

**Санкт-Петербургский политехнический университет  
Петра Великого  
Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций**

На правах рукописи

**Гоголева Алена Владимировна**

**Перенос быстрых частиц в условиях термоядерного синтеза**

Направление подготовки 03.06.01 «Физика и астрономия»

---

*Код и наименование*

Направленность 03.06.01\_06 «Физика плазмы»

---

*Код и наименование*

**НАУЧНЫЙ ДОКЛАД**

об основных результатах научно-квалификационной работы (диссертации)

Автор работы: Гоголева Алена  
Владимировна  
Научный руководитель: д.ф-м.н. проф.  
Рожанский Владимир Александрович

Санкт Петербург – 2018

Научно-квалификационная работа выполнена на кафедре Института физики, нанотехнологий и телекоммуникаций федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Зав. кафедрой:

*д.ф-м.н. проф.  
Рожанский Владимир  
Александрович*

Научный руководитель:

*д.ф-м.н. проф.  
Рожанский Владимир  
Александрович*

Рецензент:

*к.ф-м.н. Патров Михаил Иванович  
ФТИ А.Ф. Иоффе, научный  
сотрудник-зам.ученого секретаря*

С научным докладом можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» и на сайте Электронной библиотеки СПбПУ по адресу: <http://elib.spbstu.ru>

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность работы

Успех управляемого термоядерного синтеза непосредственно зависит от удержания заряженных частиц, которое, к сожалению, определяется не только спроектированным магнитным полем установки, но и комбинацией внешних и самогенерированных электрического и магнитного полей. Однако, существует тип частиц, удержание которых в основном определяется внешним магнитным полем – это так называемые быстрые частицы, а именно  $\alpha$ -частицы. Альфа-частицы, с одной стороны, принципиально необходимы для достижения условий термоядерного синтеза и для поддержания энергобаланса в плазме, с другой стороны, их уход на стенку реактора и накопление термолизовавшихся  $\alpha$ -частиц, именуемых «золотой», препятствуют развитию реакции и могут привести к ее срыву. Таким образом, исследование переноса быстрых частиц в условиях термоядерного синтеза является важной проблемой, разрешить которую, на сегодняшний момент в отсутствии экспериментальных данных, возможно только посредством теоретических изысканий.

Классическая схема изучения переноса быстрых частиц в термоядерной плазме включает в себя, во-первых, расчет потерь частиц по времени, во-вторых, классификацию обриту частиц, и в-третьих, оценку коэффициентов переноса. Подробно данные методы были рассмотрены с различных точек зрения как зарубежными, так и российскими учеными. С позиции топологии магнитного поля перенос быстрых частиц был изучен в следующих работах: для стеллараторов [1,2,9,10,16], с уклоном на значимость аспектного отношения [3], при подробном рассмотрении удержания запертых частиц [4], для магнитного поля токамаков [5], включая токамак-реактор ИТЕР [6,7] и предполагаемые конфигурации реакторов [8]. Так же в литературе было рассмотрено влияние различных эффектов на удержание, таких как пертурбации магнитного поля [11,12], значимость второго адиабатического инварианта [13], изучение профиля рождения частиц [14] и каналов их потерь [15]. Однако, не смотря на обширный фронт проведенных исследований, единой концепции, описывающей перенос быстрых частиц, выработать не удалось. В особенности, остается малоизученной связь между переносом частиц и магнитным полем их удерживающим. Помимо этого, требует изменений подход к рассмотрению самой динамики переноса частиц, поскольку алгоритм вычисления коэффициентов переноса не только варьируется от одного исследования к другому, но и в целом не позволяет описать все эффекты и тонкости происходящих процессов. Таким образом, насущность вышеописанной проблематики послужила толчком к дополнительному исследованию

динамики переноса быстрых частиц с новой точки зрения, не опираясь на классические методики, чем и определена актуальность данной работы.

### **Цель и задачи исследования**

Главными целями научно-квалификационной работы являются: определение динамики переноса быстрых частиц в условиях термоядерного синтеза ранее неиспользованными методами, а также, выявление зависимости между конфигурацией магнитного поля и характером переноса, присутствующим в системе, используя быстрые частицы в качестве детекторов для диагностики магнитного поля.

Для решения поставленных целей были запланированы и выполнены следующие задачи:

- разработать и адаптировать компьютерный код, способный рассчитать траектории частиц в условиях термоядерного синтеза
- провести диагностику магнитного поля по средствам оценки качества удержания быстрых частиц
- классифицировать типы полученных траекторий в зависимости от особенностей движения частиц
- ввести и обосновать применимость новой методики для качественного описания переноса
- создать количественную модель для анализа динамики переноса исходя из новой методики
- выделить тип частиц, наиболее пригодный для данного исследования, и обосновать выбор
- провести оценку полученных результатов и сделать заключение о природе и особенностях переноса быстрых частиц в условиях термоядерного синтеза.

### **Научная новизна**

Основной отличительной особенностью выполненной научно-квалификационной работы является применение новой теории для исследования природы переноса быстрых частиц в условиях горячей плазмы. Перенос  $\alpha$ -частиц был изучен, не опираясь на методику, выбранную 'по умолчанию', то есть без привязки к классической диффузионной теории. Взамен была приведена аргументированная концепция, логически охватывающая все возможные варианты развития динамики поведения частиц. Таковой является обобщенная теория переноса, которая описывается долевым уравнением переноса. Этот подход был описан в следующей литературе [17,18,19,20,21] и успешно реализован как для описания поведения частиц в модели песчаной кучи, так и для моделирования турбулентного переноса в термоядерной плазме. Вдохновившись

результатами, в особенности для турбулентного переноса, в данной научно-квалификационной работе долевая теория переноса была расширена и применена к задаче неоклассического переноса частиц, на примере метода нормированного размаха. Таким образом, было разработано новое теоретическое положение: неоклассический перенос быстрых частиц имеет недиффузионную природу. Новая теория указывает на то, что динамика поведения  $\alpha$ -частиц проходит медленнее, чем классическая диффузия, и несет так называемый суб-диффузионный характер. Полученные результаты исследований принципиально отличаются от выводов, сделанных на основании работ, ранее сформулированных в этой области управляемого термоядерного синтеза [1,2,9].

Также, в работе рассмотрены некоторые неисследованные аспекты удержания быстрых частиц, а именно показано, что  $\alpha$ -частицы могут служить детекторами для тестирования магнитного поля. Это указывает на то, что существует связь между переносом быстрых частиц и конфигурацией поля их удерживающих. Для демонстрации данного явления построена 'карта' времени удержания, которая с детальной точностью повторяет структуру магнитного поля.

Помимо основных результатов с точки зрения теории, проведенные исследования привели к нововведениям в численном методе, ранее использованном для вычисления траекторий частиц [22]. А именно, решена проблема сингулярности на магнитной оси посредством перехода в ее окрестности из координат Бузера в евклидовы координаты.

### **Теоретическая и практическая значимость**

Использование обобщенной долевой теории переноса позволило установить новую закономерность: природа неоклассического переноса быстрых частиц является суб-диффузионной. Элементарным подтверждением этому служит 'возвращающий эффект' или отражение частиц от точек поворота при движении по банановым орбитам, где радиальный дрейф 'бананов' не может быть описан как случайный процесс. Главный вывод из исследований гипотезы о недиффузионности переноса быстрых частиц – это тот факт, что банановые частицы будут уходить на стенки со скоростями гораздо меньшими, чем скорость диффузии. Такой результат может принести положительный эффект как на развитие теории удержания быстрых частиц в частности, так и на расширение границ применимости долевой теории переноса в целом.

Также, полученные результаты о связи между временем удержания быстрых частиц и особенностями структуры магнитного поля потенциально могут служить критерием при формировании магнитных конфигураций будущих установок. Существенная зависимость поведения быстрых частиц от величины магнитного поля и его производных позволяет использовать  $\alpha$ -

частицы как ‘индикаторы пригодности’ поля при моделировании термоядерного реактора.

### **Апробация работы**

Материалы научно-квалификационной работы были доложены на международной конференции “The 44<sup>th</sup> European Physics Society Conference” (Белфаст, Северная Ирландия, Великобритания, 2017). Международном семинаре “The 20<sup>th</sup> International Stellarator-Heliotron Workshop” (Грайсфальд, Германия, 2015). Международной летней школе “The 52<sup>nd</sup> Culham Plasma Physics Summer School” (Калхэм, Великобритания, 2015). Международной встрече молодых студентов “Summer Event 2015” (Гент, Бельгия, 2015). Международной встрече молодых аспирантов, организованной под эгидой организации FuseNet: “The 4<sup>th</sup> FuseNet PhD Event in Fusion Science and Engineering” (Лиссабон, Португалия 2014) и “The 5<sup>th</sup> FuseNet PhD Event in Fusion Science and Engineering” (Прага, Чешская Республика 2015).

### **Публикации**

По материалам, сопутствующим научно-квалификационной работе, было опубликовано 3 работы в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

– Pedersen, T. S. et al. ‘Confirmation of the topology of the Wendelstein 7-X magnetic field to better than 1:100,000’. Nature Commun. 7, 13493 doi: 10.1038/ncomms13493 (2016)

– I.Yu. Senichenkov et al. 2015 Nucl. Fusion 55 053012

– R.C. Wolf et al. 2017 Nucl. Fusion 57 102020

### **Представление научного доклада: основные положения**

– Быстрые частицы могут служить детекторами для тестирования магнитного поля, вследствие существования связи между конфигурацией магнитного поля и переносом быстрых частиц.

– Долевая теория переноса применима к неоклассическому переносу быстрых частиц в условиях термоядерного синтеза.

– Перенос быстрых частиц носит суб-диффузионный характер и является с негауссовым и немарковским процессом.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

### 1. Объекты, (предмет) и методы исследования

- 1.1. Введение
- 1.2. Магнитные конфигурации
- 1.3.  $\alpha$ -частицы и уравнения движения

### 2. Результаты и их обсуждение

- 2.1. Численные методы
- 2.2. Классификация частиц
- 2.3. Теория дробного переноса
- 2.4. Метод нормированного размаха

### 3. Заключение

Список литературы

## 1. Объекты, (предмет) и методы исследования

### 1.1. Введение

Данная научно-квалификационная работа сосредоточена на исследовании механизмов поведения частиц и основных физических процессов, протекающих в плазме при условиях управляемого термоядерного синтеза. В частности, работа посвящена разработке методов для характеристики переноса быстрых частиц, которые не только необходимы для достижения условий горячей плазмы, но их удержание во многом определяется внешним магнитным полем. Таким образом, целью данного исследования является обоснование связи между конфигурацией магнитного поля и видом переноса, присутствующим в системе, с использованием бесстолкновительных частиц в качестве датчиков для тестирования магнитного поля.

Данная работа выполнена при помощи численного анализа траекторий большого числа быстрых частиц для трех типов симметрии магнитного поля и для различных уровней симметрии внутри каждого типа. Полученные траектории позволяют рассчитать усредненные свойства конфигураций, включая эволюцию доли потерянных частиц и сопоставление времени удержания частиц с координатами их начальных позиций. Статистический характер переноса частиц оценен при помощи показателя Херста, который можно вычислить методом нормированного размаха (R/S анализа). Показатель Херста служит статистической мерой, которая позволяет оценить тип корреляций, присутствующий во временных рядах на различных временных масштабах, и позволяет определить носит ли перенос частиц диффузионный характер, супер-диффузионный или же суб-диффузионный.

### 1.2. Магнитные конфигурации

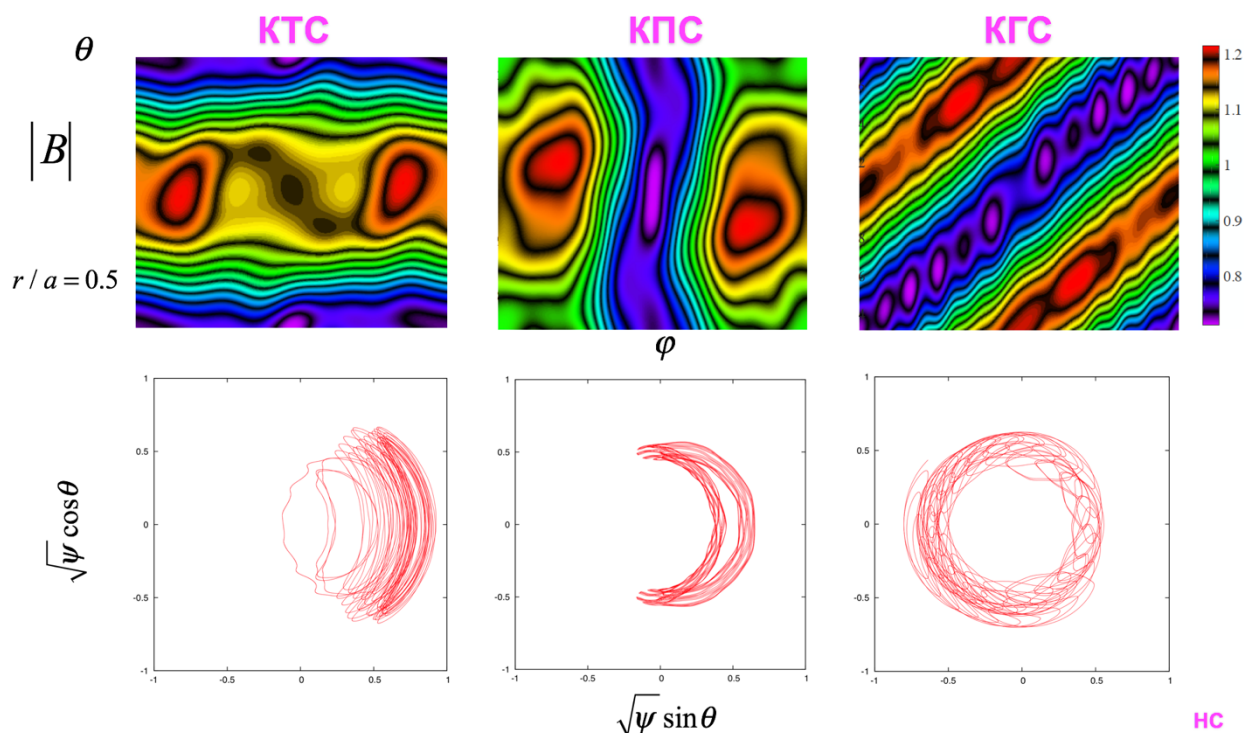
Так как удержание бесстолкновительных частиц для полностью симметричных конфигураций *идеально*, для изучения свойств переноса быстрых частиц были выбраны два различных уровня симметрии магнитного поля, которые будут обозначены префиксами низкий (Н) и высокий (В) для трех натуральных типов симметрии в тороидальной геометрии: тороидальной (Т), полоидальной (П) и геликоидальной или винтовой (Г) симметрии. Вышеперечисленные магнитные конфигурации были сконструированы в магнитных координатах Бузера [24], при помощи изменения композиции гармоник напряженности магнитного поля

$$B(\psi, \varphi, \theta) / B_0(\psi) = 1 + \sum_{m,n \neq 0} B_{mn}(\psi) \cos(m\theta - nN\varphi)$$



В то время как высокосимметричные конфигурации главным образом содержат базовые гармоники лежащей в основе симметрии ( $B_{10}$  для тороидальной симметрии,  $B_{01}$  для полоидальной симметрии и  $B_{11}$  для геликоидальной симметрии) их квази-симметричные аналоги содержат гораздо более обширный спектр и значительно более похожи на то, что может быть достигнуто с помощью реального набора катушек. Магнитуда магнитного поля в угловых координатах  $[\varphi, \theta]$  для трех конфигураций с низким уровнем симметрии, КТС, КПС и КГС, показана на *Рисунке 1* вместе с примером отдельных траекторий запертых частиц для данных конфигураций. В зависимости от структуры магнитного поля запертые частицы следуют по так называемым банановым орбитам, как в случае КТС и КПС, или как в случае КГС конфигурации – супер-банановым орбитам. Детальный анализ траекторий частиц является основным методом изучения динамики переноса в данной научно-исследовательской работе.

Для удержания быстрых частиц плазмы с определенной массой, зарядом и высокой энергией до времени термализации  $\sim 0.1$  [с] и для обоснованного использования приближения ведущих центров, рассматриваемые магнитные установки должны быть сравнимы по размерам с плазменным реактором. Таким образом выбранные для изучения конфигурации масштабированы до размеров реактора, где главным критерием был объем плазмы, который соответствует объему ИТЕРа в  $1000$  [м<sup>3</sup>].



*Рисунок 1. Верх: Магнитуда магнитного поля в  $[\varphi, \theta]$  координатах. Низ: Траектории запертых частиц в полоидальной проекции. Для КТС (слева), КПС (в центре) и КГС (справа) конфигураций с низкой симметрией.*

### 1.3. $\alpha$ -частицы и уравнения движения

Изучение особенностей переноса быстрых частиц выполнено на примере  $\alpha$ -частиц с энергией в 3.5 [МэВ], они использованы в качестве индикаторов для исследования структуры магнитного поля. Такой выбор обусловлен рядом факторов. Во-первых,  $\alpha$ -частицы являются прямым продуктом термоядерной реакции, и их удержание – это неотъемлемая часть для поддержания условий устойчивой горячей плазмы. Во-вторых, так как  $\alpha$ -частицы обладают зарядом, их поведение в основном определяется внешним удерживающим магнитным полем. В-третьих, высокие энергии быстрых частиц подразумевают, что их можно рассматривать как бесстолкновительные: они не взаимодействуют ни друг с другом, ни с основной плазмой; что позволяет им выступать в качестве идеальных индикаторов детальной структуры поля. Как следствие, они моноэнергетичны и не чувствительны к радиальному электрическому полю, они движутся только за счет наличия магнитного поля и его кривизны.

Статистический анализ переноса частиц подразумевает исследование эволюции достаточно большого набора тестируемых частиц, при этом требуется знать траекторию каждой отдельной частицы. С точки зрения математического анализа, такая задача представляет собой решение уравнений движения, где движение частиц обусловлено присутствием магнитного поля. Таким образом, уравнение для скорости ведущих центров содержит два слагаемых, первое отвечает за движение вдоль линии поля, а второе – это  $\bar{B} \times \bar{\nabla} B$  дрейф поперек магнитного поля:

$$v_g = pv \frac{\bar{B}}{B} + \frac{mv^2}{2qB^3} (1 + p^2) \bar{B} \times \bar{\nabla} B$$

где  $v = 1.3 \cdot 10^7$  [м/с] – постоянная скорость  $\alpha$ -частиц. Вместе с уравнением для питч-угла  $p$ :

$$\dot{p} = -\frac{v}{2B^2} (1 - p^2) \bar{B} \cdot \bar{\nabla} B$$

данная задача становится довольно сложной, в особенности для геометрии стелларатора. Однако, вышеуказанные уравнения движения возможно решить только численно, путем использования потоковых координат Бузера  $(\psi, \varphi, \theta)$ , в которых линии магнитного поля являются прямыми, так как дрейфовое движение частицы поперек линий поля (2<sup>й</sup> член уравнения движения ведущих центров) является медленным по сравнению с быстрым перемещением вдоль линий поля (1<sup>й</sup> член того же уравнения). Основное преимущество такого выбора координат состоит в том, что изначально комплексная система уравнений сводится к 4<sup>м</sup> обыкновенным

дифференциальным уравнениям для радиального направления и трех угловых: полоидального, тороидального и питч-угла. При этом для решения такой системы уравнений необходимо знать лишь информацию о напряженности магнитного поля и трех ее производных.

## 2. Результаты и их обсуждение

### 3.1. Численные методы

В данной работе удержание быстрых частиц рассчитано численно, при помощи интегрирования уравнений движения кодом МоСа, основанном на методе Монте-Карло [22]. Код МоСа был ранее успешно использован в рамках Международной Коллаборации по Неоклассическому Переносу в Стеллараторах [23] и зарекомендовал себя как код, способный моделировать процессы переноса для большого количества частиц в разнообразных магнитных конфигурациях.

МоСа – это написанный на Фортране параллелизованный код, вычислительная область которого представляет собой фиксированную в 3D сетку  $(\psi, \varphi, \theta)$  с размерностью  $[100 \times 360 \times 360]$ , которая позволяет детально описать структуру конфигурации. Изначально магнитное поле и его производные взяты из равновесного кода VMES, затем конвертированы под код МоСа и сохранены на точках его сетки с применением линейной интерполяции в промежутках. Поскольку код МоСа оперирует в координатах Бузера, то его расчетная область ограничена с одной стороны последней замкнутой магнитной поверхностью, иначе сепаратрисой, а с другой стороны сингулярностью на магнитной оси. В связи с этими ограничениями, частицы считаются потерянными, когда они достигают сепаратрисы. Так же, во избежание осложнений с сингулярностью, вблизи магнитной оси интегрирование орбит частиц осуществляется в псевдо-Декартовых координатах, что является нововведением к классическому численному методу. Уравнения движения решаются по методу Рунге-Кутты 4<sup>го</sup> порядка с фиксированным временным шагом.

Для каждой конфигурации одновременно запускается пакет из  $[64 \times 64 \times 64]$  частиц, которые равномерно распределены по полоидальному, тороидальному и питч углам на заданной магнитной поверхности, и их траектории рассчитываются вплоть до времени окончания моделирования  $\sim 0.1$  [с]. На *Рисунке 2 (верх)* продемонстрировано усредненное по питч-углу время удержания как функция начальной позиции на магнитной поверхности для одного периода для КТС, КПС и КГС конфигураций. На представленной карте четко различается тип симметрии, который лежит в основе каждой конфигураций. Стоит обратить внимание на тот факт, что области улучшенного удержания (обозначенные желтым цветом) соответствуют максимуму магнитного поля. При этом, согласно уравнениям

движения, радиальное смещение  $\alpha$ -частиц в основном определяется именно изменением магнитного поля по полоидальному и тороидальному углам. Этот факт, совместно с совпадением вытекающих из теории [см. Рисунок 1 верх] и рассчитанных численно результатов [см. Рисунок 2 верх], подчеркивают значимость связи между структурой магнитного поля и удержанием быстрых частиц.

## 2.1. Классификация частиц

Из анализа траекторий частиц так же была рассчитана временная эволюция потерь, см. Рисунок 2 низ. Для магнитных конфигураций с тороидальной симметрией потери составляли от 7% до 23%, для геликоидальной симметрии – от 15% до 21%, а для полоидальной симметрии – от 30% до 33%. В качестве первоначального результата можно заключить, что высокосимметричные конфигурации имеют меньшую долю потерь, чем их противоположности с низким уровнем симметрии. Как и ожидалось, повышение уровня симметрии ведет к уменьшению доли потерь.

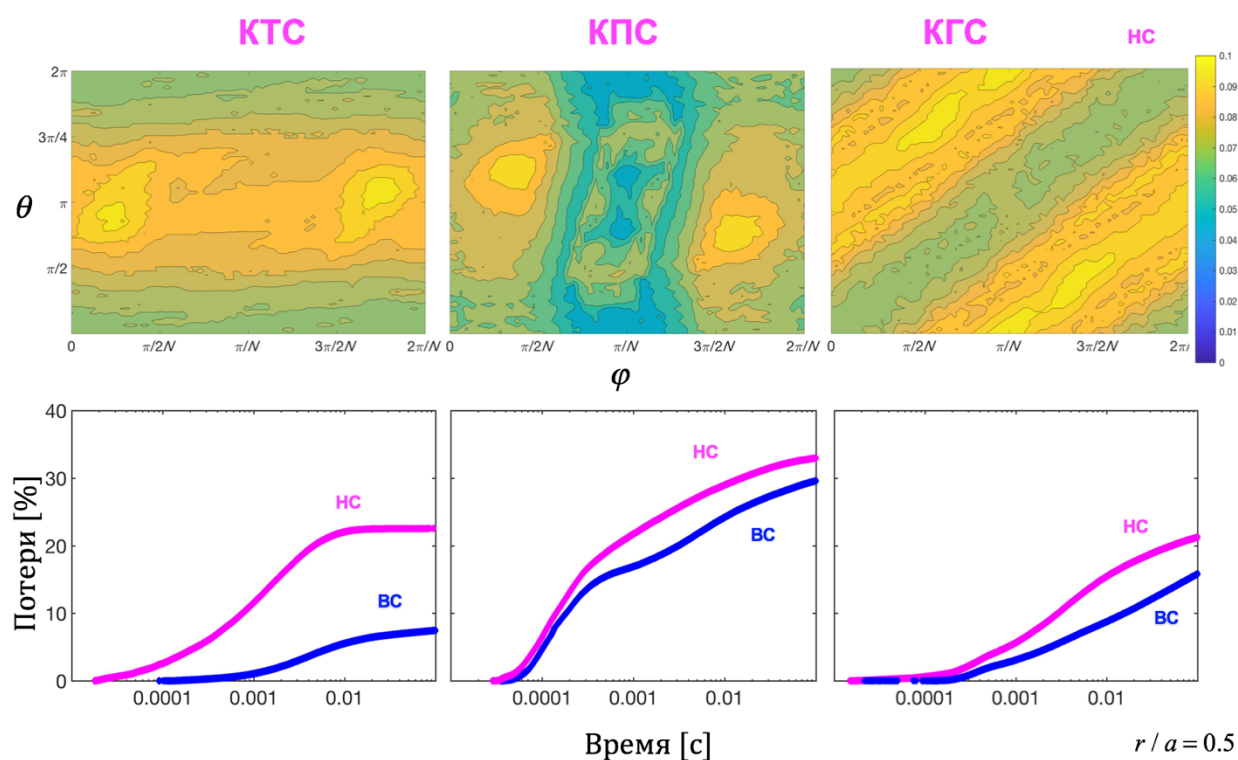


Рисунок 2. Верх: Усредненное по питч-углу время удержания как функция начальной позиции на магнитной поверхности для одного периода КТС (слева), КПС (в центре) и КГС (справа) конфигураций с низкой симметрией. Низ: Временная эволюция потерь.

Далее, независимо от типа или уровня симметрии можно выделить *три режима*. Первый, достаточно непродолжительный, при котором потерь нет. Это можно объяснить тем, что частицы, рожденные в неблагоприятных зонах с направлением движения против поля, не будут удерживаться, но при этом им требуется некоторое время для достижения сепаратрисы. Затем следует режим с постепенным увеличением доли ушедших частиц, ассоциируемый с так называемыми *быстрыми потерями*. В заключительной части можно видеть насыщение кривой, связанное с уменьшением фракции потерь. Вышеописанные этапы непосредственно связаны со структурой магнитного поля и могут быть объяснены вкладами от различных сортов частиц, где под сортами частиц подразумевается наличие вариации их орбит. Насыщение на больших временах означает, что существуют частицы, которые никогда не будут потеряны; это *пролетные частицы*, чей усредненный радиальный дрейф равен нулю. Такие частицы следуют линиям магнитного поля, отклоняясь от них лишь на незначительные расстояния в компенсирующих друг друга направлениях. Быстрые потери связаны с глубоко захваченными частицами и имеют значительные радиальные дрейфы. Потери в промежуточном режиме обусловлены *'поверхностно' запертыми частицами*, которые часто отражаются и меняют направление движения. Средние радиальные дрейфы частиц этого сорта малы по сравнению с быстрыми потерями, но пренебречь ими нельзя.

Наглядный пример таких частиц продемонстрирован на *Рисунке 1 (низ)*, где, осциллируя между точками отражения, частицы двигаются в проекции на полоидальное направление по так называемым банановым орбитам, как в случае КТС и КПС, или же траектория их движения более сложна и описывает супер-банановую орбиту, как в случае КГС. Таким образом, доля поверхностно запертых частиц является наиболее подходящей для установления детальной связи между типом и уровнем симметрии магнитного поля и радиальным переносом бесстолкновительных частиц, поскольку даже небольшие изменения магнитного поля могут привести к большим изменениям их усредненных дрейфов. Такие частицы не только относительно долго удерживаются магнитным полем и за свое существование успевают исследовать значительный объем установки, но и их поведение напрямую зависит от малейших деталей магнитного поля. В этом и заключается основная идеология выбора объекта исследования — использование быстрых частиц как индикаторов для изучения конфигураций магнитного поля. Последующая часть работы сосредоточена только на рассмотрении поверхностно запертых частиц.

Напоследок стоит отметить, что независимо от уровня симметрии соотношение между пролетными и совместно запертыми и потерянными частицами не меняется. При этом уменьшая уровень квазисимметрии, доля ушедших частиц увеличивается только за счет фракции запертых, а процент пролетных постоянен.

## 2.2. Теория дробного переноса

Центральная предельная теорема для независимых стохастических данных описывает распределение Гаусса, являющееся решением уравнения диффузии для переноса частиц:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

где  $D$  – это классический коэффициент диффузии.

Классическое уравнение диффузии описывает случайное блуждание при отсутствии корреляций, где вероятность перемещения частицы вправо или влево одинакова. В свою очередь, обобщенная центральная теорема для любых стохастических данных дает распределение Леви, происхождение которого обусловлено дробной теорией переноса. Всякий раз, когда система характеризуется наличием корреляций и отсутствием конечных характерных масштабов в пространстве и/или времени, перенос уже не может быть описан с помощью классического диффузионного уравнения. Недиффузионный перенос (в обобщенном случае, любой тип переноса) можно представить с помощью дробного уравнения переноса или уравнения переноса дробного порядка, которое выражается через интегро-дифференциальные операторы или как их еще называют – дифферинеграл:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_t^{1-\beta} \left[ K \frac{\partial^\alpha n}{\partial |x|^\alpha} \right]$$

где член  $D_t^\gamma$  представляет собой дробный оператор Римана-Лиувилля порядка  $\gamma$ ,  $K$  – это постоянная, а  $\partial^\alpha n / \partial |x|^\alpha$  – это дробная производная Риса порядка  $\alpha$ .

В представленном уравнении показатели переноса являются мерой оценки процесса, они известны как:  $\alpha \in (0,2]$  – пространственный показатель,  $\beta \in (0,1]$  – временной показатель и показатель Херста  $H = \beta/\alpha \in (0,1]$ . Рассмотрим значения и свойства каждого показателя в отдельности. Если процесс характеризуется наличием ‘памяти’, то есть любой момент во временной эволюции зависит от предшествующего, то его динамика становится немарковской с временным показателем  $\beta < 1$ . В противном случае, если в динамике переноса отсутствуют какие-либо эффекты ‘памяти’, то он является марковским с  $\beta = 1$ . Если в системе имела место пространственная корреляция, то тогда процессы там происходящие будут описаны как нелокальные и негауссовские с  $\alpha < 2$ . С другой стороны, когда динамика пространственного переноса локальна, то есть имеет место нормальное распределение Гаусса, то пространственный показатель  $\alpha = 2$ . И только если оба случая верны  $\alpha = 2$  и  $\beta = 1$ , то дробное уравнение переноса

сводится к классическому уравнению диффузии, где  $D = K$  – классический коэффициент диффузии.

Однако, в литературе чаще используется показатель Херста. Динамика переноса при  $H > 1/2$  обычно описывается как супер-диффузионная с положительной корреляцией (так называемой настойчивостью или персистентной памятью), при которой система стремится к движению в заданном направлении на каждом шаге. Если же движение происходит исключительно с неизменным трендом, то такой случай описывается термином 'идеальная настойчивость' с  $H = 1$ . Значения показателя Херста  $H < 1/2$  указывают на то, что перенос несет суб-диффузионный характер с отрицательной корреляцией (с антинастойчивостью или антиперсистентной памятью), при котором наибольшую вероятность имеет перемещение с обращением знака, то есть изменение направления на каждом шаге движения, и оно тем вероятнее, чем ближе значения  $H \rightarrow 0$ . Наконец, процесс переноса, описываемый  $H = 1/2$  соответствует диффузионному движению. При этом важно отметить, что диффузия в классическом понимании происходит только тогда, когда  $\alpha = 2$  и  $\beta = 1$ , т.е. развитие системы есть гауссова последовательность независимых нормально распределенных величин с отсутствием корреляции и памяти. Таким образом, чтобы охарактеризовать динамику процесса переноса вне рамок классического диффузионного подхода, необходимо оценить дробные показатели переноса  $H, \beta$  и  $\alpha$  вместо коэффициентов диффузии.

Стоит отметить важную деталь, о том, что динамика рассматриваемой в работе физической системы ограничена в пространстве и времени. В пространстве, на малых масштабах, она ограничена длиной радиальной корреляции, а на больших масштабах – размером системы, т.е. размером установки. А во времени, снизу она ограничена лагранжевым временем декорреляции, а сверху – или временем удержания или временем продолжительности моделирования. Такой диапазон шкал называется мезомасштабом, и показатели переноса вдоль него должны быть постоянными, только тогда их можно считать достоверными.

### 2.3. Метод нормированного размаха

В данной работе произведена оценка переноса быстрых частиц методом Лагранжа, который основан на исследовании траекторий индивидуальных частиц, где все частицы считаются независимыми. Наибольший интерес представляет собой рассмотрение процесса удержания частиц, поэтому имеет смысл оценивать показатели дробного переноса путем отслеживания скоростей частиц именно в радиальном направлении. В этом состоит оригинальность выбранного метода исследования – применение новой концепции дробной теории переноса для изучения динамики радиального дрейфа частиц. Согласно предыдущим работам по

данной тематике в области управляемого термоядерного синтеза, наиболее достоверным и подходящим методом изучения поведения переноса является метод нормированного размаха [17-20]. Именно по этой причине дальнейшая часть работы будет посвящена ему.

Метод нормированного размаха позволяет оценить показатель Херста – один из показателей долевого переноса. Метод нормированного размаха обеспечивает формирование некой  $[R/S]$  функции, которая в свою очередь меняется с приращением времени по степенной зависимости, где показатель степени равен показателю Хёрста  $H$ :  $[R/S] \sim \tau^H$ , для самоподобных сигналов. Таким образом, динамику переноса поверхностно запертых частиц можно охарактеризовать через оценку  $[R/S]$  функции, которая вычисляется для временных рядов радиальных скоростей для каждой частицы  $\{V_k, k = 1, 2 \dots N\}$ , где  $\{V_k = \Delta r_k = r_{k+1} - r_k\}$ , и затем усредняется по всем частицам. Для выполнения  $[R/S]$  анализа необходимо знать разницу между максимальным и минимальным кумулятивными значениями в выбранном диапазоне данных  $W(k, \tau) = \sum_{i=1}^k V_i - k \langle V \rangle_\tau$ , а так же дробное стандартное отклонение порядка  $s > 0$  с  $s < \alpha$ :

$$[R/S](\tau) = \frac{\max_{1 \leq k \leq \tau} W(k, \tau) - \min_{1 \leq k \leq \tau} W(k, \tau)}{(\langle V^s \rangle_\tau - \langle V \rangle_\tau^s)^{1/s}}$$

где  $\langle \cdot \rangle$  представляет собой усреднение вплоть до времени  $\tau$ . Исходя из наклона  $[R/S]$  функции от времени можно вычислить показатель Херста в каждый момент времени  $H(\tau)$ . Он удобен тем, что содержит в себе информацию о структуре системы сразу на нескольких временных масштабах:

$$H(\tau) = \frac{\tau}{[R/S](\tau)} \cdot \frac{d[R/S]}{d\tau}(\tau)$$

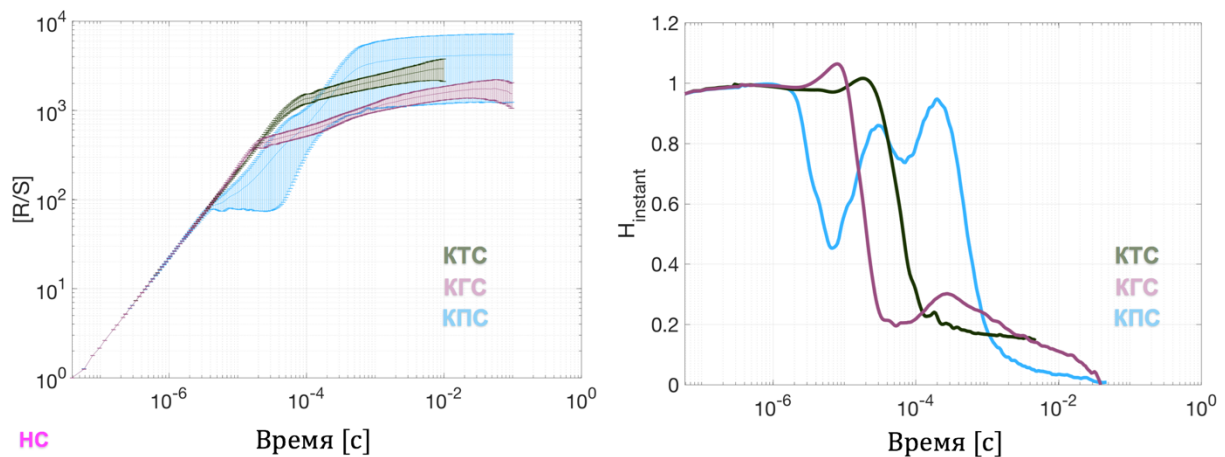
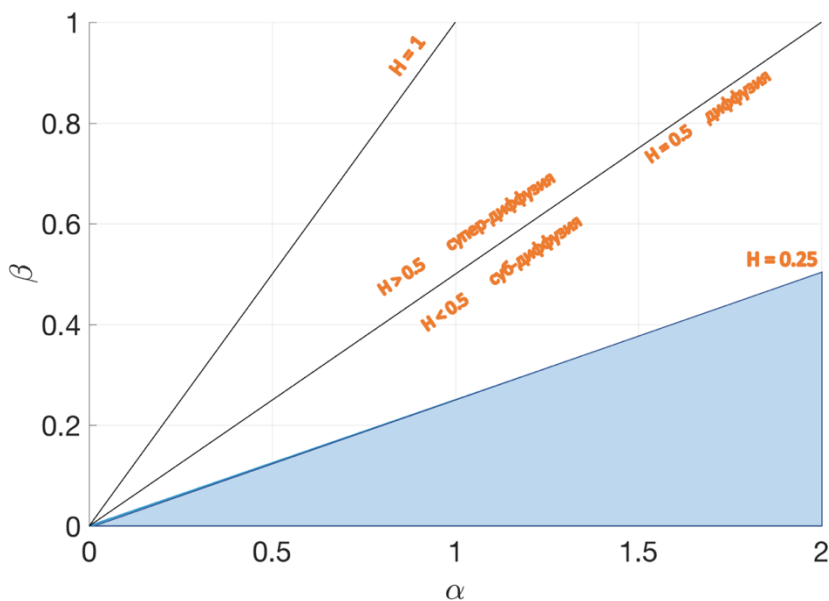


Рисунок 3. Метод нормированного размаха (слева) и показатель Херста для КТС, КПС и КГС конфигураций с низкой симметрией как функция времени.



Результаты  $[R/S]$  анализа для конфигураций с низкой симметрией представлены на *Рисунке 3*:  $[R/S]$  функция слева и показатель Херста справа. Основная форма  $[R/S]$  функции схожа вне зависимости от вида симметрии; для самого короткого временного промежутка  $[R/S] \sim \tau$ , что дает приблизительную оценку периода времени, при котором перенос можно считать баллистическим. Первое падение в  $H$  соответствует наиболее вероятному времени, которая частица проводит между двумя точками отражения, то есть временем отскока. Для тороидальной и гексоидальной симметрии  $H \in [0:0.25]$ , что говорит о преобладании суб-диффузии. В случае полоидальной симметрии существует больше чем одна типичная частота отражения, что приводит к изменениям наклона  $[R/S]$  и  $H$ , и указывает на влияние более сложных процессов, тем не менее, динамика на больших временах сводится к практически идеальной перемежаемости  $H \sim 0$ .

Для всех типов и уровней симметрий результирующий показатель Херста (на *Рисунке 4* область синего цвета) указывает на суб-диффузионную природу переноса  $H \in [0:0.25]$ , где характер процесса является негауссовым и немарковским.



*Рисунок 4. Показатель Херста как функция временного  $\beta$  и пространственного  $\alpha$  дробных показателей. Областью синего цвета охватывает все полученные показатели Херста для всех типов и уровней симметрий.*

### 3. Заключение

– Удержание быстрых частиц тем лучше, чем выше уровень симметрии магнитного поля; несмотря на это потери частиц превышают желаемые пределы вне зависимости от конфигурации.

– Траектории быстрых частиц классифицируются на три группы: пролетные, быстрые потери и поверхностно запертые; процентное соотношение между пролетными и потерянными плюс запертыми частицами остается постоянным для каждого типа симметрии.

– Поверхностно запертые частицы рождаются в областях с наибольшим значением напряженности магнитного поля, что свидетельствует о наличии прямой связи между их удержанием и структурой магнитного поля. Это позволяет использовать их в качестве критерия для тестирования конфигураций и идеальных кандидатов для исследования природы переноса.

– Механизм неклассического переноса быстрых частиц описывается теорией дробного переноса, что позволяет абстрагироваться от классического диффузионного подхода.

– Вне зависимости от типа и уровня симметрии поля перенос быстрых частиц проявляется как суб-диффузионный с показателем Херста  $H \in [0; 0.25]$ , где механизм процесса переноса является негауссовым и немарковским.

## Список литературы

- [1] W. Lotz et al Plasma Physics and Controlled Fusion, vol. 34 N 6 pp 1037 to 1052 (1992)
- [2] S. Gory et al J. Plasma Fusion Res. SERIES vol 1 (1998) 62-65
- [3] F. Alladio et al Fusion Technology vol 22 (1992)
- [4] R.J. Goldston et al Physical Review Letters vol 47, N 9 (1981)
- [5] M.H. Redi et al Nuclear Fusion vol 35 N 10 (1995)
- [6] J. Egedal et al Nucl. Fusion 45 (2005) 191-200
- [7] V. Yavorskij et al J Fusion Energ (2015) 34:774-784
- [8] O. Fisher et al Nucl. Fusion 42 (2002) 817-826
- [9] M Drevlak et al Nucl. Fusion 54 (2014) 073002 (12pp)
- [10] M Yokoyama Nuclera Fusion vol 41 N 2 (2001)
- [11] M. Khan et al J Fusion Energ (2015) 34:298-304
- [12] R. Farengo et al Plasma Phys. Control. Fusion 54 (2012) 025007 (10pp)
- [13] W.A. Cooper et al ECA vol 29C P.2.120 (2005)
- [14] M. Honda et al Nucl. Fusion 49 (2009) 035009 (10pp)
- [15] J.M. Faustin et al EuroFusion WPS2-PR(15)16
- [16] В.П. Нагорный, В.А. Яворский, монография «Теория бесстолкнительного движения высокоэнергетических альфа-частиц в стеллараторах», Киев, Институт ядерных исследований (1987)
- [17] J.A. Mier et al PRL 101, 165001 (2008)
- [18] R. Sanchez et al Physical review letters volume 90, number 18 (2003)
- [19] R. Sanchez Physics of plasma 16, 055905 (2009)
- [20] J.A. Alcuson et al Physics of plasma 23, 102308 (2016)
- [21] I. Furno et al Plasma Phys. Control. Fusion 58 (2016) 014023 (10pp)
- [22] V. Tribaldos Phys. Plasmas 8 1229 (2001)
- [23] C.D. Beidler, et al. Nucl. Fusion 51 076001 (2011)
- [24] A.H. Boozer Phys. Fluids 23 904 (1980)

**Список работ, опубликованных по теме научно-квалификационной  
работы (диссертации)  
Публикации в изданиях, рецензируемых ВАК**

- 1) Pedersen, T. S. et al. ‘Confirmation of the topology of the Wendelstein 7-X magnetic field to better than 1:100,000’. Nature Commun. 7, 13493 doi: 10.1038/ncomms13493 (2016)
- 2) I.Yu. Senichenkov et al. 2015 Nucl. Fusion 55 053012
- 3) R.C. Wolf et al. 2017 Nucl. Fusion 57 102020

**Аспирант**      Гоголева Алена Владимировна  
(подпись)

**ФИО**