функция $f(x)g(x)$ бесконечно мала в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$:

$$\forall\varepsilon'\ \exists\delta':\ x\in\overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0)\Rightarrow\big|f(x)g(x)\big|<\varepsilon'. \tag{6}$$

Зафиксируем произвольное значение $\varepsilon'>0$. Рассмотрим $\varepsilon=\dfrac{\varepsilon'}{c}$ в (4) и соответствующее значение δ. Тогда (6) выполняется, так как в нем можно взять $\delta'=\min\{\delta,\delta_0\}$:

$$x\in\overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0)=\overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)\cap\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)\Rightarrow\big|f(x)g(x)\big|=\big|f(x)\big|\big|g(x)\big|<\frac{\varepsilon'}{c}c=\varepsilon'.$$

Кроме того, функция $f(x)+g(x)$ ограниченна в проколотой δ'- окрестности точки x_0:

$$x\in\overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0)=\overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)\cap\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)\Rightarrow\big|f(x)+g(x)\big|\le\big|f(x)\big|+\big|g(x)\big|<\varepsilon+c=C.$$

Пункт 3

Функция $f(x)\ne0$ бесконечно мала в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. Это означает, что

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta:\ x\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\Rightarrow\big|f(x)\big|<\varepsilon. \tag{7}$$

Функция $g(x)$ отделена от нуля в точке x_0. Это означает, что

$$\exists\delta_0>0\ \exists c>0: x\in\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)\Rightarrow\big|g(x)\big|\ge c. \tag{8}$$

Покажем, что функция $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ бесконечно большая в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\infty$:

$$\forall\varepsilon'\ \exists\delta':\ x\in\overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0)\Rightarrow\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|>\frac{1}{\varepsilon'}. \tag{9}$$

Зафиксируем произвольное значение $\varepsilon'>0$. Рассмотрим $\varepsilon=c\varepsilon'$ в (7) и соответствующее значение δ. Тогда (9) выполняется, так как в нем можно взять $\delta'=\min\{\delta,\delta_0\}$:

$$x\in\overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0)=\overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)\cap\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)\Rightarrow\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|=\frac{\big|g(x)\big|}{\big|f(x)\big|}>\frac{c}{c\varepsilon'}=\frac{1}{\varepsilon'}.$$

$\triangleleft$

Упражнение. Доказать лемму $3.1'$.

Упражнение. Доказать, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0} |f(x)|=0;$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0} |f(x)|=\infty.$$

Для доказательства можно использовать либо определение предела, либо подходящие свойства из лемм 3.1 и $3.1'$.

Лемма 3.2 (свойства конечных пределов)
Пусть $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$.

1. Функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде суммы этого предела и бесконечно малой функции:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a\in\mathbb{R} \quad\Leftrightarrow\quad f(x)=a+\alpha(x), \text{ где } \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0. Тогда

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(\lambda f(x)\big)=\lambda\lim\limits_{x\to x_0} f(x),\quad \lambda\in\mathbb{R}$;
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
5. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq 0$.

Доказательство леммы 3.2.

▷ Используем доказанную выше лемму 3.1 (свойства бесконечно малых величин), определение предела 2.2 (предел по Коши) и договоренности §0 для выражения ε-окрестностей неравенствами.

Пункт 1
По определению предела

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a\in\mathbb{R} \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ x\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\Rightarrow|f(x)-a|<\varepsilon. \tag{10}$$

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ x\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon. \tag{11}$$

Если выполнено (10) и мы положим $\alpha(x)=f(x)-a$, то $f(x)=a+\alpha(x)$ и для $\alpha(x)$ выполнено (11).
Если $f(x)=a+\alpha(x)$ и для $\alpha(x)$ выполнено (11), то для $f(x)$ выполнено (10).

Пункты 2, 3, 4
Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b\in\mathbb{R}$.
Используем доказанный выше пункт 1:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \quad\Leftrightarrow\quad f(x)=a+\underset{\text{беск.малая}}{\alpha(x)};$$
$$\lim_{x\to x_0} g(x)=b \quad\Leftrightarrow\quad g(x)=b+\underset{\text{беск.малая}}{\beta(x)}.$$

Используем свойства бесконечно малых (лемма 3.1) и снова пункт 1:

$$\lambda f(x) = \lambda a + \underbrace{\lambda\alpha(x)}_{\text{беск. малая}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\big(\lambda f(x)\big) = \lambda a\,;$$

$$f(x)+g(x) = \big(a+b\big) + \underbrace{\big(\alpha(x)+\beta(x)\big)}_{\text{беск. малая}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = a+b\,;$$

$$f(x)g(x) = \big(a+\alpha(x)\big)\big(b+\beta(x)\big) = ab + \underbrace{\big(b\alpha(x)+a\beta(x)+\alpha(x)\beta(x)\big)}_{\text{беск. малая}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\big(f(x)g(x)\big) = ab\,.$$

В последнем случае встречается произведение бесконечно малых функций $\alpha(x)\beta(x)$, о котором ничего прямо не сказано в лемме 3.1. Однако поскольку любая бесконечно малая функция в точке x_0 является также и ограниченной в точке x_0 (лемма 2.7), то это произведение вписывается в пункт 2 леммы 3.1 и также является бесконечно малым.

Пункт 5

Докажем сначала вспомогательное утверждение:

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{1}{1+\alpha(x)} = 1\,.$$

Действительно, расшифруем обе части этого утверждения по определению предела 2.2:

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon\;\exists\delta:\; x\in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \;\Rightarrow\; \big|\alpha(x)\big| < \varepsilon\,. \tag{12}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{1+\alpha(x)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon'\;\exists\delta':\; x\in \overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0) \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{1+\alpha(x)}-1\right| < \varepsilon'\,. \tag{13}$$

Зафиксируем произвольное значение $\varepsilon' > 0$. Рассмотрим $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}$ в (12) и соответствующее значение δ. Тогда (13) выполняется, так как в нем можно взять $\delta' = \delta$:

$$x\in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \;\Rightarrow\; \big|\alpha(x)\big| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{1+\alpha(x)}\right| < \frac{1}{1-\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{1+\alpha(x)}-1\right| = \left|\frac{\alpha(x)}{1+\alpha(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = \varepsilon'\,.$$

Согласно пункту 4 для доказательства пункта 5 достаточно убедиться, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}\,, \text{ если } \lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0\,.$$

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Воспользуемся пунктами 1, 3 этой леммы и только что доказанным вспомогательным утверждением:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\underset{\text{беск. мал.}}{a+\alpha(x)}} = \frac{1}{a}\overbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{1}{1+\underbrace{\left(\dfrac{\alpha(x)}{a}\right)}_{\text{беск. мал.}}}}^{=1} = \frac{1}{a}\,.$$

◁

Задача. Найти предел функции $f(x)$ в точке x_0, используя свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций (леммы 3.1, 3.1′), свойства конечных пределов (лемма 3.2). Для проверки ограниченности и отделенности от нуля можно использовать определение 2.6 и лемму 2.7.

1. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$, $x_0 = -1$

По свойству 5 конечных пределов (лемма 3.2): $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\overset{\to -3}{3x}}{\underbrace{(x^2+1)}_{\to 2}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to -1} 3x}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2+1)} = \dfrac{-3}{2} = -1.5$

2. $f(x) = (x-\pi)\operatorname{tg}^2 x, \quad x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$

По критерию отделенности от нуля (лемма 2.7) и свойству 3 бесконечно больших функций (лемма 3.1′):

$$\lim_{x\to -\pi/2} \underbrace{\overbrace{(x-\pi)}^{\text{отд. от 0}}}_{\to -3\pi/2} \underbrace{\operatorname{tg}^2 x}_{\to +\infty} = -\infty .$$

3. $f(x) = \cos\dfrac{1}{x} - \sin\dfrac{1}{x}, \quad x_0 = \infty$

По свойству 2 бесконечно больших функций (лемма 3.1′):

$$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} \to 0 .$$

Введем новую переменную $t = \dfrac{1}{x}$, затем используем свойства 2, 3 конечных пределов (лемма 3.2):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0}(\underbrace{\cos t}_{\to 1} - \underbrace{\sin t}_{\to 0}) = \lim_{t\to 0}\cos t + \lim_{t\to 0}(-\sin t) = \lim_{t\to 0}\cos t - \lim_{t\to 0}\sin t = 1 - 0 = 1 .$$

4. $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}, \quad x_0 = \infty$

По свойству 1 бесконечно больших функций (лемма 3.1′): $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to+\infty} + \underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\to+\infty}\right) = +\infty .$

5. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\ln x}, \quad x_0 = +\infty$

Числитель дроби является ограниченной функцией по определению 2.6, причем в любой точке x_0, так как $|\sin x + \cos x| \le |\sin x| + |\cos x| \le 2 \ \ \forall x$.

По свойству 2 бесконечно больших функций (лемма 3.1′): $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overbrace{\sin x + \cos x}^{\text{огр.}}}{\underset{\to+\infty}{\ln x}} = 0 .$

6. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-4}, \quad x_0 = 4$

По критерию отделенности от нуля (лемма 2.7) и по свойству 3 бесконечно малых функций (лемма 3.1):

$$\lim_{x\to 4} \frac{\overset{\text{отд. от 0}}{\overset{\to 9}{2x+1}}}{\underset{\to 0}{x-4}} = \infty .$$

При необходимости можно уточнить знак бесконечности, в данном случае он будет разным для односторонних пределов. Напомним, что означает «x стремится к x_0 справа» и «x стремится к x_0 слева»:

$$x \to x_0 + 0 \text{ (стремится справа)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \to x_0 \\ x > x_0 \end{cases}$$

$$x \to x_0 - 0 \text{ (стремится слева)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \to x_0 \\ x < x_0 \end{cases}$$

Числитель функции $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-4}$ стремится к 9, а значит, положительный. Тогда знак предела соответствует знаку знаменателя.

$$x \to 4+0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \to 4 \\ x > 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 4+0} \frac{\overset{\to 9}{2x+1}}{\underset{\to +0}{x-4}} = \lim_{x \to 4+0} \frac{9}{\underset{>0}{x-4}} = +\infty;$$

$$x \to 4-0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \to 4 \\ x < 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 4-0} \frac{\overset{\to 9}{2x+1}}{\underset{\to -0}{x-4}} = \lim_{x \to 4+0} \frac{9}{\underset{<0}{x-4}} = -\infty.$$

7. $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}, \quad x_0 = 0$

По свойству 3 бесконечно малых функций (лемма 3.1):

$$x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} \to \infty.$$

Введем новую переменную $t = \dfrac{1}{x}$. Поскольку у функции 2^t разные пределы на $+\infty$ и на $-\infty$, то рассмотрим односторонние пределы:

$$x \to +0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{x} \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to +\infty} 2^t = +\infty;$$

$$x \to -0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{x} \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to -0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to -\infty} 2^t = 0.$$

Так как функция имеет разные односторонние пределы в точке $x_0 = 0$, то двустороннего предела в этой точке нет: $\lim\limits_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x}}$ не существует (лемма 2.5).

3.2 Правила 1, 2, 3 раскрытия неопределенностей

Заметим, что в леммах 3.1, 3.1′ описаны не все возможные ситуации с участием бесконечно малых и бесконечно больших функций. В некоторых ситуациях нельзя заранее гарантировать определенный результат, он может быть разным в зависимости от конкретных функций. Такие ситуации называются *неопределенностями*.

При вычислении предела используется условная запись *неопределенности* в квадратных скобках. Вот список основных неопределенностей:

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ \to\infty}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ \to 0 \quad \to\infty}} (f(x)\cdot g(x)) = [0\cdot\infty]$	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ \to 1}} f(x)^{\overset{\to\infty}{g(x)}} = [1^{\infty}]$
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ \to 0}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ \to+\infty \quad \to-\infty}} (f(x)+g(x)) = [\infty-\infty]$	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ \to 0}} f(x)^{\overset{\to 0}{g(x)}} = [0^0]$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ \to\infty}} f(x)^{\overset{\to 0}{g(x)}} = [\infty^0]$

Выражение, заключенное в квадратные скобки, – это обозначение неопределенности. Его не следует воспринимать как арифметическую операцию.

Читается так: $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ – неопределенность вида «ноль на ноль».

Замечание. Свойства пределов, описанные в разделе 3.1, охватывают ситуации без неопределенности. Например, пункт 2 леммы 3.1: если функция $f(x)$ бесконечно малая, функция $g(x)$ ограниченная, то функция $f(x)\cdot g(x)$ бесконечно малая. Почему функция $g(x)$ должна быть ограничена (отделена от ∞)? Потому что в противном случае может быть неопределенность $[0\cdot\infty]$.

Чтобы вычислить предел с неопределенностью, надо преобразовать выражение под знаком предела так, чтобы неопределенность исчезла. Этот процесс называется «раскрытием неопределенности». Есть несколько правил раскрытия неопределенностей. Все они сформулированы для пределов функций, но работают и для пределов последовательностей.

<u>Правило 1 раскрытия неопределенностей</u>

Применяется в следующей ситуации: неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ *при* $x\to\infty$*, образованная делением многочленов или иррациональных выражений. В этом случае нужно вынести за скобки в числителе и знаменателе старшие степени переменной x и сократить дробь под знаком предела.*

Задача. Найти пределы, используя правило 1 раскрытия неопределенностей.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2-2x+1}{x^2+2}$

Числитель и знаменатель дроби бесконечно большие при $x\to\infty$, поэтому имеется неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для раскрытия неопределенности вынесем за скобки в числителе и знаменателе старшую степень переменной x и сократим дробь:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{4x^2-2x+1}^{\to\infty}}{\underset{\to\infty}{x^2+2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}^{\to 4}}{\underset{\to 1}{1+\frac{2}{x^2}}} = 4\,.$$

Здесь учтено, что $\frac{1}{x}\to 0$ и $\frac{1}{x^2}\to 0$ при $x\to\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-x^3}{9x^2+1}$

Аналогично предыдущему пункту:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{2x-x^3}^{\to\infty}}{\underbrace{9x^2+1}_{\to\infty}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(\frac{2}{x^2}-1\right)}{x^2\left(9+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\overbrace{\left(\frac{2}{x^2}-1\right)}^{\to -1}}{\underbrace{9+\frac{1}{x^2}}_{\to 9}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{9}=-\infty.$$

Здесь учтено, что $\frac{1}{x^2}\to 0$ при $x\to+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+7x-1}{6x^4-3x^2+1}$

Аналогично предыдущим пунктам:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{x^2+7x-1}^{\to\infty}}{\underbrace{6x^4-3x^2+1}_{\to\infty}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\overbrace{\left(1+\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}^{\to 1}}{x^4\underbrace{\left(6-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}_{\to 6}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{6x^2}=0.$$

Здесь учтено, что $\frac{1}{x},\frac{1}{x^2},\frac{1}{x^4}\to 0$ при $x\to\infty$.

Обобщим результаты пунктов 1, 2, 3 задачи.

Рассмотрим общую ситуацию, когда неопределенность образована делением многочлена степени k на многочлен степени l. Значение предела зависит от степеней многочленов:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_0}^{\to\infty}}{\underbrace{b_lx^l+b_{l-1}x^{l-1}+\ldots+b_0}_{\to\infty}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^k\overbrace{\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+\ldots+\frac{a_0}{x^k}\right)}^{\to a_k}}{x^l\underbrace{\left(b_l+\frac{b_{l-1}}{x}+\ldots+\frac{b_0}{x^l}\right)}_{\to b_l}}=\frac{a_k}{b_l}\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{x^l}=\begin{cases}\frac{a_k}{b_l},\ \textit{если } k=l\\ \infty,\ \textit{если } k>l\\ 0,\ \textit{если } k<l\end{cases}$$

Простые примеры:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1-x}=-1,$ так как $k = l = 1$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+1}{x^6-1}=0,$ так как $k = 5,\ l = 6,\ k < l$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2-1}{3x^4-1}=\dfrac{1}{3},$ так как $k = l = 4$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n+1}=\infty,$ так как $k = 2,\ l = 1,\ k > l$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+1}{x^4-2x^2+21}=\infty$, так как *k* =5, *l* = 4, *k* > *l*.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2+n}{(n+2)(n^2+1)}=1$, так как *k* = *l* = 3 (в знаменателе надо раскрыть скобки).

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}}$

Выражение под знаком предела содержит иррациональные компоненты, поэтому сначала проанализируем корректность поставленной задачи.

Функция $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}}$ не определена при $x\le -1$, поэтому имеет смысл искать предел только при $x\to+\infty$.

Числитель и знаменатель дроби бесконечно большие при $x\to+\infty$, поэтому имеется неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия вынесем из-под корня в числителе и знаменателе старшие степени переменной x, не забывая при этом, что $\sqrt{x^2}=|x|$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\sqrt{1+x^2}}^{\to\infty}}{\underbrace{\sqrt{1+x}}_{\to\infty}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\cdot\overbrace{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}^{\to 1}}{\sqrt{x}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{1}{x}+1}}_{\to 1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty.$$

Здесь учтено, что $\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{x^2}\to 0$ при $x\to+\infty$. Раскрываем модуль со знаком +, поскольку $x>0$ при $x\to+\infty$:

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{16x^2+3}}{\sqrt{4x^2-1}+\sqrt[3]{x^3-13}}$

Выражение под знаком предела содержит иррациональные компоненты, поэтому сначала проанализируем корректность поставленной задачи.

Функция $f(x)=\dfrac{\sqrt{16x^2+3}}{\sqrt{4x^2-1}+\sqrt[3]{x^3-13}}$ определена как при больших положительных, так и при больших отрицательных x, поэтому задача поставлена корректно.

Числитель и знаменатель дроби бесконечно большие при $x\to\infty$, поэтому имеется неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия вынесем из-под корней в числителе и знаменателе старшие степени переменной x, не забывая при этом, что $\sqrt{x^2}=|x|$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{\sqrt{16x^2+3}}^{\to\infty}}{\underbrace{\sqrt{4x^2-1}}_{\to\infty}+\underbrace{\sqrt[3]{x^3-13}}_{\to\infty}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\cdot\overbrace{\sqrt{16+\frac{3}{x^2}}}^{\to 4}}{|x|\cdot\underbrace{\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}_{\to 2}+x\cdot\underbrace{\sqrt[3]{1-\frac{13}{x^3}}}_{\to 1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4|x|}{2|x|+x}.$$

Здесь учтено, что $\frac{1}{x^2},\frac{1}{x^3}\to 0$ при $x\to\infty$.

Чтобы раскрыть модуль, надо рассмотреть отдельно односторонние пределы:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4|x|}{2|x|+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x+x}=\frac{4}{3};$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4|x|}{2|x|+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{-2x+x}=4.$$

Вывод: двусторонний предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{16x^2+3}}{\sqrt{4x^2-1}+\sqrt[3]{x^3-13}}$ не существует, но существуют односторонние пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{16x^2+3}}{\sqrt{4x^2-1}+\sqrt[3]{x^3-13}}=\frac{4}{3}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{16x^2+3}}{\sqrt{4x^2-1}+\sqrt[3]{x^3-13}}=4$.

Правило 2 раскрытия неопределенностей

Применяется в следующей ситуации: неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ *при* $x\to x_0$, $x_0\in\mathbb{R}$, *образованная делением многочленов или иррациональных выражений. В этом случае нужно числитель и знаменатель дроби разложить на множители так, чтобы выделить множитель* $(x-x_0)$, *который стремится к нулю при* $x\to x_0$, *и сократить на него дробь. Выражение, которое остается после сокращения дроби, уже не содержит неопределенности* $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Задача. Найти пределы, используя правило 2 раскрытия неопределенностей.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}$

Числитель и знаменатель дроби бесконечно малые при $x\to 2$, поэтому имеется неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель $(x-2)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{x^2+2x-8}^{\to 0}}{\underbrace{x^3-8}_{\to 0}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{x+4}^{\to 6}}{\underbrace{x^2+2x+4}_{\to 12}}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x+x^2-x^3}{1-2x+x^2}$

Числитель и знаменатель дроби бесконечно малые при $x\to 1$, поэтому имеется неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель $(x-1)$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{1-x+x^2-x^3}^{\to 0}}{\underbrace{1-2x+x^2}_{\to 0}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)+x^2(1-x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(x^2+1)}{(x-1)^2}=-\lim_{x\to 1}\frac{\overset{\to 2}{x^2+1}}{\underset{\to 0}{x-1}}=\infty.$$

При необходимости можно уточнить знак бесконечности, в данном случае он будет разным для односторонних пределов.

Числитель функции $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ стремится к 2, а значит, положительный. Тогда знак предела соответствует знаку знаменателя, и не забудем про знак «минус» перед пределом.

$$x\to 1+0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x\to 1 \\ x>1 \end{cases} \;\Rightarrow\; -\lim_{x\to 1+0}\frac{\overset{\to 2}{x^2+1}}{\underset{\to +0}{x-1}}=-\lim_{x\to 1+0}\frac{2}{\underset{>0}{x-1}}=-\infty;$$

$$x\to 1-0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x\to 1 \\ x<1 \end{cases} \;\Rightarrow\; -\lim_{x\to 1-0}\frac{\overset{\to 2}{x^2+1}}{\underset{\to -0}{x-1}}=-\lim_{x\to 1-0}\frac{2}{\underset{<0}{x-1}}=+\infty.$$

Прежде чем перейти к следующим пунктам, обсудим следующий вопрос.

Как выделить множитель $(x-x_0)$, если числитель или знаменатель дроби содержит иррациональные выражения (корни)? В этом случае надо умножить числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

Сопряженным к выражению $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ называется выражение $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, которое дополняет его до формулы «разность квадратов»:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b.$$

Сопряженным к выражению $\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$ называется выражение $\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$, которое дополняет его до формулы «сумма кубов» или «разность кубов»:

$$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a+b,\quad \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^3+x^2}$

Выражение под знаком предела содержит иррациональные компоненты, поэтому сначала проанализируем корректность поставленной задачи. Функция $f(x)=\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^3+x^2}$ определена в проколотой окрестности точки 0 (как справа, так и слева от нуля), так что задача поставлена корректно.

Числитель и знаменатель дроби бесконечно малые при $x\to 0$, поэтому имеется неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Числитель содержит иррациональное выражение. Умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{9+x}+3$, сопряженное к числителю, чтобы упростить числитель по формуле «разность квадратов»:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\sqrt{9+x}-3}^{\to 0}}{\underbrace{x^3+x^2}_{\to 0}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{9+x}-3\right)\left(\sqrt{9+x}+3\right)}{\left(x^3+x^2\right)\left(\sqrt{9+x}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{9+x-9}{x^2\left(x+1\right)\left(\sqrt{9+x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\underset{\to 0}{x}\underbrace{\left(x+1\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(\sqrt{9+x}+3\right)}_{\to 6}}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty .$$

Как видно на этом примере, после умножения на $\sqrt{9+x}+3$ иррациональность исчезла в числителе, но появилась в знаменателе. Цель умножения на сопряженное не в том, чтобы убрать иррациональность, а в том, чтобы выделить обнуляющий множитель и сократить на него числитель и знаменатель.

4. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\left(x-9\right)^2}{\sqrt[3]{x-1}-2}$

Функция под знаком предела определена в проколотой окрестности точки 9 (как справа, так и слева от 9), так что задача поставлена корректно.

Числитель и знаменатель дроби бесконечно малые при $x\to 9$, поэтому имеется неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x-1}+4$, сопряженное к знаменателю, чтобы упростить знаменатель по формуле «разность кубов»:

$$\lim_{x\to 9}\frac{\overbrace{\left(x-9\right)^2}^{\to 0}}{\underbrace{\sqrt[3]{x-1}-2}_{\to 0}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 9}\frac{\left(x-9\right)^2\left(\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x-1}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{x-1}-2\right)\left(\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x-1}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{\left(x-9\right)^2\left(\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x-1}+4\right)}{\left(x-1\right)-2^3}=\lim_{x\to 9}\frac{\left(x-9\right)^2\left(\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x-1}+4\right)}{x-9}=$$

$$=\lim_{x\to 9}\underbrace{\left(x-9\right)}_{\to 0}\underbrace{\left(\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x-1}+4\right)}_{\to 12}=12\lim_{x\to 9}(x-9)=0.$$

<u>Правило 3 раскрытия неопределенностей</u>

Применяется в следующей ситуации: неопределенность вида $\left[\infty-\infty\right]$ *или* $\left[0\cdot\infty\right]$.

В этом случае надо преобразовать выражение под знаком предела к дроби: неопределенность либо исчезнет, либо поменяет вид на $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ *или* $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ *и тогда можно применить правило 1 или правило 2.*

Задача. Найти пределы, используя правило 3 раскрытия неопределенностей.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

Так как знаменатель каждой дроби бесконечно мал при $x\to 2$, а числитель – число (ограничен), то каждая из дробей является бесконечно большой величиной. Имеется неопределенность вида $[\infty-\infty]$.

Приведем дроби к общему знаменателю и получившуюся неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ раскроем по правилу 2:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\overbrace{4}^{\to\infty}}{x^2-4}-\frac{\overbrace{1}^{\to\infty}}{x-2}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 2}\frac{4-(x+2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{2-x}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=-\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{4}.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+1}\right)$

Функция под знаком предела определена на всей числовой прямой, так что задача поставлена корректно. Имеется неопределенность $[\infty-\infty]$, точнее даже $[\infty\cdot(\infty-\infty)]$, но эта модификация не существенна.

Умножим и разделим иррациональное выражение на сопряженное. Получившуюся неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ раскроем по правилу 1:

$$\lim_{x\to\infty}\overbrace{x^2}^{\to\infty}\left(\overbrace{\sqrt{x^2+5}}^{\to+\infty}-\overbrace{\sqrt{x^2+1}}^{\to+\infty}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(x^2+5-x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{4x^2}^{\to\infty}}{\underbrace{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+1}}_{\to+\infty}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{|x|\cdot\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}_{\to 2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{|x|}=+\infty.$$

Для пояснения ответа рассмотрим отдельно $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{-x}=-\lim_{x\to-\infty}2x=+\infty.$$

3.3 Предельный переход в неравенстве. Замечательные пределы

Лемма 3.3 (предельный переход в неравенстве)
Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ и $f(x) \le g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Тогда если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Доказательство.

▷ Пусть $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$.

По определению предела 2.2 (по Коши):

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \; \exists \delta_1 : \; x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a);$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \; \exists \delta_2 : \; x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(x_0) \Rightarrow g(x) \in U_\varepsilon(b).$$

Используем метод рассуждений от противного. Предположим, что $a > b$.

У двух различных точек a и b координатной прямой (возможно, расширенной) всегда можно указать непересекающиеся ε-окрестности:

$$\exists \varepsilon > 0: \; U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing.$$

Рассмотрим именно для такого ε значения δ_1, δ_2. Положим $\delta' = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$. Тогда $\overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0) = \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(x_0)$ и в δ'-окрестности точки x_0 получаем два противоречащих друг другу вывода:

$$x \in \overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in U_\varepsilon(a), \; g(x) \in U_\varepsilon(b) \; \Rightarrow \; f(x) > g(x);$$

$$x \in \overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \le g(x) \;\; \text{(по условию леммы)}.$$

Полученное противоречие означает, что предположение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ было неверным. Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

◁

Замечания.

1. Частный случай леммы 3.3 – предельный переход для функции, ограниченной снизу или сверху константой:

$$f(x) \ge \alpha \;\; \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) \ge \alpha;$$

$$f(x) \le \beta \;\; \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) \le \beta.$$

2. Предельный переход в строгом неравенстве не обязательно сохраняет неравенство строгим, т.е. пределы таких функций могут оказаться равными:

$$f(x) < g(x) \;\; \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Пример: $f(x) = x^4, g(x) = x^2$. Очевидно, что $x^4 < x^2$ в проколотой окрестности точки $x_0 = 0$, но $\lim\limits_{x\to 0} x^4 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

В качестве приложения леммы 3.3 исследуем два случая неопределенностей:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right].$$

Значения этих пределов – одни из знаменитых результатов математического анализа, поэтому эти пределы принято называть замечательными.

Теорема 3.4

I. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ – первый замечательный предел;

II. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ – второй замечательный предел.

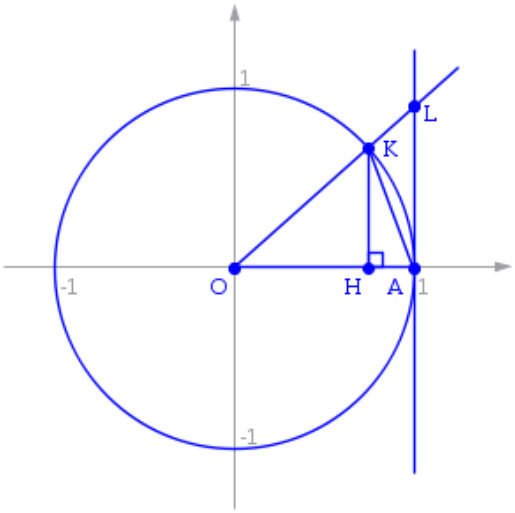
Доказательство

▷ I. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Исследуем сначала правосторонний предел в точке 0:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}.$$

Рассмотрим в декартовой системе координат окружность с центром в начале координат единичного радиуса. Проведем из начала координат луч OL, образующий угол x с положительным направлением оси абсцисс.



Проведем вспомогательные построения.

Обозначим

S_1 – площадь треугольника OKA,

S_2 – площадь сектора круга OKA,

S_3 – площадь треугольника OLA.

Выразим каждую площадь через величину угла x.

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot|KH|\cdot|OA|=\frac{1}{2}\cdot\sin x\cdot 1=\frac{\sin x}{2},$$

$$S_2=\frac{\pi\cdot x}{2\pi}=\frac{x}{2},$$

$$S_3=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|LA|=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\operatorname{tg}x=\frac{\operatorname{tg}x}{2}.$$

По построению очевидно $S_1<S_2<S_3$:

$$\frac{\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\operatorname{tg}x}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{\operatorname{tg}x}<\frac{1}{x}<\frac{1}{\sin x}\quad\Rightarrow\quad\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

В преобразовании неравенств использовали то, что x – небольшое положительное число, тогда $x>0$, $\sin x>0$.

Переходим к пределу в неравенстве при $x\to+0$. По лемме 3.3 о предельном переходе в неравенстве имеем:

$$\underbrace{\lim_{x\to+0}\cos x}_{=1}\le\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\le\underbrace{\lim_{x\to+0}1}_{=1}\quad\Rightarrow\quad 1\le\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\le 1\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Рассмотрим левосторонний предел $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sin x}{x}$. Введем новую переменную $t=-x\to+0$:

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to+0}\frac{-\sin t}{-t}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

Из связи односторонних и двустороннего пределов (лемма 2.2) вытекает, что $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

II. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

Рассмотрим сначала односторонний предел в бесконечно удаленной точке, т. е. $x\to+\infty$. Сведем этот случай к пределу последовательности, который получен в параграфе 1:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Каждое вещественное положительное число x заключено между двумя натуральными числами:

$$n=[x]\text{ – целая часть числа }x,$$

$$n\le x<n+1\ \Rightarrow\ \frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}\ \Rightarrow\ 1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\le1+\frac{1}{n}\ \Rightarrow\ \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Перейдем в каждой части последнего неравенства к пределу при $x\to+\infty$ (тогда и $n=[x]\to+\infty$). Используем свойства конечных пределов (лемма 3.2):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot1=e;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e.$$

По лемме 3.3 о предельном переходе в неравенстве имеем:

$$e\le\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le e\ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

При $x\to-\infty$ введем новую переменную $t=-x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e\cdot1=e.$$

Из связи односторонних и двустороннего пределов (лемма 2.2) вытекает, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

Кроме того, если обозначить $z=\dfrac{1}{x}\to0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{z\to0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e$.

$\triangleleft$

§4. Эквивалентные бесконечно малые (большие) функции

4.1 Определение и свойства отношения эквивалентности

Определение 4.1

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – две бесконечно малые функции в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными* в точке x_0. Обозначение: $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$. Эквивалентные бесконечно малые функции с одинаковой скоростью стремятся к нулю при $x \to x_0$.

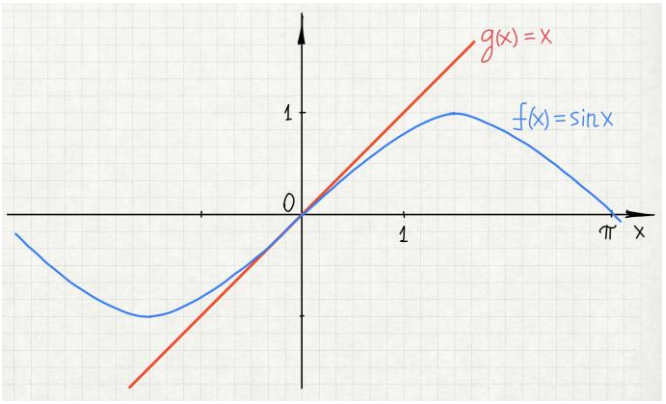
Определение 4.1′

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – две бесконечно большие функции в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными* в точке x_0. Обозначение: $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$. Эквивалентные бесконечно большие функции с одинаковой скоростью стремятся к бесконечности при $x \to x_0$.

Простые примеры

1. Первый замечательный предел (теорема 3.4) дает классический пример эквивалентных бесконечно малых функций:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \sim x \text{ при } x \to 0$$



При $x \to 0$ графики эквивалентных бесконечно малых функций $f(x) = \sin x$ и $g(x) = x$ так плотно прилегают друг к другу, что становятся визуально неразличимыми.

2. Пример эквивалентных бесконечно больших функций:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+1} \sim \sqrt{x} \text{ при } x \to +\infty$$



Замечание 1. Говоря об эквивалентности двух функций, обязательно надо указывать точку x_0, в которой происходит сравнение. Функции $f(x)$ и $g(x)$ могут быть эквивалентны в одной точке и не эквивалентны в другой. Например:

$$\sin x \not\sim x \quad \text{при } x \to \infty, \text{ так как } \lim_{\substack{x\to\infty \\ \to\infty}} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{огр.}}{=} 0 \ \text{(лемма 3.1}'\text{)}.$$

Функции $f(x)=\sin x$ и $g(x)=x$ заведомо не могут быть эквивалентны в точке $x_0=\infty$, так как первая функция не является ни бесконечно большой, ни бесконечно малой в этой точке.

Замечание 2. Отношение эквивалентности между бесконечно малыми (большими) функциями не следует путать с приближенным равенством этих функций:

$$(1)\ f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$$

$$(2)\ f(x) \underset{x\to x_0}{\approx} g(x)$$

Утверждения (1) и (2) различны. Утверждение (2) не имеет раз и навсегда определенного смысла: какое именно сходство между функциями считается приближенным равенством, зависит от контекста. Смысл утверждения (1) зафиксирован четко определениями 4.1, 4.1′: эквивалентность функций подразумевает, что обе функции либо бесконечно малые, либо бесконечно большие и с одинаковой скоростью стремятся либо к нулю, либо – соответственно – к бесконечности.

Теорема 4.2 (список основных отношений эквивалентности)
При $x \to 0$ следующие бесконечно малые функции эквивалентны:

$$\sin x \sim x \qquad \arcsin x \sim x \qquad e^x - 1 \sim x$$
$$\operatorname{tg} x \sim x \qquad \operatorname{arctg} x \sim x \qquad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$$
$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \qquad \ln(1+x) \sim x \qquad (1+x)^m - 1 \sim m \cdot x$$

Доказательство (выборочно).

▷ Для доказательства используем первый и второй замечательные пределы (теорема 3.4) и свойства конечных пределов (лемма 3.2).

Соотношение $\sin x \sim x$ – прямое следствие первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Следующие отношения эквивалентности также опираются на первый замечательный предел:

$$\operatorname{tg}x \sim x \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1;$$

$$\arcsin x \sim x \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\arcsin x}^{y}}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}=\frac{1}{1}=1\ ;$$

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2=1.$$

Следующее отношение эквивалентности выводится при помощи второго замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$:

$$\ln\left(1+x\right)\sim x \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\underbrace{(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{\to e}=\ln e=1.$$

Из него вытекает еще одно отношение:

$$e^x-1\sim x \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}}=\frac{1}{1}=1.$$

$\triangleleft$

Упражнение. Доказать остальные отношения эквивалентности из теоремы 4.2.

Свойства отношения эквивалентности

1. $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$ (рефлексивность)

Любая бесконечно малая (большая) функция эквивалента сама себе. Тривиальный пример:

$$x\underset{x\to 0}{\sim} x$$

2. $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(x)\underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$ (симметричность)

Левую и правую части отношения эквивалентности можно менять местами. Пример:

$$\sin x\underset{x\to 0}{\sim} x \quad \Leftrightarrow \quad x\underset{x\to 0}{\sim}\sin x$$

3. $\begin{cases} f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ f(x)h(x)-\text{беск. малая (больш.) в } x_0 \end{cases} \Rightarrow \quad f(x)\cdot h(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\cdot h(x)$

Если на две эквивалентные бесконечно малые (большие) функции умножили на третью функцию, после чего они снова являются бесконечно малыми или бесконечно большими, то отношение эквивалентности между ними сохраняется.

$$\sin x\underset{x\to 0}{\sim} x \quad \Rightarrow \quad x\sin x\underset{x\to 0}{\sim} x^2,\ \ \sin x\cos x\underset{x\to 0}{\sim} x\cos x$$

Замечание. Свойство 3 касается только произведения функций. Аналогичного свойства для суммы (разности) нет! Например:

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x, \text{ но } \sin x - x \underset{x\to 0}{\not\sim} x - x = 0$$

Никакая функция не может быть эквивалентна нулю, это противоречило бы определениям 4.1, 4.1′.

4. $\begin{cases} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ \varphi\big(f(x)\big) - \text{беск. малая (больш.) в } x_0 \end{cases} \Rightarrow \varphi\big(f(x)\big) \underset{x\to x_0}{\sim} \varphi\big(g(x)\big)$

Если на две эквивалентные бесконечно малые (большие) функции подействовали некоторой другой функцией, после чего они снова являются бесконечно малыми или бесконечно большими, то отношение эквивалентности между ними сохраняется. Пример:

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \;\Rightarrow\; (\sin x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2, \;\; \frac{1}{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Но $\sqrt{2+\sin x} \underset{x\to 0}{\not\sim} \sqrt{2+x}$, так как функции перестали быть бесконечно малыми и не стали бесконечно большими, к ним не применимо отношение эквивалентности.

5. $\begin{cases} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ \psi(t) \underset{t\to t_0}{\to} x_0 \end{cases} \Rightarrow f(\psi(t)) \underset{t\to t_0}{\sim} g(\psi(t))$

Заметим, что все основные отношения эквивалентности из теоремы 4.2 выполняются при условии $x \to 0$. Из свойства 5 следует, можно вместо x в них можно подставить сложный аргумент (выраженный через t или снова через x), если он тоже стремится к нулю.
Примеры:

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \;\Rightarrow\; \sin 2t \underset{t\to 0}{\sim} 2t \;\text{ или }\; \sin 2x \underset{x\to 0}{\sim} 2x$$
$$\sin(t-1) \underset{t\to 1}{\sim} t-1 \;\text{ или }\; \sin(x-1) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$$
$$\sin\frac{1}{t} \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{t} \;\text{ или }\; \sin\frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

6. $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x),\; g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x) \;\Rightarrow\; f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$ (транзитивность)

Заменять функцию на эквивалентную можно поэтапно, выстраивая цепочки эквивалентности. Пример:

$$\ln(1+\sin x) \sim \sin x \sim x \text{ при } x \to 0$$

Для первого перехода использовано основное отношение из теоремы 4.2: $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ с подстановкой на место x сложного аргумента $\sin x \to 0$ (свойство 5).

7. $f_0(x) \underset{x\to x_0}{\to} a \in \mathbb{R},\; a \neq 0 \;\Rightarrow\; f_0(x)f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} af(x)$

Это свойство используется для замены бесконечно малой (большой) функции на эквивалентную путем упрощения несущественных множителей, т.е. таких множителей, которые не являются ни бесконечно малыми, ни бесконечно большими, а стремятся к ненулевому числу. Примеры:

$$x^2 \overset{\to 1}{\cos x} \sim x^2 \text{ при } x \to 0$$

$$x^2 - 1 = (x-1)\overset{\to 2}{(x+1)} \sim 2(x-1) \text{ при } x \to 1$$

$$\frac{\overbrace{\operatorname{arctg} x}^{\to \pi/2}}{x} \sim \frac{\pi}{2x} \text{ при } x \to +\infty$$

Упражнение. Доказать свойства эквивалентности по определениям 4.1, 4.1′.

4.2 Правило 4 раскрытия неопределенностей

Из перечисленных в предыдущем разделе свойств и примеров видно, что замена бесконечно малой (большой) функции на эквивалентную производится с целью упрощения функции. Такая замена используется во многих математических операциях, в частности – для раскрытия неопределенности при вычислении предела.

Правило 4

Обычно применяется для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. *Помогает также раскрыть неопределенность* $\left[1^{\infty}\right]$ *и другие виды неопределенностей.*

Для вычисления предела функции в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *следует разложить функцию на множители:*

1) *любой бесконечно малый или бесконечно большой множитель можно заменить на эквивалентный ему в точке* x_0*;*

2) *любой множитель, который не является ни бесконечно малым, ни бесконечно большим в точке* x_0*, но стремится к ненулевому числу, можно заменить на это число.*

Значение предела при этом не изменится.

Доказательство. Пункт 2) является следствием пункта 1) и свойства 7 отношения эквивалентности. Поэтому нужно доказывать только 1).

▷ Пусть требуется вычислить предел $f(x)h(x)$ в точке x_0 и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$.

Докажем, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)h(x)$.

Очевидно, что $f(x)h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)h(x)$. Рассмотрим разные случаи.

1) Если $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)h(x) = a \in \mathbb{R}$, то по свойствам конечных пределов (лемма 3.2):

$$\lim_{x \to x_0} f(x)h(x) = \lim_{x \to x_0} \underset{\to 1}{\frac{f(x)}{g(x)}} \cdot \underbrace{g(x)h(x)}_{\to a} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)h(x) = 1 \cdot a = a .$$

2) Если $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)h(x) = \infty$, то по свойствам бесконечно больших функций (лемма 3.1′):

$$\lim_{x\to x_0} f(x)h(x) = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}_{\to 1,\ \text{отд. от } 0} \cdot \underbrace{g(x)h(x)}_{\to\infty} = \infty .$$

3) Если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x)$ не существует, то и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x)$ не существует: пусть функция $f(x)h(x)$ имеет конечный или бесконечный предел в x_0, тогда согласно логике пунктов 1), 2) функция $g(x)h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} f(x)h(x)$ тоже имела бы конечный или бесконечный предел.

$\triangleleft$

Замечание. Если вычисляется предел функции, которая является дробью, то правило 4 применяется как в числителе дроби, так и в знаменателе. Это следствие свойства 4 отношения эквивалентности.

Задача. Найти значение предела, используя правило 4 раскрытия неопределенностей.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^2}$

Имеется неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Воспользуемся одним из основных отношений эквивалентности (теорема 4.2):

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

Тогда согласно правилу 4 раскрытия неопределенностей

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^2} \overset{\to 0}{\underset{\to 0}{=}} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

При этом

$$\lim_{x\to +0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x\to +0} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x\to -0} \frac{1}{x} = -\infty$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin^2 x}{2x^2 - x}$

Имеется неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Разложим знаменатель на множители и упростим дробь под знаком предела, используя пункт 2) правила 4:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin^2 x}{2x^2 - x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin^2 x}{x \underbrace{(2x-1)}_{\to -1}} \overset{\to 1 \quad \to 0}{\underset{\to 0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot \sin^2 x}{x\cdot(-1)} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Неопределенность еще не раскрыта, так как еще не произошло сокращение бесконечно малых множителей. Чтобы их сократить, воспользуемся пунктом 1) правила 4. Заменим

числитель дроби на эквивалентную функцию по одному из основных отношений эквивалентности (теорема 4.2) и свойству 4 эквивалентности:

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} x^2$$

Тогда:

$$-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = -\lim_{x\to 0} x = 0$$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x\arcsin(x+2)}$

Имеется неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Разложим числитель на множители по формуле для разности квадратов и упростим дробь под знаком предела, используя пункт 2) правила 4:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\underbrace{x\arcsin(x+2)}_{\to 0}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -2}\frac{\overbrace{(x+2)}^{\to 0}\overbrace{(x-2)}^{\to -4}}{\underbrace{x}_{\to -2}\underbrace{\arcsin(x+2)}_{\to 0}} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\cdot(-4)}{(-2)\cdot\arcsin(x+2)} = 2\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\arcsin(x+2)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Неопределенность еще не раскрыта, так как еще не произошло сокращение бесконечно малых множителей. Чтобы их сократить, воспользуемся пунктом 1) правила 4. Заменим знаменатель дроби на эквивалентную функцию по одному из основных отношений эквивалентности (теорема 4.2) и свойству 5 эквивалентности:

$$\arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \Rightarrow \quad \arcsin(x+2) \underset{x\to -2}{\sim} x+2$$

Тогда:

$$2\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\arcsin(x+2)} = 2\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x+2} = 2\lim_{x\to -2} 1 = 2\cdot 1 = 2$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{\operatorname{tg}^2 3x}$

Имеется неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Для знаменателя воспользуемся одним из основных отношений эквивалентности (теорема 4.2) и свойствами 5 и 4 эквивалентности:

$$\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{tg} 3x \underset{x\to 0}{\sim} 3x \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{tg}^2 3x \underset{x\to 0}{\sim} (3x)^2 = 9x^2$$

Числитель разложим на множители, используя формулу разности кубов:

$$1 - \cos^3 2x = \underbrace{(1 - \cos 2x)}_{\to 0}\underbrace{(1 + \cos 2x + \cos^2 2x)}_{\to 3}$$

Первый (бесконечно малый) множитель можно заменить на эквивалентный при помощи одного из основных отношений эквивалентности (теорема 4.2) и свойства 5 эквивалентности:

$$1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 1 - \cos 2x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2$$

Тогда согласно правилу 4 раскрытия неопределенностей

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{1-\cos^3 2x}^{\to 0}}{\underset{\to 0}{\operatorname{tg}^2 3x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{(1-\cos 2x)}^{\sim 2x^2}\overbrace{(1+\cos 2x+\cos^2 2x)}^{\to 3}}{\underset{\sim 9x^2}{\operatorname{tg}^2 3x}} = \lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{9x^2} = \frac{2}{3}$$

5. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{1-\sin x}{\pi-2x}$

Имеется неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

В данном случае нельзя сразу воспользоваться отношением эквивалентности $\sin x \sim x$, поскольку x стремится к $\pi/2$, а не к 0. Кроме того, $\sin x$ является слагаемым, а не множителем числителя (правило 4 раскрытия неопределенностей «работает» только с множителями).

Введем такую новую переменную, чтобы она стремилась к нулю при $x \to \pi/2$:

$$t = x - \pi/2 \to 0$$

Подставим формулу $x = t + \pi/2$ в исходный предел и выразим его через новую переменную:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sin x}{\pi-2x} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\sin\left(t+\pi/2\right)}{\pi-2\left(t+\pi/2\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{-2t} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Заметим, что это преобразование не привело пока к исчезновению неопределенности. Это просто запись предела в более удобном виде, который позволяет воспользоваться одним из основных отношений эквивалентности (теорема 4.2):

$$1-\cos t \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$$

По правилу 4 раскрытия неопределенностей:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{-2t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2/2}{-2t} = -\frac{1}{4}\lim_{t\to 0} t = 0$$

6. $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{\sqrt[4]{x^2-x+1}-1}{\sqrt{x-1}\ln x}$

Имеется неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Рассматривается только правосторонний предел, поскольку слева от точки $x_0 = 1$ функция не определена.

Чтобы проще было использовать основные отношения эквивалентности из теоремы 4.2, вводим новую переменную $t = x-1 \to +0$:

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{\overbrace{\sqrt[4]{x^2-x+1}-1}^{\to 0}}{\underset{\to 0}{\sqrt{x-1}}\ \underset{\to 0}{\ln x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t\to +0} \frac{\overbrace{\sqrt[4]{t^2+t+1}-1}^{\to 0}}{\underset{\to 0}{\sqrt{t}}\ \underbrace{\ln(1+t)}_{\to 0}}$$

Производим две замены бесконечно малых множителей на эквивалентные: используем основные отношения эквивалентности из теоремы 4.2 и свойство 5.

$$\ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t$$

$$(1+x)^m - 1 \underset{x\to 0}{\sim} mx \quad \Rightarrow \quad \sqrt[4]{t^2+t+1} - 1 = (1+t+t^2)^{1/4} - 1 \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{4}(t+t^2)$$

По правилу 4 раскрытия неопределенностей

$$\lim_{t\to+0} \frac{\overbrace{\sqrt[4]{t^2+t+1}-1}^{\sim\frac{1}{4}(t+t^2)}}{\sqrt{t}\underbrace{\ln(1+t)}_{\sim t}} = \lim_{t\to+0} \frac{t+t^2}{4\sqrt{t}\cdot t} = \lim_{t\to+0} \frac{t\cdot\overbrace{(1+t)}^{\to 1}}{4\sqrt{t}\cdot t} = \lim_{t\to+0} \frac{1}{4\sqrt{t}} = +\infty$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

Имеется неопределенность $\left[1^\infty\right]$.

Такой предел можно упростить двумя способами.

Первый способ: при помощи второго замечательно предела $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$ (теорема 3.4).

$$\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\to 1}^{\overbrace{x^2}^{\to\infty}} = \left[1^\infty\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} e^x$$

Второй способ: при помощи тождества $a^b = e^{b\ln a}$ и правила 4 раскрытия неопределенностей.

$$\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\to 1}^{\overbrace{x^2}^{\to\infty}} = \left[1^\infty\right] = \lim_{x\to\infty} e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x^2}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^x$$

Здесь воспользовались одним из основных отношений эквивалентности (теорема 4.2) и свойством 5:

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \Rightarrow \quad \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

После упрощения предела тем или иным способом заметим, что функция $f(x) = e^x$ имеет разные пределы на $+\infty$ и на $-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Следовательно, двусторонний предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} e^x$ не существует.

8. $\lim\limits_{x\to+0}\left(1-\sin x\right)^{1/\sqrt{x}}$

Имеется неопределенность $\left[1^\infty\right]$.

Упростим и вычислим такой предел вторым способом (см. предыдущий пункт):

$$\lim_{x\to+0}\underbrace{\left(1-\sin x\right)}_{\to 1}^{\overbrace{1/\sqrt{x}}^{\to\infty}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to+0}e^{\frac{\ln(1-\sin x)}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+0}e^{-\frac{x}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+0}e^{-\sqrt{x}}=1$$

Воспользовались двумя из два основных отношений эквивалентности (теорема 4.2) и свойствами 5, 6 эквивалентности:

$$\ln(1-\sin x)\sim-\sin x\sim-x\ \text{ при }\ x\to 0$$

§5. Порядок малости (роста) функции

В этом параграфе описаны общие принципы сравнения двух бесконечно малых функций или двух бесконечно больших функций в данной точке. Аналогичные принципы сравнения справедливы и для последовательностей. Кроме того, данные принципы можно применить и к сравнению двух функций, которые являются бесконечно малыми (большими) только справа или только слева от данной точки. В этом случае надо заменить соответствующие двусторонние пределы односторонними.

Для сравнения двух бесконечно малых функций или двух бесконечно больших функций находят предел их отношения в этой точке. Такой предел является неопределенностью. Сравнение функций зависит от того, как будет раскрыта данная неопределенность.

5.1 Сравнение бесконечно малых (больших) функций

Определение 5.1
Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

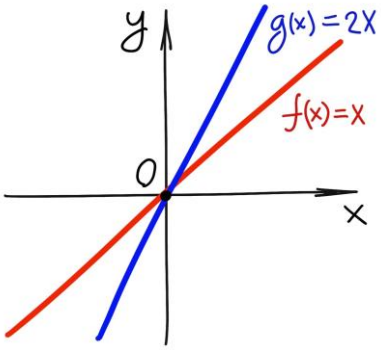
Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ или, что то же самое, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \infty$, то функция $f(x)$ имеет *более высокий порядок* малости, чем функция $g(x)$ в точке x_0. Это значит, что $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0$ *существенно быстрее*, чем $g(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0$. Обозначение: $f(x) = o\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$.

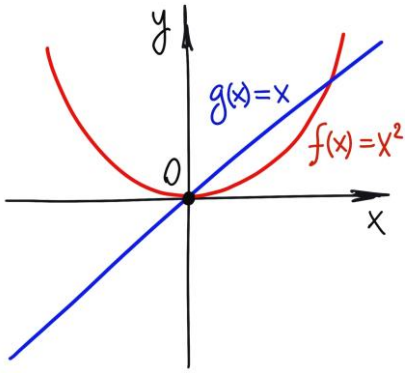
Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют *одинаковый порядок малости* в точке x_0. В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ *эквиваленты* в точке x_0.

Замечания:

- Обозначение $f(x) = o\big(g(x)\big)$ читается так: функция $f(x)$ есть «о-малое» от функции $g(x)$. Смысл этого обозначения заключается в следующем: функция $f(x)$ настолько быстрее, чем $g(x)$, стремится к нулю, что является как бы нулем по сравнению с $g(x)$.
- Сравнивая порядки бесконечно малых функций, обязательно надо указывать точку x_0, в которой происходит сравнение.
- Эквивалентные бесконечно малые функции (определение 4.1) являются частным случаем функций одного порядка малости (определение 5.1).
- Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ не существует, то говорят, что функции не сравнимы в точке x_0.

Простые примеры Рассмотрим две пары функций $f(x)$ и $g(x)$, которые являются бесконечно малыми в точке $x_0 = 0$:





Для рисунка слева: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$.

По определению 5.1 функции $f(x) = x$ и $g(x) = 2x$ имеют одинаковый порядок малости в точке $x_0 = 0$. Это не значит, что у них одинаковая скорость стремления к нулю (они же не эквивалентны!), но их скорости из одной категории. Скорость стремления к нулю у функции $f(x) = x$ ровно в два раза выше, чем у функции $g(x) = 2x$.

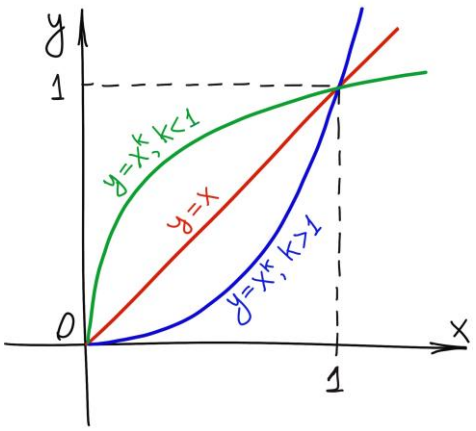
Для рисунка справа: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x} = 0$.

По определению 5.1 функция $f(x) = x^2$ имеет более высокий порядок малости, чем функция $g(x) = x$ в точке $x_0 = 0$: $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$. Скорость стремления к нулю у функции $f(x) = x^2$ существенно выше, чем у $g(x) = x$. Скорости этих функций – из разных категорий. Можно сказать так: какой бы большой коэффициент α мы ни выбрали, скорость $f(x) = x^2$ будет более, чем в α раз, выше скорости $g(x) = x$.

Порядок малости функции в точке x_0 отражается на форме графика функции: в окрестности точки x_0 график бесконечно малой функции, имеющей более высокий порядок малости, прилегает к оси абсцисс более плотно по сравнению с графиком функции, имеющей более низкий порядок малости (см. рисунок справа).

Теперь рассмотрим весь класс степенных функций $f(x) = x^k$ с положительной степенью. Все они являются бесконечно малыми в точке $x_0 = 0$. Причем из определения 5.1 ясно, что чем больше k, тем выше порядок малости:

$$x^K = o(x^k) \text{ при } K > k > 0,\ x \to 0$$



Сравнение бесконечно больших функций проводится аналогично бесконечно малым, с небольшими отличиями.

Определение 5.1′
Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие функции в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

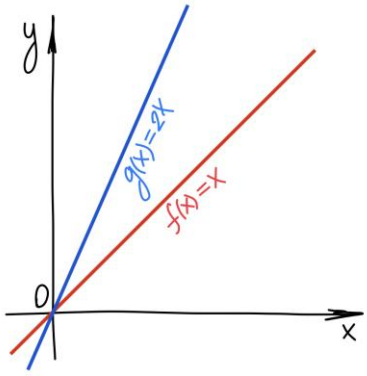
Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ или, что то же самое, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \infty$, то функция $g(x)$ имеет *более высокий порядок роста,* чем функция $f(x)$ в точке x_0. Это означает, что $g(x) \underset{x\to x_0}{\to} \infty$ *существенно быстрее*, чем $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} \infty$. Обозначение: $f(x) = o\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$.

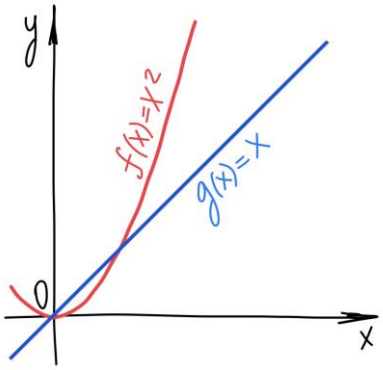
Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют *одинаковый порядок роста* в точке x_0. В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ *эквиваленты* в точке x_0.

Замечания:

- Обозначение $f(x) = o\big(g(x)\big)$ читается так: функция $f(x)$ есть «о-малое» от функции $g(x)$. Смысл этого обозначения заключается в следующем: функция $g(x)$ настолько быстрее, чем $f(x)$, стремится к бесконечности, что функция $f(x)$ по сравнению к ней как бы ноль.
- Сравнивая порядки бесконечно больших функций, обязательно надо указывать точку x_0, в которой происходит сравнение.
- Эквивалентные бесконечно большие функции (определение 4.1′) являются частным случаем функций одного порядка роста (определение 5.1′).
- Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ не существует, то говорят, что функции не сравнимы в точке x_0.

Простые примеры Рассмотрим две пары функций $f(x)$ и $g(x)$, которые являются бесконечно большими в точке $x_0 = +\infty$:





Для рисунка слева: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

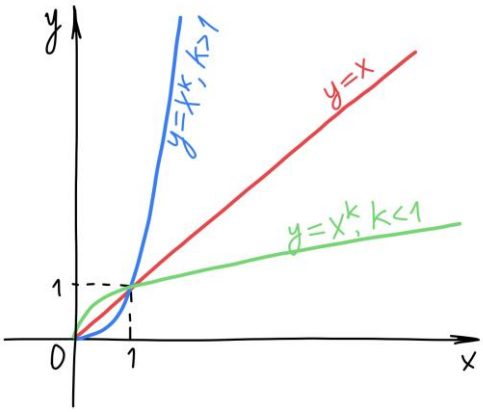
По определению $5.1'$ функции $f(x)=x$ и $g(x)=2x$ имеют одинаковый порядок роста в точке $x_0=+\infty$. Это не значит, что у них одинаковая скорость стремления к бесконечности (они же не эквивалентны!), но их скорости из одной категории. Скорость стремления к бесконечности у функции $f(x)=x$ ровно в два раза ниже, чем у функции $g(x)=2x$.

Для рисунка справа: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=0$.

По определению $5.1'$ функция $f(x)=x^2$ имеет более высокий порядок роста, чем функция $g(x)=x$ в точке $x_0=+\infty$: $x=o(x^2)$ при $x\to+\infty$. Скорость стремления к бесконечности у функции $f(x)=x^2$ существенно выше, чем у функции $g(x)=x$. Скорости этих функций – из разных категорий. Можно сказать так: какой бы большой коэффициент α мы ни выбрали, скорость $f(x)=x^2$ будет более, чем в α раз, выше скорости $g(x)=x$.

Теперь рассмотрим весь класс степенных функций $f(x)=x^k$ с положительной степенью. Все они являются бесконечно большими в точке $x_0=+\infty$. Причем из определения $5.1'$ ясно, что чем больше k, тем выше порядок роста:

$$x^k=o(x^K) \text{ при } K>k>0,\ x\to+\infty$$



Лемма 5.2 [без доказательства]
Пусть $k>0$, $a>1$. Тогда при $x\to+\infty$

$$\log_a x = o(x^k),\quad x^k = o(a^x),\quad a^x = o([x]!),\quad [x]! = o(x^x).$$

Иными словами, имеется следующая классификация основных элементарных функций, если расположить их слева направо по возрастанию порядков роста при $x\to+\infty$:

$\log_a x, a>1$	$x^k, k>0$	$a^x, a>1$	$n!=[x]!$	x^x

Поскольку операция «факториал» определена для целых неотрицательных чисел, то в этой лемме квадратными скобками обозначена целая часть вещественного числа *x*.

Лемма 5.2 позволяет быстро раскрывать неопределенность в подходящих случаях:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=0$, так как при $x\to+\infty$ показательная функция e^x имеет более высокий порядок роста, чем степенная функция x^2;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\infty$, так как при $x\to+\infty$ степенная функция x имеет более высокий порядок роста, чем логарифмическая функция $\ln x$.

5.2 Степенная шкала

Пусть функция $f(x)$ является бесконечно малой (большой) в точке x_0.
Найти порядок функции $f(x)$ по степенной шкале – значит, найти степенную функцию $g(x)$, у которой одинаковый порядок малости (роста) с функцией $f(x)$. Одинаковый порядок малости (роста) можно выразить двумя способами (определения 4.1, 4.1′, 5.1, 5.1′):

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=a\in\mathbb{R},\ a\neq 0 \qquad \text{или} \qquad f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} a\,g(x),\ a\neq 0$$

Второй подход предпочтительнее: чтобы найти порядок малости (роста) функции $f(x)$ по степенной шкале, надо заменить функцию $f(x)$ на эквивалентную ей степенную функцию $g(x)$ с числовым коэффициентом $a\neq 0$.

Вид степенной шкалы зависит от ситуации:

функция $f(x)$, точка x_0	степенная шкала, $k>0$ – порядок функции $f(x)$ по этой шкале
$f(x)$ – беск. малая, $x_0=0$	$f(x)\sim ax^k$
$f(x)$ – беск. большая, $x_0=0$	$f(x)\sim\dfrac{a}{x^k}$
$f(x)$ – беск. малая, $x_0\in\mathbb{R}$	$f(x)\sim a\,(x-x_0)^k$

$f(x)$ – беск. большая, $x_0 \in \mathbb{R}$	$f(x) \sim \frac{a}{(x - x_0)^k}$
$f(x)$ – беск. малая, $x_0 = \infty$	$f(x) \sim \frac{a}{x^k}$
$f(x)$ – беск. большая, $x_0 = \infty$	$f(x) \sim ax^k$

Заметим, что первая и вторая строки таблицы – частные случаи третьей и четвертой строк.

Для замены функции на эквивалентную ей степенную функцию предпринимаются действия, в чем-то сходные с правилами раскрытия неопределенностей. Они подводят к применению свойств отношения эквивалентности или формул из списка основных отношений эквивалентности (см. параграф 4).

Опишем два алгоритма, которые пригодны для простых, наиболее распространенных, случаев.

Алгоритм I замены бесконечной малой функции $f(x)$ на эквивалентную ей степенную функцию в точке $x_0 \in \mathbb{R}$:

1) Разложить $f(x)$ на множители с целью выделить бесконечно малый множитель (при необходимости разложить отдельно числитель и знаменатель + провести сокращение).
2) Бесконечно малый множитель либо уже является степенным, т.е. имеют вид $(x - x_0)^k$, либо нет – тогда его надо заменить на эквивалентный степенной по списку основных отношений эквивалентности (теорема 4.2).
3) Множители, которые не являются бесконечно малыми, а стремятся к ненулевому числу, надо заменить на это число (согласно свойству 7 отношения эквивалентности).

Алгоритм II замены бесконечной большой функции $f(x)$ на эквивалентную ей степенную функцию в точке $x_0 = \infty$:

1) Вынести за скобки старшую степень переменной *x* с целью выделить бесконечно большой множитель (при необходимости вынести отдельно в числителе и в знаменателе + провести сокращение). Бесконечно большой множитель будет иметь вид x^k.
2) Оставшиеся множители (в скобках) не являются бесконечно большими, а стремятся к ненулевому числу, их надо заменить на это число (согласно свойству 7 отношения эквивалентности).

Задача 1. Даны функции $\alpha(x) = \sqrt{1+3x} - \sqrt{1-3x}$ и $\beta(x) = \arcsin(\sqrt{4+x^2} - 2)$, бесконечно малые в точке $x_0 = 0$. Найти для каждой из функций порядок малости по степенной шкале и сравнить порядки малости функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в данной точке.

Степенная шкала в данном случае x^k.
Заменим каждую функцию на эквивалентную ей степенную функцию:

$$x\to 0 \quad\Rightarrow\quad \alpha(x)=\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}=\frac{\left(\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}\right)\left(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x}\right)}{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x}}=$$

$$=\frac{6x}{\underbrace{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x}}_{\to 2}}\sim\frac{6x}{2}=3x$$

$$x\to 0 \quad\Rightarrow\quad \beta(x)=\arcsin(\underbrace{\sqrt{4+x^2}}_{\to 0}-2)\sim\sqrt{4+x^2}-2=2\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}-1\right)=2\left(\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)\sim 2\frac{1}{2}\frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{4}$$

Здесь использован **алгоритм I**.

Таким образом:

$\alpha(x)\sim 3x$ при $x\to 0$, порядок малости по степенной шкале 1;

$\beta(x)\sim\dfrac{x^2}{4}$ при $x\to 0$, порядок малости по степенной шкале 2.

Функция $\beta(x)$ имеет более высокий порядок малости (т.е. существенно быстрее стремится к нулю), чем функция $\alpha(x)$:

$$\beta(x)=o(\alpha(x)) \text{ при } x\to 0.$$

Проверим это по определению 5.1 и правилу 4 раскрытия неопределенностей:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/4}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{12}=0.$$

Задача 2. Даны функции $f(x)=\dfrac{x^4-2x^3}{3x+1}$ и $g(x)=x^2\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}$, бесконечно большие в точке $x_0=+\infty$. Найти для каждой из функций порядок роста по степенной шкале и сравнить порядки роста функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в данной точке.

Степенная шкала в данном случае x^k.

Заменим каждую функцию на эквивалентную ей степенную функцию:

$$x\to+\infty \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{x^4-2x^3}{3x+1}=\frac{x^4\overbrace{\left(1-\frac{2}{x}\right)}^{\to 1}}{x\underbrace{\left(3+\frac{1}{x}\right)}_{\to 3}}\sim\frac{x^3}{3}$$

$$x\to+\infty \quad\Rightarrow\quad g(x)=x^2\sin\frac{\pi}{\sqrt{x}}\sim x^2\frac{\pi}{\sqrt{x}}=\pi x^{\frac{3}{2}}$$

Здесь использован **алгоритм II**.

Таким образом:

$f(x)\sim\dfrac{x^3}{3}$ при $x\to+\infty$, порядок роста по степенной шкале 3;

$g(x)\sim\pi x^{\frac{3}{2}}$ при $x\to+\infty$, порядок роста по степенной шкале $\dfrac{3}{2}$.

Функция $f(x)$ имеет более высокий порядок роста (т.е. существенно быстрее стремится к бесконечности), чем функция $\alpha(x)$:

$$g(x)=o(f(x)) \text{ при } x\to+\infty.$$

Проверим это по определению 5.**1′** и правилу 4 раскрытия неопределенностей:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi x^{\frac{3}{2}}}{x^3/3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\pi}{x^{\frac{3}{2}}}=0.$$

Задача 3. Дана функция $f(x)=\dfrac{x^5-2x^4}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

Указать точки, в которых она является бесконечно малой, и точки, в которых она является бесконечно большой. В каждой такой точке заменить функцию $f(x)$ на эквивалентную ей степенную функцию и определить порядок $f(x)$ по степенной шкале.

Функция $f(x)$ является бесконечно малой в точках $0,\ 2$ и является бесконечно большой в точках $1,\ \infty$.

$$1)\quad x\to 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^5-2x^4}{\sqrt[3]{x^3-1}}=\frac{\overset{\to 0}{x^4}\overbrace{(x-2)}^{\to -2}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^3-1}}_{\to -1}}\sim 2x^4 \quad\Rightarrow\quad k=4$$

В точке $x=0$ функция $f(x)$ бесконечно малая и имеет порядок 4 по шкале x^k.

$$2)\quad x\to 2 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^5-2x^4}{\sqrt[3]{x^3-1}}=\frac{\overset{\to 16}{x^4}\overbrace{(x-2)}^{\to 0}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^3-1}}_{\to\sqrt[3]{7}}}\sim\frac{16}{\sqrt[3]{7}}(x-2) \quad\Rightarrow\quad k=1$$

В точке $x=2$ функция $f(x)$ бесконечно малая и имеет порядок 1 по шкале $(x-2)^k$.

В случаях 1), 2) использован **алгоритм I**.

$$3)\quad x\to\infty \quad\Rightarrow\quad \frac{x^5-2x^4}{\sqrt[3]{x^3-1}}=\frac{\overset{\to\infty}{x^5}\overbrace{\left(1-\frac{2}{x}\right)}^{\to 1}}{\underset{\to\infty}{x}\underbrace{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}}_{\to 1}}\sim x^4 \quad\Rightarrow\quad k=4$$

В точке $x=\infty$ функция $f(x)$ бесконечно большая и имеет порядок 4 по шкале x^k.
Здесь использован **алгоритм II**.

$$4)\quad x\to 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^5-2x^4}{\sqrt[3]{x^3-1}}=\frac{\overbrace{x^5-2x^4}^{\to -1}}{\underset{\to 0}{\sqrt[3]{x-1}}\underbrace{\sqrt[3]{x^2+x+x}}_{\to\sqrt[3]{3}}}\sim\frac{-1}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{x-1}} \quad\Rightarrow\quad k=\frac{1}{3}$$

В точке $x=1$ функция $f(x)$ бесконечно большая и имеет порядок $\dfrac{1}{3}$ по шкале $\dfrac{1}{(x-1)^k}$.

Этот случай не вписывается в **алгоритмы I и II**. Но логика действий аналогична. Дробь является бесконечно большой из-за бесконечно малого знаменателя. Выделяем в нем степенной множитель. Остальные множители стремятся к ненулевым числам и можно заменить их на эти числа (свойство 7 отношения эквивалентности).

Замечание. Бывают бесконечно малые (большие) функции $f(x)$, у которых нет порядка по степенной шкале, так как у них нестепенной порядок стремления к нулю (к бесконечности). Например, логарифмическая и показательная функции, хотя и являются бесконечно большими при $x \to +\infty$, но не имеют порядка по степенной шкале x^k. Функция $f(x) = \log_a x$, $a > 1$, растет на существенно медленнее любой степенной функции, функция $f(x) = a^x$, $a > 1$, растет существенно быстрее любой степенной функции (лемма 5.2).

Упражнение. Для каждого из следующих условий, привести пример удовлетворяющей ему функции $f(x)$:

$f(x)$ беск. мала в точке $x_0 = \infty$, но не имеет порядка по степенной шкале $\dfrac{1}{x^k}$;

$f(x)$ беск. мала в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, но не имеет порядка по степенной шкале $(x - x_0)^k$;

$f(x)$ беск. большая в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, но не имеет порядка по степенной шкале $\dfrac{1}{(x - x_0)^k}$.

§6. Непрерывность и разрывы

Определение 6.1 (непрерывность в точке)
Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 (включая саму точку x_0) и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Самое главное в определении непрерывности – это то, что предел функции совпадает со значением функции. Этот факт можно записать формулой двумя способами:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \to f(x_0) \text{ при } x \to x_0 .$$

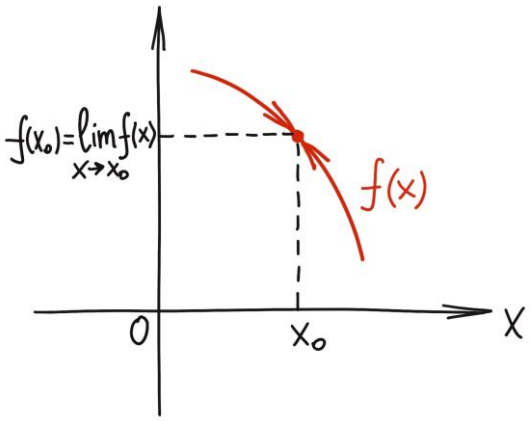


Рис. 5.1

Раскрывая смысл предела, получаем несколько вариантов описания функции, непрерывной в точке x_0.

1. Используем определение предела 2.1 по Гейне:

   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) .$$

   Непрерывность функции означает, что если последовательность x_n сходится к x_0, то последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(x_0)$. Поскольку $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, то непрерывность функции в точке x_0 означает также, что можно поменять местами предельный переход и функцию: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n \to \infty} x_n)$.

2. Используем определение предела 2.2 по Коши с расшифровкой окрестностей:

   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

   Непрерывность функции означает, что значения функции $f(x)$ сколь угодно близки к $f(x_0)$ для всех аргументов x, достаточно близких к x_0.

3. Обозначим $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента в точке x_0,

   $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ – приращение функции в точке x_0.

   Тогда

   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x - x_0 \to 0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0 .$$

   Непрерывность функции означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Лемма 6.2
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда в точке x_0 также непрерывны следующие функции:

$$f(x)+g(x);$$
$$\lambda f(x),\ \lambda \in \mathbb{R};$$
$$f(x)\cdot g(x);$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}, \text{ если } g(x_0)\neq 0.$$

Доказательство

▷ Лемма 6.2 есть прямое следствие леммы 3.2 о свойствах конечных пределов. Например:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)+g(x_0). \qquad \triangleleft$$

Лемма 6.3 (непрерывность композиции непрерывных функций)
Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда композиция $g\big(f(x)\big)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство

▷ Покажем, что $g\big(f(x)\big)\to g\big(f(x_0)\big)$ при $x\to x_0$. Используем сначала непрерывность функции $f(x)$, затем непрерывность функции $g(y)$:

$$x\to x_0 \ \Rightarrow\ \underset{y}{f(x)}\to \underset{y_0}{f(x_0)} \ \Rightarrow\ g(y)=g\big(f(x)\big)\to g(y_0)=g\big(f(x_0)\big). \qquad \triangleleft$$

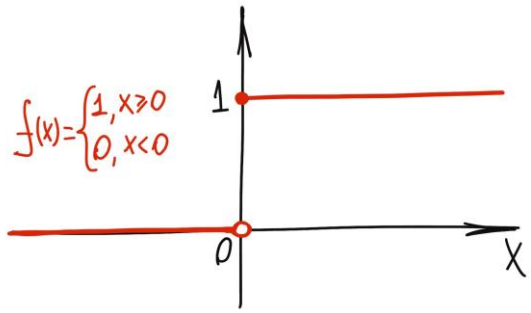
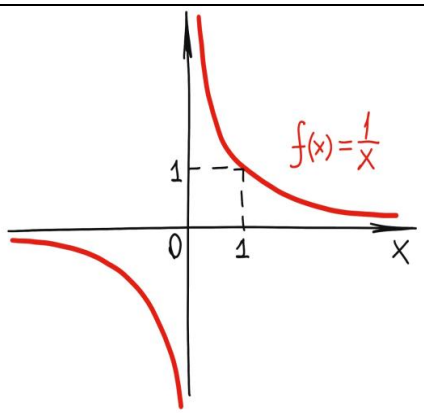
Определение 6.4 (непрерывность на промежутке)
Функция $f(x)$ называется *непрерывной на открытом промежутке* $(a;b)$, $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, если она определена и непрерывна в каждой точке $x_0\in(a;b)$.
Функция $f(x)$ называется *непрерывной на замкнутом промежутке* $[a;b]$, $a,b\in\mathbb{R}$, если она определена на $[a;b]$, непрерывна на $(a;b)$ и

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a)\ (\textit{непрерывна справа} \text{ в точке } a),$$
$$\lim_{x\to b-0}f(x)=f(b)\ (\textit{непрерывна слева} \text{ в точке } b).$$

Аналогичным образом определяется непрерывность функции на промежутках $[a;b)$, $(a;b]$.

Если функция непрерывна на промежутке, то ее график на этом промежутке можно изобразить «не отрывая карандаша от бумаги».

Примеры:

	функция непрерывна на промежутках $[0;1]$, $[0;+\infty)$, $(-\infty;0)$ не является непрерывной на промежутках $(-1;1)$, $[-1;0]$, $(-\infty;+\infty)$, $(-\infty;0]$
	функция непрерывна на промежутках $[1;2]$, $[1;+\infty)$, $(0;1)$, $(0;+\infty)$, $(-\infty;0)$ не является непрерывной на промежутках $(-1;1)$, $[0;1]$, $[0;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$

Теорема 6.5 (Больцано – Коши) [без доказательства, очевидно по рис. А]
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Тогда на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.
В частности, если $f(a)$ и $f(b)$ разного знака, то $\exists x \in (a;b)\colon\ f(x)=0$.

Теорема 6.6 (Вейерштрасса) [без доказательства, очевидно по рис. В]
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Тогда $f(x)$ ограничена и достигает наибольшего и наименьшего значений на $[a;b]$:

$$\exists \max_{x\in[a,b]} f(x),\ \exists \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

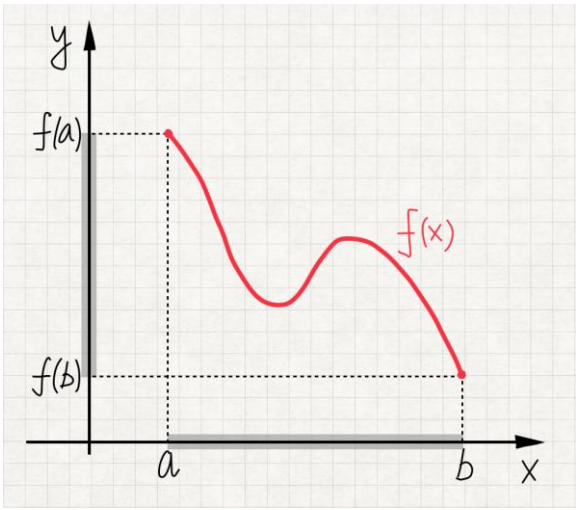


Рис. А

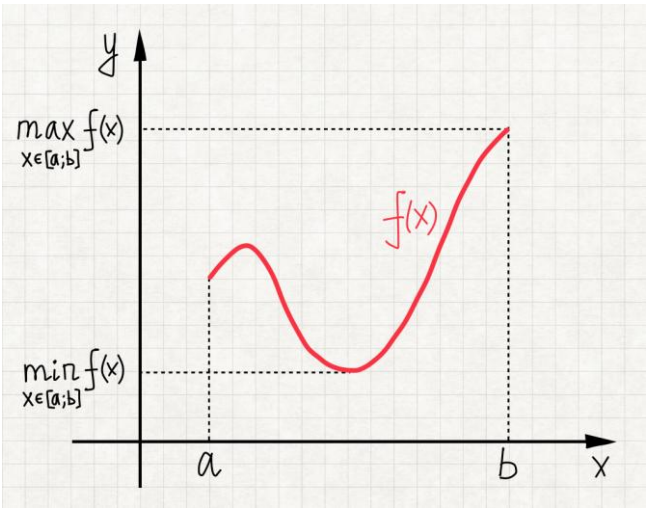


Рис. В

Замечание. Если заменить в теореме 6.6 непрерывность на замкнутом промежутке непрерывностью на открытом промежутке, то утверждение теоремы может оказаться неверным. Например, функция $f(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна на $(0;1)$, но не достигает на этом промежутке ни наибольшего, ни наименьшего значений (см. рис. выше):

$$\max_{x\in(0;1)}\frac{1}{x}=\max(1;+\infty) \text{ не существует;}$$

$$\min_{x\in(0;1)}\frac{1}{x}=\min(1;+\infty) \text{ не существует.}$$

Лемма 6.7 (непрерывность элементарных функций)
Пусть $f(x)$ – элементарная функция. Тогда она непрерывна на каждом промежутке своей области определения.

Идея доказательства:
Напомним определение элементарной функции.
В основе понятия элементарной функции лежит список *основных элементарных функций*:

- постоянные функции (константы) $y=C$, $C\in\mathbb{R}$;
- степенные функции $y=x^k$, $k\in\mathbb{R}$;
- показательные функции $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$;
- логарифмические функции $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$;
- тригонометрические функции:
$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\operatorname{tg}x,\ y=\operatorname{ctg}x;$$
- обратные тригонометрические функции:
$$y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=\operatorname{arctg}x,\ y=\operatorname{arcctg}x.$$

Элементарной функцией называется функция, которую можно задать явно одной формулой $y=f(x)$, где выражение $f(x)$ составлено из основных элементарных функций при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и конечного числа композиций.

Утверждение леммы 6.7 проверяется непосредственно для списка основных элементарных функций. На элементарные функции его распространяют леммы 6.2, 6.3.

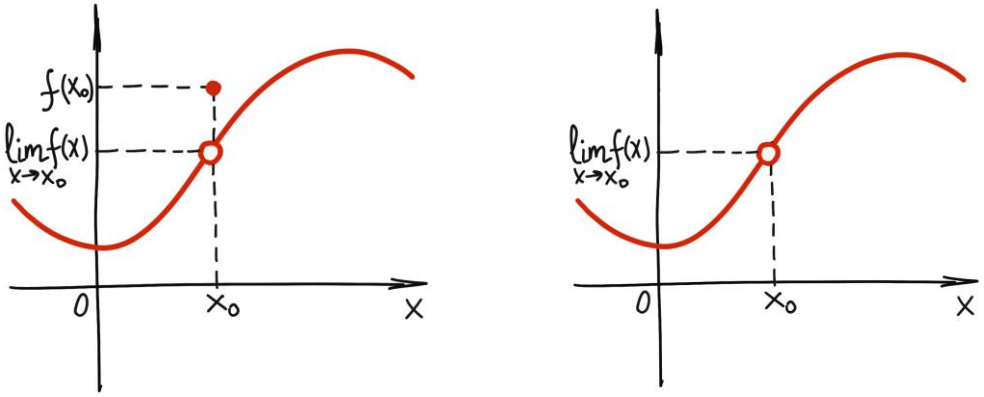
Определение 6.1′ **(разрыв в точке)**
Пусть $x_0\in\mathbb{R}$. Функция $f(x)$ называется *разрывной в точке* x_0, если она определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, но либо не определена в самой точке x_0, либо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

Замечание. Говорить о разрыве можно только в конечной точке x_0 и только если функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности этой точки, т.е. слева и справа от этой точки. В иных случаях говорить о разрывности функции в точке x_0 некорректно. Например, некорректно говорить, что функция $f(x)=\ln x$ имеет разрыв в точке $x_0=0$, так как она не определена слева от этой точки.

Классификация разрывов

Разрывы I рода

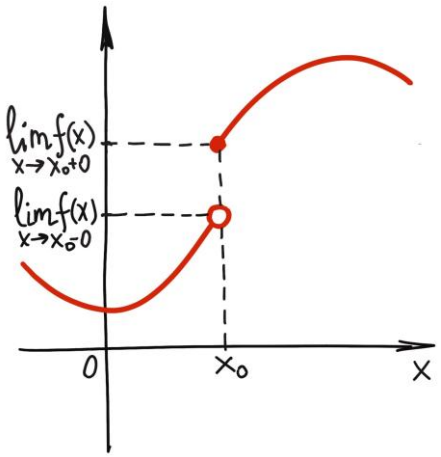
a. *Устранимый разрыв I рода* (выколотая точка): в точке x_0 существует конечный двусторонний предел, но $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ или $f(x)$ не определена в точке x_0.



Такой разрыв называется устранимым, поскольку достаточно исправить функцию $f(x)$ только в одной точке, положив $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, чтобы она стала непрерывной.

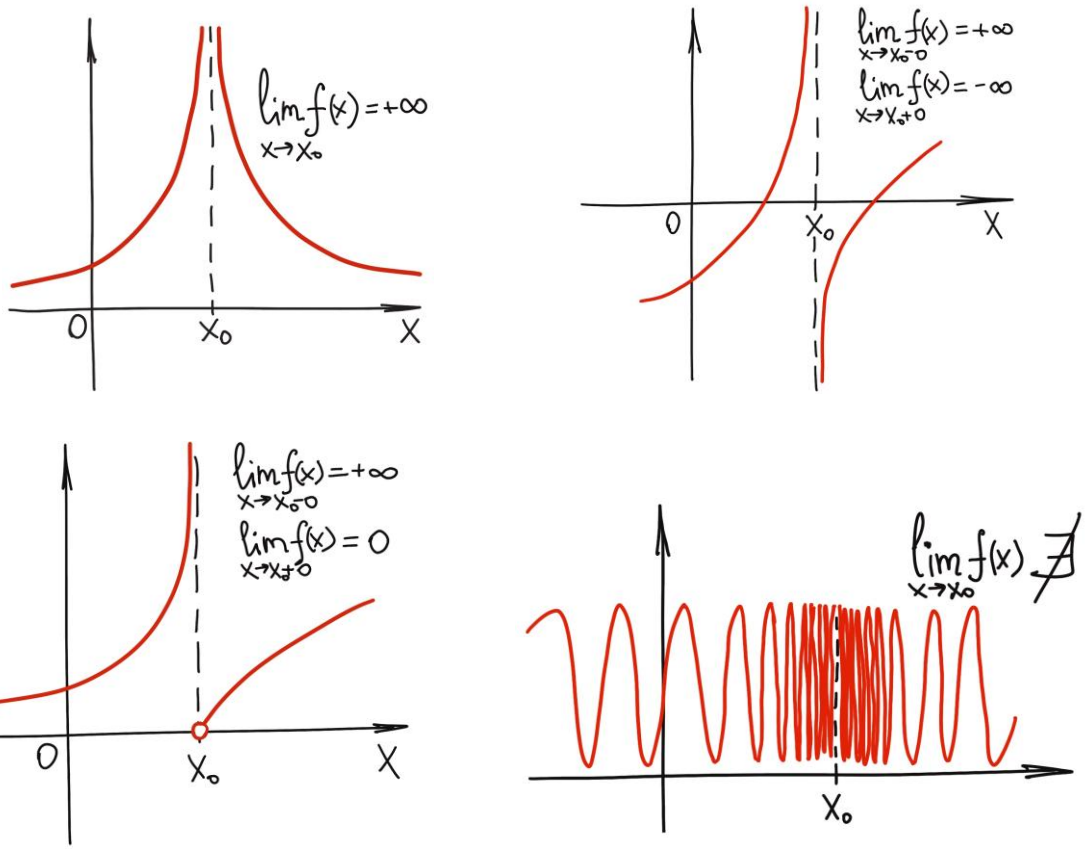
b. *Неустранимый разрыв I рода* (*скачок*): в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы, но $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

(При этом значение функции $f(x)$ в самой точке x_0 несущественно.)



Разрыв II рода (всегда неустранимый): в точке x_0 хотя бы один из односторонних пределов бесконечный или не существует.

(При этом значение функции $f(x)$ в самой точке x_0 несущественно.)



Задача. Указать область определения функции $f(x)$, промежутки непрерывности, точки разрыва и типы разрыва.

а) $f(x) = \ln\dfrac{x^2}{3-x}$

Область определения функции $f(x)$: $\dfrac{x^2}{3-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty;0) \cup (0;3)$.

Поскольку данная функция является элементарной, то она непрерывна на каждом из промежутков своей области определения (лемма 6.7).

Промежутки непрерывности функции $f(x)$: $(-\infty;0)$, $(0;3)$.

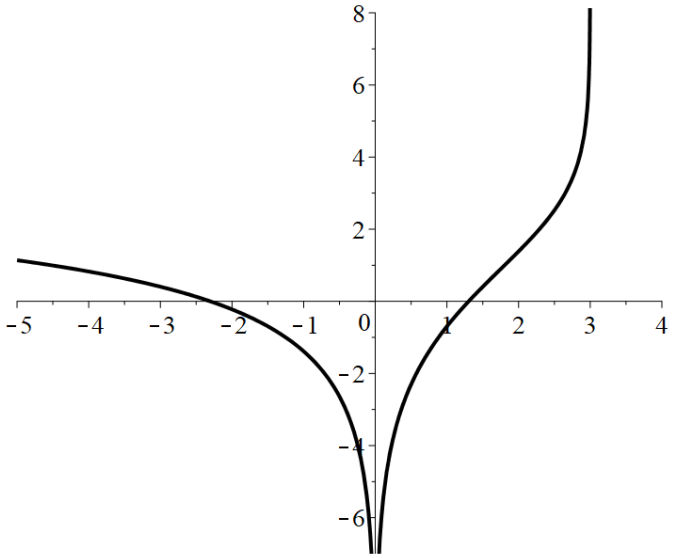
Так как функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки $x=0$ и не определена в самой точке $x=0$, то $x=0$ – точка разрыва (определение 6.1′). Других точек, в которых функция $f(x)$ могла бы иметь разрыв, нет.

Чтобы определить тип разрыва, надо вычислить предел функции в точке $x=0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ \to +0 \\ \to 3}} \ln\frac{x^2}{3-x} = -\infty$$

Точка и тип разрыва функции $f(x)$: $x=0$, разрыв II рода.

Проверим эти результаты по графику функции $f(x)=\ln\dfrac{x^2}{3-x}$, построенному на компьютере:



b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\pi x+1}{x-1},\ x\in(1;+\infty)\\ \arcsin x,\ x\in[-1;1]\\ \operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{1-x^2},\ x\in(-\infty;-1)\end{cases}$

Функция $f(x)$ является кусочно заданной. Введем обозначения для ее отдельных «кусков»:

$$f_1(x)=\frac{\cos\pi x+1}{x-1},$$
$$f_2(x)=\arcsin x,$$
$$f_3(x)=\operatorname{arctg}\frac{x^2}{1-x^2}.$$

Найдем для каждой функции ее область определения и убедимся, что в ней содержится промежуток, с которым функция входит в формулу $f(x)$.

- $f_1(x)$ имеет область определения $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, следовательно, определена и на промежутке $(1;+\infty)$;
- $f_2(x)$ имеет область определения $[-1;1]$;
- $f_3(x)$ имеет область определения $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$, следовательно, определена и на промежутке $(-\infty;-1)$.

Поскольку $(-\infty;1)\cup[-1;1]\cup(1;+\infty)=(-\infty;+\infty)$, то функция $f(x)$ определена всюду.

Область определения функции $f(x)$: $x\in(-\infty;+\infty)$.

Кусочно заданная функция не является элементарной, так как задается не одной, а двумя (и более) формулами. К функции $f(x)$ нельзя применить сразу лемму 6.7. Однако элементарной является каждая из функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, а значит, каждая из них является непрерывной на своем промежутке (лемма 6.7).

Таким образом, кусочно заданная функция $f(x)$ может иметь (а может и не иметь) разрывы только в точках «стыка кусков»: $x=-1$ и $x=1$.

Для выявления разрывов надо вычислить в каждой такой точке предел и значение функции $f(x)$. Поскольку справа и слева от точки «стыка кусков» функция $f(x)$ задана разными формулами, то вычислим сначала односторонние пределы.

Точка $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}\arcsin x=-\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1-0\\ \to 1}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\underset{\to -0}{1-x^2}}=-\frac{\pi}{2};$$

$$f(-1)=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=-1$ (определения 6.1).

Точка $x=1$:

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1+0\\ \to 0}}\frac{\overbrace{\cos\pi x+1}^{\to 0}}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{t\to +0}\frac{1-\cos\pi t}{t}=\lim_{t\to +0}\frac{(\pi t)^2}{2t}=\frac{\pi^2}{2}\lim_{t\to +0} t=0;$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\arcsin x=\frac{\pi}{2};$$

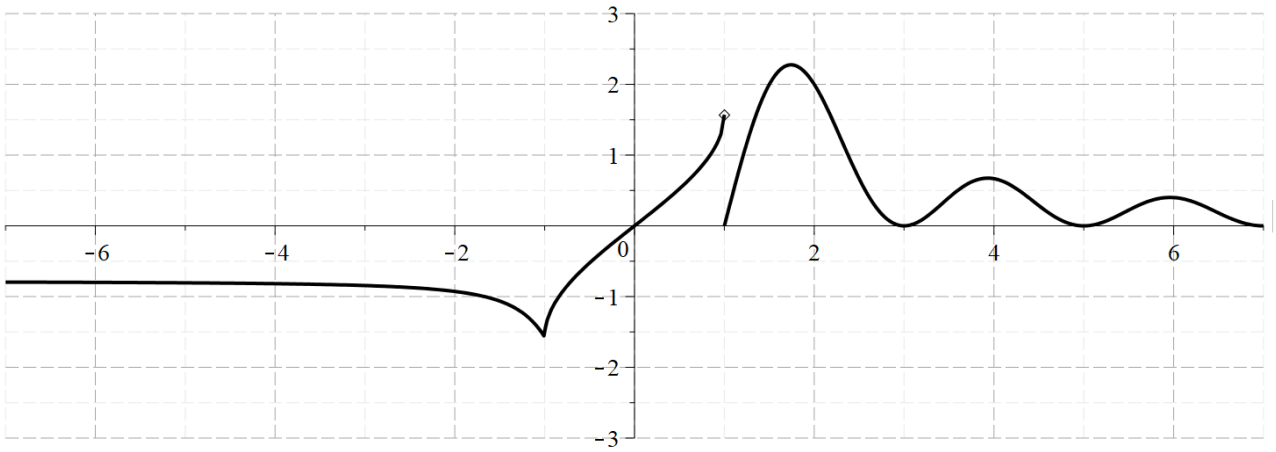
$$f(1)=\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$ (двусторонний предел вообще не существует), то функция $f(x)$ разрывна в точке $x=1$ (определение 6.1′).
Поскольку односторонние пределы в точке $x=1$ конечные, но их значения не совпадают, то в точке $x=1$ функция $f(x)$ имеет неустранимый разрыв I рода (скачок). Причем функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=1$ слева, так как $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=f(1)$ (определение 6.4).

Промежутки непрерывности функции $f(x)$: $(-\infty;1]$, $(1;+\infty)$.

Точка и тип разрыва функции $f(x)$: $x=1$, неустранимый разрыв I рода (скачок).

Проверим эти результаты по графику функции $f(x)$, построенному на компьютере:


3
2
1
0
−1
−2
−3
−6
−4
−2
2
4
6