Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Т.А. Костарева

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Краткий курс

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДИНАМИКА

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОЛЕБАНИЙ

СТАТИКА

Векторная алгебра сил

Предмет механики.

Классическая или Ньютонова механика является разделом физики, в котором изучаются основные законы механического взаимодействия и движения твердых тел.

История развития механики насчитывает тысячелетия. Практически человек стал интересоваться механикой и интуитивно использовать ее законы, когда старался точнее бросить камень на охоте.

Курс механики принято делить на три основные части: СТАТИКА, КИНЕМАТИКА и ДИНАМИКА. В СТАТИКЕ изучаются условия покоя тел, КИНЕМАТИКА является языком описания их движения, а в ДИНАМИКЕ, собственно, и являющейся механикой, выводятся законы движения тел под действием сил.

Модели механики

Как любая точная наука механика рассматривает не реальные, бесконечно сложные физические объекты, а их модели, отражающие лишь главные в данных условиях свойства.

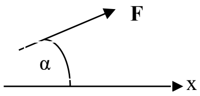
Объектом классической механики является система взаимодействующих материальных точек, называемая ***механической системой***.

Частным случаем механической системы, является ***твердое тело*** - модель реального тела, представляющая собой систему материальных точек, расстояние между которыми не изменяется со временем.

Модуль, проекция и составляющая силы.

Все тела находятся во взаимодействии. За меру воздействия одной точки на другую принят вектор ***F*** который называют ***силой.***

При решении задач оперируют числами, а не векторами. Поэтому пользуются скалярным представлением вектора, например, тремя его проекциями на декартовы оси x, y, z. Они образуют вектор-столбец.



$$F = \begin{pmatrix} Fx \\ Fy \\ Fz \end{pmatrix}$$

Напомним, что проекцией вектора на ось х называется скалярная величина, равная

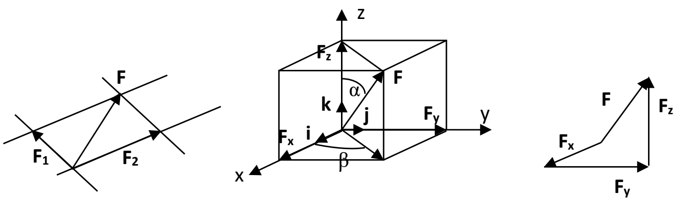
$$F_x = FCos\alpha$$

Знак проекции определяется знаком косинуса угла между направлениями силы и оси. Если угол острый, то проекция положительна, если тупой- то она отрицательна. Проще говоря, проекция положительна, если направление силы совпадает с точностью до π/2 с направлением оси.

Важно помнить, что ***проекция силы на перпендикулярную ей ось РАВНА НУЛЮ***.

Модуль силы измеряется в ньютонах Н (Международная система СИ)

Известно, что в математике векторы складываются по правилу параллелограмма (Рис 1 b).



a) b) c) d)

Рис.1

Из правила параллелограмма вытекает правило разложения вектора на составляющие вдоль двух направлений. Для этого через концы вектора ***F*** проводятся линии, параллельные заданным направлениям. ***Составляющей*** вектора называется любое из слагаемых в векторной сумме

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \cdots + \boldsymbol{F_n}$$

На Рис.1а составляющие вектора ***F*** образуют ***векторный многоугольник***, в котором начало последующей силы совпадает с концом предыдущей. Вектор ***F*** замыкает векторный многоугольник.

Представим вектор силы **F** его проекциями на декартовы оси с ортами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:

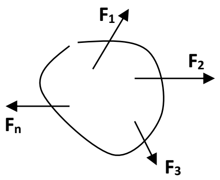
$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} \quad (3)$$

Проекции определяют модуль вектора по теореме Пифагора:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$$

Главный вектор системы сил.

Системой сил $\{\boldsymbol{F}\} = \{\boldsymbol{F_1}\ \boldsymbol{F_2} \dots \boldsymbol{F_n}\ \}$ называется множество сил, приложенных к



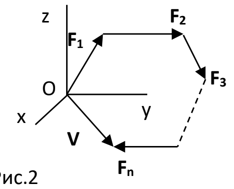


Рис.2

точкам механической системы. ***Главным вектором*** системы сил называется векторная сумма всех сил системы:

$$\boldsymbol{V} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F_k} \qquad (1)$$

Главный вектор **V** можно найти, построив в произвольном центре О векторный многоугольник (рис.2).

Для пространственной системы сил построить многоугольник практически трудно. Проще найти главный вектор аналитически. Проектируя слагаемые формулу (1) на оси координат, определим проекции главного вектора, его модуль и направляющие косинусы:

$$V_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \qquad V_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}; \qquad V_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}; \quad Cos(\boldsymbol{V}; x) = \frac{V_x}{V}; \; Cos(\boldsymbol{V}; y) = \frac{V_y}{V}; \; Cos(\boldsymbol{V}; z) = \frac{V_z}{V}$$

Момент силы относительно точки.

Понятие момента силы возникает при рассмотрении твердого тела. Опыт показывает, что, если зафиксировать некоторый центр О в теле, то сила **F,** приложенная в другой точке А тела может повернуть тело вокруг О. Эту способность силы поворачивать тело и характеризует ее момент относительно О.

Обозначим через **r** радиус-вектор точки А приложения силы относительно центра О. ***Моментом силы F относительно центра О*** называется вектор $\boldsymbol{m_o}(\boldsymbol{F})$ (Рис.3), равный векторному произведению радиуса-вектора точки приложения силы на вектор силы

$$\boldsymbol{m_o}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

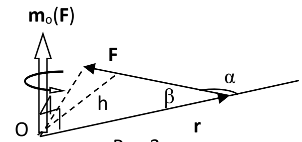


Рис.3

Мы будем рассматривать только право ориентированное пространство, то есть направление векторного произведения будем определять по правилу ***правого винта:*** с конца $\boldsymbol{m_o}$ видно, что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки.

Модуль момента равен произведению модуля силы на плечо h -длину перпендикуляра, опущенного из центра О на линию действия силы.

$$m_o(F) = FrSin\alpha = FrSin\beta = Fh$$

Видим, что момент силы тем меньше, чем меньше ее плечо, и он обращается в ноль для любого центра на линии действия силы. Этот результат является ожидаемым, поскольку опыт показывает, что такой силой повернуть покоящееся тело вокруг опоры О невозможно.

Матричное вычисление векторного произведения. Присоединенная матрица.

Известно, что в координатах x, y, z с ортами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ векторное произведение

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

векторов

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

можно представить в виде определителя матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\boldsymbol{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\boldsymbol{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\boldsymbol{k}$$

Или

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y; \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z; \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

Векторам **a, b** и **c** соответствуют столбцы их проекций.

$$a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что столбец c можно получить, умножив кососимметричную матрицу A, состоящую из проекций вектора **a**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$$

на столбец b. Матрицу A называют ***присоединенной матрицей вектора a***

Приходим к выводу, что векторной записи произведения

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

соответствует матричная формула

$$c = Ab \qquad (2)$$

Верно и обратное. Выражению вида (2), где A - кососимметричная матрица, соответствует векторное произведение $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Теоремы о моменте.

Теорема 1. О зависимости момента от центра.

Найдем связь между моментами силы **F** относительно центров А и В. Из Рис.4 видно, что

$$\boldsymbol{r_A} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{r_B}; \quad \boldsymbol{m_A}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r_A} \times \boldsymbol{F} = (\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{r_B}) \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r_B} \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{F}$$

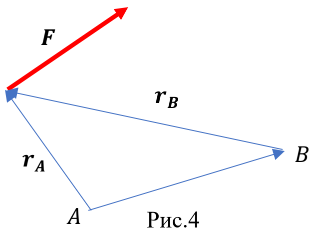


Рис.4

Таким образом

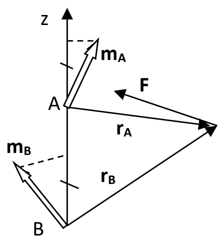
$$\boldsymbol{m_A}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{m_B}(\boldsymbol{F}) + \boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{F} \quad (3)$$

Формула (3) показывает, что:

а) в общем случае момент силы зависит от центра

б) перенос центра параллельно линии действия силы не изменяет момента (в этом случае второе слагаемое в (3) обращается в ноль.

Теорема 2. О проекциях моментов.



Проектируя (2) на ось z, проходящую через А и В, находим

$$\text{пр}_z\boldsymbol{m_A}(\boldsymbol{F}) = \text{пр}_z\boldsymbol{m_B}(\boldsymbol{F}) = m_z(\boldsymbol{F}) \quad (4)$$

поскольку произведение **AB** x **F** перпендикулярно АВ и его проекция на z равна нулю. Таким образом, приходим к теореме: ***Проекции моментов силы относительно всех точек одной оси на эту ось равны между собой***.

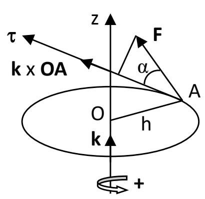
Момент силы относительно оси

Теорема о проекциях (4) позволяет ввести в рассмотрение новую характеристику силы по отношению к оси.

Моментом силы F относительно оси z называется алгебраическая величина, равная проекции на эту ось момента силы относительно произвольной точки указанной оси.

$$m_z(\boldsymbol{F}) = \text{пр}_z\boldsymbol{m_A}(\boldsymbol{F}) \qquad (A \in z)$$

Рассмотрим способ вычисления и свойства момента относительно оси. Пользуясь произволом выбора центра моментов на оси, выберем в качестве центра точку О- проекцию



точки А приложения силы на ось z. Обозначив через $\boldsymbol{k}$ орт оси z, и применив круговую перестановку в смешанном произведении, запишем

$$m_z(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{m}_o(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{OA}) \cdot \boldsymbol{F} = hFCos\alpha \qquad (5)$$

Здесь учтено, что произведение $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{OA}$ направленно вдоль τ по правилу правого винта. Его модуль равен расстоянию $\mathrm{OA} = h$ от точки приложения сил до оси.

Формула (5) показывает, что:

1. Момент силы относительно оси дает только составляющая силы, направленная по касательной τ к окружности радиуса h.
2. Знак момента определяется знаком Cosα.

Из (5) вытекает следующее правило знаков:

Момент силы относительно оси положителен, если с конца оси видно, что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки.

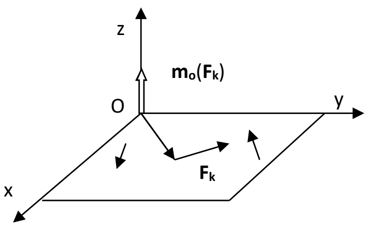
Из формулы (5) понимаем, что момент силы относительно оси равен нулю в случае, если сила и ось лежат в одной плоскости ($\alpha = \pi/2$). Это происходит, когда

1. Сила параллельна оси
2. Линия действия силы пересекает ось

Вы это ощущаете, поднимая воротом ведро из колодца, и поэтому стараетесь приложить силу руки так, чтобы создать большее плечо.

Алгебраический момент силы относительно центра для плоской системы сил.

Система сил, расположенных в одной плоскости, называется ***плоской***. Совместим плоскость x, y с плоскостью действия сил. В этом случае силы создают момент только относительно оси z, перпендикулярной плоскости действия сил.



Совмещая плоскость сил с плоскостью листа, читатель видит направленную к нему ось z как точку O и называет момент относительно оси z ***алгебраическим моментом силы относительно точки O***

$$mo(F) \equiv mz(F) = +Fh$$

Правило знаков: Момент положителен, если видно, что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки.

Главный момент системы сил. Зависимость главного момента от центра.

Главным моментом системы сил $\{\boldsymbol{F}\}$ относительно центра A называется вектор $\boldsymbol{M_A}$, равный векторной сумме моментов всех сил системы относительно этого центра.

$$\boldsymbol{M_A} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{m_A}(\boldsymbol{F_k})$$

Аналитически главный момент находят по его проекциям на декартовы оси

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_x(F_k)\,; \qquad M_y = \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k)\,; \qquad M_z = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k)$$

которые логично назвать ***главными моментами системы сил относительно осей $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$.*** По ним легко найти модуль и направление главного момента:

$$M_A = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}; \quad Cos(\boldsymbol{M_A}; x) = \frac{M_x}{M_A}; \; Cos(\boldsymbol{M_A}; y) = \frac{M_y}{M_A}; \; Cos(\boldsymbol{M_A}; z) = \frac{M_z}{M_A}$$

Найдем зависимость главного момента от центра. Суммируя полученную ранее зависимость момента одной силы от центра (10) по всем силам системы, получим:

$$\sum \boldsymbol{m_A}(\boldsymbol{F}) = \sum \boldsymbol{m_B}(\boldsymbol{F}) + \boldsymbol{AB} \times \sum \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{M_B} + \boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{V}$$

Здесь учтено определение главного вектора

$$\boldsymbol{V} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F_k}$$

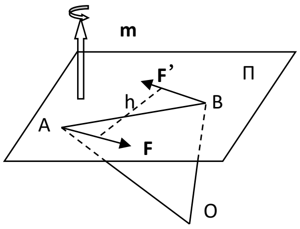
Видим, что в отличие от момента одной силы, главный момент системы сил может не зависеть от центра в случае, если главный вектор системы окажется равным нулю.

$$\boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{M_B} = \boldsymbol{M} \quad \text{если} \quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{0} \qquad (6)$$

Вращательная система сил. Пара сил.

Назовем систему сил (6) ***вращательной системой.*** Название можно объяснить тем, что такая система придает вращение свободному покоящемуся телу, оставляя его центр тяжести в покое.

Формула (6) показывает, что главный момент вращательной системы не зависит от центра.



Простейшей вращательной системой является ***пара*** сил: ***система двух равных по модулю противоположно направленных сил, не лежащих на одной прямой***.

Расстояние h между линиями действия сил пары называется ***плечом пары***. Главный момент пары не зависит от центра O и называется ***моментом пары $\boldsymbol{m}$***. Он может быть найден как момент одной из сил пары относительно точки приложения второй силы.

$$\boldsymbol{M_O}\{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F'}\} = \boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{m}_B(\boldsymbol{F'}) = \boldsymbol{m}$$

Момент пары перпендикулярен плоскости пары и направлен в сторону, откуда видно, что пара стремится повернуть тело против часовой стрелки.

Необходимые и достаточные условия сохранения покоя

Материальная точка

Они вытекают из второго закона Ньютона

$$m\boldsymbol{W} = \sum \boldsymbol{F_j}$$

Покоящаяся точка сохранит покой, если ее ускорение равно нулю, то есть если

$$\sum \boldsymbol{F_j} = \boldsymbol{0} \qquad (7)$$

Таким образом, в покое остается не только изолированная точка, но и точка под действием системы сил, сумма которых равна нулю.

Материальная система

Рассмотрим систему материальных точек $\{m_1, m_2, . m_k ... m_n\}$. Обозначим через $\mathbf{F}_k^e$ равнодействующую внешних сил, приложенных к точке тела с номером к, а через $\mathbf{F}_k^i$- равнодействующую внутренних сил этой точки. Из (7) вытекает, что условия

$$\boldsymbol{F_k^e} + \boldsymbol{F_k^i} = \boldsymbol{0} \qquad (\boldsymbol{k} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2} ... \boldsymbol{n}) \qquad (8)$$

являются ***необходимыми и достаточными условиями*** сохранения покоя произвольной дискретной механической системы.

Необходимые условиям равновесия внешних сил для сохранения покоя системы.

Любая часть или комбинация условий (8) числом меньше n является необходимыми, но не достаточными условиями сохранения покоя.

По 3му закон Ньютона внутренние силы являются парными, значит их главный вектор и главный момент относительно любой точки равны нулю.

$$\boldsymbol{V^i} = \sum \boldsymbol{F_k^i} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{M_o^i} = \sum \boldsymbol{m_o}\left(\boldsymbol{F_k^i}\right) = \boldsymbol{0}$$

Суммируя (8) по всем точкам тела находим

$$\boldsymbol{V^e} = \boldsymbol{0}$$

Умножив (8) слева на радиус-векторы точек $\mathbf{r}_k$, после суммирования получим

$$\boldsymbol{M_O^e} = \boldsymbol{0}$$

Эти два условия являются **необходимые условиям равновесия внешних сил для сохранения покоя системы.** В том числе и твердого тела.

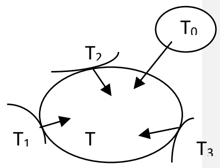
Твердое тела

Абсолютно твердое тело — это система материальных точек, расстояния между которыми неизменны во времени. Такая модель значительно упрощает изучение покоя и движения тела. Она практически важна, поскольку деформации большинства деталей машин малы по сравнению с размерами деталей.

Логично предположить, что внутренние силы не влияют на состояние твердого тела, поскольку они способны только деформировать тело, что невозможно по определению.

Нагрузка и реакции определимых связей. Прямая задача статики

Рассмотрим тело Т, находящееся в покое под действием удаленных тел (***нагрузки)***, например, T_0 (дальнодействие), и неподвижных тел T_1, T_2, T_3, находящихся с ним в контакте, и называемых ***связями***. Пусть связи ***достаточные***, то есть тело остается в покое при любой нагрузке.



Неизвестные силы и пары сил (моменты), с которыми связи действуют на тело, называются ***реакциями связи***.

Добавлено примечание ([AK1]):

Прямой задачей статики является определение реакций связей по заданной нагрузке. Поскольку тело остается в покое при любой нагрузке, то с необходимостью выполнены условия равновесия внешних сил:

$$\boldsymbol{V^e} = \boldsymbol{V^R} + \boldsymbol{V^a} = \boldsymbol{0}; \qquad \boldsymbol{M_o^e} = \boldsymbol{M_o^R} + \boldsymbol{M_o^a} = \boldsymbol{0}$$

Откуда

$$\boldsymbol{V^R} = -\boldsymbol{V^a}; \qquad \boldsymbol{M_o^R} = -\boldsymbol{M_o^a} \qquad (9)$$

где индексом R обозначены искомые реакции связей, а индексом a – нагрузка.

В проекциях на оси x, y, z два векторных условия (9) дают шесть алгебраических уравнений для реакций связей, которые можно представить в матричном виде

$$Ax = y$$

Здесь A - матрица системы, зависящая только от устройства связей, x- столбец искомых реакций связей, y – столбец заданной нагрузки.

Как известно, алгебраическая система имеет единственное решение только если матрица А - квадратная (6 х 6), т.е. уравнения имеют **шесть** неизвестных и **определитель** матрицы **отличен от нуля.**

$$|A| \neq 0 \qquad (10)$$

Связи с такой матрицей А назовем статически ***определимыми*** (или коротко определимыми) потому, что реакции только таких связей могут быть определены из уравнений статики.

Заметим, что условие (10) обеспечивает и тривиальность решения однородной системы

$$Ax = 0$$

при отсутствии нагрузки. Это значит, что реакции определимых связей исчезают при снятии нагрузки. Иначе говоря, если

$$\boldsymbol{V^R = 0} \qquad \boldsymbol{M_o^R = 0}$$

то все реакции определимых связей равны нулю.

Теорема: Условия $\boldsymbol{V^e = 0}$; $\boldsymbol{M_o^e = 0}$ для нагрузки являются необходимыми ***и достаточными*** для сохранения покоя твердого тела.

Рассмотрим ненагруженное свободное покоящееся твердое тело. Свободное тело – это тело, движение которого не ограничено связями. Приложим к телу нагрузку $\{\boldsymbol{F}\}$, удовлетворяющую условиям

$$\boldsymbol{V}\{\boldsymbol{F}\} = \boldsymbol{0}; \qquad \boldsymbol{Mo}\{\boldsymbol{F}\} = \boldsymbol{0} \qquad (11)$$

Докажем, что тело останется в покое.

Предположим противное, т.е. что после приложения нагрузки $\{\boldsymbol{F}\}$, тело все-таки начнет двигаться. Чтобы остановить движение, наложим на тело определимые связи. Тогда возникнут реакции связей $\{\boldsymbol{R}\}$, и покой будет обеспечен. Значит, объединенная система сил нагрузки $\{\boldsymbol{F}\}$ и реакций связей $\{\boldsymbol{R}\}$ будет уравновешенной и с необходимостью будут выполнены условия:

$$\boldsymbol{V}\{\boldsymbol{F}\} + \boldsymbol{V}^R = \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{M}o\{\boldsymbol{F}\} + \boldsymbol{M}_o^R = \boldsymbol{0}.$$

Но ввиду (13) главный вектор и момент реакций окажутся равными нулю

$$\boldsymbol{V^R = 0}; \qquad \boldsymbol{M_o^R = 0}$$

Поскольку связи статически определимы, то отсюда вытекает, что все реакции равны нулю. Таким образом, связи не нужны, и тело остается в покое после приложения системы $\{\boldsymbol{F}\}$. Значит условия (11) являются ***достаточными*** для равновесия системы сил $\{\boldsymbol{F}\}$ и сохранения покоя твердого тела. Теорема доказана.

Скалярные условия равновесия частных систем сил.

а) ***Произвольная пространственная система сил***

Хотя соотношения механики имеют векторный характер, все вычисления обычно ведутся в скалярной форме. Переход к скалярной форме осуществляется проектированием векторных соотношений на оси координат. Векторные условия равновесия $\boldsymbol{V} = 0, \boldsymbol{M_o} = 0$ в проекциях на декартовы оси координат дают шесть скалярных условий:

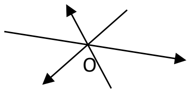
$$V_x = \sum F_{kx} = 0; \qquad M_x = \sum m_x(F_k) = 0;$$

$$V_y = \sum F_{ky} = 0; \qquad M_y = \sum m_y(F_k) = 0;$$

$$V_z = \sum F_{kz} = 0; \qquad M_z = \sum m_z(F_k) = 0;$$

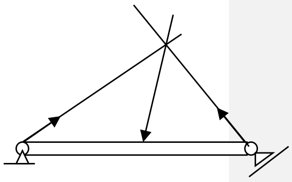
б) Пространственная система сходящихся сил.

Сходящейся называется система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке. Главный момент такой системы относительно точки пересечения сил О равен нулю $\boldsymbol{M_o} = 0$.

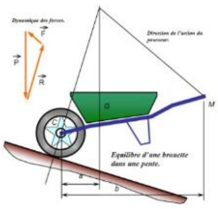


Поэтому уравнения моментов в (14) тождественно удовлетворены и остается три условия в проекциях:

$$V_x = 0; \quad V_y = 0; \quad V_z = 0;$$



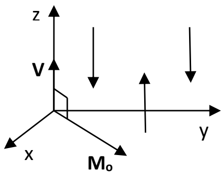
Теорема о 3х силах: Если тело находится в покое под действием 3х сил, линии действия двух из которых пересекаются, то система сходящаяся.



Действительно, главный момент системы относительно точки пересечения двух сил равен моменту третьей силы и нулю. Значит и третья сила проходит через указанную точку.

Теорема позволяет графически найти треугольник сил, приложенных к тачке.

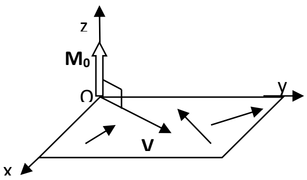
в) Пространственная система параллельных сил



Направим ось z параллельно силам. Тогда главный вектор $\boldsymbol{V}$ будет параллелен z, а главный момент $\boldsymbol{Mo}$, будет принадлежать плоскости x y. То есть $\boldsymbol{V} \perp \boldsymbol{Mo}$. Условия равенства нулю проекций на оси x, y и моментов относительно оси z тождественно удовлетворены, и остается 3 условия равновесия:

$$V_z = \sum F_{kz} = 0; \quad M_x = \sum m_x(F_k) = 0; \quad M_y = \sum m_y(F_k) = 0$$

г) Плоская система сил. В произвольной точке O плоскости сил построим систему координат xOy так, чтобы плоскость xy совпала с плоскостью сил. Главный вектор системы $\boldsymbol{V}$ лежит в плоскости xOy, а главный момент $\boldsymbol{Mo}$ ей перпендикулярен. Следовательно, для равновесия системы достаточно потребовать



$$V_x = 0; \quad V_y = 0; \quad M_O = 0;$$

Можно показать, что справедливы еще две формы уравнений равновесия для плоской системы сил:

II) $V_x = 0; \quad M_A = 0; \; M_B = 0 \quad (AB \nvdash x)$ не перпендикулярно

III) $M_A = 0; \; M_B = 0; \quad M_C = 0$ (ABC- не на одной прямой)

Эквивалентные преобразования сил, приложенных к твердому телу

Как известно, силы, приложенные к одной точке, можно заменять одной ***равнодействующей*** силой, равной сумме сил.

$$\boldsymbol{R} \sim \{\boldsymbol{F}\} \qquad\qquad \boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F_k}$$

Для произвольной механической системы возможны только точечные преобразования сил- их замена равнодействующей в точке.

Для твердого тела класс эквивалентных преобразований сил гораздо шире. Мы показали, что тело останется в покое под действием любой уравновешенной нагрузки. Таким образом, все уравновешенные нагрузки статически ***эквивалентны*** между собой и эквивалентны нулю (пустой системе).

Теорема о статической эквивалентности двух систем сил.

Статически ***эквивалентными*** системами сил $\{\boldsymbol{F}\} \sim \{\boldsymbol{Q}\}$ назовем системы $\{\boldsymbol{F}\}$; $\{\boldsymbol{Q}\}$, вызывающие одинаковые реакции определимых связей

Реакции определимых связей однозначно определяются из уравнений равновесия. Поскольку в правых частях этих уравнения стоят проекции главного вектора и главного момента нагрузки, то очевидна справедливость ***теоремы об эквивалентности нагрузок:***

Необходимым и достаточным условием статической эквивалентности нагрузок {F} и {Q} является равенство их главных векторов и главных моментов.

$$\{\boldsymbol{F}\} \sim \{\boldsymbol{Q}\} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{V}\{\boldsymbol{F}\} = \boldsymbol{V}\{\boldsymbol{Q}\}; \;\; \boldsymbol{M_o}\{\boldsymbol{F}\} = \boldsymbol{M_o}\{\boldsymbol{Q}\}$$

Эквивалентные преобразования силы и пары сил в твердом теле.

Сила.

По теореме об эквивалентности две эквивалентные силы должны быть векторно равны и давать одинаковый момент относительно произвольного центра. Очевидно, что для этого они должны иметь общую линию действия. ***Таким образом, силу в теле можно переносить только вдоль ее линии действия.***

Пара сил

Главный вектор пары равен нулю, поэтому ее главный момент не зависит от центра. Таким образом, эквивалентны все пары с векторно-одинаковыми моментами. Значит, реакции связей не изменятся, если пару преобразовать, ***не изменяя вектора ее момента.*** Таким образом, можно:

1. изменять силу и плечо пары, не изменяя их произведения;
2. поворачивать пару в ее плоскости и
3. переносить пару в параллельную плоскость.

Условия существования равнодействующей. Теорема Вариньона

Если существует одна сила $\boldsymbol{R}$, эквивалентная системе сил $\{\boldsymbol{F}\}$, то $\boldsymbol{R}$ называется ***равнодействующей*** системы $\{\boldsymbol{F}\}$.

$$\boldsymbol{R} \sim \{\boldsymbol{F}\}.$$

Было показано, что силы, приложенные к точке, всегда имеют равнодействующую. Для твердого тела это не так. Предположим, что система $\{\mathbf{F}\}$, приложенная к твердому телу, имеет равнодействующую $\mathbf{R}$. Тогда по теореме об эквивалентности она должна быть равна главному вектору системы

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}\{\boldsymbol{F}\}.$$

Поэтому первым условием существования равнодействующей является существование главного вектора системы:

$$\boldsymbol{V} \neq \mathbf{0}.$$

Отсюда ясно, что пара не имеет равнодействующей.

Кроме того, по теореме об эквивалентности:

Момент равнодействующей относительно произвольной точки равен главному моменту системы сил относительно той же точки.

Это свойство равнодействующей называется ***теоремой Вариньона.***

Найдем из теоремы Вариньона второе условие существования равнодействующей. Поскольку момент равнодействующей (а значит и главный момент системы) перпендикулярен самой равнодействующей (главному вектору) то вторым условием существования равнодействующей будет перпендикулярность главного момента $\boldsymbol{Mo}$ главному вектору $\boldsymbol{V}$ системы.

$$\boldsymbol{M_o} \perp \boldsymbol{V}$$

Итак, построив в точке O главный вектор и главный момент, можно утверждать, что система сил имеет равнодействующую, если

$$\boldsymbol{V} \neq \mathbf{0}; \qquad \boldsymbol{M_o} \cdot \boldsymbol{V} = \mathbf{0} \qquad (M_x V_x + M_y V_y + M_z V_z = 0)$$

Отметим, что равнодействующая имеет практический смысл, когда она реализуема, то есть ее можно приложить к телу. Это так, если линия действия равнодействующей как минимум пересекает тело. Равнодействующую, например, сил тяжести бублика, расположенного в горизонтальной плоскости, легко нарисовать, но трудно приложить к бублику.

Как было показано, главный момент плоской системы сил, как и системы параллельных сил перпендикулярен главному вектору. Значит, такие системы имеют равнодействующую, если $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$. Пара сил не имеет равнодействующей. Однако минимальное изменение одной из сил пары приведет к малой по величине и нереализуемой равнодействующей, поскольку она будет удалена от тела.

Очевидной и реализуемой равнодействующей системы реакций связей (даже избыточных) для тела, нагруженного одной силой **F**, является сила -**F** на той же линии.

Теорема Пуансо.

Произвольная система сил {F}, приложенных к твердому телу, эквивалентна «винту» {Po;m}, состоящему из: одной силы $\boldsymbol{P_o} = \boldsymbol{V}\{\boldsymbol{F}\}$, приложенной в произвольной точке O тела, и пары {Q, Q'} с моментом $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M_o}\{\boldsymbol{F}\}$

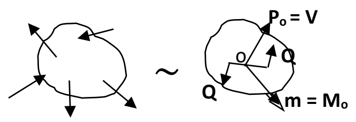


Рис.2

$$\{\boldsymbol{F}\} \sim (\boldsymbol{P_o}; \boldsymbol{m})$$

$$\boldsymbol{P_o} = \boldsymbol{V}\{\boldsymbol{F}\}; \quad \boldsymbol{m} = \boldsymbol{M_o}\{\boldsymbol{F}\}$$

Для доказательства теоремы вычислим главный вектор и главный момент «винта»:

$$\boldsymbol{V}\{\boldsymbol{P_o}; \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q'}\} = \boldsymbol{P_o} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q'} = \boldsymbol{P_o} = \boldsymbol{V}\{\boldsymbol{F}\} \qquad (\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q'} = \boldsymbol{0})$$

$$\boldsymbol{M_o}\{\boldsymbol{P_o}; \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q'}\} = \boldsymbol{m_o}(\boldsymbol{P_o}) + \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} = \boldsymbol{M_o}\{\boldsymbol{F}\} \qquad (\boldsymbol{m_o}(\boldsymbol{Po}) = \boldsymbol{0})$$

Видим, что они соответственно равны главному вектору и главному моменту исходной системы $\{\mathbf{F}\}$, значит, теорема доказана. Операция эквивалентного преобразования системы сил к силе и паре называется ***приведением системы сил к точке*** (приложения силы).

Теорема Пуансо справедлива только для твердого тела. Перемещая, например, силу вдоль вертикально подвешенной резинки, мы не изменяем реакцию в точке закрепления, но изменяем длину самой резинки. Чем ниже сила, тем длиннее станет резинка.

КИНЕМАТИКА

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Системы отсчета

Кинематика - раздел механики, в котором изучаются способы описания движения точки и твердого тела. Движение изучается во времени и по отношению к определенной системе отсчета- "жесткому" трехмерному ориентированному пространству, с которым связан наблюдатель, умеющий измерять в нем расстояния и время.

Время t считается скаляром, монотонно возрастающим с момента $t = 0$, называемого ***начальным моментом***. В классической механике время считается одинаковым во всех системах отсчета.

Способы задания движения точки

Задать движение, значит указать способ определения положения точки в пространстве в любой момент времени t. Рассматривается три способа задания движения точки: ***векторный, координатный и естественный***.

Векторный способ.

Этот способ является основным, поскольку большинство характеристик движения

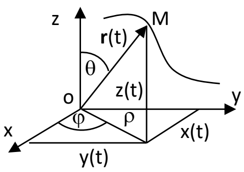


Рис.6

являются векторными величинами. Положение изучаемой точки М по отношению к наблюдателю О в данный момент времени t задается радиусом вектором точки (Рис.6).

$$\boldsymbol{r}(t)$$

Вектор - функция $\boldsymbol{r}(t)$ скалярного аргумента t является векторным законом движения точки М. С течением времени направление и модуль радиуса - вектора $\boldsymbol{r}(t)$ изменяются, и точка М описывает кривую, называемую ***траекторией точки.***

Годографом вектор - функции называется кривая, которую описывает конец вектора при изменении скалярного аргумента, если начало вектора зафиксировано. Очевидно, что годографом радиуса - вектора точки является ее траектория.

Координатный способ

Если с системой отсчета связать систему координат, например, декартову x, y, z, то радиус - вектор $\boldsymbol{r}(t)$ можно задать его проекциями, как функциями времени

$$x(t), y(t), z(t)$$

которые являются законом движения точки М в декартовых координатах.

Естественный способ

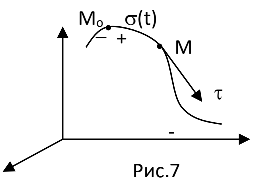


Рис.7

Этот способ применяется, когда заранее известна траектория движения точки (Рис.7). Рельсы, например, определяют траекторию трамвая, поэтому здесь уместен естественный способ.

Чтобы в произвольный момент времени указать положение точки на траектории, достаточно выбрать на ней начало M_o, направление положительного отсчета (+) и задать функцию ***криволинейной координаты*** $\sigma(t)$ – длину дуги M_oM с соответствующим знаком.

Функция

$$\sigma\ (\mathrm{t})$$

называется ***естественным законом движения*** точки.

Производная вектор - функции по времени.

Рассмотрим вектор – функцию времени $\boldsymbol{a}(t)$

Производной вектор - функции $\boldsymbol{a}(t)$ ***по времени*** t называется вектор

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta t}$$

При стремлении приращения аргумента $\Delta t > 0$ к нулю секущая $\Delta \boldsymbol{a}$ займет положение касательной τ. Таким образом, ***векторная производная всегда направлена по касательной к годографу вектор - функции***.

Рассмотрим основные свойства векторной производной.

1. Производная постоянной вектор функции равна нулю:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Const} \to \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \boldsymbol{0}$$

2. Производная вектор – функции с постоянным модулем не равна нулю. В этом случае годограф функции лежит на сфере радиуса а, поэтому производная, касательная к годографу, будет перпендикулярна самому вектору **а**.

$$a = Const \quad \to \quad \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \perp \boldsymbol{a}$$

Такими векторами являются, например, векторы, соединяющие две точки твердого тела.

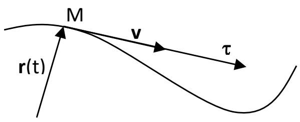
3. ***Проекция производной равна производной от соответствующей проекции***

$$\left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right)_x = \frac{d\boldsymbol{a}_x}{dt}$$

Скорость точки

Векторный способ

Скоростью точки называется вектор



$$\boldsymbol{V} \equiv \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \equiv \dot{\boldsymbol{r}}$$

Из определения следует, что скорость направлена по касательной к годографу радиуса - вектора $\boldsymbol{r}$, т.е. к траектории точки. Скорость направлена в сторону движения точки М по траектории.

Координатный способ

По закону движения $x(t), y(t), z(t)$ можно найти вектор $\boldsymbol{V}$**:**

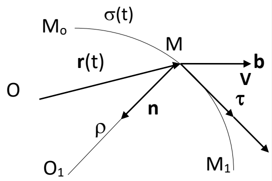
$$V_x = \dot{x}, \quad V_y = \dot{y}, \quad V_z = \dot{z}; \qquad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2};$$

Естественный способ

Формулы Френе.

Пусть задан закон движения точки по траектории

$$\sigma(t)$$



Очевидно, что радиус-вектор точки является функцией координаты σ: $\boldsymbol{r}(\sigma)$.

Формулы Френе определяют естественный базис трех ортогональных единичных векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$, через производные:

1я формула Френе определяет ***орт касательной***

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}$$

2я формула Френе определяет орт ***главной нормали*** **n:**

$$k\,\boldsymbol{n} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}$$

Модуль k производной $\frac{d\tau}{d\sigma}$ называется ***кривизной траектории в точке*** *M*, имеет размерность 1/м, и характеризует скорость конца вектора **τ** при движении точки.

Обратная величина

$$\rho = \frac{1}{k}$$

- называется ***радиусом кривизны траектории*** в точке М. Точка O_1 главной нормали на расстоянии ρ от точки М называется ***центром кривизны*** траектории в точке М.

Орт бинормали определим так чтобы тройка $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ была правой

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}$$

Скорость точки

$$\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma}\boldsymbol{\tau}$$

Иначе

$$\boldsymbol{V} = V_\tau \boldsymbol{\tau}, \qquad V_\tau = \dot{\sigma}$$

Как видим, скорость касательна к траектории, и ее проекция на касательную равна первой производной от закона движения.

Ускорение точки

Векторный способ

Ускорением точки называется вектор

$$\boldsymbol{W} \equiv \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{r}}$$

Заметим, что, если скорость точки постоянна по модулю (***равномерное движение***), то ***ускорение нормально к скорости*** по свойству векторной производной. Это будет подтверждено в естественном способе.

Координатный способ

По заданному закону движения и свойствам векторной производной можно найти проекции ускорения

$$W_x = \dot{V}_x = \ddot{x},\ \ W_y = \ddot{y},\ \ \ W_z = \ddot{z}$$

модуль и направление вектора ускорения:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2};$$

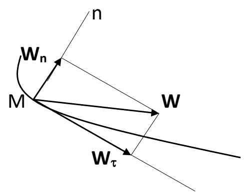
Естественный способ

$$\boldsymbol{W} = \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \ddot{\sigma}\boldsymbol{\tau} + \dot{\sigma}\dot{\boldsymbol{\tau}} = \ddot{\sigma}\boldsymbol{\tau} + \dot{\sigma}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = \ddot{\sigma}\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{\sigma}^2}{\rho}\boldsymbol{n}$$

Таким образом, ускорение точки имеет две составляющие ***касательную и нормальную:***

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W_\tau} + \boldsymbol{W_n} \qquad \boldsymbol{W_\tau} = \ddot{\sigma}\boldsymbol{\tau} \qquad \boldsymbol{W_n} = \frac{\dot{\sigma}^2}{\rho}\boldsymbol{n} \qquad (19)$$

$$W = \sqrt{{W_\tau}^2 + {W_n}^2}$$



Равномерным называется движение с постоянной по модулю скоростью:

$$V = Const \qquad (\dot{\sigma} = Const).$$

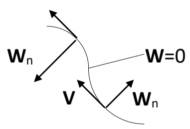


Рис.7

При равномерном движении (Рис.7) касательное ускорение равно нулю. Значит, касательное ускорение $\boldsymbol{W_\tau}$ ***характеризует изменение модуля скорости точки.*** Полное ускорение точки равно нормальному ускорению. Оно исчезает в точках перегиба траектории и равно нулю при движении точки по прямой. Значит, нормальное ускорение $\boldsymbol{W_n}$ ***характеризует изменение направление вектора скорости***.

Равнопеременным называется движение точки с постоянным касательным ускорением:

$$\ddot{\sigma} = Const = W_\tau$$

Интегрируя, получаем:

$$\dot{\sigma} = W_\tau t + C_1$$

где C_1- постоянная интегрирования, которую следует найти из начальных условий:

$$t = 0: \quad \sigma = \sigma_0 \ \ \dot{\sigma} = V_0$$

Находим: $C_1 = V_0$. Повторное интегрирование дает ***закон равнопеременного движения*** точки по кривой:

$$\sigma = W_\tau \frac{t^2}{2} + V_0 t + \sigma_0$$

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Формула Эйлера. Угловая скорость тела

Вектором в теле назовем любой вектор $\boldsymbol{a}$, соединяющий две точки тела. Все векторы в твердом теле постоянны по модулю и изменяют только свое направление, поворачиваясь вместе с телом.

Известно, что столбец проекций вектора $\boldsymbol{a}$ на оси неподвижной системы

$$a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

можно связать со столбцом проекций его производной

$$\dot{a} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

матрицей Ω 3x3 бесчисленным образом.

$$\dot{a} = \Omega a \qquad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix}$$

Нас интересует, существует ли среди этого бесчисленного множества матриц Ω, такая, которая является общей для всех векторов в теле. Иначе говоря, характеризующая движения всего тела как целого. Как известно, производная по времени от постоянного по модулю вектора перпендикулярна самому вектору. Отсюда

$$\boldsymbol{a} \cdot \dot{\boldsymbol{a}} = a^T \dot{a} = a^T \Omega\, a = 0$$

Итак

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= x^2\omega_{11} + y^2\omega_{22} + z^2\omega_{33} + xy(\omega_{12} + \omega_{21}) + yz(\omega_{23} + \omega_{32}) + zx(\omega_{31} + \omega_{13}) = 0$$

Матрица Ω опишет движение любого вектора в теле, если все коэффициенты при проекциях вектора равны нулю.

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0$$

$$\omega_{21} = -\omega_{12} = \omega_z \qquad \omega_{32} = -\omega_{23} = \omega_x \qquad \omega_{13} = -\omega_{31} = \omega_y$$

Здесь обозначения трех ненулевых элемента матрицы введены по образцу присоединенной матрицы вектора в право ориентированном пространстве.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, общая для всех векторов в теле матрица Ω существует и она - кососимметричная. Назовем ее ***матрицей угловой скорости тела.*** Из ее трех элементов можно составить сопутствующий ***вектор столбец проекций угловой скорости тела.***

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы пришли к **матричной формуле Эйлера**

$$\dot{a} = \Omega a$$

Как было показано, ей соответствует **векторная формула Эйлера**

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}$$

Формулы показывают, что производные по времени от всех векторов в теле выражаются через единую для тела угловую скорость тела. Это ожидаемый результат, поскольку твердое тело вращается как единое целое.

Теорема о распределении скоростей в теле. Метод полюса.

Формула Эйлера дает возможность выразить характеристики движения всех точек тела через характеристики движения одной, специально выбранной нами точки А тела, называемой ***полюсом.*** Такой прием называется ***методом полюса***.

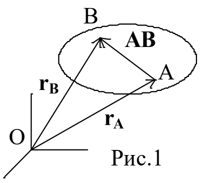


Рис.1

Рассмотрим произвольную точку тела B. Исходным в методе полюса является выражение радиуса - вектора произвольной точки тела через радиус - вектор полюса A:

$$\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{AB}$$

Дифференцируя по времени, находим

$$\frac{d\boldsymbol{r_B}}{d\boldsymbol{t}} = \frac{d\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}}{d\boldsymbol{t}} + \frac{d\boldsymbol{AB}}{d\boldsymbol{t}}; \qquad \boldsymbol{V}_B = \boldsymbol{V}_A + \frac{d\boldsymbol{AB}}{d\boldsymbol{t}}$$

Для вектора в теле **AB** справедлива формула Эйлера.

$$\frac{d\boldsymbol{AB}}{d\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{AB}$$

Таким образом, приходим к ***теореме о распределении скоростей*** в твердом теле

$$\boldsymbol{V}_B = \boldsymbol{V}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{AB} \quad (12)$$

Матричная запись этой теоремы в произвольной системе координат имеет вид:

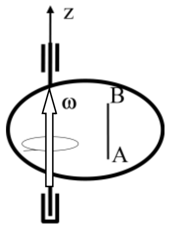
$$V_B = V_A + \Omega(\mathrm{AB})$$

Следствия из теоремы о распределении скоростей

а) Если скорости двух точек тела A и B одинаковы, то угловая скорость параллельна AB. Например, при вращении тела вокруг неподвижной оси скорости точек этой оси равны нулю.

Поэтому вектор угловой скорости параллелен оси вращения Z. Обычно его изображают на оси (Рис.7) и направляют по правилу правого винта.

б) Справедливо и обратное. Скорости точек прямой, параллельной угловой скорости,



одинаковы в данный момент

$$\boldsymbol{AB} \parallel \boldsymbol{\omega} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{V_B} = \boldsymbol{V_A}$$

в) ***Теорема о проекциях скоростей***

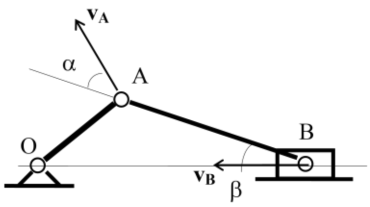
Проекции скоростей двух точек на ось, проходящую через эти точки, равны.

Для доказательства спроектируем теорему (12) на ось z, проходящую через обе точки. С учетом перпендикулярности $\boldsymbol{AB}$ векторному произведению $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{AB}$ получаем**:**

$$\text{пр}_{AB}\, \boldsymbol{V_A} = \text{пр}_{AB}\, \boldsymbol{V_B}$$

Эта теорема отражает понятное требование неизменности расстояния между точками твердого тела.

Пример: найдем отношение скоростей точек A и B шатуна AB кривошипно-шатунного



механизма. Точка A принадлежит кривошипу OA, вращающемуся вокруг оси O. Она движется по окружности, значит ее скорость перпендикулярна OA. Точка B скользит вдоль прямой OB и ее скорость направлена вдоль этой прямой. По теореме о проекциях скоростей имеем

$$V_A Cos\alpha = V_B Cos\beta$$

Простейшие движения твердого тела

Поступательное движение.

Мгновенно-поступательным назовем движение тела в момент, когда угловая скорость тела обратилась в ноль

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$$

В этом случае

$$\boldsymbol{V}_B = \boldsymbol{V}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{V}_A = \boldsymbol{V} \quad (13)$$

То есть скорости всех точек в момент мгновенно-поступательного движения оказываются равными.

Например, в момент, когда кривошип $OA \perp OB$, шатун AB меняет направление вращения, поэтому $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, скорости точек A и B равны (Рис.8).

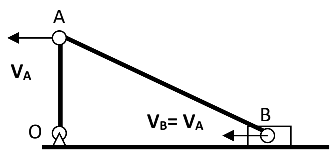


Рис.8

Если угловая скорость остается равной нулю в течение некоторого промежутка времени,

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{0}$$

то движение в это время называется ***поступательным.***

Например, ползун B (Рис.8) все время движется поступательно

При поступательном движении вектор в теле $\boldsymbol{AB}$ не поворачивается

$$\frac{d\boldsymbol{AB}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$$

значит

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{Const}$$

При этом траектории любых двух точек A и B (годографы векторов $\boldsymbol{r_A}$ и $\boldsymbol{r_B}$) одинаковы и сдвинуты на постоянный вектор **AB** (Рис.9)**.**

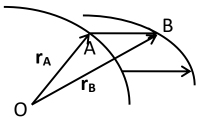


Рис.9

На Рис.10 изображено колесо обозрения, кабина которого совершает круговое поступательное движение. При этом все точки кабины, в том числе точки A и B движутся по одинаковым окружностям, центры которых смещены на AB.

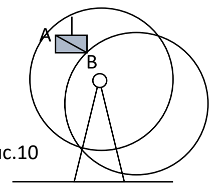


Рис.10

В общем случае движения все точки тела имеют разные скорости, поэтому ***термины «скорость» и «ускорение» относятся только к точке*** тела, а термины ***«угловая скорость» и «угловое ускорение» относятся только к телу***. Только при поступательном движении скорость $\boldsymbol{V}$ можно условно назвать скоростью тела.

Дифференцируя (13), найдем, что в каждый момент времени равны и ускорения всех точек

$$\boldsymbol{W_B} = \boldsymbol{W_A} = \boldsymbol{W}$$

Видим, что поступательное движение тела описывается формулами кинематики точки, поскольку все точки движутся одинаково. Как известно, движение точки в пространстве задается тремя скалярными функциями ее координат. Значит, в поступательном движении тело имеет 3 степени свободы.

Вращательное движение.

Угловая скорость и угловое ускорение тела.

Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси z. Положение тела удобно задать углом поворота тела (Рис.11)

$$\varphi = \varphi(t)$$

Эта закон вращения тела. Поскольку мы находимся в право ориентированном пространстве, направление оси z должно быть согласовано с положительным направлением отсчета угла φ по правилу правого винта.

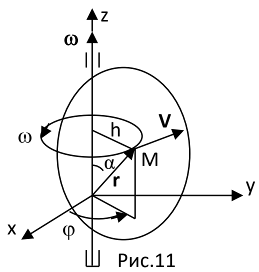


Рис.11

Как было показано, угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ вращающегося тела направлена вдоль оси вращения. Значит $\omega_x = \omega_y = 0$ и матрица угловой скорости имеет вид:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & 0 \\ \omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем проекцию угловой скорости ω_z.

Точка тела движется по окружности радиуса h по закону $\sigma = h\varphi$.

Ее скорость

$$V = \dot{\sigma} = h\dot{\varphi}$$

По формуле Эйлера

$$V = \Omega h = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & 0 \\ \omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} = h\omega_z$$

Получаем

$$\omega_z = \dot{\varphi}$$

Таким образом, во вращательном движении угловая скорость есть скорость изменения угла поворота тела. Отсюда название угловой скорости.

Вектор угловой скорости тела направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта по отношению к дуговой стрелке направления вращения

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{k} \quad (3)$$

Угловым ускорением тела называется вектор

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

Поскольку годографом вектора $\boldsymbol{\omega}$ является сама ось вращения, то угловое ускорение тоже будет направлено вдоль оси вращения. Дифференцируя (3) по времени, находим:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\boldsymbol{k} = \varepsilon_z\boldsymbol{k};$$

Таким образом, проекция углового ускорения на ось z равна второй производной от закона вращения.

$$\varepsilon_z = \ddot{\varphi}$$

Поскольку угловое ускорение также как и угловая скорость является аксиальным вектором, то его тоже снабжают дуговой стрелкой по правилу правого винта.

Ускоренным следует назвать вращение тела с возрастающей по модулю угловой скоростью. Очевидно, что оно будет иметь место при со направленных векторах угловой скорости и углового ускорения. Таким образом, вращение будет ускоренным при $\ddot{\varphi}\dot{\varphi} > 0$ и замедленным при $\ddot{\varphi}\dot{\varphi} < 0$

Скорость и ускорение точки вращающегося тела

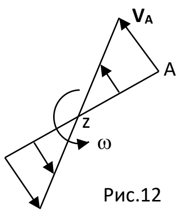


Рис.12

Поскольку

$$V = \omega h$$

то скорость точки линейно зависит от расстояния h до оси вращения. Картина распределения скоростей на прямой, перпендикулярной оси представлена на Рис.12

Найдем ***ускорение*** точки вращающегося тела. Дифференцируя (4) по времени, найдем

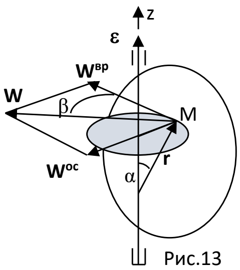


Рис.13

$$\boldsymbol{W} = \dot{\boldsymbol{V}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) =$$

$$= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}$$

Таким образом, ускорение точки вращающегося тела имеет две составляющие (Рис.13).

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}^{\text{вр}} + \boldsymbol{W}^{\text{ос}}$$

Составляющая

$$\boldsymbol{W}^{\text{вр}} \equiv \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}$$

является касательным ускорением, но здесь она называется ***вращательным ускорением*** точки.

Специальное название введено потому, что не во всех движениях тела произведение $\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}$ направлено по касательной к траектории точки. Вращательное ускорение точки направлено в сторону дуговой стрелки вектора углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$**.** По модулю

$$W^{\text{вр}} = \varepsilon r\, Sina = \varepsilon h$$

Вторая составляющая

$$\boldsymbol{W}^{\text{ос}} \equiv \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}$$

устремлена к оси вращения, независимо от направления вращения (вектора $\boldsymbol{\omega}$), и поэтому называется ***осестремительным ускорением*** точки. Действительно, векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{V}$ изменяют направление одновременно, поэтому их векторное произведение не меняет своего направления при перемене направления вращения тела. По модулю

$$W^{ос} = \omega V = \omega^2 h$$

Вычислим модуль полного ускорения W и угол β, который оно составляет с направлением на ось:

$$W = \sqrt{W^{вр\,2} + W^{ос\,2}} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \qquad tg\beta = \frac{W^{вр}}{W^{ос}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Видим, что модуль ускорения точки линейно зависит от расстояния h точки до оси вращения, а угол β одинаков для всех точек тела.

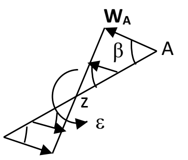


Рис.14

Теперь нетрудно изобразить картину распределения ускорений во вращающемся теле. Поскольку на прямых, параллельных оси вращения скорости все время одинаковы, то одинаковы и ускорения. Значит во всех плоскостях, перпендикулярных оси вращения, картины распределения и скоростей и ускорений одинаковы. Одна из них изображена на Рис.14:

Плоское движение тела

Движение тела ***называется плоским***, если скорости всех его точек остаются параллельными некоторой неподвижной плоскости. Примером такого движения может служить качение цилиндра по плоскости (Рис.15). Скорости всех точек цилиндра параллельны плоскости П**.**

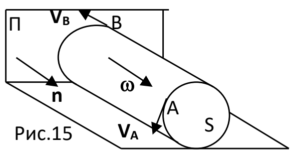
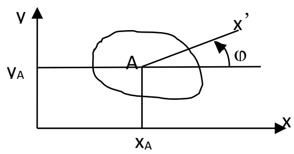


Рис.15

Очевидно, что скорости и ускорения всех точек на образующей контакта цилиндра равны нулю, то вектор угловой скорости ***ω*** параллелен оси цилиндра, то есть перпендикулярно плоскости движения П.

Поскольку ***ω*** не изменяет своего направления, то скорости точек на прямых, параллельных ***ω*** одинаковы все время. Значит, одинаковы и ускорения этих точек. Поэтому нет смысла изучать распределение скоростей и ускорений во всем теле. Достаточно понять, как они распределены в каком-нибудь его сечении S, параллельном плоскости движения П. Такое сечение называется ***плоской фигурой***. Во всех параллельных сечениях распределения скоростей и ускорений будет аналогичным.



Закон движения плоской фигуры.

Обычно плоскую фигуру располагают в плоскости чертежа x y. Положение фигуры на плоскости определяется тремя координатами - функциями времени:

$$x_A(t), y_A(t), \varphi(t)$$

Они являются законом плоского движения тела, которое, таким образом, имеет три степени свободы.

Скорость точки плоской фигуры

По заданному закону движения плоской фигуры

$$x_A(t), y_A(t), \varphi(t)$$

можно найти угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ и ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ фигуры, скорость $\boldsymbol{V}_A$ и ускорение $\boldsymbol{W}_A$ полюса А. После этого, по теореме о распределении скоростей можно найти скорость произвольной точки В плоской фигуры

$$\boldsymbol{V}_B = \boldsymbol{V}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{AB} \qquad (14)$$

Последнее слагаемое $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{AB}$ лежит в плоскости фигуры, перпендикулярно АВ и направлено в сторону вращения фигуры (Рис.16). Поэтому это слагаемое называется ***скоростью точки В вокруг полюса А***

$$\boldsymbol{V}_B = \boldsymbol{V}_A + \boldsymbol{V}_{\text{B}A}; \qquad \boldsymbol{V}_{\text{B}A} \equiv \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{AB}$$

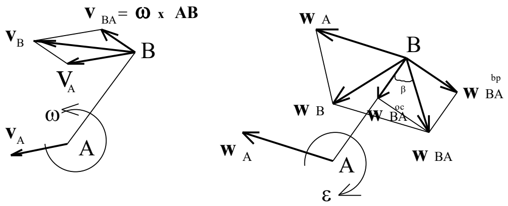


Рис.16

Ускорение точки плоской фигуры

Ускорение точки В найдем, продифференцировав (14) по времени.

$$\dot{\boldsymbol{V}}_B = \dot{\boldsymbol{V}}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{AB}}$$

Или

$$\boldsymbol{W_B} = \boldsymbol{W_A} + \boldsymbol{W}_{\text{BA}}; \quad \boldsymbol{W_{AB}} = \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{AB}}^{\text{вр}} + \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{AB}}^{\text{ос}}$$

$$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{AB}}^{\text{вр}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{AB}; \qquad \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{AB}}^{\text{ос}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}_{\text{BA}};$$

Видим, что ускорение произвольной точки В плоской фигуры тоже складывается из ускорения полюса $\boldsymbol{W_A}$ и ускорения $\mathbf{W_{BA}}$ точки В во вращении вокруг полюса А**.** Ускорение $\mathbf{W_{BA}}$, как и должно быть, имеет вращательную составляющую $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{AB}}^{\text{вр}}$, направленную перпендикулярно АВ в сторону углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ и осестремительную составляющую $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{AB}}^{\text{ос}}$, всегда направленную к полюсу А (Рис.16).

Учитывая, что векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлены перпендикулярно плоской фигуре, найдем, что все составляющие лежат в плоскости фигуры и имеют модули:

$$W_{AB}{}^{bp} = \varepsilon\, AB \qquad W_{AB}{}^{oc} = \omega^2 AB$$

Ускорение $\boldsymbol{W_{AB}}$ имеет модуль

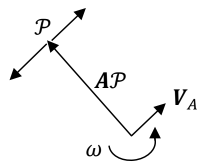
$$W_{AB} = \sqrt{{W_{AB}}^{bp^2} + {W_{AB}}^{oc2}}$$

Угол β наклона $\mathbf{W_{AB}}$ к АВ для всех точек фигуры одинаков

$$tg\beta = \frac{{W_{AB}}^{bp}}{{W_{AB}}^{oc}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Мгновенный центр скоростей.

Формула (14) сложна для понимания картины распределения скоростей в плоской фигуре. Распределение станет яснее, если ввести понятие ***мгновенного центра скоростей (МЦС)***. Свяжем с плоской фигурой бесконечную плоскость П.



МЦС** — это **точка $\mathcal{P}$ плоскости П, скорость которой в данный момент равна нулю.

$$\boldsymbol{V}_{\mathcal{P}} = \mathbf{0}$$

Покажем, что МЦС существует, если угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ не равна нулю в данный момент. Для этого под прямым углом к $\boldsymbol{V}_A$ в направлении вращения проведем луч, на котором отложим отрезок А$\mathcal{P} = V_A/\omega$. Очевидно, что

$$\boldsymbol{V}_{\mathcal{P}} = \boldsymbol{V}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A\mathcal{P}} = 0$$

Распределение скоростей в плоской фигуре.

Если теперь за полюс принять МЦС $\mathcal{P}$, то формула скорости приобретет вид, знакомый нам по вращательному движению:

$$\boldsymbol{V}_B = \boldsymbol{V}_{\mathcal{P}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{P}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{P}\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{V}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{P}\boldsymbol{B}$$

Таким образом,

в данный момент скорости распределены в плоской фигуре так,

как если бы она вращалась вокруг МЦС $\mathcal{P}$.

Это значит, что скорость любой точки плоской фигуры перпендикулярна направлению на МЦС $\mathcal{P}$ и соблюдаются следующие соотношения:

$$V_A = \omega A\mathcal{P}; \quad V_B = \omega B\mathcal{P}; \quad \omega = \frac{V_A}{A\mathcal{P}} = \frac{V_B}{B\mathcal{P}}; \quad \frac{V_A}{V_B} = \frac{A\mathcal{P}}{B\mathcal{P}}$$

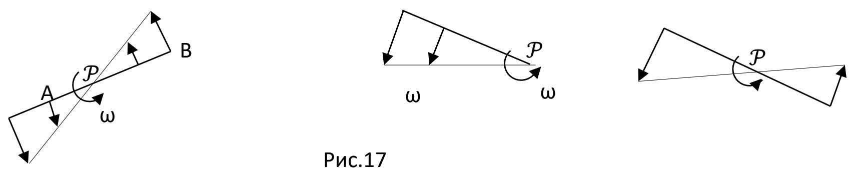
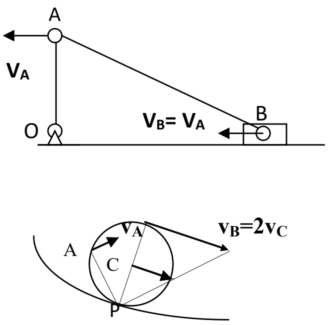


Рис.17

Рис.17 подсказывает способы построения МЦС $\mathcal{P}$ в различных случаях:



$$\omega = \frac{V_A}{A\mathcal{P}} = 0$$

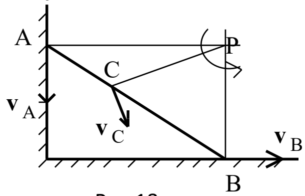


Рис.18

СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Абсолютное, относительное и переносное движение точки.

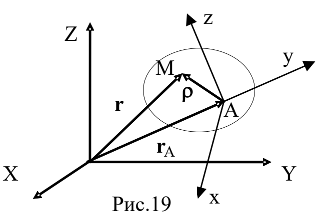


Рис.19

Законы Механики выполняются только в ***инерциальной*** системе отсчета. Таковой можно считать гелиоцентрическую систему. Назовем ее абсолютной и свяжем с ней оси X,Y,Z. Движение точки М по отношению к абсолютной системе описывается радиусом-вектором $\boldsymbol{r}(t)$ и называется абсолютным. Скорость и ускорение точки в абсолютном движении будем отмечать индексом "a":

$$\boldsymbol{V_a}\,,\ \ \boldsymbol{W_a}$$

Иногда движение точки удобнее описывать относительно «несущего тела», по которому движется точка. Например, наше движение на автомобиле естественно описывать по отношению к Земле, а не к Солнцу.

Точно так же, движение пассажира, пробирающегося к выходу в трамвае, естественно описывать по отношению к трамваю (несущему телу), а не к Земле.

Движение точки по отношению к несущему телу называется ***относительным*** . Скорость и ускорение относительного движения точки будем отмечать индексом "r":

$$\boldsymbol{V_r}\,,\ \ \boldsymbol{W_r}$$

Ограничимся плоским движением несущего тела. Свяжем с несущим телом оси x, y с началом в полюсе А. Относительное движение зададим проекциями относительного радиуса - вектора $\rho\ (t)$ на подвижные оси

$$x(t), y(t)$$

Пусть движение несущего тела в «абсолютной» системе отсчета задано координатами полюса А и углом $\varphi(t)$ вращения несущего тела

$$X_A(t), Y_A(t), \varphi(t)$$

Из этих функций можно найти скорость и ускорение полюса $\boldsymbol{V_A}$, $\boldsymbol{W_A}$, угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ и ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ несущего тела.

Переносными скоростью и ускорением

$$\boldsymbol{V_e}, \ \boldsymbol{W_e}$$

точки М называется скорость и ускорение той точки тела, с которой в данный момент совпадает точка М. Иначе говоря, точки М, зафиксированной в данный момент на теле (метод остановки).

Найдем абсолютную скорость и ускорение точки М по известным характеристикам переносного и относительного движений.

$$\boldsymbol{V_a}, \boldsymbol{W_a} \ (\boldsymbol{V_A}, \boldsymbol{W_A}, \rho, \omega, \varepsilon)$$

Из Рис.19 следует

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_A} + \boldsymbol{\rho} \qquad (15)$$

Рисунок и формула такие же, как в свободном движении тела, но с одним принципиальным отличием. Здесь вектор $\boldsymbol{\rho}$ не является вектором в теле. Его модуль изменяется, поскольку точка М движется по телу. По этой причине к вектору $\boldsymbol{\rho}$ не применима формула Эйлера.

Теорема о связи производных

Представим вектор $\boldsymbol{\rho}$ в подвижной системе отсчета через закон относительного движения

$$\boldsymbol{\rho} = \ x\,\boldsymbol{i} \ + \ y\,\boldsymbol{j} \ \ (16)$$

Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ - орты подвижной системы, вращающиеся вместе с телом.

Дифференцируя (3) по времени, находим:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} \equiv \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + x\,\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} \, + \, y\,\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}$$

Орты $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ являются векторами в несущем теле, поэтому их производные находим по формуле Эйлера

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}; \qquad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}; \qquad (17)$$

Таким образом,

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \frac{d_r\boldsymbol{\rho}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \qquad (18)$$

Здесь введено обозначение относительной производной

$$\frac{d_r\boldsymbol{\rho}}{dt} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j}$$

Она характеризует изменение вектора $\boldsymbol{\rho}$ при остановленном несущем теле.

Формула (6) выражает **теорему о связи производных**:

Абсолютная производная от вектора, заданного в подвижной системе, равна относительной производной плюс векторное произведение угловой скорости системы на вектор

Заметим, что при поступательном движении системы ($\boldsymbol{\omega}$ = 0) производные совпадают.

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \frac{d_r\boldsymbol{\rho}}{dt} \quad \text{при} \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$$

Теорема о сложении скоростей

Дифференцируя (15) по времени, находим

$$\boldsymbol{V_a} = \boldsymbol{V_A} + \dot{\boldsymbol{\rho}}$$

С учетом (18)

$$\boldsymbol{V_a} = \boldsymbol{V_A} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \frac{d_r\boldsymbol{\rho}}{dt} \qquad (19)$$

Если в данный момент зафиксировать точку на теле, то

$$\frac{d_r\boldsymbol{\rho}}{dt} = 0$$

и абсолютная скорость по определению станет переносной.

$$\boldsymbol{V_e} = \boldsymbol{V_A} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$$

Относительную скорость найдем, остановив тело ($\mathbf{V}_A$, $\boldsymbol{\omega}$ = 0)

$$\boldsymbol{V_r} = \frac{d_r\boldsymbol{\rho}}{dt}$$

Таким образом, пришли к **теореме о сложении скоростей**

$$\boldsymbol{V_a} = \boldsymbol{V_e} + \boldsymbol{V_r} \qquad (20)$$

Абсолютная скорость точки равна
векторной сумме ее переносной и относительной скоростей.

Теорема о сложении ускорений

Дифференцируя по времени теорему о сложении скоростей (19),
находим

$$\boldsymbol{W_a} = \boldsymbol{W_A} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}}$$

Векторы $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{V_r}$ заданы в подвижной системе, поэтому их абсолютные производные находятся по теореме о связи производных

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \frac{d_r\boldsymbol{\rho}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{V_r}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V_r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}); \qquad \dot{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V_r} + \frac{d_r\boldsymbol{V_r}}{dt}$$

Замечательно, что в этих выражениях совпадают два слагаемых $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V_r}$,

Получаем

$$\boldsymbol{W_a} = \boldsymbol{W_A} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{V_r}) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V_r} + \frac{d_r\boldsymbol{V_r}}{dt}$$

Объединяя одинаковые слагаемые, находим

$$\boldsymbol{W_a} = \boldsymbol{W_A} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + 2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V_r}) + \frac{d_r\boldsymbol{V_r}}{dt}$$

Чтобы найти переносное ускорение, зафиксируем по определению точку на несущем теле. Тогда $\boldsymbol{V_r}, \boldsymbol{W_r} = \boldsymbol{0}$ и абсолютное ускорение становится переносным по определению

$$\boldsymbol{W_e} = \boldsymbol{W_A} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \qquad (21)$$

Видим, что формула (21) совпадает с формулой ускорения точки тела, как и должно быть по определению.

Остановив несущее тело ($\boldsymbol{W_A}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varepsilon} = 0$), найдем относительное ускорение

$$\boldsymbol{W_r} = \frac{d_r\boldsymbol{V_r}}{dt}$$

Слагаемое

$$\boldsymbol{W_c} = 2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V_r})$$

называется добавочным или ***Кориолисовым ускорением***.

Приходим к теореме Кориолиса:

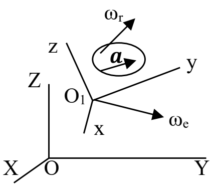
$$\boldsymbol{W_a} = \boldsymbol{W_e} + \boldsymbol{W_r} + \boldsymbol{W_c}$$

Видим, что в отличие от скоростей, сумма переносного и относительного ускорений не равна, в общем случае, абсолютному ускорению. Именно поэтому Кориолисово ускорение называют добавочным.

СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ТЕЛА

Теорема о сложении угловых скоростей тела.

Пусть тело Т имеет в данный момент угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_r$ по отношению к подвижной системе координат x y z, которая, в свою очередь, вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_e$ по отношению к условно неподвижной системе координат $X\ Y\ Z$ (Рис.41).



Рассмотрим вектор в теле **a**. Наблюдатель O_1 в подвижной системе запишет формулу Эйлера для относительной производной вектора

$$\frac{d_r\boldsymbol{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega_r} \times \boldsymbol{a}$$

Наблюдатель O в неподвижной системе запишет формулу Эйлера для абсолютной производной вектора

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega_a} \times \boldsymbol{a}$$

Как известно, обе производные связаны теоремой

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{d_r\boldsymbol{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega_e} \times \boldsymbol{a}$$

Таким образом,

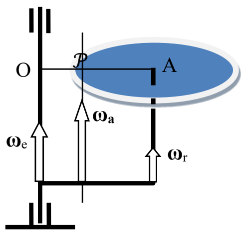
$$\boldsymbol{\omega_a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega_e} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\omega_r} \times \boldsymbol{a}$$

Поскольку $\boldsymbol{a}$ – произвольный вектор в теле, то отсюда следует теорема о сложении угловых скоростей:

$$\boldsymbol{\omega_a} = \boldsymbol{\omega_e} + \boldsymbol{\omega_r}$$

Сложение вращений тела вокруг параллельных осей.

Рассмотрим механизм, состоящий из водила (рогатки), вращающегося вокруг



неподвижной оси z с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_e$ и диска, вращающегося относительно водила с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_r$**.** Очевидно, что при этом диск совершает плоское движение.

Пусть сначала угловые скорости со направлены. В этом случае абсолютная угловая скорость

$$\boldsymbol{\omega_a} = \boldsymbol{\omega_e} + \boldsymbol{\omega_r}$$

отлична от нуля. Это значит, что существует мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$, скорость которого равна нулю в данный момент:

$$\boldsymbol{V}_{\mathcal{P}} = \boldsymbol{0}$$

Точка $\mathcal{P}$ совершает составное движение, поэтому ее скорость равна сумме переносной и относительной скоростей

$$\boldsymbol{V}_{\mathcal{P}} = \boldsymbol{V}_{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{V}_{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}$$

Значит,

$$\boldsymbol{V}_{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{e}} = -\boldsymbol{V}_{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{r}}$$

Переносная и относительная скорости направлены противоположно только у точек на линии OA. Среди них есть точка $\mathcal{P}$, для которой:

$$V_{\mathcal{P}}^{e} = V_{\mathcal{P}}^{r}; \quad \omega_e O\mathcal{P} = \omega_r A\mathcal{P}$$

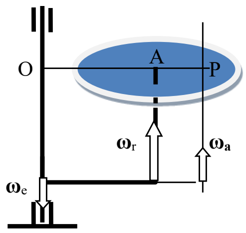
Мы нашли положение мгновенного центра скоростей

$$\frac{O\mathcal{P}}{A\mathcal{P}} = \frac{\omega_r}{\omega_e}$$

Таким образом, в данном случае тело совершает плоское движение, при котором мгновенный центр скоростей делит расстояние между осями обратно пропорционально угловым скоростям «внутренним образом».

Пусть теперь направления вращений ***противоположны***. В этом случае модуль абсолютной угловой скорости равен разности

$$\omega_a = \omega_r - \omega_e \qquad (\omega_r > \omega_e)$$



Сначала положим, что $\omega_a \neq 0$.

Тогда опять существует МЦС $\mathcal{P}$. Но теперь он вне отрезка ОА, со стороны большей угловой скорости ω_r. Попрежнему

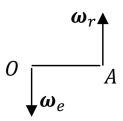
$$\frac{O\mathcal{P}}{A\mathcal{P}} = \frac{\omega_r}{\omega_e}$$

Но на этот раз мгновенный центр скоростей делит расстояние между осями обратно пропорционально угловым скоростям «внешним образом».

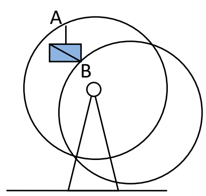
Пара вращений

Случай равенства модулей скоростей

$$\omega_r = \omega_e$$



называется «***парой вращений***». При этом тело не вращается



$$\omega_a = 0$$

а совершает ***поступательное движение***. Точно такое, как кабина колеса обозрения. Скорости всех точек диска одинаковы и равны

$$V = V_A = \omega OA$$

то есть «моменту» пары вращений.

Дифференциальный и планетарный механизмы. Метод Виллиса.

Механизм, изображенный на Рис.20, состоящий из двух колес в зацеплении, оси которых находятся на концах водила ОА, называется ***дифференциальным***, если центральное колесо вращается

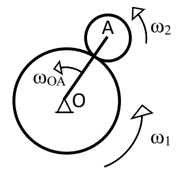


Рис.20

$$\omega_1 \neq 0$$

и ***планетарным***, если центральное колесо не вращается

$$\omega_1 = 0$$

Методом Виллиса найдем угловую скорость ω_2 колеса 2 по угловым скоростям ω_{OA} и ω_1

Метод состоит в придании всему механизму скорости $-\omega_{OA}$. При этом, согласно теореме о сложении угловых скоростей, водило OA останавливается. Механизм превращается в обычное внешнее зацепление двух колес с новыми угловыми скоростями

$$\widetilde{\omega}_1 = \omega_1 - \omega_{OA}; \qquad \widetilde{\omega}_2 = \omega_2 - \omega_{OA}$$

Новые угловые скорости противоположны по направлению и обратно пропорциональны радиусам колес.

$$\frac{\widetilde{\omega}_2}{\widetilde{\omega}_1} = -\frac{r_1}{r_2}$$

Таким образом,

$$\frac{\omega_2 - \omega_{\mathrm{OA}}}{\omega_1 - \omega_{\mathrm{OA}}} = -\frac{r_1}{r_2}$$

Или

$$\omega_2 = \omega_{\mathrm{OA}} - \frac{r_1}{r_2}(\omega_1 - \omega_{\mathrm{OA}})$$

Для **планетарного** механизма

$$\omega_1 = 0; \qquad OA = r_1 + r_2$$

Получаем очевидный результат

$$\omega_2 = \omega_{\mathrm{OA}} \frac{\mathrm{OA}}{r_2}$$

ДИНАМИКА

ДИНАМИКА ТОЧКИ.

Динамика является основным разделом механики. В этом разделе изучают законы движения твердого тела под действием приложенных сил. Простейшим объектом динамики является материальная точка, т. е. тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с длиной его траектории. Например, планета Земля может быть принята за материальную точку, если рассматривать её движение вокруг Солнца.

Основной принцип (второй закон Ньютона).

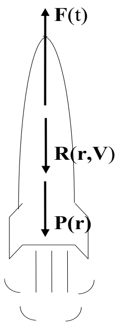
Ускорение материальной точки пропорционально действующей на нее равнодействующей силе и обратно пропорционально массе точки

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{m}\sum \boldsymbol{F}_k$$

В отличие от статики, ***силы в динамике*** могут быть функциями положения точки (ее радиуса - вектора **r**), скорости $\boldsymbol{V}$ и независимой переменной - времени t.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{V};\ t)$$

Рассмотрим, например, силы, действующие на ракету: сила тяжести зависит от расстояния до Земли $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$, сила тяги двигателя есть функция времени $\boldsymbol{F}(t)$, сила сопротивления воздуха зависит от скорости ракеты и плотности атмосферы (расстояния до Земли) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{V})$



Дифференциальные уравнения движения точки.

Запишем второй закон Ньютона с учетом того, что ускорение точки есть вторая производная от радиуса - вектора по времени

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \sum \boldsymbol{F}_k\,(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}; t) \qquad (22)$$

Выражение, связывающее обыкновенные производные искомой функции $\boldsymbol{r}(t)$ независимой переменной t называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Порядок высшей производной называется порядком дифференциального уравнения. Уравнение (22) является векторным дифференциальным уравнением второго порядка.

Для решения задач уравнение (22) нужно записать в скалярном виде, то есть в проекциях на оси координат. Проектируя (22) на декартовы оси, находим дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}\,(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t)$$
$$m\ddot{y} = \sum F_{ky}\,(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \quad (23)$$
$$m\ddot{z} = \sum F_{kz}\,(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t)$$

Эта система дифференциальных уравнений имеет шестой порядок.

Уравнение (22) в проекциях на оси τ, n, b дает три дифференциальных уравнения в естественных осях.

$$m\ddot{\sigma} = \sum F_{k\tau} \qquad \frac{m\dot{\sigma}^2}{\rho} = \sum F_{kn} \qquad 0 = \sum F_{kb}$$

Здесь учтено, что проекция ускорения на бинормаль b равна нулю.

Обратная задача динамики точки является основной и состоит в определении закона движения точки по заданным силам. В этом случае, уравнения (23) являются системой дифференциальных уравнений для нахождения трех неизвестных функций времени t

$$x(t), \qquad y(t), \qquad z(t)$$

Решение обратной задачи связано с интегрированием системы (23) шестого порядка. При интегрировании возникают шесть постоянных и решение (второй интеграл уравнений) будет иметь вид:

$$x = x\,(t;\ C_1\,C_2\ \ C_3\,C_4\,C_5\,C_6)$$

$$y = y\,(t;\ C_1\,C_2\ \ C_3\,C_4\,C_5\,C_6)$$

$$z = z\,(t;\ C_1\,C_2\ \ C_3\,C_4\,C_5\,C_6)$$

Наличие постоянных интегрирования указывает на то, что система (4) имеет множество решений. Это значит, что силы не однозначно определяют движение точки. Иначе говоря, одна и та же сила вызывает разные траектории движения точки.

Например, движение камня под действием одной и той же силы тяжести может происходить по разным траекториям в зависимости от того, как его бросить (Рис.3). Произвольные постоянные интегрирования определяются из начальных условий движения.

Рис.3

$$t = 0:\ \ x = x_0;\ \ \ y = y_0;\ \ z = z_0$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 \ \ \ \dot{y} = \dot{y}_0 \ \ \ \dot{z} = \dot{z}_0$$

Чтобы определить постоянные интегрирования нужно подставить эти условия в решение (9) и его производную (первый интеграл уравнений)

$$\dot{x} = \dot{x}\ (t;\ C_1\,C_2\ \ C_3\,C_4\,C_5\,C_6)$$

$$\dot{y} = \dot{y}\ (t;\ C_1\,C_2\ \ C_3\,C_4\,C_5\,C_6)$$

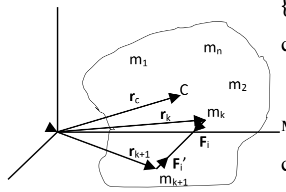
$$\dot{z} = \dot{z}\ (t;\ C_1\,C_2\ \ C_3\,C_4\,C_5\,C_6)$$

Получим алгебраическую систему относительно постоянных C_1,...C_6 которая имеет единственное решение.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

Материальная система. Центр масс.

Материальной системой назовем множество взаимодействующих материальных точек m_1, $\{m_1, m_2, . m_k \ldots m_n\}$. Пример: солнечная система. Границы системы определяются наблюдателем.



Система материальных точек, взаимодействием которых можно пренебречь по сравнению взаимодействия с внешней средой, не является материальной. Пример: группа самолетов.

Массой системы называется арифметическая величина, равная сумме масс точек системы

$$M = \sum m_k$$

Движение точек рассматривается по отношению к инерциальной системе отсчета. ***Система отсчета*** – трехмерное пространство, с которым связан наблюдатель, умеющий измерять расстояния и время. Система отсчета инерциальна, если в ней выполняются законы Ньютона.

Центром масс системы называется геометрическая точка С, радиус-вектор которой равен

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{M}\sum m_k \boldsymbol{r}_k$$

Его координаты в декартовых осях

$$x_c = \frac{1}{M}\sum m_k x_k\,; \quad y_c = \frac{1}{M}\sum m_k x_k\,; \quad z_c = \frac{1}{M}\sum m_k x_k\,;$$

Иногда достаточно исследовать движение системы «в целом». Особенно это верно для твердого тела. Для него достаточно узнать, как движется центр масс тела и как тело вращается вокруг центра масс.

Изучить движение системы в целом позволяют 3 ***общие теоремы динамики системы***:

- теорема об изменении количества движения (теорема о движении центра масс),

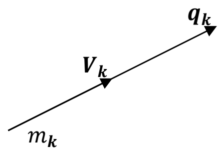
- теорема об изменении кинетического момента,

- теорема об изменении кинетической энергии.

Количество движений точки и системы.

Количеством движения точки m_k системы называется вектор

$$\boldsymbol{q_k} = m_k \boldsymbol{V_k}$$



где $\boldsymbol{V_k}$– скорость точки в данный момент.

Рассмотрим систему $m_1 \ldots m_k \ldots m_n$

Количеством движения системы называется главный вектор количеств движения всех точек системы

$$\boldsymbol{Q} = \sum \boldsymbol{q_k} = \sum m_k \boldsymbol{V_k}$$

В проекциях на декартовы оси

$$Q_x = \sum m_{\boldsymbol{k}} \dot{x}_k \quad Q_y = \sum m_{\boldsymbol{k}} \dot{y}_k \qquad Q_x = \sum m_{\boldsymbol{k}} \dot{x}_k$$

Поскольку массы точек постоянны, Q можно выразить через скорость центра масс

$$\boldsymbol{Q} = \frac{d}{dt} \sum m_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{r}_k = \frac{d}{dt} M \boldsymbol{r}_c = M \boldsymbol{V_c}$$

$$Q_x = M\dot{x}_c, \qquad Q_y = M\dot{y}_c, \qquad Q_z = M\dot{z}_c$$

Примеры.

а) Если центр масс вращающегося тела лежит на оси вращения, то $\boldsymbol{V_c} = \boldsymbol{0}$, и количество движения тела равно нулю.

б) Количество движения колеса зависит только от скорости его центра $\boldsymbol{V_c}$ и совершенно не зависит от скорости его вращения.

Теорема об изменении количества движения. Теорема о движении центра масс системы

Запишем 2й закон Ньютона для точки m_k системы в виде

$$\dot{\boldsymbol{q}}_k = \boldsymbol{F_k^i} + \boldsymbol{F_k^e}$$

Здесь $\boldsymbol{F_k^i}$- равнодействующая всех внутренних сил, а $\boldsymbol{F_k^e}$- внешних сил, приложенных к точке m_k. Суммируя по k, получаем

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{V^i} + \boldsymbol{V^e}$$

Главный вектор внутренних сил $\boldsymbol{V^i} = \boldsymbol{0}$, что приводит к ***теореме об изменении количества движения системы***

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{V^e}$$

В проекциях на декартовы оси

$$\dot{Q}_x = \sum F_{kx}^e, \qquad \dot{Q}_y = \sum F_{ky}^e, \qquad \dot{Q}_z = \sum F_{kz}^e$$

Поскольку

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = M\dot{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{c}} = M\boldsymbol{W_c}$$

то эту теорему можно записать в виде ***теоремы о движении центра масс.***

$$M\boldsymbol{W_c} = \boldsymbol{V^e}$$

Она имеет вид второго закона Ньютона:

Центр масс системы движется

как материальная точка с массой системы M,

к которой приложены все внешние силы системы.

Так, если пренебречь сопротивлением воздуха, то после взрыва снаряда фейерверка, центр масс его частей продолжает двигаться по той же траектории (параболе), что и не взорвавшийся снаряд.

В проекциях на декартовы оси

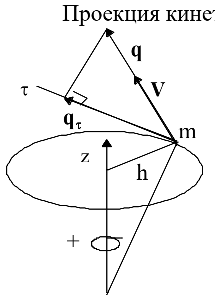
$$M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^e \qquad M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^e \qquad M\ddot{z}_c = \sum F_{kz}^e$$

Кинетический момент точки и системы относительно центра и оси

Рассмотрим систему материальных точек с массами $\{m_1, m_2, . m_j \dots m_n\}$, имеющих в данный момент скорости $\boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{V_2}, \dots . \boldsymbol{V_n}$ относительно инерциальной системы отсчета. ***Кинетическим моментом*** точки m_j относительно центра O называется векторная величина, равная моменту ее количества движения относительно этого центра.

$$\boldsymbol{K_{oj}} = \boldsymbol{m_o}(\boldsymbol{q_j}) = \boldsymbol{r_j} \times \boldsymbol{m_j V_j} \qquad (j = 1,2 \dots n)$$

Проекция кинетического момента на ось называются ***кинетическим моментом точки относительно оси***. Он вычисляется либо аналитически по формулам (7), либо как момент силы относительно оси. Момент дает только касательная составляющая $\boldsymbol{q_\tau}$вектора $\boldsymbol{q}$.



$$K_z = \mp q_\tau h$$

Момент обращается в ноль, если вектор количества движения (скорость точки) лежит в одной плоскости с осью (параллелен или пересекает ось)

Кинетический момент вращающегося тела

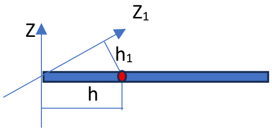
Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω_z. Скорость точки dm тела

$$V = \omega h; \quad q_\tau = \omega_z h dm$$

$$K_z = \int_V q_\tau h = \omega_z \int_V h^2 dm = J_z \omega_z$$

Здесь

$$J_z = \int_V h^2 dm$$



называется ***моментом инерции тела относительно оси z***

Видим, что осевой момент не может быть отрицательным или равным нулю, и характеризует удаленность масс тела от оси. Например, момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню, будет больше, чем относительно наклонной оси поскольку $h > h_1$ для любой точки стержня

$$J_z > J_{z'}$$

Теорема об изменении кинетического момента системы.

Дифференцируя

$$\boldsymbol{K_o} = \sum \boldsymbol{K_{oj}} = \sum m_j \boldsymbol{r_j} \times \boldsymbol{V_j}$$

по времени, находим

$$d\boldsymbol{K_O}/dt = \sum m_j(\boldsymbol{V_j} \times \boldsymbol{V_j} + \boldsymbol{r_j} \times \boldsymbol{W_j}) = \sum \boldsymbol{r_j} \times m_j \boldsymbol{W_j} =$$

$$= \sum [\boldsymbol{r_j} \times (\boldsymbol{F_j^e} + \boldsymbol{F_j^i})] = \sum \boldsymbol{m_O}(\boldsymbol{F_j^e}) + \sum \boldsymbol{m_O}(\boldsymbol{F_j^i}) = \boldsymbol{M_O^e} + \boldsymbol{M_O^i} = \boldsymbol{M_O^e}$$

Здесь учтено, что векторное произведение вектора на себя и главный момент внутренних сил равны нулю. Таким образом, приходим к ***теореме об изменении кинетического момента***

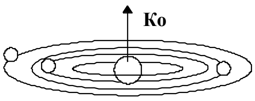
$$d\boldsymbol{K_O}/dt = \boldsymbol{M_O^e}$$

В проекциях на декартовы оси координат

$$\frac{dK_X}{dt} = \sum m_X\,(F_k^e), \qquad \frac{dK_Y}{dt} = \sum m_Y\,(F_k^e), \qquad \frac{dK_Z}{dt} = \sum m_Z\,(F_k^e),$$

Следствия

1. Внутренние силы не изменяют кинетического момента непосредственно. Однако, как и в теореме о движении центра масс, они могут вызвать внешние силы, изменяющие кинетический момент.
2. Если $\boldsymbol{M_O^e} = 0$, то $\boldsymbol{K_O} = \boldsymbol{Const}$. Так для Солнечной системы, которую можно считать



изолированной от внешнего влияния удаленных галактик, вектор кинетического момента сохраняет свое направление и модуль. Перпендикулярная ему плоскость, называемая ***плоскостью Лапласа***, тоже сохраняет свое положение по отношению к гелиоцентрической инерциальной системе отсчета.

3. Если, в частном случае только $M_z = 0$, то сохраняется соответствующая проекция кинетического момента $K_z = Const$. Так кинетический момент конического маятника относительно вертикальной оси не будет изменяться с течением времени, поскольку $M_z = 0$.

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Динамика твердого тела полностью описывается двумя общими теоремами, которые мы изучили: теоремой о движении центра масс и теоремой об изменении кинетического момента.

Уравнения вращательного движения тела.

Пусть тело вращается вокруг оси z.

$$\frac{dK_Z}{dt} = \sum m_Z\,(F_k^e) \qquad K_z = J_z\omega_z$$

Отсюда вытекает дифференциальное уравнение вращения твердого тела

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum m_z(F_k)$$

Уравнения плоского движения тела

Плоское движение есть сумма поступательного движения в плоскости xy и вращения вокруг центра масс. Из теоремы о движении центра масс и теоремы об изменении кинетического момента относительно центральной оси

$$M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}\,, \quad M\ddot{y}_c = \sum F_{ky},$$

$$J_{zc}\ddot{\varphi} = \sum m_z(F_k)$$

вытекают ***дифференциальными уравнениями плоского движения***. Они вместе с начальными условиями определяют закон плоского движения $x(t), y(t), \varphi(t)$.

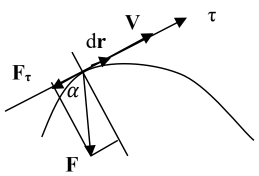
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Теорема об изменении кинетической энергии точки и системы.

Умножим закон Ньютона скалярно на скорость точки $\boldsymbol{V}$

$$m\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V} \qquad (24)$$

Левую часть выражения можно представить в виде



$$m\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{V} = m\boldsymbol{V}\cdot\dot{\boldsymbol{V}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \frac{dT}{dt} = \dot{T}$$

Положительная величина

$$T = \frac{mV^2}{2} > 0$$

называется ***кинетической энергией точки***.

Правая часть (24)

$$N(F) = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}$$

называется ***мощностью*** силы **F**

Приходим к ***теореме об изменении кинетической энергии***

$$\dot{T} = N \qquad (25)$$

Скорость изменения кинетической энергии точки равна мощности силы.

Теорема показывает, что скорость изменения кинетической энергии максимальна при силе коллинеарной скорости, и она равна нулю при их взаимной перпендикулярности или ***в покое***.

Отсюда вытекает, например, что сила трения сцепления колеса с дорогой не развивает мощности при отсутствии проскальзывания. Также ведущая сила или момент, приложенные к колесу имеют нулевую мощность в момент трогания с места.

Теорему (25) можно записать в виде

$$dT = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = d'A \qquad d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{V}dt$$

Элементарная работа и мощность силы.

Величина

$$d'A = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

называется ***элементарной работой*** силы $\boldsymbol{F}$. Штрих в обозначении $d'A$ призван подчеркнуть, что в общем случае элементарная работа не является дифференциалом некоторой функции (A). Только для «потенциальных» сил она будет полным дифференциалом потенциальной энергии.

Раскроем скалярное произведение

$$d'A = \boldsymbol{F} \circ d\boldsymbol{r} = FdrCos\alpha = F_\tau dr_\tau = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Из этого представления вытекает:

1. Знак работы определяется знаком Cos: работа положительна, если направление силы и перемещения совпадает с точностью до π/2.
2. Работу совершает только касательная составляющая силы.
3. Работа равна нулю если сила перпендикулярна перемещению.

Рассмотрим движение системы материальных точек $\{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots m_n\}$ в инерциальной системе отсчета. ***Кинетической энергией системы*** называется положительная величина

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k V_k^2 > 0$$

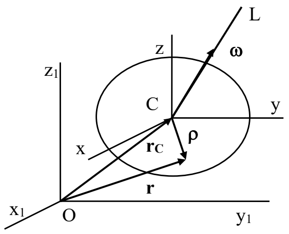
Теорема Кенига.

Центр масс системы $\{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots m_n\}$ имеет радиус вектор

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{M}\sum m_k \boldsymbol{r}_k$$

В центре масс С выберем начало осей x y z подвижной системы отсчета, движущейся поступательно. Назовем ее ***С-системой.*** Радиус вектор точки системы относительно центра масс обозначим **ρ.** Теперь абсолютную скорость точки m_k представим в виде

$$\boldsymbol{V}_k = \boldsymbol{V}_k^{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{V}_k^{\boldsymbol{r}}$$



Переносная скорость $\boldsymbol{V}_k^{\boldsymbol{e}}$ для всех точек системы одинакова

$$\boldsymbol{V}_k^{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{V_c} \qquad \boldsymbol{V}_k = \boldsymbol{V_c} + \boldsymbol{V}_k^{\boldsymbol{r}}$$

Подставляем в формулу кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k\,(\boldsymbol{V_c} + \boldsymbol{V}_k^{\boldsymbol{r}})^2$$

$$= \frac{1}{2}V_c^2\sum m_k + \boldsymbol{V}_c\sum m_k\boldsymbol{V}_k^{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{2}\sum m_k\boldsymbol{V}_k^{\boldsymbol{r2}}$$

$$\sum m_k\boldsymbol{V}_k^{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}\sum m_k\rho_k = \frac{d}{dt}M\rho_c = 0$$

Приходим к ***теореме Кенига***

$$T = \frac{1}{2}MV_c^2 + T^r \qquad\qquad T^r = \frac{1}{2}\sum m_k V_k^{\boldsymbol{r2}}$$

Кинетическая энергия системы складывается из

энергии поступательного движения системы с центром масс

и энергии $\boldsymbol{T^r}$ ее движения относительно С-системы .

Кинетическая энергия твердого тела.

Поступательное движение

В этом случае тело не вращается ($\boldsymbol{\omega} \equiv 0$) скорости всех точек одинаковы и значит

$$T = \frac{1}{2}\,MV^2$$

Вращательное движение

Скорость точки тела:

$$V = \omega h$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\iiint h^2\omega^2 dm = \frac{1}{2}\,J_z\omega^2$$

Плоское движение в плоскости xy

Первую формулу получим из теоремы Кенига

1) $$T = \frac{1}{2}\left(MV_c^2 + J_{z_c}\omega^2\right)$$

Еще одну формулу получим, введя в рассмотрение центр скоростей P. Тогда скорость любой точки выражается через ее расстояние до P.

$$V = \omega h_P$$

Значит существует вторая формула, через мгновенный центр:

$$2) \qquad \mathrm{T} = \frac{1}{2} J_{z_P} \omega^2$$

Мощность силы, приложенной к твердому телу.

Поступательное движение

Тело в поступательном движении не вращается ($\boldsymbol{\omega} = 0$) и все его точки имеют одинаковую скорость $\boldsymbol{V}$

$$N\{\boldsymbol{F}\} = \boldsymbol{V}\{\boldsymbol{F}\} \cdot \boldsymbol{V}$$

Вращательное движение

Здесь есть смысл выбрать полюс A на оси вращения z. Тогда $\boldsymbol{V_A} = 0$ и:

$$N(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{F})$$

В скобках узнаем выражение момента силы **F** относительно полюса A. Поскольку **ω** направлен вдоль оси вращения, то

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{m_A}(\boldsymbol{F}) = \omega_z m_z(F)$$

где $m_z(F)$– момент силы относительно оси вращения. Приходим к выражению мощности силы:

$$N(\boldsymbol{F}) = m_z(F)\omega_z$$

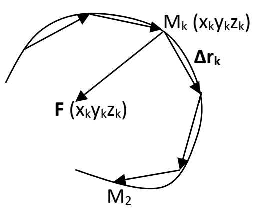
Заметим, что знак проще определить, сравнивая направления момента и вращения. Поэтому практически часто знак определяют отдельно и работу вычисляют по формуле

Плоское движение

Выбрав A в мгновенном центре скоростей P, приходим к формуле

$$N\,\{\boldsymbol{F}\} = m_{z\mathrm{p}}(F)\omega_z$$

Конечная работа силы.



Рассмотрим движение точки m под действием силы **F** по траектории из положения M_1 в положение M_2. Разобьем кривую M_1 M_2 на n частей.

Проведем векторы перемещений из узла в узел и обозначим работу на этих перемещениях через

$$\Delta A_к = \mathbf{F}\,(x_k y_k z_k) \circ \mathbf{\Delta r_k}$$

Конечной работой силы F на перемещение из положения M_1 в положение M_2 называется скалярная величина равная пределу

$$A_{12} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty, \Delta \mathrm{r_k}\to 0} \sum \Delta A_k$$

Этот предел является криволинейным интегралом 2го рода

$$A_{12} = \int_{1-2} (\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathrm{t}) \circ \, \mathrm{d}\mathbf{r})$$

Что нужно знать, чтобы вычислить этот интеграл?

1. Если сила зависит от всех параметров, то нужно знать закон движения точки **r**(t).

   Тогда этот интеграл становится определенным интегралом по времени

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}(\mathrm{t}) \circ V(t) \, \mathrm{dt})$$

2. В случае ***силового поля*** – пространства, в каждой точке которого задана функция силы $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$, нужно знать траекторию точки:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} (\mathbf{F}(\mathrm{r}) \circ \mathrm{d}\mathbf{r})$$

3. Существуют силовые поля, называемые ***потенциальными***, в которых для вычисления конечной работы нужно знать только начальное и конечное положение точки. Подробно такие поля будут рассмотрены ниже. Здесь приведем примеры полей силы тяжести и упругой силы.

Консервативные системы

Определение и свойства потенциального силового поля.

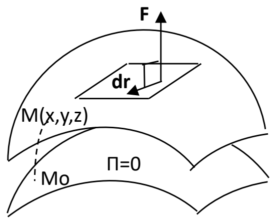
Силовым полем называется трехмерное пространство, в каждой точке которого задана функция силы $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}; t)$. Если время t отсутствует явно, то поле ***стационарное***.

Рассмотрим стационарное силовое поле, заданное в декартовых координатах x, y, z функциями:

$$F_x(x, y, z); \quad F_y(x, y, z); \quad F_z(x, y, z) \qquad (26)$$

Как было показано, для вычисления конечной работы силы силового поля, необходимо знать траекторию точки. Среди силовых полей существует класс ***потенциальных силовых полей***, для которых конечная работа силы определяется только начальным и конечным положением точки и не зависит от траектории.

Силовое поле (26) называется ***потенциальным***, если существует функция ***потенциальной энергии*** $\Pi(x, y, z)$, такая, что



$$F_x = -\frac{\partial П}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial П}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial П}{\partial z}$$

Пусть задано поле (*). Как проверить, является ли оно потенциальным? Мы считаем, что потенциальная энергия П является непрерывной, дважды дифференцируемой функцией координат. Тогда можно воспользоваться свойством: порядок взятия смешанной производной не влияет на результат:

$$\frac{\partial^2 П}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 П}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 П}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 П}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 П}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 П}{\partial z \partial x},$$

Отсюда ***критерии потенциальности силового поля***

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

Свойства работы потенциальных сил.

Элементарная работа потенциальной силы равна минус дифференциалу потенциальной энергии. Действительно

$$d'A = \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial П}{\partial x} dx + \frac{\partial П}{\partial y} dy + \frac{\partial П}{\partial z} dz\right) = -dП$$

Отсюда вытекают следующие свойства.

1) Конечная работа потенциальной силы зависит только от начального и конечного положения точки

$$A_{12} = \int_{1-2} d'A = -\int_1^2 dП = П_1 - П_2$$

2) Работа по замкнутому кругу равна нулю:

$$П_1 = П_2, \qquad \text{поэтому} \qquad A_o=0$$

Вычисление потенциальной энергии. Закон сохранения полной механической энергии.

Поверхность, на которой П сохраняет значение называется ***эквипотенциальной***:

$$П\,(x, y, z) = C_1 = const$$

Выясним направление F по отношению к потенциальной поверхности. Пусть точка перемещается по эквипотенциальной поверхности $П = C_1$. По свойству работы потенциальная сила F не совершает работы:

$$d'A = \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r} = 0$$

Поскольку $\boldsymbol{dr}$ направлено произвольно в касательной плоскости к поверхности $\Pi = C_1$, то сила направлена перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям.

С другой стороны

$$\boldsymbol{F} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = -\boldsymbol{grad}\,\Pi$$

Значит, сила направлена в сторону убывания П.

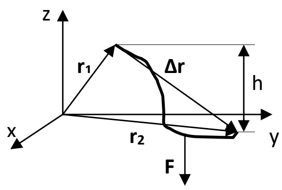
По свойствам дифференцирования обе функции $\Pi(x, y, z)$ и $\Pi(x, y, z) + C$, где С-произвольная аддитивная постоянная, определяют одно и тоже силовое поле**.** Говорят, что потенциальная энергия определена с ***точностью до аддитивной постоянной***.

Выберем нулевой уровень потенциальной энергии. Переместим точку из произвольного положения $M(x, y, z)$ пространства в любую точку нулевого уровня и сосчитаем работу силы:

$$A_{MM_0} = \Pi(x, y, z)$$

Отсюда ***правило вычисления функций потенциальной энергии***:

Функция П(x,y,z) вычисляется как работа потенциальной силы на перемещение из произвольной точки M(x,y,z) на нулевой уровень.



Примеры:

1) ***Постоянная сила*** $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{const}$:

$$A_{12} = \boldsymbol{F} \bullet (\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}) = \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{\Delta r}$$

2) ***Сила тяжести***. Это частный пример постоянной силы:

Поле однородно, если

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}, \qquad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{const}$$

Направим ось вертикально вверх, тогда

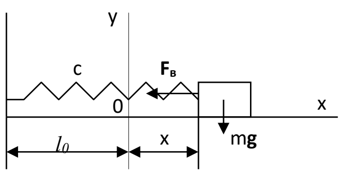
$$F_x = F_y = 0 \qquad\qquad F_z = -mg$$

Все поверхности $z = const$ эквипотенциальны. Поэтому

$$A_{12} = F_z\,(z_1 - z_2) = \pm\, mgh$$

Работа положительна, если точка опускается.

3) ***Прямая линейная пружина***:



Естественная длина недеформированной пружины l_0. При изменении длины на $\Delta = l - l_0$, называемом деформацией пружины, возникает упругая сила $\boldsymbol{F}_в$. Она всегда стремится восстановить недеформированное состояние пружины, поэтому она называется ***восстанавливающей силой***.

Пружина ***линейна***, если сила $\boldsymbol{F}_в$ линейно зависит от деформации:

$$F_в = c\,\Delta$$

Коэффициент с (н/м) называется жесткостью пружины. Если начало оси x выбрать в положении, где $\Delta = 0$, то

$$F_{вх} = -c\,x$$

Элементарная работа силы $\boldsymbol{F}_в$

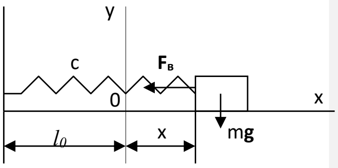
$$d'A = F_{вx}\,dx = -cx\,dx$$

Конечная работа силы $\boldsymbol{F}_в$

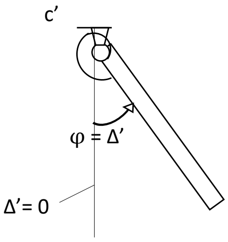
$$A_{12} = -c\int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{2}c(x_1^2 - x_2^2)$$

Квадраты координат можно заменить их модулями- деформациями:

$$A_{12} = \frac{1}{2}c(\Delta_1^2 - \Delta_2^2)$$



4) ***Спиральная линейная пружина***:



При закручивании пружины на угол φ, называемый деформацией пружины Δ′, возникает упругий *восстанавливающий момент* $M_в$. Пружина *линейна,* если

$$M_{вz} = -c'\,\varphi$$

Коэффициент с' (нм) называется жесткостью пружины.

Конечная работа момента $M_в$

$$A_{12} = -c'\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi d\varphi = \frac{1}{2}c(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)$$

$$A_{12} = \frac{1}{2}c(\Delta'^2_1 - \Delta'^2_2)$$

Система называется ***консервативной***, если все действующие на неё силы потенциальны.

Теорема об изменении кинетической энергии для консервативной системы в интегральной форме:

$$T_2 - T_1 = A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2 \quad \text{или} \quad T_2 + \Pi_2 = T_1 + \Pi_1$$

Полной механической энергией системы называется сумма её кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + \Pi$$

Как видим, полная механическая энергия консервативной системы сохраняется

$$E = const$$

Предположим, что кроме потенциальных сил, на систему действуют не потенциальные силы, тогда:

$$dT = d'A_{пот} + d'A_{не\ пот} = -d\Pi + d'A_{не\ пот}$$

Поделив на dt, найдем, что ***скорость изменения полной механической энергии равна мощности не потенциальных сил.***

$$dE/dt = N_{не\ пот}$$

Например, при наличии ***силы вязкого сопротивления***

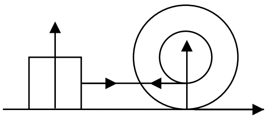
$$\boldsymbol{F}_{\text{сопр}} = -\beta \boldsymbol{V} \qquad \beta = Const$$

полная механическая энергия убывает со скоростью

$$dE\,/\,dt = -\beta \boldsymbol{V} \bullet \boldsymbol{V} = -\beta V^2$$

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА.

Метод Лагранжа позволяет находить непосредственно дифференциальные уравнения движения системы с идеальными связями.



Рассмотрим систему двух тел на рисунке. ***Число степеней свободы*** системы равно числу координат, которые достаточно зафиксировать, чтобы остановить систему.

Связями являются нерастяжимая нить и опорная плоскость. Отсутствие проскальзывания катка оставляют системе одну степень свободы поскольку достаточно зафиксировать одну координату x груза, чтобы остановить всю систему. Координату x груза будем называть ***независимой обобщенной координатой*** системы

Нормальная реакция груза и катка, сила трения катка и натяжение нити являются реакциями ***идеальных связей*** поскольку не совершают работы.

Метод Лагранжа позволяет составить дифференциальное уравнение относительно x. При этом реакции идеальных связей будут изначально исключены из рассмотрения.

Обобщенная сила.

Рассмотрим точку $\mathrm{m_k}$ системы. Обозначим равнодействующие активных сил и реакций идеальных связей, действующих на точку, $\mathbf{F}_\mathrm{k}$ и $\mathbf{N}_\mathrm{k}$. Законы движения всех точек являются функциями независимой обобщенной координаты и времени

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{k}(q)$$

Они удовлетворяют уравнениям связей и уравнениям Ньютона

$$m_k \boldsymbol{w_k} = \boldsymbol{F_k} + \boldsymbol{N_k}$$

Возможная скорость точки $\boldsymbol{V}_\mathrm{k}$

$$\boldsymbol{V}_\mathrm{k} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q}\dot{q}$$

Здесь $\frac{\partial \mathbf{r}_\mathrm{k}}{\partial \mathrm{q}}$ вектор касательный к поверхности связи в этой точке $\mathrm{m_k}$, а обобщенную возможную скорость $\dot{q}$ определена начальными условиями движения.

Вычислим возможную мощность сил на скорости $\dot{q}$.

Нормальные реакции идеальных связей перпендикулярны скоростям точек, поэтому их мощность равна нулю

$$\sum_k (\boldsymbol{N}_k)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q}=\boldsymbol{0}$$

$$\sum_k (\boldsymbol{F}_k+\boldsymbol{N}_k)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q}\dot q=\sum_k\left(\boldsymbol{F}_k\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q}\right)\dot q=Q\,\dot q$$

Выражение в скобках

$$Q=\sum_k\left(\boldsymbol{F}_k\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q}\right)$$

логично назвать обобщенной силой по координате q. Обобщенную силу Q находят как коэффициент при $\dot q$ в выражении возможной мощности активных сил

Статический принцип возможных скоростей.

Рассмотрим систему с идеальными стационарными связями, находящуюся в данный момент в покое. **Принцип**:

чтобы система оставалась в покое в данном положении необходимо и достаточно равенство нулю возможной мощности активных сил на любой возможной скорости системы в данном положении.

$$N_a=\sum \boldsymbol{F}_k\bullet\boldsymbol{V}_k=0$$

Замечание - система находится в покое, а силы - в равновесии. Иногда, все - же говорят о равновесии системы, имея в виду ее покой.

Необходимость Если система остается в покое, то все $\boldsymbol{V}_k=\boldsymbol{0}$ и принцип соблюден.

Достаточность: Пусть $N_a=0$. Покажем, что система остается в покое ($T=0$). Согласно теореме об изменении кинетической энергии.

$$\dot T=N_a=0$$

Кинетическая энергия остается равной нулю, то есть система остается в покое

Статический принцип возможных скоростей для консервативной системы.

Рассмотрим консервативную несвободную систему с потенциальной энергией $\Pi\,(x,y,z)$, и обобщенными координатами $q_1\dots q_l$. Найдем обобщенные силы системы по определению

$$\mathrm{Q_i}=\sum F_{\mathrm k}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_{\mathrm k}}{\partial q_{\mathrm i}}=-\sum\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\mathrm x}\frac{\partial x}{\partial q_{\mathrm i}}+\frac{\partial\Pi}{\partial\mathrm y}\frac{\partial y}{\partial q_{\mathrm i}}+\frac{\partial\Pi}{\partial\mathrm z}\frac{\partial z}{\partial q_{\mathrm i}}\right)=-\frac{\partial\Pi}{\partial q_{\mathrm i}}$$

Пример: эллиптический маятник

Примем за нулевой уровень потенциальной энергии положение $x=0,\varphi=0$ и вычислим работу при возвращении системы в начало координат

$$\Pi=m_2gl\,(1-\,Cos\,\varphi)$$

П не зависит от x, значит $Q_x=0$

$$Q_\varphi = -\partial\Pi/\partial\varphi = -m_2 gl\, Sin\,\varphi$$

$$\delta A = \sum Q_i \delta q_i = 0$$

Поскольку обобщенные возможные перемещения δq_i независимы, то принцип можно прочитать следующим образом:

В положении равновесия все обобщенные силы обращаются в ноль.

$$Q_i = 0 \ \ (i = 1,2,\dots,l)$$

Это значит, что

В положении равновесия потенциальная энергия консервативной системы имеет экстремум

$$\partial\Pi/\partial q_i = 0 (i = 1,2,\dots,l)$$

Следовательно, нахождение положений равновесия консервативной системы сводится к нахождению экстремумов функции П.

Тождества Лагранжа

Поскольку

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{k}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q}\dot{q}$$

то ***первое тождество Лагранжа*** L_1верно.

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_k}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q} \qquad (\mathrm{L}_1)$$

Второе тождество Лагранжа L_2

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{V}_k}{\partial q} \qquad (\mathrm{L}_2)$$

доказывается прямым вычислением правой и левой частей тождества.

Уравнения Лагранжа второго рода

Умножим закон Ньютона для всех точек

$$m_k \boldsymbol{w_k} = \boldsymbol{F_k} + \boldsymbol{N_k}$$

на возможную скорость

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{k}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q}\dot{q}$$

$$\left[\sum_k m_k \boldsymbol{w}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q}\right]\dot{q} = \left[\sum_k \boldsymbol{F}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q}\right]\dot{q}$$

Скалярное произведение

$$m_k \boldsymbol{w}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q}$$

Является проекцией ускорения точки $\boldsymbol{w}_k$ на касательную к поверхности связи $\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q}$

Касательная к поверхности связи составляющая ускорения не зависит от возможной скорости $\dot{q}_i$ по связи (от нее зависят только нормальные реакции идеальных связей), и равна проекции равнодействующей внешних сил $\boldsymbol{F}_k$на то же касательное направление.

Поэтому коэффициенты в скобках при $\dot{q}$ равны:

$$\sum_k m_k \boldsymbol{w}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q} = \sum_k \boldsymbol{F}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q} = Q$$

Выразим левые суммы через обобщенные координаты и учтем тождества Лагранжа.

$$m_k \boldsymbol{w}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q} = m_k \dot{\boldsymbol{V}}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(m_k \boldsymbol{V}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q}\right) - m_k \boldsymbol{V}_k \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(m_k \boldsymbol{V}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{V}_k}{\partial \dot{q}}\right) - m_k \boldsymbol{V}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{V}_k}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\frac{m_k V_k{}^{\mathbf{2}}}{2} - \frac{\partial}{\partial q}\frac{m_k V_k{}^{\mathbf{2}}}{2} =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial T_k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T_k}{\partial q}$$

После суммирования по k получаем уравнение Лагранжа второго рода.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \qquad (27)$$

Из уравнения Лагранжа следует дифференциальное уравнение движения системы по связям. После их интегрирования вопрос о реакциях идеальных связей остается открытым. Обычно для определения реакций прибегают к векторным уравнениям динамики относительного движения.

Уравнение Лагранжа является наиболее универсальным способом вывода дифференциальных уравнений движения голономной системы с идеальными связями, в том числе и не стационарными.

Уравнение Лагранжа для консервативных систем. Циклические координаты и интегралы.

Рассмотрим консервативную несвободную систему с l степенями свободы. Потенциальная энергия $\Pi(q_1 \dots q_l)$ определяет обобщенные силы

$$Q_i = -\partial\Pi/\partial q_i (i = 1,2,\dots,l)$$

Уравнения Лагранжа приобретают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{d(T-\Pi)}{d\dot{q}_i} - \frac{d(T-\Pi)}{dq_i} = 0 \ \ (i = 1,2,..,l)$$

Здесь учтено, что потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad (i = 1,2,..,l)$$

Запишем уравнения Лагранжа через ***функцию Лагранжа***

$$L = T - \Pi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{q}_i} - \frac{dL}{dq_i} = 0 \qquad (i = 1,2,..,l)$$

Координата q_σ называется циклической, если от нее не зависит функция Лагранжа

$$\partial L/\partial q_\sigma = 0$$

Уравнение Лагранжа с номером σ приобретает вид

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{q}_\sigma} = 0$$

и имеет ***циклический интеграл***

$$\frac{dL}{d\dot{q}_\sigma} = Const$$

Часто этот интеграл описывает случай сохранения количества движения или кинетического момента.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОЛЕБАНИЙ

Все вокруг нас, даже с виду находящееся в покое, совершает периодическое движение, называемое колебаниями. Характерными условиями возникновения колебаний является наличие:

- Равновесного положения (состояния или процесса), около которого совершаются колебания.
- Сил, которые стремятся вернуть систему в положение равновесия и поэтому называются *восстанавливающими силами*.

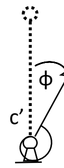
Определение положения равновесия системы.

Рассматривается система с идеальными голономными стационарными связями. Пусть число степеней свободы системы $l = 1$ и система консервативна с потенциалом П(q)

Чтобы определить имеет ли система положения равновесия, воспользуемся принципом возможных перемещений, который гласит, что если такое положение есть, то в нем потенциальная энергия имеет экстремум.

$$\partial \Pi/\partial q = 0$$

Мы получили уравнение для нахождения положения равновесия. Если оно имеет решения, то система имеет положения равновесия.



Пример: Обращенный математический маятник.

Так называется математический маятник длины l и массы m, удерживаемый в вертикальном равновесном положении спиральной пружиной жесткости c'

Выберем положение равновесия за нулевой уровень потенциальной энергии: $\Pi(0) = 0$. Функцию $\Pi(\varphi)$ вычислим как работу силы тяжести и пружины при возвращении маятника в положение равновесия.

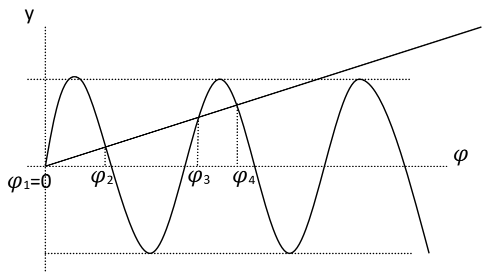
$$\Pi(\varphi) = -mgl(1 - Cos\varphi) + \frac{1}{2}c'\varphi^2$$

Статический принцип возможных перемещений дает условие равновесия:

$$\Pi' = 0 \text{ или } \quad c'\varphi = mglSin\varphi$$

Решения этого уравнения находятся в точках пересечения прямой $y = c'\varphi$ и синусоиды $y = mglSin\varphi$.

Чем меньше жесткость пружины, тем больше положений равновесия будет иметь система. График показывает, что система имеет 4 положения равновесия. При отсутствии пружины их бесчисленное количество, но физически это два вертикальных положения.

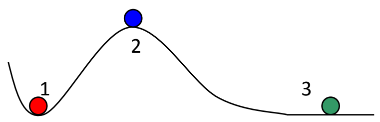


Если пружина жесткая

$$c' > mgl$$

то маятник имеет только одно положение равновесия

Различают три типа положения равновесия: устойчивое, неустойчивое, безразличное. Для шарика это положения (1), (2) и (3).



При отклонении от устойчивого положения шарик стремится в него вернуться. При малейшем отклонении от неустойчивого положения шарик туда не вернется. Положения безразличного равновесия составляют континуум - рядом с любым из них существует такое же.

Опыт показывает, что колебания возникают только около устойчивого положения равновесия.

Линейные и нелинейные системы. Линеаризация.

Рассмотрим консервативную систему с потенциальной энергией $\Pi(q)$ и положением равновесия, в котором выберем начало q и нулевой уровень потенциальной энергии:

$$\Pi(0) = 0 \qquad\qquad \Pi'(0) = 0 \text{ – условие равновесия}$$

Разложим $\Pi(q)$ в ряд Макларена, учтя условие равновесия:

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \Pi'(0)q + \frac{1}{2}\Pi''(0)q^2 + \cdots. = \frac{1}{2}\Pi''(0)q^2 + \cdots.$$

Первое оставшееся слагаемое в ряду называется ***квадратичной формой***, поскольку содержит квадрат q.

Система называется ***линейной по П***, если П является квадратичной формой q, т.е. все остальные члены разложения равны нулю.

Кинетическая энергия системы.

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k V_k^2 \qquad \boldsymbol{V}_\text{k} = \frac{\partial \mathbf{r}_\text{k}}{\partial q}\dot{q}$$

$$T = \frac{1}{2}\left[\sum \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\text{k}}{\partial q}\right)^2\right]\dot{q}^2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2$$

Функцию $a(q)$ разложим в ряд Макларена.

$$a(q) = a(0) + a'(0)q + \ldots$$

Система называется ***линейной по Т***, если Т является квадратичной формой $\dot{q}^2$ с постоянным коэффициентом, т.е. $a(q) = Const$. Система ***линейна***, если она линейна и по Т, и по П.

Если система не линейна, то приходится её линеаризовать. ***Линеаризацией*** системы называется введение ограничений, позволяющих считать систему почти линейной. Если рассмотреть малые движения системы $q, \dot{q} << 1$, то в разложении функции $\Pi(q)$ останется только первый член

$$\Pi \approx \frac{1}{2}cq^2, \qquad c = \Pi''(0)$$ – ***жесткость системы***

После линеаризации в разложении $a(q)$ в ряд Макларена, остается только $a(0) \equiv a$

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2$$

Следствие: получить квадратичную форму для нелинейной по Т системы можно, вычислив Т в положении равновесия системы.

Примеры:

а) Линейная пружина: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$; $\Pi = \frac{1}{2}cx^2$ - линейна и по Т, и по П:

б) Обращенный маятник: $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$; $\Pi = -mgl(1 - Cos\varphi) + \frac{1}{2}c'\varphi^2$

– нелинеен по П, но линеен по Т.

Теорема Лагранжа – Дирихле

Теорема: для того, чтобы данное положение системы было устойчивым необходимо (но недостаточно) чтобы функция П имела в этом положении минимум.

Выберем начало координат и нулевой уровень потенциальной энергии в положении равновесия. Для системы с ***одной степенью свободы***

$\Pi = \frac{1}{2}\, cq^2, \qquad c = \Pi''(0) > 0$ – условие минимума и устойчивости

Свободные колебания системы с одной степенью свободы без сопротивления.

Рассматривается движение консервативной системы с одной степенью свободы около устойчивого положения равновесия, где выбрано начало координаты q и нулевой уровень потенциальной энергии. После линеаризации (если система не линейна), кинетическая и потенциальная энергии системы приобретут вид квадратичных форм с постоянными коэффициентами.

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2}cq^2$$

$a > 0$ ввиду положительности кинетической энергии, с > 0 ввиду устойчивости положения равновесия

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}$$

приводит к ***дифференциальному уравнению свободных колебаний без сопротивления***

$$a\ddot{q} = -cq \quad \text{или} \quad \ddot{q} + k^2 q = 0 \qquad \left(k^2 = \frac{c}{a} \text{ сек}^{-1}\right)$$

Попробуем найти решение уравнения в виде экспоненты. Подставив

$$q = e^{\lambda t}$$

в уравнение, после сокращения на $e^{\lambda t}$ получим *характеристическое уравнение* для определения неизвестного параметра λ

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

Уравнение имеет два мнимых корня

$$\lambda = \pm ki$$

Значит, уравнение имеет два независимых решения. Общее решение (второй интеграл) уравнения

$$q = C_1 Coskt + C_2 Sinkt$$

содержит две произвольные постоянные интегрирования C_1 и C_2, которые могут быть найдены из начальных условий:

$$t = 0, \qquad q = q_0, \qquad \dot{q} = \dot{q}_0$$

Чтобы их использовать, находим закон скорости (первый интеграл уравнения)

$$\dot{q} = -C_1 k Sinkt + C_2 k Coskt$$

Подставляя начальные условия, находим при $t = 0$

$$q_0 = C_1, \quad \dot{q}_0 = C_2\, k \quad \text{откуда}$$

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k}$$

Окончательно

$$q = q_0 Coskt + \frac{\dot{q}_0}{k} Sinkt$$

Убеждаемся, что при устойчивом положении равновесия

$$c > 0$$

система совершает периодическое движение с *круговой собственной частотой*

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}} \text{ сек}^{-1}$$

Удобнее представить закон движения в виде одной функции синуса. Для этого перейдем к новым постоянным A и α так, чтобы получить синус суммы

$$\mathrm{C}_1 = \mathrm{A}Sin\,\alpha, \;\; C_2 = ACos\,\alpha$$

Получим

$$q = Asin(kt + \alpha)$$

Здесь A – амплитуда, $(kt + \alpha)$ – фаза, α- начальная фаза колебаний. Через период колебаний T фаза синуса изменится на 2π радиан

$$k(t + T) + \alpha = kt + \alpha + 2\pi$$

следовательно, период колебаний

$$T = 2\pi/k \text{ сек}$$

Диссипативная функция Релея сил вязкого сопротивления.

Практически любая система совершает колебания в некоторой среде. При движении системы возникают силы сопротивления среды. Например, силы ***вязкого сопротивления***, пропорциональные первой степени скорости движения точек системы:

$$\boldsymbol{F}_k = -\beta_k \boldsymbol{v}_k (k = 1,2, \ldots, n)$$

Найдем обобщенную силу сопротивления, учтя тождество Лагранжа:

$$Q_{\text{сопр}} = \sum \boldsymbol{F}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r_k}}{\partial q} = -\sum \beta_k \boldsymbol{v}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v_k}}{\partial \dot{q}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}$$

Здесь введена ***диссипативная функция Релея*** сил вязкого сопротивления:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \boldsymbol{v}_k^{\boldsymbol{2}}$$

Видим, что выражение Ф имеет вид кинетической энергии T, если в последнем массы точек заменить коэффициентами сопротивления в них. Чтобы найти $Q_{\text{сопр}}$ надо записать функцию Релея в обобщенных координатах:

$$\boldsymbol{v}_k = \frac{\partial \boldsymbol{r_k}}{\partial q}\dot{q}, \qquad \Phi = \frac{1}{2}\left[\sum\left(\frac{\partial \boldsymbol{r_k}}{\partial q}\right)^2\right]\dot{q}^2 = \frac{1}{2}b(q)\dot{q}^2$$

Система линейна по_Ф, если $b(q) = Const$ (аналогия с Т).

Если нет, тогда рассматриваются малые движения: $q << 1$ – система линеаризуется: $b(q) \approx b(0)$. Значит, как и Т, функцию Релея следует вычислять в положении равновесия системы $q = 0$, что всегда упрощает вычисления.

Вязкое сопротивление осуществляется с помощью линейных и угловых демпферов. Функция Релея вычисляется по формуле

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum \alpha_i V_i^2 + \frac{1}{2}\sum \beta_j \omega_j^2$$

Где α_i- коэффициенты сопротивления линейных демпферов (амортизаторов), V_i −скорости их поршней, β_j − коэффициенты сопротивления вращению, ω_j − угловые скорости вращающихся тел.

Связь функции Релея с полной механической энергией.

Рассмотрим систему с одной степенью свободы и вязким сопротивлением. Потенциальная и кинетическая энергии, функция Релея для нелинейной системы

$$\Pi(q) = \frac{1}{2}cq^2 \quad (c = Const > 0), \quad T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2, \quad \Phi = \frac{1}{2}b(q)\dot{q}^2$$

Имеют свойства

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = 2T, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = 2\Phi, \quad \dot{\Pi} = \frac{\partial \Pi}{\partial q}\dot{q}, \quad \dot{T} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial T}{\partial q}\dot{q}$$

Умножим уравнение Лагранжа для этой системы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}$$

на $\dot{q}$

$$\dot{q}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}\dot{q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}\dot{q}$$

По формуле производной от произведения получаем

$$\dot{q}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\ddot{q} = 2\dot{T} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\ddot{q}$$

С учетом свойств функций Т, П, Ф получаем

$$2\dot{T} - \tfrac{\partial T}{\partial \dot{q}}\ddot{q} - \tfrac{\partial T}{\partial q}\dot{q} = -\dot{\Pi} - 2\Phi \qquad \text{или} \qquad \dot{T} + \dot{\Pi} = -2\Phi$$

$$\dot{\mathrm{E}} = -2\Phi$$

Этот результат можно сформулировать так:

Полная механическая энергия $\mathrm{E} = \mathrm{T} + \Pi$ ***убывает со скоростью*** *2Ф*

Влияние сил вязкого сопротивления на движение системы.

Дифференциальное уравнение системы с одной степенью свободы и вязким сопротивлением получим из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}$$

После линеаризации (если требуется) получаем квадратичные формы

$$\Pi(q) = \frac{1}{2}cq^2\,, \quad T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2, \quad \Phi = \frac{1}{2}b\dot{q}^2$$

После подстановки в уравнение Лагранжа получаем ***дифференциальное уравнение колебаний с сопротивлением***

$$a\ddot{q} = -cq - b\dot{q} \qquad \text{или}$$

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0$$

Здесь введены обозначения: коэффициент сопротивления $2n = b/a$ и квадрат собственной частоты $k^2 = c/a$

Найдем решение уравнения в виде экспоненты:

$$q = e^{\lambda t}$$

Подставив это решение в уравнение, после сокращения на $e^{\lambda t}$, получим ***характеристическое уравнение*** рассматриваемого дифференциального уравнения

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$$

Это уравнение имеет 2 корня

$$\lambda = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$$

которым соответствуют 2 независимых решения, сколько и должно быть у уравнения второго порядка.

Вид решений зависит от знака подкоренного выражения

Случай малого сопротивления $\boldsymbol{n < k}$

В этом случае корни комплексные и решение имеет вид

$$q = e^{-nt}\left(C_1 Cos\tilde{k}t + C_2 Sin\tilde{k}t\right), \qquad \tilde{k} = \sqrt{k^2 - n^2} < k$$

Это «второй интеграл» интеграл рассматриваемого дифференциального уравнения

Первый интеграл есть обобщенная скорость

$$\dot{q} = -ne^{-nt}\left(C_1 Cos\tilde{k}t + C_2 Sin\tilde{k}t\right) + e^{-nt}\left(-C_1\tilde{k}Sin\tilde{k}t + C_2\tilde{k}Cos\tilde{k}t\right)$$

Как всегда, постоянные C_1, C_2 находятся из начальных условий:

$$t = 0:\ q = q_0, \quad \dot{q} = \dot{q}_0$$

откуда

$$C_1 = q_0 \qquad\qquad C_2 = \frac{1}{\tilde{k}}\,(\dot{q}_0 + nq_0)$$

Исследуем это решение, перейдя к новым постоянным интегрирования

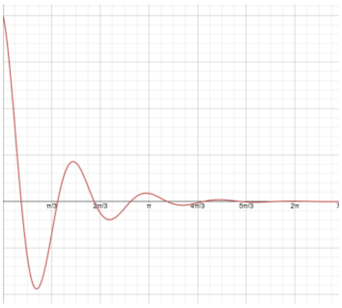
$$C_1 = ASin\alpha, \qquad C_2 = ACos\alpha$$

Теперь $$q = Ae^{-nt}Sin\tilde{k}t$$

Обозначим

$$\tilde{A} = Ae^{-nt}$$

– амплитуда, которая уменьшается с течением времени.



Видим, что система совершает затухающие колебания. Они являются квазипериодическими, т.к. только положение равновесия система проходит через равные промежутки времени. Квазипериод вычисляем, как и для колебаний без сопротивления

$$\tilde{T} = \frac{2\pi}{\tilde{k}} > T = \frac{2\pi}{k}$$

Видим, что с увеличением сопротивления n, квазипериод увеличивается и становится бесконечным при

$$n \to k$$

т.е. при $n = k$ колебания вообще прекращаются.

Быстрота затуханий колебаний характеризуется отношением соседних размахов (максимальных отклонений от положения равновесия)

$$\mu = \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{e^{-nt}}{e^{-n(t+\tilde{T}/2)}} = e^{n\tilde{T}/2}$$

называемым ***декрементом*** (затуханием). Часто используют логарифмический декремент

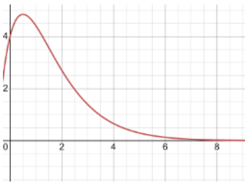
$$\gamma = ln\mu = n\tilde{T}/2$$

Измерив два соседних размаха и время $\tilde{T}/2$ можно, вычислить коэффициент сопротивления n

$$n = \frac{2}{\tilde{T}}ln\frac{a_i}{a_{i+1}}$$

2. Случай большого сопротивления $\mathbf{n} > \boldsymbol{k}$

В этом случае корни характеристического уравнения – вещественные числа,



$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$$

следовательно,

$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

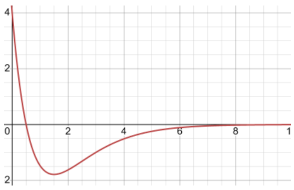
C_1 и C_2 находятся из начальных условий.

Видим, что движение не колебательное (апериодическое). Пусть начальное отклонение положительно. График движения может иметь один из трех видов.

a) $\dot{q}_0 > 0$ Система после отклонения асимптотически возвращается в положение равновесия.

$b)$ $\dot{q}_0 > 0, \quad |\dot{q}_0| < q_0(n + \sqrt{n^2 - k^2})$ Система сразу асимптотически возвращается в положение равновесия.

$c)$ $\dot{q}_0 > 0, |\dot{q}_0| > q_0(n + \sqrt{n^2 - k^2})$ Система один раз пройдет через положение равновесия и вернется в положение равновесия с другой стороны.



3. Случай $n = k$

Практически, маловероятное совпадение. Корни кратные. Апериодическое решение принимает вид.

$$q = e^{-nt}(C_1 + C_2 t)$$

Движения такие же, как и в случае $n > k$

Вынужденные колебания без сопротивления.

Как мы выяснили, консервативная система без сопротивления сохраняет полную энергию и совершает незатухающие колебания. Если учесть влияние среды (вязкое сопротивления), то колебания либо отсутствуют, либо затухают, а полная энергия системы убывает, переходя в среду.

Энергия может и поступать в систему из среды. Пусть действие среды на систему выражается периодической обобщенной силой. Как известно, любую периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$Q = \sum H_i Sin(p_i t + \delta_i)$$

Здесь H_i —амплитуда i-ой гармоники, p_i – вынуждающая частота этой гармоники, δ_i – начальная фаза этой гармоники.

Уравнение Лагранжа такой системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q$$

Подставив квадратичные формы Т и П

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2}cq^2,$$

получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$a\ddot{q} + cq = \sum H_i Sin(p_i t + \delta_i)$$

Его решение складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения. Частное решение будет иметь вид правой част, т.е представлять из себя сумму одинаковых по виду решений (гармоник). Поэтому, нам достаточно рассмотреть обобщенную силу в виде только одной из гармоник

$$Q = HSin(pt + \delta)$$

Получим дифференциальное ***уравнение вынужденных колебаний без сопротивления***

$$\ddot{q} + k^2 q = hSin(pt + \delta), \qquad h = \frac{H}{a}$$

Решение складывается из общего решения однородного уравнения

$$q_{oo} = C_1 Coskt + C_2 Sinkt$$

и частного решения, которое будем искать в виде правой части

$$q_ч = ASin(pt + \delta)$$

А – амплитуда частного решения, Найдем А и ε.

$$\ddot{q}_ч = -p^2 ASin(pt + \delta)$$

Подставляя в уравнение, после сокращения на Sin, получаем

$$(k^2 - p^2)A = h \qquad A = \frac{h}{k^2 - p^2}$$

Частное решение имеет вид

$$q_ч = \frac{h}{k^2 - p^2} Sin(pt + \delta)$$

Теперь полное решение приобретает вид

$$q = C_1 Coskt + C_2 Sinkt + \frac{h}{k^2 - p^2}\, Sin(pt + \delta)$$

$$\dot{q} = -kC_1 Sinkt + kC_2 Coskt + \frac{ph}{k^2 - p^2}\, Cos(pt + \delta)$$

Найдем C_1, C_2 из начальных условий:

$$t = 0: \qquad q = q_0; \qquad \dot{q} = \dot{q}_0$$

$$q_0 = C_1 + \frac{h}{k^2 - p^2} Sin\delta \qquad \dot{q}_0 = kC_2 + \frac{ph}{k^2 - p^2} Cos\delta$$

Откуда

$$C_1 = q_0 - \frac{h}{k^2 - p^2} Sin\delta \qquad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k} + \frac{p}{k}\frac{h}{k^2 - p^2} Cos\delta$$

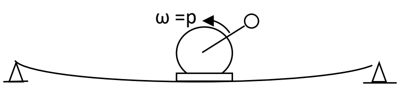
Подставив C_1и C_2 в решение, найдем закон движения

$$q = (q_0 Coskt + \frac{\dot{q}_0}{k} Sinkt) - \frac{h}{k^2 - p^2}\left(Sin\delta\ Coskt + \frac{p}{k}\ Cos\delta\ Sinkt\right) + \frac{h}{k^2 - p^2}\ Sin(pt + \delta)$$

Видим, что движение системы состоит из трех колебаний. Первым стоит колебание с собственной частотой k и амплитудой, зависящей от начальных условий, вторым – колебание с собственной частотой k и амплитудой, не зависящей от начальных условий, и третьим – вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы p и амплитудой, не зависящей от начальных условий.

Биения и резонанс при отсутствии сопротивления.

Как возникает вынуждающая сила? Ее можно создать, поставив электромотор с неуравновешенной массой на упругую балку. Вынуждающей частотой $p = \omega$ будет угловая скорость вращения электромотора. При $\omega = 0$ мотор колеблется на балке с собственной частотой k. Если включить мотор, то при $\omega \to k$ амплитуда А возрастает, стремясь к бесконечности.



Выясним, как ведет себя при этом система. Для простоты положим начальные условия нулевыми. Тогда $p/k \sim 1$ и решение приобретет вид:

$$q_ч = \frac{h}{k^2 - p^2}[Sin(pt + \delta) - Sin(kt + \delta)] =$$

$$= \frac{2h}{k^2 - p^2} Sin\frac{(p - k)t}{2}\ Cos(pt + \delta) = A(t)\ Cos(pt + \delta)$$

Видим, что при $p \to k$ амплитуда вынужденных колебаний $A(t)$ становится периодической функцией малой частоты $\frac{(p-k)}{2}$. Такое движение называется ***биениями***. Биения можно слышать в моторном самолете, когда частота вращения мотора приближается к собственной частоте какой-то детали фюзеляжа.

Резонанс

Найденное ранее частное решение теряет смысл при $p = k$, поскольку его амплитуда

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}$$

стремится к бесконечности. Явление увеличения амплитуды вынужденных колебаний А при определенных значениях вынуждающей частоты р называется ***резонансом.*** Выясним, как изменяется амплитуда во времени при $p = k$.

Попробуем найти частное решение в виде

$$q_ч = BtCos(pt + \delta)$$

$$\dot{q}_ч = BCos(pt + \delta) - BptSin(pt + \delta)$$

$$\ddot{q}_ч = -BpSin(pt + \delta) - BpSin(pt + \delta) - Bp^2tCos(pt + \delta)$$

Подставив эти выражения в дифференциальное уравнение, с учетом $p = k$ получим

$$B = -\frac{h}{2p}$$

и частное решение

$$q_ч = -\frac{h}{2p}tCos(pt + \delta) = A(t)\ Cos(pt + \delta)$$

Итак, если двигатель на балке сразу запустить с угловой скоростью $p = k$, то амплитуда вынужденных колебаний (и деформация балки) будет линейно возрастать во времени. При достижении деформаций предельных значений, балка сломается.

Зависимость коэффициента динамичности

Построим зависимость амплитуды А собственно вынужденных колебаний от вынуждающей частоты р. Для построения качественных зависимостей принято переходить к безразмерным величинам. Вместо амплитуды А рассмотрим ее отношение к «статическому отклонению»

$$A_{ст} = \frac{H}{c} = \frac{H}{a}\frac{a}{c} = \frac{h}{k^2},$$

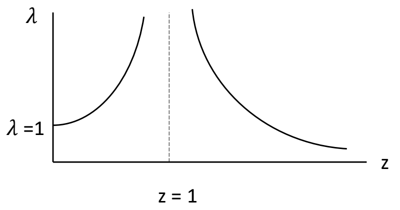
которое называется ***коэффициентом динамичности.***

$$\lambda = \frac{A}{A_{ст}} = \frac{1}{1 - z^2}$$

Здесь

$z = \frac{p}{k}$ – безразмерная вынуждающая частота, называемая ***коэффициентом настройки*** (вынуждающей частоты на собственную частоту).

При $z = 0$ $\lambda = 1$, при $z \to \infty$ $\lambda \to 0$. График $\lambda(z)$ приобретает вид



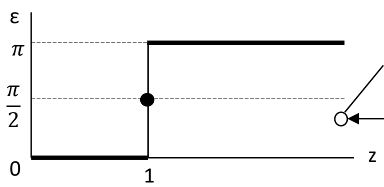
Чтобы избежать опасности разрушения системы, следует избегать работы вблизи резонанса z = 1.

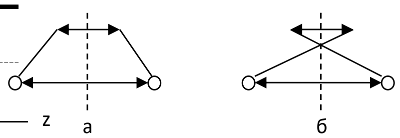
Зависимость сдвига фазы ε (z)

Сдвигом фазы ε называют разность между фазой вынуждающей силы (pt+δ) и фазой частного решения. Найдем ε при различных значениях z.

Частное решение	Сдвиг фаз
При $z < 1$ $(p < k)$: $q_ч = \frac{h}{\lvert k^2 - p^2\rvert} Sin(pt + \delta)$	ε = 0
При $z = 1$ $(p = k)$: $q_ч = -\frac{h}{2p} tCos(pt + \delta) = \frac{h}{2p} tSin\left(pt + \delta - \frac{\pi}{2}\right)$	ε = $\frac{\pi}{2}$
При $z > 1$ $(p > k)$: $q_ч = -\frac{h}{\lvert k^2 - p^2\rvert} Sin(pt + \delta) = \frac{h}{\lvert k^2 - p^2\rvert} Sin(pt + \delta - \pi)$	ε = π

Теперь можем изобразить график зависимости ε (z).





Сдвиг фаз можно наблюдать, раскачивая «раскидай»- мячик на резинке. Если частота движений руки меньше собственной частоты колебаний раскидая, то шарик движется в одной фазе (синфазно) с рукой (а). При большой частоте движений руки шарик движется «в противофазе» с рукой (б).

Вынужденные колебания с вязким сопротивлением. Закон движения.

Рассматривается все та же система, на которую наряду с потенциальными силами действуют силы сопротивления и возмущающие силы.

Потенциальные силы определяются функцией потенциальной энергии $\Pi(q)$: $\Pi(0) = 0$ – нулевой уровень выбран в положении устойчивого равновесия, где $\Pi'(0) = 0$ и $\Pi''(0) = c > 0$.

Силы вязкого сопротивления характеризуются функцией Релея Ф, вынуждающие силы представлены обобщенной силой Q. После линеаризации имеем квадратичные формы:

$$\Pi = \frac{1}{2}cq^2\ (c > 0) \qquad T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2\ (a > 0) \qquad \Phi = \frac{1}{2}b\dot{q}^2\ \ (b > 0)$$

И вынуждающую силу

$$Q = HSin(pt + \delta)$$

Записываем уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + Q$$

Подставляем выражения для Т, П, Ф, Q и получаем уравнение

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = hSin(pt + \delta)$$

$$2n = \frac{b}{a}; \quad k^2 = \frac{c}{a}; \quad h = \frac{H}{a}$$

Решение этого неоднородного уравнения состоит из общего решения однородного уравнения q_{oo} и частного решения неоднородного уравнения $q_ч$.

Решение q_{oo} при малом сопротивлении $n < k$ затухает со временем

$$q_{oo} = e^{-nt}\left(C_1 Cos\tilde{k}t + C_2 Sin\tilde{k}t\right), \qquad \tilde{k} = \sqrt{k^2 - n^2} < k$$

Частное решение ищем в виде:

$q_ч = ASin(pt + \delta - \varepsilon)$, А- амплитуда, $\varepsilon -$ сдвиг фазы.

$$\dot{q}_ч = Ap\ Cos(pt + \delta - \varepsilon) \qquad \ddot{q}_ч = -Ap^2 Sin(pt + \delta - \varepsilon)$$

Правую часть уравнения представляем в виде

$$hSin(pt + \delta) = hSin[(pt + \delta - \varepsilon) + \varepsilon] = h\ Sin\varepsilon\ Cos(pt + \delta - \varepsilon) + h\ Cos\varepsilon\ Sin(pt + \delta - \varepsilon)$$

После подстановки в уравнение, находим

$$A(k^2 - p^2)Sin(pt + \delta - \varepsilon) + 2n\ Ap\ Cos(pt + \delta - \varepsilon) =$$
$$= h\ Sin\varepsilon\ Cos(pt + \delta - \varepsilon) + h\ Cos\varepsilon\ Sin(pt + \delta - \varepsilon)$$

Собираем коэффициенты при $Sin(pt + \delta - \varepsilon)$ и $Cos(pt + \delta - \varepsilon)$

$Sin(pt + \delta - \varepsilon)$: $\quad A(k^2 - p^2) = h\ Cos\varepsilon$

$Cos(pt + \delta - \varepsilon)$: $\quad 2n\ Ap = h\ Sin\varepsilon$

Возведя в квадрат и сложив, найдем амплитуду вынужденных колебаний:

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}$$

Поделив второе на первое, найдем тангенс сдвига фазы:

$$tg\varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}$$

Окончательное частное решение

$$q_ч = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} Sin(pt + \delta - \varepsilon)$$

Общее решение дифференциального уравнения колебаний ($n < k$):

$$q = e^{-nt}\left(C_1 Cos\tilde{k}t + C_2 Sin\tilde{k}t\right) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} Sin(pt + \delta - \varepsilon)$$

$$\dot{q} = -ne^{-nt}\left(C_1 Cos\tilde{k} + C_2 Sin\tilde{k}t\right) + e^{-nt}\left(-C_1\tilde{k}Sin\tilde{k}t + C_2\tilde{k}Cos\tilde{k}t\right)$$
$$+ \frac{hp}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} Cos(pt + \delta - \varepsilon)$$

Как всегда, постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из начальных условий

$$t = 0: \quad q = q_0; \quad \dot{q} = \dot{q}_0$$

$$q_0 = C_1 + ASin(\delta - \varepsilon) \qquad \dot{q}_0 = -nC_1 + C_2\tilde{k} + ACos(\delta - \varepsilon)$$

Откуда

$$C_1 = q_0 - ASin(\delta - \varepsilon) \qquad C_2 = \frac{1}{\tilde{k}}(\dot{q}_0 + nC_1 - ACos(\delta - \varepsilon))$$

Видим, что C_1 и C_2 состоят из начальных условий и слагаемых, зависящих от вынуждающей силы. Подставив C_1 и C_2 в решение, увидим, что, как и в вынужденных колебаниях без сопротивления, движения системы состоит из трёх колебаний ($n < k$):

с квазичастотой $\tilde{k}$ и амплитудой, зависящей от начальных условий,

с квазичастотой $\tilde{k}$ и амплитудой, не зависящей от начальных условий

собственно вынужденные колебания с частотой p.

Независимо от величины сопротивления n, первые два колебания со временем исчезает и остается собственно вынужденные колебания (частное решение). Поэтому оно представляет особый интерес.

Зависимости $\lambda(z)$ **и** $\varepsilon\,(z)$

Качественные характеристики построим в безразмерных величинах коэффициентов динамичности λ и настройки z

$$\lambda = \frac{A}{A_{\text{ст}}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\nu^2 z^2}} \qquad tg\varepsilon = \frac{2\nu z}{1 - z^2}$$

Где $\nu = \frac{n}{k}$ – безразмерный коэффициент сопротивления.

Исследуем зависимость $\lambda(z)$ на экстремумы.

Очевидно, что при $z = 0$, $\lambda = 1$, а при $z \to \infty \quad \lambda \to 0$

Рассмотрим подкоренное выражение

$$y = (1 - z^2)^2 + 4\nu^2 z^2$$

Найдем точки подозрительные на экстремум.

$$y' = -4z(1 - z^2) + 8\nu^2 z = 0$$

Корень $z_1 = 0$ существует при любом сопротивлении ν

Второй корень найдем из

$$1 - z^2 - 2\nu^2 = 0 \qquad\qquad z_2 = \sqrt{1 - 2\nu^2} < 1$$

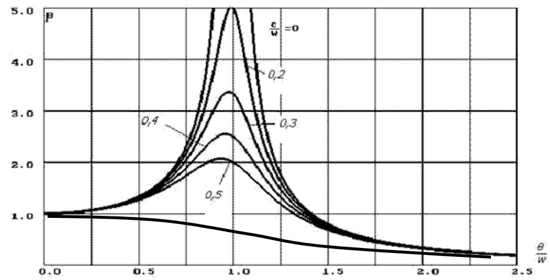
Этот корень уменьшается с увеличением сопротивления и исчезает при сопротивлении

$$\nu > \nu^* = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Выясним вид экстремума в нуле.

$$y'' = -4(1 - z^2) + 8z^2 + 8\nu^2|_{z=0} = -4(1 - 2\nu^2)$$

При $\nu < \nu^*$ производная в нуле отрицательна, значит y имеет max, а λ —минимум в нуле.



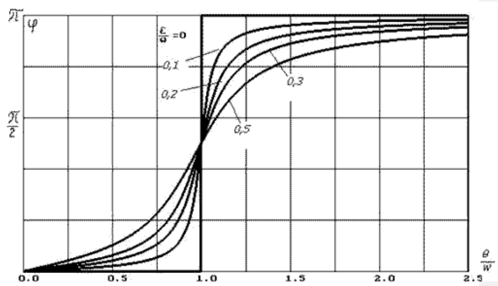
Именно при $\nu < \nu^*$, существует и второй корень z_2, в котором λ имеет максимум, поскольку за минимумом следует максимум.

Итак, график функции $\lambda(z)$ зависит от величины сопротивления ν: при $\nu < \nu^*$ функция имеет минимум в нуле и максимум (***резонанс***) при z_2. Значение z_2 и величина резонансной амплитуды уменьшаются с увеличением сопротивления ν.

При большом сопротивлении $\nu > \nu^*$ функция имеет только максимум в нуле.

Видим, что при $\nu < \nu^*$, коэффициент динамичности λ (амплитуда) вынужденных колебаний достигает максимального значения при z_2. Как известно, увеличение амплитуды при некоторых значениях вынуждающей частоты (z) называется ***резонансом***. Таким образом, при наличии сопротивления резонанс происходит при z_2.

При увеличении сопротивления значение z_2 уменьшается, и резонанс достигается все раньше. Можно показать, что при этом амплитуда резонансная будет уменьшаться. При $\nu \geq \nu^*$ резонанс исчезает. Как известно, при отсутствии сопротивления резонанс наступает при $z = 1$.



Исследуем *ε (z)*

При $z = 1$ Все графики проходят через $\pi/2$.

Выводы:

1. Консервативная система (все силы потенциальны) совершает незатухающие колебания около положения устойчивого равновесия ($c > 0$).

2. Среда (сила вязкого сопротивления) отнимает у системы полную механическую энергию, поэтому даже при малом сопротивления колебания будут затухающими, а при большом сопротивления вообще отсутствуют.
3. Если в систему без сопротивления поступает энергия в виде периодической вынуждающей силы, то появляются вынужденные колебания с частотой вынужденной силы. Их амплитуда достигает бесконечного значения при $p = k$ (явление резонанса), если система не разрушится раньше.
4. Наиболее общей моделью является модель вынужденных колебаний с сопротивления, при которых увеличение сопротивления уменьшает резонансную амплитуду и сводит явление резонанса к нулю при достижении сопротивления ν^* (резонанс исчезает).
5. Опасного явления резонанса можно избежать если:

а) работать вдали от зоны резонанса

б) исключить резонанс с помощью демпферов.

Есть механизмы, в которых колебания полезны, например, трамбовка, отбойный молоток, транспортер (колеблется).