

Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Журавлева Е.Ю.

Задания для практических занятий
по динамике механических систем
с использованием программных средств

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2026

УДК 534.111:004

Журавлева Е.Ю. Задания для практических занятий по динамике механических систем с использованием программных средств. Учебно-методическое пособие. 2026. – 85 с.

Соответствует содержанию разделов дисциплины «Теоретическая механика» подготовки студентов по направлениям 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств» и 15.03.06 «Мехатроника и робототехника».

Содержит 2 задания из 30 вариантов по исследованию свободных и вынужденных колебаний систем двух тел с одной и с двумя степенями свободы.

Излагаются особенности уравнений Лагранжа второго рода при составлении дифференциальных уравнений, описывающих колебания в системах с одной и двумя степенями свободы. Рассматриваются методы аналитического решения линейных ДУ, а также их решение и визуализация результатов средствами символьной математики прикладного пакета Symbolic Math Toolbox – MATLAB.

Изложение сопровождается программными кодами с подробными комментариями.

Предназначено для студентов и аспирантов, изучающих раздел «Колебания механической системы твердых тел» дисциплины «Теоретическая механика», а также для преподавателей и инженеров, использующих пакет Symbolic Math Toolbox – MATLAB.

Ил. 30. Табл. 5. Библиогр.: 10 назв.

Оглавление

Введение.....	6
1. Исследование колебаний системы с одной степенью свободы с применением уравнения Лагранжа 2-го рода	10
1.1. Свободные колебания консервативной механической системы. Использование лагранжиана в уравнениях Лагранжа.....	10
1.2. Свободные колебания МС с учетом сил вязкого трения. Уравнение Лагранжа 2-го рода общего вида.....	14
1.3. Вынужденные колебания системы без учета сил сопротивления.....	18
1.3.1. Резонанс.....	21
1.3.2. Биения.....	21
1.4. Учет вязкого трения при вынужденных колебаниях.....	22
1.5. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) вынужденных колебаний	25
1.5.1. График АЧХ.....	27
1.6. Фазочастотная характеристика (ФЧХ) вынужденных колебаний	28
1.6.1. График ФЧХ.....	28
2. Пример выполнения практического задания 1 «Исследование колебаний системы двух тел с одной степенью свободы» с использованием символьной математики MATLAB.	30
2.1. Описание колебательной системы с одной степенью свободы.....	30
2.2. Инструкции к выполнению практического задания 1.....	31
2.3. Решение. Обоснование числа степеней свободы системы и выбор обобщенной координаты.	32
2.4. Кинематические соотношения связей с учетом малости колебаний.....	32
2.5. Кинетическая энергия системы. Инерционный коэффициент a *.....	33
2.6. Потенциальная энергия системы. Упругий коэффициент c *	34
2.7. Свободные колебания без учета демпфирования.	35
2.7.1. График свободных незатухающих колебаний диска.....	37
2.8. Свободные колебания при наличии вязкого трения.....	37
2.8.1. Безразмерный относительный коэффициент затухания колебаний ..	39

2.8.2. График свободных затухающих колебаний диска при учете сил трения	40
2.8.3. Коды совместного построения двух графиков в Matlab	40
2.8.4. Вычисление декремента dscr и логарифмического декремента η по графику затухающих колебаний.	41
2.9. Вынужденные колебания без учета демпфирования. Резонанс. Биения .	42
2.9.1. График вынужденных колебаний без учета трения	44
2.10. Вынужденные колебания системы с учетом вязкого трения.....	45
2.10.1. Графики колебаний	46
2.10.2. Коды построения серии графиков на одном поле в MATLAB	47
2.10.3. График АЧХ.....	47
2.10.4. Коды построения графика АЧХ в MATLAB.....	48
2.10.5. График ФЧХ	49
2.10.6. Коды построения графика ФЧХ в MATLAB	50
2.11. Применение символьной математики MATLAB для интегрирования ЛНДУ второго порядка и построения всех графиков.....	50
2.11.1. Коды последовательного исследования колебаний и построения всех необходимых графиков в MATLAB	51
3. Исследование свободных колебаний в системе с двумя степенями свободы	54
3.1. Особенности решения для системы с двумя степенями свободы.....	54
3.2. Уравнения Лагранжа 2-го рода для консервативной механической системы	55
3.3. Матричная форма записи системы линейных однородных уравнений ...	56
3.4. Собственный вектор матрицы динамичности – вектор коэффициентов форм. Главные колебания системы.....	56
3.5. Спектр собственных частот	57
3.6. Матрица динамичности. Матричный способ вычисления собственных частот и собственных векторов форм.....	58
3.7. Вычисление собственных чисел и собственных векторов матриц программными средствами Mathcad и MATLAB	59

4. Пример выполнения практического задания 2 «Исследование колебаний консервативной системы двух тел с двумя степенями свободы» с использованием символьной математики MATLAB.	60
4.1. Описание колебательной системы с двумя степенями свободы	60
4.2. Инструкции к выполнению практического задания 2.....	61
4.3. Обоснование числа степеней свободы и выбор обобщенных координат....	62
4.4. Система уравнений Лагранжа 2-го рода для консервативной механической системы с двумя степенями свободы	62
4.5. Кинетическая энергия системы в виде квадратичной формы обобщенных скоростей. Инерционная матрица A	62
4.6. Потенциальная энергия системы в виде квадратичной формы обобщенных координат. Матрица жесткости C	63
4.7. Линейные дифференциальные уравнения свободных колебаний системы	65
4.8. Коды MATLAB для вычисления собственных векторов	67
4.9. Обобщённые координаты как суммы главных колебаний.....	68
4.10. Изображения форм главных колебаний	69
4.11. Применение команды <i>linsolve</i> A, B MATLAB для решения линейной системы алгебраических уравнений относительно амплитуд $D1$ и $D2$ и начальных фаз $\beta1$ и $\beta2$ главных колебаний.....	70
4.11.1. Совмещенные графики свободных колебаний тел системы	73
4.12. Коды вычисления амплитуд $D1$ и $D2$, а также начальных фаз $\beta1$ и $\beta2$ по заданным начальным условиям с помощью символьной математики MATLAB.	74

Введение

Нередко, приступая к теме «Механические колебания», студенты бывают растеряны, не зная, какой закон динамики следует применять для анализа колебаний, полагая, что колебания должны подчиняться каким-то особым законам. Им приходится пояснять, что при колебаниях тело может двигаться поступательно (рис.1, а), может вращаться вокруг оси (рис.1,б), может выполнять плоское движение (рис. 1,в), сферическое, но при правильном учете упругих свойств и действующих сил движения по своему характеру окажутся периодическими.



Рис. 1. Колебания тел при трех разных видах движения: а) поступательном – грузик на пружине; б) вращательном – маятник метронома; в) плоскопараллельном – маятник Максвелла.

Какие же законы динамики используются для составления дифференциальных уравнений колебаний?

В литературе, посвященной исследованию колебаний [2, 6-10], можно видеть, что дифференциальные уравнения колебаний простейших тел вроде грузика на пружинке или диска, вращающегося вокруг оси с прикрепленной к ней спиральной пружиной, получаются из первого и второго фундаментальных законов динамики Ньютона-Эйлера.

Колебания более сложных систем, особенно систем с несколькими степенями свободы, традиционно описываются с помощью

математического аппарата уравнений Лагранжа второго рода [2, 4-10].

Знакомство с этими уравнениями и решение с их помощью задач динамики системы является составной частью университетской программы курса теоретической механики. Остановим внимание на этих уравнениях.

Исторически уравнения Лагранжа-Эйлера, или уравнения Лагранжа второго рода, появились в конце XVIII в. при решении вариационных задач, связанных с поиском траекторий, обеспечивающих минимум некоего функционала. Оказалось, что полученные результаты можно применять и как алгоритм вывода дифференциальных уравнений движения механических систем, причем базовыми функциями при работе с уравнениями Лагранжа служат кинетическая и потенциальная энергии системы. Именно переход на более высокий уровень обобщения представлений о состоянии движущейся системы – «энергетический» – стал причиной того, что уравнения Лагранжа получили широкое применение не только в классической механике, но и в квантовой механике, в теоретической физике, в задачах оптимизации и в других областях.

Уравнения Лагранжа позволяют рассматривать системы с разным числом степеней свободы, с произвольным количеством тел и разным типом движения каждого тела, оставляют свободу выбора обобщенных координат и не накладывают никаких условий на их природу [5].

В то же время именно энергетический подход, присущий этим уравнениям, считал вторичным П.А. Жилин, говоря о нем, как об инструменте, который уступает векторным методам Эйлера-Ньютона в наглядности, универсальности и физической полноте, особенно при описании вращательного движения и неконсервативных систем.

«Скалярный формализм Лагранжа — это «математический фасад», который часто мешает глубокому пониманию механики» [3].

Для студентов при первом знакомстве с этими уравнениями такие новые термины, как «обобщенные координаты», «обобщенные скорости», «обобщенные силы», величины сугубо скалярные, не отражающие направленного действия сил, представляют психологическую сложность. Даже сам факт, что для нахождения *обобщенной силы* существует четыре различных способа её вычисления, что «сила» может иметь размерность момента, если за обобщенную координату принят угол поворота тела, – все это затрудняет смысловое восприятие этого понятия. Сам факт появления термина «обобщенный» указывает на некое множество элементов, на их перебор, на сравнение их свойств, поиск общности, на опыт, которого у студента еще не было в достаточной мере. Все эти движения ума студент не может повторить, когда только знакомится с уравнениями аналитической механики. И поэтому важно показать непосредственную взаимосвязь уравнений Лагранжа с уже известными теоремами динамики.

«Уравнения Лагранжа второго рода напрямую следуют из **теоремы об изменении кинетической энергии** $\dot{T} = N^{ext} + N^{int}$, записанной в обобщенных координатах и скоростях»

«Теорема $\dot{T} = N^{ext} + N^{int}$ при переходе к обобщенным скоростям \dot{x}_s принимает вид

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_s} - Q_s \right] \cdot \dot{x}_s = 0 \quad (\sum_s !),$$

...и сомножители при обобщенных скоростях \dot{x}_s равны нулю вследствие независимости этих скоростей

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_s} = Q_s, \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

(сохранены обозначения автора [4, С.89-90]).

Тем не менее, при исследовании колебаний механических систем, состоящих из нескольких тел с разным типом движения, именно уравнения Лагранжа второго рода оказываются удобным инструментом получения дифференциальных уравнений колебательного движения.

В настоящем методическом пособии будут рассматриваться два вида таких уравнений: 1) для консервативных систем и 2) для неконсервативных систем. Первые будем составлять по традиции через функцию Лагранжа L , вторые – через кинетическую энергию T и обобщенные силы Q_j . Для вычисления обобщенных сил будем использовать только два способа из четырех: для консервативных сил – через потенциальную энергию Π , а для всех остальных – через мощность N . Обобщенная координата и обобщенная скорость будут обозначаться традиционно символами q_j и \dot{q}_j .

На рисунке 2 представлено 4 варианта колебательных систем, состоящих из двух тел с жесткими и упругими связями. Слева – схемы с одной степенью свободы, где оба тела соединены жесткими тягами с шарнирными креплениями. В правом столбце – системы с двумя степенями свободы, поскольку соединяющая тела упругая связь позволяет каждому из тел двигаться независимо одно от другого.

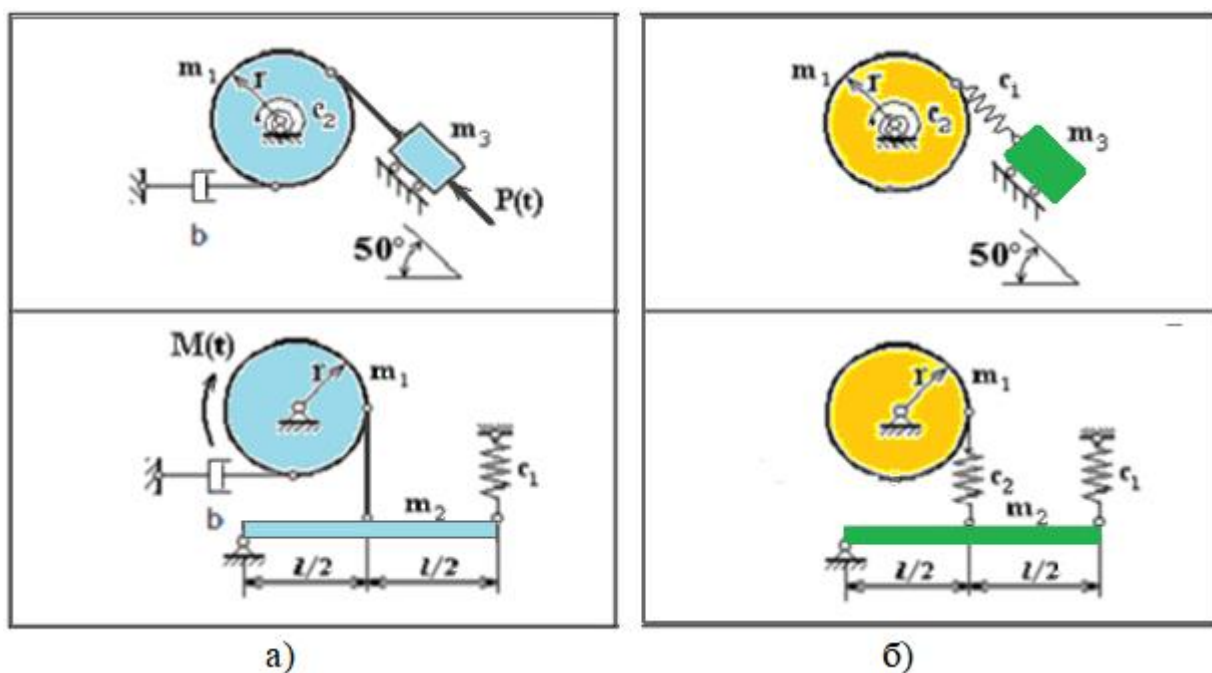


Рис.2. Примеры колебательных систем, составленных из двух тел:
 а) с одной степенью свободы; б) с двумя степенями свободы.

Подобные схемы в количестве 30 вариантов помещены в конце пособия в Приложениях 1 и 2 для самостоятельного выполнения практических работ по исследованию колебаний. Там же расположены и таблицы исходных данных.

Примеры выполнения заданий подробно разобраны в тексте пособия. Решение дифференциальных уравнений представлено как аналитически, так и с использованием программных средств символьной математики (Symbolic Math Toolbox) пакета MATLAB.

Студенты могут пользоваться кодами программ символьной математики MATLAB, приведенными в примерах решения, для расчетов и построения графиков. Тексты программ, снабженные подробными комментариями, могут помочь в знакомстве с языком программирования и освоения готовых пакетов решения линейных однородных и неоднородных уравнений.

1. Исследование колебаний системы с одной степенью свободы с применением уравнения Лагранжа 2-го рода

1.1. Свободные колебания консервативной механической системы.

Использование лагранжиана .

Свободные колебания возникают относительно устойчивого положения равновесия, если в начальный момент времени хотя бы одно из тел получает отклонение или/и толчок, а в дальнейшем дополнительных воздействий на систему не оказывается.

Если процесс колебаний происходит под действием только потенциальных сил, сил тяжести и сил упругости, а силы сопротивления не действуют или ими можно пренебречь, то полная механическая энергия системы сохраняется, поэтому система называется *консервативной*. Часто и сами потенциальные силы также называют *консервативными*.

В случае малых колебаний кинетическую энергию T будем вычислять с точностью, при которой она будет иметь вид квадратичной формы обобщенной скорости \dot{q}

$$T = a^* \dot{q}^2 / 2. \quad (1.1)$$

Коэффициента a^* назовем *инерционным коэффициентом системы*.

Потенциальную энергию системы Π будем вычислять с точностью, при которой она будет иметь вид квадратичной формы обобщенной координаты q

$$\Pi = c^* q^2 / 2. \quad (1.2)$$

Коэффициента c^* назовем *упругим коэффициентом системы*

Для консервативной механической системы по установившейся традиции уравнение Лагранжа 2-го рода составляют в специальной форме через функцию Лагранжа, или лагранжиан:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (1.3)$$

Лагранжиан (функция Лагранжа) L , равен разности между кинетической и потенциальной энергиями системы $L = T - \Pi$ и называется также «кинетическим потенциалом». Эта функция, в отличие от полной механической энергии $E = T + \Pi$ не подчиняется закону сохранения, не является универсальным понятием механики, и возможно, была введена автором лишь ради «красоты уравнения». Отдадим дань этой красоте и используем ее для составления уравнения движения

Лагранжиан будет квадратичной формой и обобщенной скорости, и обобщенной координаты

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} a^* \dot{q}^2 - \frac{1}{2} c^* q^2. \quad (1.4)$$

Частные производные от L по обобщенной скорости и обобщенной координате, а также полная производная по времени примут вид

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = a^* \dot{q}; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -c^* q; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = a^* \ddot{q}$$

Подставляя эти производные в уравнение Лагранжа (1.3), получаем линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами a^* и c^*

$$a^* \ddot{q} + c^* q = 0. \quad (1.5)$$

В нормальной форме с коэффициентом при старшей производной, равным единице, это уравнение принимает вид

$$\ddot{q} + k^2 q = 0, \quad (1.6)$$

где $k = \sqrt{\frac{c^*}{a^*}}$ – это *круговая частота* колебаний системы, или *собственная частота незатухающих свободных колебаний системы без учета сил трения*.

Характеристическое уравнение для данного случая

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm ik$, поэтому решение будет линейной комбинацией тригонометрических функций

$$q(t) = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt). \quad (1.7)$$

Полученное выражение можно рассматривать, как раскрытый синус суммы,

$$q(t) = A \sin(kt + \beta). \quad (1.8)$$

что более удобно для построения графика колебаний.

В данном выражении амплитуда колебаний A и начальный сдвиг фаз β связаны с постоянными интегрирования C_1 и C_2 простыми формулами

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad (1.9)$$

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{C_1}{C_2}. \quad (1.10)$$

Для применения начальных условий (НУ) задачи требуется составить два выражения для обобщенной координаты и обобщенной скорости в произвольный момент времени

$$q(t) = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt),$$

$$\dot{q}(t) = -kC_1 \sin(kt) + kC_2 \cos(kt).$$

Подставляя в эти выражения (НУ) при $t = 0$; $q(0) = q_0$; $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$

$$\begin{cases} q_0 = C_1 + 0; \\ \dot{q}_0 = -0 + kC_2, \end{cases}$$

можно найти постоянные интегрирования: $C_1 = q_0$, $C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k}$.

Таким образом, общее решение ЛОДУ в виде суммы гармонических функций частоты k , которая не зависит от начальных условий, имеет вид

$$q(t) = q_0 \cos(kt) + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin(kt). \quad (1.11)$$

Амплитуда свободных колебаний без трения выражается через найденные значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 по формуле

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}}, \quad (1.12)$$

Начальный фазовый сдвиг

$$\beta = \arctg\left(\frac{q_0 k}{\dot{q}_0}\right), \quad (1.13)$$

$$T^* = \frac{2\pi}{k} - \text{период свободных колебаний без трения}, \quad (1.14)$$

Общее решение ЛОДУ в виде одной гармонической функции (1.8) частоты k представляет собой незатухающие гармонические колебания постоянной амплитуды, размер которой определяется начальными условиями

$$q(t) = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}} \sin\left(kt + \arctg\left(\frac{q_0 k}{\dot{q}_0}\right)\right). \quad (1.15)$$

Круговая частота свободных колебаний $k = \sqrt{\frac{c^*}{a^*}}$ имеет размерность $[k] = 1 \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 1 \text{ с}^{-1}$.

$$\text{Круговую частоту и период связывает соотношение } k = \frac{2\pi}{T^*}. \quad (1.16)$$

Круговая частота k показывает, какое число полных колебаний система совершает за 2π секунд.

Частота в герцах $\nu = \frac{1}{T}$ Гц показывает число колебаний за 1 секунду.

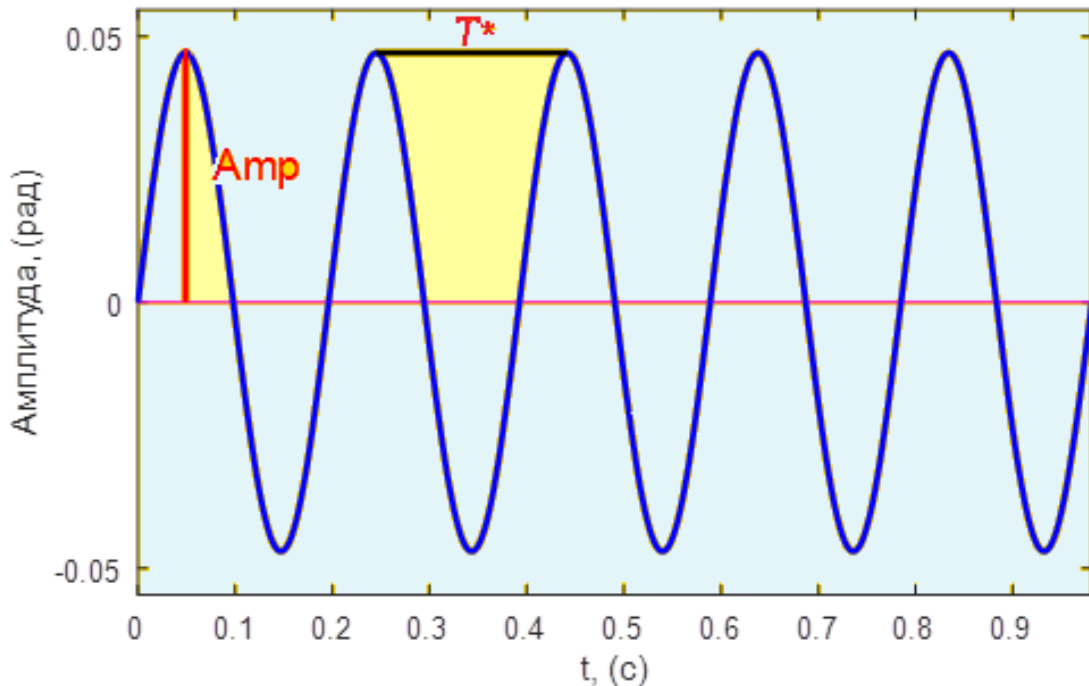


Рис. 3. График $q(t)$ незатухающих свободных колебаний системы без учета сил трения. A – постоянная амплитуда колебаний, T^* – период колебаний.

1.2. Свободные колебания МС с учетом сил вязкого трения. Уравнение Лагранжа 2-го рода общего вида

При учете сил трения полная механическая энергия системы убывает, превращаясь в тепловую энергию, поэтому система не остаётся консервативной. В таком случае не принято использовать функцию L в уравнении Лагранжа второго рода, и оно записывается в общем виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^{\Pi} + Q^{\text{сопр}}, \quad (1.17)$$

где в левой части производные берутся от кинетической энергии системы, а в правой части стоит сумма двух обобщенных сил: потенциальной Q^{Π} , (действие сил тяжести и сил упругости), и обобщенной силы

сопротивления $Q^{\text{сопр}}$ (действие силы вязкого трения). Структура уравнения подобна второму закону Ньютона: слева от знака равно получим инерционный коэффициент, умноженный на обобщенное ускорение, справа – все силы, влияющие на величину этого ускорения.

Кинетическая энергия по-прежнему есть квадратичная форма обобщенной скорости $T = \frac{1}{2} a^* \dot{q}^2$ и не зависит явно от обобщенной координаты, поэтому частная производная по обобщенной координате от этой функции будет равна нулю $\frac{\partial T}{\partial q} = 0$. Вычисление частной производной от кинетической энергии по обобщенной скорости $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a^* \dot{q}$ избавляет функцию от квадратичной зависимости, а следующее действие – полная производная по времени – приводит к появлению обобщенного ускорения $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = a^* \ddot{q}$.

Для всех типов колебаний МС с одной степенью свободы левая часть уравнения Лагранжа общего вида будет выглядеть одинаково:

$$a^* \ddot{q}. \quad (1.18)$$

Обобщенную силу потенциальных сил Q^{Π} будем вычислять через потенциальную энергию системы $\Pi = \frac{1}{2} c^* q^2$ по формуле

$$Q^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -c^* q. \quad (1.19)$$

Чтобы ДУ с учетом трения также относилось к классу линейных и имело аналитическое решение, в систему вводится так называемое «вязкое» трение. В этом случае сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости точки приложения $\vec{F}_{\text{сопр}} = -b\vec{v}$. Обобщенная сила также будет линейно зависеть от обобщенной скорости и будет иметь знак «минус»

$$Q^{\text{сопр}} = -b^* \dot{q}. \quad (1.20)$$

Обычно эту силу вычисляют через диссипативную функцию Рэлея [7,С.41]. Однако мы будем вводить в рассмотрение эту дополнительную функцию, а получим нужное выражение для $Q^{\text{сопр}}$, используя определение обобщенной силы через мощность. При учете дополнительной силы мощность изменится на величину $N(\vec{F}_{\text{сопр}}) = \vec{F}_{\text{сопр}} \cdot \vec{v} = -bv^2 = -b^* \dot{q}^2$.

Тогда обобщенная сила сопротивления будет равна

$$Q^{\text{сопр}} = \frac{N(\vec{F}_{\text{сопр}})}{\dot{q}} = -b^* \dot{q}. \quad (1.21)$$

Назовем коэффициент пропорциональности b^* *приведенным коэффициентом сопротивления системы*.

В правой части уравнения Лагранжа сумма обобщенных сил примет вид

$$Q^{\text{П}} + Q^{\text{сопр}} = -c^* q - b^* \dot{q}. \quad (1.22)$$

Подставляя выражения для левой (1.18) и правой (1.22) частей в уравнение Лагранжа (1.17), получим дифференциальное уравнение движения системы в символьном виде

$$a^* \ddot{q} = -c^* q - b^* \dot{q}. \quad (1.23)$$

С математической точки зрения, полученное дифференциальное уравнение является линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами (ЛОДУ).

Данное уравнение является линейным, поскольку обобщенная координата q , обобщенная скорость \dot{q} и обобщенное ускорение \ddot{q} присутствуют в нём в первой степени. Уравнение однородное, поскольку в нем собраны только слагаемые «из рода q » – переменная q и ее производные.

Традиционно ЛОДУ записывается либо в виде

$$a^* \ddot{q} + b^* \dot{q} + c^* q = 0 \quad (1.24)$$

либо в т.н. нормальной форме

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0. \quad (1.25)$$

Связь между коэффициентами обоих уравнений дают соотношения

$$n = \frac{b^*}{2a^*}; \quad k = \sqrt{\frac{c^*}{a^*}}. \quad (1.26)$$

Оба параметра имеют одинаковую размерность (рад/с), но n характеризует сопротивление демпфера, а k собственную частоту колебаний без трения.

Весьма часто для характеристики сопротивления используется *безразмерный* относительный коэффициент затухания $\zeta = \frac{n}{k}$, ($0 \ll \zeta \ll 1$).

С помощью этого безразмерного коэффициента можно определить три вида сопротивления:

- сильное $\zeta > 1$ ($n > k$),
- критическое $\zeta = 1$ ($n = k$)
- слабое $\zeta \ll 1$ ($n \ll k$).

Затухающие колебания могут иметь место только *при слабом сопротивлении* $\zeta \ll 1$. Частота таких колебаний будет меньше, чем в отсутствие трения, но незначительно

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = k\sqrt{1 - \zeta^2} \approx k\left(1 - \frac{1}{2}\zeta^2\right). \quad (1.27)$$

Период будет отличаться в большую сторону, но также незначительно

$$T_1^* = \frac{2\pi}{k_1} = T^* \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \approx T^* \left(1 + \frac{1}{2}\zeta^2\right). \quad (1.28)$$

Амплитуда колебаний будет монотонно убывать по экспоненциальному закону (рис.1.4)

$$q = e^{-nt} (C_1 \cos(k_1 t) + C_2 \sin(k_1 \cdot t)) = e^{-\zeta kt} A \sin(k\sqrt{1 - \zeta^2} t + \beta). \quad (1.29)$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2 , амплитуда (условная) A и начальная фаза β зависят от НУ и определяются по формулам:

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_1}. \quad (1.30)$$

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{q}_0 + nq_0)^2}{k^2 - n^2}}, \quad \beta = \arctg\left(\frac{k_1 q_0}{\dot{q}_0 + nq_0}\right). \quad (1.31)$$

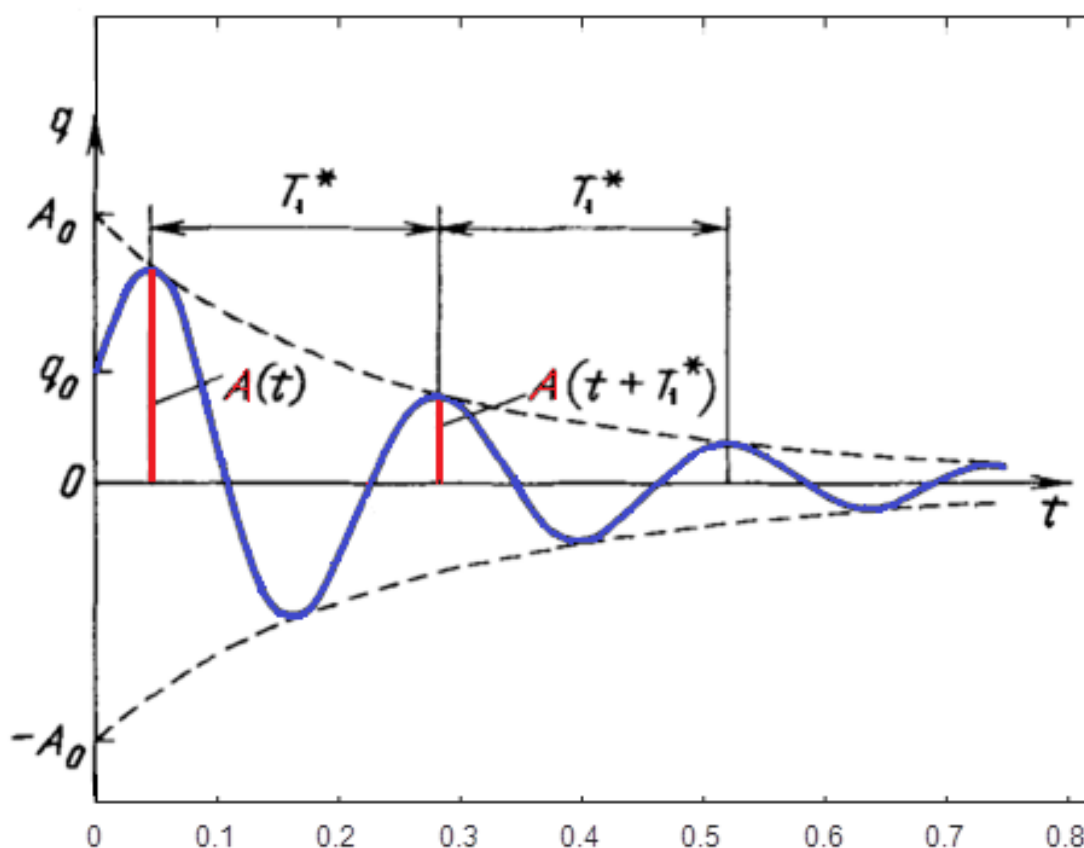


Рис.1.4. Затухающие свободные колебания при наличии вязкого трения. A – условная амплитуда колебаний; T_1^* – условный период колебаний.

При *критическом* $\zeta = 1$ ($n = k$) и *сильном* сопротивлении $\zeta > 1$ ($n > k$) свободные колебания вообще невозможны: после начального отклонения или толчка система будет просто медленно возвращаться к положению равновесия.

1.3. Вынужденные колебания системы без учета сил сопротивления

Определение. Колебания системы называются *вынужденными*, если они происходят под действием периодической силы $P(t)$ или периодического момента $M(t)$.

В отличие от свободных колебаний, вынужденные колебания могут возникать при нулевых начальных условиях: $q_0 = 0$; $\dot{q}_0 = 0$.

В таких колебаниях энергия будет «подкачиваться» в систему, и система также не будет консервативной МС. В правой части уравнения Лагранжа 2-го рода общего вида будут присутствовать два типа обобщенных сил: потенциальная Q^Π и вынуждающая $Q^{\text{вын}}$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^\Pi + Q^{\text{вын}}, \quad (1.32)$$

Потенциальная обобщенная сила, как и раньше, определяется через потенциальную энергию: $Q^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -c^* q$.

Обобщенную вынуждающую силу вычислим через мощность периодической силы $\vec{P}(t)$ (или мощность периодического момента $M(t)$). Когда воздействие задается гармонической функцией, то обобщенная сила будет гармонической функцией той же частоты, но другой амплитуды: $Q^{\text{вын}} = F_0 \cos(\omega t)$. Знак вынуждающей обобщенной силы будет положительный, поскольку она сама задает движение.

В результате применения уже рассмотренного алгоритма получим ДУ вида

$$a^* \ddot{q} = -c^* q + F_0 \cos(\omega t), \quad (1.33)$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами и гармонической правой частью, которое традиционно записывается в виде

$$a^* \ddot{q} + c^* q = F_0 \cos(\omega t), \quad (1.34)$$

или в нормальной форме

$$\ddot{q} + k^2 q = f_0 \cos(\omega t). \quad (1.35)$$

Символ f_0 , стоящий в правой части (53) назовём *относительной амплитудой* периодической возмущающей обобщенной силы

$$f_0 = \frac{F_0}{a^*}. \quad (1.36)$$

Решением ЛНДУ (1.35) будет сумма двух функций времени

$$q(t) = q_{\text{одн}} + q_{\text{частн}},$$

где $q_{\text{одн}}$ – общее решение однородного уравнения, описывающего незатухающие свободные колебания $\ddot{q} + k^2 q = 0$, вторая $q_{\text{частн}}(t)$ – частное решение неоднородного уравнения (1.35), зависящее от вида правой части.

Если частота воздействия не совпадает с частотой свободных колебаний ($\omega \neq k$), то суммарным решением будет функция

$$q(t) = q_{\text{одн}} + q_{\text{частн}} = (C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt)) + \frac{f_0}{k^2 - \omega^2} \cos(\omega t), \quad (1.37)$$

которая при произвольных начальных условиях будет иметь вид

$$q(t) = \left(q_0 - \frac{f_0}{k^2 - \omega^2} \right) \cdot \cos(kt) + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin(kt) + \frac{f_0}{k^2 - \omega^2} \cos(\omega t), \quad (1.38)$$

а в случае нулевых начальных условий ($q_0 = 0, \dot{q}_0 = 0$) будет представлять собой разность косинусов с разными частотами, но с одинаковой амплитудой

$$q(t) = \frac{f_0}{k^2 - \omega^2} [\cos(\omega t) - \cos(kt)], \quad (1.39)$$

На частотах, далёких от резонанса ($\omega \ll k$ или $\omega \gg k$) при отсутствии трения будет наблюдаться результат наложения двух частот, двух «гармоник». Получим т.н. «бигармонические колебания», которые весьма заметно отличаются от синусоиды.

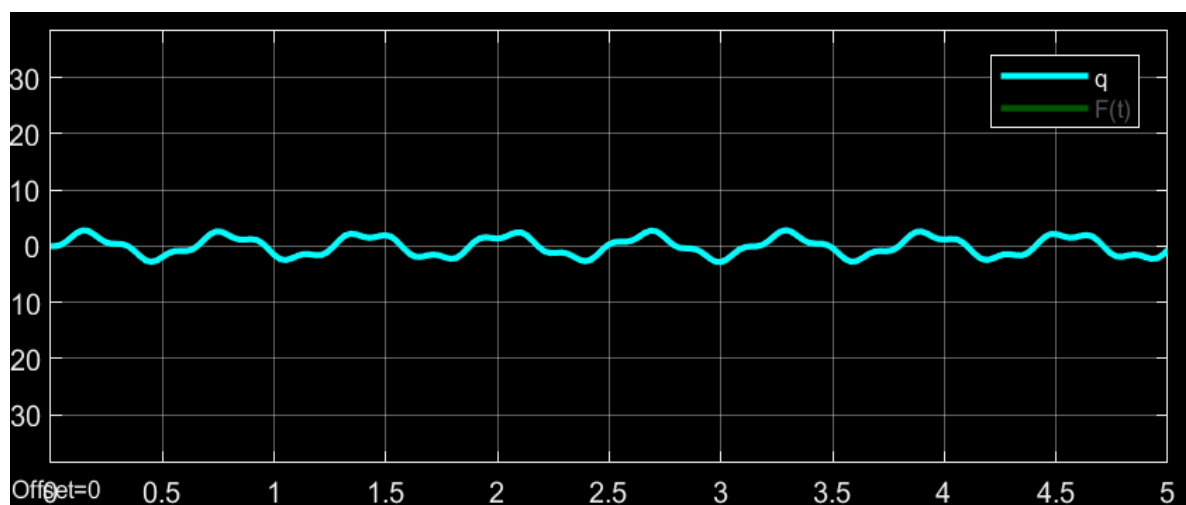


Рис.1.5. Бигармонические колебания при частоте $\omega = k/3$, далёкой от резонанса

1.3.1. Резонанс

Если частота воздействия будет равна собственной частоте ($\omega = k$), наступит резонанс, общее и частное решения совпадут в случае нулевых НУ, и амплитуда колебаний будет линейно и неограниченно возрастать

$$q = \frac{f_0 t}{2k} \sin(kt). \quad (1.40)$$

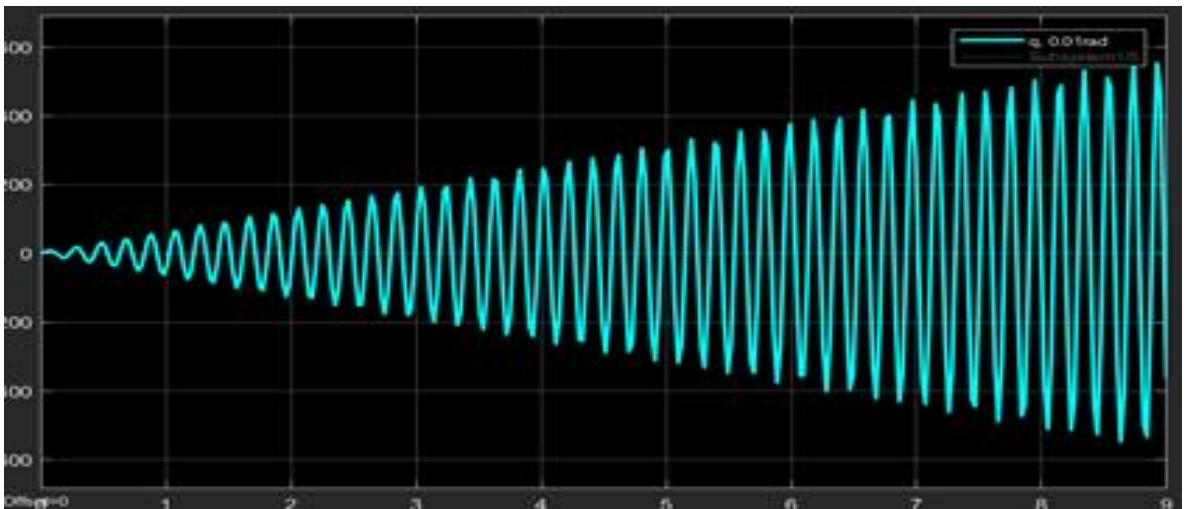


Рис.1.6. Резонансные колебания ($\omega = k$) при отсутствии сопротивления.

При резонансе сдвиг фаз между функциями, описывающими координату $q_{\text{рез}}(t) = \frac{f_0 t}{2\omega} \sin(\omega t)$ и вынуждающую силу $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ всегда составляет $\varepsilon = \pi/2$.

1.3.2. Биения

Если частота внешнего воздействия становится близкой к значению собственной частоты ($\omega \approx k$), то результирующие колебания имеют вид «биений» с амплитудой, периодически меняющейся от нуля до максимума (рис.1.7).

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{f_0}{k^2 - \omega^2} [\cos(\omega t) - \cos(kt)] = -\frac{f_0}{k^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega - k}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega + k}{2}\right) = \\ &= A(f_0, k, \omega) \cdot \sin\left(\frac{k + \omega}{2} t\right). \end{aligned} \quad (1.41)$$

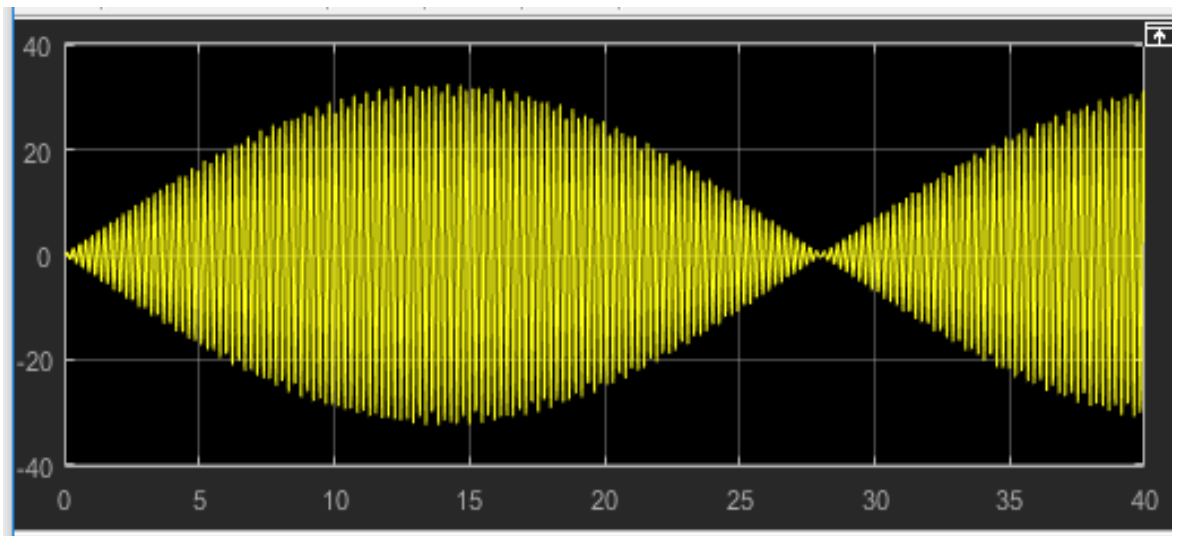


Рис.1.7. Биения при отсутствии трения. Видимое отличие периодов колебаний координаты $q(t)$ и переменной амплитуды $A(f_0, k, \omega)$.

Сомножитель $\sin\left(\frac{\omega+k}{2}\right)$ задает частоту основных колебаний, которая практически равна собственной частоте системы $k \approx \frac{\omega+k}{2} \approx \omega$, с периодом $T^* = \frac{4\pi}{\omega+k} \approx \frac{2\pi}{\omega}$.

Преыдущие сомножители можно рассматривать, как изменяющуюся амплитуду колебаний $A(f_0, k, \omega) = \frac{f_0}{k^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega - k}{2}\right)$, которая медленно с частотой $(\omega - k)/2$ и большим периодом $T^{**} = 4\pi / (\omega - k)$ возрастает до максимальной величины $\frac{f_0}{k^2 - \omega^2}$, а потом так же медленно убывает до нуля (рис.1.7).

1.4. Учет вязкого трения при вынужденных колебаниях

При вынужденных колебаниях с сопротивлением на тела системы действуют потенциальные, диссипативная и вынуждающая силы. Подставим все уже рассмотренные обобщенные силы в правую часть уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^{\Pi} + Q^{\text{вын}} + Q^{\text{сопр}}. \quad (1.42)$$

Получаем ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a^* \ddot{q} = -c^* q + F_0 \cos(\omega t) - b^* \dot{q}. \quad (1.43)$$

Это же уравнение в традиционной математической форме записи

$$a^* \ddot{q} + b^* \dot{q} + c^* q = F_0 \cos(\omega t). \quad (1.44)$$

В нормальной форме с единичным коэффициентом при старшей производной это уравнение имеет вид

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = f_0 \cos(\omega t), \quad (1.45)$$

где коэффициенты преобразованы по формулам (1.26) и (1.36).

Общее решение уравнения (1.45) есть сумма двух решений

$$q(t) = q_{\text{одн}} + q_{\text{частн}} \quad (1.46)$$

Первое $q_{\text{одн}}$ – это общее решение *однородного* линейного уравнения, описывающего свободные затухающие колебания,

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0, \quad (1.47)$$

т.е. колебания с амплитудой, убывающей по экспоненте

$$q_{\text{одн}} = e^{-nt} (C_1 \cos(k_1 t) + C_2 \sin(k_1 t)), \quad (1.48)$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

Второе $q_{\text{част}}$ – это частное решение уравнения (1.45)

$$q_{\text{част}} = A_{\text{вын}} \cos(\omega t - \varepsilon), \quad (1.49)$$

Именно эта часть решения играет *основное значение*, т.к. именно она описывает незатухающие установившиеся колебания, происходящие с частотой возбуждения ω [7].

Частное решение в данном случае – это гармоническая функция той же частоты ω , но с фазовым сдвигом ε в аргументе и с амплитудой $A_{\text{вын}}$, требующей вычисления. После раскрытия косинуса разности и подстановки $q_{\text{част}}$ в исходное уравнение (1.45), а также после приравнивания коэффициентов при $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$ в левой и правой

частях уравнения, получаем выражение для амплитуды $A_{\text{вын}}$ и формулу для запаздывания по фазе ε .

Амплитуда вынужденных колебаний $A_{\text{вын}}$ – это амплитуда установившейся реакции системы на периодическое воздействие заданной частоты ω

$$A_{\text{вын}} = \frac{f_0}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}. \quad (1.50)$$

Сдвиг фаз между воздействием и перемещением ε – это величина запаздывания максимального значения отклонения q по отношению к максимуму периодической силы $P(t)$

$$\varepsilon = \arctg\left(\frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}\right). \quad (1.51)$$

Самый простой вид общее решение уравнения имеет в случае нулевых начальных условий

$$q(t) = -e^{-nt} A_{\text{вын}} \cdot \left(\cos(\varepsilon) \cdot \cos(k_1 t) + \frac{n \cos(\varepsilon) + \omega \sin(\varepsilon)}{k_1} \cdot \sin(k_1 t) \right) + A_{\text{вын}} \cos(\omega t - \varepsilon). \quad (1.52)$$

Такое выражение оказывается наиболее удобным для анализа переходного периода колебаний с учетом вязкого трения.

Из графика колебаний (рис.1.8) видно, что при резонансе ($\omega = k$) амплитуда колебаний многократно превосходит максимальные отклонения на других частотах, однако даже при сколь угодно малом трении её величина остается ограниченной. При частотах, близких к резонансной, в системе возникают биения, но из-за наличия сопротивления они быстро исчезают.

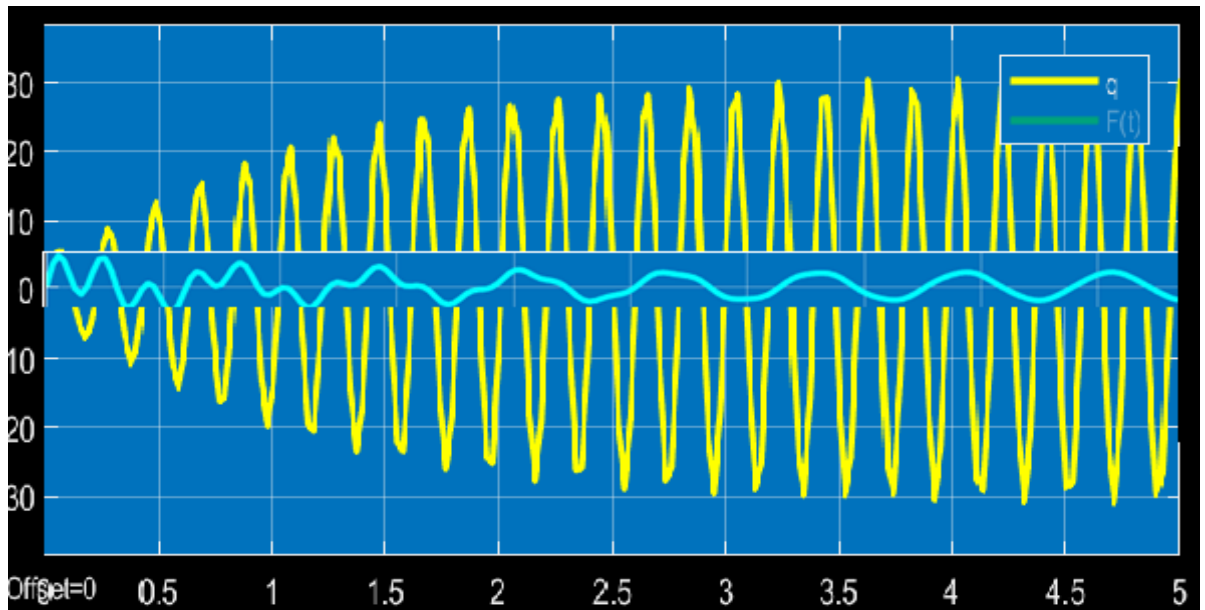


Рис.1.8. Сравнительные графики вынужденных колебаний с вязким трением при резонансе ($\omega = k$) и при частоте в 3 раза меньше резонансной ($\omega = k/3$).

В системах с трением при резонансных колебаниях фазовый сдвиг, как можно видеть из формулы (1.51), также будет $\varepsilon = \pi/2$.

1.5. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) вынужденных колебаний

Амплитуда вынужденных колебаний – это установившаяся реакция системы на действие вынуждающей периодической силы или момента

$$A_{\text{вын}} = \frac{f_0}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \quad (1.53)$$

Она зависит как от амплитуды (f_0) и частоты (ω) самого периодического воздействия, так и от исходных параметров механической системы (n, k). По традиции эту зависимость принято анализировать в безразмерной форме.

Примем в качестве эталона для сравнения величину *статического отклонения* – перемещения системы под действием постоянной силы,

равной амплитудному значению переменной силы. Можно условно назвать его «амплитудой колебаний при $\omega = 0$ »

$$A_{\text{стат}} = A_{\text{вын}}(0) = \frac{f_0}{k^2} = \frac{F_0}{a^*k^2} = \frac{F_0}{c^*}. \quad (1.54)$$

Тогда при любой отличной от нуля частоте воздействия

$$\begin{aligned} A_{\text{вын}}(\omega) &= \frac{f_0}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} = \frac{f_0}{k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}} = \\ &= \frac{F_0}{c^*} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}} = A_{\text{стат}} \cdot \mu \end{aligned}$$

Отношение $\mu = \frac{A_{\text{вын}}(\omega)}{A_{\text{вын}}(0)}$ показывает, во сколько раз амплитуда установившейся динамической реакции системы на частоте ω будет отлична от статического отклонения $A_{\text{стат}} = \frac{F_0}{c^*}$, и называется «**коэффициентом динамичности**» или **коэффициентом усиления**:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}}. \quad (1.55)$$

В этом выражении параметры λ и ζ – безразмерные величины, отнесенные к собственной частоте колебаний k :

$\lambda = \omega/k$ – безразмерный *коэффициент расстройки* системы, или просто *расстройка*;

$\zeta = \frac{n}{k} < 1$ – безразмерный *коэффициент затухания* свободных колебаний.

Безразмерной АЧХ (амплитудно-частотной характеристикой) системы называется зависимость коэффициента динамичности μ от безразмерного коэффициента расстройки $\lambda = \omega/k$ и коэффициента затухания $\zeta < 1$ (рис.1.9).

1.5.1. График АЧХ

Важно иметь в виду, что при $\lambda = 0$ коэффициент усиления не равен нулю, а равен единице $\mu = 1$. Как видно из графика, при разных частотах воздействия коэффициент динамичности μ может быть как больше, так и меньше единицы. При колебаниях без сопротивления ($\zeta = 0$) в случае резонанса ($\lambda = 1$) коэффициент динамичности стремится к бесконечному росту.

АЧХ безразмерная, $\mu = \mu(\lambda)$

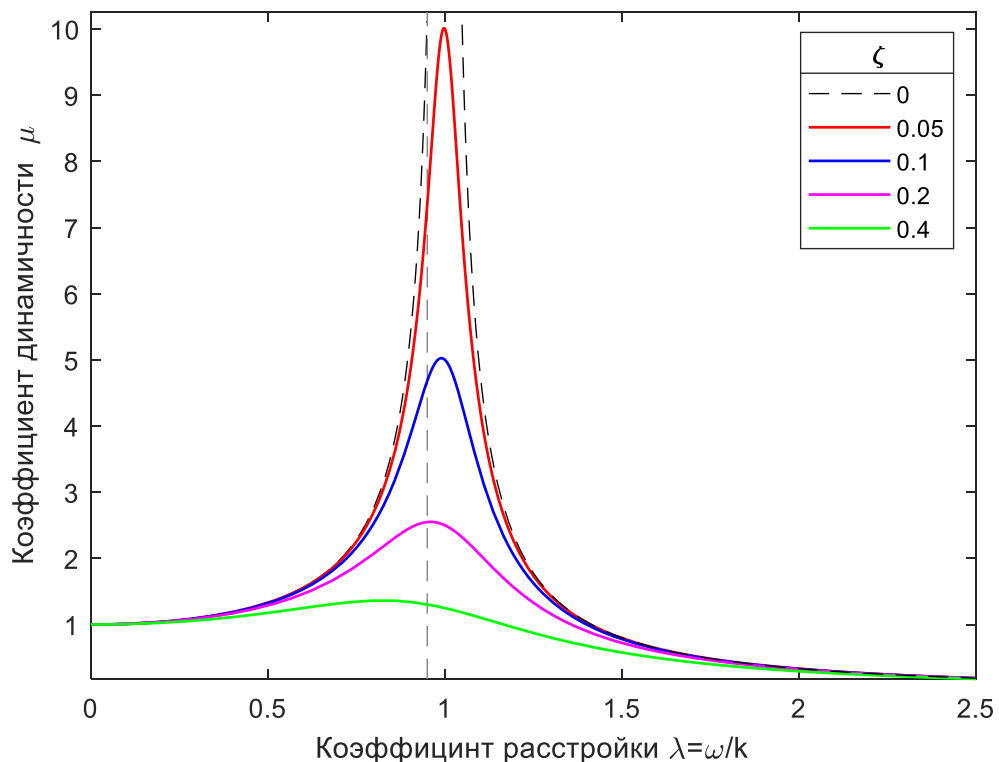


Рис.1.9. Коэффициента динамичности μ при разных значениях коэффициента затухания $\zeta < 1$.

По графику АЧХ также можно сделать вывод, что рабочие режимы для технического оборудования предпочтительно выбирать в области частот за резонансом, где установившаяся амплитуда колебаний намного меньше статического отклонения ($\mu \ll 1$).

1.6. Фазочастотная характеристика (ФЧХ) вынужденных колебаний

Возмущение, задаваемое периодической силой, и установившаяся реакция системы не достигают максимальных значений одновременно. Фазовый угол ε является мерой этой разницы во времени и принимает значения от 0 до π при изменении λ .

При конкретных значениях ζ и λ это величина остается постоянной. При изменении частоты возмущения изменение фазового угла ε происходит из-за наличия сопротивления в системе. Если демпфирование отсутствует, фазовый угол может быть равен только 0 или π . При резонансе (1.51) сдвиг фаз **всегда равен $\pi/2$** .

Фазочастотной характеристикой системы (ФЧХ) называется зависимость запаздывания по фазе ε установившейся реакции системы по отношению к вынуждающему воздействию $P(t)$ от величины расстройки системы ($\lambda = \omega/k$) и от значений безразмерного коэффициента затухания $\zeta < 1$.

ФЧХ используется в технике для анализа искажений формы сигнала и восстановления реальной объемной картины механических колебаний при измерениях, выполненных с помощью виброметров, акселерометров, сейсмографов и других устройств.

ФЧХ и АЧХ всегда указываются в акустических системах и широко применяются в системах автоматического управления.

1.6.1. График ФЧХ

Формула (1.51) при переходе к безразмерным коэффициентам принимает вид

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \left(\frac{2\zeta\lambda}{1-\lambda^2} \right).$$

График, построенный по этой формуле, получается разрывным на частоте резонанса ($\lambda = 1$), хотя в этом случае значение $\varepsilon = \pi/2$.

Можно получить гладкую кривую, если воспользоваться формулой связи между тангенсами целого и половинного угла

$$\operatorname{tg}(\varepsilon/2) = \frac{\operatorname{tg}(\varepsilon)}{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}(\varepsilon)^2}}, \quad (1.56)$$

и из неё выразить аргумент ε

$$\varepsilon = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{2\zeta\lambda}{1 - \lambda^2 + \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}} \right). \quad (1.57)$$

Как видим, в этой формуле знаменатель уже не обращается в ноль при $\lambda = 1$.

**Фазочастотная характеристика (ФЧХ)
при разных коэффициентах сопротивления $\zeta = n/k$**

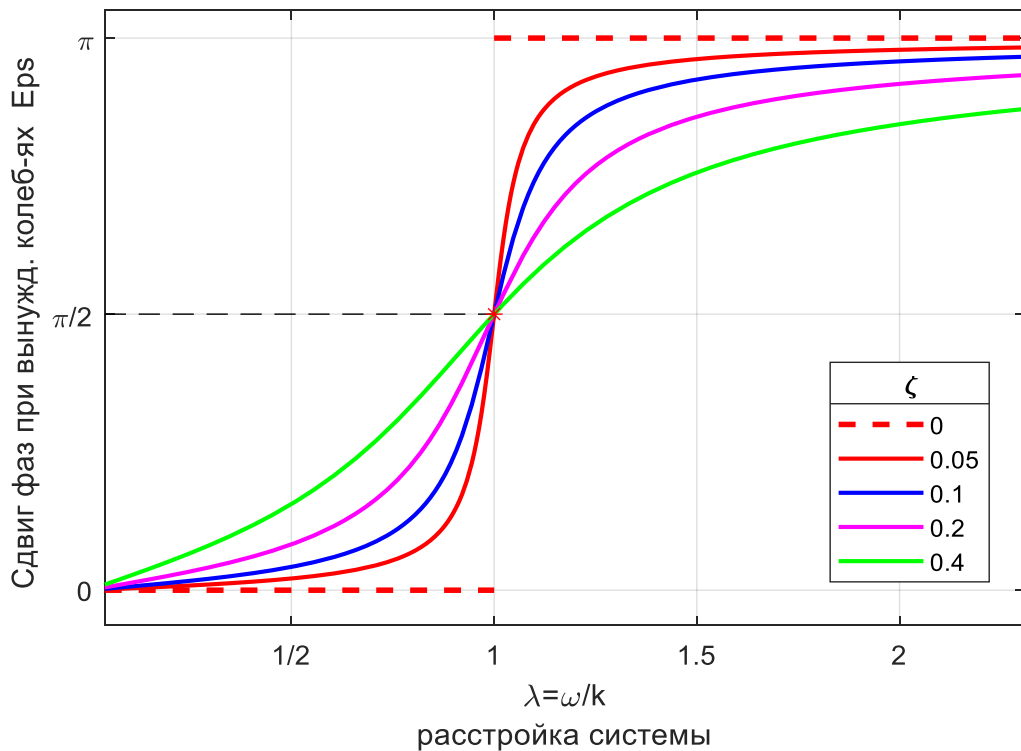


Рис.1.10. Фазочастотная характеристика системы (ФЧХ)

2. Пример выполнения практического задания 1 «Исследование колебаний системы двух тел с одной степенью свободы» с использованием символьной математики MATLAB.

2.1. Описание колебательной системы с одной степенью свободы

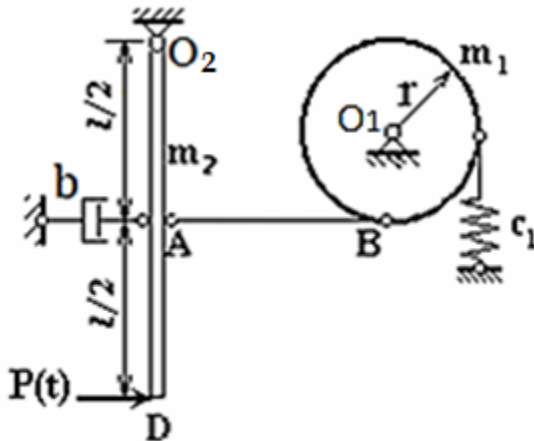


Рис.2.1. Система диск-стержень в положении равновесия

Механическая система состоит из двух однородных тел: диска и вертикального тонкого стержня, шарнирно соединённых между собой жесткой безмассовой тягой АВ (рис. 2.1). Масса диска m_1 , радиус r , масса стержня m_2 , длина стержня l . Оба тела могут

вращаться в вертикальной плоскости вокруг неподвижных горизонтальных осей, проходящих через центр диска O_1 и конец стержня O_2 .

С диском соединена цилиндрическая пружина с коэффициентом жесткости c_1 ; к середине стержня прикреплен демпфер с коэффициентом сопротивления b , сила сопротивления которого пропорциональна первой степени скорости. На нижний конец стержня может действовать периодическая вынуждающая сила $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$. Система может совершать как свободные, так и вынужденные колебания относительно положения статического равновесия. В начальный момент диску в положении равновесия сообщают малую угловую скорость $\dot{\varphi}_{01}$. Численные значения исходных данных помещены в таблице 1.

Таблица 1. Исходные данные для примера 1

m_1 кг	r см	m_2 кг	l см	c_1 Н/м	b Н·с/м	φ_{01} рад	$\dot{\varphi}_{01}$ рад/с	P_0 Н
3,1	25	1,8	70	4000	8	0	1,5	10

2.2. Инструкции к выполнению практического задания 1

1. Обосновать число степеней свободы системы и выбрать обобщенную координату и обобщенную скорость.
2. Получить с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода 4 вида дифференциальных уравнений (ДУ) малых колебаний:
 - а) ДУ свободных колебаний без учета демпфирования;
 - б) ДУ свободных колебаний при учете демпфирования с вязким трением;
 - в) ДУ вынужденных колебаний под действием гармонической силы или момента при отсутствии демпфирования;
 - г) ДУ вынужденных колебаний под действием гармонической силы или момента при учете демпфирования с вязким трением.
3. Найти численные значения параметров: инерционный и упругий коэффициенты системы a^* и c^* , а также приведенный коэффициент сопротивления b^* и относительную амплитуду возмущающей обобщенной силы f_0 .
4. Найти собственную частоту и период свободных колебаний в случаях (а) и (б). Сравнить эти параметры.
5. Получить для случаев (а) и (б) решение ДУ свободных колебаний при заданных начальных условиях. Построить графики колебаний.
6. Для затухающих свободных колебаний определить по графику декремент dec_g и логарифмический декремент затухания η .
7. При нулевых начальных условиях получить решение ДУ вынужденных колебаний для случаев (в) и (г).
8. В каждом случае изобразить графики вынужденных колебаний для 4-х различных частот вынуждающей силы (одна из частот должна быть частотой резонанса).

9. Вычислить безразмерный коэффициент затухания ζ . Построить графики «безразмерных» АЧХ и ФЧХ. Кривые, соответствующие $\zeta = 0$, изобразить на графике пунктирными линиями.

2.3. Обоснование числа степеней свободы системы и выбор обобщенной координаты.

У рассматриваемой системы «диск-стержень» одна степень свободы, т.к. положение всех точек можно однозначно определить с помощью *одной координаты*, например угла поворота диска φ_1 . При этом, чтобы лишить систему всякой свободы движения, достаточно наложить на неё *одну жесткую связь*, например, зафиксировать диск 1. Движение системы описывается *одним* уравнением Лагранжа 2-го рода.

Примем за *обобщенную координату* угол поворота диска φ_1 , за *обобщенную скорость* – угловую скорость диска $\dot{\varphi}_1$.

Будем вычислять функции T и Π с точностью, при которой они будут иметь вид квадратичных форм обобщенной скорости и обобщенной координаты:

$$T = a^* \dot{\varphi}_1^2 / 2; \quad \Pi = c^* \varphi_1^2 / 2. \quad (2.1)$$

2.4. Кинематические соотношения связей с учетом малости колебаний.

Полагая угловые скорости тел $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$ и $\omega_2 = \dot{\varphi}_2$, а также углы поворота φ_1 и φ_2 малыми, можем считать, что жесткая тяга АВ, соединяющая диск и стержень, движется поступательно, поэтому скорости и перемещения ее крайних точек одинаковы

$$\begin{aligned} V_A &= V_B, & S_A &= S_B, \\ \omega_2 \cdot \frac{l}{2} &= \omega_1 \cdot r, & \frac{l}{2} \varphi_2 &= r \varphi_1. \end{aligned}$$

Выразим угловую скорость стержня через угловую скорость диска

$$\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_1 \cdot \frac{2r}{l}. \quad (2.2)$$

Выразим также угол поворота стержня φ_2 через обобщенную координату – угол поворота диска φ_1

$$\varphi_2 = \frac{2r}{l} \varphi_1. \quad (2.3)$$

2.5. Кинетическая энергия системы. Инерционный коэффициент a^*

Кинетическая энергия системы есть сумма энергий диска и стержня

$$T = T_1 + T_2.$$

Кинетическая энергия вращающегося диска

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2.$$

Момент инерции однородного диска относительно оси вращения, проходящей через его центр масс $J_1 = \frac{m_1 r^2}{2}$.

Кинетическая энергия стержня, вращающегося вокруг неподвижной оси O_2 ,

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} J_2 \cdot \frac{4r^2}{l^2} \cdot \dot{\varphi}_1^2.$$

Момент инерции однородного стержня относительно горизонтальной оси, проходящей через его конец, $J_2 = \frac{1}{3} m_2 l^2$.

Кинетическая энергия системы в виде квадратичной формы обобщенной скорости

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_1 r^2 \right) \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_2 l^2 \right) \cdot \frac{4r^2}{l^2} \cdot \dot{\varphi}_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{1}{2} m_1 + \frac{4}{3} m_2 \right) \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2} a^* \dot{\varphi}_1^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Инерционный коэффициент системы

$$a^* = r^2 \left(\frac{1}{2} m_1 + \frac{4}{3} m_2 \right) = 0,25^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3,1 + \frac{4}{3} \cdot 1,8 \right) = 0,247 \text{ кг м}^2 \quad (2.5)$$

Отметим, что коэффициент a^* имеет размерность момента инерции.

2.6. Потенциальная энергия системы. Упругий коэффициент c^*

Вычисляем потенциальную энергию системы в отклоненном от равновесия положении (рис. 2.2), считая углы отклонения φ_1 и φ_2 малыми.

Суммарная потенциальная энергия системы складывается из энергии деформации пружины и энергии силы тяжести стержня

$$\Pi = \Pi_{\text{упр}} + \Pi_{G2}.$$

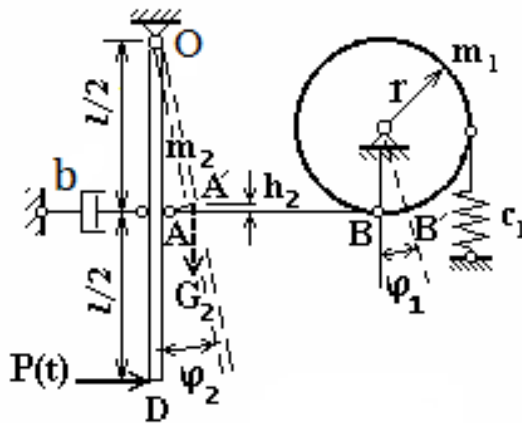


Рис.2.2. Система блок-стержень в отклоненном положении

При отклонении вертикального стержня на малый угол φ_2 против часовой стрелки диск также повернется против часовой на свой малый угол φ_1 . Пружина 1 растянется на величину $\Delta = r\varphi_1$. Потенциальная энергия деформированной пружины будет равна

$$\Pi_{\text{упр}} = \frac{1}{2} c_1 \Delta^2 = \frac{1}{2} c_1 r^2 \varphi_1^2.$$

В данном примере у пружины не будет статической деформации $\Delta_{\text{ст}}$, т.к. в положении равновесия сила тяжести стержня проходит через ось вращения, и не создает вращательного момента.

Потенциальная энергия сил тяжести диска равна нулю, т.к. центр тяжести диска неподвижен.

При отклонении центра тяжести стержня выше его положения равновесия на величину h_2 потенциальная энергия силы тяжести стержня будет положительной $\Pi_{G2} = m_2 g h_2$.

Вертикальное перемещение центра масс стержня равно (рис. 2.2)

$$h_2 = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos(\varphi_2) \quad (2.6)$$

Учтём малость угла поворота φ_2 , раскладывая $\cos(\varphi_2)$ в ряд Маклорена и оставляя только первые два слагаемые

$$\cos(\varphi_2) = 1 - \frac{\varphi_2^2}{2!} + \frac{\varphi_2^4}{4!} - \dots \approx 1 - \frac{\varphi_2^2}{2!}. \quad (2.7)$$

Перемещение центра тяжести стержня по вертикали является квадратичной функцией обобщенной координаты

$$h_2 = \frac{l}{4} \varphi_2^2 = \frac{r^2}{l} \varphi_1^2. \quad (2.8)$$

Потенциальная энергии сил тяжести стержня определяется выражением

$$\Pi_{G_2} = \frac{m_2 g r^2}{l} \varphi_1^2. \quad (2.9)$$

Следует отметить, что при ином положении стержня, горизонтальном или наклонном, квадратичной зависимости от координаты в потенциальной энергии сил тяжести Π_{G_2} уже не будет, т.к. перемещение его центра тяжести по вертикали будет выражаться через функцию $\sin(\varphi) \approx \varphi$.

Полная потенциальная энергия системы как квадратичная форма обобщенной координаты имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} r^2 \left(c_1 + \frac{2m_2 g}{l} \right) \varphi_1^2 = \frac{1}{2} c^* \varphi_1^2. \quad (2.10)$$

Упругий коэффициент системы имеет размерность момента и равен

$$c^* = r^2 \left(c_1 + \frac{2m_2 g}{l} \right) = 0,25^2 \left(4000 + \frac{2 \cdot 1,8 \cdot 9,81}{0,7} \right) = 253,16 \text{ Нм}. \quad (2.11)$$

2.7. Свободные колебания без учета демпфирования.

Составим уравнение Лагранжа 2-го рода для консервативной механической системы через функцию лагранжиан $L = T - \Pi$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0. \quad (2.12)$$

Дифференциальное уравнение свободных колебаний без учета демпфирования

$$a^* \ddot{\varphi}_1 + c^* \varphi_1 = 0, \quad (2.13)$$

$$0,247 \ddot{\varphi}_1 + 253,16 \varphi_1 = 0, \quad (2.14)$$

Вид уравнения в нормальной форме с единичным коэффициентом при старшей производной

$$\ddot{\varphi}_1 + k^2 \varphi_1 = 0, \quad (2.15)$$

$$\ddot{\varphi}_1 + 1024,94 \varphi_1 = 0, \quad (2.16)$$

$k^2 = \frac{c^*}{a^*} = 1024,94 \text{ с}^{-2}$ – это квадрат собственной частоты системы.

Собственная круговая частота свободных колебаний системы

$$k = \sqrt{1024,94} = 32,01 \text{ с}^{-1}. \quad (2.17)$$

Период свободных колебаний без учета демпфирования

$$T^* = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{32,01} = 0,1963 \text{ с}. \quad (2.18)$$

Подставим заданные начальные условия $\varphi_{01} = 0$; $\dot{\varphi}_{01} = 1,5 \text{ рад/с}$ в решение ОДУ

$$\varphi_1 = \varphi_{01} \cos(kt) + \frac{\dot{\varphi}_{01}}{k} \sin(kt) = 0,047 \sin(32,01 \cdot t) \text{ рад}. \quad (2.19)$$

Амплитуда свободных незатухающих колебаний равна

$$A = \sqrt{(\varphi_{01})^2 + \frac{(\dot{\varphi}_{01})^2}{k^2}} = 0,047 \text{ рад}, \quad (2.20)$$

Фазовый угол равен

$$\beta = \arctg\left(\frac{\varphi_{01} \cdot k}{\dot{\varphi}_{01}}\right) = 0 \text{ рад} \quad (2.21)$$

2.7.1. График свободных незатухающих колебаний диска

$$\varphi_1(t) = 0,047 \sin(32,01 \cdot t) \text{ рад} \quad (2.22)$$

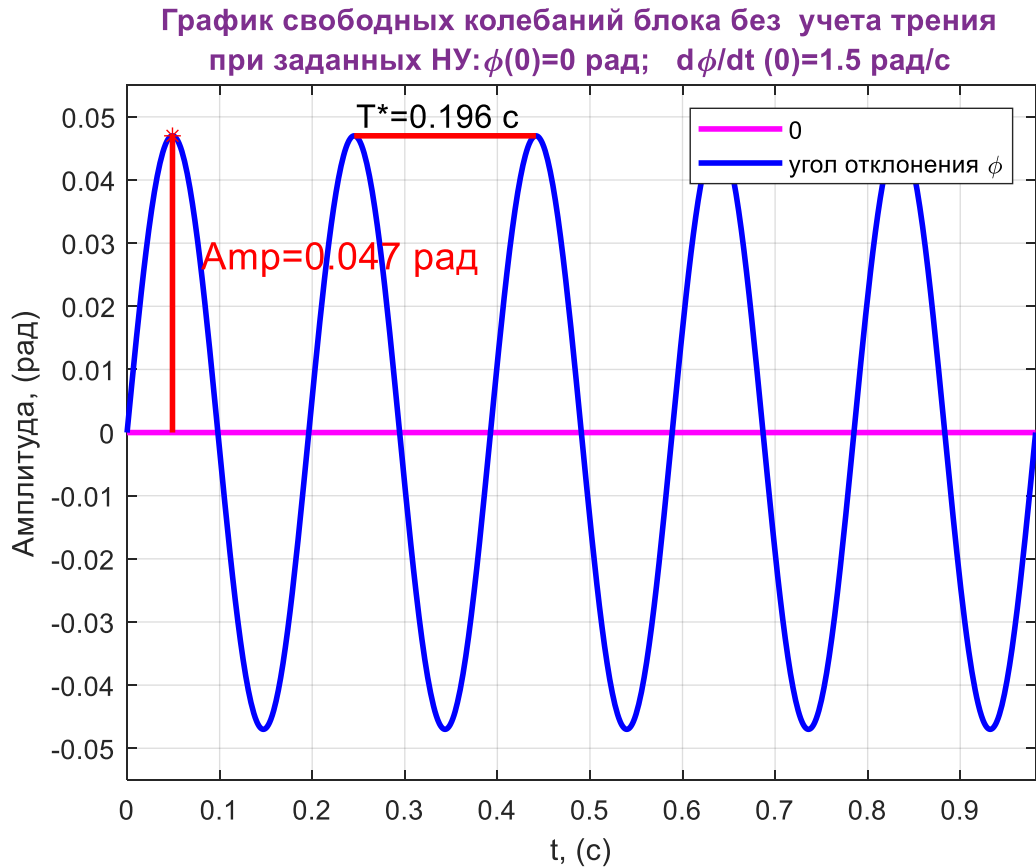


Рис.2.3. График свободных колебаний диска 1 без учета сил трения.

2.8. Свободные колебания при наличии вязкого трения.

Уравнение Лагранжа 2-го рода общего вида при наличии сил трения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q^{\Pi} + Q^{\text{сопр}}. \quad (2.23)$$

Обобщенная потенциальная сила Q^{Π} по формуле (1.19)

$$Q^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = -c^* \varphi_1.$$

Обобщенную силу сопротивления $Q^{\text{сопр}}$ вычисляем по формуле (1.21) как отношение мощности силы сопротивления к обобщенной скорости.

$$Q^{\text{сопр}} = \frac{N(\vec{F}_{\text{сопр}})}{\dot{\varphi}_1}$$

Сила вязкого трения демпфера, прикрепленного к середине стержня (рис. 2.2), линейно зависит от скорости этой точки: $\vec{F}_{\text{сопр}} = -b\vec{V}_A$, где b – коэффициент сопротивления демпфера.

Мощность силы сопротивления $N(\vec{F}_{\text{сопр}})$ равна скалярному произведению силы на скорость точки A :

$$N(\vec{F}_{\text{сопр}}) = \vec{F}_{\text{сопр}} \cdot \vec{V}_A = -F_{\text{сопр}}V_A = -bV_A^2 = -b(\dot{\varphi}_1 r)^2 \quad (2.24)$$

Обобщенная сила сопротивления равна

$$Q^{\text{сопр}} = \frac{N(\vec{F}_{\text{сопр}})}{\dot{\varphi}_1} = -(b r^2)\dot{\varphi}_1 = -b^* \dot{\varphi}_1. \quad (2.25)$$

Приведенный коэффициент сопротивления системы

$$b^* = b r^2 = 0,5 \text{ Нм} \cdot \text{с}. \quad (2.26)$$

Суммарная обобщенная сила в уравнении Лагранжа (2.23)

$$Q^{\Pi} + Q^{\text{сопр}} = -c^* \varphi_1 - b^* \dot{\varphi}_1 = -253,16 \cdot \varphi_1 - 0,5 \cdot \dot{\varphi}_1. \quad (2.27)$$

Дифференциальное уравнение свободных колебаний с учетом демпфирования

$$a^* \ddot{\varphi}_1 + b^* \dot{\varphi}_1 + c^* \varphi_1 = 0, \quad (2.28)$$

$$0,247 \cdot \ddot{\varphi}_1 + 0,5 \cdot \dot{\varphi}_1 + 253,16 \varphi_1 = 0. \quad (2.29)$$

Нормальная форма записи ДУ свободных колебаний системы с вязким трением

$$\ddot{\varphi}_1 + 2n\dot{\varphi}_1 + k^2\varphi_1 = 0, \quad .$$

$$\ddot{\varphi}_1 + 2,02\dot{\varphi}_1 + 1025\varphi_1 = 0, \quad .(2.30)$$

Относительный коэффициент сопротивления

$$n = \frac{b^*}{2a^*} = \frac{0,5}{2 \cdot 0,247} = 1,01 \text{ с}^{-1}, \quad (2.31)$$

Собственная частота свободных колебаний без трения

$$k = \sqrt{\frac{c^*}{a^*}} = \sqrt{1025} = 32,01 \text{ с}^{-1}. \quad (2.32)$$

2.8.1. Безразмерный относительный коэффициент затухания колебаний

$$\zeta = \frac{n}{k} = \frac{1,01}{32,01} = 0,032. \quad (2.33)$$

Проверка степени сопротивления системы и вид решения.

Поскольку $\zeta \ll 1$ ($n \ll k$), т.е. сопротивление системы слабое, решение будет иметь вид затухающих колебаний.

Вид решения с учетом начальных условий

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= e^{-nt} \left(\varphi_{01} \cos(k_1 t) + \frac{\dot{\varphi}_{01} + n\varphi_{01}}{k_1} \sin(k_1 \cdot t) \right) = \\ &= e^{-1,01t} \cdot 0,047 \sin(31,99t). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Собственная частота свободных колебаний с трением

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{1025 - 1,02} = 31,99 \text{ с}^{-1} \quad (2.35)$$

Период затухающих колебаний

$$T_1^* = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{31,99} = 0,1964 \text{ с}. \quad (2.36)$$

Таблица 2. Сравнение значений частоты и периода

Параметр	Без трения	С учетом трения	Отличие
Частота, рад/с	$k=32,01$	$k_1 = 31,99$	0,02
Период, с	$T^* = 0.1962$	$T_1^* = 0,1964$	0,0002

Из таблицы 2 следует, что в обоих режимах колебаний частоты отличаются на 0,02 рад/с, а периоды – в четвертом знаке после запятой, что при построении графиков практически не различимо (рис.2.4).

2.8.2. График свободных затухающих колебаний диска при учете сил трения

$$\varphi_1 = e^{-1,01t} \cdot 0,047\sin(31,99t). \quad (2.37)$$

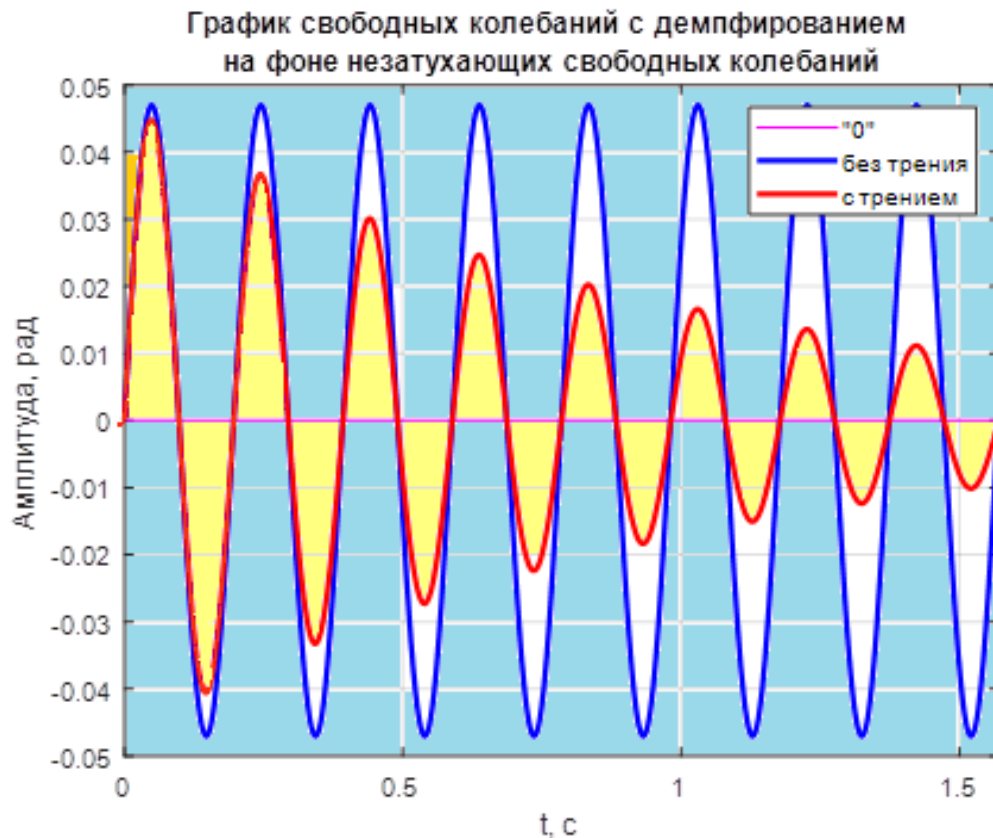


Рис.2.4. График свободных затухающих колебаний диска (красно-желтый) на фоне незатухающих колебаний (сине-белый).

2.8.3. Коды совместного построения двух графиков в Matlab

```
clear, clc
syms t Phi(t) exA0(t) % символьная переменная и функции
A0=0.047; k=32.01; n=1.01;
k1=sqrt(k^2-n^2);% частота затух. колебаний
Phi(t)= A0*sin(k*t);% вид функции незатух.св. кол.
Phexn(t)=exp(-n*t)*A0*sin(k1*t);% вид функции затух. св. кол.
T0=2*pi/k; % период свободных колебаний
tf=8*T0;
tsf=[0 tf];% интервал времени для t
figure (3)
fplot(@(t) t-t, tsf, '-m') % график нулевой функции (t-t)
hold on % удерживать графики в окне
fplot(Phi,tsf,'b','LineWidth',2) % график незатух. своб. колеб.
fplot(Phexn,tsf,'r','LineWidth',2) % график затух. своб. колеб.
hold off % перестать удерживать график в окне
grid on % отобразить решетку
```

```

xlabel('t, c');
ylabel('Амплитуда, рад')
legend({'"0"' ; 'без трения'; 'с трением'});
title({'График свободных колебаний с демпфированием'; ' на фоне незатухающих свободных колебаний'});
ylim([-0.05 0.05]) % диапазон изображения по оси y

```

2.8.4. Вычисление декремента $decr$ и логарифмического декремента η по графику затухающих колебаний.

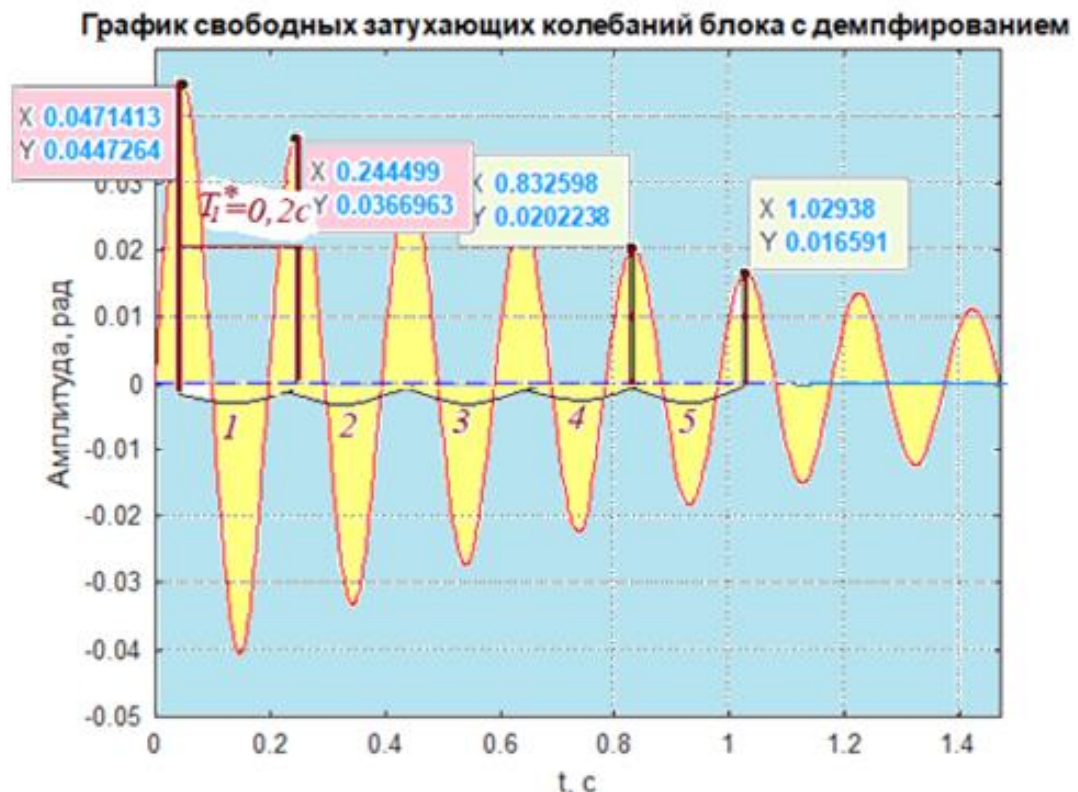


Рис.2.5. График затухающих свободных колебаний с отметками величин условных амплитуд.

Декремент затухания колебаний равен отношению любых двух соседних амплитуд через условный период T_1^* (см. рис.2.5).

$$decr = \frac{\varphi_1^{max}(t)}{\varphi_1^{max}(t + T_1^*)} = \frac{0,0447}{0,0367} \approx 1,22;$$

$$decr = \frac{0,0202}{0,0166} \approx 1,22. \quad (2.38)$$

Логарифмический декремент (три способа вычисления)

1. *Теоретический.* Логарифмический декремент равен абсолютной величине показателя экспоненты, стоящей в решении уравнения затухающих

свободных колебаний, при $t = T_1^*$:

$$\eta = nT_1^* = 1.01 \cdot 0.1964 = 0.198. \quad (2.39)$$

2. *Практический №1.* Логарифмический декремент вычисляется по графику как натуральный логарифм отношения соседних амплитуд:

$$\eta = \ln(\mathit{decr}) = \ln(1.22) = 0.199. \quad (2.40)$$

3. *Практический №2.* Логарифмический декремент вычисляется как обратная величина числа полных колебаний N за время релаксации

$$\eta = 1/N \quad (2.41)$$

Время релаксации – это интервал, за который амплитуда колебаний уменьшается в e раз ($e \approx 2.718$).

Выберем на графике (рис.2.5) первую амплитуду $A_1 = 0,0447$ рад и вычислим значение амплитуды после времени релаксации

$$A_1/e = 0,0447/2.72 = 0,0164 \text{ (рад)}.$$

Находим ближайшую по значению амплитуду на рис.2.5

$$A_6 = 0,0166 \text{ (рад)}.$$

Число полных циклов колебаний за указанное время $N = 5$. Обратная величина близка теоретическому значению логарифмического декремента с точностью до 0,002

$$\eta = \frac{1}{N} = \frac{1}{5} = 0,2. \quad (2.42)$$

2.9. Вынужденные колебания без учета демпфирования. Резонанс. Биения

Уравнения Лагранжа 2-го рода общего вида для вынужденных колебаний без трения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q^{\text{П}} + Q^{\text{ВЫН}}, \quad (2.43)$$

Обобщенная потенциальная сила $Q^{\text{П}}$

$$Q^{\text{П}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = -c^* \varphi_1.$$

Обобщенную вынуждающую силу $Q^{\text{ВЫН}}$ вычислим через отношение мощности периодической силы $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$ к обобщенной скорости

$$Q^{\text{вын}} = \frac{N(\vec{P}(t))}{\dot{\varphi}_1}.$$

Кинематические соотношения.

Выразим скорость точки D, к которой приложена сила $\vec{P}(t)$, через обобщенную скорость $\dot{\varphi}_1$:

$$V_D = l\dot{\varphi}_2 = l \cdot \frac{2r}{l} \dot{\varphi}_1 = 2r\dot{\varphi}_1.$$

Мощность движущей силы $P(t)$ равна её скалярному произведению на скорость точки приложения \vec{V}_D

$$N(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{V}_D = P \cdot 2r\dot{\varphi}_1. \quad (2.44)$$

Обобщенную вынуждающую силу $Q^{\text{вын}}$ определяем по формуле

$$Q^{\text{вын}} = \frac{N(\vec{P})}{\dot{\varphi}_1} = P(t)2r = 2r P_0 \cos(\omega t) = F_0 \cos(\omega t). \quad (2.45)$$

Амплитуда обобщенной вынуждающей силы

$$F_0 = 2rP_0 = 2 \cdot 0.25 \cdot 10 = 5 \text{ Нм}$$

$$Q^{\text{вын}} = 5 \cdot \cos(\omega t) \text{ Нм}. \quad (2.46)$$

Суммарная обобщенная сила уравнения Лагранжа (2.43)

$$Q^{\text{П}} + Q^{\text{вын}} = -c^* \varphi_1 + 2r P_0 \cos(\omega t) = -253,16\varphi_1 + 5 \cos(\omega t). \quad (2.47)$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний без учета трения

$$a^* \ddot{q} + c^* q = F_0 \cos(\omega t), \quad (2.48)$$

$$0,247 \cdot \ddot{\varphi}_1 + 253,16\varphi_1 = 5 \cos(\omega t), \quad (2.49)$$

Нормальная форма записи ДУ вынужденных колебаний без учета демпфирования

$$\ddot{q} + k^2 q = f_0 \cos(\omega t). \quad (2.50)$$

$$\ddot{\varphi}_1 + 1025\varphi_1 = 20,24 \cos(\omega t). \quad (2.51)$$

Относительная амплитуда периодической возмущающей обобщенной силы

$$f_0 = \frac{F_0}{a^*} = \frac{10}{0,494} = 20,24 \text{ (с}^{-2}\text{)}. \quad (2.52)$$

Решение ЛНДУ (2.50) при нулевых начальных условиях на частоте резонанса ($\omega = k$) – колебания с линейно возрастающей неограниченной амплитудой (рис.2.6, зеленый цвет линии)

$$\varphi_{1\text{част}} = \frac{f_0 t}{2k} \sin(kt). \quad (2.53)$$

Решение ЛНДУ (53) при нулевых начальных условиях вне частоты резонанса ($\omega \neq k$) – бигармонические колебания (рис.2.6, лиловый цвет)

$$\varphi(t) = \frac{f_0}{k^2 - \omega^2} [\cos(\omega t) - \cos(kt)] = -\frac{f_0}{k^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega - k}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega + k}{2}\right). \quad (2.54)$$

Если частота внешнего воздействия становится близкой к значению собственной частоты ($\omega \approx k$), то результирующие колебания принимают вид «биений» с медленно меняющейся амплитудой (рис.2.6, синий цвет линии)

$$A(f_0, k, \omega) = \frac{f_0}{k^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega - k}{2}\right) = \frac{20,24}{1025 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega - 32,01}{2}\right)$$

2.9.1. График вынужденных колебаний без учета трения

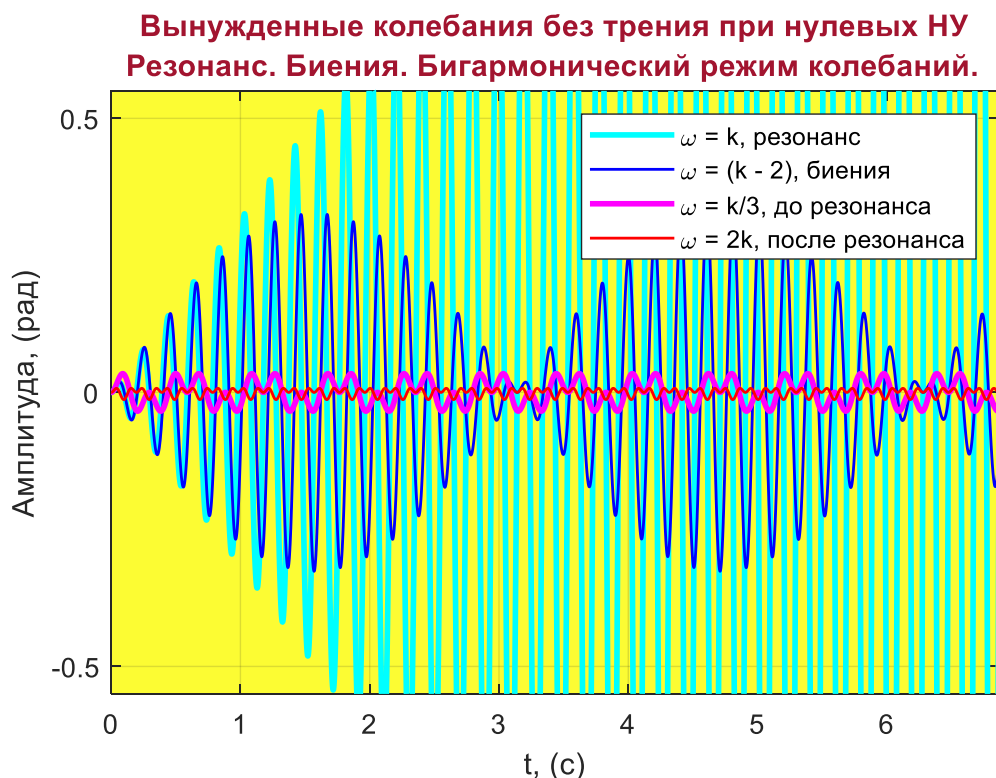


Рис.2.6. Вынужденные колебания без трения при различных частотах возмущения ω .

2.10. Вынужденные колебания системы с учетом вязкого трения.

Уравнения Лагранжа 2-го рода общего вида для вынужденных колебаний с сопротивлением

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q^{\text{П}} + Q^{\text{сопр}} + Q^{\text{вын}}. \quad (2.55)$$

Суммарная обобщенная сила равна

$$Q = -c^* \varphi_1 - b^* \dot{\varphi}_1 + F_0 \cos(\omega t).$$

Дифференциальное уравнение системы – *линейное неоднородное* (ЛНДУ) *второго порядка с постоянными коэффициентами.*

$$a^* \ddot{\varphi}_1 + b^* \dot{\varphi}_1 + c^* \varphi_1 = F_0 \cos(\omega t), \quad (2.56)$$

$$0.247 \ddot{q} + 0,5 \dot{q} + 253.16 q = 5 \cos(\omega t) \quad (2.57)$$

ЛНДУ в нормальной форме с единичным коэффициентом при старшей производной

$$\ddot{\varphi}_1 + 2n\dot{\varphi}_1 + k^2 \varphi_1 = f_0 \cos(\omega t). \quad (2.58)$$

$$\ddot{\varphi}_1 + 2,02 \dot{\varphi}_1 + 1025 \varphi_1 = 20,24 \cos(\omega t). \quad (2.59)$$

Общее решение ЛНДУ при нулевых начальных условиях

$$\varphi_1(t) = -e^{-1,01t} A_{\text{вын}} [\cos(\varepsilon) \cdot \cos(31,99t) + \frac{1,01 \cos(\varepsilon) + \omega \sin(\varepsilon)}{31,99} \sin(31,99t)] + A_{\text{вын}} \cos(\omega t - \varepsilon); \quad (2.60)$$

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний с трением равна

$$A_{\text{вын}} = \frac{f_0}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} = A_{\text{стат}} \cdot \mu, \quad (2.61)$$

Здесь $A_{\text{стат}} = \frac{f_0}{k^2} = \frac{F_0}{c^*} = 0,02$ рад – статическое отклонение системы,

$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2 \lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 0,004 \lambda^2}}$ – коэффициент динамичности системы;

$\lambda = \omega/k$ – расстройка системы, «безразмерная» частота возмущения;

$\zeta = \frac{n}{k} = \frac{1,01}{32,01} = 0,032$ – безразмерный коэффициент затухания колебаний.

Сдвиг фаз ε между воздействием и перемещением

$$\varepsilon = \arctg \left(\frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2} \right) = \arctg \left(\frac{2\zeta\lambda}{1 - \lambda^2} \right) = \arctg \left(\frac{0,064\lambda}{1 - \lambda^2} \right). \quad (2.62)$$

2.10.1. Графики колебаний

Результаты, видимые на графике вынужденных колебаний с демпфированием (рис.2.7).

- Наличие трения ограничивает амплитуду колебаний при резонансе: резонансная амплитуда многократно превосходит амплитуды колебаний на других частотах, однако её размер ограничен.
- График биения имеет только одну амплитудную волну, после которой амплитуда колебаний фактически не меняется.
- Заметно изменение начального вида колебаний: спустя небольшое время переходного процесса (≈ 3 с) свободные колебания угасают, и остаются только вынужденные гармонические колебания.

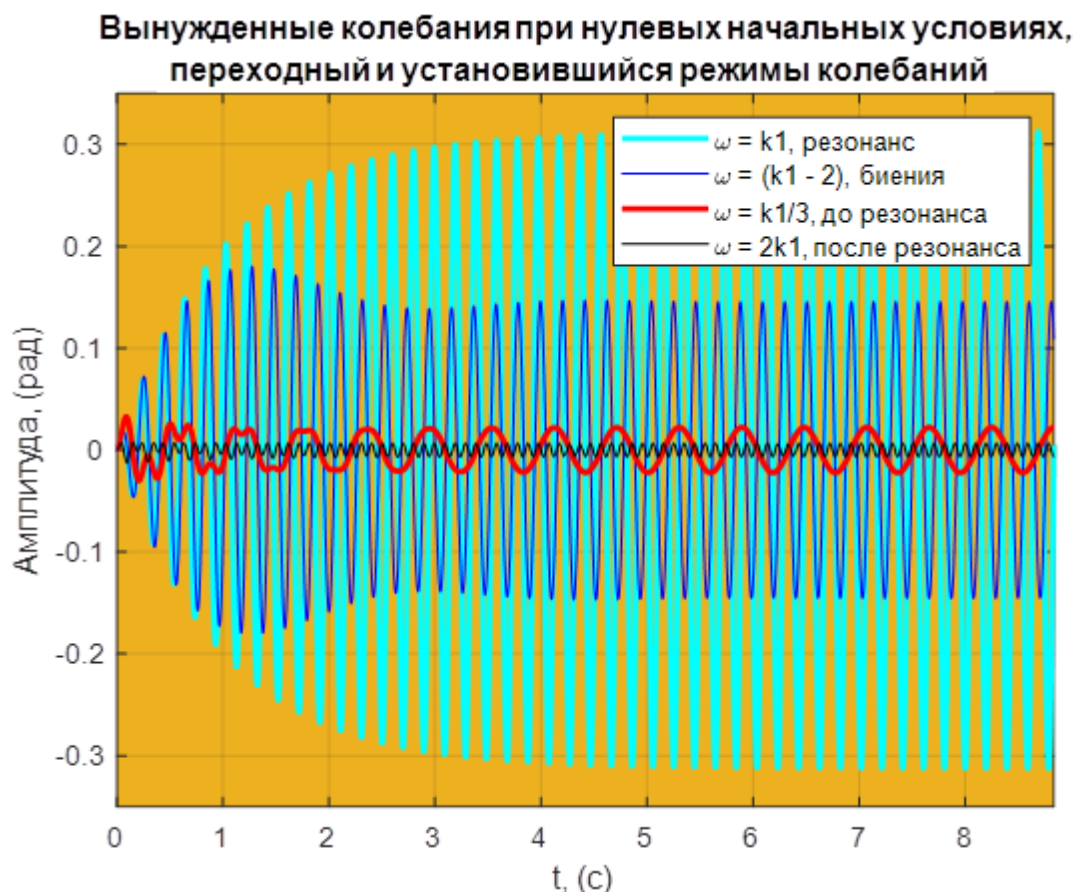


Рис.2.7. График вынужденных колебаний с учетом вязкого трения ($\zeta = \frac{n}{k} = 0,032$) под действием периодической силы $F(t) = 5 \cos(\omega t)$.

2.10.2. Коды построения серии графиков на одном поле в MATLAB

Вынужденные колебания с вязким трением

```
clear, clc
syms q1(t) a b c F0 omega % перечень символьных переменных
syms k f0 n % перечень символьных переменных
a=0.247; b=0.5; c=253.16; F0=5; f0=F0/a; % числовые значения параметров
k=sqrt(c/a);
T0=2*pi/k;
n=b/(2*a);
k1=sqrt(k^2-n^2);
T1=2*pi/k1;
figure (7)
tf=45*T1; % продолжительность колебаний 45 периодов
tsf=[0 tf];% интервал времени для построения графика
omega=[k (k-2) k/3 2*k];
lineStyle = {'m', 'b', 'r', 'k'};
width = [0.5 1 2 1];
for j=1:numel(omega)
    omg=vpa(subs(omega(j)),4);% подстановка omega(j)
    Amp=f0/sqrt(4*n^2*omg^2+(k^2-omg^2)^2);% амплитуда вынужденных колебаний
    arg=(2*n*omg)/(k^2-omg^2);
    esp=atan(arg); % фазовый сдвиг
    cosom (t)=cos(omg*t-esp);
    ssom (t)=sin(k1*t)*sin(esp)*omg/k1;
    snkc(t)=(sin(k1*t)*n/k1+cos(k1*t))*cos(esp);
    q1(t)=Amp*(cosom(t)-exp(-n*t)*(snkc(t)+ssom(t)));% функция, задающая решение
    fplot(q1,tsf, lineStyle{j}, "LineWidth",width(j));% график при omega(j)
    hold on % удерживать предыдущий график в окне
end
hold off % график не удерживать
grid on
xlabel('t, (с)');
ylabel('Амплитуда, (рад)');
str={'Вынужденные колебания с учетом трения при нулевых НУ'; 'Прекращение биений в установившемся режиме'};
title(str, 'Color', '#0072BD') % заголовок графика
legend({'\omega = k, резонанс'; '\omega = (k - 2), биения'; '\omega = k/3, до резонанса'; '\omega = 2k, после резонанса'});
ylim([-0.4 0.4])
```

2.10.3. График АЧХ

Безразмерной АЧХ (амплитудно-частотной характеристикой) системы называется зависимость коэффициента динамичности μ от безразмерного коэффициента расстройки $\lambda = \omega/k$ и коэффициента затухания $\zeta < 1$.

Коэффициент динамичности системы

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}} \quad (73)$$

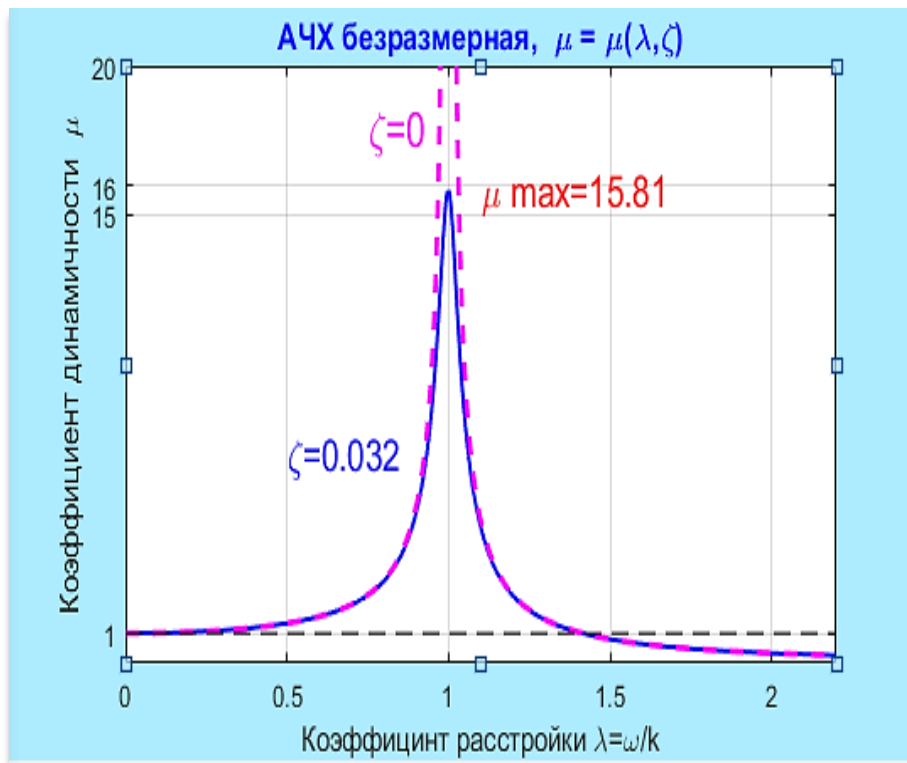


Рис.2.8. Зависимость коэффициента динамичности системы μ от расстройки $\lambda = \omega/k$ для относительного коэффициента затухания $\zeta = 0,032$ и $\zeta = 0$.

При рассматриваемом сопротивлении ($\zeta = 0,032$) амплитуда установившихся колебаний при резонансе будет больше статического отклонения в **15,81** раза.

2.10.4. Коды построения графика АЧХ в MATLAB

```
clear
clc
syms lambda mu zeta
mu(lambda,zeta)=1/sqrt((1-lambda^2)^2+4*zeta^2*lambda^2); % формула для Му
zet=0; % коэффициент затухания при отсутствии трения
Mu(lambda)=subs(mu,zeta, zet);
a=0.247; b=0.5; c=253.16; % числовые параметры ДУ
n=b/(2*a);
k=sqrt(c/a);
zeta=n/k % относительный коэффициент затухания в рассматриваемом примере
mu(lambda)=subs(mu(lambda,zeta));
MuMax=vpa(subs(mu,lambda,1),5) % максимальное значение Му
figure(12)
fplot(mu,[0 2.2], 'b', "LineWidth",1.5)% график Му при наличии трения
```

```

hold on
fplot(Mu,[0 0.98], '--m', "LineWidth",2) % левая ветвь графика Му без трения
fplot(Mu,[1.02 2.2], '--m', "LineWidth",2) % правая ветвь графика Му без трения
plot([0 2.2],[1 1], '--k', 'LineWidth',0.5)
text(1.1,MuMax , '\mu max=15.81', 'Color','r', 'FontSize',14)
text(0.5,7 , '\zeta=0.032', 'Color','b', 'FontSize',14)
text(0.75,18, '\zeta=0', 'Color','m', 'FontSize',16)
hold off
grid on
xlabel('Коэффициент расстройки \lambda=\omega/k')
ylabel('Коэффициент динамичности \mu', 'FontSize',11)
str={'АЧХ безразмерная, \mu = \mu(\lambda,\zeta)'};
title(str, 'Color','b', 'FontSize',12)
yticks([1 15 16 20]) % массив заданных числовых меток по оси y
ylim([0 20]) % диапазон изображения по оси y

```

2.10.5. График ФЧХ

Непрерывный график ФЧХ удобно строить по преобразованной формуле

$$\varepsilon = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{2\zeta\lambda}{1-\lambda^2 + \sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}} \right). \quad (78)$$

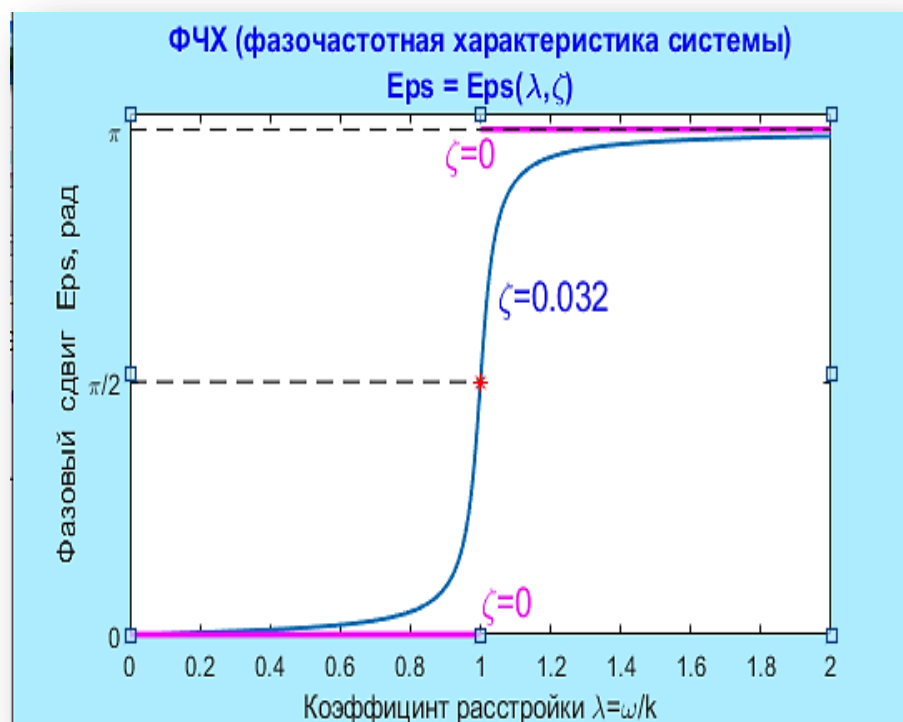


Рис.2.9. График фазочастотной характеристики системы $\varepsilon(\lambda, \zeta)$, для относительного коэффициента затухания $\zeta = 0,032$ и $\zeta = 0$.

2.10.6. Коды построения графика ФЧХ в MATLAB

```
clear
syms eps lambda zeta
esp(lambda,zeta)=2*atan((2*zeta*lambda)/(((1-lambda^2))+sqrt((1-
lambda^2)^2+4*zeta^2*lambda^2))); % Формула для Eps без скачков
zeta=0.032;
esp(lambda)=subs(esp(lambda,zeta));% подстановка относ. коэф. диссипации zeta
eps_Res=vpa(subs(esp,lambda,1),5); % сдвиг фаз при резонансе
figure(11)
lf=[0 2];
fplot(esp,lf,"LineWidth",1.5)
hold on
plot([0 1],[0 0], '-r','LineWidth',2) % толстая красная линия для Eps=0
plot([1 2],[pi pi], '-r','LineWidth',2)% толстая красная линия для Eps=pi
plot([0 1],[pi/2 pi/2], '--k','LineWidth',0.5) % черная пунктирная линия для
pi/2
plot([0 2],[pi pi], '--k','LineWidth',0.5) % черная пунктирная линия для pi
plot(1,pi/2,'*r') % красный маркер * для сдвига при резонансе
text(1,0.2 , '\zeta=0', 'Color','r', 'FontSize',14)
text(0.9,3 , '\zeta=0', 'Color','r', 'FontSize',14)
text(1.05,2.1 , '\zeta=0.032', 'Color','b', 'FontSize',14)
hold off
xlabel('Коэффициент расстройки \lambda=\omega/k')
ylabel('Фазовый сдвиг Eps, рад','FontSize',11)
yticks([0 pi/2 pi])
yticklabels({'0', 'pi/2', 'pi'})
str={'ФЧХ (фазочастотная характеристика системы)'; 'Eps = Eps(\lambda,\zeta)'};
title(str, 'Color','b', 'FontSize',12)
ylim([0 pi+0.1])
```

2.11. Применение символьной математики MATLAB для интегрирования ЛНДУ второго порядка и построения графиков

После вычисления коэффициентов a^* , b^* , c^* и задания F_0 для своего варианта студенты, которые имеют доступ к приложению [Symbolic Math Toolbox](#) – MATLAB, могут воспользоваться представленными программными кодами и получить все графики, необходимые для отчета, за исключением графиков АЧХ и ФЧХ. Кроме того, после знаков (%) в кодах присутствуют комментарии, которые позволяют понять логику составления программы, что можно использовать при разработке подобной программы, например, в Mathcad.

Результаты вычислений выводятся в виде графиков с заголовками и указанием значений параметров.

2.11.1. Коды последовательного исследования колебаний и построения необходимых графиков в MATLAB

Свободные незатухающие колебания без трения линейной системы (1 ст. св.)

```
clear % удаление переменных из рабочей области
clc; % очистка экрана
syms phi(t) a c
syms n k
eq = a*diff(phi,t,2)+c*phi==0 % диф.ур.свободных колебаний без трения
eq = subs(eq, c, a*k^2);
eq = collect(eq, a)/a; % уравнение к коэф.«1» при старшей производной
Dphi=diff(phi,t);% скорость - первая производная от psi по t
Sol=dsolve(eq); % символьное решение с константами интегрирования
cond=[phi(0)==0,Dphi(0)==1.5]; % задание ненулевых начальных условий
PHI=dsolve(eq,cond);% символьное решение общего вида с учетом НУ
PHI_free=simplify(PHI)% упрощение вида решения
a=0.247, c=253.16, %подстановка числовых значений параметров
k=sqrt(c/a), %вычисление собственной частоты колебаний без трения
T0=2*pi/k %вычисление периода свободных колебаний без трения
phi(t)=subs(PHI_free);% подстановка числовых значений в символьное решение
```

График

```
figure (1) % новое графическое окно 1
tf0=5*T0; % продолжительность моделирования колебаний
tf=[0 tf0];%интервал времени для построения графика
linezero(t)=phi(t)-phi(t);% функция для рисования нулевого уровня
fplot(linezero, tf, 'm','LineWidth',2); % график линии нулевого уровня
hold on % оставлять изображение в текущем окне графика
fplot(phi,tf,'b',"LineWidth",1) % график свободных колебаний без трения
syms p % задание символьной переменной для вычисления и построения амплитуды
p=T0/4;
Amp=subs(phi,p);
ym=Amp; % максимальное значение ординаты графика
plot(p,ym,'*') % первый максимум функции phi отмечается звездочкой
plot([T0/4,T0/4],[0 subs(phi,p)],'r'),% построение вертикали для амплитуды
text(T0/3,0.026,'Amp=0.047 рад', 'Color','r', 'FontSize',14)
plot([5*T0/4 9*T0/4],[ym ym], 'k','LineWidth',2) % построение горизонтального
отрезка для периода
text(T0*1.26,ym*1.07 , 'T0=0.196 c', 'Color','k', 'FontSize',12)
hold off % не оставлять изображение в окне
grid on % отобразить сетку
str={'График свободных колебаний без учета трения'; 'при заданных НУ:\phi(0)=0
рад; d\phi/dt (0)=1.5 рад/с'};% строка с названием графика'}
title(str, 'Color','#7E2F8E');% заголовок графика с указанием цвета
legend('0','угол отклонения \phi') % вывод названий линий в порядке их
построения
xlabel('t, (c)'); % название независимой переменной по оси X
ylabel('Амплитуда, (рад)'); % название функции по оси Y
ylim([-0.055 0.055]) % задание диапазона изображения по оси Y
% display(vpa(subs(phi,p), 3), 'Amplitude');
```

Свободные затухающие колебания линейной системы с вязким трением (1 ст.св.)

```

syms psi(t) a b c
syms n k k1
eq1 =a*diff(psi,t,2)+b*diff(psi,t)+c*psi==0 % ДУ св. кол. с параметрами a,b,c
eq1 = subs(eq1, [b c], [2*a*n, a*k^2]);
eq1 = collect(eq1, a)/a; % преобразование ДУ к каноническому виду
Dpsi=diff(psi,t);% скорость - первая производная от psi по t
n=b/(2*a);
Sol1=dsolve(eq1);% символьное решение с константами интегрирования
Sol1 = expand(Sol1);
PSI_free = collect(Sol1, exp(-n*t))
cond=[psi(0)==0,Dpsi(0)==1.5]; % ненулевые начальные условия
PSI=dsolve(eq1,cond); % решение ДУ с учетом начальных условий
PSI_free=simplify(PSI)
a=0.247, b=0.5, c=253.16, %задание числовых значений параметров a, b, c
n=b/(2*a); k=sqrt(c/a), k1=sqrt(k^2-n^2),
T0=2*pi/k %период свободных колебаний без трения
T1=2*pi/k1 %период свободных колебаний при наличии трения
psi(t)=subs(PSI);% подстановка параметров в символьное решение

```

График

```

figure (2) %новое графическое окно (2)
tf=20*T1; % продолжительность моделирования колебаний с трением
tsf=[0 tf];%интервал времени для построения графика
linezero(t)=psi(t)-psi(t);%
fplot(@(t) linezero(t), tsf, 'm','LineWidth',2);
hold on
fplot(psi,tsf,'g',"LineWidth",3) % график затухающих колебаний
fplot(phi,tsf,'b',"LineWidth",0.5) % график свободных колебаний без трения
hold off
grid on % сетка
title({'График свободных затухающих колебаний при заданных НУ:';\psi(0)=0
рад; d\psi/dt (0)=1.5 рад/с'})
legend('0', 'угол отклонения')
xlabel('t, (с)');
ylabel('Амплитуда, (рад)');

```

Вынужденные колебания системы с вязким трением (нулевые НУ) (1 ст.св.)

```

syms q(t) a b c F0 omega %перечень символьных переменных
eqn =a*diff(q,t,2)+b*diff(q,t)+c*q==F0*cos(omega*t)
syms n k f0 % символьные переменные
forced = subs(eqn, [b c F0], [2*a*n, a*k^2, a*f0 ]); %подстановка произведений
переменных
forced = collect(forced, a)/a; %вынос "a" за скобки и сокращение на него
Dq=diff(q,t);% скорость
cond=[q(0)==0,Dq(0)==0]% задание нулевых начальных условий
q(t)=dsolve(eqn,cond);% решение диф.ур-я с учетом НУ
a=0.494, b=1, c=506.31, F0=10 % числовые значения переменных
f0=F0/a; %вычисление нового параметра
n=b/(2*a);
k=sqrt(c/a);% собственная частота без трения
k1=sqrt(k^2-n^2) %собственная частота при учете трения
T0=2*pi/k; %период свободных колебаний без трения
T1=2*pi/k1; %период свободных колебаний с трением

```

```
q(t,omega)=subs(q);% подстановка всех параметров, кроме t и omega
```

График

Сравнение вынужденных колебаний при 4-х частотах возбуждения

```
figure (3) % новое графическое окно (3)
om=[k1 (k1-2) k1/3 2*k1], % массив значений для частоты omega
tf=35*T1; % продолжительность колебаний
tsf=[0 tf];% интервал времени для построения графика
lineStyle = {'m','b','r','k'}; % массив обозначений для цветов линий
width = [0.5 1 2 1];% массив толщины линий
for j=1:numel(om)
    qom(t)= subs(q,omega,om(j));
    fplot(qom(t),tsf, lineStyle{j},"LineWidth",width(j));
    hold on
end
hold off %не сохранять график в текщем окне
grid on
title({'Вынужденные колебания без трения при нулевых НУ';'Бигармонический
режим колебаний. Биения'})
xlabel('t, (с)');
ylabel('Амплитуда, (рад)');
legend({'\omega = k1, резонанс';'\omega = (k1 - 2), биения';'\omega = k1/3, до
резонанса';'\omega = 2k1, после резонанса'});
ylim([-0.35 0.35]) % размеры поля графика по оси Y
```

График

Свободные затухающие и вынужденные колебания

```
figure (4) %новое графическое окно (4)
fplot(psi,tsf,'g',"LineWidth",2) %построение графика символьной функции psi
(свободных затухающих колебаний)
hold on
OMEGA=om(3),k1
q3(t)= subs(q,omega,om(3));
fplot(q3,tsf,'r',"LineWidth",1.5) %построение графика символьной функции q3
(вынужденных колебаний)
hold off
legend({'затухающие';'\omega = k1/3, вынужд.до резонанса'});
title({'Вынужденные с частотой \omega = k1/3 на фоне затухания свободных '})
xlabel('t, (с)');
ylabel('Амплитуда, (рад)');
```

3. Исследование свободных колебаний в системе с двумя степенями свободы

3.1. Особенности решения для системы с двумя степенями свободы.

При переходе к рассмотрению системы с несколькими степенями свободы, даже в том случае, когда их всего лишь две, решение задачи изменяется и усложняется.

Во-первых, вместо одного ДУ требуется составлять и рассматривать число уравнений, равное числу степеней свободы ($S=2$), т.е. иметь дело уже с системой дифференциальных уравнений. Вместо одного коэффициента инерции a^* и одного упругого коэффициента c^* требуется находить матрицу упругости A и матрицу жесткости C размера $(S \times S)$, в данном случае (2×2) .

Во-вторых, возрастает число собственных частот системы, которое также равно числу дифференциальных уравнений. В случае системы линейных однородных дифференциальных уравнений (СЛОДУ) требуется либо находить корни биквадратного «частотного уравнения», либо определять «собственные значения» так называемой *матрицы динамичности системы* $M=A^{-1} \cdot C$, после чего извлекать из них квадратные корни.

В-третьих, общее решение СЛОДУ, помимо собственных частот, требует определения для каждой частоты *коэффициентов форм*, показывающих, во сколько раз амплитуда колебаний одной из координат будет отличаться от амплитуды колебаний другой при данной частоте. Общее решение будет суперпозицией (суммой) так называемых «главных» (синхронных и синфазных) колебаний с найденными собственными частотами и соответствующими им коэффициентами форм колебаний.

В-четвертых, для построения графиков свободных колебаний из начальных условий нужно найти константы интегрирования. Для двух ДУ это означает – составить и решить систему из 4-х алгебраических уравнений с 4-мя неизвестными.

Не излагая подробно теорию решения СЛОДУ, представленную в многочисленных справочниках и учебниках по решению дифференциальных уравнений, остановимся на нескольких важных моментах при составлении и решении системы ДУ.

3.2. Уравнения Лагранжа 2-го рода для консервативной механической системы

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа; T – кинетическая энергия системы тел, Π – потенциальная энергия системы; q_1, q_2 – обобщенные координаты системы; \dot{q}_1, \dot{q}_2 – обобщенные скорости системы.

Функции T, Π вычисляются с такой точностью, при которой будут справедливы их представления в виде квадратичных форм обобщенных скоростей и обобщенных координат

$$T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{12} \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{q}_2^2; \quad (3.2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{11} q_1^2 + c_{12} q_1 q_2 + \frac{1}{2} c_{22} q_2^2 \quad (3.3)$$

где a_{ij}, c_{ij} - коэффициенты инерции и жёсткости.

Функция Лагранжа тоже будет иметь вид квадратичной формы

$$L = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{12} \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2} c_{11} q_1^2 - c_{12} q_1 q_2 - \frac{1}{2} c_{22} q_2^2 \quad (3.4)$$

Следуя алгоритму уравнений Лагранжа 2-го рода, находят частные производные по обобщенным скоростям и обобщенным координатам

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = a_{11} \dot{q}_1; \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = -c_{11} q_1 - c_{12} q_2;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = a_{22}\dot{q}_2; \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = -c_{12}q_1 - c_{22}q_2.$$

Полные производные по времени от частных производных по обобщенным скоростям

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = a_{11}\ddot{q}_1; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = a_{22}\ddot{q}_2.$$

Подставляя полученные выражения в исходные уравнения Лагранжа, получаем систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0; \\ a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

3.3. Матричная форма записи системы линейных однородных уравнений

Если ввести в рассмотрение вектор-столбцы обобщенных координат и обобщенных ускорений

$$q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}; \quad \ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

а также симметричные квадратные матрицы коэффициентов инерции и жёсткости

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

то система ДУ (3.5) может быть записана в матричной форме вида

$$A\ddot{q} + Cq = 0. \quad (3.8)$$

3.4. Собственный вектор матрицы динамичности – вектор коэффициентов форм. Главные колебания системы

Решением системы уравнений (3.8) будет вектор-столбец

$$q(t) = U \cdot D \sin(kt + \beta), \quad (3.9)$$

где вектор U называется *собственным вектором* или *вектором коэффициентов форм*, а D и β – константы, которые отыскиваются из начальных условий задачи. Колебания, в которых обе координаты

изменяются с одинаковой частотой (синхронно) и с одинаковой фазой (синфазно) могут иметь место при определенных начальных условиях и называются *главными колебаниями системы*. Вектор \mathbf{U} представляет собой отношения амплитуд обобщенных координат при главных колебаниях к принятой эталонной амплитуде. Умножая вектор \mathbf{U} или деля его на любую константу, мы не изменим величин отношений, из которых он составлен. Очевидно, что один из коэффициентов может быть равен единице, если соответствующая ему амплитуда D является эталонной.

3.5. Спектр собственных частот

Подстановка решения (3.9) в систему (3.8) приводит сначала к уравнению относительно собственных векторов форм, т. е. векторов \mathbf{U} .

$$(\mathbf{C} - k^2 \mathbf{A}) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

Полученная система однородных алгебраических уравнений будет иметь нетривиальное решение для \mathbf{U} , если определитель системы будет равен нулю. Данный определитель называется *характеристическим*. Получаем частотное (*характеристическое*) уравнение вида

$$\det(\mathbf{C} - k^2 \mathbf{A}) = 0, \quad (3.11)$$

где k – частота свободных колебаний, $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – нуль-вектор. В развернутом виде характеристическое уравнение имеет вид определителя

$$\begin{vmatrix} c_{11} - k^2 a_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - k^2 a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.12)$$

$$(c_{11} - k^2 a_{11})(c_{22} - k^2 a_{22}) - c_{12} c_{21} = p k^4 - q k^2 + s = 0 \quad (3.13)$$

Решая это уравнение можно получить спектр из двух собственных частот k_1 и k_2

$$K = [k_1; k_2] \quad (3.14)$$

Хотя в частном случае при 2-х степенях свободы несложно вычислить корни биквадратного уравнения, после чего из двух алгебраических уравнений найти коэффициенты форм, мы рассмотрим именно матричный способ вычисления, который пригоден для любого числа степеней свободы и поэтому является более универсальным способом. При этом для $S=2$ правильность результатов легко проверить с помощью калькулятора.

3.6. Матрица динамичности. Матричный способ вычисления собственных частот и собственных векторов форм.

Определение. Число λ называется собственным значением квадратной матрицы M , если найдется вектор x такой, что $M \cdot x = \lambda x$, или

$$(M - \lambda E) \cdot x = 0, \quad (3.15)$$

Вектор x называется собственным вектором матрицы M , соответствующим данному собственному значению λ .

Собственные значения матрицы M являются решениями уравнения

$$\det(M - \lambda E) = 0. \quad (3.16)$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* матрицы M .

Если ввести в рассмотрение так называемую «матрицу динамичности»

$$M = A^{-1} \cdot C \quad (3.17)$$

и найти для нее собственные числа и собственные векторы с помощью какого-либо доступного программного средства, то легко видеть, что *собственные числа* матрицы M будут *квадратами собственных частот* системы

$$\lambda = k^2, \quad (3.18)$$

а *собственные векторы* x матрицы динамичности будут векторами, состоящими из *коэффициентов форм главных колебаний*

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

Действительно, последнее уравнение можно переписать в виде

$$(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (3.20)$$

$$(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (3.21)$$

что с точностью до обозначений совпадает с (3.15).

3.7. Вычисление собственных чисел и собственных векторов матриц программными средствами Mathcad и MATLAB

Вычисление собственных чисел и собственных векторов матриц – это стандартная матричная процедура линейной алгебры, которая присутствует в любом программном средстве работы с матрицами.

Например, в **Mathcad** для вычисления собственных значений и собственных векторов служат специальные команды **eigenvals(M)**, **eigenvec(M, z)**, **eigenvecs(M, ["L"])**, **genvals(M, N)**.

В **MATLAB** с помощью команды **e = eig(M)** можно получить вектор-столбец, составленный из собственных чисел матрицы **M** (**eigenvalue** – «собственное число», **eigenvector** – «собственный вектор», англ.).

Та же команда, но при другом задании выходных параметров

$$[\mathbf{V}, \mathbf{D}] = \mathbf{eig}(\mathbf{M})$$

выводит диагональную матрицу **D** *собственных значений*, а также матрицу **V**, столбцами которой будут *собственные векторы* (правые), для которых выполняется равенство $\mathbf{M} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}$.

Легко заметить, что элементы диагональной матрицы **D**, будут равны квадратам собственных частот системы k^2 , а собственные векторы **V** матрицы динамичности **M** будут векторами, состоящими из коэффициентов форм главных колебаний $\mathbf{v} = \mathbf{U}$.

4. Пример выполнения практического задания 2 «Исследование колебаний консервативной системы двух тел с двумя степенью свободы» с использованием символьной математики MATLAB.

4.1. Описание колебательной системы с двумя степенями свободы

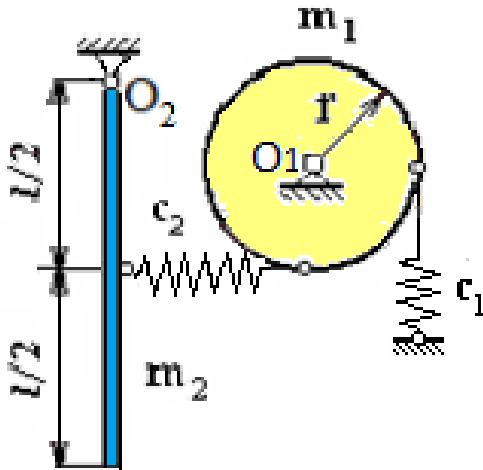


Рис. 4.1. Система двух тел в положении равновесия

Плоская механическая система (рис.4.1) состоит из стержня длины l и диска радиуса r , которые могут вращаться вокруг неподвижных горизонтальных осей O_1 и O_2 . Между собой оба тела соединены упругой связью – цилиндрической пружиной с коэффициентом жесткости c_2 . Еще одна цилиндрическая пружина с

коэффициентом жёсткости c_1 прикреплена нижним концом к неподвижной горизонтальной опоре, а верхним – к ободу диска. Диск и стержень считаются однородными телами с массами m_1 и m_2 , соответственно. Обе пружины рассматриваются как безмассовые упругие тела. Численные значения параметров системы и начальные условия для колебаний заданы в таблице исходных данных

Таблица 3. Исходные данные примера

m_1	r	m_2	l	c_1	c_2	φ_{01}	$\dot{\varphi}_{01}$	φ_{02}	$\dot{\varphi}_{02}$
кг	см	кг	см	Н/м	Н/м	рад	рад/с	рад	рад/с
3,1	25	1,8	70	4000	2500	0.2	1,5	0	0

В 4-х правых ячейках таблицы заданы начальные условия для возникновения свободных колебаний. Диск 1 отклоняют от положения равновесия против часовой стрелки на величину $\varphi_{01}=0.2$ рад и, кроме

того, ему сообщают начальную угловую скорость $\dot{\varphi}_{01}=1.5$ рад/с. Стержень ни толчка, ни начального отклонения не получает. Далее колебания системы продолжаются по инерции.

Отметим также, что в положении равновесия силы тяжести обоих тел не создают вращательных моментов относительно их осей (см. рис.4.1), поэтому обе пружины не имеют статической деформации.

4.2. Инструкции к выполнению практического задания 2

1. Обосновать число степеней свободы.
2. Указать выбранные обобщенные координаты и составить два дифференциальных уравнения малых свободных колебаний системы, используя уравнения Лагранжа второго рода для консервативных систем.
3. Определить собственные частоты и соответствующие им коэффициенты форм главных колебаний системы и записать решение в обобщенных координатах как суперпозицию главных колебаний.
4. Изобразить на рисунках формы главных колебаний для первой и второй собственных частот.

Замечание. В вариантах 1, 2, 3, 4, 6, 10, 17, 24, 26, 27 к диску 1 упругой связью присоединена тележка 3. Если за обобщенные координаты будут взяты угол поворота диска и линейная координата тележки, что вполне удобно и естественно, то полученные в п.3 коэффициенты форм окажутся отношениями амплитуд разной размерности (рад и м). Перед изображением главных форм колебаний для соизмеримости амплитуд требуется заменить угол поворота диска на соответствующую этому углу длину дуги по формуле $S = r\varphi$. Чтобы длина дуги диска принималась за эталон (за «единицу»), коэффициенты форм тележки следует поделить на величину r .

5. Определить амплитуды и начальные фазы полученного решения по заданным начальным условиям и построить графики свободных незатухающих колебаний.

4.3. Обоснование числа степеней свободы и выбор обобщенных координат.

Диск и стержень, соединенные упругой связью, могут совершать движение независимо один от другого: когда одно из тел будет двигаться, другое может оставаться в покое. В системе возможны два независимых движения поэтому данная система имеет *две степени свободы*.

В качестве обобщённых координат выберем углы поворота диска и стержня вокруг своих осей φ_1 и φ_2 . В этом случае у них размерности совпадают (радианы).

Обобщенные скорости – это угловые скорости поворота тел $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$.

4.4. Система уравнений Лагранжа 2-го рода для консервативной механической системы с двумя степенями свободы

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа, T – кинетическая энергия системы, Π – потенциальная энергия системы.

4.5. Кинетическая энергия системы в виде квадратичной формы обобщенных скоростей. Инерционная матрица A

Кинетическую энергию системы вычисляем с точностью, при которой будет справедливо её представления в виде квадратичной формы обобщённых скоростей

$$T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{\varphi}_1^2 + a_{12} \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{\varphi}_2^2; \quad (4.2)$$

где a_{ij} , – коэффициенты инерции системы, входящие в инерционную матрицу системы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Кинетическая энергия системы есть сумма кинетических энергий вращательных движений диска и стержня

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2, \quad (4.4)$$

где $J_1 = \frac{1}{2}m_1r_1^2$ – момент инерции диска относительно оси вращения O_1 ,

$J_2 = \frac{1}{3}m_2l^2$ – осевой момент инерции стержня относительно оси O_2 .

Элементы инерционной матрицы системы

$$a_{11} = J_1 = \frac{1}{2}m_1r_1^2 = \frac{3,1 \cdot 0,25^2}{2} = 0,097 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 = 1 \text{ кг};$$

$$a_{12} = a_{21} = 0;$$

$$a_{22} = J_2 = \frac{1,8 \cdot 0,7^2}{3} = 0,294 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,097 & 0 \\ 0 & 0,294 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

4.6. Потенциальная энергия системы в виде квадратичной формы обобщенных координат. Матрица жесткости \mathbf{C}

Потенциальную энергию системы вычисляем с точностью, при которой будет справедливо её представление в виде квадратичной формы обобщённых координат

$$P = \frac{1}{2}c_{11}\varphi_1^2 + c_{12} \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 + \frac{1}{2}c_{22}\varphi_2^2; \quad (4.6)$$

где c_{ij} , – коэффициенты, входящие в матрицу жесткости системы

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Потенциальная энергия системы складывается из энергии сил тяжести стержня и энергии упругой деформации пружин

$$\Pi = \Pi_{\text{упр1}} + \Pi_{\text{упр2}} + \Pi_{G2}. \quad (4.8)$$

Для вычисления потенциальной энергии требуется задать обоим телам системы малое отклонение от положения равновесия. Пусть оба тела повернутся против часовой стрелки: каждое на свой угол (рис.4.2).

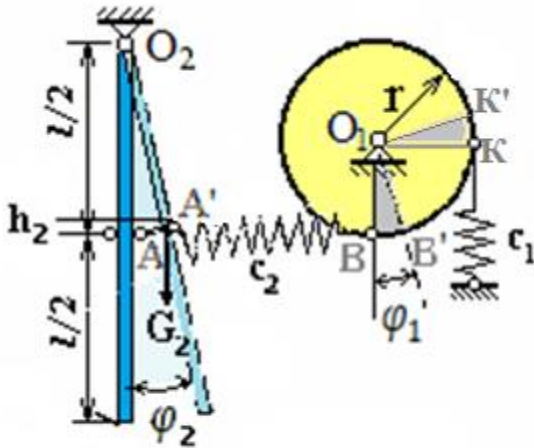


Рис.4.2. Система в отклонённом положении

Поскольку движения обоих тел независимы, то при вычислении потенциальной энергии их перемещения можно рассматривать поочередно.

При отклонении стержня от положения равновесия его центр тяжести поднимется на величину

$$h_2 = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos(\varphi_2).$$

Учтём малую величину угла поворота φ_2 , раскладывая $\cos(\varphi_2)$ в ряд Маклорена и оставляя только два первых слагаемых:

$$\cos(\varphi_2) = 1 - \frac{\varphi_2^2}{2!} + \frac{\varphi_2^4}{4!} - \dots \approx 1 - \frac{\varphi_2^2}{2}.$$

Потенциальная энергия силы тяжести стержня будет положительной и равной

$$\Pi_{G2} = m_2 g h_2 = m_2 g \frac{l}{4} \varphi_2^2 \quad (4.8)$$

Потенциальная энергия первой пружины в результате поворота диска на угол φ_1 будет равна

$$\Pi_{\text{упр1}} = \frac{1}{2} c_1 (r \varphi_1)^2. \quad (4.9)$$

У второй пружины поворот диска вызовет растяжение на величину $BB' = r \varphi_1$, а перемещение стержня заставит её сократиться на величину

$AA' = \frac{l}{2}\varphi_2$. В результате полная деформация второй пружины составит $\Delta_2 = \left(r\varphi_1 - \frac{l}{2}\varphi_2\right)$. Потенциальная энергия упругих сил пружины 2 будет равна

$$\Pi_{\text{упр2}} = \frac{1}{2}c_2 \left(r\varphi_1 - \frac{l}{2}\varphi_2\right)^2. \quad (4.10)$$

В данном примере у пружин нет статической деформации в положении равновесия, т.к. стержень расположен вертикально, и его сила тяжести не создает момента относительно оси вращения.

Суммарная потенциальная энергия системы принимает вид квадратичной формы

$$\begin{aligned} \Pi &= m_2 g \frac{l}{4} \varphi_2^2 + \frac{1}{2}c_1 (r\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}c_2 \left(r\varphi_1 - \frac{l}{2}\varphi_2\right)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(c_1 + c_2)r^2 \varphi_1^2 - c_2 r \frac{l}{2} \varphi_1 \varphi_2 + \frac{1}{2}\left(c_2 l^2 + m_2 g \frac{l}{2}\right) \varphi_2^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Элементы матрицы жесткости системы

$$c_{11} = (c_1 + c_2)r^2 = (4000 + 2500)0,25^2 = \frac{6500}{16} = 406,25 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$c_{12} = c_{21} = -c_2 r \frac{l}{2} = -2500 \cdot 0,25 \cdot 0,35 = -218,75 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$c_{22} = \left(c_2 l^2 + m_2 g \frac{l}{2}\right) = (2500 \cdot 0,7^2 + 1,8 \cdot 9,8 \cdot 0,35) = 1231,17 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

м.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 406,25 & -218,75 \\ -218,75 & 1231,17 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

4.7. Линейные дифференциальные уравнения свободных колебаний системы

Функция Лагранжа как квадратичная форма обобщенных скоростей и обобщенных координат

$$L = T - \Pi = \left(\frac{1}{2}a_{11}\dot{\varphi}_1^2 + a_{12} \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}a_{22}\dot{\varphi}_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}c_{11}\varphi_1^2 + c_{12} \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 + \frac{1}{2}c_{22}\varphi_2^2\right)$$

или

$$L = \left(\frac{1}{2} \cdot 0,097 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 0,294 \cdot \dot{\varphi}_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 406,25 \cdot \varphi_1^2 - 218,75 \varphi_1 \varphi_2 + \frac{1}{2} \cdot 1231,17 \cdot \varphi_2^2 \right).$$

Следуя алгоритму уравнений Лагранжа 2-го рода, находим частные производные по обобщенным скоростям и обобщенным координатам

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} &= a_{11} \dot{\varphi}_1; & \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= -c_{11} \varphi_1 - c_{12} \varphi_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} &= a_{22} \dot{\varphi}_2; & \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= -c_{12} \varphi_1 - c_{22} \varphi_2. \end{aligned}$$

Полные производные по времени

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = a_{11} \ddot{\varphi}_1; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = a_{22} \ddot{\varphi}_2$$

Подстановка полученных выражений в (1) даёт дифференциальные уравнения свободных колебаний, которые представляют собой линейные однородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} a_{11} \ddot{\varphi}_1 + c_{11} \varphi_1 + c_{12} \varphi_2 = 0; \\ a_{22} \ddot{\varphi}_2 + c_{12} \varphi_1 + c_{22} \varphi_2 = 0. \end{cases} \quad (16)$$

В матрично-векторной форме систему двух уравнений можно записать в стандартном виде.

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (17)$$

Обобщённые координаты образуют вектор-столбец $\mathbf{q}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}$.

Матрицы \mathbf{A} и \mathbf{C} были определены выше:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,097 & 0 \\ 0 & 0,294 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 406,25 & -218,75 \\ -218,75 & 1231,17 \end{pmatrix}$$

Матрица динамичности системы \mathbf{M} равна

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4188.1 & -2255.2 \\ -744.0 & 4187.7 \end{pmatrix} \quad (18)$$

4.8. Коды MATLAB для вычисления собственных векторов

Вычисление собственных чисел и собственных векторов матрицы динамичности $M = A^{-1} \cdot C$. Собственные частоты и коэффициенты форм

```
format compact
A=[0.097 0;0 0.294],%инерционная матрица
C=[406.25 -218.75;-218.75 1231.17],%матрица жесткости
symstr0 = ["'Матрица динамичности M'"];
displayFormula(symstr0)% вывод строки с текстом на дисплей
M=inv(A)*C %матрица динамичности
[V,D]=eig(M) %столбцовая матрица собст. векторов и диаг.матр. собст
чисел
symstr = ["'Собственные частоты - диагональные эл-ты матрицы K'"];
displayFormula(symstr)
K=sqrt(D) % собственные частоты
symstr1 = ["'Коеф-ты форм - значения столбца, соотв. частоте K'"];
displayFormula(symstr1)
U=[V(:,1)/V(1,1) V(:,2)/V(1,2)] %коэф-ты форм - нормализованные
соб.векторы
```

Результаты расчетов на экране дисплея

```
A =
    0.0970         0
         0    0.2940
```

```
C =
    1.0e+03 *
    0.4063   -0.2188
   -0.2188    1.2312
```

Матрица динамичности M

```
M =
    1.0e+03 *
    4.1881   -2.2552
   -0.7440    4.1877
```

```
V =
    0.8672    0.8671
   -0.4980    0.4981
```

```
D =
    1.0e+03 *
    5.4833         0
         0    2.8925
```

Собственные частоты - диагональные эл-ты матрицы K

```
K =
    74.0490         0
         0    53.7824
```

Коеф-ты форм - значения столбца, соотв. частоте K

```
U =
    1.0000    1.0000
   -0.5743    0.5745
```

Собственная частота с бóльшим значением оказалась расположенной в первом столбце, а мéньшая – во втором. Следует отметить, что в теории колебаний *первой* частотой принято называть наимéньшую собственную частоту, а второй частотой – бóльшую, т.е. в нашем примере $k_1 = 53,78$, $k_2 = 74.05$.

Тогда собственные векторы-столбцы с коэффициентами форм в решении задачи имеют следующую нумерацию:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.57 \end{bmatrix}; \quad U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.57 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

4.9. Обобщённые координаты в виде суммы главных колебаний

Обобщенные координаты отыскиваются в виде суммы главных колебаний для двух значений собственных частот и соответствующих им коэффициентов форм. Вектор обобщенных координат можно представить в виде матричного произведения

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.57 & -0.57 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \sin(53,78t + \beta_1) \\ D_2 \sin(74.05t + \beta_2) \end{bmatrix} \quad (30)$$

Алгебраическая форма записи уравнений движения в обобщенных координатах

$$\varphi_1(t) = D_1 \sin(53,78t + \beta_1) + D_2 \sin(74.05t + \beta_2). \quad (31)$$

$$\varphi_2(t) = 0.57 \cdot D_1 \sin(53,78t + \beta_1) - 0.57 \cdot D_2 \sin(74.05t + \beta_2). \quad (32)$$

В приведенном решении одинаковым цветом выделены главные колебания, происходящие с одинаковой частотой, одинаковой фазой и одинаковой эталонной амплитудой.

D_1 - это эталонная амплитуда колебаний диска при *первой* собственной частоте,

D_2 - это эталонная амплитуда колебаний диска при *второй* собственной частоте.

Значения амплитуд D_1 и D_2 , а также соответствующие им начальные фазы главных колебаний β_1 и β_2 определяются из начальных условий задачи.

4.10. Изображения форм главных колебаний

$$\varphi_1(t) = D_1 \sin(53,78t + \beta_1) + D_2 \sin(74,05t + \beta_2).$$

$$\varphi_2(t) = 0,57 \cdot D_1 \sin(53,78t + \beta_1) - 0,57 \cdot D_2 \sin(74,05t + \beta_2). \quad (31)$$

Покажем формы главных колебаний на рисунках 4.3 и 4.4.

Движение диска задается первой обобщенной координатой $\varphi_1(t)$, коэффициенты формы при которой равны единице. Поэтому диск оба раза отклоняем на один и тот же «единичный» угол в одну и ту же сторону - против часовой стрелки.

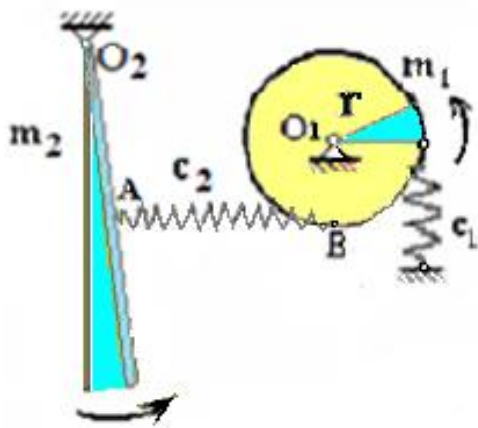


Рис.4.3. Первая форма колебаний: $k = 53,78$ рад /с;
 $u_1 = 0,57$

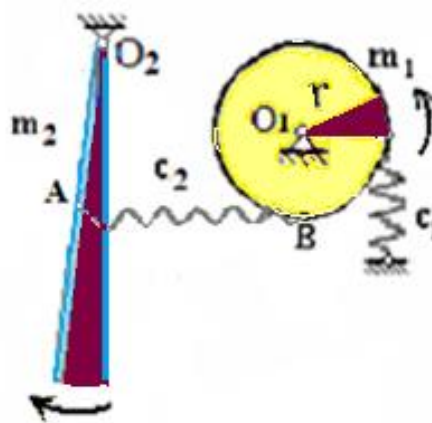


Рис.4.4. Вторая форма колебаний: $k = 74,05$ рад /с;
 $u_2 = -0,57$

Поскольку у стержня коэффициенты формы разного знака, он в главных колебаниях будет отклоняться в разные стороны.

При первой «бирюзовой» форме главных колебаний с меньшей частотой $k_1 = 53,78$ рад/с (рис. 4.3) оба тела синхронно и синфазно отклоняются в одну и ту же сторону, *против часовой стрелки*. При этом угол поворота второго тела – стержня составляет половину от угла поворота диска.

При второй «бордовой» форме главных колебаний с бóльшей частотой $k_2 = 74.05$ рад/с тела колеблются синхронно, но в противофазе и отклоняются в противоположные стороны (диск - *против часовой*, стержень – *по часовой*). Соотношение углов такое же, как при первой форме колебаний, поскольку в данном примере оказалось, что для обеих форм коэффициенты одинаковы по модулю.

4.11. Применение команды *linsolve(A,B)* MATLAB для решения линейной системы алгебраических уравнений относительно амплитуд D_1 и D_2 и начальных фаз β_1 и β_2 главных колебаний

В инструментах символьной математики Symbolic Math Toolbox – MATLAB имеется программа *linsolve(A,B)*, которая может решать систему линейных уравнений в общем виде, куда по мере необходимости можно подставлять и числовые значения параметров.

Составим систему их 4-х выражений для обобщенных координат и обобщенных скоростей

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = D_1 \sin(k_1 \cdot t + \beta_1) + D_2 \sin(k_2 \cdot t + \beta_2) ; \\ \dot{\varphi}_1(t) = k_1 \cdot D_1 \cos(k_1 \cdot t + \beta_1) + k_2 \cdot D_2 \cos(k_2 \cdot t + \beta_2); \\ \varphi_2(t) = u_1 D_1 \sin(k_1 \cdot t + \beta_1) + u_2 \cdot D_2 \sin(k_2 \cdot t + \beta_2); \\ \dot{\varphi}_2(t) = k_1 \cdot u_1 \cdot D_1 \cos(k_1 \cdot t + \beta_1) + k_2 \cdot u_2 \cdot D_2 \cos(k_2 \cdot t + \beta_2). \end{cases}$$

Подставим в левую часть начальные условия для углов и угловых скоростей, а в правую значение $t=0$

$$\begin{cases} \varphi_{10} = D_1 \sin(\beta_1) + D_2 \sin(\beta_2); \\ \dot{\varphi}_{10} = k_1 \cdot D_1 \cos(\beta_1) + k_2 \cdot u_2 \cdot D_2 \cos(\beta_2); \\ \varphi_{20} = u_1 \cdot D_1 \sin(\beta_1) + u_2 \cdot D_2 \sin(\beta_2); \\ \dot{\varphi}_{20} = k_1 \cdot u_1 \cdot D_1 \cos(\beta_1) + k_2 \cdot u_2 \cdot D_2 \cos(\beta_2). \end{cases}$$

В полученной системе алгебраических уравнений выделены разным цветом 4 элемента – произведения эталонных амплитуд на тригонометрические функции синус и косинус начальных фаз. Эти функции входят линейно и являются неизвестными величинами СЛАУ.

Составим массив этих неизвестных и обозначим его символом X .

$$X = [D_1 \sin(\beta_1), D_1 \cos(\beta_1), D_2 \sin(\beta_2), D_2 \cos(\beta_2)] = [X(1) X(2) X(3) X(4)].$$

Массив из 4 заданных начальных значений координат и скоростей обозначим буквой B , а для каждого элемента этого массива применим вполне очевидное символьное обозначение

$$B = \begin{pmatrix} q_{1,0} \\ dq_{1,0} \\ q_{2,0} \\ dq_{2,0} \end{pmatrix}$$

Символьная матрица постоянных коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & k_2 \\ u_1 & 0 & u_2 & 0 \\ 0 & k_1 \cdot u_1 & 0 & k_2 \cdot u_2 \end{pmatrix}$$

в кодах MATLAB записывается в виде строки-массива с пробелами между элементами строки и разделителями строк в виде точки с запятой (;)

$$A=[1 0 1 0; 0 k_1 0 k_2; u_1 0 u_2 0; 0 k_1*u_1 0 k_2*u_2].$$

Решение системы получим с помощью команды

$$X = \text{linsolve}(A, B),$$

которая возвращает ответ в следующем символьном виде

$$X = \begin{pmatrix} \frac{q_{2,0} - q_{1,0} u_2}{u_1 - u_2} \\ \frac{dq_{2,0} - dq_{1,0} u_2}{k_1 (u_1 - u_2)} \\ -\frac{q_{2,0} - q_{1,0} u_1}{u_1 - u_2} \\ -\frac{dq_{2,0} - dq_{1,0} u_1}{k_2 u_1 - k_2 u_2} \end{pmatrix}$$

Чтобы получить численный ответ, требуется задать численные значения 2-х коэффициентов форм, 2-х собственных частот, а также 4 начальных условия.

Зададим в качестве примера простые начальные условия (НУ), которые можно легко различить на графиках:

при $t = 0$ $\varphi_{01} = 0,2$ рад; $\dot{\varphi}_{01} = 1,5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varphi_{02} = 0$; $\dot{\varphi}_{02} = 0$.

Параметры для получения численных ответов:

$$u_1 = 0,57; u_2 = -0,57; k_1 = 53,78; k_2 = 74,05;$$

$$q_{1_0} = 0,2; dq_{1_0} = 1,5; q_{2_0} = 0; dq_{2_0}(0) = 0.$$

Подстановка параметров в вектор решений выполняется командой

$$X = \text{subs}(X).$$

Ответ в численном виде для 4-х компонентов вектора X

$$X = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.0465 \\ 0.1 \\ 0.0338 \end{pmatrix}$$

Амплитуды D1 и D2, а также начальные фазы beta1, beta2 находим по следующим формулам:

амплитуды $D_1 = \sqrt{X(1)^2 + X(2)^2} = 0,1103$ (рад);

$$D_2 = \sqrt{X(3)^2 + X(4)^2} = 0,1055$$
 (рад)

начальные фазы: $\beta_1 = \text{atan}(X(1)/X(2)) = 1,14$ рад;

$$\beta_2 = \text{atan}(X(3)/X(4)) = 1,25$$
 рад

Подставляем константы в символьные уравнения движения

$$\varphi_1(t) = 0,11 \sin(53,78 \cdot t + 1,14) + 0,1 \sin(74,05 \cdot t + 1,25);$$

$$\varphi_2(t) = 0,57 \cdot 0,11 \sin(53,78 \cdot t + 1,14) - 0,57 \cdot 0,1 \sin(74,05 \cdot t + 1,25).$$

4.11.1. Совмещенные графики свободных колебаний тел системы

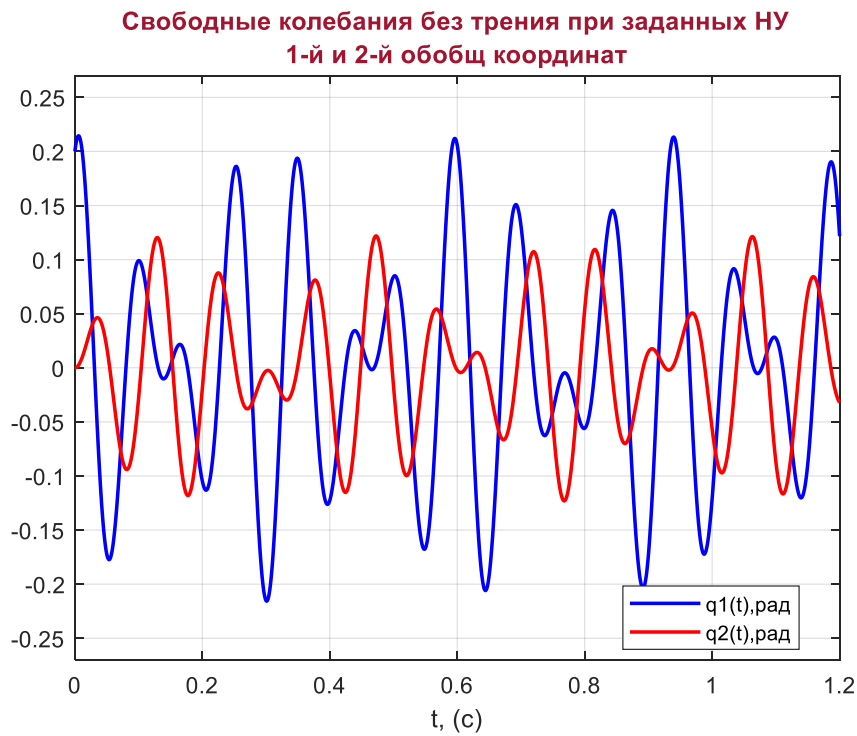


Рис. 4.5. Свободные незатухающие колебания двух тел – суперпозиция главных колебаний. Максимальные отклонения тел от положения равновесия отличаются в 2 раза.

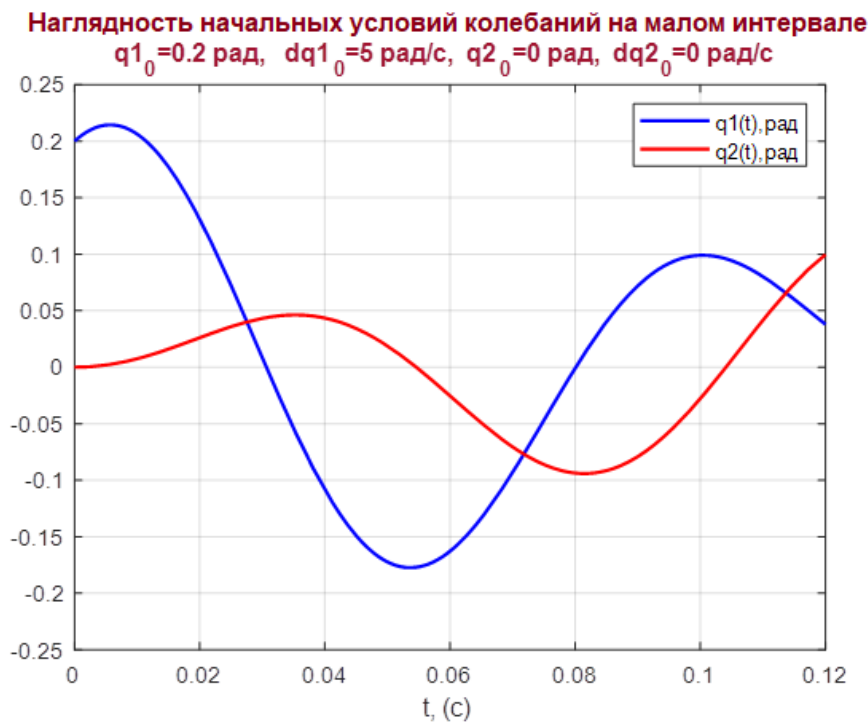


Рис. 4.6. Наглядность начальных условий на малом интервале колебаний

4.12. Коды вычисления амплитуд $D1$ и $D2$, а также начальных фаз β_1 и β_2 по заданным начальным условиям с помощью символьной математики MATLAB.

Построение графиков результирующего решения.

```
clear, clc
syms u1 u2 k1 k2 q1_0 q2_0 dq1_0 dq2_0 A B X t
B=[q1_0;dq1_0;q2_0;dq2_0];
A=[1 0 1 0;0 k1 0 k2;u1 0 u2 0;0 k1*u1 0 k2*u2];
X=linsolve(A,B) % решение СЛАУ относ.  $D*\sin(kt+\beta)$  и  $D*\cos(kt+\beta)$ 
syms D1 D2 beta1 beta2
q1_0=0.2, dq1_0=5, q2_0=0, dq2_0=0 %задание начальных условий
q1(t)=D1*sin(k1*t+beta1)+D2*sin(k2*t+beta2) %первая обобщ.коорд.
q2(t)=u1*D1*sin(k1*t+beta1)+u2*D2*sin(k2*t+beta2) %вторая обобщ.коорд.
u1=0.57; u2=-0.57; k1=53.78, k2=74.05, %задание коэфф-в форм и собств частот
X=subs(X); Xvpa=vpa(X,3)
beta1=atan(X(1)/X(2)); beta2=atan(X(3)/X(4)); %вычисление начальных фаз.
D1=sqrt(X(1)^2+X(2)^2); D2=sqrt(X(3)^2+X(4)^2);%вычисление амплитуд колебаний
q1(t)=subs(q1);
q2(t)=subs(q2);
% Просмотр полученных значений амплитуд и нач фаз в удобном масштабе
D1=vpa(D1,4), D2=vpa(D2,4),
beta1=vpa(atan(X(1)/X(2)),4), beta2=vpa(atan(X(3)/X(4)),4),
figure % Построение графиков колебаний
tsf=[0 1.2];
fplot(q1, tsf, 'b', "LineWidth",1.5) % Построение графика 1-й обобщ координаты
hold on
fplot(q2, tsf, 'r', "LineWidth",1.5) % Построение графика 2-й обобщ координаты
legend({'q1(t),рад';'q2(t),рад '},'Location','best')
grid on
hold off
xlabel('t, (c)');
str={'Свободные колебания без трения при заданных НУ'; '1-й и 2-й обобщ координат'};
title(str, 'Color', '#A2142F') % заголовок графика
ylim([-0.27 0.27])
figure % Построение графиков колебаний вблизи начала движения
tsf=[0 1.2];
tsf=[0 0.12];
fplot(q1, tsf, 'b', "LineWidth",1.5) % Построение графика 1-й обобщ координаты
hold on
fplot(q2, tsf, 'r', "LineWidth",1.5) % Построение графика 2-й обобщ координаты
legend({'q1(t),рад';'q2(t),рад '})
grid on
hold off
xlabel('t, (c)');
str={'Наглядность начальных условий колебаний на малом интервале'; 'q1_0=0.2 рад, dq1_0=5 рад/с, q2_0=0 рад, dq2_0=0 рад/с '};
title(str, 'Color', '#A2142F') % заголовок графика "#D95319"
ylim([-0.25 0.25])
```

Библиографический список

1. Амос Гилат. MATLAB. Теория и практика. 5-е изд./ Пер. с англ. Смоленцев Н.К. – М.: ДМК Пресс. 2016. – 416 с.
2. В.Л.Бидерман. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980, 408 с.
3. Жилин П.А. Теоретическая механика. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001, 146 с.
4. Культербаев Х.П. Основы теории колебаний. Примеры выполнения расчётно-проектировочных работ. Издательство КБГУ им. Х.М.Бербекова, 2003. - 126 с.
5. Ланцош К. Вариационные принципы механики М.: Мир, 1965. — 408 с. (пер. с англ. В.Ф. Гантмахера, под ред. Л.С. Полака).
6. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. М.: Наука, 1982. 352 с.
7. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
8. Прохоренко Ф.Ф. Теоретическая механика [Текст] : учебное пособие. Санкт-Петербург : Изд-во Политехнического ун-та, 2013. – 116 с.
9. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с
10. Цзе Ф.С., Морзе И.Е., Хинкл Р.Т. Механические колебания, Пер. с англ. Лосева Я.А., Эглита О.В., Под ред. чл.-кор. АН СССР Образцова И. Ф. –Москва: Машиностроение, 1966. — 508 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Схемы и таблица исходных данных (30 вариантов) для практического задания 1

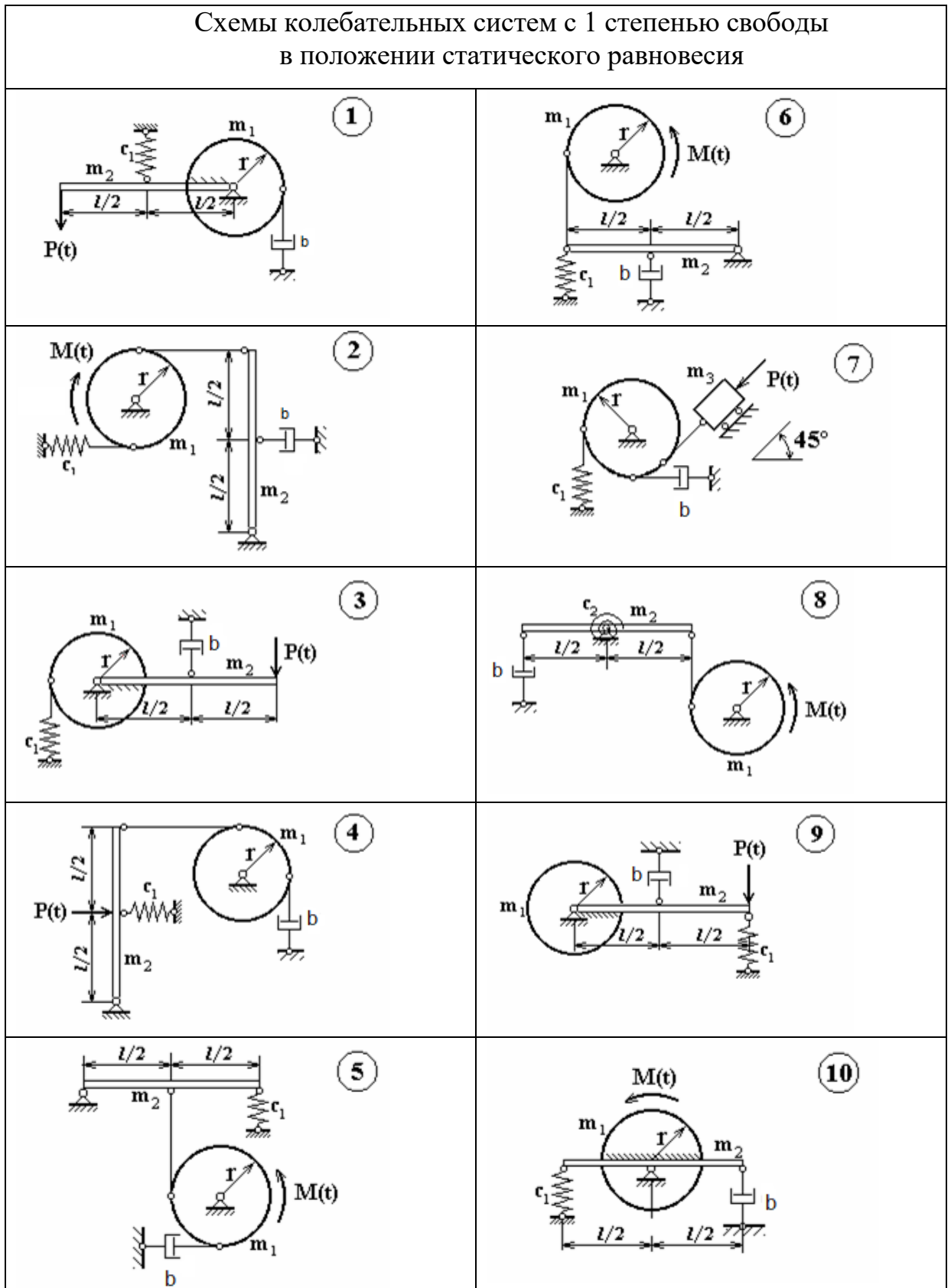


Рис. П1.1

Схемы колебательных систем с 1 степенью свободы
в положении статического равновесия

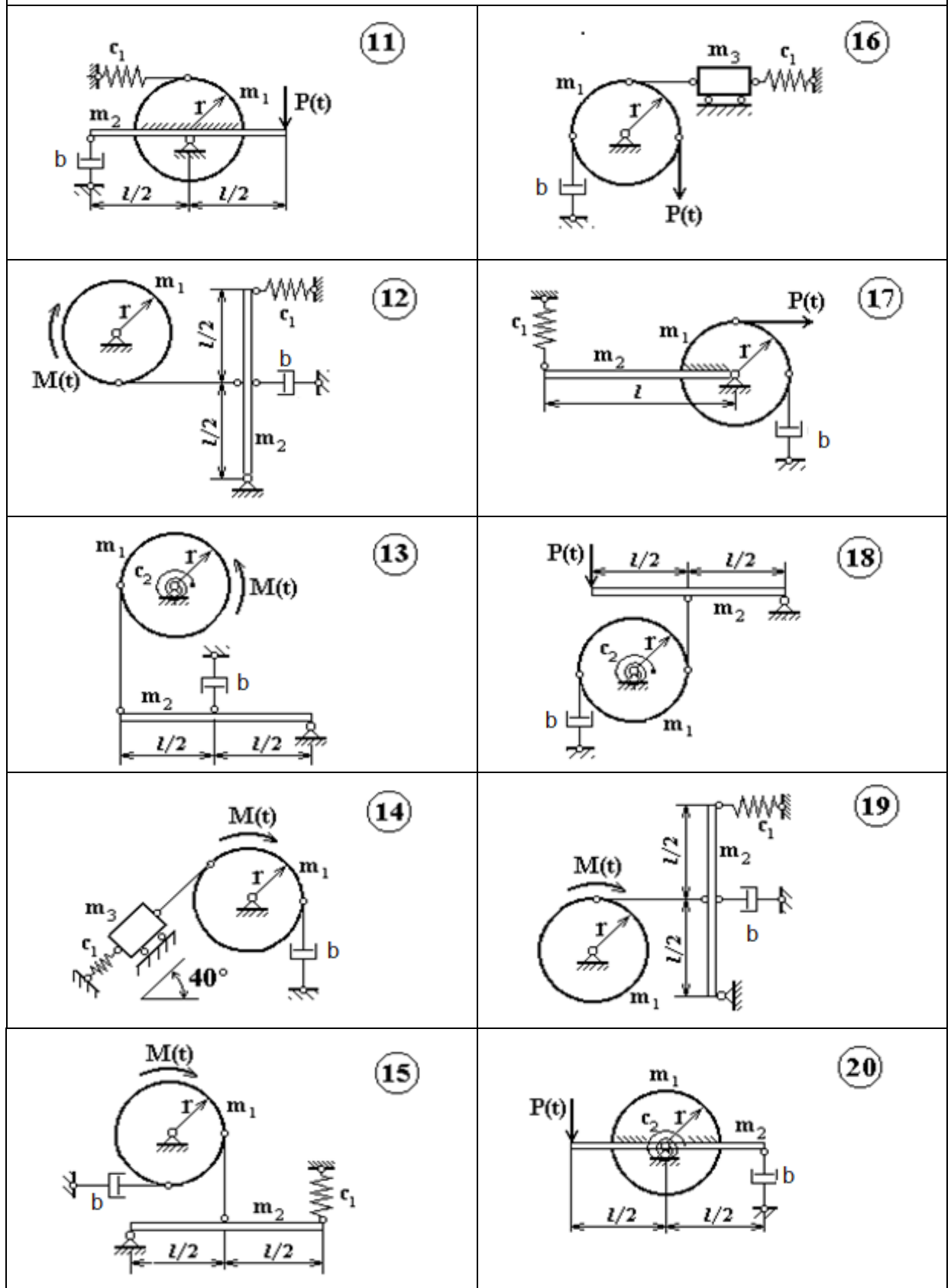


Рис. П1.2

Схемы колебательных систем с 1 степенью свободы
в положении статического равновесия

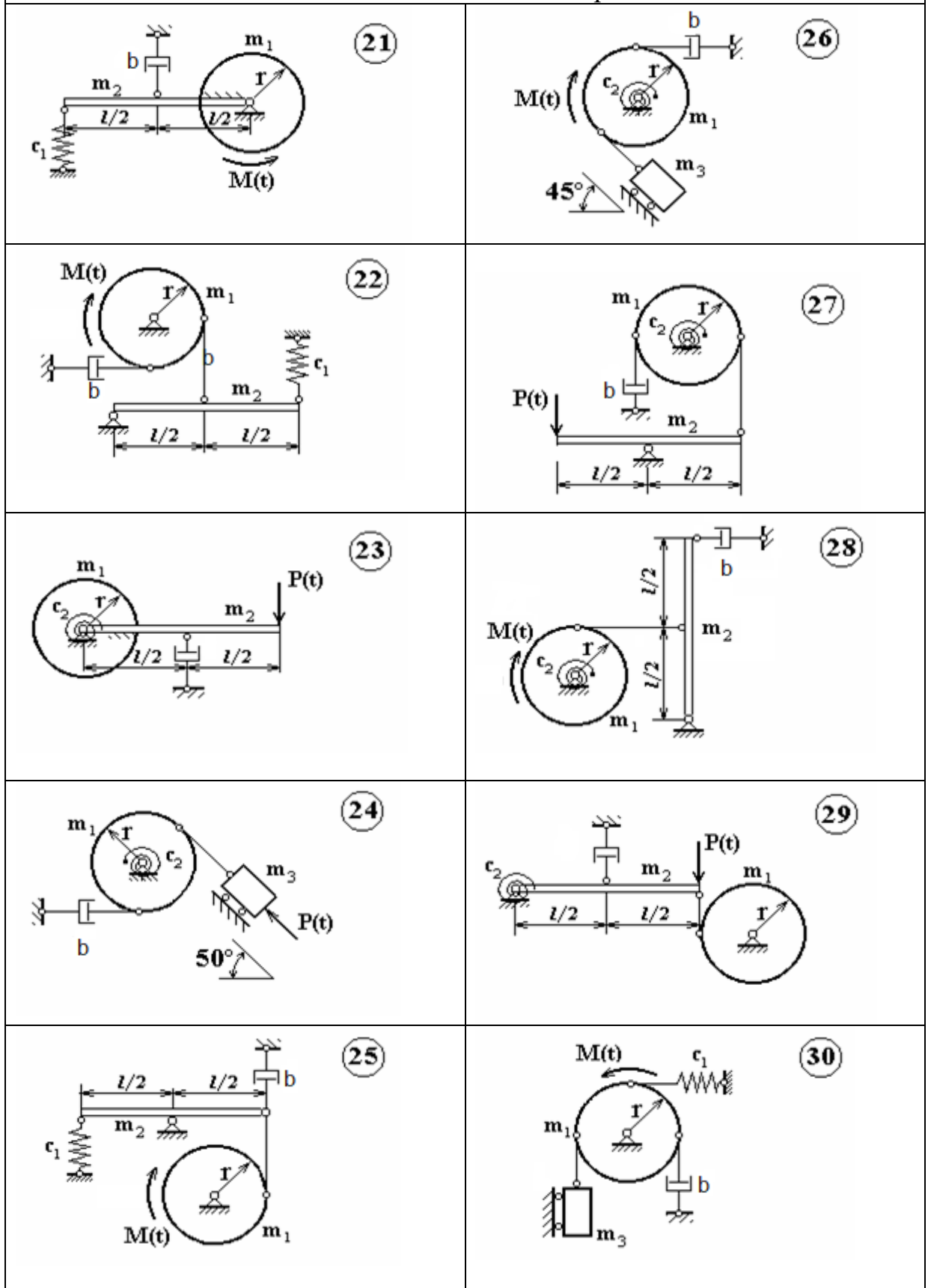


Рис. П1.3

Таблица 4. Исходные данные для задания 1 (одна степень свободы)

№	m_1	r	m_2	l	m_3	c_1	c_2	b	φ_{01}	$\dot{\varphi}_{01}$	$P_{0, M}$
вар	кг	см	кг	см	кг	Н/м	Нм/рад	$\frac{H}{m/s}$	рад	рад/с	H, Н/м
1	6,0	18	3,0	40		7000		10	0	0,05	25
2	6,4	20	3,4	50		7500		12	0,1	0	10
3	6,0	20	4,2	58		9000		14	0,2	0	15
4	7,2	24	4,0	60		8500		18	0	0,08	10
5	6,0	18	3,2	40		7000		20	0,05	0	10
6	6,0	30	5,4	60		6800		15	0	0,02	25
7	6,8	20			4,2	8000		10	0,1	0	20
8	7,0	24	4,0	60			360	15	0,15	0	10
9	6,4	20	3,4	50		7500		18	0	0,08	20
10	6,2	20	3,8	54		6000		20	0,05	0	10
11	7,2	24	4,0	60		8500		10	0	0,05	10
12	6,0	18	3,2	40		7000		12	0,1	0	15
13	6,2	20	4,2	65			300	15	0,25	0	30
14	6,8	24			3,1	8500		18	0	0,05	35
15	7,0	24	3,2	40		8200		20	0,02	0	15
16	6,0	18			4,0	7500		10	0	0,05	15
17	6,4	20	3,4	50		8000		12	0,1	0	10
18	7,8	22	3,6	55			320	15	0,15	0	30
19	7,2	24	4,0	60		8600		18	0	0,09	15
20	6,0	18	3,2	40			340	20	0,03	0	20
21	6,2	20	4,2	65		7800		10	0	0,05	25
22	6,8	20	3,4	50		8400		12	0,12	0	20
23	7,0	24	3,8	55			360	15	0,16	0	15
24	6,4	20			3,2		300	18	0	0,08	25
25	6,8	22	3,4	50		8500		20	0,04	0	25
26	7,2	24			3,4		320	10	0	0,05	20
27	6,0	18	4,0	60			400	12	0,1	0	25
28	6,2	20	3,4	50			320	15	0,14	0	30
29	6,8	18	4,8	54			380	15	0	0,06	35
30	7,0	24			3,6	8000		20	0,02	0	30

Параметры, заданные в таблице исходных данных П 1:

m_1 – масса диска, m_2 – масса стержня, m_3 – масса тележки;

r – радиус однородного диска, l – длина однородного стержня;

c_1, c_2 – коэффициенты жесткости пружин;

b – коэффициент вязкого трения демпфера (амортизатора);

$\varphi_{01}, \dot{\varphi}_{01}$ – начальный угол поворота и начальная угловая скорость диска 1;

P_0 – амплитуда гармонической вынуждающей силы $\mathbf{P}(t) = P_0 \cos(\omega t)$ (Н);

M_0 – амплитуда гармонического вынуждающего момента $\mathbf{M}(t) = M_0 \cos(\omega t)$ (Нм).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Схемы и таблица исходных данных (30 вариантов)
для практического задания 2

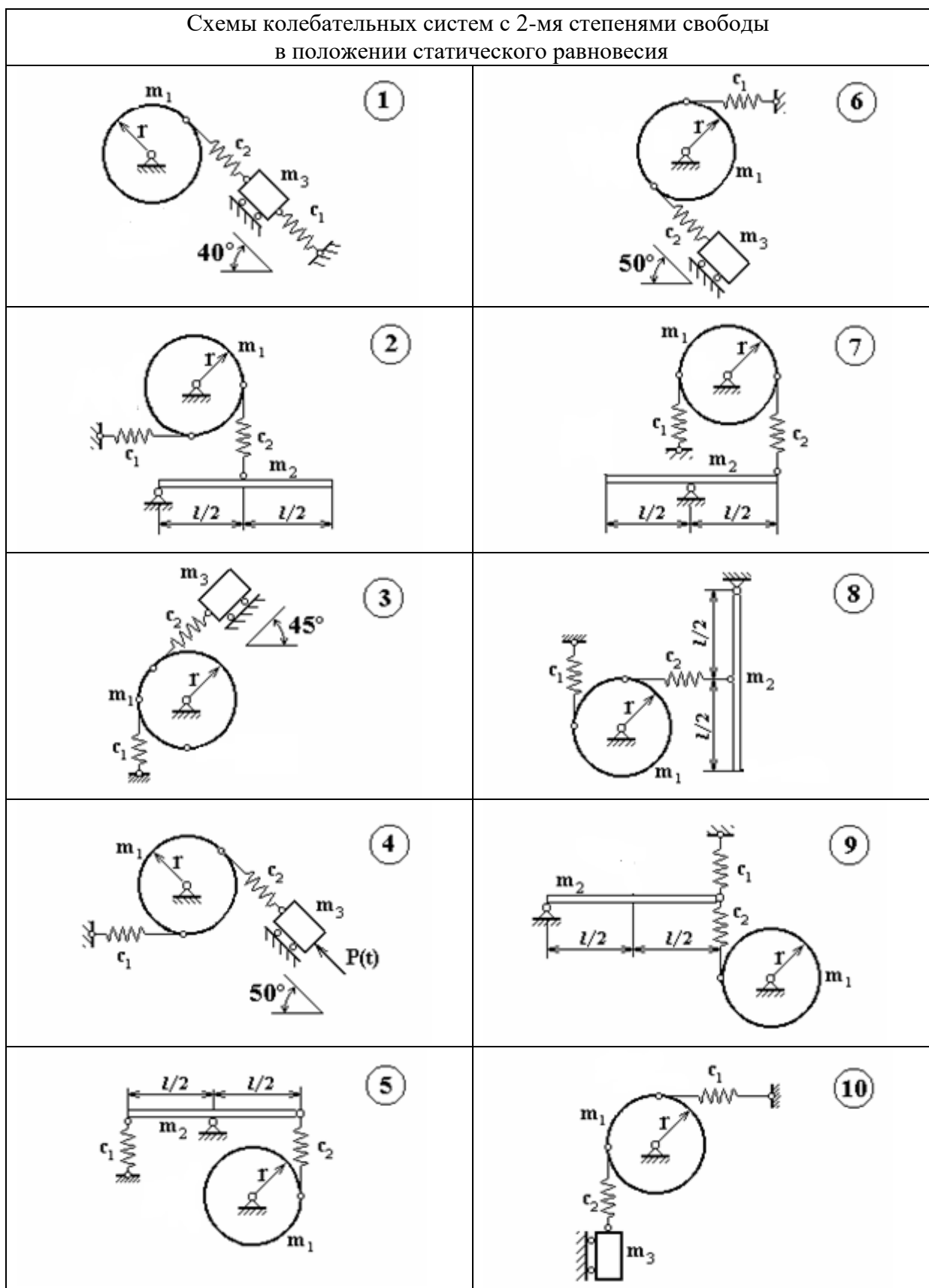


Рис. П2.1

Схемы колебательных систем с 2-мя степенями свободы
в положении статического равновесия

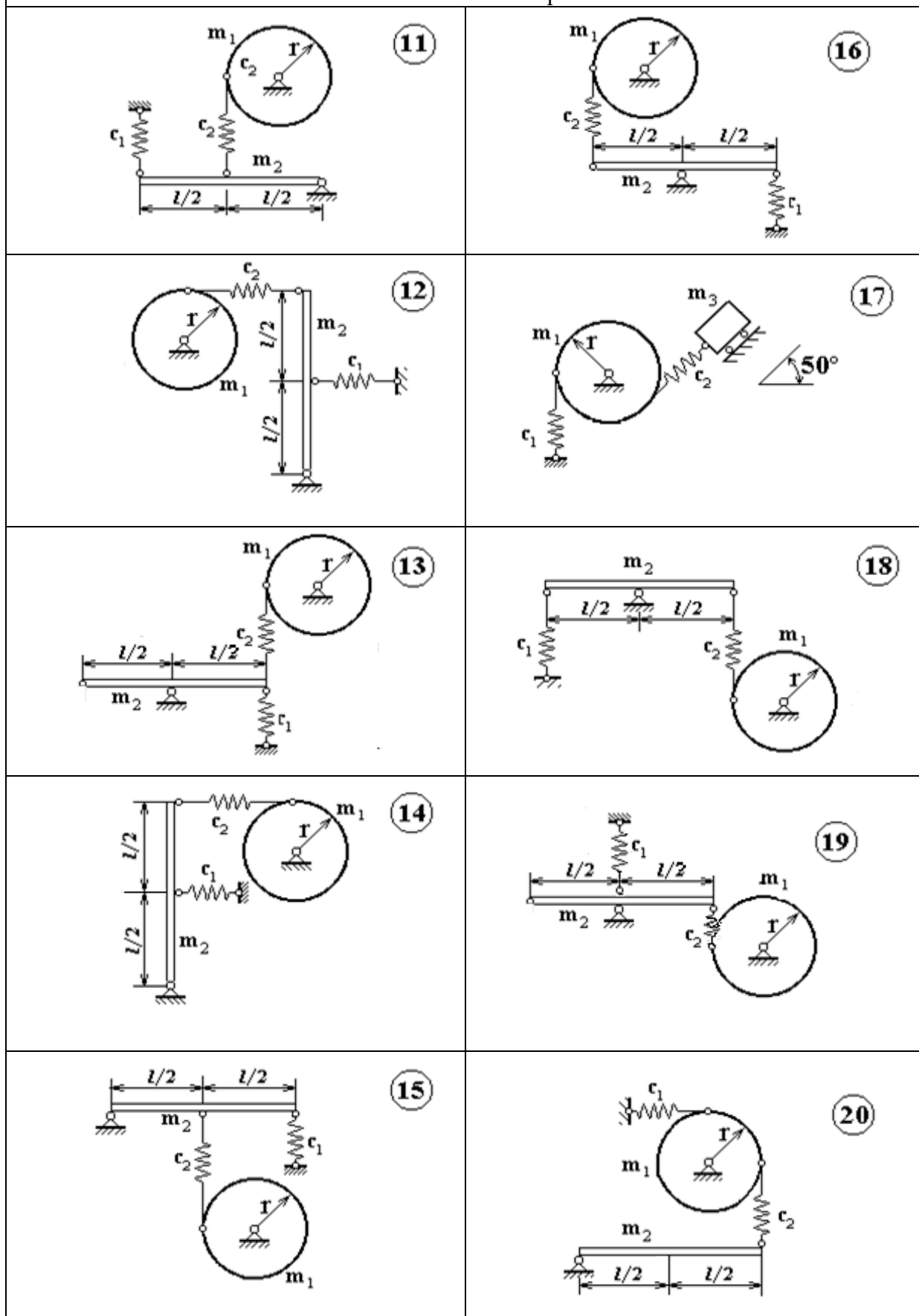


Рис. П2.2

Схемы колебательных систем с 2-мя степенями свободы
в положении статического равновесия

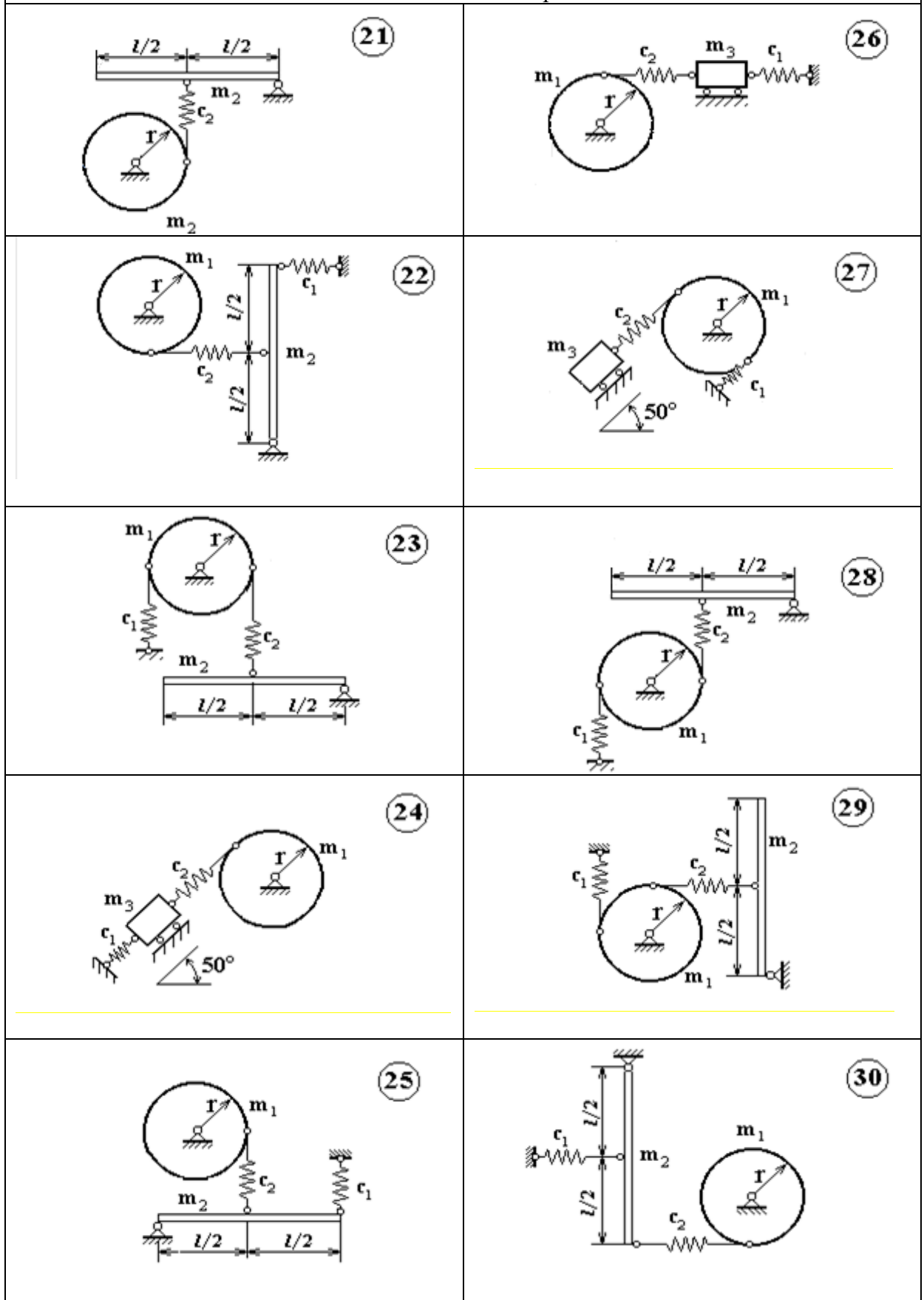


Рис. П2.3

Таблица 5. Исходные данные для системы 2-мя степенями свободы

№ вар.	m_1	r	m_2	l	m_3	c_1	c_2	φ_{01}	$\dot{\varphi}_{01}$	$\varphi_{02},$ x_{03}	$\dot{\varphi}_{02},$ \dot{x}_{03}
	кг	см	кг	см	кг	Н/м	Нм/ рад	Рад,	Рад/с	Рад см	Рад/с см/с
1	6,0	18	-	-	3,0	7000	4000	0	0,05	0,2	0
2	6,4	20	3,4	50		7500	3600	0,1	0	0	0,05
3	6,8	22	-	-	5,5	8000	2800	0,2	0	0,2	0
4	7,2	24	-	-	2,2	8500	3200	0	0,08	0	0,08
5	6,0	18	3,2	40		7000	4200	0,05	0	0,15	0
6	6,2	20	-	-	7,2	7200	2600	0	0,02	0	0,02
7	6,8	22			3,4	8200	1000	0,1	0	0,1	0
8	7,0	24	4,0	60		7000	3600	0,15	0	0	0,1
9	6,4	20	3,4	50		7500	4000	0	0,08	0,15	0
10	6,8	22	-	-	6,2	8000	3000	0,05	0	0	0,5
11	7,2	24	4,0	60		8500	4200	0	0,05	0,1	0
12	6,0	18	3,2	40		7000	2600	0,1	0	0	0,1
13	6,2	20	4,2	65		4800	3000	0,25	0	0,2	0
14	6,8	22			3,1	8500	2100	0	0,05	0	0,05
15	7,0	24	3,2	40		8200	3200	0,02	0	0,05	0
16	6,0	18	4,0	60		7500	1000	0	0,05	0	0,05
17	6,4	20	-	-	4,5	8000	2700	0,1	0	0,15	0
18	6,8	22	3,8	55		3200	3200	0,15	0	0	0,1
19	7,2	24	4,0	60		8600	4000	0	0,09	0,1	0
20	6,0	18	3,2	40		3400	3400	0,03	0	0	0,2
21	6,2	20	4,2	65		7800	1500	0	0,05	0,1	0
22	6,8	22	3,4	50		8400	3600	0,12	0	0,13	0
23	7,0	24	3,8	55		8000	3600	0,16	0	0,05	0
24	6,4	20	-	-	3,2	4000	3000	0	0,08	0	0,08
25	6,8	22	3,4	50		8500	4400	0,04	0	0,1	0
26	7,2	24	-	-	3,4	5200	3200	0	0,05	0	0,05
27	6,0	18	-	-	5,2	7900	4800	0,1	0	0,1	0
28	6,2	20	3,4	50		7400	4600	0,14	0	0	0,2
29	6,8	22	3,8	55			380	0	0,06	0,2	0
30	7,0	24			3,6	8000		0,02	0	0	0,1

Параметры, заданные в таблице исходных данных П 2:

m_1 – масса диска, m_2 – масса стержня, m_3 – масса тележки;

r – радиус однородного диска, l – длина однородного стержня;

c_1, c_2 – коэффициенты жесткости пружин;

$\varphi_{01}, \dot{\varphi}_{01}$ – начальный угол поворота и начальная угловая скорость диска;

$\varphi_{02}, \dot{\varphi}_{02}$ – начальный угол поворота и начальная угловая скорость стержня;

x_{03}, \dot{x}_{03} – начальное отклонение от положения статического равновесия и начальная скорость тележки.