

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»  
ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ПРОМЫШЛЕННО-ГРАЖДАНСКОГО И ДОРОЖНОГО СТРОИТЕЛЬСТВА

На правах рукописи

**Ненашев Валентин Сергеевич**

**ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ В  
НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ**

**научный доклад об основных результатах подготовленной научно-  
квалификационной работы (диссертации)**

Направление подготовки 08.06.01 «Техника и технологии строительства»

Научная специальность «Строительная механика»

Научный руководитель:

Лалин Владимир Владимирович,

доктор технических наук, профессор

Директор ВШПГиДС:

Лазарев Юрий Георгиевич,

доктор технических наук, профессор

Директор ИСИ:

Козинец Галина Леонидовна,

доктор технических наук, профессор

Санкт-Петербург

2020 г.

## I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** До сегодняшнего дня оценка устойчивости стержневых элементов строительных конструкций производится по аналитическим приближенным формулам, которые были созданы в XVIII – XIX веках или по эмпирическим формулам полученным из многочисленных экспериментов. Имеющиеся в литературе решения задач устойчивости внецентренно-сжатых упругих стержней используют приближенную модель Бернулли-Эйлера, не учитывающую деформации стержней на сдвиг и растяжение-сжатие, а так же не учитывают докритическое деформированное состояние стержня. Для центрально-сжатого стержня в плоской постановке В. В. Лалиным и Д. А. Кузнецовой показано, что точная постановка задачи устойчивости приводит к уточненным значениям критических нагрузок, которые могут значительно отличаться от имеющихся стандартных решений.

**Степень разработанности темы исследования.** Основателем теории устойчивости является Эйлер, который в 1744 году впервые получил формулу для критической силы упругого центрально-сжатого стержня на двух шарнирных опорах. Дальнейший значительный вклад внес Ф. С. Ясинский, который для задачи, предложенной Эйлером учел все возможные типы граничных условий и получил универсальную формулу критической силы для центрально-сжатого стержня.

Дальнейшее развитие теории устойчивости было связано с одной стороны с решением задач с другими нагрузками, а с другой стороны с попыткой учета влияния сдвига на критическую силу. Первым формулу учитывающую жесткость на сдвиг в 1895 г. предложил Ф. Энгессер. В 1940-е годы J. A. Haringx в цикле из шести статей опубликовал точные формулы для значения критической силы центрально-сжатой винтовой пружины.

Значительный вклад в теорию устойчивости пространственных задач устойчивости также внесли С. П. Тимошенко, H. Ziegler, Z. P. Bažant, N. S.

Trahair, E. L. Николаи и др. основополагающими работами по вариационным постановкам задач устойчивости являются работы А.В. Перельмутера и В.И. Сливкера, а также В. В. Болотина.

Впервые точный вариационный подход к задачам устойчивости был применен В. В. Лалиным и Д. А. Кузнецовой, которые получили точный функционал и уравнения устойчивости для плоской задачи, а также универсальную формулу для значения критической силы центрально-сжатого стержня с учетом жесткостей на сдвиг и растяжение-сжатие в плоской постановке.

Точные геометрически нелинейные постановки для стержней (geometrically exact theory) рассматривались в работах J. C. Simo, M. V. Rubin, В. В. Елисева, П. А. Жилина, В. В. Лалина.

#### **Цель и задачи исследования.**

##### *Цель исследования:*

- разработка вариационной постановки пространственной задачи устойчивости упругих стержней;
- получение решения задачи устойчивости внецентренно-сжатого стержня при произвольных значениях эксцентриситета приложения нагрузки.

##### *Задачи исследования:*

- получить функционал устойчивости упругого стержня в пространственной постановке для точной геометрически нелинейной теории;
- получить уравнения и граничные условия для задачи устойчивости упругого стержня из функционала устойчивости для пространственной задачи;
- получить асимптотическое решение нелинейных задач статики упругого стержня в пространственной постановке для случаев малого и большого эксцентриситетов приложения нагрузки;
- решить задачи устойчивости упругого стержня в пространственной постановке для случаев нулевого и бесконечно большого эксцентриситетов приложения нагрузки;

**Объектом исследования** является пространственный стержень.

**Предметом исследования** является НДС и устойчивость геометрически нелинейных пространственных стержней.

**Научная новизна исследования** заключается в следующем:

1. Получен функционал устойчивости упругого стержня в пространственной постановке для точной геометрически нелинейной теории;
2. Получены уравнения и граничные условия для задачи устойчивости упругого стержня из функционала устойчивости для пространственной задачи;
3. Получено асимптотическое решение нелинейных задач статики упругого стержня в пространственной постановке для случаев малого и большого эксцентриситетов приложения нагрузки;
4. Решена задача устойчивости упругого стержня в пространственной постановке для случаев нулевого и бесконечно большого эксцентриситетов приложения нагрузки;
5. Получено асимптотическое решение задач устойчивости упругого стержня в пространственной постановке для случаев малого и большого эксцентриситетов приложения нагрузки.

**Теоретическая и практическая значимость.** В работе впервые получен функционал устойчивости упругого стержня в пространственной постановке для точной геометрически нелинейной теории. Получены точные решения задач устойчивости, которые доведены до простых формул, позволяющих в ряде случаев уточнить значения критических нагрузок. Простота этих формул позволяет рекомендовать их для использования в практике проектирования и в нормативных документах.

Полученные в рамках работы вариационные постановки и формулы могут быть использованы как при непосредственной оценке стержневых элементов существующих и реконструируемых конструкций, так и при разработке численных решений задач устойчивости стержневых систем и внедрения в программные комплексы.

**Методология и методы исследования.** В данной работе для решения задачи устойчивости применяется пространственная модель стержня, учитывающая все виды деформации (растяжение, сдвиг, изгиб и кручение) и соответственно учитывающая все шесть жесткостей. Стержень в такой модели представляет собой одномерную кривую с распределенными по ней жесткостями, а каждая его точка обладает тремя вращательными и тремя трансляционными степенями свободы. Такую модель принято называть стержень Рейсснера-Симо или «геометрически точная теория стержня».

В данной работе была применена вариационная постановка задачи устойчивости, которая сформулирована как поиск точки минимума функционала типа Лагранжа. Функционал устойчивости равен второй вариации функционала Лагранжа, а в свою очередь уравнения устойчивости это уравнения Эйлера для функционала устойчивости.

**Основные научные положения, выносимые на защиту:**

- функционал вариационной постановки пространственной задачи устойчивости упругих стержней;
- дифференциальные уравнения и граничные условия пространственной задачи устойчивости упругих стержней;
- асимптотические решения нелинейных задач статики упругого стержня в пространственной постановке для случаев малого и большого эксцентриситетов приложения нагрузки;
- точные решения задач устойчивости упругого стержня в пространственной постановке для случаев нулевого и бесконечно большого эксцентриситетов приложения нагрузки;

**Достоверность** данной работы формируется на базе применения стандартного математического аппарата и основ вариационного исчисления. При применении упрощенной модели, учитывающей только деформации стержня на изгиб, из полученных точных пространственных уравнений устойчивости и формулы для определения критической силы при чистом

изгибе консоли получаются классические уравнения устойчивости и классическая для этого случая формула критического момента.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты работы докладывались на 5 конференциях:

- Пленарный доклад «Точная постановка и решение задачи устойчивости плоской формы равновесия упругого стержня» на VIII Международной научной конференции «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения») (Москва, 27 марта 2019 г.);

- Доклад «Вариационный подход к задачам устойчивости упругих стержней: точные постановки, аналитические и численные решения» на научно-практической конференции с международным участием «Инженерные системы – 2019» (Москва, 3 апреля 2019 г.);

- Доклад «Вариационные постановки нелинейных задач статики и устойчивости внецентренно сжатого стержня Бернулли–Эйлера» в сборнике докладов XXI Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2019) (Алушта, 27 июня 2019 г.);

- Доклад «Точное решение задачи устойчивости стержня, изгибаемого потенциальным следящим моментом» на научной конференции с международным участием XLVII «Неделе науки СПбПУ» (18-23 ноября 2019 г.);

- Доклад «Асимптотическое решение задачи устойчивости стержня, изгибаемого потенциальным следящим моментом» на научной конференции с международным участием XLVII «Неделе науки СПбПУ» (18-23 ноября 2019 г.);

- Доклад «Решение задачи устойчивости стержня, изгибаемого потенциальным следящим моментом в точной и сильно-линеаризованной постановке» на научной конференции с международным участием XLVII «Неделе науки СПбПУ» (18-23 ноября 2019 г.);

- Доклад «Buckling of cantilever beam loaded by potential following moment» на научной конференции Scientific Conference on Energy, Enviromental and Construction Engineering (EECE – 2019): Lecture Notes in Civil Engineering (19-20 November 2019).

## II. ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

### Введение

Во введении обосновывается актуальность темы, формулируются основные цели и определяются исследовательские задачи, приводятся основные защищаемые положения, научная новизна и практическая значимость.

### Глава 1. Вариационная постановка пространственной задачи устойчивости упругих стержней

В вариационной постановке применяется пространственная модель стержня, учитывающая все виды деформации и все шесть жесткостей. Стержень в такой модели представляет собой одномерную кривую с распределенными по ней жесткостями, а каждая его точка обладает тремя вращательными и тремя трансляционными степенями свободы.

Вариационная постановка пространственной задачи устойчивости, сформулирована как поиск точки минимума функционала типа Лагранжа. Функционал устойчивости равен второй вариации функционала типа Лагранжа, а уравнения устойчивости уравнения Эйлера для функционала устойчивости.

Введем функционал Лагранжа:

$$L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi}) = \int_0^L (W - U_1 - U_2) ds,$$

где  $W$  – энергия деформации упругого стержня;  $L$  – длина стержня в ОК (отсчетной конфигурации),  $U_2$  – потенциал моментной нагрузки,  $U_1$  – потенциал силовой нагрузки.

Для нахождения функционала устойчивости необходимо сосчитать вторую вариацию функционала Лагранжа:

$$\delta^2 L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) = \Phi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$$

Таким образом функционал устойчивости для пространственных упругих стержней получен:

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) = & \int_0^L \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{u}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{A}_1 \cdot (\mathbf{u}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta}) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})' \cdot \mathbf{C}_1 \cdot (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})' + \right. \\
& \left. + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \left( \mathbf{u}' \times \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta}) \times \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \mathbf{r}' \times \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\theta} \right) + \right. \\
& \left. + \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \left( \frac{1}{2} (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})' \times \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\theta})' \right) \right] ds - \\
& - \frac{1}{2} \left( \mathbf{u} \cdot \frac{\partial^2 U_1}{\partial \mathbf{r}^2} \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\partial^2 U_1}{\partial \mathbf{r}^2} \cdot \boldsymbol{\theta} \right) \Big|_{s=L}, \tag{1}
\end{aligned}$$

где  $\mathbf{P}$  – тензор поворота;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор;  $\mathbf{Z}$  – тензор Жилина;  $\mathbf{Q}$  – вектор сил;  $\mathbf{M}$  – вектор моментов;  $\mathbf{A} = EA\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + k_yGA\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + k_zGA\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{C} = Gl\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + El_y\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + El_z\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$  – тензоры упругости в физических уравнениях для сил и моментов;  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\theta}$  – неизвестные функции.

Уравнения устойчивости – это уравнения Эйлера для функционала устойчивости. То есть для их нахождения необходимо сосчитать вариацию функционала устойчивости и из условия  $\delta\Phi = 0$  найти следующие шесть уравнений, разделяющиеся на две группы:

$$[\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{u}' + \mathbf{r}' \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})) - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})]' = 0 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})' - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{M}) \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})]' + \mathbf{u}' \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) + \mathbf{r}' \times \\
& \times [\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{u}' + \mathbf{r}' \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})) - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})] = 0 \tag{3}
\end{aligned}$$

Так же из функционала устойчивости получаются шесть естественных граничных условий:

$$[\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{u}' + \mathbf{r}' \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})) - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})]' = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \mathbf{r}^2} \cdot \mathbf{u} \tag{4}$$

$$[\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})' - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{M}) \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})] \cdot \mathbf{Z} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial \boldsymbol{\varphi}^2} \cdot \boldsymbol{\theta} \tag{5}$$

Таким образом решение задачи устойчивости получается при подстановке решения задачи статики в уравнения устойчивости, решения уравнений устойчивости, подстановке решений в граничные условия задачи устойчивости и нахождения условий, при которых эта система может иметь ненулевое решение. Это условие и есть значение критической нагрузки.

В зависимости от того какое решение статики применяется можно выделить три постановки задачи устойчивости:

- Точная постановка. При такой постановке в уравнения устойчивости подставляют точное геометрически нелинейное решение задачи статики;
- Линеаризованная постановка. В данной подстановке применяются решения линейной задачи статики;
- Сильно линеаризованная постановка. При такой постановке в уравнения устойчивости подставляют статически допустимое решение (при нулевых перемещениях и деформациях).

## Глава 2. Точные решения пространственных задач устойчивости упругих стержней

### 2.1 Точное решение задачи устойчивости консольного стержня при чистом изгибе

В данном параграфе приводится решение пространственной задачи устойчивости для консоли, к которой приложен изгибающий вокруг оси  $z$  потенциальный момент (рис. 1).

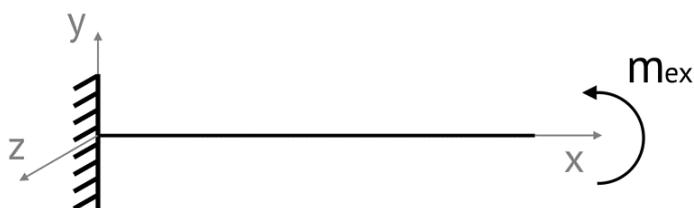


Рис. 1. Расчетная схема консольного стержня

Геометрические нелинейные уравнения статики для «геометрически точной теории»:

$$\begin{cases} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{F})' = 0 \\ (\mathbf{P} \cdot \mathbf{M})' + \mathbf{r}' \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}) = 0 \\ \begin{cases} \mathbf{M} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{Z}^T \cdot \boldsymbol{\varphi}' \\ \mathbf{F} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0') \end{cases} \end{cases} \quad (6)$$

где  $\mathbf{r}_0$  – начальный радиус вектор;  $\boldsymbol{\varphi}$  – вектор поворота.

Граничные условия для случая консоли с изгибающим вокруг оси z потенциальным моментом:

$$\begin{aligned} \underline{s=0}: & \quad \mathbf{r} = 0; \boldsymbol{\varphi} = 0 \\ \underline{s=L}: & \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{F} = 0; \mathbf{P} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M}_{ex} \end{aligned} \quad (7)$$

В данной задаче внешний потенциальный момент равен  $\mathbf{M}_{ex} = M \cdot \frac{1}{|\boldsymbol{\varphi}|} \boldsymbol{\varphi}$ , где  $|\boldsymbol{\varphi}|$  – модуль вектора поворота,  $M$  – модуль вектора внешнего момента.

Этот момент является потенциальным следящим моментом с потенциалом равным  $U = M|\boldsymbol{\varphi}|$ .

Для данной задачи точное решение геометрически нелинейной задачи статики имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} \frac{EI_z}{M} \sin \frac{Ms}{EI_z} \\ \frac{EI_z}{M} \left(1 - \cos \frac{Ms}{EI_z}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Ms}{EI_z} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{Ms}{EI_z} & -\sin \frac{Ms}{EI_z} & 0 \\ \sin \frac{Ms}{EI_z} & \cos \frac{Ms}{EI_z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $s$  – координата точек стержня в отсчетной конфигурации,  $EI_z$  – жесткость стержня изгиб вокруг оси z.

Обычно в уравнения устойчивости подставляют линейные решения задачи статики и получают приближенные решения задачи устойчивости. Но

точное решение задачи устойчивости получается, если точное решение нелинейной статической задачи подставить в уравнение устойчивости.

Затем решение задачи устойчивости подставляют в граничные условия и находят условие при котором система имеет нетривиальные (ненулевые) решения. В нашем случае консоли нагруженной потенциальным следящим моментом граничные условия задачи устойчивости имеют следующий вид:

$$\underline{s = 0}: \mathbf{u} = 0; \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\theta} = 0 \quad (10)$$

$$\underline{s = L}: \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{u}' + \mathbf{r}' \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})) - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}) \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta}) = 0 \quad (11)$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})' - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{M}) \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \frac{k_{3z}}{L} \boldsymbol{\theta} \quad (12)$$

При подстановке решения задачи статики (8) в систему (2, 3) она распадается на две системы:

1) систему, содержащую  $u, v, \theta_3$  – неизвестные задачи устойчивости, представляющие собой перемещения в плоскости деформации в задаче статики;

2) систему, содержащую  $w, \theta_1, \theta_2$  – неизвестные задачи устойчивости, представляющие собой перемещения из плоскости деформации в задаче статики (см. рис. 2);

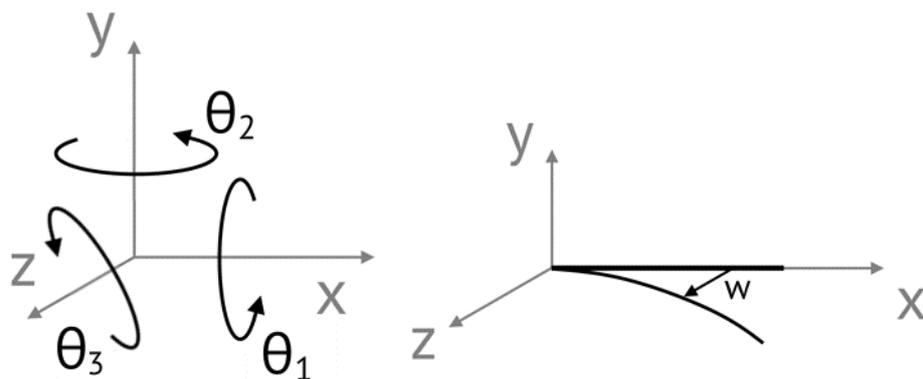


Рис. 2. Неизвестные задачи устойчивости

Первая система с учетом граничных условий (11) имеет вид:

$$\begin{cases} u' + \theta_3 \sin \Phi = 0 \\ v' + \theta_3 \cos \Phi = 0 \\ \theta_3'' = 0 \end{cases} \quad (13)$$

С учетом оставшихся граничных условий система (13) ненулевых решений не имеет. Следовательно, стержень нагруженный потенциальным следящим моментом не имеет форм потери устойчивости в плоскости.

Вторая система с учетом граничных условий (11) имеет вид:

$$\begin{cases} [(k_t \cos^2 \Phi + k_{3y} \sin^2 \Phi)\psi_1' + (k_t - k_{3y}) \sin \Phi \cos \Phi \psi_2' + M\psi_2]' = 0 \\ [(k_t - k_{3y}) \sin \Phi \cos \Phi \psi_1' + (k_t \sin^2 \Phi + k_{3y} \cos^2 \Phi)\psi_2' - M\psi_1]' = 0 \\ [k_{2z}(w' - \psi_1 \sin \Phi + \psi_2 \cos \Phi)]' = 0 \end{cases} \quad (14)$$

где:

$$\psi_1 = \frac{1}{\Phi} [\theta_1 \sin \Phi - \theta_2(1 - \cos \Phi)];$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\Phi} [\theta_1(1 - \cos \Phi) - \theta_2 \sin \Phi];$$

$$\Phi = \frac{Ms}{k_{3z}},$$

Также используются следующие обозначения для жесткостей стержня, которые используются для решения данной задачи:

$$k_t = GI; \quad k_{3y} = EI_y; \quad k_{3z} = EI_z; \quad k_{2z} = kGA,$$

где  $k_t$  – крутильная жесткость;  $k_{3y}$ ,  $k_{3z}$  – изгибные жесткости;  $k_{2z}$  – жесткость на сдвиг.

При решении системы уравнений устойчивости второго порядка (14) задача распадается на три случая:

1)  $k_{3z} < k_{3y}$  (изгибная жесткость вокруг оси  $z$  меньше чем изгибная жесткость вокруг оси  $y$ );

2)  $k_{3z} = k_{3y} = k_3$  (изгибная жесткость вокруг оси  $z$  равна изгибной жесткости вокруг оси  $y$ );

3)  $k_{3z} > k_{3y}$  (изгибная жесткость вокруг оси  $y$  меньше чем изгибная жесткость вокруг оси  $z$ ).

В первом случае (когда жесткость при изгибе относительно оси  $y$  больше, чем жесткость при изгибе вокруг оси  $z$ ), точное решение системы (14) имеет вид:

$$\psi_1 = C_1 \left( \cosh \mu \cos \Phi + \sqrt{\frac{b}{a}} \sinh \mu \sin \Phi \right) - C_2 \left( \cosh \mu \sin \Phi + \sqrt{\frac{a}{b}} \sinh \mu \cos \Phi \right) - \frac{B_2}{M}; \quad (15)$$

$$\psi_2 = C_1 \left( \cosh \mu \sin \Phi - \sqrt{\frac{b}{a}} \sinh \mu \cos \Phi \right) + C_2 \left( \cosh \mu \cos \Phi - \sqrt{\frac{a}{b}} \sinh \mu \sin \Phi \right) + \frac{B_1}{M}$$

где  $\mu = Ms\sqrt{ab}$ ;  $a = \frac{1}{k_t} - \frac{1}{k_{3z}}$ ;  $b = \frac{1}{k_{3z}} - \frac{1}{k_{3y}}$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  – произвольные постоянные.

При подстановке решения (15) в граничные условия (10) и (12) получаем систему относительно произвольных постоянных  $C_1$ ,  $C_2$ . Эта система имеет ненулевое решение при условии:

$$\cosh \mu L = 1$$

из которого следует, что решения задачи устойчивости нет и консоль устойчивости не теряет.

Во втором случае (когда жесткость при изгибе по оси  $y$  равна жесткости при изгибе по оси  $z$ ), точное решение системы (14) имеет вид:

$$\psi_1 = C_1 \cos \Phi - C_2 (\sin \Phi + Mas \cos \Phi) - \frac{B_2}{M}; \quad (16)$$

$$\psi_2 = C_1 \sin \Phi + C_2 (\cos \Phi - Mas \sin \Phi) + \frac{B_1}{M},$$

где  $a = \frac{1}{k_t} - \frac{1}{k_3}$ ;  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  – произвольные константы.

При подстановке решения (16) в граничные условия (10) и (12) получаем систему относительно произвольных постоянных  $C_1, C_2$ . Вторая константа равна нулю и решением этой системы является:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= C_1(\cos \Phi - 1); \\ \psi_2 &= C_1 \sin \Phi;\end{aligned}\tag{17}$$

Следовательно, система всегда имеет решение, а стержень при любом ненулевом моменте находится в состоянии нейтрального равновесия или в состоянии безразличного равновесия.

И наконец рассматривается третий классический случай, когда изгибная жесткость вокруг оси  $z$  больше изгибной жесткости вокруг оси  $y$ .

В этом случае получается следующее точное решение системы дифференциальных уравнений второго порядка устойчивости из плоскости (14):

$$\begin{aligned}\psi_1 &= C_1 \left( \cos \mu \cos \Phi - \sqrt{\frac{b}{a}} \sin \mu \sin \Phi \right) \\ &\quad - C_2 \left( \cos \mu \sin \Phi + \sqrt{\frac{a}{b}} \sin \mu \cos \Phi \right) - \frac{B_2}{M}; \\ \psi_2 &= C_1 \left( \cos \mu \sin \Phi + \sqrt{\frac{b}{a}} \sin \mu \cos \Phi \right) \\ &\quad + C_2 \left( \cos \mu \cos \Phi - \sqrt{\frac{a}{b}} \sin \mu \sin \Phi \right) + \frac{B_2}{M};\end{aligned}\tag{18}$$

где  $\mu = Ms\sqrt{ab}$ ;  $a = \frac{1}{k_t} - \frac{1}{k_{3z}}$ ;  $b = \frac{1}{k_{3y}} - \frac{1}{k_{3z}}$ ,  $C_1, C_2, B_1, B_2$  – произвольные константы.

Подставляя решения задачи устойчивости (18) в граничные условия (10) и (12), необходимо потребовать существование ненулевого решения задачи устойчивости, то есть равенства нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} \cos \mu L \cos \varphi L - \sqrt{\frac{b}{a}} \sin \mu L \sin \varphi L - \cos \varphi L & -\cos \mu L \sin \varphi L - \sqrt{\frac{a}{b}} \sin \mu L \cos \varphi L + \sin \varphi L \\ \cos \mu L \sin \varphi L - \sqrt{\frac{b}{a}} \sin \mu L \cos \varphi L - \sin \varphi L & \cos \mu L \cos \varphi L - \sqrt{\frac{a}{b}} \sin \mu L \sin \varphi L - \cos \varphi L \end{vmatrix} = 0$$

Равенство нулю определителя сводится к следующему алгебраическому уравнению:

$$\cos \mu L = 1$$

Критический момент для данной задачи является минимальным положительным решением уравнения:

$$M_{cr} = \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{GI} - \frac{1}{EI_z}\right) \left(\frac{1}{EI_y} - \frac{1}{EI_z}\right)}} \quad (19)$$

Данная формула является точной формулой для значения критического момента для консоли, нагруженной концевым изгибающим потенциальным моментом с учётом всех жесткостей стержня.

Если мы примем, что  $EI_z$  стремится к бесконечности, то из уравнения (8) мы получим результат, который совпадает с классическими результатами, полученными, исходя из применения приближенной модели Бернулли-Эйлера, которая не учитывает деформации стержней на сдвиг и растяжение-сжатие и, а так же из-за отсутствия учета докритического деформированного состояния стержня:

$$M_{cr} = \frac{2\pi}{L} \sqrt{GI \cdot EI_y} \quad (20)$$

## 2.2 Точное решение задачи устойчивости консольного стержня при центральном сжатии

В данном параграфе получено решение задачи устойчивости центрально-сжатой консоли в пространственной постановке (рис. 3).

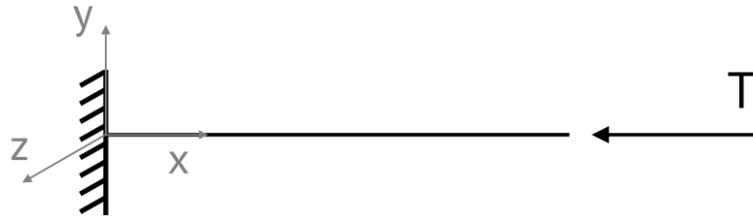


Рис. 3. Расчетная схема консольного стержня с силой

Решение задачи устойчивости для случая центрально-сжатого пространственного упругого стержня проводится по аналогичному алгоритму.

Решение нелинейной задачи статики (6) с учетом граничных условий представляют собой:

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} 1 - \frac{T}{k_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Z} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

При их подстановке в уравнения устойчивости полученные из функционала (2), (3), аналогично случаю чистого изгиба, получается два случая и система по входящим в неё неизвестным распадается на две:

- 1) систему, содержащую  $v, \theta_3$  – неизвестные задачи устойчивости, представляющие собой перемещения в плоскости деформации в задаче статики;
- 2) систему, содержащую  $w, \theta_2$  – неизвестные задачи устойчивости, представляющие собой перемещения из плоскости деформации в задаче статики;

Обе системы решаются аналогично и имеют нетривиальное нулевое решение.

Первая система с учетом части граничных условий, в которую входят только неизвестные для задачи устойчивости перемещения в плоскости деформации представляет собой:

$$\begin{cases} v' = \mu_3 \theta_3 + \frac{B_2}{k_{2y}} \\ \theta_3'' + \frac{T}{k_{3z}} v' + \frac{1}{k_{3z}} \left(1 - \frac{T}{k_1}\right) B_2 = 0 \end{cases} \quad (22)$$

где  $\mu_3 = 1 - \frac{T}{k_1} + \frac{T}{k_{2y}}$

Эта система сводится к одному уравнению второго порядка относительно  $\theta_3$ :

$$\theta_3'' + \frac{T\mu_3}{k_{3z}} \theta_3 = -\frac{\mu_3 B_2}{k_{3z}} \quad (23)$$

Вторая система с учетом части граничных условий, в которую входят только неизвестные для задачи устойчивости перемещения из плоскости деформации представляет собой:

$$\begin{cases} w' = -\mu_2 \theta_2 + \frac{B_3}{k_{2z}} \\ \theta_2'' - \frac{T}{k_{3y}} w' - \frac{1}{k_{3y}} \left(1 - \frac{T}{k_1}\right) B_3 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

где  $\mu_2 = 1 - \frac{T}{k_1} + \frac{T}{k_{2z}}$

Эта система сводится к одному уравнению второго порядка относительно  $\theta_2$ :

$$\theta_2'' + \frac{T\mu_2}{k_{3y}} \theta_2 = \frac{\mu_2 B_3}{k_{3y}} \quad (25)$$

Подставляя решения дифференциальных уравнений (23) и (25) в главные и естественные граничные условия (4, 5) задачи устойчивости и находя условие наличия ненулевого решения, получаем формулы для двух значений критической силы:

$$T_{cr} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\pi^2 k_{3z}}{L^2} \left(\frac{1}{k_{2y}} - \frac{1}{k_1}\right)} - 1}{2 \left(\frac{1}{k_{2y}} - \frac{1}{k_1}\right)} \quad (26)$$

$$T_{cr} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\pi^2 k_{3y}}{L^2} \left( \frac{1}{k_{2z}} - \frac{1}{k_1} \right)} - 1}{2 \left( \frac{1}{k_{2z}} - \frac{1}{k_1} \right)} \quad (27)$$

В качестве критической силы необходимо принимать ту, которая из двух является наименьшей.

### Глава 3. Асимптотические решения пространственной задачи устойчивости упругих стержней

#### 3.1 Асимптотическое решение задачи устойчивости консоли при чистом изгибе в сильно линеаризованной постановке

В данном параграфе проводится сравнение между разными постановками задачи устойчивости: точной и сильно-линеаризованной.

Если в уравнения (2, 3) подставить статически допустимое решение задачи статики (то есть решение задачи статики для балки Бернулли-Эйлера) и при этом перемещения и повороты считать равными нулю, получается сильно линеаризованная постановка задачи устойчивости.

Статически допустимое решение имеет вид:

$$\mathbf{r} = 0; \quad \boldsymbol{\varphi} = 0; \quad \mathbf{P} = \mathbf{I}; \quad \mathbf{Z} = \mathbf{I}; \quad \mathbf{Q} = 0; \quad \mathbf{M} = M\mathbf{k} \quad (28)$$

Для того чтобы решить задачу устойчивости достаточно решить только уравнение (3). Один раз проинтегрировав и воспользовавшись граничными условиями, можно получить следующее уравнение:

$$\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\theta}' - \mathbf{M} \times \boldsymbol{\theta} = \mathbf{B}, \quad (29)$$

Ненулевое решение из трех уравнений (29) имеют только два, в которые входят неизвестные  $\theta_1$  и  $\theta_2$ :

$$\begin{cases} \theta_1' + \frac{M}{k_{кр}} \theta_2 = \frac{B_1}{k_{кр}} \\ \theta_2' - \frac{M}{k_{3y}} \theta_1 = \frac{B_2}{k_{3y}} \end{cases} \quad (30)$$

Таким образом решение системы (30) имеет вид:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cdot \sin \frac{Ms}{\sqrt{k_{кр} \cdot k_{3y}}} + C_2 \cdot \cos \frac{Ms}{\sqrt{k_{кр} \cdot k_{3y}}} - B_2 \cdot \frac{1}{M} \\ -C_1 \cdot \sqrt{\frac{k_{кр}}{k_{3y}}} \cdot \cos \frac{Ms}{\sqrt{k_{кр} \cdot k_{3y}}} + C_2 \cdot \sqrt{\frac{k_{кр}}{k_{3y}}} \cdot \sin \frac{Ms}{\sqrt{k_{кр} \cdot k_{3y}}} + B_1 \cdot \frac{1}{M} \end{pmatrix} \quad (31)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные.

Подставляя статически допустимое решение задачи статики в граничные условия, получаем:

$$\underline{s=0}: \boldsymbol{\theta} = 0; \underline{s=L}: \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\theta}' - \mathbf{M} \times \boldsymbol{\theta} = \frac{k_{3z}}{L} \boldsymbol{\theta}(L) \quad (32)$$

При подстановке решения (31) в граничные условия (32) и требуя наличия ненулевого решения получаем следующее условия существования такого решения в виде уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{ML}{k_{3z}} \left( 1 + \frac{k_{кр}}{k_{3y}} \right) \cdot \sin \frac{ML}{\sqrt{k_{кр} \cdot k_{3y}}} + \\ & + 2 \sqrt{\frac{k_{кр}}{k_{3y}}} \cdot \left( \cos \frac{ML}{\sqrt{k_{кр} \cdot k_{3y}}} - 1 \right) - \sqrt{\frac{k_{кр}}{k_{3y}}} \left( \frac{ML}{k_{3z}} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Минимальное положительное решение этого уравнения и будет являться критическим моментом для задачи устойчивости консоли при чистом изгибе в сильно линеаризованной постановке.

Так как уравнение (33) является трансцендентным, то решение невозможно найти в виде точной аналитической функции. Однако, применяя асимптотический метод решения, можно получить приближенную аналитическую формулу, так как для сечений стандартных стержней  $\frac{k_{кр}}{k_{3z}}$  и  $\frac{k_{3y}}{k_{3z}}$  являются достаточно малыми величинами.

Для того чтобы решить уравнения (33) асимптотическим методом необходимо сначала обезразмерить переменные, которые в него входят:

$$x \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot (1 + d^2) \cdot \sin x + 2d \cdot (\cos x - 1) - d \cdot x^2 \cdot \varepsilon_1^2 \cdot \varepsilon_2^2 = 0, \quad (34)$$

$$\text{где } x = \frac{ML}{\sqrt{k_{кр} \cdot k_{3y}}}; d = \sqrt{\frac{k_{кр}}{k_{3y}}}; \varepsilon_1 = \sqrt{\frac{k_{кр}}{k_{3z}}}; \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{k_{3y}}{k_{3z}}}.$$

В данном уравнение (34), как было сказано выше,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  можно считать малыми параметрами. В таком случае асимптотическое решение будет строится в виде разложения по одному из параметров.

Наименьшее значение неизвестного  $x$  в таком случае получится равным:

$$x = 2\pi + 2\pi \cdot d \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + 2\pi \cdot d^2 \cdot \varepsilon_1^2 \cdot \varepsilon_2^2 = 2\pi(1 + d \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + d^2 \cdot \varepsilon_1^2 \cdot \varepsilon_2^2) \quad (35)$$

Делая обратную подстановку и возвращаясь к размерным величинам можно получить окончательное значение для критического момента:

$$M_{кр} = \frac{2\pi}{L} \sqrt{k_{кр} k_{3y}} \left( 1 + \frac{k_{кр}}{k_{3z}} + \left( \frac{k_{кр}}{k_{3z}} \right)^2 \right) \quad (35)$$

Сравнивая графики асимптотического решения данной задачи, численного, а также точного решения (рис. 4) можно сделать вывод, о том что полученное асимптотическое решение задачи устойчивости в сильно линеаризованной постановке можно применять для оценки устойчивости стержней для соотношения параметров поперечного сечения  $h/b \geq 2$  с погрешностью менее 10%.

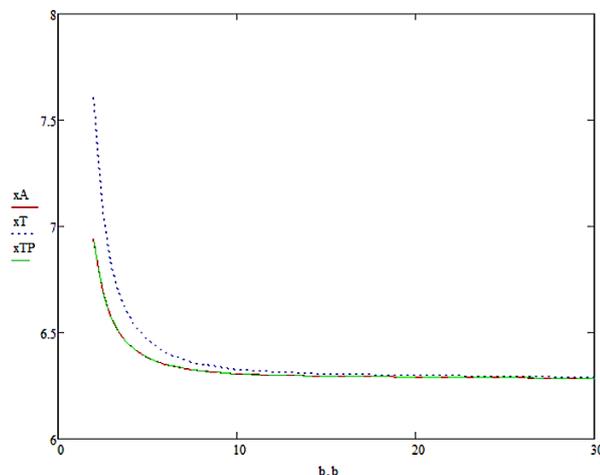


Рис. 4. Сравнение трех решений задачи о чистом изгибе консоли

### 3.2 Асимптотическое решение задачи статики в случае малого и большого значения эксцентриситетов

Рассмотрим задачу о внецентренном сжатии консоли, рассматривая внецентренно приложенную силу как две нагрузки – силу и момент (рис. 5).

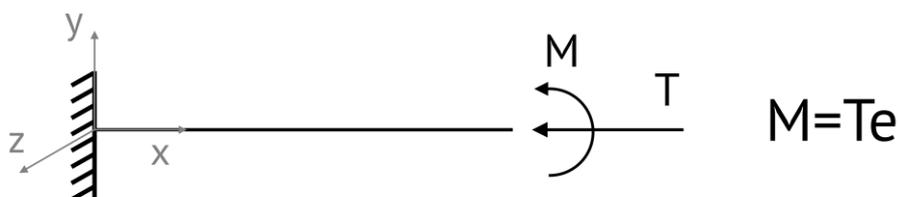


Рис. 5. Расчетная схема внецентренно сжатой консоли

В данной задаче можно рассматривать два случая:

- Случай, когда  $e \rightarrow 0$ , то есть случай «малого эксцентриситета».

Тогда внешний момент стремится к нулю, а сила имеет конечное значение;

- Случай, когда  $e \rightarrow \infty$ , то есть случай «бесконечно большого эксцентриситета». Тогда внешний момент имеет конечное значение, а сила стремится к нулю;

Для решения задачи устойчивости внецентренно-сжатого консольного стержня необходимо решить задачу статики. При этом достаточно найти только производные от координат  $x'$ ,  $y'$  и угол  $\varphi$ .

Сначала рассмотрим случай «малого эксцентриситета».

Используя следующее обозначения для безразмерных величин  $t \equiv T\left(\frac{1}{k_2^*} - \frac{1}{k_1^*}\right)$ , значения  $x'$ ,  $y'$  равно:

$$x'_s = \cos\varphi - t \cdot \left(\sin^2\varphi + \frac{t}{\frac{k_1^*}{k_2^*} - 1}\right) \quad (36)$$

$$y'_s = \sin\varphi + t \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

Для нахождения значения угла поворота были применены следующие безразмерные обозначения:

$$m = \frac{M}{L} \cdot \left( \frac{1}{k_2^*} - \frac{1}{k_1^*} \right); \quad k_3 = \frac{k_3^*}{L^2} \cdot \left( \frac{1}{k_2^*} - \frac{1}{k_1^*} \right) \quad (37)$$

Окончательно уравнение для нахождения значения угла поворота получается следующим:

$$k_3 \cdot \varphi''_s + t \cdot \sin \varphi + t^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0 \quad (38)$$

Граничные условия в безразмерном виде представляют из себя:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ k_3 \cdot \varphi'_s(1) &= t \cdot \alpha \end{aligned} \quad (39)$$

Разложим по малому параметру:  $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \cdot \alpha + \varphi_2 \cdot \alpha^2 + \dots$

Окончательно угол поворота до второй поправки будет равен:

$$\varphi = \frac{t}{\sqrt{k_3} \cdot \sqrt{t^2 + t}} \cdot \frac{1}{\cos \lambda} \cdot \sin \lambda s \cdot \alpha + \dots \quad (40)$$

Затем рассмотрим случай «бесконечно большого эксцентриситета».

Решив системы уравнений, получаем следующие результаты.

- для нулевого приближения,  $\beta^0$ :

$$\left\{ \begin{aligned} n_0 &= 0 \\ q_0 &= 0 \\ m_0 &= l \\ x_0 &= \frac{k_3}{l} \sin \varphi_0 \\ y_0 &= \frac{k_3}{l} (1 - \cos \varphi_0) \\ \varphi_0 &= \frac{sl}{k_3} \end{aligned} \right. \quad (41)$$

- для первого приближения,  $\beta^1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l}
n_1 = -l \cos \varphi_0 \\
q_1 = l \sin \varphi_0 \\
m_1 = k_3 \left( \cos \varphi_0 - \cos \frac{l}{k_3} \right) \\
x_1 = \left( \frac{k_3}{l} + \frac{l}{k_2} - \frac{l}{k_1} \right) \left( \frac{k_3}{4l} \sin 2\varphi_0 - \frac{s}{2} \right) - \frac{sl}{k_1} + \\
+ \left( \frac{k_3}{l} \right)^2 \cos \frac{l}{k_3} \left( \sin \varphi_0 - \frac{sl}{k_3} \cos \varphi_0 \right) \\
y_1 = \frac{k_3}{4l} \left( \frac{k_3}{l} + \frac{l}{k_2} - \frac{l}{k_1} \right) (1 - \cos 2\varphi_0) + \\
+ \left( \frac{k_3}{l} \right)^2 \cos \frac{l}{k_3} \left( 1 - \frac{sl}{k_3} \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \right) \\
\varphi_1 = \frac{k_3}{l} \sin \varphi_0 - s \cos \frac{l}{k_3}
\end{array} \right. \quad (42)$$

- для второго приближения,  $\beta^2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l}
n_2 = k_3 \sin^2 \varphi_0 - sl \sin \varphi_0 \cos \frac{l}{k_3} \\
q_2 = \frac{1}{2} k_3 \sin 2\varphi_0 - sl \cos \varphi_0 \cos \frac{l}{k_3} \\
m_2 = \frac{k_3}{4} \left( \frac{k_3}{l} + \frac{l}{k_2} - \frac{l}{k_1} \right) \left( \cos 2\varphi_0 - \cos 2 \frac{l}{k_3} \right) + \\
+ \frac{k_3^2}{l} \cos \frac{l}{k_3} \left( \frac{l}{k_3} \left( s \sin \varphi_0 - \sin \frac{l}{k_3} \right) - \cos \varphi_0 + \cos \frac{l}{k_3} \right) \\
\varphi_2 = \frac{k_3}{8} \left( \frac{k_3}{l^2} + \frac{k_3}{k_2} - \frac{k_3}{k_1} \right) \sin 2\varphi_0 + \\
+ \frac{k_3}{l} \cos \frac{l}{k_3} \left( \frac{k_3}{l} \sin \varphi_0 - s \cos \varphi_0 - \cos \frac{l}{k_3} \right)
\end{array} \right. \quad (43)$$

### III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Полученные формулы для значения критической нагрузки в случае чистого изгиба в точной и сильно линейризованной постановке, а также для центрального сжатия в пространственной постановке могут быть использованы в инженерной практике оценки устойчивости стержневых конструкций;

2. Функционал устойчивости, полученный в данной работе может быть в дальнейшем использован для применения в алгоритмах численного моделирования стержневых систем методом конечных элементов, то есть для получения новых матриц геометрической жесткости с учетом всех жесткостей стержня;

3. Асимптотическое решение задачи о чистом изгибе консоли в сильно линейризованной постановке позволяет оценить степень погрешности таких постановок в сравнение с точной для задач где точного решения геометрически нелинейной задачи статики не существует;

4. Асимптотические решения задачи статики для случая внецентренно-сжатой консоли позволяют решить задачу устойчивости для двух крайних случаев с дальнейшей аппроксимацией на средние значения с помощью стандартного математического аппарата.

#### IV. СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин, В.В. О вариационных принципах теории упругой устойчивости / В.В. Болотин // Проблемы механики деформируемого твердого тела. – Л.: Судостроение. – 1970. – С. 83–88.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
3. Жилин, П.А. Прикладная механика. Теория упругих тонких стержней / П.А. Жилин. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2007. – 102 с.
4. Лалин В. В., Розин Л.А., Кушова Д.А. Вариационная постановка плоской задачи геометрически нелинейного деформирования и устойчивости упругих стержней // Инженерно-строительный журнал. – 2013. – №1 (36). – С. 87–96.
5. Перельмутер, А.В. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Т.1 / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010. – 704 с.
6. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем / Пер. с англ. И.К. Снитко. – 2-е изд. – М.: Гостехиздат, 1955. – 568 с.
7. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций / Пер. с англ. М.И. Рейтмана; Под ред. Г.С. Шапиро. – М.: Мир, 1971. – 192 с.
8. Simo J.C., Vu-Quoc L., A three-dimensional finite strain rod model, Part II: Computer aspects, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1986; 58; P. 79–116.
9. W. T. Koiter's *Elastic Stability of Solids and Structures* / ed. Arnold M. A. van der Heijden. – NY: Cambridge University Press, 2008. – 240 p.

## **V. ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ**

1. Лалин В.В., Ненашев В.С., Уtimiшева Я.Г. Точное решение задачи устойчивости стержня, изгибаемого потенциальным следящим моментом // Неделя науки СПбПУ: материалы научной конференции с международным участием (18-23 ноября 2019 г.). Ч.2. Инженерно-строительный институт. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2019. – С. 162-164.

2. Лалин В.В., Ненашев В.С., Уtimiшева Я.Г. Асимптотическое решение задачи устойчивости стержня, изгибаемого потенциальным следящим моментом // Неделя науки СПбПУ: материалы научной конференции с международным участием (18-23 ноября 2019 г.). Ч.2. Инженерно-строительный институт. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2019. – С. 159-161.

3. Лалин В.В., Ненашев В.С., Уtimiшева Я.Г. Решение задачи устойчивости стержня, изгибаемого потенциальным следящим моментом в точной и сильно-линеаризованной постановке // Неделя науки СПбПУ: материалы научной конференции с международным участием (18-23 ноября 2019 г.). Лучшие доклады. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2019. – С. 41-45.

4. Лалин В.В., Ненашев В.С., Лалина И.И. Вариационные постановки нелинейных задач статики и устойчивости внецентренно сжатого стержня Бернулли–Эйлера // Материалы XXI международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2019) – М. : Изд-во МАИ, 2019. – С. 291-292.

5. Buckling of cantilever beam loaded by potential following moment / Lalin V.V. [et al.] // Lecture Notes in Civil Engineering. – 2020. – V. 70. – P. 643-652