

Министерство образования Российской Федерации  
—  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

Б.А.Мартынов

## ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ РЕЗОНАНСНОГО ТИПА

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГУ  
2003

УДК 534 (075.8)

Мартынов Б.А. Теория колебаний. Автоколебательные системы резонансного типа: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 66 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Теория колебаний» учебного плана специальности 071500 «Радиофизика и электроника» (направление подготовки дипломированных специалистов 654200 «Радиотехника»). Посвящено особенностям установившихся режимов в различных схемах автогенераторов, содержащих наряду с нелинейным активным элементом линейные резонансные системы в виде одиночного  $LC$ -контура или двух связанных колебательных контуров. Включенный в пособие материал позволяет на основе сравнительно простых моделей составить представление о таких специфических явлениях, наблюдаемых в автоколебательных системах, как регенерация, мягкое и жесткое самовозбуждение, захватывание (синхронизация) генератора внешним сигналом, конкуренция колебательных мод автогенератора и др.

Предназначено студентам специальности 071500 «Радиофизика и электроника» радиофизического факультета и может быть полезно студентам специальности 201700 «Радиотехника» Института интеллектуальных систем и технологий при изучении специальной дисциплины «Электромагнитные колебания в нелинейных системах».

Ил. 30. Библиогр.: 12 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет, 2003

# 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

## 1.1. Автоколебательные и потенциально-автоколебательные системы. Генераторы резонансного типа

Среди нелинейных динамических систем, рассматриваемых в теории колебаний, важное место занимают системы, которые способны создавать (генерировать) незатухающие колебания в отсутствие внешних воздействий, изменяющихся с течением времени. Для таких колебаний А.А.Андронов ввел в употребление термин «*автоколебания*», что означает самоподдерживающиеся колебания, а сами системы предложил именовать *автоколебательными* [1]. Следует подчеркнуть, что речь идет не о так называемых *консервативных* системах (системах без потерь), колебания в которых могут происходить сколь угодно долго благодаря запасу энергии, сохраняющемуся неизменным во времени. Для автоколебательной системы характерно сочетание потерь энергии колебаний и ее пополнения из входящего в состав системы источника. Классический пример механической автоколебательной системы – часы с колеблющимся маятником (либо балансиром), на периодическое подталкивание которого расходуется потенциальная энергия поднятой гири (либо заведенной пружины). Упомянем также такие известные примеры автоколебаний, как колебания скрипичной струны при равномерном движении смычка, колебания воздуха в органной трубе, колебания токов и напряжений в радиотехническом генераторе.

Данное пособие посвящено анализу процессов в некоторых радиотехнических автоколебательных и потенциально-автоколебательных системах. Под *потенциально-автоколебательной системой* понимается такая система, которая по своей структуре может быть отнесена к числу автоколебательных, но фактически не является ею лишь потому, что при выбранных значениях параметров элементов, образующих систему, оказываются невыполненными условия возникновения автоколебаний (условия самовозбуждения) [4].

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением систем, состоящих из нелинейного активного элемента А (обычно транзистора либо двухполюсника с отрицательным сопротивлением) и резонансной линейной схемы Т, которая в случае транзистора или иного активного трехполюсника должна быть построена таким образом, чтобы обеспечивалась положительная обратная связь

(рис.1). Подобные системы называются *генераторами резонансного типа* и могут быть автоколебательными либо потенциально–автоколебательными в зависимости от того, соблюдаются или не соблюдаются для них условия самовозбуждения. Основным интерес в последующем представляют установившиеся режимы периодических колебаний, реализующиеся в разновидностях генераторов резонансного типа, каждая из которых отличается малостью потерь (малой убылью энергии за период колебаний). Иными словами, любой из рассматриваемых ниже генераторов считается системой, близкой к консервативной.

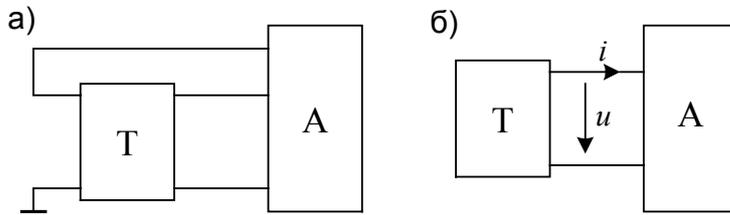


Рис.1

Кроме того, нелинейность элемента А предполагается достаточно слабой. Это означает, что система близка к линейной (*квазилинейная система*). В случае установившегося режима почти периодических колебаний, его анализ также базируется на предположении о близости системы к линейной и консервативной.

### 1.2. Средние импедансы и средние адмиттансы (средние крутизны) нелинейных двухполюсников

Обратимся к структурной схеме генератора резонансного типа на двухполюсном нелинейном активном элементе А (рис.1,б). Обусловленные свойствами двухполюсника А нелинейное соотношение между напряжением  $u$  на его зажимах и входным током  $i$  может быть как сравнительно простым, так и достаточно сложным, например, оно может содержать нелинейную функцию, аргументами которой помимо  $u$  и  $i$  являются их производные по времени:

$$F(u, i, \frac{du}{dt}, \frac{di}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \frac{d^2i}{dt^2}, \dots) = 0. \quad (1.1)$$

Запишем напряжение  $u$  и ток  $i$  как суммы постоянных составляющих  $U_0, I_0$  и переменных составляющих  $u_{\sim}, i_{\sim}$ :

$$u = U_0 + u_{\sim}, \quad i = I_0 + i_{\sim}.$$

Предположим, что в системе, представленной на рис.1,б, установился режим периодических или почти периодических колебаний. Тогда переменные составляющие  $u_{\sim}, i_{\sim}$  выражаются дискретными суммами гармонических компонент:

$$u_{\sim} = \sum_n U_n \cos(\omega_n t + \theta_n) = \sum_n \operatorname{Re}[\dot{U}_n \exp(j\omega_n t)],$$

$$i_{\sim} = \sum_n I_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) = \sum_n \operatorname{Re}[I_n \exp(j\omega_n t)],$$

где  $\dot{U}_n = U_n \exp(j\theta_n)$ ,  $\dot{I}_n = I_n \exp(j\varphi_n)$  – комплексные амплитуды гармоник круговой частоты  $\omega_n$ .

Анализ многих видов установившихся режимов целесообразно проводить, используя понятия *средних адмиттансов*  $\bar{Y}_n$  и *средних импедансов*  $\bar{Z}_n$  двухполюсника А, определяемых для отдельных гармоник на основе (1.1) или иных соотношений между  $u$  и  $i$  согласно равенствам:

$$\bar{Y}_n = 1/\bar{Z}_n = \dot{I}_n / \dot{U}_n.$$

Средний адмиттанс  $\bar{Y}_n$  именуют также *средней крутизной*, обозначаемой по большей части как  $\bar{S}_n$ .

Проще всего ввести средние адмиттансы и импедансы для так называемых *одночастотных режимов*, когда переменные составляющие либо напряжения  $u$ , либо тока  $i$  содержат лишь одну гармоническую компоненту (первый случай соответствует одночастотному режиму по напряжению, второй – одночастотному режиму по току). На самом деле утверждение о том, что установившийся режим в нелинейной системе является одночастотным, следует трактовать как упрощающее предположение. Допустимо говорить лишь о близости того или иного режима к одночастотному (моногоармоническому), что действительно имеет место во многих случаях, когда рассматриваемая система относится к классу квазилинейных.

Будем далее полагать, что установившийся режим генератора на двухполюснике А может считаться одночастотным по напряжению, т.е.  $u_{\sim} = U \cos \tau$ , где  $\tau = \omega t + \theta$ , и предположим, что зависимость тока  $i$  от напряжения  $u$  выражается однозначной функцией:

$$i = f(u).$$

В отличие от (1.1) последнее соотношение между  $i$  и  $u$  не содержит их производных по времени, что можно трактовать, в частности, как предположение о безынерционности нелинейного активного двухполюсника А.

Если составляющая  $U_0$  может быть выражена однозначной функцией переменной составляющей  $u_{\sim}$  либо принимает фиксированное значение, ток  $i$  также оказывается однозначной функцией  $u_{\sim}$ :

$$i = f_1(u_{\sim}).$$

Поскольку  $u_{\sim}$  является четной функцией вспомогательной переменной  $\tau$ , а однозначная функция от четной функции – четная, вещественная форма ряда Фурье по аргументу  $\tau$  для тока  $i$  содержит только косинусоидальные гармоники:

$$i = \sum_{s=0}^{\infty} I_s \cos s\tau.$$

В приведенном разложении постоянная составляющая тока  $I_0$  и амплитудные коэффициенты  $I_1, I_2, \dots$  выражаются функциями  $U_0$  и амплитуды  $U$ , однако не зависят от фазы  $\theta$ . Благодаря тому, что аргументы косинусов в выражениях для  $u_{\sim}$  и первой гармоники тока  $i$  совпадают, можно определить в рассматриваемом случае средний адмиттанс для этой гармоники как

$$\bar{Y} = I_1/U,$$

откуда видно, что  $\bar{Y}$  – вещественная величина, которая может зависеть от амплитуды и не зависит от фазы переменной составляющей напряжения  $u$ .

Если обратиться к рассмотрению одночастотного режима по току при зависимости напряжения  $u$  от тока  $i$ , выражаемой для двухполюсника А однозначной нелинейной функцией, то действуя аналогично предыдущему, можно показать, что вводимый в этом случае средний импеданс  $\bar{Z}$  представляет собой вещественную величину, зависящую в общем случае от амплитуды переменной составляющей тока и не зависящую от начальной фазы.

Нахождение средних импедансов и адмиттансов (крутизн) опирается в упомянутых частных ситуациях на вычисление Фурье-коэффициентов, отвечающих первым гармоникам. Например, для одночастотного режима по напряжению имеет смысл воспользоваться формулой

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(U \cos \tau) \cos \tau d\tau. \quad (1.2)$$

При этом функции, выражающие связь между током  $i$  и напряжением  $u$ , часто аппроксимируются полиномами. Пусть, например, введенная выше для описания зависимости  $i$  от  $u$  однозначная функция  $f(u)$  может быть приближенно представлена полиномом  $m$ -ой степени. Тогда при фиксированных значениях  $U_0$  функция  $f_1(u_{\sim})$  сводится к полиному той же степени (по переменной составляющей  $u_{\sim}$ ):

$$f_1(u_{\sim}) = \sum_{p=0}^m a_p (u_{\sim})^p, \quad (1.3)$$

где коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$  в общем случае зависят от постоянной составляющей  $U_0$ .

Из (1.2) и (1.3) легко видеть, что величина  $I_1$ , рассматриваемая как функция амплитуды  $U$ , представляется полиномом, в выражения для коэффициентов которого входят в качестве множителей интегралы от  $\cos^{p+1} \tau$ . Как показывают вычисления, проводимые для неотрицательных  $p$ , интеграл

$$J_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos \tau)^{p+1} d\tau$$

при нечетном  $p$  выражается отношением двойных факториалов  $\frac{p!!}{(p+1)!!}$ , где  $p!! = p(p-2)(p-4) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$ ,  $(p+1)!! = (p+1)(p-1)(p-3) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2$ ; при четном  $p$  этот интеграл равняется нулю.

В результате, обозначая через  $q$  целую часть величины  $\frac{m-1}{2}$ , приходим к следующей формуле для среднего адмиттанса:

$$\bar{Y} = 2 \sum_{l=0}^q J_{2l+1} a_{2l+1} U^{2l}. \quad (1.4)$$

При часто используемой для активных двухполюсников аппроксимации функции  $f(u)$  кубическим полиномом ( $m=3$ ) с положительным коэффициентом перед  $u^3$  средний адмиттанс

$$\bar{Y} = a_1 + \frac{3}{4} a_3 U^2, \quad (1.5)$$

т.е. представляется монотонно возрастающей функцией аргумента  $U$ , соответствующей так называемой мягкой характеристике.

Для ничтожно малых амплитуд  $U$  средний адмиттанс (средняя крутизна) сводится к зависящему от  $U_0$  коэффициенту  $a_1$ , который равен вычисленной при  $u=U_0$  дифференциальной (малосигнальной) проводимости (крутизне характеристики) нелинейного элемента А. Как показано далее, для того чтобы система, представленная на рис.1,б, была автоколебательной, необходимо существование интервала значений амплитуды  $U$ , в котором бы средний адмиттанс  $\bar{Y}$  принимал отрицательные значения. При использовании аппроксимации функции  $f(u)$  кубическим полиномом и положительном  $a_3$  так может быть только при отрицательном  $a_1$ , т.е. для точек падающего участка (участка отрицательного сопротивления) вольтамперной характеристики нелинейного активного элемента. Зависимость  $\bar{Y}(U)$  при  $a_3 > 0$  и  $a_1 < 0$  иллюстрируется графиком, построенным согласно (1.5) на рис.2.

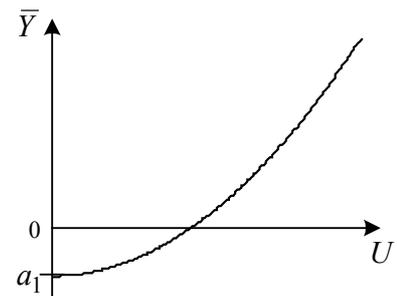


Рис.2

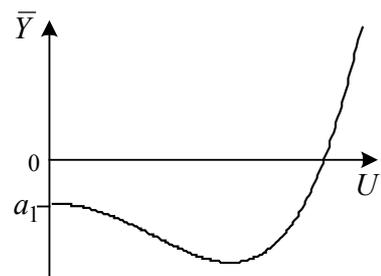


Рис.3

Как следует из (1.4), в случае аппроксимации функции  $f(u)$  полиномом пятой степени

$$\bar{Y} = a_1 + \frac{3}{4} a_3 U^2 + \frac{5}{8} a_5 U^4. \quad (1.6)$$

При различающихся знаком коэффициентах  $a_3$  и  $a_5$  средний адмиттанс  $\bar{Y}$  выражается немонотонной функцией  $U$ , что соответствует жесткой характеристике. Зависимость  $\bar{Y}$  от  $U$ , полученная при помощи формулы (1.6) для  $a_5 > 0$ ,  $a_3 < 0$  и  $a_1 < 0$ , показана на рис.3. Практическое использование приведенных выше приближенных выражений для среднего адмиттанса (средней крутизны) требует осторожного подхода, ибо применение той или иной аппроксимации некоторой функции, отвечающей реальной зависимости, дает приемлемую погрешность, как правило, лишь в ограниченном интервале значений ее аргумента.

### 1.3. Средняя крутизна полевого транзистора

Предположим, что в генераторе резонансного типа, представленном структурной схемой на рис.1,а, в качестве трехполюсного нелинейного активного элемента применяется полевой транзистор (рис.4). Выразим напряжения между выводами этого транзистора и ток стока  $i_d$  суммами постоянных и переменных составляющих:

$$u = U_0 + u_{\sim}, \quad u_d = U_{d0} + u_{d\sim}, \quad i_d = I_{d0} + i_{d\sim}.$$

В установившемся режиме периодических или почти периодических колебаний

$$i_{d\sim} = \sum_n I_{dn} \cos(\omega_n t + \varphi_n) = \sum_n \operatorname{Re}[I_{dn} \exp(j\omega_n t)],$$

где  $I_{dn} = I_{dn} \exp(j\varphi_n)$  – комплексная амплитуда гармоники, изменяющейся во

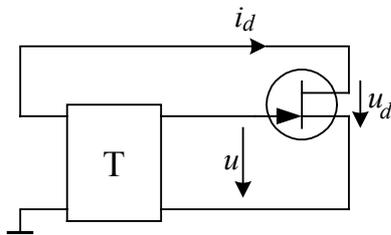


Рис.4

времени с частотой  $\omega_n$ , а для  $u_{\sim}$  справедливо аналогичное выражение, использовавшееся выше для схемы на активном двухполюснике. Подобным образом могут быть представлены также переменные составляющие напряжения  $u_d$  и других напряжений и токов.

Определим среднюю крутизну по току стока для гармоники частоты  $\omega_n$  как

$$\bar{S}_n = \frac{I_{dn}}{U_n}. \quad (1.7)$$

Допустим, что ток стока  $i_d$  является однозначной функцией двух аргументов, а именно, только напряжений  $u$  и  $u_d$ , т.е.

$$i_d = f(u, u_d).$$

Это предположение, в частности, означает, что транзистор считается безынерционным элементом.

Характерная особенность анализируемых ниже режимов, которые реализуются в рассматриваемых ниже транзисторных схемах, заключается, как в этом можно будет убедиться, в пропорциональной связи между переменными составляющими напряжений  $u$  и  $u_d$ :

$$u_{\sim} = K u_{d\sim},$$

где  $K = -|K|$  – отрицательная величина, представляющая собой коэффициент передачи через линейный четырехполюсник  $\Gamma$  (см. рис.4). Тогда, если величины  $U_0$ ,  $U_{d0}$  и  $K$  поддерживаются неизменными, ток стока выражается однозначной функцией составляющей  $u_{\sim}$ :

$$i_d = f(U_0 + u_{\sim}, U_{d0} - u_{\sim}/|K|) = f_1(u_{\sim}). \quad (1.8)$$

Ограничиваясь пока рассмотрением одночастотных режимов (по напряжению), положим, что в переменных составляющих напряжений  $u$  и  $u_d$  содержится только одна гармоника и, в частности,

$$u_{\sim} = \text{Re} [\dot{U} \exp(j\omega t)].$$

Средняя крутизна транзистора в этом случае определяется в соответствии с формулой

$$\bar{S} = \frac{\dot{I}_{d1}}{\dot{U}}, \quad (1.9)$$

где  $\dot{I}_{d1}$  – комплексная амплитуда гармоники тока стока, изменяющейся с частотой  $\omega$ .

Подобно тому, как это было сделано выше для среднего адмиттанса нелинейного двухполюсника, можно показать, что зависящая в общем случае от  $|\dot{U}|$  средняя крутизна  $\bar{S}$  является вещественной величиной, не зависящей

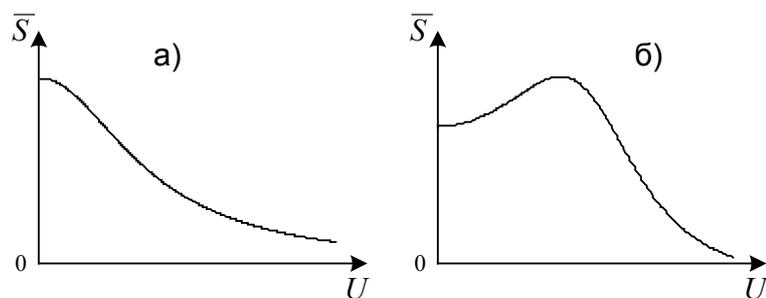


Рис.5

от аргумента  $\theta$  комплексной амплитуды  $\dot{U}$ , т.е. от начальной фазы переменной составляющей  $u_{\sim}$ . Обозначая через  $U$  амплитуду составляющей  $u_{\sim}$ , приведем типичные (получаемые путем измерений) зависимости средней крутизны  $\bar{S}$  от  $U = |\dot{U}|$ , соответствующие мягкой (рис.5,а) и жесткой (рис.5,б) характеристикам.

Если для функции  $f_1(u_{\sim})$ , выражающей в соответствии с (1.8) зависимость тока стока  $i_d$  от переменной составляющей  $u_{\sim}$ , применить приближенное представление полиномом  $m$ -ой степени вида (1.3), то в частных случаях аппроксимации кубическим полиномом и полиномом пятой степени могут использоваться выражения, содержащиеся соответственно в формулах (1.5) и (1.6). При  $m=3$

$$\bar{S} = a_1 + \frac{3}{4}a_3U^2, \quad (1.10)$$

где для полевого транзистора коэффициент  $a_1$  должен быть положительным, а коэффициент  $a_3$  – отрицательным, что дает мягкую характеристику, т.е. монотонно убывающую функцию  $\bar{S}(U)$ , которая для не слишком больших амплитуд удовлетворительно согласуется с зависимостью, получаемой при помощи измерений (рис.5,а). При  $m=5$

$$\bar{S} = a_1 + \frac{3}{4}a_3U^2 + \frac{5}{8}a_5U^4. \quad (1.11)$$

Полагая в последнем выражении  $a_5 < 0$ ,  $a_3 > 0$ ,  $a_1 > 0$ , получим немонотонную функцию  $\bar{S}(U)$ , отражающую основные черты жесткой характеристики (рис.5,б).

#### 1.4. Средняя крутизна в случае двухчастотного режима

*Двухчастотный (бигармонический) режим* является следующим по сложности после одночастотного (моногоармонического) установившимся режимом, рассматриваемым в теории колебаний. Для автогенератора резонансного типа с активным трехполюсником, представленного структурной схемой на рис.4, он определяется как такой режим, когда в напряжениях между выводами транзистора помимо постоянных составляющих могут учитываться только две гармонические компоненты. Переменную составляющую напряжения затвор-исток тогда можно записать следующим образом:

$$u_{\sim} = \text{Re}[\dot{U}_1 \exp(j\omega_1 t) + \dot{U}_2 \exp(j\omega_2 t)],$$

где  $\dot{U}_1 = U_1 \exp(j\theta_1)$  и  $\dot{U}_2 = U_2 \exp(j\theta_2)$  – комплексные амплитуды гармоник. Аналогично выражается переменная составляющая напряжения сток-исток.

Помимо постоянной составляющей и компонент с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в токе  $i_d$  содержатся также другие гармоники, что объясняется его нелинейной зависимостью от напряжений между выводами транзистора. Применяя подход, изложенный в [4], можно показать, что ток  $i_d$  при этом представляется двойным рядом:

$$i_d = \frac{1}{2} \sum_m \sum_n \dot{I}_{mn} \exp(j(m\omega_1 + n\omega_2)t), \quad (1.12)$$

где  $\dot{I}_{-m,-n} = \dot{I}_{mn}^*$  (звездочкой отмечена комплексно-сопряженная величина), а диапазон изменения целых чисел  $m$  и  $n$  определяется характером нелинейности. Если, например, зависимость тока стока от переменной составляющей  $u_{\sim}$  аппроксимирована полиномом третьей степени, то тогда  $|m| + |n| \leq 3$ .

В случае, когда частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  не находятся в рациональном отношении, коэффициенты  $\dot{I}_{mn}$  разложения (1.12) имеют весьма простой смысл. Если при этом  $m$  и  $n$  такие, что  $\omega_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2 > 0$ , то коэффициент  $\dot{I}_{mn}$  представляет собой комплексную амплитуду гармонической компоненты тока  $i_d$ , изменяющейся с частотой  $\omega_{mn}$ . При  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , не находящихся в рациональном отношении, средние крутизны  $\bar{S}_1$  и  $\bar{S}_2$  по току стока для гармоник, содержащихся в напряжениях  $u$  и  $u_d$ , определяются как

$$\bar{S}_1 = \frac{\dot{I}_{10}}{\dot{U}_1}, \quad \bar{S}_2 = \frac{\dot{I}_{01}}{\dot{U}_2}. \quad (1.13)$$

Если при этом задаваемая согласно (1.8) функция  $f_1(u_{\sim})$  аппроксимирована кубическим полиномом, иными словами, в формуле (1.3) степень  $m = 3$ , то на основании определений (1.13) получаются следующие выражения для  $\bar{S}_1$  и  $\bar{S}_2$ , не содержащие комплексных величин [4]:

$$\bar{S}_1(U_1, U_2) = a_1 + \frac{3}{4} a_3 (U_1^2 + 2U_2^2), \quad (1.14)$$

$$\bar{S}_2(U_1, U_2) = a_1 + \frac{3}{4} a_3 (U_2^2 + 2U_1^2), \quad (1.15)$$

где  $a_1 > 0$ ,  $a_3 < 0$ .

При  $m = 5$  и частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , не находящихся в рациональном отношении,

$$\bar{S}_2(U_1, U_2) = a_1 + \frac{3}{4} a_3 (U_2^2 + 2U_1^2) + \frac{5}{8} a_5 (U_2^4 + 6U_2^2 U_1^2 + 3U_1^4), \quad (1.16)$$

а формула для  $\bar{S}_1$  может быть получена из (1.16) заменой  $U_1$  на  $U_2$  и  $U_2$  на  $U_1$ .

Если частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  находятся в рациональном отношении, то комбинации  $m\omega_1 + n\omega_2$  сводятся соответственно к  $\omega_1$  и  $\omega_2$  не только при  $m = 1, n = 0$  и  $m = 0, n = 1$ , но и при иных сочетаниях целых чисел  $m$  и  $n$ . В этом случае формулы для средних крутизн  $\bar{S}_1$  и  $\bar{S}_2$  могут содержать дополнительные (в том числе и комплексные) слагаемые [4].

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГЕНЕРАТОРОВ РЕЗОНАНСНОГО ТИПА

### 2.1. Уравнения установившегося режима для схем с нелинейным активным двухполюсником

В структурной схеме генератора на двухполюсном нелинейном активном элементе А (рис.1,б) двухполюсник Т состоит из линейных элементов с малыми потерями, чем, в частности, обусловлены его резонансные свойства. В состав этого двухполюсника также могут входить источники внешних воздействий, изменяющихся во времени, и тогда система в целом является неавтономной. Кроме того, во многих случаях целесообразно относить к двухполюснику Т источники постоянных напряжений, необходимые для нормального функционирования двухполюсника А.

Далее предполагается, что, во-первых, для переменного воздействия, если оно имеется, характерна синусоидальная зависимость от времени и, во-вторых, анализ результатов такого воздействия на систему может опираться на

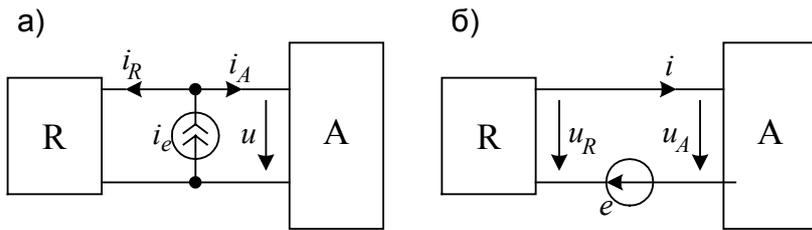


Рис.6

эквивалентные схемы, которые получаются из общей структурной схемы (рис.1,б) посредством основанных на теоремах Нортон и Тевенена преобразований двухполюсника Т и со-

держат либо идеальный источник гармонического тока  $i_e$  (рис.6,а), либо источник гармонической ЭДС  $e$  (рис.6,б). В эквивалентных схемах, представленных на рис.6, источники переменных воздействий внутри двухполюсника R считаются отсутствующими, так что при  $i_e$  и  $e$  тождественно равных нулю система оказывается автономной. В дальнейшем для  $i_e$  и  $e$  используются следующие аналитические выражения:

$$i_e(t) = \text{Re}[\dot{I}_e \exp(j\omega t)], \quad e(t) = \text{Re}[\dot{E} \exp(j\omega t)], \quad (2.1)$$

где под  $\omega$  понимается частота источников гармонических колебаний, действующих внутри двухполюсника Т, а под  $\dot{I}_e$  и  $\dot{E}$  – не зависящие от времени комплексные амплитуды, которые определяются при помощи соответственно теоремы Нортон и теоремы Тевенена.

Если пассивные элементы, содержащиеся внутри двухполюсника Т (рис.1,б), образуют линейную электрическую цепь с не зависящими от времени сосредоточенными параметрами, то для двухполюсника R (рис.7), входящего в

состав эквивалентных схем (рис.6), связь между переменными составляющими напряжения  $u_R$  и тока  $i_R$  можно записать в виде соотношения:

$$\hat{M} \left( \frac{d}{dt} \right) u_{R\sim} = \hat{N} \left( \frac{d}{dt} \right) i_{R\sim} \quad (2.2)$$

где  $\hat{M} \left( \frac{d}{dt} \right)$  и  $\hat{N} \left( \frac{d}{dt} \right)$  – линейные дифференциальные операторы представляющие собой полиномы от  $\frac{d}{dt}$  с постоянными коэффициентами.

Имея в виду установившийся режим периодических или почти периодических колебаний, составим для схемы генератора резонансного типа, приведенной на рис.1,б, уравнения, которые характеризовали бы связь между комплексными амплитудами гармонических компонент, изменяющихся с частотой внешнего воздействия  $\omega$ . С этой целью преобразуем сначала линейное дифференциальное соотношение (2.2). Следуя методу комплексных амплитуд, применяемому для анализа установившихся режимов в линейных электрических цепях, воспользуемся при этом правилом, согласно которому мгновенные значения гармонических компонент, содержащиеся в дифференциальных уравнениях, заменяются их комплексными амплитудами, а оператор дифференцирования  $\frac{d}{dt}$  – умножением на  $j\omega$ . Введем также индекс «С», которым будут отмечаться установившиеся (стационарные) значения комплексных амплитуд. Тогда вместо (2.2) получим равенство

$$\hat{M}(j\omega)\dot{U}_R^C = \hat{N}(j\omega)\dot{I}_R^C, \quad (2.3)$$

преобразуемое при  $\hat{M}(j\omega) \neq 0$  к виду

$$\dot{U}_R^C = \hat{Z}(j\omega)\dot{I}_R^C, \quad (2.4)$$

где  $\hat{Z}(j\omega) = \frac{\hat{N}(j\omega)}{\hat{M}(j\omega)}$  – импеданс (комплексное сопротивление) линейного двухполюсника R на частоте  $\omega$ .

При  $\hat{N}(j\omega) \neq 0$  из (2.3) выводится дуальное равенству (2.4) соотношение

$$\dot{I}_R^C = \hat{Y}(j\omega)\dot{U}_R^C, \quad (2.5)$$

где  $\hat{Y}(j\omega) = \frac{\hat{M}(j\omega)}{\hat{N}(j\omega)}$  – адмиттанс (комплексная проводимость) того же двухполюсника R.

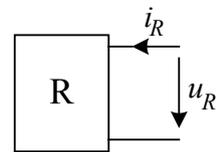


Рис.7

Для эквивалентной схемы с идеальным источником тока (рис.6,а) выразим комплексную амплитуду гармонической составляющей тока  $i_A$ , изменяющейся с частотой  $\omega$ , как

$$\dot{I}_A^C = \bar{Y} \dot{U}^C, \quad (2.6)$$

где в соответствии с введенным выше определением  $\bar{Y}$  – средний адмиттанс нелинейного двухполюсника А.

Учтем также, что

$$\dot{I}_R^C + \dot{I}_A^C = \dot{I}_e, \quad (2.7)$$

и что, кроме того, для схемы, изображенной на рис.6,а, в формуле (2.5) вместо  $\dot{U}_R^C$  может быть записано  $\dot{U}^C$ . В результате из (2.5 – 2.7) для неавтономного генератора на нелинейном активном двухполюснике получается следующее уравнение установившегося режима:

$$Y \dot{U}^C = \dot{I}_e, \quad (2.8)$$

где  $Y = \hat{Y} + \bar{Y}$  – суммарный адмиттанс.

Для схемы, изображенной на рис.6,б, действуя аналогично предыдущему, нетрудно прийти к следующему уравнению установившегося режима:

$$Z \dot{I}^C = \dot{E}, \quad (2.9)$$

где  $Z$  определяется суммой импеданса  $\hat{Z}$  и среднего импеданса  $\bar{Z}$ .

При составлении уравнений (2.8) и (2.9) были приняты во внимание вклады в токи и напряжения на элементах эквивалентных схем (рис.6), которые обусловлены гармониками, изменяющимися с частотой  $\omega$ . Такой подход соответствует методу (принципу) гармонического баланса, именуемому также методом гармонической линеаризации. Происхождение последнего названия объясняется, в частности, тем, что для нелинейного двухполюсника используется формула (2.6), внешне напоминающая линейное соотношение. На самом деле между  $\dot{I}_A$  и  $\dot{U}$  имеет место нелинейная связь, ибо средние адмиттансы и импедансы в общем случае зависят от комплексных амплитуд колебаний.

Если установившиеся режимы в схемах, представленных на рис.6,а и рис.6,б, могут считаться одночастотными соответственно по напряжению  $u$  или по току  $i$ , то при приближенном анализе таких режимов применение метода гармонического баланса приводит к единственному уравнению: (2.8) или (2.9). Иначе обстоит дело в ситуациях, когда нельзя пренебрегать вкладом в напряжение  $u$  или ток  $i$  еще одной либо большего числа гармонических компонент, которые изменяются во времени с частотами, отличающимися от  $\omega$ . Для любой из таких гармоник вместо (2.8), например, следует использовать уравнение вида

$$Y = 0, \quad (2.10)$$

где  $Y$  складывается из адмиттанса двухполюсника  $R$  и среднего адмиттанса нелинейного двухполюсника  $A$ , определяемых для соответствующей частоты (не совпадающей с  $\omega$ ).

В то время как частота изменения во времени гармонических компонент напряжения  $u$  и тока  $i$ , для которых записаны уравнения (2.8) и (2.9), известна заранее и равна  $\omega$ , нахождение частот прочих гармоник требует особого рассмотрения. При этом в зависимости от характера задачи либо неизвестные частоты жестко связаны с  $\omega$  и могут выражены прямо через  $\omega$ , либо их необходимо отыскивать специально при помощи уравнений вида (2.10). К последнему пути прибегают, в частности, в случае автономной системы, т.е. для генератора, не подвергающегося переменным воздействиям. Само соотношение (2.10) является тогда уравнением установившегося режима в автономном автогенераторе и может быть получено (при условии, что  $i_e \equiv 0$ ) непосредственно из рассмотрения эквивалентной схемы, изображенной на рис.6,а.

Подставляя выражение для  $Y$  в (2.10), имеем

$$\hat{Y} + \bar{Y} = 0,$$

откуда, в частности, следует, что

$$\operatorname{Re} \hat{Y} + \operatorname{Re} \bar{Y} = 0, \quad (2.11)$$

где  $\operatorname{Re} \hat{Y}$  – активная проводимость линейного пассивного двухполюсника с потерями, которая всегда положительна. Поэтому в качестве необходимого условия того, что уравнение (2.11) имеет ненулевые решения для амплитуды колебаний (в противном случае система не является автоколебательной), может быть записано неравенство

$$\operatorname{Re} \bar{Y} < 0,$$

означающее, что в системе обеспечивается компенсация потерь энергии. Для обозначения эффекта компенсации потерь используется термин «регенерация».

Наряду с уравнениями установившегося режима, получаемыми с помощью метода гармонического баланса, для анализа автогенераторов резонансного типа, как правило, необходимы соотношения, которыми учитывались бы обусловленные двухполюсниками  $T$  и  $A$  (рис.1,б) вклады в постоянные составляющие напряжения  $u$  или тока  $i$ . Для простейших вариантов удастся с самого начала выразить постоянную составляющую  $U_0$  через ЭДС постоянных источников, отнесенных к схеме двухполюсника  $T$ . В более сложных ситуациях, в том числе для так называемых схем с автоматическим смещением, составляется уравнение, которое нужно рассматривать совместно с уравнениями, получаемыми методом гармонического баланса. В любом случае нахождение соотношений для постоянных составляющих является самостоятельной задачей.

## 2.2. Уравнения установившегося режима для схем с нелинейным активным трехполюсником

Условимся, что в структурной схеме, изображенной на рис.1,а, в качестве нелинейного активного элемента А выбран для определенности полевой транзистор (ПТ). В отношении четырехполюсника Т далее предполагается, что он сводится к схеме из линейных пассивных сосредоточенных элементов с малыми потерями, которая содержит, кроме того, источники постоянных напряжений, необходимые для задания рабочей точки транзистора, и может (в случае неавтономной системы) содержать источник внешнего переменного воздействия с синусоидальной зависимостью от времени. Считается также, что для последующего анализа может быть применена эквивалентная схема, в которой четырехполюсник Т заменен показанным на рис.8 соединением источника гармонического тока  $i_e$  и четырехполюсника R, не содержащего источников переменного воздействия. Ток  $i_e$  выражается в по-

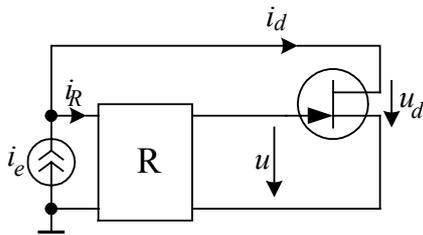


Рис.8

следующем согласно (2.1), причем комплексная амплитуда  $\dot{I}_e$  предполагается постоянной величиной. Если допустимо пренебрежение током затвора, то уравнения установившегося режима для схемы, представленной на рис.8, выводятся примерно так же, как для схемы генератора на двухполюсном нелинейном активном элементе (рис.6,а).

Будем интересоваться только теми гармоническими компонентами, которые в установившемся режиме периодических или почти периодических колебаний содержатся в напряжениях  $u$  и  $u_d$ . Для любой из них можно (опуская индексы, вводимые с целью нумерации гармоник) записать следующие соотношения между комплексными амплитудами тока стока  $i_d$ , тока  $i_R$  и напряжения  $u$ :

$$\dot{I}_d^C = \bar{S}\dot{U}^C, \dot{I}_R^C = \hat{Y}\dot{U}^C,$$

где  $\bar{S}$  – средняя крутизна транзистора по току стока, а  $\hat{Y}$  – величина, обратная расположенному вне главной диагонали и обозначаемому ниже как  $Z_{21}$  элементу  $Z$ -матрицы линейного четырехполюсника R.

Вводя обозначение

$$Y = \bar{S} + \hat{Y}$$

и принимая во внимание, что для гармоники, имеющей частоту  $\omega$ ,  $\dot{I}_d^C + \dot{I}_R^C = \dot{I}_e$ , нетрудно прийти к уравнению установившегося режима в виде

(2.8). Учет вкладов других гармонических компонент дает уравнения вида (2.10), которые для схемы, изображенной на рис.8, приводятся к форме:

$$\bar{S}Z_{21} = -1. \quad (2.12)$$

В общем случае при  $i_e \neq 0$  (неавтономная система) совокупность уравнений установившегося режима помимо уравнений вида (2.8) и (2.12), составляемых с помощью метода гармонического баланса, должна включать также соотношения для постоянных составляющих. Для автономных систем, т.е. при  $i_e \equiv 0$ , подобные совокупности не содержат уравнений вида (2.8).

### 2.3. Уравнения, получаемые при помощи модифицированного метода комплексных амплитуд

Отыскание решений уравнений установившегося режима дает лишь частичную информацию о свойствах генератора резонансного типа. Если подобные решения имеются, то нужно выяснить для каждого из них, устойчиво ли оно по отношению к малым возмущениям. Утвердительный ответ на вопрос об устойчивости в малом – необходимое условие того, что соответствующее решение может реализоваться. Для исследования устойчивости того или иного установившегося режима динамической системы требуются соотношения, которые позволяли бы судить об эволюции отклонений от этого режима во времени. Один из эффективных путей вывода таких соотношений базируется на применении модифицированного метода комплексных амплитуд, предложенного К.Курикавой [5]. Подход, лежащий в основе упомянутого метода, опирается на такое характерное свойство генераторов резонансного типа, как медленность изменения во времени амплитуд и начальных фаз их колебаний. С этой точки зрения излагаемый ниже метод аналогичен методу медленно меняющихся амплитуд [4, 6, 9]. Уравнения, к которым приводит его использование, могут быть, как и в случае метода медленно меняющихся амплитуд, названы укороченными, причем возможно получение укороченных уравнений общего вида для целого класса автогенераторов, а не только для конкретных схем. Последнее обстоятельство является основным достоинством данного метода.

При первоначальном рассмотрении ограничимся генераторами на двухполюсных нелинейных активных элементах (рис.1,б) и выберем в качестве исходной эквивалентную схему, приведенную на рис.6,а. Режимы, отличные от установившихся (стационарных), будем называть нестационарными. Учитывая (2.2), выведем для них сначала соотношения между комплексными амплитудами, относящиеся к линейному двухполюснику R (рис.7). Входящие в (2.2) переменные составляющие  $u_{R\sim}$  и  $i_{R\sim}$  запишем для нестационарного режима как

$$u_{R\sim}(t) = \sum_n \operatorname{Re}[\dot{U}_{Rn}(t) \exp\{j\omega_n t\}], \quad i_{R\sim}(t) = \sum_n \operatorname{Re}[\dot{I}_{Rn}(t) \exp(i\omega_n t)].$$

Здесь частоты  $\omega_n$  полагаются такими же, как в стационарном режиме, а комплексные амплитудные множители  $\dot{U}_{Rn}(t)$  и  $\dot{I}_{Rn}(t)$  считаются изменяющимися во времени медленно, что является следствием принятого ранее предположения о принадлежности системы в целом к классу квазилинейных и близких к консервативным.

Получим сначала соотношение для компоненты, изменяющейся с частотой внешнего воздействия  $\omega$  (индекс « $n$ », введенный для нумерации компонент, в последующем опущен). В отличие от использованной выше стандартной процедуры метода комплексных амплитуд мы будем, учитывая возможную зависимость  $\dot{U}_R$  и  $\dot{I}_R$  от времени, применять видоизмененное правило перехода от уравнения (2.2), связывающего мгновенные значения, к соотношению между комплексными амплитудами:

$$u_{R\sim}(t) \rightarrow \dot{U}_R(t), \quad i_{R\sim}(t) \rightarrow \dot{I}_R(t), \quad \frac{d}{dt} \rightarrow j\omega + \frac{d}{dt}. \quad (2.13)$$

Необходимость замены оператора дифференцирования  $\frac{d}{dt}$  суммой  $j\omega + \frac{d}{dt}$  вытекает из формулы

$$\frac{d^k}{dt^k} [\dot{U}_R \exp(j\omega t)] = \exp(j\omega t) \left[ j\omega + \frac{d}{dt} \right]^k \dot{U}_R(t)$$

и аналогичного ей равенства для тока  $i_R$ .

Применяя видоизмененное правило перехода (2.13) к (2.2), имеем

$$\hat{N}\left(j\omega + \frac{d}{dt}\right) \dot{I}_R(t) = \hat{M}\left(j\omega + \frac{d}{dt}\right) \dot{U}_R(t). \quad (2.14)$$

Воспользуемся для  $\hat{N}\left(j\omega + \frac{d}{dt}\right)$  и  $\hat{M}\left(j\omega + \frac{d}{dt}\right)$  степенными разложениями по  $\frac{d}{dt}$  и, принимая во внимание, что при медленном изменении комплексных амплитуд  $\dot{U}_R$  и  $\dot{I}_R$

$$\left| \frac{d\dot{U}_R}{dt} \right| \ll \omega |\dot{U}_R|, \quad \left| \frac{d^2\dot{U}_R}{dt^2} \right| \ll \omega \left| \frac{d\dot{U}_R}{dt} \right|, \dots, \quad \left| \frac{d\dot{I}_R}{dt} \right| \ll \omega |\dot{I}_R|, \quad \left| \frac{d^2\dot{I}_R}{dt^2} \right| \ll \omega \left| \frac{d\dot{I}_R}{dt} \right|, \dots,$$

оставим в разложениях члены не выше первого порядка малости. В результате вместо (2.14) получим

$$\hat{N}(j\omega)\dot{I}_R(t) + \hat{N}'(j\omega)\frac{d\dot{I}_R}{dt} = \hat{M}(j\omega)\dot{U}_R(t) + \hat{M}'(j\omega)\frac{d\dot{U}_R}{dt}, \quad (2.15)$$

где штрихами отмечены производные по аргументу  $j\omega$ , выражаемые далее через производные по  $\omega$  согласно формулам:

$$\hat{N}'(j\omega) = \frac{d\hat{N}}{d(j\omega)} = -j\frac{d\hat{N}}{d\omega} = -j\hat{N}'_{\omega}, \quad \hat{M}'(j\omega) = \frac{d\hat{M}}{d(j\omega)} = -j\frac{d\hat{M}}{d\omega} = -j\hat{M}'_{\omega}.$$

Для не зависящих от времени комплексных амплитуд  $\dot{I}_R$  и  $\dot{U}_R$ , т.е. в установившемся (стационарном) режиме, из формулы (2.15) вытекают соотношения (2.3 – 2.5). Принимая во внимание определение адмиттанса  $\hat{Y}$ , поделим (2.15) на  $\hat{N}(j\omega)$  и, заменяя с точностью до величин первого порядка малости производную  $\frac{d\dot{I}_R}{dt}$  на  $\hat{Y}(j\omega)\frac{d\dot{U}_R}{dt}$ , придем после тождественных преобразований к следующему приближенному равенству:

$$\dot{I}_R(t) = \hat{Y}\dot{U}_R(t) - j\hat{Y}'_{\omega}\frac{d\dot{U}_R}{dt}. \quad (2.16)$$

Не прибегая к подробным обоснованиям, запишем (имея в виду нестационарный режим) аналогичное соотношение между комплексными амплитудами  $\dot{I}_A$  и  $\dot{U}$  для двухполюсника А:

$$\dot{I}_A(t) = \bar{Y}\dot{U}(t) - j\bar{Y}'_{\omega}\frac{d\dot{U}}{dt}, \quad (2.17)$$

где  $\bar{Y}$  – средний адмиттанс, входящий в равенство (2.6), к которому сводится (2.17) в случае стационарного режима.

Для эквивалентной схемы, представленной на (рис.6,а),  $\dot{I}_R + \dot{I}_A = \dot{I}_e$ , а вместо  $\dot{U}_R$  может быть записано  $\dot{U}$ . Тогда, используя ранее введенное обозначение для суммарного адмиттанса  $Y$ , нетрудно, основываясь на (2.16, 2.17), вывести дифференциальное уравнение, именуемое далее укороченным:

$$-jY'_{\omega}\frac{d\dot{U}}{dt} + Y\dot{U} = \dot{I}_e. \quad (2.18)$$

Соотношение для компоненты, отвечающей частоте, которая отличается от частоты внешнего воздействия, может быть получено из (2.18), если положить в нем  $\dot{I}_e$  равным нулю. Для эквивалентной схемы, приведенной на рис.6,б, применение изложенного подхода дает укороченное уравнение вида

$$-jZ'_{\omega}\frac{d\dot{I}}{dt} + Z\dot{I} = \dot{E}, \quad (2.19)$$

где  $Z$  – суммарный импеданс, входящий в уравнение (2.9). Легко видеть, что в установившемся режиме уравнения (2.18), (2.19) превращаются соответственно в соотношения (2.8), (2.9), получаемые при помощи стандартной процедуры метода гармонического баланса.

Обратимся теперь к системе на трехполюсном нелинейном активном элементе (рис.1,а). Будем считать, что транзисторный генератор, эквивалентная схема которого представлена на рис.8, является системой, близкой к линейной и консервативной. Тогда из рассмотрения на основе подхода, реализованного выше для схем с активным двухполюсником, вытекает, что в нестационарном режиме приближенное соотношение между комплексными амплитудами  $\dot{I}_R$  и  $\dot{U}$  приводится к виду (2.16), где  $\hat{Y}$  – величина, определяемая для четырехполюсника R и равная  $Z_{21}^{-1}$ . (Как и ранее, ток затвора предполагается пренебрежимо малым.) Комплексная амплитуда  $\dot{I}_d$  выражается через  $\dot{U}$  и  $\frac{d\dot{U}}{dt}$  согласно правой части (2.17), где под  $\bar{Y}$  следует понимать среднюю крутизну  $\bar{S}$  полевого транзистора. Если определить для генератора на ПТ суммарный адмиттанс  $Y$  так, как он определен выше, то укороченные уравнения этого генератора будут выглядеть так же, как и те, что выведены для схемы, изображенной на рис.6,а. В частности, если комплексная амплитуда  $\dot{U}$  напряжения затвор-исток соответствует гармонической компоненте, изменяющейся с частотой внешнего воздействия, то в качестве укороченного уравнения схемы, представленной на рис.8, следует использовать соотношение (2.18).

### 3. ОДНОКОНТУРНЫЙ ТРАНЗИСТОРНЫЙ ГЕНЕРАТОР С ТРАНСФОРМАТОРНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

#### 3.1. Некоторые вспомогательные соотношения

Приведенный на рис.9 вариант LC-генератора на ПТ соответствует классической схеме Мейснера. Соединение линейных элементов и источников постоянных ЭДС, расположенное между зажимами 1-1 и 2-2, образует обладающий резонансными свойствами четырехполюсник обратной связи R (см. для сравнения структурную схему на рис.8). Если источник гармонического тока  $i_e$  отсутствует (комплексная амплитуда  $\dot{I}_e$  тождественно равна нулю), система в целом является автономной, в противном случае – неавтономной.

Предполагая ток затвора ПТ пренебрежимо малым, приведем соотношения, которые могут понадобиться при анализе как автономной, так и неав-

тономной систем. Поскольку переменная составляющая  $u_{d\sim}$  напряжения сток-исток равна напряжению на зажимах колебательного контура, имеем

$$u_{d\sim} = L \frac{di_L}{dt}.$$

С другой стороны, переменная составляющая напряжения между затвором и истоком

$$u_{\sim} = M \frac{di_L}{dt},$$

так что справедливо следующее соотношение;

$$u_{\sim} = K u_{d\sim},$$

где величина  $K = M/L$  может быть названа коэффициентом обратной связи.

Как нетрудно убедиться, для выбранных на рис.9 направлений отсчета напряжений и токов обратная связь может быть положительной только при отрицательной взаимной индуктивности  $M$ , т.е. необходимо, чтобы

$$M = -|M|, \quad K = -|K|. \quad (3.1)$$

Обозначим реактивную проводимость  $LC$ -контура на частоте  $\omega$  как  $b(\omega)$ :

$$b(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L}. \quad (3.2)$$

Входной импеданс (комплексное сопротивление) четырехполюсника обратной связи на зажимах 1-1, учитывая отсутствие тока через зажимы 2-2, выражается как

$$Z_{11} = \frac{1}{g + jb}$$

и называется далее сопротивлением холостого хода, причем активная проводимость  $g$  считается малой величиной ( $g \ll \omega C$ ).

Согласно определениям элементов  $Z$ -матрицы передаточное сопротивление  $Z_{21}$  четырехполюсника  $R$  следующим образом выражается через  $Z_{11}$  и коэффициент  $K$ :

$$Z_{21} = KZ_{11}.$$

Используя обозначение  $\hat{Y}$  для величины, обратной  $Z_{21}$ , имеем

$$\hat{Y} = \frac{1}{K} (g + jb). \quad (3.3)$$

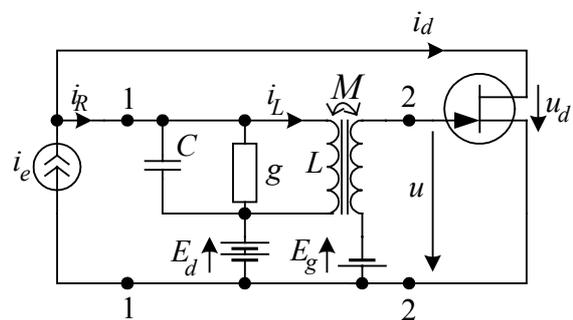


Рис.9

### 3.2. Одночастотный режим в автономном одноконтурном генераторе

Рассмотрим схему Мейснера (рис.9), не содержащую идеального источника гармонического тока  $i_e$  ( $\dot{I}_e \equiv 0$ ). Предполагая возможный установившийся режим в этой автономной системе одночастотным по напряжению, будем исходить при отыскании частоты и амплитуды автоколебаний из уравнения (2.12), представленного в форме

$$\bar{S} = -\hat{Y}. \quad (3.4)$$

Если ток стока  $i_d$  выражается однозначной функцией  $u$  и  $u_d$ , то при вещественном коэффициенте  $K$  средняя крутизна  $\bar{S}$  в одночастотном режиме также оказывается вещественной величиной. Тогда на основании (3.4, 3.3)

$$\text{Im } \hat{Y} = \frac{b}{K} = 0, \quad (3.5)$$

откуда, имея в виду (3.2), следует, что частота автоколебаний совпадает (в первом приближении) с резонансной частотой колебательного контура

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Если принять во внимание (3.1, 3.3, 3.5), то из (3.4) вытекает, кроме того, соотношение, служащее для нахождения стационарной амплитуды  $U^C$ .

$$\bar{S}(U^C) = \frac{g}{|K|}. \quad (3.6)$$

Графический способ решения уравнения (3.6) проиллюстрирован на рис.10 для случаев мягкой (рис.10,а) и жесткой (рис.10,б) характеристик средней крутизны. Как видно из рис.10,а, неравенство

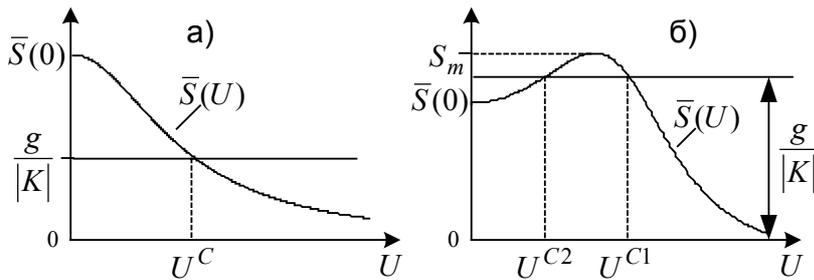


Рис.10

является необходимым условием того, чтобы уравнение (3.6) имело при мягкой характери-

$$\bar{S}(0) > \frac{g}{|K|}$$

стике отличное от нуля решения для амплитуды  $U^C$ . В случае жесткой характеристики (рис.10,б) и при выполнении условий

$$\bar{S}(0) < \frac{g}{|K|} < S_m$$

у уравнения (3.6) оказываются сразу два ненулевых решения.

Ответ на вопрос о том, могут ли реализоваться найденные решения, зависит от результатов исследования их устойчивости (в малом). Это исследование удобно провести, опираясь на укороченное уравнение (2.18), полученное при помощи модифицированного метода комплексных амплитуд и представляемое для  $\dot{I}_e \equiv 0$  в форме

$$jY'_\omega \frac{d\dot{U}}{dt} = Y\dot{U}. \quad (3.7)$$

Полагая  $\dot{U} = U \exp(j\theta)$ , а  $Y = G + jB$ , где  $G = \bar{S}(U) + \frac{g}{K}$ ,  $B = \frac{b}{K}$ , запишем вместо (3.7) равносильную ему систему вещественных укороченных уравнений:

$$B'_\omega \frac{dU}{dt} + G'_\omega \frac{d\theta}{dt} = -GU, \quad G'_\omega \frac{dU}{dt} - B'_\omega \frac{d\theta}{dt} = BU. \quad (3.8), (3.9)$$

В установившемся автоколебательном режиме, т.е. для амплитуды  $U^C$  и фазы  $\theta^C$ , не изменяющихся с течением времени, из (3.8, 3.9) вытекают при  $U^C \neq 0$  соотношения

$$G(U^C) = 0, \quad B = 0, \quad (3.10)$$

которые согласуются с уравнением вида (2.10), получаемым методом гармонического баланса.

Поскольку в рассматриваемом частном случае

$$G'_\omega = 0, \quad B'_\omega = -\frac{1}{|K|} \left( C + \frac{1}{\omega^2 L} \right) < 0, \quad (3.11)$$

уравнения (3.8, 3.9) можно упростить:

$$(-B'_\omega) \frac{dU}{dt} = G(U)U, \quad (-B'_\omega) \frac{d\theta}{dt} = BU. \quad (3.12), (3.13)$$

Следуя процедуре исследования устойчивости в малом, допустим, что амплитуда  $U(t)$  отличается от стационарного значения  $U^C$  на малую добавку  $\Delta U(t)$ . С точностью до малых величин порядка возмущения  $\Delta U$

$$G(U) = G(U^C) + G'_U(U^C)\Delta U,$$

что позволяет, принимая во внимание первое из соотношений (3.10), преобразовать (3.12) в следующее линейное уравнение:

$$(-B'_\omega) \frac{d\Delta U}{dt} = U^C G'_U(U^C)\Delta U. \quad (3.14)$$

Если справедливо неравенство

$$\bar{S}'_U(U^C) < 0, \quad (3.15)$$

то частная производная  $G'_U(U^C)$  также отрицательна и, как видно из (3.14), отклонение  $\Delta U$  с течением времени стремится к нулю, т.е. выполняется условие асимптотической устойчивости по отношению к амплитуде. Обращаясь к уравнению (3.13), легко показать, что при асимптотической устойчивости по отношению к амплитуде автономная система устойчива, хотя и не асимптотически, по отношению к фазе.

Согласно (3.15) решение  $U^C$  для стационарной амплитуды, удовлетворяющее уравнению (3.6), устойчиво, если при значениях амплитуды  $U$ , близких к  $U^C$ , средняя крутизна убывает с ростом  $U$ . Это условие справедливо для любых точек пересечения мягкой характеристики (рис.10,а) с горизонтальной прямой, проведенной на высоте  $g/|K|$ , а в случае жесткой характеристики (рис.10,б) – только для точек ее спадающего участка. Таким образом, в приведенном на рис.10,б примере решение, которому отвечает амплитуда  $U^{C1}$ , устойчиво, а решение с амплитудой  $U^{C2}$  неустойчиво.

Решение уравнения (3.12) с нулевой амплитудой ( $U = 0$ ) соответствует состоянию равновесия системы, устойчивость которого может быть, как и выше, исследована при помощи процедуры линеаризации. При малых амплитудах  $U$  из (3.12) получается следующее уравнение первого приближения:

$$(-B'_0) \frac{dU}{dt} = G(0)U, \quad (3.16)$$

анализ решений которого, показывает, что состояние равновесия устойчиво (в малом), и притом асимптотически, если

$$\bar{S}(0) < g/|K|.$$

Основываясь на полученных результатах, можно установить, как изменяется

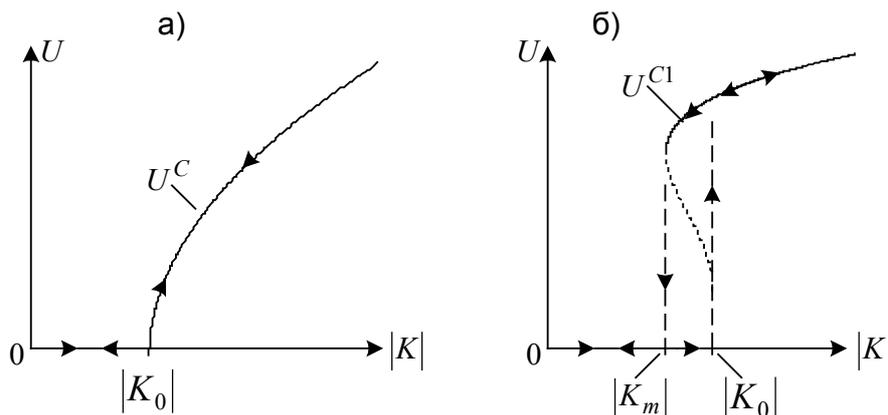


Рис.11

амплитуда  $U$  при плавном изменении коэффициента обратной связи в случаях мягкой (рис.11,а) и жесткой (рис.11,б) характеристик. При этом следует иметь в виду, что получение зависимостей  $U(|K|)$  и,

в частности, нахождение критического коэффициента обратной связи  $K_0$ , разделяющего области устойчивого (в малом) и неустойчивого состояний равновесия и соответствующего порогу самовозбуждения, требует учета влияния  $K$

на вид функции  $\bar{S}(U)$ . При увеличении  $|K|$ , начинающемся от  $|K_0|$ , зависимость  $U(|K|)$ , приведенную на рис.11,а, отличает плавное нарастание амплитуды автоколебаний. Подобную ситуацию трактуют как мягкое самовозбуждение. Для зависимости  $U(|K|)$ , изображенной на рис.11,б, в интервале между  $|K_m|$  и  $|K_0|$  характерна неоднозначность, причем пунктирная линия соответствует неустойчивым решениям  $U^{C2}$ . Как видно из рис.11,б, постепенное увеличение  $|K|$  от значений, меньших  $|K_m|$ , приводит при  $K = K_0$  к скачкообразному (жесткому) возникновению автоколебаний, а в случае плавного уменьшения  $|K|$  автоколебания срываются скачком при  $K = K_m$ .

### 3.3. Резонансное воздействие источника гармонического тока на схему Мейснера

При рассмотрении неавтономной системы, представленной на рис.9, предположим, что частота  $\omega$  колебаний источника гармонического тока  $i_e$  близка к резонансной частоте  $LC$ -контура:

$$\omega = \omega_0 + \delta\omega,$$

где  $|\delta\omega| \ll \omega_0$ .

Выберем начало отсчета времени таким образом, чтобы отличная от нуля комплексная амплитуда  $\dot{I}_e$  равнялась своему модулю, обозначаемому в последующем как  $I_e$ . Примем, что для  $M$  и  $K$  справедливы равенства (3.1), т.е. обратная связь, как и в случае автономного генератора, положительная.

Предположим также, что в установившемся режиме в напряжениях между выводами ПТ помимо постоянных составляющих содержатся только гармоники, изменяющиеся с частотой  $\omega$ , которая в данном случае известна заранее (одночастотный режим). Считается, кроме того, что имеют место все прочие предпосылки, необходимые для того, чтобы средняя крутизна  $\bar{S}$  оказалась вещественной функцией амплитуды  $U$  переменной составляющей  $u_{\sim}$  напряжения между затвором и истоком ПТ и не зависела от начальной фазы этой составляющей. Воспользуемся в качестве исходного соотношения укороченным уравнением (2.18), форма которого может быть изменена с учетом введенных допущений. Принимая во внимание (3.3, 3.1, 3.2) и близость  $\omega$  к  $\omega_0$ , легко показать, что для мнимой части входящего в (2.18) суммарного адмиттанса  $Y$  можно использовать приближенное выражение

$$B \approx -\frac{2C}{|K|} \delta\omega,$$

а частную производную  $Y'_\omega$  записать как

$$jB'_\omega \approx -j \frac{2C}{|K|}.$$

Тогда вместо (2.18) может быть получено уравнение

$$\frac{d\dot{U}}{dt} = [\bar{\beta}(U) - j\delta\omega]\dot{U} - \frac{|K|}{2C} I_e, \quad (3.17)$$

где для функции  $\bar{\beta}(U)$ , именуемой далее *средним инкрементом*, справедливо следующее выражение:

$$\bar{\beta}(U) = \frac{1}{2C} [|K| \bar{S}(U) - g]. \quad (3.18)$$

Величина  $\beta$ , равная  $\bar{\beta}(0)$ , может быть названа *линейным инкрементом*. Как известно, вводимый для колебательного контура с малыми потерями логарифмический декремент равен  $\alpha \frac{2\pi}{\omega_0}$ , причем применительно к рассматриваемому случаю показатель затухания  $\alpha = \frac{g}{2C}$ .

Поэтому, строго говоря, под линейным и средним инкрементом следовало бы понимать безразмерные величины  $\beta \frac{2\pi}{\omega_0}$  и  $\bar{\beta} \frac{2\pi}{\omega_0}$ . Тем не менее для ненормированных величин  $\beta$  и  $\bar{\beta}$  в последующем сохраняются введенные выше наименования. Легко показать, что в случае автономной схемы Мейснера через линейный инкремент  $\beta$  можно выразить решение линейного уравнения (3.16), описывающее эволюцию малых отклонений амплитуды  $U$  от равновесного значения  $U = 0$ :

$$U(t) = U(0) \exp(\beta t).$$

Введение понятий «средний инкремент» и «линейный инкремент» оправдано как средство учета регенерации (компенсации потерь), которая в схеме, представленной на рис.9, обусловлена положительной обратной связью.

Выражая в показательной форме через модуль  $U$  и аргумент  $\theta$  комплексную амплитуду  $\dot{U}$  в (3.17), умножая это уравнение на  $\exp(-j\theta)$  и разделяя в получившемся соотношении вещественные и мнимые слагаемые, придем к следующей системе укороченных уравнений:

$$\frac{dU}{dt} = P(U, \theta), \quad \frac{d\theta}{dt} = Q(U, \theta), \quad (3.19)$$

где

$$P(U, \theta) = U\bar{\beta}(U) - \frac{|K|}{2C} I_e \cos \theta, \quad Q(U, \theta) = \frac{|K| I_e}{2CU} \sin \theta - \delta\omega. \quad (3.20)$$

Обозначим не изменяющиеся во времени (стационарные) амплитуду  $U$  и фазу  $\theta$  в установившемся одночастотном режиме в рассматриваемой неавтономной системе соответственно через  $U^0$  и  $\theta^0$ , сохраняя при этом обозначения  $U^C$  и  $\theta^C$  для стационарных значений амплитуды и фазы в автономной автоколебательной системе. Согласно (3.19) и (3.20) для  $U^0$  и  $\theta^0$  справедливы соотношения

$$U^0 \bar{\beta}(U^0) = \frac{|K|}{2C} I_e \cos \theta^0, \quad U^0 \delta\omega = \frac{|K|}{2C} I_e \sin \theta^0, \quad (3.21)$$

из которых после исключения  $\theta^0$  вытекает равенство

$$[\bar{\beta}^2(U^0) + (\delta\omega)^2](U^0)^2 = \frac{K^2 I_e^2}{4C^2}. \quad (3.22)$$

Проанализируем зависимости стационарной амплитуды  $U^0$  от частоты  $\omega$  (или от расстройки  $\delta\omega = \omega - \omega_0$ ) при различных фиксированных  $I_e$ . Наглядный способ получения таких зависимостей основывается на предварительном рассмотрении обратной функции  $\delta\omega(U^0)$ , выражение для которой выводится непосредственно из (3.22).

$$\delta\omega = \pm \sqrt{\frac{K^2 I_e^2}{4C^2 (U^0)^2} - \bar{\beta}^2(U^0)}. \quad (3.23)$$

Детальный анализ любого установившегося режима должен включать получение условий его устойчивости. С этой целью в данном случае удобно использовать обобщенные признаки асимптотической устойчивости стационарных решений, сводящиеся для системы (3.19) к двум неравенствам [6, 8]:

$$P'_U + Q'_\theta < 0, \quad P'_U Q'_\theta - P'_\theta Q'_U > 0, \quad (3.24), (3.25)$$

где  $P'_U, P'_\theta, Q'_U, Q'_\theta$  – частные производные, вычисленные при соответствующих стационарных значениях  $U^0$  и  $\theta^0$ .

Из (3.20), принимая во внимание (3.21), имеем выражения

$$P'_U = \bar{\beta}(U^0) + U^0 \bar{\beta}'(U^0), \quad P'_\theta = \frac{|K|}{2C} I_e \sin \theta^0 = U^0 \delta\omega,$$

$$Q'_U = -\frac{|K| I_e}{2C(U^0)^2} \sin \theta^0 = -\frac{\delta\omega}{U^0}, \quad Q'_\theta = \frac{|K| I_e}{2CU^0} \cos \theta^0 = \bar{\beta}(U^0),$$

использование которых позволяет записать неравенство (3.24) как

$$2\bar{\beta}(U^0) + U^0\bar{\beta}'(U^0) < 0, \quad (3.26)$$

а неравенство (3.25) – в виде условия

$$\bar{\beta}(U^0)[\bar{\beta}(U^0) + U^0\bar{\beta}'(U^0)] + (\delta\omega)^2 > 0. \quad (3.27)$$

Условию (3.27) можно придать более компактную форму с помощью приводимого ниже вспомогательного соотношения, которое получается в результате дифференцирования (3.22) по  $U^0$ , причем при выполнении дифференцирования  $\delta\omega$  рассматривается как функция  $U^0$ :

$$2U^0[\bar{\beta}^2(U^0) + (\delta\omega)^2 + U^0\bar{\beta}(U^0)\bar{\beta}'(U^0)] + (U^0)^2 2|\delta\omega| \frac{d|\delta\omega|}{dU^0} = 0. \quad (3.28)$$

Если выражение в квадратных скобках в (3.28), тождественное левой части неравенства (3.27), положительно, то необходимо, чтобы было справедливо условие

$$\frac{d|\delta\omega|}{dU^0} < 0, \quad (3.29)$$

которое может применяться вместо (3.27) при известной зависимости  $\delta\omega$  от  $U^0$ , определяемой согласно (3.23).

Следует отметить, что выполнение условий (3.26, 3.27) или (3.26, 3.29) означает для исследуемого установившегося одночастотного режима в рассматриваемой неавтономной системе асимптотическую устойчивость как по отношению к амплитуде, так и по отношению к фазе.

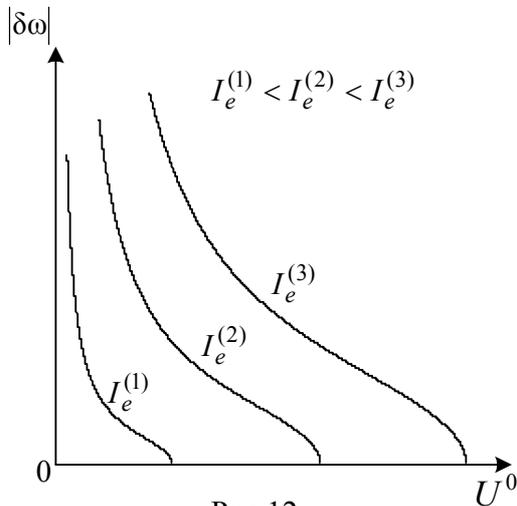


Рис.12

Конкретизируем полученные результаты, считая среднюю крутизну  $\bar{S}$  монотонно убывающей функцией  $U$ , что отвечает мягкой характеристике (рис.5,а). Начнем со случая, когда изучаемая схема представляет собой потенциально-автоколебательную систему, т.е. ее состояние равновесия устойчиво и в отсутствие переменных воздействий в ней не могут поддерживаться незатухающие колебания. Учитывая приведенное выше определение линейного инкремента, это предположение можно выразить при мягкой характеристике посредством формулы  $\beta = \bar{\beta}(0) < 0$ .

Для отличных от нуля значений амплитуды  $U$  средний инкремент  $\bar{\beta}(U)$ , определяемый согласно (3.18), в таком случае также отрицателен, причем его модуль тем больше, чем больше  $U$ , что обуславливает, в частности, монотон-

ное уменьшение с ростом  $U^0$  функции, стоящей под знаком радикала в соотношении (3.23), при любых значениях  $I_e$ . Семейство зависимостей  $|\delta\omega|$  от  $U^0$  для различных  $I_e$ , построенное (с учетом вещественности  $\delta\omega$ ) согласно (3.23) на рис.12, представлено на рис.13 в виде амплитудно-частотных характеристик  $U^0(\delta\omega)$ . Благодаря тому, что при мягкой характеристике в случае потенциально-автоколебательной системы средний инкремент  $\bar{\beta}(U^0)$  и его производная  $\bar{\beta}'(U^0)$  принимают только отрицательные значения, условия устойчивости (3.26) и (3.27) для найденных решений оказываются справедливыми всюду. С

этим согласуется также характер зависимостей  $|\delta\omega|$  от  $U^0$ , свидетельствующий о выполнении в данном случае условия (3.29) при любых  $I_e$ . Приведенные на рис.13 зависимости  $U^0$  от  $\delta\omega$  напоминают по внешнему виду резонансные кривые линейного колебательного контура. Для сравнительно малых амплитуд  $I_e$ , при

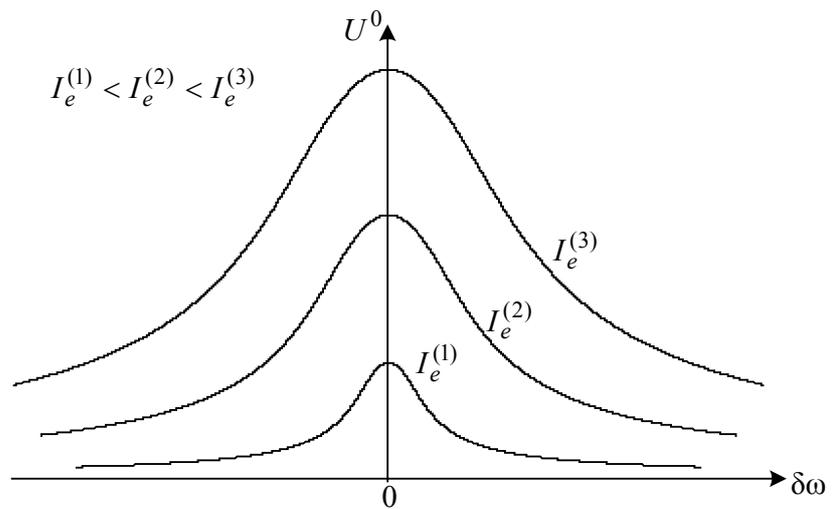


Рис.13

которых расхождения между значениями  $\bar{\beta}(U^0)$  и  $\beta = \bar{\beta}(0)$  могут считаться пренебрежимо малыми, форма амплитудно-частотной характеристики  $U^0(\delta\omega)$  действительно соответствует лоренцевой кривой. При этом из-за регенерации полоса пропускания получается более узкой (добротность более высокой), чем у отдельного  $LC$ -контура, шунтированного резистивным элементом с проводимостью  $g$ . Если перейти к значениям  $I_e$ , при которых нельзя пренебрегать разницей между  $\bar{\beta}(U^0)$  и  $\beta$ , то зависимости  $U^0(\delta\omega)$ , нормированные к своим максимумам, будут представляться кривыми, как говорят, «менее острыми», чем для малых  $I_e$ . Отмечаемая при  $I_e$ , не являющихся малыми, некоторая «столбовобразность» амплитудно-частотных характеристик  $U^0(\delta\omega)$  – основное, чем они отличаются по форме от резонансных кривых линейного колебательного контура.

По-прежнему считая  $\bar{S}(U)$  монотонно убывающей функцией амплитуды  $U$  (рис.5,а), предположим теперь, что рассматриваемая схема (рис.9) спо-

собна сама в отсутствие воздействий, изменяющихся во времени, генерировать незатухающие колебания, т.е. является автоколебательной системой. Тогда, как нетрудно показать с помощью (3.18), обращаясь, например, к рис.10,а, иллюстрирующему процедуру нахождения стационарной амплитуды  $U^C$  в случае автономного автогенератора, линейный инкремент  $\beta = \bar{\beta}(0) > 0$ , а уменьшающийся с ростом  $U$  средний инкремент  $\bar{\beta}(U)$  обращается в нуль при  $U = U^C$  и при  $U > U^C$  оказывается отрицательным. Вытекающая из сказанного немонотонность изменения модуля  $\bar{\beta}(U)$ , как правило, усложняет по сравнению с тем, что имело место выше, характер зависимостей  $|\delta\omega|$  от  $U^0$ . Их возможные варианты, отвечающие пяти различным значениям  $I_e$ , приведены на рис.14.

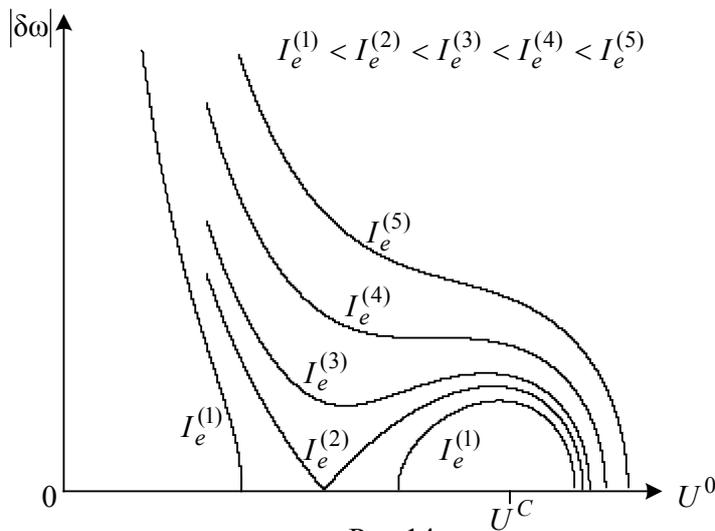


Рис.14

риантами, отвечающие пяти различным значениям  $I_e$ , приведены на рис.14.

Далее рассмотрение автоколебательной системы при мягкой характеристике проводится с использованием соотношения (1.10), аппроксимирующего зависимость  $\bar{S}(U)$  ветвью квадратичной параболы, что позволяет, учитывая сказанное выше по поводу среднего инкремента  $\bar{\beta}(U)$ , выразить его приближенной формулой:

$$\bar{\beta}(U) = \beta \left[ 1 - \left( \frac{U}{U^C} \right)^2 \right].$$

Тогда

$$\bar{\beta}'(U) = -\frac{2\beta U}{(U^C)^2},$$

и, как легко убедиться, условие устойчивости (3.26) сводится к неравенству

$$\left( \frac{U^0}{U^C} \right)^2 > \frac{1}{2}, \quad (3.30)$$

а условие (3.27) записывается в виде:

$$\left[ 1 - 3 \left( \frac{U^0}{U^C} \right)^2 \right] \cdot \left[ 1 - \left( \frac{U^0}{U^C} \right)^2 \right] + \left( \frac{\delta\omega}{\beta} \right)^2 > 0. \quad (3.31)$$

При этом уравнению (3.26) можно придать форму:

$$\left\{ \left[ 1 - \left( \frac{U^0}{U^C} \right)^2 \right]^2 + \left( \frac{\delta\omega}{\beta} \right)^2 \right\} \left( \frac{U^0}{U^C} \right)^2 = \varepsilon, \quad (3.32)$$

где в правой части стоит безразмерный параметр

$$\varepsilon = \left( \frac{KI_e}{2C\beta U^C} \right)^2.$$

О характере зависимостей амплитуды  $U^0$  от расстройки  $\delta\omega$  удобно судить по находимым при помощи (3.32) соотношениям между нормированными величинами  $\left( \frac{U^0}{U^C} \right)^2$  и  $\frac{\delta\omega}{\beta}$ . Соответствующие кривые построены для различных  $\varepsilon$  на рис.15, причем устойчивому одночастотному режиму отвечают участки кри-

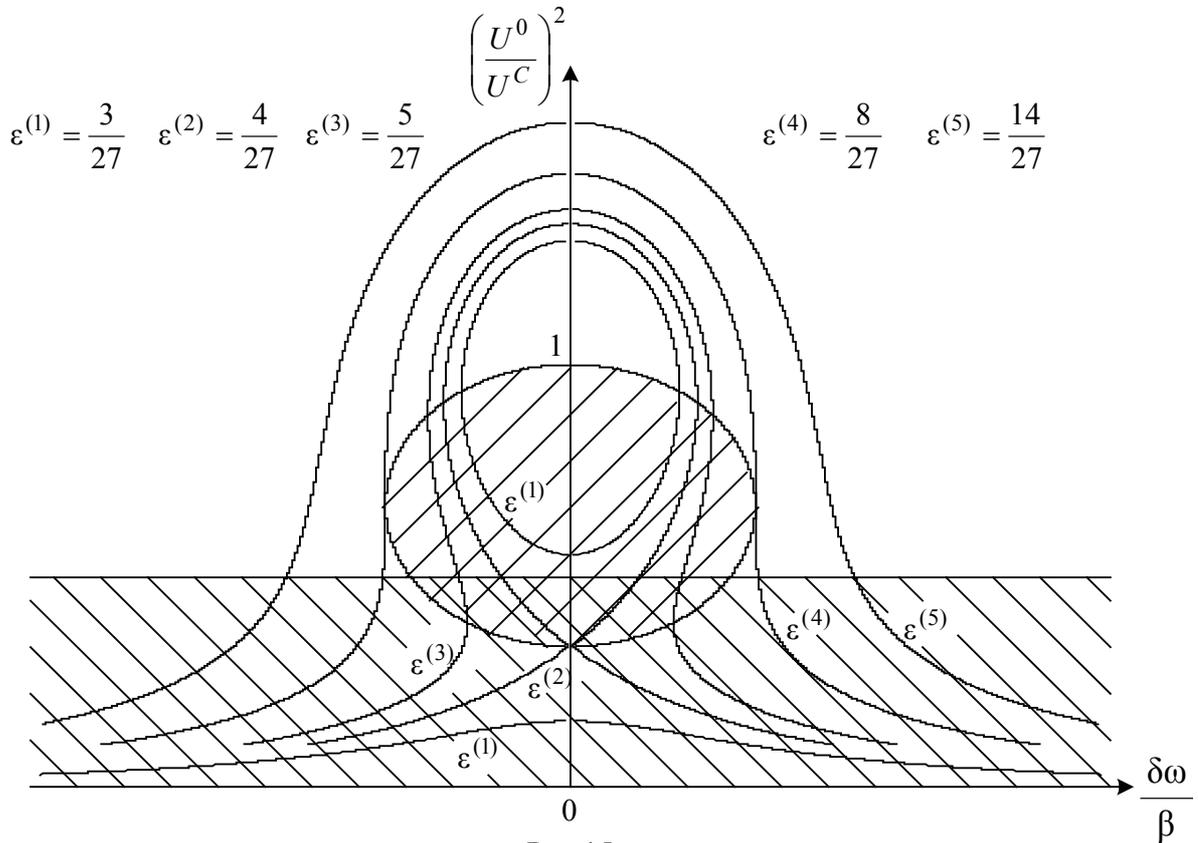


Рис.15

вых, лежащие за пределами двух заштрихованных областей: горизонтальной полосы, внутри которой нарушается условие (3.30), и ограниченной эллиптическим овалом области, где не выполняется условие (3.31).

Следует обратить внимание на одну существенную особенность рассматриваемого установившегося режима. Дело в том, что частота изменения

гармонических компонент напряжений между выводами транзистора не одна и та же для одночастотных режимов в автономном одноконтурном генераторе и в неавтономном  $LC$ -генераторе, подвергнутому резонансному воздействию при  $\delta\omega = \omega - \omega_0 \neq 0$ .

Частота автоколебаний автономной схемы Мейснера, как показано выше, в первом приближении равна  $\omega_0$ , т.е. частоте настройки  $LC$ -контура. Воздействие на эту схему (рис.9) источника гармонических колебаний с близкой к  $\omega_0$  частотой  $\omega$  может привести к установлению одночастотного режима, для которого частота изменения гармонических компонент напряжений  $u$  и  $u_d$  строго равняется  $\omega$ . Выходит так, что внешний источник как бы навязывает свою частоту автогенератору, иными словами, вынуждает автоколебательную систему, генерировать колебания с этой частотой. Описанный эффект называют *явлением захватывания*, или *вынужденной синхронизацией* (здесь имеется в виду синхронизм кратности единица, при котором частота генерируемых колебаний в точности равна  $\omega$ ).

Область расстройек  $\delta\omega$ , соответствующих устойчивому режиму синхронизации, тем шире, чем больше амплитуда резонансного воздействия  $I_e$ , и может быть определена из (3.32) при помощи условия (3.30) для  $\varepsilon > \frac{8}{27}$  и условия

$$(3.31) \text{ для } \varepsilon < \frac{8}{27}. \text{ Для относительно малых амплитуд } I_e \text{ (например, при } \varepsilon < \frac{2}{27} \text{)}$$

приближенное выражение для ширины полосы синхронизации (захватывания)  $2\delta\omega_s$  можно вывести, если учесть, что на верхней границе овальной области, показанной на (рис.15),  $U^0$  при малых расстройках  $\delta\omega$  приблизительно равняется  $U^C$ . Тогда из (3.32), как и из (3.23), следует практически линейная зависимость  $2\delta\omega_s$  от  $I_e$ :

$$2\delta\omega_s \approx \frac{|K| I_e}{CU^C}.$$

Нарушение любого из условий устойчивости проявляется в том, что установившийся режим в рассматриваемой неавтономной автоколебательной системе оказывается более сложным, чем одночастотный (моногоармонический), и его анализ требует отдельного рассмотрения, которое может базироваться на укороченных уравнениях. С помощью укороченных уравнений могут быть исследованы также различные переходные процессы, в том числе установление режима автоколебаний в автономном генераторе.

Переходя к рассмотрению анализируемой схемы (рис.9) при жесткой характеристике средней крутизны транзистора (рис.5,б), ограничимся случаем потенциально-автоколебательной системы. При этом, как видно из (3.18),

средний инкремент  $\bar{\beta}(U)$ , как и средняя крутизна, выражается немонотонной функцией амплитуды  $U$ , что, учитывая (3.23), может привести к немонотонной зависимости  $|\delta\omega|$  от  $U^0$ . При дополнительном ограничении  $S^m < g/|K|$  (см. рис.16,а), используя для функции  $\bar{S}(U)$  аппроксимирующее выражение (1.11), можно представить зависимость  $\bar{\beta}$  от  $U$  (рис.16,б) следующей формулой:

$$\bar{\beta}(U) = \beta + (\beta^m - \beta) \left[ 2 \left( \frac{U}{U^m} \right)^2 - \left( \frac{U}{U^m} \right)^4 \right],$$

что позволяет записать условие устойчивости одночастотного режима (3.26) в виде неравенства

$$\left[ 3 \left( \frac{U^0}{U^m} \right)^2 - 2 \right]^2 > \frac{4\beta^m - \beta}{\beta^m - \beta}. \quad (3.33)$$

Если  $4\beta^m < \beta$ , то условие (3.33) справедливо при любых  $U^0$ , а для  $4|\beta^m| \ll |\beta|$  — нарушается в полосе, определяемой неравенствами:

$$\frac{U^m}{\sqrt{3}} < U^0 < U^m.$$

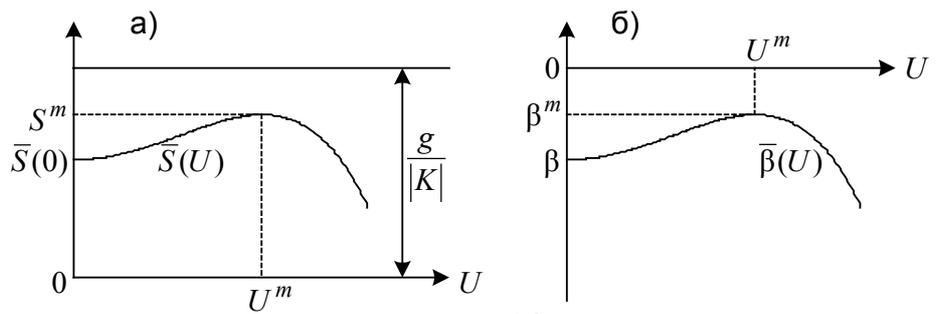


Рис.16

Нарушение второго условия устойчивости, в качестве которого целесообразно использовать неравенство (3.29), возможно лишь тогда, когда получаемая при помощи (3.23) зависимость  $U^0$  от  $\delta\omega$  выглядит примерно так, как показано на рис.17, где пунктиром отмечены участки неустойчивых решений. Если в этом случае выполняется условие (3.33), то зависимость  $U^0$  от  $\delta\omega$ , наблюдаемая на практике, содержит скачки, отмеченные штриховыми линиями на рис.17.

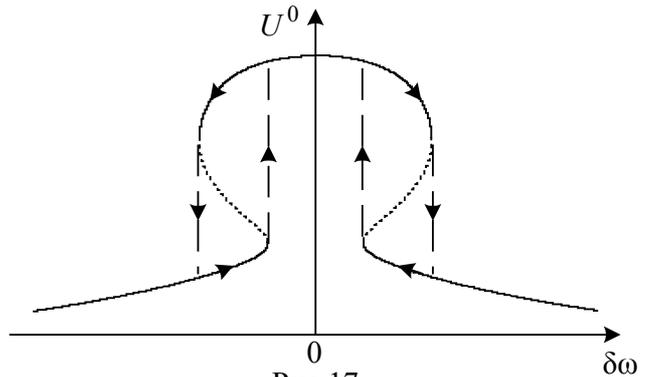


Рис.17

### 3.4. Асинхронное воздействие на схему Мейснера

Реализующиеся в неавтономной схеме Мейснера стационарные колебательные режимы, отличные от одночастотного, во многих случаях могут рассматриваться как двухчастотные (бигармонические). Проанализируем одну из таких возможностей. Пусть частота изменения гармонического тока  $i_e$  в схеме, представленной на рис.9, далека от резонансной частоты  $LC$ -контура. Предполагая, что при  $i_e = 0$  выполнены условия возбуждения автоколебаний, будем считать, что в установившемся режиме при  $i_e \neq 0$  переменные составляющие напряжений затвор-исток и сток-исток состоят из двух гармоник с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . В качестве  $\omega_1$  выберем частоту  $\omega$  источника гармонического тока  $i_e$ . В отношении частоты  $\omega_2$  будем пока утверждать лишь, что она не находится в рациональном отношении с  $\omega_1$ , т.е.  $m\omega_1 + n\omega_2$ , где  $m$  и  $n$  – целые числа, совпадает с  $\omega_1$  только при  $m=1$  и  $n=0$  и совпадает с  $\omega_2$  только при  $m=0$ ,  $n=1$ . Тогда, если допустима аппроксимация зависимости тока стока  $i_d$  от  $u_{\sim}$  кубическим полиномом, то средние крутизны  $\bar{S}_1$  и  $\bar{S}_2$  выражаются вещественными функциями амплитуд  $U_1$  и  $U_2$  согласно (1.14, 1.15).

Составляемые в соответствии с процедурой метода гармонического баланса уравнения установившегося режима для различных гармонических компонент в данном случае имеют вид:

$$Y_1 \dot{U}_1^0 = \dot{I}_e, \quad Y_2 = 0, \quad (3.34), (3.35)$$

где  $Y_1 = \bar{S}_1 + \hat{Y}_1$  и  $Y_2 = \bar{S}_2 + \hat{Y}_2$  – суммарные адмиттансы, а  $\hat{Y}_1$  и  $\hat{Y}_2$  находятся при помощи (3.3). Для частоты  $\omega$ , далекой от резонансной частоты  $LC$ -контура, вещественная часть  $\hat{Y}_1$ , учитывая малость  $g$ , может считаться пренебрежимо малой по сравнению с мнимой частью. Малыми величинами порядка  $g/|K|$  считаются также средние крутизны  $\bar{S}_1$  и  $\bar{S}_2$ , что согласуется с предположением о близости системы к линейной и консервативной.

Принимая во внимание (3.2, 3.3) и сделанные допущения, имеем на основании (3.34) следующее приближенное выражение для стационарной амплитуды колебаний с частотой внешнего воздействия:

$$U_1^0 \approx \left| \frac{K}{b(\omega_1)} \right| I_e. \quad (3.36)$$

Разделяя мнимые и вещественные слагаемые в уравнении(3.35), заменим его равносильной системой вещественных уравнений

$$b(\omega_2) = 0, \quad \bar{S}_2(U_1^0, U_2^0) = \frac{g}{|K|}. \quad (3.37), (3.38)$$

Если выполнены условия для возникновения гармонической компоненты, изменяющейся с частотой  $\omega_2$ , то из (3.37) вытекает, что эта частота, как и частота автоколебаний автономного генератора, совпадает с резонансной частотой  $\omega_0$  LC-контура, т.е. асинхронное воздействие не сказывается (в первом приближении) на значении частоты  $\omega_2$ . Из (3.38) с учетом (1.15) можно получить зависимость  $U_2^0$  от амплитуды  $U_1^0$ , выражаемой согласно (3.36):

$$U_2^0 = \sqrt{\frac{4}{3|a_3|} \left( a_1 - \frac{g}{|K|} \right) - 2(U_1^0)^2}. \quad (3.39)$$

При ничтожно малых  $I_e$  условие существования отличного от нуля решения для  $U_2^0$  выглядит так же, как и в случае автономной системы:

$$a_1 > g / |K|.$$

С ростом  $I_e$  выражение под знаком радикала в (3.39) становится все меньше и меньше, пока не обратится в нуль, после чего колебания с частотой  $\omega_2$  пропадают. Таким образом, воздействие на схему Мейснера, изменяющееся с частотой, далекой от  $\omega_0$ , способно подавить в этой схеме автоколебания. Такое явление получило название *асинхронного гашения* (или *тушения*) колебаний.

О возможном подавлении автоколебаний, генерируемых схемой Мейснера, с последующим переходом в одночастотный режим колебаний с частотой  $\omega$  внешнего источника можно говорить и в случае резонансного воздействия (захватывание, или синхронизация). Характерно, что при  $\omega$ , близких к  $\omega_0$ , для такого подавления требуются существенно меньшие амплитуды  $I_e$ , чем при асинхронном воздействии.

Примером еще одного интересного явления может служить *асинхронное возбуждение* автоколебаний (переход от одночастотного режима к двухчастотному). Однако подобное явление не реализуется при мягких характеристиках, т.е. при вытекающем из (1.15) убывании средней крутизны  $\bar{S}_2$  с ростом как амплитуды  $U_1$ , так и амплитуды  $U_2$ . Асинхронное возбуждение возможно при приводящей к жестким характеристикам нелинейной зависимости тока  $i_d$  от  $u$ , аппроксимируемой полиномом пятой степени [4], в чем нетрудно убедиться с помощью формулы (1.16), если принять, что  $a_1 > 0$ ,  $a_3 > 0$ ,  $a_5 < 0$ .

## 4. ДВУХКОНТУРНЫЙ ГЕНЕРАТОР

### 4.1. Вводные замечания и вспомогательные соотношения

Рассмотрим автономную динамическую систему, иногда называемую генератором с двумя степенями свободы, а также  $LC$ -генератором с дополнительным контуром (рис.18). Посредством емкости  $C$  между двумя колебательными контурами обеспечивается связь, именуемая обычно

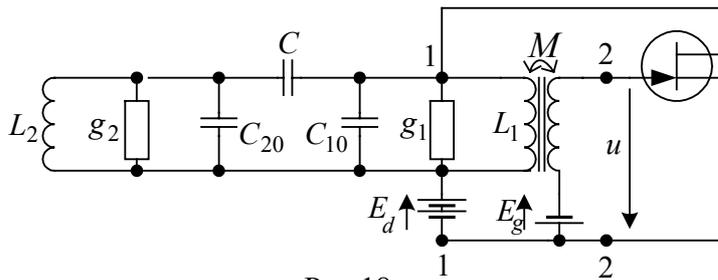


Рис.18

внешней емкостной. Поскольку при анализе процессов в схеме, представленной на рис.18, не обойтись без громоздких преобразований, о некоторых используемых ниже обозначениях целесообразно условиться заранее.

но условиться заранее.

Обозначим через  $Y_C$  комплексную проводимость емкости  $C$ :

$$Y_C = j\omega C,$$

а также введем следующие обозначения для собственных реактивных и комплексных проводимостей контуров

$$B_{i0} = \omega C_{i0} - \frac{1}{\omega L_i}, \quad Y_{i0} = g_i + jB_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots$$

и для реактивных и комплексных проводимостей контуров, шунтированных емкостью  $C$

$$B_{iV} = \omega C_i - \frac{1}{\omega L_i}, \quad Y_{iV} = Y_{i0} + Y_C = g_i + jB_{iV}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4.1)$$

где  $C_i = C_{i0} + C$ .

Используя эти обозначения и считая ток через зажимы 2-2 пренебрежимо малым, запишем комплексную проводимость на зажимах 1-1 как

$$Z_{11}^{-1} = Y_{10} + \frac{Y_{20} Y_C}{Y_{20} + Y_C} = Y_{1V} - \frac{Y_C^2}{Y_{2V}}. \quad (4.2)$$

Здесь употреблено применявшееся ранее обозначение  $Z_{11}$  для элемента  $Z$ -матрицы четырехполюсника  $R$  (см. рис.8 и рис.9), соответствующее сопротивлению холостого хода на зажимах 1-1. Учитывая приводившуюся выше связь между  $Z_{11}$  и передаточным сопротивлением  $Z_{21}$ , на основании (4.2) имеем

$$\hat{Y} = \hat{G} + j\hat{B} = Z_{21}^{-1} = \frac{1}{K}(Y_{1V} + Y_V), \quad (4.3)$$

где в данном случае  $K = M / L_1$ , а  $Y_V$  – обусловленная связью между контурами дополнительная (вносимая) комплексная проводимость, шунтирующая первый (правый) контур:

$$Y_V = G_V + jB_V = \frac{\omega^2 C^2}{Y_{2V}}. \quad (4.4)$$

Принимая во внимание (4.1), легко видеть, что

$$B_V = -\frac{\omega^2 C^2 B_{2V}}{g_2^2 + B_{2V}^2}, \quad G_V = -\frac{g_2}{B_{2V}} B_V. \quad (4.5), (4.6)$$

Введем стандартные обозначения для именуемых далее *парциальными* резонансных частот контуров, шунтированных емкостью  $C$ :

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

Обозначая через  $y$  квадрат частоты  $\omega$ , отнесенной к  $\omega_2$ , а через  $x$  – квадрат отношения  $\omega_1$  к  $\omega_2$ , называемый в последующем *взаимной расстройкой*:

$$y = \omega^2 / \omega_2^2, \quad x = \omega_1^2 / \omega_2^2,$$

и преобразуя выражения (4.1) для  $B_{1V}$  и  $B_{2V}$ , получим

$$B_{1V} = \frac{C_1}{\omega} (\omega^2 - \omega_1^2) = \omega_2 C_1 \frac{y - x}{\sqrt{y}}, \quad (4.7)$$

$$B_{2V} = \frac{C_2}{\omega} (\omega^2 - \omega_2^2) = \omega_2 C_2 \frac{y - 1}{\sqrt{y}}. \quad (4.8)$$

Вводя в рассмотрение коэффициент связи между контурами  $k_C$  и затухание (величину, обратную добротности) второго контура  $d$ :

$$k_C = \frac{C}{\sqrt{C_1 C_2}}, \quad d = \frac{g_2}{\omega_2 C_2},$$

придем на основании (4.5, 4.8) к следующей формуле:

$$B_V = \frac{\omega_2 C_1 k_C^2 (1 - y) y \sqrt{y}}{(1 - y)^2 + y d^2}. \quad (4.9)$$

#### 4.2. Предварительный анализ одночастотных режимов

Предполагая установившийся режим в представленной на рис.18 схеме одночастотным (по напряжению) займемся отысканием для него частоты и амплитуды колебаний напряжения между затвором и истоком ПТ. В качестве исходного соотношения воспользуемся либо уравнением (2.12), либо равносиль-

ной ему формулой (3.4), где  $\hat{Y}$  в данном случае выражается согласно (4.3). Как и ранее, остается в силе утверждение о том, что в схеме обеспечивается положительная обратная связь, т.е. для  $M$  и  $K$  по-прежнему считаются справедливыми равенства (3.1). Считая ПТ безынерционным элементом и учитывая вещественность коэффициента обратной связи  $K$ , можно утверждать, что средняя крутизна  $\bar{S}$  является вещественной функцией амплитуды  $U$  гармонической компоненты напряжения между затвором и истоком. Тогда, если принять во внимание (4.2 – 4.4), из (3.4) вытекают два уравнения, первое из которых используется далее для нахождения частоты колебаний, а второе – для определения стационарной амплитуды  $U^C$ :

$$B_{IV} + B_V = 0, \quad \bar{S}(U^C) = \frac{1}{|K|} (g_1 + G_V). \quad (4.10), (4.11)$$

Учитывая (4.7, 4.9), можно записать (4.10) в форме соотношения, связывающего нормированные величины:

$$x = z(y), \quad (4.12)$$

где

$$z(y) = y + \frac{k_C^2 y^2 (1 - y)}{(1 - y)^2 + yd^2}. \quad (4.13)$$

Соотношение (4.12) совместно с (4.13) позволяет разыскивать значения частоты стационарных колебаний при заданных  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $d$  и  $k_C$ . Это можно сделать

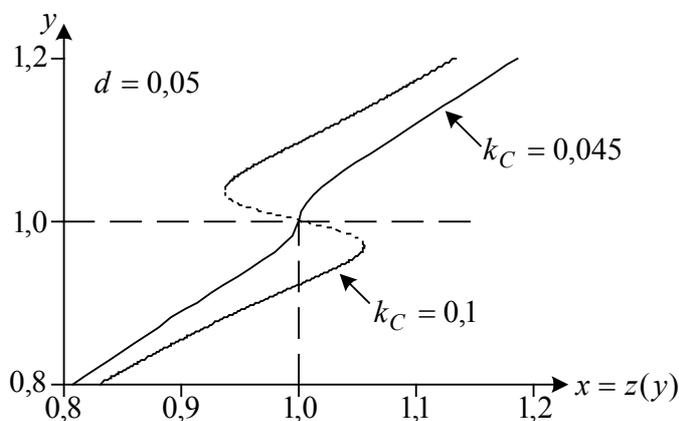


Рис.19

достаточно просто и наглядно, если предварительно построить график функции  $z(y)$ . При малых  $d$ , соответствующих контуру с высокой добротностью, нетрудно показать, что, если  $k_C \leq d$ , то  $z$  монотонно растет с увеличением  $y$ , откуда следует, что при этом условии  $y$  – однозначная функция  $x$ . При  $k_C > d$  для  $z$  характерно немонотонное изменение с ростом  $y$ , и тогда имеется интервал значений  $x$ , в котором уравнение (4.12) дает три решения для  $y = \omega^2 / \omega_2^2$  (рис.19).

В случае мягкой характеристики средней крутизны решения, относящиеся к пунктирному участку кривой  $y(x)$ , неустойчивы. Для того чтобы в этом убедиться, воспользуемся полученным при помощи модифицированного метода комплексных амплитуд укороченным уравнением (3.7), которому равносильна система вещественных укороченных уравнений (3.8, 3.9). Для рассматриваемо-

го двухконтурного генератора вещественная ( $G$ ) и мнимая ( $B$ ) части суммарного адмиттанса  $Y$ , входящие в (3.8, 3.9), выражаются формулами

$$G = \bar{S} + \hat{G} = \bar{S}(U) - \frac{1}{|K|} (g_1 + G_V), \quad (4.14)$$

$$B = \hat{B} = -\frac{1}{|K|} (B_{1V} + B_V) = \frac{\omega_2 C_1}{|K| \sqrt{y}} [x - z(y)]. \quad (4.15)$$

Исключая из (3.8, 3.9) производную  $\frac{d\theta}{dt}$ , приходим к уравнению

$$|Y'_\omega|^2 \frac{dU}{dt} = (G'_\omega B - G B'_\omega) U. \quad (4.16)$$

Полагая, что  $U$  отличается от стационарной амплитуды  $U^C$  на малую добавку  $\Delta U$ , нетрудно посредством процедуры линеаризации получить из (4.16) следующее уравнение первого приближения

$$|Y'_\omega|^2 \frac{d\Delta U}{dt} = -G'_U B'_\omega U^C \Delta U, \quad (4.17)$$

где частная производная  $G'_U$ , равная согласно (4.14)  $\bar{S}'(U^C)$ , при мягкой характеристике отрицательна. В то же время из (4.15) следует, что вычисляемая при условии (4.12) частная производная

$$B'_\omega = -\frac{2C_1}{|K|} z'(y).$$

Тогда для нисходящего (пунктирного) участка зависимости  $y$  от  $x$  (рис.19), для которого  $z'(y) < 0$ , определяемая из уравнения (4.17) зависимость  $|\Delta U|$  от времени  $t$  оказывается нарастающей, и потому этот участок отвечает неустойчивым решениям.

Выясним теперь некоторые характерные особенности зависимостей  $U^C(x)$ , получаемых из (4.11, 4.10) при  $k_C < d$  и  $k_C > d$ . Используя формулу (4.6) для  $G_V$  и учитывая (4.10), преобразуем (4.11) к виду:

$$\bar{S}(U^C) = \frac{1}{|K|} \left( g_1 + g_2 \frac{B_{1V}}{B_{2V}} \right), \quad (4.18)$$

где  $B_{1V}$  и  $B_{2V}$  определяются выражениями (4.7, 4.8).

Обозначая через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  коэффициенты затухания собственных колебаний в первом и втором контурах (шунтированных емкостью  $C$ ):

$$\alpha_1 = \frac{g_1}{2C_1}, \quad \alpha_2 = \frac{g_2}{2C_2}, \quad (4.19)$$

и поступая подобно тому, как это было сделано выше для одноконтурного генератора, введем в рассмотрение линейный инкремент, определив его в данном случае формулами:

$$\beta_1 = \frac{1}{2C_1} [K |\bar{S}(0) - g_1] = \frac{|K|}{2C_1} \bar{S}(0) - \alpha_1, \quad (4.20)$$

которые не учитывают потери во втором контуре.

В последующем характеристика средней крутизны, предполагаемая мягкой, аппроксимируется ветвью квадратичной параболы согласно (1.10), что позволяет, принимая во внимание (4.7, 4.8, 4.19, 4.20), получить из (4.18) выражение для стационарной амплитуды

$$U^C = \sqrt{\frac{8C_1}{3|a_3K|} [\beta_1 - \Gamma(x)]}, \quad (4.21)$$

где

$$\Gamma(x) = \alpha_2 \frac{y(x) - x}{y(x) - 1}, \quad (4.22)$$

а разность  $\beta_1 - \Gamma(x)$  можно трактовать как линейный инкремент, которым наряду с регенерацией (положительной обратной связью) учитываются потери в обоих контурах. С учетом (4.12, 4.13) можно также записать

$$\Gamma(x) = \frac{\alpha_2 k_C^2 y^2}{(1 - y)^2 + yd^2}, \quad (4.23)$$

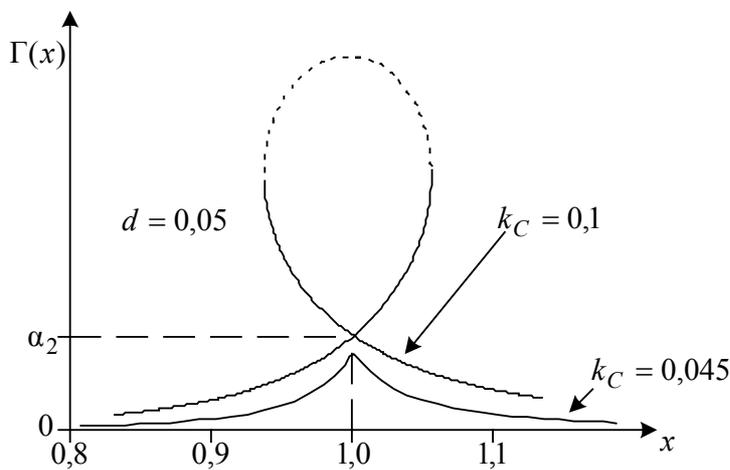


Рис.20

откуда, в частности, следует, что функция  $\Gamma(x)$  принимает только неотрицательные значения. В формулах (4.22, 4.23) величина  $y$  является определяемой при помощи (4.12, 4.13) функцией взаимной расстройки  $x$  (см. рис.19). Для  $d \ll 1$  максимальное значение функции  $\Gamma(x)$  равняется  $\alpha_2 k_C^2 / d^2$  и достигается при  $y = 1$ . Из примера, приведенного на рис.20, видно, что зависимости  $\Gamma(x)$  для  $k_C < d$  и  $k_C > d$  существенно различаются по виду. Как и на рис.19, пунктирный участок кривой отвечает неустойчивым решениям.

Формула (4.21) применяется далее для нахождения зависимостей стационарной амплитуды  $U^C$  от взаимной расстройки  $x$  при различных коэффици-

циентах связи  $k_C$ . Способ изменения  $x = \omega_1^2 / \omega_2^2$  при фиксированном  $k_C$  предполагается таким, что  $C_1$ ,  $\omega_2$  и  $|K|$  в процессе вариации  $x$  остаются неизменными. Можно, например, постепенно изменять магнитную проницаемость материала сердечника, на который намотаны катушка первого контура и катушка обратной связи, чем обеспечивается пропорциональное изменение индуктивности  $L_1$  и взаимной индуктивности  $M$ .

При далеком от нуля положительном инкременте  $\beta_1$  и значениях  $x$ , не близких к единице, величина  $U^C$  слабо зависит от  $x$  и практически равна амплитуде стационарных колебаний генератора с одним (первым) контуром. Если парциальная частота  $\omega_1$  приближается к  $\omega_2$  ( $x \rightarrow 1$ ), то при  $k_C < d$  и  $\beta_1 > \alpha_2 k_C^2 / d^2$  отмечается некоторое уменьшение амплитуды  $U^C$  (отсос энергии колебаний из первого контура во второй), достигающее наибольшего значения при  $x = 1$  (рис.21).

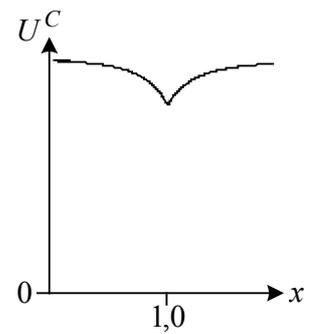


Рис.21

Если величина  $\beta_1$ , предполагаемая значительно большей, чем  $\alpha_2 k_C^2$ , оказывается в случае  $k_C < d$  меньшей, чем  $\alpha_2 k_C^2 / d^2$ , а в случае  $k_C > d$  — меньшей  $\alpha_2$ , то в окрестности точки  $x = 1$ , как следует из (4.21), автоколебаний нет (рис.22). Таким образом, при перечисленных условиях потери во втором контуре проявляются не только в отсосе энергии, но и в нарушении при  $x$ , близких к единице, условия самовозбуждения, т.е. в *гашении* колебаний. Для  $0 < \beta_1 < \alpha_2 k_C^2$  можно говорить о гашении автоколебаний при превышении взаимной расстройкой  $x$  некоторого значения, меньшего единицы. В этом случае область гашения простирается до сколь угодно больших  $x$ .

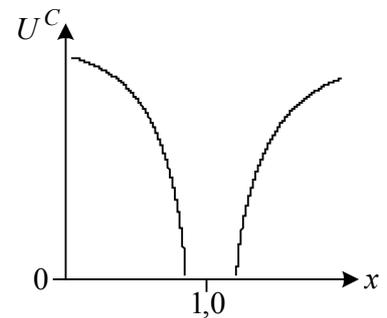


Рис.22

При  $k_C < d$  полученные решения для амплитуды  $U^C$  асимптотически устойчивы, что доказывается с помощью (4.17). То же самое при  $k_C > d$  можно утверждать по поводу решений, отвечающих интервалам изменения взаимной расстройки, в которых  $y$  и  $\Gamma$  представляются однозначными зависимостями от  $x$ . Вопрос об устойчивости решений, соответствующих интервалам, где проявляется неоднозначность функций  $y(x)$  и  $\Gamma(x)$ , рассмотрен ниже. На дальнейшее отнесено также рассмотрение решений для стационарной амплитуды при  $k_C > d$  и  $\beta_1 > \alpha_2$ .

### 4.3. Анализ двухконтурного генератора на основе двухмодового приближения

Полагая условия  $k_c > d$  и  $\beta_1 > \alpha_2$  выполненными одновременно, обратимся к рассмотрению решений для частоты и амплитуды установившихся колебаний двухконтурного генератора (рис.18). При этом не будут приниматься во внимание решения, которые отвечают пунктирному участку зависимости  $y(x)$ , приведенной на рис.19. Тогда нетрудно прийти к выводу, что в некотором интервале значений взаимной расстройки  $x$ , включающем  $x = 1$ , из уравнений (4.12, 4.21) получаются две пары зависящих от  $x$  значений частоты и стационарной амплитуды:  $\Omega_1, U_1^C$  и  $\Omega_2, U_2^C$ . Первая пара соответствует верхней ветви зависимости  $y(x)$  при  $k_c > d$ , а вторая – нижней ветви (рис.19). В рассматриваемом случае можно говорить о различающихся по частоте типах колебаний (модах) двухконтурного генератора. В такой ситуации нельзя заранее исключать возможность двухчастотного режима, т.е. одновременного существования обеих мод. Кроме того, даже анализ одночастотного режима в случае, когда он может соответствовать разным модам, требует иного подхода, чем тот, что применялся выше.

Выберем далее в качестве исходной систему двух укороченных уравнений вида (3.7), записанных для различных мод. Предполагая частоты мод  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  не находящимися в рациональном отношении, воспользуемся в последующем выражениями (1.14, 1.15) для средних крутизн  $\bar{S}_1$  и  $\bar{S}_2$  этих мод, отвечающими двухчастотному режиму при аппроксимации характеристики ПТ кубическим полиномом. Учитывая, что  $\bar{S}_1$  и  $\bar{S}_2$  не зависят от частоты, прибегнем к следующей форме записи упомянутой исходной системы укороченных уравнений:

$$\left[ j\hat{G}'(\Omega_i) - \hat{B}'(\Omega_i) \right] \frac{d\dot{U}_i}{dt} = \dot{U}_i \left[ \bar{S}_i(U_1, U_2) + \hat{G}(\Omega_i) + j\hat{B}(\Omega_i) \right], \quad i = 1, 2, \quad (4.24)$$

где согласно (4.3) реактивная проводимость  $\hat{B}$  определяется формулой (4.15), а активная проводимость  $\hat{G}$  отличается знаком от правой части (4.11), что видно также из (4.14).

У системы (4.24) имеются четыре варианта стационарных (не зависящих от времени) решений для  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ . Один из них ( $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = 0$ ) отвечает состоянию равновесия, два других: ( $\dot{U}_1 = 0, \dot{U}_2 = \dot{U}_2^C \neq 0$  и  $\dot{U}_1 = \dot{U}_1^C \neq 0,$

$\dot{U}_2 = 0$ ) – одночастотным (одномодовым) режимам, а вариант, для которого  $\dot{U}_1 = \dot{U}_1^C \neq 0$ ,  $\dot{U}_2 = \dot{U}_2^C \neq 0$ , соответствует двухчастотному режиму.

В последнем случае из (4.24) вытекают равносильные (4.10) уравнения

$$\hat{B}(\Omega_1) = 0, \quad \hat{B}(\Omega_2) = 0, \quad (4.25)$$

с помощью которых отыскиваются частоты  $\Omega_1, \Omega_2$ , и система двух уравнений,

$$\bar{S}_1(U_1^C, U_2^C) = -\hat{G}(\Omega_1), \quad \bar{S}_2(U_1^C, U_2^C) = -\hat{G}(\Omega_2), \quad (4.26)$$

предназначенная для нахождения стационарных амплитуд  $U_1^C, U_2^C$ .

Введем следующее обозначение для квадрата модуля производной  $\hat{Y}$  по частоте:

$$D_i = [\hat{G}'(\Omega_i)]^2 + [\hat{B}'(\Omega_i)]^2.$$

Выразим комплексные амплитуды  $\dot{U}_i$  в уравнениях (4.24) через модули и аргументы:

$$\dot{U}_i = U_i \exp(j\theta_i), \quad i = 1, 2,$$

после чего умножим каждое из уравнений на  $\frac{\exp(-j\theta_i)}{D_i} [-j\hat{G}'(\Omega_i) - \hat{B}'(\Omega_i)]$ .

Выделяя в получившихся соотношениях вещественные слагаемые, придем к системе уравнений, при помощи которой удобно исследовать устойчивость стационарных режимов двухконтурного генератора:

$$\frac{dU_1}{dt} = P(U_1, U_2), \quad \frac{dU_2}{dt} = Q(U_1, U_2), \quad (4.27), (4.28)$$

где

$$P(U_1, U_2) = \frac{U_1}{D_1} \{ \hat{B}(\Omega_1) \hat{G}'(\Omega_1) - [\bar{S}_1(U_1, U_2) + \hat{G}(\Omega_1)] \hat{B}'(\Omega_1) \}, \quad (4.29)$$

$$Q(U_1, U_2) = \frac{U_2}{D_2} \{ \hat{B}(\Omega_2) \hat{G}'(\Omega_2) - [\bar{S}_2(U_1, U_2) + \hat{G}(\Omega_2)] \hat{B}'(\Omega_2) \} \quad (4.30)$$

Далее мы вновь воспользуемся признаками асимптотической устойчивости стационарных решений системы второго порядка, представляемыми для системы (4.27, 4.28) в следующем виде:

$$P'_{U_1} + Q'_{U_2} < 0, \quad P'_{U_1} Q'_{U_2} - P'_{U_2} Q'_{U_1} > 0, \quad (4.31), (4.32)$$

где частные производные  $P'_{U_1}, P'_{U_2}, Q'_{U_1}, Q'_{U_2}$  вычисляются при стационарных значениях амплитуд  $U_1$  и  $U_2$ .

Для двухчастотного режима, учитывая (4.25, 4.26), имеем из (4.29, 4.30)

$$P'_{U_i} = -\frac{U_1^C}{D_1} \hat{B}'(\Omega_1) \frac{\partial \bar{S}_1}{\partial U_i}, \quad Q'_{U_i} = -\frac{U_2^C}{D_2} \hat{B}'(\Omega_2) \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial U_i},$$

и условия устойчивости (4.31, 4.32) можно записать как

$$\frac{U_1^C}{D_1} \hat{B}'(\Omega_1) \frac{\partial \bar{S}_1}{\partial U_1} + \frac{U_2^C}{D_2} \hat{B}'(\Omega_2) \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial U_2} > 0, \quad (4.33)$$

$$\hat{B}'(\Omega_1) \hat{B}'(\Omega_2) \left[ \frac{\partial \bar{S}_1}{\partial U_1} \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial U_2} - \frac{\partial \bar{S}_1}{\partial U_2} \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial U_1} \right] > 0. \quad (4.34)$$

Из (1.14, 1.15) следует, что частные производные  $\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial U_1}$  и  $\frac{\partial \bar{S}_2}{\partial U_2}$  отрицательны, а на основании (4.15) с учетом (4.12, 4.13) нетрудно показать, что  $\hat{B}'(\Omega_{1,2}) < 0$ , т.е. мнимая часть суммарного адмиттанса с ростом частоты убывает для обеих восходящих ветвей зависимости  $y(x)$ . Отрицательность частных производных  $\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial U_1}$  и  $\frac{\partial \bar{S}_2}{\partial U_2}$  позволяет сделать вывод, что условие устойчивости (4.33) в данном случае выполняется. Однако из вычислений, основанных на (1.14, 1.15), вытекает также отрицательность выражения в квадратных скобках в левой части (4.34), что, учитывая положительность множителя перед этими скобками, свидетельствует о нарушении условия (4.34), т.е. означает неустойчивость двухчастотного (двухмодового) режима в автономном двухконтурном генераторе при мягких характеристиках.

Предположим теперь, что генерируется только мода с частотой  $\Omega_1$ , т.е.  $U_2 = 0$ ,  $U_1 = U_1^C \neq 0$ , и получим условие устойчивости этого одночастотного режима. Исходя из того, что соотношения (4.25) остаются в силе, запишем уравнение для стационарной амплитуды  $U_1^C$ , равносильное (4.11):

$$\bar{S}_1(U_1^C, 0) = -\hat{G}(\Omega_1). \quad (4.35)$$

При этом

$$Q'_{U_2} = -\frac{\hat{B}'(\Omega_2)}{D_2} [\bar{S}_2(U_1^C, 0) + \hat{G}(\Omega_2)],$$

$$P'_{U_1} = -\frac{U_1^C}{D_1} \hat{B}'(\Omega_1) \frac{\partial \bar{S}_1}{\partial U_1}, \quad Q'_{U_1} = 0.$$

Благодаря последнему равенству, обусловленному тем, что стационарное значение  $U_2 = 0$ , условия (4.31, 4.32) сводятся к требованию отрицательности частных производных  $P'_{U_1}$  и  $Q'_{U_2}$ . Поскольку для  $P'_{U_1}$ , как легко видеть, это требование выполнено, условие устойчивости рассматриваемого одночастотного режима выражается неравенством

$$\bar{S}_2(U_1^C, 0) < -\hat{G}(\Omega_2). \quad (4.36)$$

Полученное условие соблюдается всегда, если  $\bar{S}_2(0,0) < -\hat{G}(\Omega_2)$ , что, в частности, означает отсутствие ненулевых решений уравнения

$$\bar{S}_2(0, U_2^C) = -\hat{G}(\Omega_2), \quad (4.37)$$

используемого для нахождения амплитуды другой моды (с частотой  $\Omega_2$ ). В случае, когда уравнение (4.37) имеет ненулевые решения, условие (4.36) можно преобразовать к виду:

$$\bar{S}_2(U_1^C, 0) < \bar{S}_2(0, U_2^C).$$

Из этого неравенства, если учесть (1.14, 1.15), выводится условие устойчивости одночастотного режима колебаний с частотой  $\Omega_1$ :

$$U_1^C > \frac{U_2^C}{\sqrt{2}}, \quad (4.38)$$

применимое в интервале значений взаимной расстройки  $x$ , при которых имеются отличные от нуля решения уравнений (4.35, 4.37) для стационарных амплитуд  $U_1^C$  и  $U_2^C$ . Справедливое упомянутом интервале условие устойчивости одночастотного режима, соответствующего моде с частотой  $\Omega_2$ , выглядит аналогично:

$$U_2^C > \frac{U_1^C}{\sqrt{2}}. \quad (4.39)$$

Для отыскания входящих в неравенства (4.38, 4.39) стационарных амплитуд  $U_1^C$  и  $U_2^C$ , можно воспользоваться выведенной для одночастотного ре-

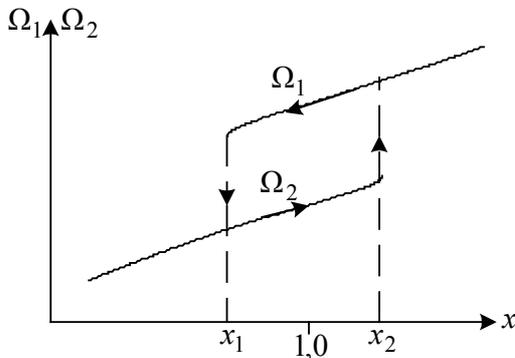


Рис.23

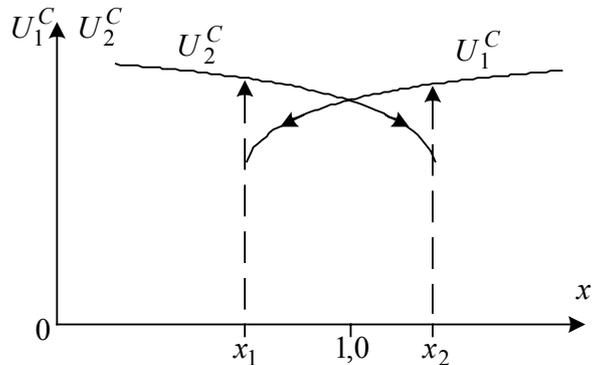


Рис.24

жима формулой (4.21). С помощью формулы (4.21) нетрудно установить, что при  $k_c > d$  и  $\beta_1 > \alpha_2$  имеется область значений взаимной расстройки  $x$ , при которых условия (4.38, 4.39) выполняются одновременно. В зависимости от соотношения между параметрами элементов автоколебательной системы эта область обычно либо совпадает с областью расстроек, при которых из (4.21) получаются два решения, отвечающие восходящим участкам кривой  $y(x)$ , либо

оказывается более узкой. В любом случае в некоторой полосе расстроек при одних начальных условиях генерируется мода с частотой  $\Omega_1$ , а при других – мода с частотой  $\Omega_2$ . Какая из мод реализуется, зависит, как принято говорить, от истории процесса. Например, при плавном изменении  $x$ , начинающемся со значений, много меньших единицы, в сторону увеличения в названной полосе генерируется мода с частотой  $\Omega_2$ , а при изменении со стороны больших значений  $x$  – мода с частотой  $\Omega_1$ , т.е. имеет место гистерезисный эффект, получивший название явления *затягивания* [4, 9]. Зависимости частоты автоколебаний и стационарной амплитуды от  $x$  в случае явления затягивания построены соответственно на рис.23 и рис.24. Расположенный по обе стороны от точки  $x = 1$  интервал расстроек, для которого  $x_1 < x < x_2$ , называют полосой затягивания.

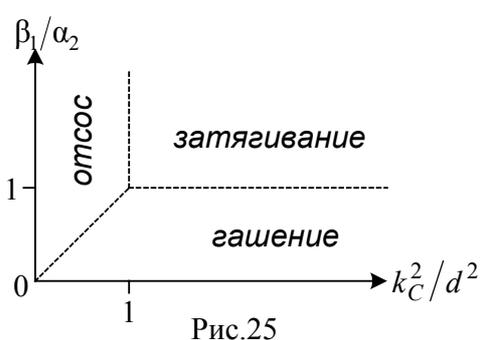


Рис.25

Если при расстройке, относящейся к полосе затягивания, генерируется какая-нибудь из двух возможных мод, то эта мода выступает как асинхронный «гасящий» фактор, препятствующий появлению другой моды. В этом смысле говорят о *конкуренции мод* двухконтурного генератора [11]. Приведенная на рис.25 сводная диаграмма позволяет судить о том, при каких соотношениях между пара-

метрами двухконтурной автоколебательной системы могут наблюдаться явления затягивания, гашения и отсоса энергии без гашения и затягивания.

## 5. ТРАНЗИСТОРНЫЙ ГЕНЕРАТОР С АВТОМАТИЧЕСКИМ СМЕЩЕНИЕМ

### 5.1. Исходные допущения и соотношения

Рассмотрим автономный  $LC$ -генератор на биполярном транзисторе с ячейкой автоматического смещения  $R_e C_e$ , включенной в цепь эмиттера (рис.26). Источником постоянной ЭДС  $E_b$  обеспечивается необходимое смещение эмиттерного перехода в прямом направлении, благодаря чему реализуется усиление, достаточное для самовозбуждения. Без правильно подобранной ячейки автоматического смещения генерируемые напряжения, как правило, резко отличаются по форме от синусоидальных, и поэтому подобные ячейки обычно вводятся в автоколебательные схемы резонансного типа на биполярных транзисторах. Напряжение  $w$  зажимами параллельного соединения сопротивления  $R_e$  и емкости  $C_e$  в последующем называется напряжением автоматического смещения.

Полагая ток базы транзистора пренебрежимо малым по сравнению с током коллектора  $i_c$ , запишем в соответствии с первым законом Кирхгофа следующее равенство:

$$C_e \frac{dw}{dt} + \frac{w}{R_e} = i_c. \quad (5.1)$$

Выразим напряжение  $u_b$  на эмиттерном переходе транзистора через напряжение  $u_M$  на зажимах обмотки обратной связи, ЭДС  $E_b$  и напряжение автоматического смещения:

$$u_b = E_b - w + u_M. \quad (5.2)$$

Предположим, что в установившемся автоколебательном режиме в напряжении  $u_b$ , как и в других напряжениях между выводами транзистора, содержатся только постоянная составляющая и единственная гармоническая компонента, которая изменяется с частотой  $\omega$ , подлежащей определению (одночастотный режим). Ток коллектора  $i_c$  считается однозначной нелинейной функцией напряжения  $u_b$  и в общем случае представляется суммой многих гармоник и постоянной составляющей  $I_-$ . Пусть емкость  $C_e$  достаточно велика для того, чтобы в установившемся (стационарном) режиме можно было считать пренебрежимо малым вклад всех гармонических компонент в напряжение  $w$ , полагая это напряжение равным постоянной величине

$$w^C = R_e I_-^C. \quad (5.3)$$

Поскольку система в целом считается близкой к линейной и консервативной, напряжение  $u_M$  в нестационарном режиме может быть представлено формулой

$$u_M(t) = \text{Re}[\dot{U}(t) \exp(j\omega t)], \quad (5.4)$$

где  $\dot{U}(t)$  – комплексная амплитуда, медленно изменяющаяся с течением времени. Напряжение автоматического смещения  $w$  и составляющая  $I_-$  в нестационарном режиме также предполагаются далее медленно меняющимися функциями времени  $t$ , что позволяет, отбрасывая в (5.1) все быстро изменяющиеся слагаемые, перейти от него к соотношению

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{C_e} \left( I_- - \frac{w}{R_e} \right), \quad (5.5)$$

которое может быть названо укороченным уравнением для медленно меняющейся составляющей напряжения  $u_b$ .

Для быстро изменяющейся компоненты напряжения  $u_b$ , выражаемой согласно (5.4), можно выбрать в качестве исходного соотношения комплексное

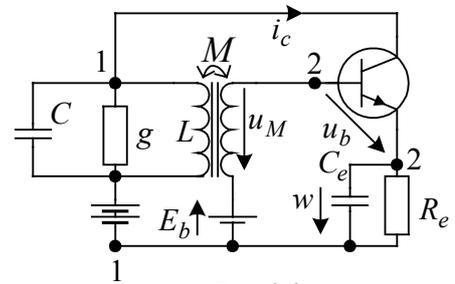


Рис.26

укороченное уравнение в форме (3.7). При принятых допущениях параметры  $R_e$  и  $C_e$  не сказываются на адмиттансе  $\hat{Y}$  и коэффициенте обратной связи  $K$ , полагаемом равным  $-|M|/L$ . Тогда из (3.7), в частности, следует, что в установившемся режиме частоту автоколебаний  $\omega$ , как и в случае схемы без автоматического смещения, можно считать равной резонансной частоте колебательного контура  $\omega_0$ . Для нахождения амплитуды стационарных колебаний может применяться уравнение (3.6), в котором под  $\bar{S}$  следует понимать среднюю крутизну биполярного транзистора и которое должно рассматриваться совместно с уравнением (5.3).

Полагая частоту  $\omega$  равной  $\omega_0$  также и для нестационарного режима, можно, учитывая (3.11) и вводя средний инкремент  $\bar{\beta}$  согласно (3.18), получить из (3.7) вещественное укороченное уравнение вида (3.12):

$$\frac{dU}{dt} = \bar{\beta}U, \quad (5.6)$$

где  $U = |\dot{U}|$  – амплитуда, предполагаемая в общем случае зависящей от времени.

Одна из особенностей анализа схемы генератора с автоматическим смещением, приведенной на рис.26, состоит в том, что входящая (5.3, 5.5) компонента  $I_-$  тока транзистора и средняя крутизна  $\bar{S}$  (а значит, и средний инкремент  $\bar{\beta}$ ) являются функциями двух переменных: амплитуды  $U$  и напряжения автоматического смещения  $w$ .

## 5.2. Зависимости компоненты $I_-$ и средней крутизны $\bar{S}$ от напряжения автоматического смещения и амплитуды колебаний

Выберем начало отсчета времени так, чтобы для одночастотного режима напряжение на зажимах обмотки обратной связи могло быть представлено в виде:

$$u_M = U \cos \tau, \quad (5.7)$$

где  $\tau = \omega t$  – безразмерное время.

Тогда, учитывая однозначную зависимость коллекторного тока от напряжения  $u_b$ , выраженного согласно (5.2), можно воспользоваться следующими формулами для определения постоянной составляющей и средней крутизны:

$$I_- = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i_c dt, \quad \bar{S} = \frac{I_{c1}}{U}. \quad (5.8), (5.9)$$

В последней формуле  $I_{c1}$  – амплитуда первой гармоники тока  $i_c$ , равная, как и амплитудный коэффициент  $I_1$  из формулы (1.2), соответствующему коэффициенту разложения тока в ряд Фурье по косинусам:

$$I_{c1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} i_c \cos \tau d\tau. \quad (5.10)$$

При вычислении интегралов (5.8, 5.10) напряжение  $w$  и амплитуда  $U$  предполагаются постоянными величинами, которые могут принимать различные фиксированные значения.

Прибегнем далее к часто применяемой экспоненциальной аппроксимации зависимости коллекторного тока от напряжения  $u_b$ :

$$i_c = i_s \exp(\gamma u_b). \quad (5.11)$$

Здесь  $i_s$  – масштабный коэффициент;  $\gamma = \frac{1}{m\phi_T}$ ;  $\phi_T$  – температурный потенциал, равный 25 мВ при температуре 290 К;  $m$  – коэффициент, зависящий от свойств эмиттерного перехода и обычно принимающий значения от единицы до двух. Подставляя (5.11) в (5.8, 5.10) и учитывая (5.2, 5.7, 5.9), получим

$$I_=(U, w) = i_s I_0(\gamma U) \exp[\gamma(E_b - w)], \quad (5.12)$$

$$\bar{S}(U, w) = \frac{2i_s}{U} I_1(\gamma U) \exp[\gamma(E_b - w)], \quad (5.13)$$

где  $I_n(\gamma U) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp(\gamma U \cos \tau) \cos(n\tau) d\tau$  – модифицированная цилиндрическая функция целого индекса  $n$ .

Задавая  $R_e$ , можно при помощи соотношений (5.3, 5.12) получать зависимости  $w(U)$ , справедливые в установившемся режиме. На основании (5.13) с учетом этих зависимостей, иными словами, для  $\bar{S}(U, w(U))$ , на рис 27 построено семейство характеристик средней крутизны при различных  $R_e$ .

При  $R_e = 0$ , т.е. в отсутствие автоматического смещения ( $w = 0$ ), средняя крутизна – монотонно возрастающая функция амплитуды  $U$ , что видно непосредственно из (5.13). При достаточно больших  $R_e$  для средней крутизны характерно монотонное убывание с увеличением  $U$  (мягкая характеристика), а при промежуточных значениях  $R_e$  функция  $\bar{S}(U, w(U))$  оказывается немонотонной, т.е. соответствующие кривые имеют, как показано на рис.27, жесткий характер.

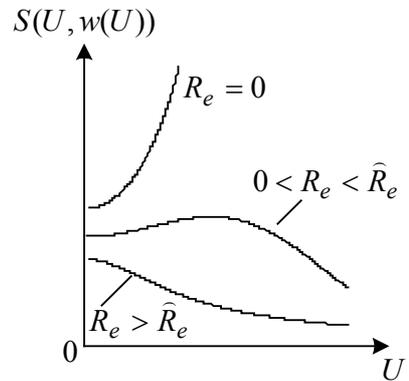


Рис.27

### 5.3. Стационарные решения укороченных уравнений. Устойчивость стационарных решений

Анализ  $LC$ -генератора с автоматическим смещением опирается в последующем на систему укороченных уравнений, записанную в виде:

$$\frac{dU}{dt} = P(U, w), \quad \frac{dw}{dt} = Q(U, w), \quad (5.14, 5.15)$$

где согласно (5.6, 3.18, 5.5)

$$P(U, w) = U\bar{\beta}(U, w) = \frac{U}{2C} \left[ |K| \bar{S}(U, w) - g \right], \quad (5.16)$$

$$Q(U, w) = \frac{1}{C_e} \left[ I_-(U, w) - \frac{w}{R_e} \right]. \quad (5.17)$$

При такой форме записи укороченных уравнений ответ на вопрос об устойчивости или неустойчивости их стационарных (не зависящих от времени) решений довольно просто получить с помощью признаков асимптотической устойчивости, представляемых в данном случае неравенствами

$$P'_U + Q'_w < 0, \quad P'_U Q'_w - P'_w Q'_U > 0, \quad (5.18, 5.19)$$

где  $P'_U$ ,  $P'_w$ ,  $Q'_U$ ,  $Q'_w$  – частные производные, вычисляемые при стационарных значениях  $U$  и  $w$ . Отметим, что частная производная  $Q'_w$  всегда отрицательна.

Стационарное решение уравнений (5.14, 5.15), для которого амплитуда  $U = 0$ , отвечает состоянию равновесия. Частная производная  $P'_w$  равна для него нулю, и условие его устойчивости, учитывая, что  $Q'_w < 0$ , получается из (5.18, 5.19) как требование отрицательности частной производной  $P'_U$  при нулевой амплитуде  $U$ , т.е. сводится к неравенству

$$\bar{S}(0, w_0) < \frac{g}{|K|}, \quad (5.20)$$

где  $w_0$  в соответствии с (5.15, 5.17) является решением уравнения

$$I_-(0, w_0) = \frac{w_0}{R_e}.$$

Неравенство, обратное (5.20), называется условием самовозбуждения и имеет такой же вид, как и в случае схемы Мейснера без автоматического смещения.

Для отыскания отличной от нуля стационарной амплитуды  $U^C$ , отвечающей установившемуся одночастотному режиму, можно согласно (5.14, 5.16) воспользоваться уравнением

$$\bar{S}(U^C, w(U^C)) = \frac{g}{|K|}, \quad (5.21)$$

где  $w(U)$  определяется с помощью соотношения, вытекающего из (5.15, 5.17) при условии, что  $\frac{dw}{dt} = 0$ ,

$$I_{\pm}(U, w) = \frac{w}{R_e}. \quad (5.22)$$

Принимая во внимание (5.21), можно записать условия устойчивости (5.18, 5.19) в случае одночастотного режима как неравенства

$$\frac{|K|}{2C} U^c \frac{\partial \bar{S}}{\partial U} + \frac{1}{C_e} \left( \frac{\partial I_{\pm}}{\partial w} - \frac{1}{R_e} \right) < 0, \quad (5.23)$$

$$\left( \frac{\partial I_{\pm}}{\partial w} - \frac{1}{R_e} \right) \frac{\partial \bar{S}}{\partial U} - \frac{\partial I_{\pm}}{\partial U} \frac{\partial \bar{S}}{\partial w} > 0, \quad (5.24)$$

куда входят частные производные компоненты  $I_{\pm}$  и средней крутизны  $\bar{S}$ , определяемые при стационарных значениях  $U$  и  $w$ . Условие (5.24) можно представить в более компактной и наглядной форме [4], если выразить входящую в него частную производную  $\frac{\partial I_{\pm}}{\partial U}$  с помощью соотношения, которое получается в результате дифференцирования (5.22) по  $U$ , проводимого в предположении, что  $w$  является функцией  $U$ :

$$\frac{\partial I_{\pm}}{\partial U} + \frac{\partial I_{\pm}}{\partial w} \frac{dw}{dU} = \frac{1}{R_e} \frac{dw}{dU}. \quad (5.25)$$

После подстановки производной  $\frac{\partial I_{\pm}}{\partial U}$ , выраженной из (5.25), в (5.24) придем к неравенству

$$\left( \frac{\partial I_{\pm}}{\partial w} - \frac{1}{R_e} \right) \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial U} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial w} \frac{dw}{dU} \right) > 0,$$

которое, поскольку  $\frac{\partial I_{\pm}}{\partial w} < 0$ , сводится в конечном счете к условию

$$\frac{d\bar{S}}{dU} < 0. \quad (5.26)$$

Условие устойчивости в форме (5.26) удобно для применения при наличии графиков зависимостей  $\bar{S}(U, w(U))$ , примеры которых приведены на рис.27. Если получаемое из (5.21) решение для стационарной амплитуды соответствует пересечению горизонтальной прямой, проходящей на высоте  $g/|K|$ , с восходящим участком характеристики средней крутизны (см. рис.27), то из (5.26) следует, что это решение неустойчиво. Решения, отвечающие точкам спадаю-

шего участка характеристики средней крутизны (для которого  $\frac{d\bar{S}}{dU} < 0$ ), оказываются устойчивыми только в том случае, если для них выполняется также условие (5.23). Анализ последнего (с учетом положительности частной производной

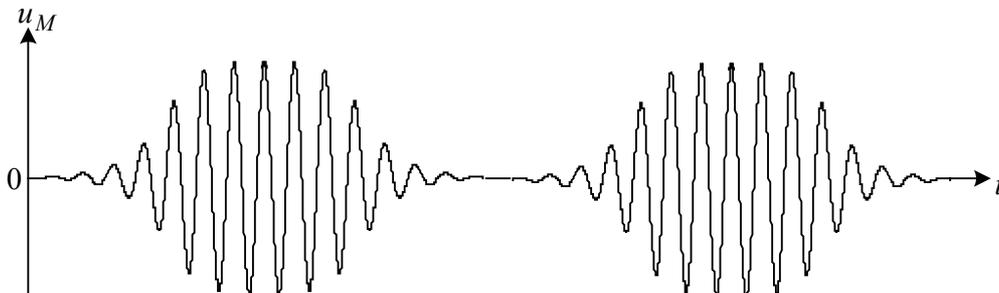


Рис.28

водной  $\frac{\partial \bar{S}}{\partial U}$ ) показывает, что при больших  $C_e$  оно может нарушаться, и тогда установившийся режим может оказаться более сложным, чем одночастотный, например, таким, как прерывистая генерация (рис.28) или режим автомодуляции [4].

## 6. ШУМЫ В ГЕНЕРАТОРАХ РЕЗОНАНСНОГО ТИПА

### 6.1. Предварительные замечания

Рассмотрим теперь некоторые задачи, относящиеся к исследованию флуктуаций в автоколебательных системах [12]. Имея в виду автономные генераторы резонансного типа, будем интересоваться тем, как сказываются на их колебаниях малые самопроизвольные флуктуации внутренних токов и напряжений. Среди основных механизмов возникновения этих флуктуаций выделим тепловое движение носителей заряда и дробовой эффект, проявляющийся, в частности, в схемах, которые содержат приборы с  $p-n$ -переходами (например, биполярные транзисторы или некоторые разновидности полупроводниковых диодов с отрицательным сопротивлением).

Упомянутыми двумя механизмами обусловлено возникновение так называемых быстрых шумов. Быстрой функцией в теории шумов принято считать функцию, претерпевающую заметные изменения за время одного периода автоколебаний [4]. Шумовая функция, вариация которой за период автоколебаний незначительна, называется медленной. Анализ действия колебаний, описываемых посредством медленных функций и обычно вызываемых изменени-

ем параметров системы или какими-либо техническими причинами, в данном пособии отсутствует.

Необходимо отметить, что из-за флуктуаций токи и напряжения в схемах генераторов представляются реализациями случайных функций времени (случайных процессов). В ходе дальнейшего анализа нам придется оперировать различными средними по множеству реализаций, в связи с чем уместно привести для них общепринятые определения. При этом система используемых ниже обозначений иллюстрируется применительно к произвольно выбранному напряжению  $u$ .

К числу выражений, имеющих наиболее простой вид, относятся те, которыми определяются момент первого порядка случайного процесса  $u(t)$ , называемый также его статистическим средним,

$$m_u^{(1)}(t) = \langle u(t) \rangle = \int x p_u(x, t) dx \quad (6.1)$$

и момент второго порядка, соответствующий среднему квадрату  $u(t)$ ,

$$m_u^{(2)}(t) = \langle u^2(t) \rangle = \int x^2 p_u(x, t) dx. \quad (6.2)$$

Угловыми скобками здесь и далее обозначается усреднение по множеству (ансамблю) реализаций случайного процесса. В интегральные представления (6.1, 6.2) входит одномерная плотность вероятности  $p_u(x, t)$ , а пределы интегрирования должны отвечать области определения величины  $u$ . Разброс возможных значений  $u$  относительно среднего характеризуется дисперсией, которая определяется как

$$\sigma_u^2(t) = \langle [u(t) - m_u^{(1)}(t)]^2 \rangle = m_u^{(2)}(t) - [m_u^{(1)}(t)]^2, \quad (6.3)$$

где  $\sigma_u(t)$  – среднеквадратичное отклонение.

При помощи  $\sigma_u$  и  $m_u^{(1)}$  может быть выражена одномерная плотность вероятности нормального, или гауссовского, случайного процесса [12]:

$$p_u(x, t) = [\sigma_u(t)\sqrt{2\pi}]^{-1} \exp\left\{-\frac{[x - m_u^{(1)}(t)]^2}{2\sigma_u^2(t)}\right\}. \quad (6.4)$$

Наряду с введенными выше моментами, которые определяются через одномерную плотность вероятности, важную роль в теории случайных процессов играют смешанный момент второго порядка

$$B_u(t_1, t_2) = \langle u(t_1)u(t_2) \rangle = \iint x_1 x_2 p_u^{(2)}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (6.5)$$

и центральный смешанный момент, который в отечественной литературе именуется функцией корреляции (автокорреляции) и для процесса  $u(t)$  может быть записан как

$$\psi_u(t_1, t_2) = \langle [u(t_1) - m_u^{(1)}(t_1)][u(t_2) - m_u^{(1)}(t_2)] \rangle = B_u(t_1, t_2) - m_u^{(1)}(t_1)m_u^{(1)}(t_2). \quad (6.6)$$

При  $t_1 \neq t_2$  для нахождения  $B_u(t_1, t_2)$  и  $\psi_u(t_1, t_2)$  требуется знание двумерной плотности вероятности  $p_u^{(2)}(x_1, x_2; t_1, t_2)$ , а при  $t_1 = t_2 = t$  согласно определениям (6.5, 6.6, 6.2, 6.3)

$$B_u(t, t) = m_u^{(2)}(t), \quad \psi_u(t, t) = \sigma_u^2(t).$$

Если случайный процесс  $u(t)$  принадлежит к классу стационарных, т.е. однородных во времени, его одномерная плотность вероятности не зависит от  $t$  и, как следует из (6.1 – 6.3), среднее  $m_u^{(1)}$ , средний квадрат  $m_u^{(2)}$  и дисперсия  $\sigma_u^2$  с течением времени остаются неизменными. Двумерная плотность вероятности такого процесса зависит не от конкретных значений  $t_1$  и  $t_2$ , а является функцией сдвига времени  $\tau$ , определяемого как разность  $t_2 - t_1$ . Это же справедливо и в отношении задаваемых выражениями (6.5, 6.6) смешанных моментов, которым, учитывая сказанное, может быть придана более компактная форма:

$$B_u(\tau) = \langle uu_\tau \rangle, \quad \psi_u(\tau) = \langle (u - m_u^{(1)})(u_\tau - m_u^{(1)}) \rangle, \quad (6.7), (6.8)$$

где  $u = u(t)$ ,  $u_\tau = u(t + \tau)$ .

Одним из свойств определяемой равенством (6.8) корреляционной функции вещественного стационарного случайного процесса является ее четность:

$$\psi_u(-\tau) = \psi_u(\tau).$$

Кроме того,  $\psi_u(\tau)$  убывает с ростом  $|\tau|$ , причем как при монотонном, так и при колебательном характере убывания  $\psi_u(\tau) \rightarrow 0$  при  $|\tau| \rightarrow \infty$  [2]. В любом случае может быть найдена такая, называемая интервалом корреляции, величина  $\tau_u$ , что  $|\psi_u(\tau)|$  будет при  $|\tau| > \tau_u$  меньше некоторого условно заданного уровня. К числу важных характеристик стационарного случайного процесса относится Фурье-образ корреляционной функции

$$\tilde{S}_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_u(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (6.9)$$

Принимая во внимание четность  $\psi_u(\tau)$ , нетрудно при помощи (6.9) показать, что функция  $\tilde{S}_u(\omega)$  вещественная и четная. Привлекая дополнительные соображения, можно также убедиться в положительности  $\tilde{S}_u(\omega)$  [2]. Записывая выражение корреляционной функции  $\psi_u(\tau)$  через  $\tilde{S}_u(\omega)$  посредством интеграла Фурье

$$\psi_u(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_u(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega \quad (6.10)$$

и ограничиваясь процессами с нулевым средним ( $m_u^{(1)} = 0$ ), для которых согласно (6.7, 6.8)  $\psi_u(\tau) = B_u(\tau)$ , получим из (6.10)

$$\psi_u(0) = B_u(0) = m_u^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_u(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \int_0^{\infty} s_u(f) df. \quad (6.11)$$

Находящаяся под знаком последнего интеграла функция

$$s_u(f) = 2\tilde{S}_u(2\pi f). \quad (6.12)$$

Средний квадрат  $m_u^{(2)}$  может трактоваться как интенсивность случайного процесса  $u(t)$ . Тогда, как видно из (6.11),  $\tilde{S}_u(\omega)$  описывает распределение интенсивности процесса  $u(t)$  по частотам  $\omega$ , т.е. характеризует его спектр, и потому называется спектральной плотностью интенсивности этого случайного процесса. Функцию  $s_u(f)$ , определенную согласно (6.12) для неотрицательных частот  $f$ , называют односторонней спектральной плотностью.

## 6.2. Эквивалентные схемы LC-генераторов, учитывающие наличие внутренних шумов

С целью анализа влияния внутренних шумов на автоколебания используется эквивалентная схема (рис.29), построенная для свободного от внешних воздействий одноконтурного генератора с трансформаторной обратной связью (схема Мейснера), в котором в качестве активного элемента применен полевой транзистор. При этом предполагается, что в области частот, соответствующей рабочему диапазону генератора, можно принимать во внимание только тепловой шум резистивных элементов колебательного контура, учитываемый в эквивалентной схеме идеальным источником тока  $i_1$ , и тепловой шум, возникающий в канале ПТ и представленный на рис.29 источником  $i_2$ .

На более низких частотах проявляется фликкер-шум, который относится к разряду медленных шумов и интенсивность которого с уменьшением частоты  $f$  растет примерно как  $1/f$ . Для частот, лежащих существенно выше выбранной области, например в сверхвысокочастотном диапазоне, эквивалентная схема дополняется генератором шумового тока, который отражает наведенный шум затвора, обусловленный распределенной емкостью между каналом и затвором. Кроме названных (основных) шумов, могут быть и так называемые избыточные шумы различной при-

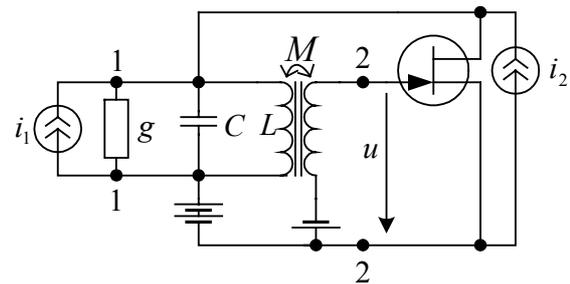


Рис.29

роды: шум генерации-рекомбинации, тепловой шум омических контактов и др. Если активным элементом автоколебательной схемы является биполярный транзистор, то к основным видам шума относится дробовой шум, сопровождающий инжекцию носителей из эмиттера в базу [2].

В соответствии принятым условием эквивалентной схемой, приведенной на рис.29, учитываются лишь тепловые шумы контура (шумовой ток  $i_1$ ) и канала ПТ (шумовой ток  $i_2$ ). Согласно формуле Найквиста спектральную плотность интенсивности стационарного процесса  $i_1(t)$  можно записать как

$$\tilde{S}_{i_1} = 2kTg,$$

либо выразить при помощи равносильной формулы для односторонней спектральной плотности

$$s_{i_1} = 4kTg,$$

где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура.

Для стационарного процесса  $i_2(t)$

$$\tilde{S}_{i_2} = 2kTg_{21}\gamma,$$

где  $g_{21}$  – проходная проводимость (крутизна характеристики) ПТ,  $\gamma \approx 2/3$  [2].

Вводя обозначение

$$i_e = i_1 + i_2,$$

можно перейти к эквивалентной шумовой схеме, совпадающей по виду с неавтономной схемой Мейснера (рис.9) и отличающейся тем, что под  $i_e(t)$  следует теперь понимать суммарный шумовой ток, т.е. стационарный случайный процесс, спектральная плотность интенсивности которого

$$N = \tilde{S}_{i_1} + \tilde{S}_{i_2}.$$

Поскольку считается, что  $\tilde{S}_{i_1}$ ,  $\tilde{S}_{i_2}$  и  $N$  при изменении частоты  $\omega$  остаются постоянными, зависимости  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  и  $i_e(t)$  соответствуют в этом приближении дельта-коррелированным случайным процессам, и корреляционная функция процесса  $i_e(t)$  может быть, в частности, записана как

$$\psi_i(\tau) = N \delta(\tau), \quad (6.13)$$

где  $\delta(\tau)$  – дельта-функция Дирака.

Схему с источником шумового тока  $i_e$  (рис.9) можно заменить изображенной на рис.30 эквивалентной схемой с шумовой ЭДС  $e$ , равной напряжению холостого хода на выходе четырехполюсника обратной связи. Для спектральной плотности интенсивности процесса  $e(t)$  справедливо выражение

$$\tilde{S}_e = |Z_{21}(j\omega)|^2 N,$$

где  $Z_{21}(j\omega) = \frac{1}{\hat{Y}(j\omega)} = \frac{K}{g + j[\omega C - 1/(\omega L)]}$  – передаточное сопротивление четырехполюсника обратной связи, содержащего резонансный контур.

При высокой добротности колебательного контура, определяемой как

$$Q = \frac{\omega_0 C}{g},$$

стационарный случайный процесс  $e(t)$  оказывается узкополосным. Поэтому при рассмотрении воздействия процесса  $i_e(t)$  на частотно-избирательную систему, расположенную между зажимами 1-1 и 2-2 (рис.9), может приниматься во внимание не весь его спектр, а лишь та часть спектра, которая относится к сравнительно узкой области частот. Если, например, ограничиться областью спектра, симметрично расположенной по обе стороны от резонансной частоты  $\omega_0$  и превосходящей по ширине примерно на порядок полосу пропускания колебательного контура, то при высокой добротности контура случайный процесс  $i_e(t)$  может трактоваться как узкополосный с отличным от нуля интервалом корреляции  $\tau_i$ . Такой процесс с ограниченным (финитным) спектром не может быть отнесен к дельта-коррелированным. Однако результат его воздействия на высокодобротный колебательный контур незначительно отличается от реакции на белый шум со спектральной плотностью  $N$ , что означает малость интервала корреляции  $\tau_i$  и позволяет там, где это не приводит к существенной погрешности, использовать для корреляционной функции  $\psi_i(\tau)$  выражение (6.13), рассматривая его как приближенное.

Учитывая, что для узкополосного случайного процесса применима модель колебания с медленно меняющимися с течением времени амплитудой и частотой [12], запишем  $i_e(t)$  в следующем виде:

$$i_e(t) = I_e(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0]. \quad (6.14)$$

Обозначая через  $\Omega(t)$  девиацию частоты, равную  $\frac{d\varphi}{dt}$ , предположим, что каждая из медленно меняющихся функций  $I_e(t)$  и  $\Omega(t)$  – это стационарный случайный процесс с нулевым средним, а  $\varphi_0$  – случайная величина, равномерно распределенная в интервале  $(0, 2\pi)$ . Основываясь на общих определениях (6.10, 6.11), приведем следующее спектральное представление для функции корреляции процесса  $\Omega(t)$ :

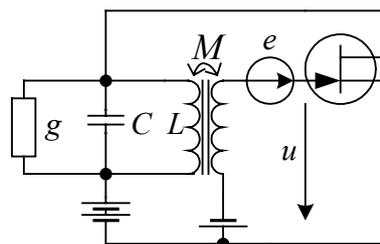


Рис.30

$$\psi_{\Omega}(\tau) = \langle \Omega \Omega_{\tau} \rangle = \int_0^{\infty} s_{\Omega}(f) \cos(2\pi f\tau) df. \quad (6.15)$$

Набег фазы за время от  $t$  до  $t + \tau$  относится к нестационарным случайным процессам и равен

$$\chi(\tau) = \varphi_{\tau} - \varphi = \int_t^{t+\tau} \Omega(t') dt'. \quad (6.16)$$

У процесса  $\chi(\tau)$ , как и у  $\Omega(t)$ , среднее равно нулю, при этом возможные значения фазового набег  $\chi$  не ограничены интервалом  $(0, 2\pi)$ .

Мы полагаем, что случайные изменения девиации частоты  $\Omega$  вызваны тепловым шумом, который обусловлен хаотическим движением огромного числа микрочастиц [12]. Поэтому в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей справедливо допущение о том, что  $\Omega(t)$  и  $\chi(\tau)$  – нормальные случайные процессы. Используя (6.4) как общее определение для одномерной плотности вероятности нормального случайного процесса, можем в данном случае записать

$$p_{\chi}(x, \tau) = [\sigma_{\chi}(\tau)\sqrt{2\pi}]^{-1} \exp\{-x^2/[2\sigma_{\chi}^2(\tau)]\}. \quad (6.17)$$

Дисперсия  $\sigma_{\chi}^2$  процесса  $\chi$  выражается при помощи (6.16) через двойной интеграл от корреляционной функции  $\psi_{\Omega}(\tau)$ :

$$\sigma_{\chi}^2(\tau) = \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t+\tau} \psi_{\Omega}(t' - t'') dt''. \quad (6.18)$$

Принимая во внимание (6.15), нетрудно преобразовать (6.18) к виду:

$$\sigma_{\chi}^2(\tau) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} s_{\Omega}(f) \frac{\sin^2(\pi f\tau)}{f^2} df. \quad (6.19)$$

Если при  $f|\tau| \leq 1$  спектральная плотность  $s_{\Omega}(f)$  незначительно отличается от  $s_{\Omega}(0)$ , то можно, пренебрегая изменением  $s_{\Omega}(f)$  при  $f > 1/|\tau|$ , вынести  $s_{\Omega}(f) \approx s_{\Omega}(0)$  из-под знака интеграла в (6.19) и в результате получить для дисперсии  $\sigma_{\chi}^2$  приближенную оценку:

$$\sigma_{\chi}^2(\tau) \approx \frac{1}{2} s_{\Omega}(0) |\tau|, \quad (6.20)$$

показывающую, что дисперсия набег  $\chi$  неограниченно нарастает при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Корреляционные функции процессов  $i_e(t)$  и  $I_e(t)$ , имеющих нулевые средние, определяются как

$$\psi_i(\tau) = \langle i_e(t) i_e(t + \tau) \rangle, \quad \psi_I(\tau) = \langle I_e(t) I_e(t + \tau) \rangle.$$

Используя (6.14) и предполагая, что  $I_e$  и  $\varphi$  в любой момент времени независимы, имеем

$$\psi_i(\tau) = \frac{1}{2} \psi_I(\tau) \left\{ \langle \cos[\omega_0 \tau + \chi(\tau)] \rangle + \langle \cos[\omega_0(2t + \tau) + \varphi_\tau + \varphi + 2\varphi_0] \rangle \right\},$$

где выражение в фигурных скобках представляется суммой двух средних по множеству реализаций. Нетрудно убедиться в том, что второе слагаемое равняется нулю, ибо для случайной фазы  $\varphi_0$ , равномерно распределенной в интервале  $(0, 2\pi)$ ,  $\langle \sin 2\varphi_0 \rangle = \langle \cos 2\varphi_0 \rangle = 0$ . Учитывая, что при одномерной плотности вероятности процесса  $\chi(\tau)$ , выражаемой согласно (6.17),

$$\langle \sin \chi(\tau) \rangle = 0, \quad \langle \cos \chi(\tau) \rangle = \exp[-\sigma_\chi^2(\tau)/2],$$

легко прийти к следующему выражению для корреляционной функции шумового тока  $i_e$ :

$$\psi_i(\tau) = \frac{1}{2} \psi_I(\tau) \exp[-\sigma_\chi^2(\tau)/2] \cos \omega_0 \tau. \quad (6.21)$$

Интервал корреляции процесса  $I_e(t)$  предполагается достаточно малым для того, чтобы при определении интервала  $\tau_i$  можно было не учитывать изменений экспоненциального и косинусоидального множителей в формуле (6.21). Иными словами, зависимость  $\psi_i(\tau)$  считается далее практически не отличающейся от  $\frac{1}{2} \psi_I(\tau)$ .

### 6.3. Укороченные уравнения схемы Мейснера с источником шумового тока

Если малый шумовой ток  $i_e$  рассматривать как узкополосный случайный процесс (6.14), то для анализа колебаний  $LC$ -генератора, эквивалентная схема которого изображена на рис.9, можно воспользоваться укороченным уравнением (2.18). Содержащаяся в этом уравнении производная суммарного адмиттанса  $Y$  по частоте вычисляется при  $\omega = \omega_0$  с учетом (3.1–3.3) и представляется для рассматриваемой схемы формулой

$$Y'_\omega = -j2C / |K| \quad (6.22)$$

Поскольку, как следует из (3.2),  $b(\omega_0) = 0$ , для суммарного адмиттанса, входящего в уравнение (2.18), в последующем используется выражение

$$Y = G = \bar{S}(U) - g / |K|. \quad (6.23)$$

Под стоящей в правой части (2.18) комплексной амплитудой  $\dot{I}_e$  понимается случайная функция

$$\dot{I}_e(t) = I_e(t) \exp[j\varphi_e(t)], \quad (6.24)$$

где согласно (6.14)  $\varphi_e(t) = \varphi(t) + \varphi_0$ .

При этом модуль  $U$  и аргумент  $\theta_u$  комплексной амплитуды  $\dot{U}$ , для которой записано уравнение (2.18), также следует рассматривать как случайные функции времени. Полагая  $\dot{U}(t) = U(t) \exp[j\theta_u(t)]$ , подставим (6.22–6.24) в (2.18), умножим получившееся соотношение на  $\exp[-j\theta_u(t)]$  и, вводя обозначения

$$\xi(t) = \operatorname{Re}\{I_e(t) \exp[j\varphi_e(t) - j\theta_u(t)]\} = I_e(t) \cos[\varphi(t) + \varphi_0 - \theta_u(t)], \quad (6.25)$$

$$\eta(t) = \operatorname{Im}\{I_e(t) \exp[j\varphi_e(t) - j\theta_u(t)]\} = I_e(t) \sin[\varphi(t) + \varphi_0 - \theta_u(t)], \quad (6.26)$$

получим после разделения вещественных и мнимых слагаемых систему двух вещественных укороченных уравнений:

$$\frac{dU}{dt} = U\bar{\beta}(U) - \frac{|K|}{2C} \xi, \quad U \frac{d\theta_u}{dt} = -\frac{|K|}{2C} \eta, \quad (6.27), (6.28)$$

где  $\bar{\beta}(U)$  – средний инкремент, определяемый согласно формуле (3.18).

Предположим, что на вид корреляционных функций процессов  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$ , как и процесса  $i_e(t)$ , в первом приближении влияет только характер случайной функции  $I_e(t)$ , т.е. вклад в  $\psi_\xi(\tau)$  и  $\psi_\eta(\tau)$  величин, образующих аргументы тригонометрических функций в (6.25, 6.26), пренебрежимо мал. В таком случае можно записать, что

$$\psi_\xi(\tau) = \psi_\eta(\tau) = \psi_i(\tau). \quad (6.29)$$

Далее используется приближение, согласно которому процесс  $i_e(t)$  может считаться дельта-коррелированным. Тогда, учитывая (6.29, 6.13), имеем

$$\psi_\xi(\tau) = \psi_\eta(\tau) = N \delta(\tau). \quad (6.30)$$

Входящая в уравнения (6.27, 6.28) амплитуда  $U$  в общем случае выражается суммой детерминированной компоненты  $A(t)$  и малой флуктуационной компоненты  $a(t)$ , имеющей нулевое среднее. Компонента  $A(t)$ , совпадающая со средним по множеству реализаций случайной функции  $U(t)$ , в установившемся режиме равняется стационарной амплитуде  $U^C$ , для отыскания которой используется уравнение (3.6).

Из укороченного уравнения (6.27) при помощи процедуры линеаризации может быть получено уравнение для малой флуктуационной компоненты  $a(t)$ , опираясь на решение которого можно, в частности, составить представление о спектре флуктуаций амплитуды автоколебаний  $LC$ -генератора [12].

#### 6.4. Флуктуации частоты и фазы автоколебаний

Далее будет предполагаться, что в установившемся автоколебательном режиме флуктуационная компонента  $a(t)$  пренебрежимо мала по сравнению с детерминированной составляющей, остающейся неизменной во времени. В последующем для мгновенного значения  $u_{\sim}$  на зажимах обмотки обратной связи (рис.9) используется выражение, подобное (6.14):

$$u_{\sim}(t) = A \cos[\omega_0 t + \theta(t) + \theta_0] \quad (6.31)$$

где для  $\frac{d\theta}{dt}$  и  $\theta_0$  считаются справедливыми предположения, аналогичные тем, что сделаны выше в отношении соответственно  $\frac{d\varphi}{dt}$  и  $\varphi_0$ , а амплитудный множитель в отличие от (6.14) равняется постоянной положительной величине.

Обозначая, как и ранее, девиацию частоты колебаний через  $\Omega$  и полагая в укороченном уравнении (6.28)  $U = A$ , имеем

$$\Omega = -\frac{|K|}{2CA} \eta. \quad (6.32)$$

При помощи (6.32, 6.30) нетрудно прийти к следующему выражению для корреляционной функции:

$$\Psi_{\Omega}(\tau) = 2D \delta(\tau), \quad (6.33)$$

где  $2D = \left(\frac{K}{2CA}\right)^2 N$  – величина, называемая коэффициентом диффузии фазы.

Если при определении  $N$  принимаются во внимание только тепловые шумы колебательного контура, имеющего добротность  $Q$ , то

$$2D = \frac{kT\omega_0^2}{4PQ}, \quad (6.34)$$

где  $P = (g/2)(A/K)^2$  – генерируемая мощность. Например, для температуры  $T$ , равной 290 К, и при частоте  $f_0 = 100$  МГц,  $P = 100$  мВт,  $Q = 50$ , основываясь на формуле (6.34), можно получить следующую оценку:  $2D/\omega_0 \approx 10^{-14}$ . Из (6.33) с учетом (6.9) вытекает, что при принятых допущениях спектр флуктуаций частоты автоколебаний оказывается равномерным:

$$\tilde{S}_{\Omega}(\omega) = 2D = \text{const}(\omega).$$

Введем для набега (ухода) фазы обозначение  $\Delta\theta$ . При нахождении среднего квадрата  $\Delta\theta$ , равного дисперсии  $\sigma_{\theta}^2$ , можно воспользоваться формулой, аналогичной (6.18):

$$\sigma_{\theta}^2(\tau) = \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'+\tau} \Psi_{\Omega}(t' - t'') dt'',$$

откуда, принимая во внимание (6.33), получим

$$\sigma_{\theta}^2(\tau) = 2D|\tau|. \quad (6.35)$$

Из последнего выражения следует, что нестационарный процесс  $\Delta\theta(\tau)$  относится, как и рассмотренный выше процесс  $\chi(\tau)$ , к так называемым диффузионным, или винеровским, случайным процессам [12]. Полагая, что случайный процесс  $\Delta\theta(\tau)$  может считаться подобно  $\chi(\tau)$  нормальным, запишем его одномерную плотность вероятности как

$$p_{\Delta\theta}(x, \tau) = [\sigma_{\theta}(\tau)\sqrt{2\pi}]^{-1} \exp\{-x^2/[2\sigma_{\theta}^2(\tau)]\}. \quad (6.36)$$

На основании (6.31, 6.35, 6.36) можно при помощи рассуждений, аналогичных тем, что применялись при выводе выражения (6.21) получить, что для процесса  $u_{\sim}(t)$

$$\Psi_u(\tau) = \frac{1}{2} A^2 \exp(-D|\tau|) \cos \omega_0 \tau. \quad (6.37)$$

### 6.5. Спектр колебания. Естественная ширина спектральной линии генератора

Вычисление в соответствии с формулой (6.9) Фурье-образа корреляционной функции  $\Psi_u(\tau)$ , заданной согласно (6.37), дает спектральную плотность интенсивности процесса  $u_{\sim}(t)$ :

$$\tilde{S}_u(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \Psi_u(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{D}{2} A^2 \left[ \frac{1}{D^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{D^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]. \quad (6.38)$$

Поскольку в реальных ситуациях  $D \ll \omega_0$ , можно для  $\omega > 0$  упростить выражение (6.38), отбросив второе слагаемое в квадратных скобках. Тогда

$$\tilde{S}_u(\omega) = \frac{1}{2} A^2 \frac{D}{D^2 + (\omega - \omega_0)^2}. \quad (6.39)$$

В итоге получается представляемая лоренцевой кривой резонансная зависимость спектра процесса  $u_{\sim}(t)$  от  $\omega$ , которую условно называют *спектральной линией* генератора. Полуширина этой чрезвычайно острой «линии», определяемая на уровне  $-3$  дБ от максимума  $\tilde{S}_u(\omega)$ , равняется  $D$ , а для величины  $2D$  принято наименование «естественная ширина спектральной линии».

Следует отметить, что в предыдущем рассмотрении основными факторами, обуславливающими шум автогенератора, считались тепловое движение носителей заряда и дробовой эффект. Среди других механизмов возникновения

флуктуаций особый интерес представляет фликкер-шум [2], спектральная интенсивность которого растет с уменьшением частоты приблизительно как  $1/f$ . На частотах  $f$  ниже некоторой граничной частоты, полагаемой равной примерно 10 кГц (хотя может оказаться и намного большее значение), данный вид шума становится преобладающим. Из-за фликкер-эффекта при уменьшении  $f$  наблюдается рост спектральной плотности интенсивности  $s_{\Omega}(f)$ , в то время как если учитывается, например, только тепловой шум,  $s_{\Omega}(f)$  не изменяется при изменении  $f$ , что видно из приведенного выше рассмотрения.

Существенное влияние на колебания автогенераторов могут оказывать факторы, связанные с техническими причинами (например, с нестабильностью напряжений питания или непостоянством температуры) и приводящие на практике к изменениям частоты, которые называются техническими уходами. Хотя немонахроматичность автоколебаний, обусловленная техническими уходами частоты, оказывается обычно значительно большей, чем при учете только тепловых и дробовых шумов, существуют способы ее снижения. Важное значение полученного выше соотношения (6.39) состоит в том, что оно позволяет оценить немонахроматичность, вызываемую принципиально неустраняемыми факторами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенный выше анализ сравнительно несложных автоколебательных и потенциально-автоколебательных систем позволяет составить представление о целом ряде классических понятий теории колебаний. К числу таких понятий относятся регенерация; мягкое и жесткое самовозбуждение; захватывание частоты генератора внешним синусоидальным сигналом, частота которого близка к собственной частоте генератора; гашение и возбуждение колебаний при асинхронном воздействии на автоколебательную и потенциально-автоколебательную системы; эффекты автомодуляции и прерывистой генерации, возможные при определенных условиях в автоколебательных системах с автоматическим смещением; конкуренция мод автогенератора с двумя степенями свободы.

Этот перечень мог бы быть дополнен упоминанием многих других эффектов. Представляет, например, интерес не рассмотренное в данном пособии явление деления частоты, которое может (при соответствующих условиях) наблюдаться в том случае, когда  $LC$ -генератор с собственной частотой  $\omega_0$  подвергается гармоническому воздействию, изменяющемуся с частотой  $\omega$ , близкой к  $n\omega_0$ , где  $n$  – целое число, большее единицы [4]. Появление при этом в спектре колебаний гармоники с частотой  $\omega/n$  вместо  $\omega_0$  трактуется как захватывание (синхронизация) субгармоникой. Возможны синхронные режимы и

при других соотношениях между частотами  $\omega$  и  $\omega_0$ . Например, могут быть обеспечены условия, при которых отношение частоты синхронизирующего источника к частоте колебаний генератора, находящегося в режиме синхронизации, выражается рациональным числом, отличным от целого.

В пособии не рассмотрены также явления взаимной синхронизации двух или большего количества автоколебательных систем [3, 11] и режимы релаксационных колебаний, возникающих в автогенераторах, которые не могут быть отнесены к числу систем, близких к линейным и консервативным. Не следует забывать также о режимах стохастических (хаотических) колебаний, реализующихся при некоторых условиях в автономных динамических системах третьего и более высоких порядков и в неавтономных системах, порядок которых не ниже двух [7, 10, 11].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
2. Зайцев Э.Ф. Флуктуационные колебания в радиофизике. – Л.: ЛГТУ, 1990. – 78 с.
3. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
4. Конторович М.И. Нелинейные колебания в радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1973. – 320 с.
5. Курокава К. Колебательные системы твердотельных СВЧ-генераторов. //Полупроводниковые приборы в схемах СВЧ// Под ред. М.Хауэса, Д. Моргана. – Мир, 1979. – С 241–299.
6. Мартынов Б.А. Теория колебаний. Математические модели динамических систем. – СПб.: СПбГПУ, 2002. – 63 с.
7. Мартынов Б.А., Бочков В.В. Введение в стохастическую динамику. – СПб.: СПбГТУ, 1998. – 92 с.
8. Мартынов Б.А., Молотков В.И. Резонансные явления в электрических цепях с нелинейными элементами. – Л.: ЛПИ, 1981. – 68 с.
9. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. – М.: Наука, 1978. – 392 с.
10. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
11. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1992. – 432 с.
12. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть I. Случайные процессы. – М.: Наука, 1976. – 496 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ .....	3
1.1. Автоколебательные и потенциально-автоколебательные системы. Генераторы резонансного типа .....	3
1.2. Средние импедансы и средние адмиттансы (средние крутизны) нелинейных двухполюсников .....	4
1.3. Средняя крутизна полевого транзистора .....	8
1.4. Средняя крутизна в случае двухчастотного режима .....	10
2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГЕНЕРАТОРОВ РЕЗОНАНСНОГО ТИПА .....	12
2.1. Уравнения установившегося режима для схем с нелинейным активным двухполюсником .....	12
2.2. Уравнения установившегося режима для схем с нелинейным активным трехполюсником .....	16
2.3. Уравнения, получаемые при помощи модифицированного метода комплексных амплитуд .....	17
3. ОДНОКОНТУРНЫЙ ТРАНЗИСТОРНЫЙ ГЕНЕРАТОР С ТРАНСФОРМАТОРНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ .....	20
3.1. Некоторые вспомогательные соотношения .....	20
3.2. Одночастотный режим в автономном одноконтурном генераторе .....	22
3.3. Резонансное воздействие источника гармонического тока на схему Мейснера .....	25
3.4. Асинхронное воздействие на схему Мейснера .....	34
4. ДВУХКОНТУРНЫЙ ГЕНЕРАТОР .....	36
4.1. Вводные замечания и вспомогательные соотношения .....	36
4.2. Предварительный анализ одночастотных режимов .....	37
4.3. Анализ двухконтурного генератора на основе двухмодового приближения .....	42
5. ТРАНЗИСТОРНЫЙ ГЕНЕРАТОР С АВТОМАТИЧЕСКИМ СМЕЩЕНИЕМ .....	46
5.1. Исходные допущения и соотношения .....	46
5.2. Зависимости компоненты $I_-$ и средней крутизны $\bar{S}$ от напряжения автоматического смещения и амплитуды колебаний .....	48
5.3. Стационарные решения укороченных уравнений. Устойчивость стационарных решений .....	50
6. ШУМЫ В ГЕНЕРАТОРАХ РЕЗОНАНСНОГО ТИПА .....	52
6.1. Предварительные замечания .....	52
6.2. Эквивалентные схемы $LC$ -генераторов, учитывающие наличие внутренних шумов .....	55
6.3. Укороченные уравнения схемы Мейснера с источником шумового тока .....	59
6.4. Флуктуации частоты и фазы автоколебаний .....	61
6.5. Спектр колебания. Естественная ширина спектральной линии генератора .....	62
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	63
ЛИТЕРАТУРА .....	64