

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Инженерно-строительный институт

Высшая школа промышленно-гражданского и дорожного строительства

на правах рукописи

ЛЕ Ты Куанг Чунг

**МЕТОД СТАТИЧЕСКОГО УЧЕТА ВЫСШИХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ В
ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ КОНСТРУКЦИЙ**

НАУЧНЫЙ ДОКЛАД

по основным результатам научно- квалификационной работы (диссертации)

Направление подготовки 08.06.01 Техника и технологии строительства

Код и наименование

Специальность 05.23.17 Строительная механика

Код и наименование

Санкт-Петербург

2020

Научно-квалификационная работа выполнена в Высшей школе промышленно-гражданского и дорожного строительства. Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Директор ВШ:

*Лазарев Юрий Георгиевич
Д.т.н, профессор ВШПГиДС*

Научный руководитель:

*Лалин Владимир Владимирович
Д.т.н, профессор ВШПГиДС*

Рецензенты:

*Рыбаков Владимир Александрович
К.т.н, доцент ВШПГиДС*

*Яваров Александр Валерьевич
К.т.н, доцент ВШПГиДС*

*Смирнов Михаил Станиславович
К.т.н, доцент, начальник группы
строительного отдела АО
«АТОМПРОЕКТ»*

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации. Динамические расчеты для сложных конструкций, которые имеют большие расчетные схемы со многими степенями свободы требуют больших вычислительных затрат. Время счета даже на мощных компьютерах может составлять более 10 часов. Поэтому разработка методов динамических расчетов, которые позволяют уменьшить вычислительные затраты и сохранить точность результатов является актуальной задачей.

Степень разработанности темы исследования. Существует несколько методов приближенного учета высших форм колебаний. Эти методы разработаны для решения задач от сейсмических воздействий. Для других видов динамических нагрузок применение этих методов не разработано. Существует метод статического учета высших форм колебаний для задач модального анализа, то есть определения собственных частот и форм колебаний при аналитическом решении задач. Однако, для решения задач о вынужденных колебаниях этот метод не разработан.

Известен способ учета высших форм колебаний в виде метода матрицы остаточной податливости. Однако, прямое использование этого метода не возможно на существующих программных комплексах и требует написания дополнительной программы.

Цели исследования: разработать метод учета вклада высших форм колебаний для решения задач динамики конструкций при произвольных динамических воздействиях. Разработать такую форму реализации этого метода, которая ориентирована на применение существующих программных комплексов и не требует написания и использования дополнительных подпрограмм.

Задачи исследования.

1. Разработать методику (алгоритм) учета высших форм колебаний.
2. Оценить точность метода при аналитическом решении тестовых задач.
3. Разработать способ решения статических задач в виде разложения по собственным формам колебаний при использовании программных комплексов.
4. Разработать методику применения предложенного способа для различных видов динамических воздействий.
5. Решение практической задачи.

Объект исследования. Строительные конструкции при динамических воздействиях

Предмет исследования. Метод решения задач динамики конструкций.

Научная новизна диссертационной работы:

1. Разработан метод учета вклада высших форм колебаний
2. Проведена оценка точности метода при аналитическом решении тестовых задач

3. Разработан способ решения статических задач в виде разложения по собственным формам колебаний при использовании программных комплексов

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач в диссертации использовались методы математического моделирования, строительной механики, динамики сооружений. Результаты исследований сопоставлялись с опубликованными результатами расчетов других авторов.

Теоретическая значимость диссертационной работы. Метод статического учета высших форм колебаний распространён на задачи динамики конструкций при любых динамических воздействиях.

Практическая значимость диссертационной работы. Метод позволяет уменьшить вычислительные затраты при сохранении точности результатов, при этом возможно использование существующих программных комплексов.

Положения, выносимые на защиту:

1. Метод учета вклада высших форм колебаний
2. Оценка точности метода на примерах тестовых задач
3. Способ решения статических задач в виде разложения по собственным формам колебаний при использовании программных комплексов.

Достоверность и апробация результатов работы

1. XLVIII Конференции «Неделя науки СПбПУ» с 18-23 ноября 2019 г.;
2. Международной конференции «Энергетика, экология и строительство (ЕЕСЕ-2019)». Санкт–Петербург 19-20 ноября 2019 г.;
3. Научном семинаре, посвященного 110-летию доктора технических наук, профессора Олега Александровича Савинова. Санкт–Петербург 03-06 февраля 2020 г.;

ГЛАВА 1. ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДИК ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА СООРУЖЕНИЙ

Традиционно при динамическом расчете строительных конструкций учитываются только несколько первых форм собственных колебаний, поскольку вклад этих конкретных членов в смещения и внутренние силы является основным. Остальные формы учесть достаточно сложно, так как ресурсы вычислительных устройств ограничены, а также нет необходимости включать в расчет более высокие формы с низкой энергетической ценностью. Этот факт подтверждают многочисленные исследования, например, в работах Лалина В.В., Уздина А.М., Белаша Т.А., Бирбраера А.Н., Цейтлина Б.В., Зегжда С.А., Rubin S..

Необходимость учета высших форм может возникнуть, например, при расчете конструкции на сейсмическую нагрузку. В работах Тяпина А.Г., Бирбраера А.Н., Зегжда С.А. было проведено

исследование колебаний строительной конструкции и сделан вывод, что с увеличением частоты более жесткие и (или) менее тяжелые части системы будут включены в колебательный процесс, соответствующий высшим формам, при этом отдельные части конструкции могут быть исключены из движения. Все это приводит к разрушению элементов и, как следствие, всей системы в целом.

В реальных условиях проектирования, когда идет постоянное внесение изменений в проект, редактирование схемы расчета и ее пересчет могут занять значительное количество времени и ресурсов. Поэтому возникают важные и актуальные вопросы об уменьшении количества форм, учитываемых при расчете, без потери точности результата, а также вклад отброшенных форм в локальные высокочастотные колебания отдельных элементов. Таким образом, работа Бирбраер А.Н. посвящен анализу точности определения реакции конструкции на динамическое воздействие с учетом ограниченного количества режимов. В работе Петрова Т.Ю также отмечается, что пренебрежение трением внутри системы и пренебрежение высшими модами колебаний неизбежно приводит к неверному значению критической силы, которая оказывается заниженной. В результате работы Джинчвелашвили Г.А. и Булушев С.В. доказана важность высших режимов вибрации и необходимость анализа их влияния на отклик системы.

ГЛАВА 2. МЕТОД СТАТИЧЕСКОГО УЧЕТА ВЫСШИХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ КОНСТРУКЦИЙ

2.1. Постановка задачи о вынужденных колебаниях

Пусть строительная конструкция совершает вынужденные колебания. Уравнение движения любой системы можно записать в следующем виде:

$$\rho \ddot{u} = L(u) + p(x, t) \quad (2.1.1)$$

Далее будем рассматривать поперечные колебания системы, поскольку именно они представляют больший интерес при изгибе строительных конструкций. Рассмотрим систему в виде простой балки (см. Рисунок 2.1.1).

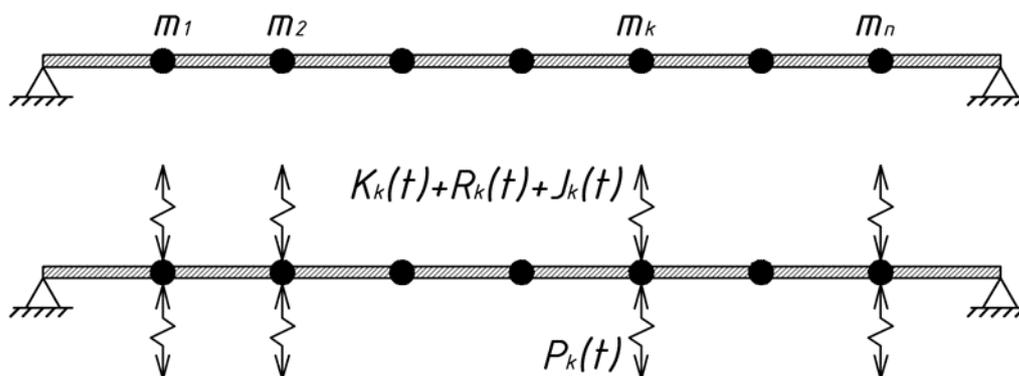


Рисунок 2.1.1. Расчетная схема балки

Используем принцип Д'Аламбера для записи уравнения движения вынужденных затухающих колебаний балки с n степенями свободы в матричном виде:

$$[M][\ddot{U}] + [R][\dot{U}] + [K][U] = [P] \quad (2.1.2)$$

2.2. Решение динамической задачи методом разложения в ряд по формам колебаний

Наиболее распространенным подходом к решению полученного уравнения движения (2.1.2) является метод разложения по собственным формам колебаний. Искомое перемещение в таком случае ищется в виде:

$$[U] = \sum_{i=1}^n [U_i] = \sum_{i=1}^n [\bar{U}_i] \cdot \Phi_i(t) \quad (2.2.1)$$

Итак, выражение (2.2.1) подставляется в уравнение движения (2.1.2), выполняются математические преобразования, в результате чего получаем следующее уравнение для i -той формы:

$$\ddot{\Phi}_i(t) + 2\varepsilon_i \dot{\Phi}_i(t) + \omega_i^2 \Phi_i(t) = H_i(t) \quad (2.2.2)$$

Будем считать, что внешние нагрузки действуют синхронно и синфазно:

$$[P] = [P_0] \cdot f(t) \quad (2.2.3)$$

Тогда коэффициент разложения вектора нагрузки $H_i(t)$ можно записать:

$$H_i(t) = \frac{[\bar{U}_i]^T [P_0]}{[\bar{U}_i]^T [M] [\bar{U}_i]} \cdot f(t) = \eta_i \cdot f(t) \quad (2.2.4)$$

Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (2.2.2) есть сумма общего решения однородного $\Phi_{i0}(t)$ и частного решения неоднородного уравнения $\Phi_{ip}(t)$. Будем считать, что вынужденные колебания установились, переходный процесс закончился, а значит, начальные условия можно считать нулевыми. Таким образом, общее решение однородного уравнения становится тождественно равным нулю при нулевых начальных условиях:

$$\Phi_i(t) = \Phi_{i0}(t) + \Phi_{ip}(t) = \Phi_{ip}(t) \quad (2.2.5)$$

Для поиска частного решения при произвольной нагрузке используют интеграл Дюамеля, в результате чего получаем решение в виде:

$$\Phi_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \eta_i f(\tau) e^{-\varepsilon_i(t-\tau)} \sin \omega_i(t-\tau) d\tau = \frac{\eta_i}{\omega_i^2} \beta_i(t) \quad (2.2.6)$$

где $\beta_i(t)$ – коэффициент динамичности для i -той формы колебаний.

Таким образом, искомое перемещение получаем, подставив (2.2.6) в (2.2.1):

$$[U] = \sum_{i=1}^n [\bar{U}_i] \frac{\eta_i}{\omega_i^2} \beta_i(t) = \sum_{i=1}^n [\bar{U}_{CTi}] \beta_i(t) \quad (2.2.7)$$

Однако, как уже было сказано ранее, решать задачу, учитывая все n собственных форм колебаний – очень трудоемкий и сложный процесс. Поэтому в формулах (2.2.1), (2.2.7), можно подойти к решению данной задачи другим способом: принять в формуле **Error! Reference source**

not found. небольшое число слагаемых $N(N \ll n)$, а остальную часть (высшие моды колебаний) учесть в расчете статически.

2.3. Решение статической задачи методом разложения в ряд по формам колебаний

Пусть на систему действует сила P_{CT} , тогда дифференциальное уравнение равновесия имеет вид:

$$L(u) + P_{CT} = 0 \quad (2.3.1)$$

Рассмотрим также статический прогиб простой шарнирно-опертой балки (см. Рисунок 2.3.1). Для системы с тем же числом степеней свободы можно записать уравнение равновесия в матричном виде:

$$[K][U] = [P] \quad (2.3.2)$$

здесь $[P]$ вектор-столбец статической нагрузки;

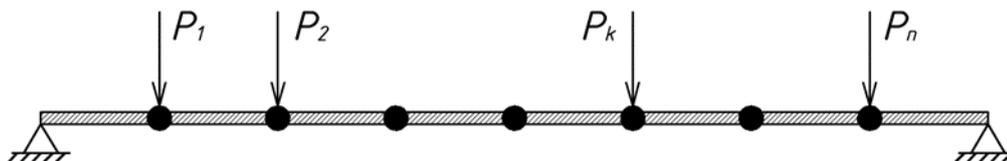


Рисунок 2.3.1. Статическая задача

Искать решение такой задачи будем методом разложения в ряд по формам колебаний в виде:

$$[U_{CT}] = \sum_{i=1}^n [U_{CTi}] = \sum_{i=1}^n [\bar{U}_i] A_{CTi} \quad (2.3.3)$$

где $[U_{CT}]$ – точное решение статической задачи; A_{CTi} – амплитудное значение при i -той форме колебаний.

2.4. Решение задачи динамики с учетом вклада высших форм

Решение динамической задачи выполняется по формулам (2.2.1) или (2.2.7) при небольшом числе учитываемых первых форм N (где $N \ll n$) собственных колебаний, то есть:

$$[U_N] = \sum_{i=1}^N [U_i] = \sum_{i=1}^N [\bar{U}_i] \Phi_i(t) \quad (2.4.1)$$

Далее решаются две вспомогательные статические задачи, одна из которых – поиск точного решения $[U_{CT}]$. Следующим шагом решается ещё одна вспомогательная статическая задача, но с помощью метода спектрального разложения в ряд по формам собственных колебаний по формуле (2.3.3) при тех же N формах:

$$[U_{CTN}] = \sum_{i=1}^N [U_{CTi}] = \sum_{i=1}^N [\bar{U}_i] A_{CTi} \quad (2.4.2)$$

Разница между полученными точным статическим решением $[U_{CT}]$ и решением при использовании разложения в ряд $[U_{CTN}]$ является статическим вкладом высших форм

собственных колебаний, показывает решение статической задачи, соответствующее спектру старших частот и форм собственных колебаний. Добавив данную статический вклад к решению динамической задачи по формуле (2.4.1), можно получить окончательное решение по рассматриваемому в данной исследовательской работе подходу (см. Рисунок 2.4.1):

$$[U] = [U_N] + ([U_{CT}] - [U_{CTN}])$$

$$[U] = \sum_{i=1}^N [\bar{U}_i] \Phi_i(t) + ([U_{CT}] - \sum_{i=1}^N [\bar{U}_i] A_{CTi}) \quad (2.4.3)$$

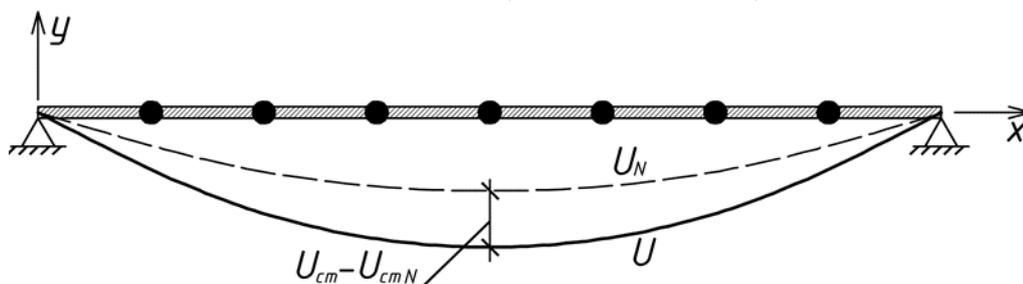


Рисунок 2.4.1. Решение динамической задачи со статическим учетом высших форм

ГЛАВА 3. РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СТАТИЧЕСКОГО УЧЁТА ВЫСШИХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ

3.1. Шарнирно-опертая однопролетная балка

3.1.1 Постановка задачи

Решение динамической задачи

Рассмотрим задачу о гармоническом воздействии распределенной нагрузки $p(x, t)$ на простую шарнирно-опертую однопролетную балку (см. Рисунок 3.1.1).

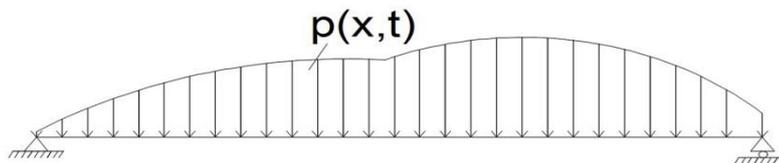


Рисунок 3.1.1. Расчетная схема динамической задачи

На систему передается вибрационная нагрузка, заданная в следующем виде:

$$p(x, t) = P(x) \sin(\theta t) \quad (3.1.1)$$

где: $P(x)$ - закон изменения амплитуды нагрузки вдоль продольной оси балки

θ - круговая частота возмущающей силы.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P(x) \sin(\theta t) \quad (3.1.2)$$

Вибрационная нагрузка $p(x, t)$ вызовет перемещения системы по всем собственным формам колебаний. Установившееся решение уравнения (3.1.2) будем искать в виде суммы перемещений, возникающих по всем формам:

$$y(x, t) = \sin(\theta t) \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i(x) \quad (3.1.3)$$

где A_i – амплитудное значение i -той моды колебаний $X_i(x)$.

Вычислим производные, входящие в уравнение (3.1.2):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = \sin(\theta t) \sum_{i=1}^{\infty} A_i \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 X_i(x)}{dx^2} \right) \quad (3.1.4)$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\theta^2 \sin(\theta t) \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i(x) \quad (3.1.5)$$

Подставим эти значения в уравнение (3.1.2) и сократим на $\sin(\omega_0 t)$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 X_i(x)}{dx^2} \right) - m(x) \theta^2 \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i(x) = P(x) \quad (3.1.6)$$

Собственные формы колебаний удовлетворяют следующему уравнению:

$$\frac{d}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 X_i(x)}{dx^2} \right) = m(x) \omega_i^2 X_i(x) \quad (3.1.7)$$

где ω_i - собственная частота колебаний, соответствующая форме колебаний X_i .

Как известно [2], для шарнирноопертой балки : $X_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{L}$ и $\omega_i = \frac{i^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$ при

$i = 1; 2; 3 \dots$

Используя (3.1.7), формуле (3.1.6) можно придать вид:

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i m(x) X_i(x) (\omega_i^2 - \theta^2) = P(x) \quad (3.1.8)$$

Умножим далее правую и левую части полученного уравнения на функцию $X_j(x)$ и проинтегрируем по всей длине стержня обе части:

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i (\omega_i^2 - \theta^2) \int_0^L m(x) X_i(x) X_j(x) dx = \int_0^L P(x) X_j(x) dx \quad (3.1.9)$$

В левой части этого равенства в силу ортогональности функций $X_i(x)$ и $X_j(x)$ все слагаемые, кроме слагаемого, у которого $i = j$, обратятся в нуль, и в результате равенство будет иметь вид:

$$A_i (\omega_i^2 - \theta^2) \int_0^L m(x) X_i^2(x) dx = \int_0^L P(x) X_i(x) dx \quad (3.1.10)$$

Отсюда найдем коэффициенты A_i :

$$A_i = \frac{1}{(\omega_i^2 - \theta^2)} \frac{\int_0^L P(x) X_i(x) dx}{\int_0^L m(x) X_i^2(x) dx} \quad (3.1.11)$$

Таким образом, решение (3.1.3), соответствующее установившимся колебаниям, имеет вид:

$$y(x,t) = \sin(\theta t) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_i^2 - \theta^2)} \frac{\int_0^L P(x) X_i(x) dx}{\int_0^L m(x) X_i^2(x) dx} X_i(x) \quad (3.1.12)$$

Изгибающий момент может быть найден из выражения:

$$M(x,t) = -EI \frac{d^2 y(x,t)}{dx^2} \quad (3.1.13)$$

Значение изгибающего момента при учете бесконечного числа собственных форм:

$$M(x,t) = -EI \sin(\theta t) \sum_{i=1}^{\infty} A_i \frac{d^2 X_i(x)}{dx^2} \quad (3.1.14)$$

Поставим уравнения (3.1.11) в (3.1.14) можем получить:

$$M(x,t) = -EI \sin(\theta t) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_i^2 - \theta^2)} \frac{\int_0^L P(x) X_i(x) dx}{\int_0^L m(x) X_i^2(x) dx} \frac{d^2 X_i(x)}{dx^2} \quad (3.1.15)$$

Решение статической задачи

Для дальнейшего развития метода статического учета понадобится выполнить решение вспомогательной статической задачи. Решение задачи статики будем выполнять с помощью разложения по формам собственных колебаний. Рассмотрим статическую задачу о действии распределенной нагрузки $P(x)$ на однопролетную шарнирно-опертую балку (см. Рисунок 3.1.2).

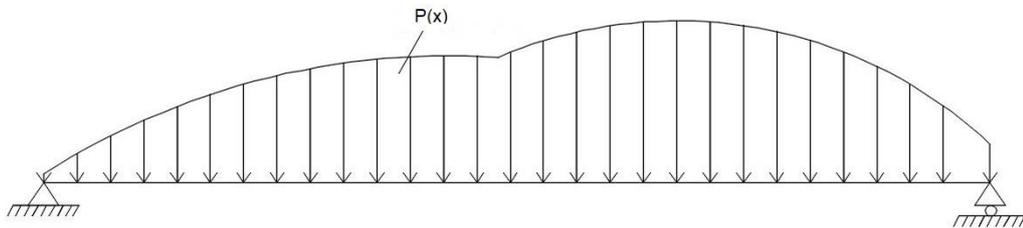


Рисунок 3.1.2. Расчетная схема статической

Для равномерной статической нагрузки $P(x)$, дифференциальное уравнение имеет вид:

$$EI y^{IV} = P_0 \quad (3.1.16)$$

Решение неоднородного уравнения будем искать в виде суммы перемещений, возникающих по всем главным формам:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i X_i(x) \quad (3.1.17)$$

где $X_i(x)$ - собственные формы колебаний, B_i – амплитудное значение i -той моды колебаний $X_i(x)$.

Подставим (3.1.17) в уравнение (3.1.16):

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_i X_i^{IV}(x) = \frac{P(x)}{EI} \quad (3.1.18)$$

Умножим далее правую и левую части полученного уравнения на функцию $X_j(x)$, описывающую одну из форм колебаний, и проинтегрируем по всей длине стержня обе части:

$$\int_0^L \sum_{i=1}^{\infty} B_i X_i^{IV}(x) X_j(x) dx = \int_0^L \frac{P(x)}{EI} X_j(x) dx \quad (3.1.19)$$

где $X_i^{IV}(x) = \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 X_i(x)$, тогда, можем написать формулу (3.1.19) в виде:

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_i \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 \int_0^L X_i(x) X_j(x) dx = \int_0^L \frac{P(x)}{EI} X_j(x) dx \quad (3.1.20)$$

В левой части этого равенства в силу ортогональности функций $X_i(x)$ и $X_j(x)$ все слагаемые, кроме слагаемого, у которого $i=j$, обратятся в нуль, и в результате равенство будет иметь вид:

$$B_i \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 \int_0^L X_i^2(x) dx = \int_0^L \frac{P(x)}{EI} X_i(x) dx \quad (3.1.21)$$

Отсюда найдем коэффициенты B_i :

$$B_i = \frac{\int_0^L \frac{P(x)}{EI} X_i(x) dx}{\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 \int_0^L X_i^2(x) dx} \quad (3.1.22)$$

Таким образом, решение уравнения (3.1.16) имеет вид:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_0^L \frac{P(x)}{EI} X_i(x) dx}{\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 \int_0^L X_i^2(x) dx} X_i(x) \quad (3.1.23)$$

Изгибающий момент можно найти по формуле:

$$M(x) = -EI \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} \quad (3.1.24)$$

Решение динамической задачи с помощью статического учета отброшенных форм колебаний

Предлагается подойти к решению данной задачи с помощью статического учета отброшенных форм колебаний: принять в формуле (3.1.12) небольшое число слагаемых N , а остальную часть (высшие моды колебаний) учесть в расчете статически.

Метод статического учета высших форм колебаний заключается в том, что искомое динамическое перемещение ищется по формуле:

$$y = y_N^{din} + (y^{CT} - y_N^{cm}) \quad (3.1.25)$$

Где $y_N^{\text{дин}}$ – приближенное решение динамической задачи с учетом N собственных форм; y^{CT} – точное решение статической задачи (3.1.16); y_N^{cm} – приближенное решение статической задачи (3.1.16) по формуле (3.1.23) с учетом N собственных форм. Выражение в скобках в формуле (3.1.25) представляет собой вклад высших собственных форм колебаний в решение статической задачи (3.1.16).

Для поиска изгибающего момента имеем аналогичную формулу:

$$M = M_N^{\text{дин}} + (M^{\text{CT}} - M_N^{\text{cm}}) \quad (3.1.26)$$

Где $M_N^{\text{дин}}$ – приближенное решение динамической задачи; M^{CT} – точное решение статической задачи; M_N^{cm} – приближенное решение статической задачи.

Решение задачи по концепции «остаточного члена»

В этом разделе мы применим «концепции остаточного члена», данной Тяпин А.Г с помощью статического учета отброшенных форм колебаний. Проведем изменение силы $P(x)$ в (3.1.2) в соответствии с методом разложения по собственным формам колебаний:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i X_i(x) \quad (3.1.27)$$

Аналогично изложенному выше коэффициенты G_i можно найти по формуле:

$$G_i = \frac{\int_0^L P(x) X_i(x) dx}{\int_0^L X_i^2(x) dx} \quad (3.1.28)$$

Нагрузка $P(x)$ сложится из вклада низкочастотных форм $P_1(x)$ и вклада высокочастотных форм $P_2(x)$:

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) \quad (3.1.29)$$

Где

$$P_1(x) = \sum_{i=1}^N G_i X_i(x) = \sum_{i=1}^N \frac{\int_0^L P(x) X_i(x) dx}{\int_0^L X_i^2(x) dx} X_i(x) \quad (3.1.30)$$

И

$$P_2(x) = P(x) - \sum_{i=1}^N \frac{\int_0^L P(x) X_i(x) dx}{\int_0^L X_i^2(x) dx} X_i(x) \quad (3.1.31)$$

Первая часть решения $y_1(x)$ ищется стандартным методом с учетом вклада первых N собственных форм по формуле (3.1.12).

Вторая часть решения $y_2(x)$ ищется как точное решение статической задачи от нагрузки $P_2(x)$:

$$EJy_2^{IV}(x) = P_2(x) \quad (3.1.32)$$

Задача (3.1.32) может быть решена любым способом. В настоящей работе решение будем искать в виде разложения по формам собственных колебаний:

$$y_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k X_k(x) \quad (3.1.33)$$

Аналогично пункту 2.2 коэффициенты разложения можно найти по формулам:

$$B_k = \frac{\int_0^L \frac{P_2(x)}{EI} X_k(x) dx}{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^4 \int_0^L X_k^2(x) dx} \quad (3.1.34)$$

Таким образом, решение уравнения (3.1.32) имеет вид:

$$y_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^L \frac{P_2(x)}{EI} X_k(x) dx}{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^4 \int_0^L X_k^2(x) dx} X_k(x) \quad (3.1.35)$$

Решение исходной динамической задачи ищется по формулам $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x)$ и $M(x,t) = M_1(x,t) + M_2(x)$.

3.1.2 Результаты и обсуждение

Рассмотрим задачу о действии на балку равномерно распределенной гармонической нагрузки, меняющейся по закону $p(x,t) = P_0 \sin(\theta t)$

Зададимся следующими параметрами для расчёта:

Размеры сечения балки: $h=0.40\text{м}$; $b=0.30\text{м}$

Класс бетона: В25

Модуль упругости бетона: $E = 30 \cdot 10^6 \text{ кН/м}^2$

Объёмный вес бетона: $\gamma_{\text{б}} = 2500 \text{ кг/м}^3$

Момент инерции балки: $I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.3 \cdot 0.4^3}{12} = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4$

Равномерно распределенная масса: $m = b \cdot h \cdot \gamma_{\text{б}} = 0.3 \cdot 0.4 \cdot 2500 = 300 \text{ кг/м}$

Амплитуда распределенной возмущающей силы: $P_0 = 100 \text{ кН}$

Круговая частота возмущающей силы: $\theta = 100 \text{ рад/с}$

Первые собственные частоты системы приведены в Таблица 3.1.1:

Таблица 3.1.1. Собственные частоты системы

| N | рад/с | N | рад/с |
|---|---------|----|---------|
| 1 | 61.40 | 8 | 2217.28 |
| 2 | 246.82 | 9 | 3012.08 |
| 3 | 555.29 | 10 | 3367.87 |
| 4 | 680.11 | 11 | 3920.40 |
| 5 | 986.96 | 12 | 4669.53 |
| 6 | 1541.36 | 13 | 4931.94 |
| 7 | 2033.79 | 14 | 6027.96 |

Точное решение динамической задачи

Для заданной балки, максимальное перемещение и изгибающий момент в середине пролёта, определим из выражений (3.1.19) и (3.1.22), приняв $\sin(\theta)=1$. В таком случае, для четных значений i , значения перемещения и момента равны нулю, соответственно, будем рассматривать перемещения нечетных форм, то есть $i=1;3;5...$ Рассматриваемое число форм установим из условия, что разность между перемещениями и моментами последующей и предыдущей формой не превышает 0.01%. Результаты расчёта представлены в Таблица 3.1.2.

$$\varepsilon_1 = \frac{|y_{i+2}^{\text{дин}} - y_i^{\text{дин}}|}{|y_i^{\text{дин}}|} \cdot 100 < 0.01\% ; \varepsilon_2 = \frac{|M_{i+2}^{\text{дин}} - M_i^{\text{дин}}|}{|M_i^{\text{дин}}|} \cdot 100 < 0.01\%$$

Таблица 3.1.2. Динамический расчет балки

| Количество учтенных форм колебаний N | $y_N^{\text{дин}}$ (м) | $\varepsilon_1, \%$ | $M_N^{\text{дин}}$ (кН·м) | $\varepsilon_2, \%$ |
|--|------------------------|---------------------|---------------------------|---------------------|
| 1 | -0.068536 | 0.69 | -507.629 | 4.98 |
| 3 | -0.069010 | 0.05 | -539.233 | 0.94 |
| 5 | -0.068974 | 0.01 | -532.600 | 0.30 |
| 7 | -0.068980 | 0.00 | -535.009 | 0.15 |
| 9 | -0.068979 | 0.00 | -533.876 | 0.07 |
| 11 | -0.068979 | 0.00 | -534.497 | 0.05 |
| 13 | -0.068979 | 0.00 | -534.121 | 0.02 |
| 15 | -0.068979 | 0.00 | -534.366 | 0.03 |
| 17 | -0.068979 | 0.00 | -534.198 | 0.02 |
| 19 | -0.068979 | 0.00 | -534.318 | 0.01 |
| 21 | -0.068979 | 0.00 | -534.229 | 0.01 |
| 23 | -0.068979 | 0.00 | -534.267 | 0.00 |

По результатам расчёта, представленным в Таблица 3.1.2, точным решением задачи динамики в дальнейшем считаем: перемещение $y_T = -0.068979$ м и изгибающий момент $M_T = -534.267$ кН·м.

Точное и приближённое решения статической задачи

Точное значение статического прогиба стержня в середине пролёта известно и определяется по формуле:

$$y^{CT} = \frac{5P_0L^4}{384EI} \quad (3.1.36)$$

$$y^{CT} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 8^4}{384 \cdot 300186 \cdot 10^5 \cdot 1.6 \cdot 10^{-3}} = 0.111042(\text{м})$$

Точное значение момента от статической нагрузки также находим по известной формуле:

$$M^{CT} = \frac{P_0L^2}{8} \quad (3.1.37)$$

$$M^{CT} = \frac{10^2 \cdot 8^2}{8} = 800(\text{кН} \cdot \text{м})$$

Далее решим ту же статическую задачу приближенно в виде разложения по формам собственных колебаний. По формулам (3.1.24) и (3.1.26) определяются перемещения и изгибающие моменты в середине балки, $x = \frac{L}{2}$:

Таблица 3.1.3. Статический расчет балки по формам колебаний

| N | y_N^{cm} (м) | M_N^{cm} (кН·м) |
|----|----------------|-------------------|
| 1 | 0.111471 | 825.6390 |
| 3 | 0.111012 | 795.0600 |
| 5 | 0.111047 | 801.6652 |
| 7 | 0.111041 | 799.2581 |
| 9 | 0.111043 | 800.3906 |
| 11 | 0.111042 | 799.7703 |
| 13 | 0.111042 | 800.1461 |
| 15 | 0.111042 | 799.9015 |
| 17 | 0.111042 | 800.0695 |
| 19 | 0.111042 | 799.9491 |
| 21 | 0.111042 | 800.0383 |

Решение динамической задачи с помощью статического учета отброшенных форм колебаний

Теперь по формулам (3.1.27) и (3.1.28) получаем решение динамической задачи с помощью статического учета отброшенных форм колебаний. Результаты представлены в Таблица 3.1.4, где обозначено: $\Delta_y = (u^{CT} - u_N^{cm})$ и $\Delta_M = (M^{CT} - M_N^{CT})$ - статический вклад высших форм для перемещения и момента соответственно.

Таблица 3.1.4. Решение динамической задачи с помощью статического учета высших форм колебаний

| N | Δ_y (м) | y (м) | Δ_M (кН·м) | M (кН·м) |
|----|----------------|-----------|-------------------|------------|
| 1 | -4.29E-04 | -0.068965 | -25.5243 | -533.153 |
| 3 | 3E-05 | -0.068980 | 50.5500 | -534.178 |
| 5 | -5E-06 | -0.068979 | -15.5020 | -534.150 |
| 7 | 1E-06 | -0.068979 | 85.6900 | -534.152 |
| 9 | -1E-06 | -0.068980 | -27.5600 | -534.152 |
| 11 | 0.000 | -0.068980 | 34.4700 | -534.152 |
| 13 | 0.000 | -0.068980 | -31.1000 | -534.152 |

Сравнение двух методов решения задачи динамики

Выполним сравнение результатов определения искомых величин между двумя методами решения задачи динамики с точным результатом: по стандартному методу с учетом ограниченного количества первых собственных форм (в Таблица 3.1.2) и по предлагаемому методу статического учета высших форм колебаний (в Таблица 3.1.4). Результаты представлены в Таблица 3.1.5.

Таблица 3.1.5. Сравнение двух методов решения задачи динамики с точными результатами

| N | Стандартный метод | | Предлагаемый метод | |
|----|-------------------|------|--------------------|------|
| | у | M | у | M |
| | % | % | % | % |
| 1 | 0.64 | 4.99 | 0.00 | 0.21 |
| 3 | 0.04 | 0.93 | 0.00 | 0.02 |
| 5 | 0.01 | 0.31 | 0.00 | 0.02 |
| 7 | 0.00 | 0.14 | 0.00 | 0.00 |
| 9 | 0.00 | 0.07 | 0.00 | 0.00 |
| 11 | 0.00 | 0.04 | 0.00 | 0.00 |

Результаты, полученные для перемещений

- Метод решения динамических задач с помощью статического учета отброшенных форм колебаний дает точное значение с 1-ю формами колебаний, в то время как стандартный метод решения дает точное значение лишь с 7-ю формами колебаний.

Результаты, полученные для изгибающих моментов

- Метод решения динамических задач с помощью статического учета отброшенных форм колебаний дает точное значение с 7-ю формами колебаний, в то время как стандартный динамический метод дает точное значение с 21-мя формами колебаний (Таблица 3.1.2).

- При учете только 1-ой формы колебаний, погрешность классического динамического метода равна 4.99%, что в 25 раз превышает погрешность динамического метода с использованием статического учета отброшенных форм колебаний (0.21%).

Решение задачи по концепции «остаточного члена»

Для заданной балки, максимальный перемещение и изгибающий момент в середине пролета, приняв $\sin(\theta) = 1$. Результаты расчёта представлены в Таблица 3.1.6.

Где: ε_1 и ε_2 соответствующие разности между u_1 , u и точном решением u_T ; ε_3 и ε_4 соответствующие разности между M_1 , M и точном решением M_T .

Таблица 3.1.6. Результаты решение задачи

| N | u_T (м) | u_1 (м) | $\varepsilon_1, \%$ | u_2 (м) | u (м) | $\varepsilon_2, \%$ |
|---|--------------|--------------|---------------------|--------------|------------|---------------------|
| 1 | -0.068979 | -0.068536 | 0.6430 | -0.000428 | -0.069064 | 0.0220 |
| 3 | | -0.069010 | 0.0443 | 0.000030 | -0.068979 | 0.0002 |
| 5 | | -0.068974 | 0.0076 | 0.000005 | -0.068979 | 0.0000 |
| N | M_T (кН·м) | M_1 (кН·м) | $\varepsilon_3, \%$ | M_2 (кН·м) | M (кН·м) | $\varepsilon_4, \%$ |
| 1 | -534.267 | -507.629 | 4.986 | -25.638 | -533.267 | 0.1870 |

| | | | | | | |
|---|--|----------|-------|--------|----------|--------|
| 3 | | -539.233 | 0.929 | 4.937 | -534.296 | 0.0053 |
| 5 | | -532.600 | 0.312 | -1.668 | -534.268 | 0.0003 |
| 7 | | -535.009 | 0.139 | 0.751 | -534.258 | 0.0016 |
| 9 | | -533.876 | 0.073 | -0.400 | 534.276 | 0.0016 |

Результаты, полученные для перемещений

- Метод решения динамических задач с помощью статического учета отброшенных форм колебаний дает точное значение с 1-ю формами колебаний, в то время как стандартный метод решения дает точное значение лишь с 3-ю формами колебаний.

Результаты, полученные для изгибающих моментов

- Метод решения динамических задач с помощью статического учета отброшенных форм колебаний дает точное значение с 3-ю формами колебаний, в то время как стандартный динамический метод дает точное значение с 21-мя формами колебаний (в Таблица 3.1.2).

- При учете только 1-ой формы колебаний, погрешность классического динамического метода равна 4.986%, составила в 25 раз больше, чем погрешность динамического метода с использованием статического учета отброшенных форм колебаний (0.19%).

3.2. Пространственная рама

Чтобы проверить способ статического учета высших мод колебаний, в расчетном программном комплексе SCAD Office 21.1 была рассмотрена следующая задача.

Система состоит из стержневых конечных элементов (см. Рисунок 3.2.1). Габаритные размеры расчетной схемы составляют 7м x 4.5м x 7м. Нижние узлы системы жестко защемлены. В качестве материала принят бетон В25, размеры поперечных сечений колонны и балки в 1-ом этаже равны 30x30, 20x30 см², и в 2-ом этаже равны 20x20 см². Вынуждающая динамическая нагрузка $p(t) = P_0 \sin(\theta t)$ приложена в узле 9 по направлению X.

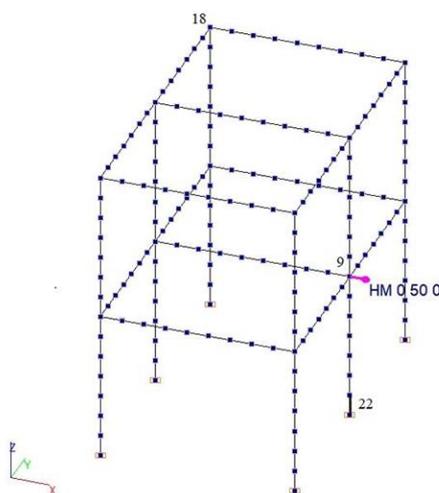


Рисунок 3.2.1. Схема пространственной рамы

Амплитуда силы принята равной 50 тс, угловая частота задавалась равной $\theta = 41$ рад/с. По результатам модального анализа первые четыре собственные частоты системы соответственно

равны 26.61, 29.02, 33.05 и 54.71 рад/с. Для железобетонных конструкций принят коэффициент неупругого сопротивления материала $\gamma = 0.09$.

Рассмотрено перемещение узлов 9 и 18 по направлению X, изгибающий момент относительно оси Y в элементе 22. Результаты расчета рамы на динамическую нагрузку стандартным методом с разным числом учитываемых мод приведены в Таблица 3.2.1.

Таблица 3.2.1. Динамический расчет рамы

| Число мод колебаний | $\theta = 41$ рад/с | | | Число мод колебаний | $\theta = 41$ рад/с | | |
|---------------------|---------------------|-----------------|-----------------|---------------------|---------------------|-----------------|-----------------|
| | u_{x-9} , мм | u_{x-18} , мм | M_{y-22} , Тм | | u_{x-9} , мм | u_{x-18} , мм | M_{y-22} , Тм |
| 1 | -9.147 | 32.814 | -5.880 | 100 | -36.076 | 51.993 | -31.621 |
| 3 | -9.144 | 32.810 | -5.878 | 130 | -36.224 | 52.012 | -30.700 |
| 8 | -26.772 | 58.807 | -24.220 | 160 | -36.264 | 51.982 | -31.231 |
| 15 | -35.449 | 51.985 | -32.557 | 200 | -36.318 | 51.994 | -32.157 |
| 40 | -35.500 | 52.009 | -32.897 | 240 | -36.341 | 51.995 | -31.538 |
| 50 | -35.757 | 52.001 | -34.117 | 260 | -36.353 | 51.992 | -31.240 |
| 70 | -36.016 | 51.989 | -32.056 | 280 | -36.356 | 51.990 | -31.126 |

Как видно, искомые величины перестают существенно меняться при учёте 260-ти мод для перемещения и 280-ти мод для момента.

Далее была точно решена вспомогательная статическая задача от силы, равной амплитуде вынуждающей силы P_0 . Статические перемещения узлов 9 и 18 составили соответственно - 44.375 мм и -32.911 мм, а максимальный изгибающий момент в элементе 22 составил -33.864 Тм.

Следующим шагом та же статическая задача была решена динамическим методом при частоте вынуждающей силы $\varphi = 0.0001$ рад/с. Как показано в предыдущем пункте при такой частоте точное решение динамической задачи практически должно совпадать с решением задачи статики.

В Таблица 3.2.2 приведены результаты расчетов по методу статического учета высших форм колебаний при использовании 8 форм колебаний. Восьмая собственная частота системы равна 81.23 рад/с, что примерно в два раза больше частоты внешнего воздействия. Как показали результаты численных экспериментов, собственная частота последней учитываемой динамически формы колебаний должна превосходить частоту воздействия как минимум в 1.5 – 2 раза.

Таблица 3.2.2. Решение динамической задачи с учётом высших форм

| № п/п | Наименование решение | $\theta = 41$ рад/с | | |
|-------|--|---------------------|-----------------|-----------------|
| | | u_{x-9} , мм | u_{x-18} , мм | M_{y-22} , Тм |
| 1 | Динамическое при N=8 (таб. 1) | -26.772 | 58.807 | -24.220 |
| 2 | Динамическое точное решение (таб. 1) | -36.356 | 51.990 | -31.126 |
| 3 | Статическое точное | -44.375 | -32.911 | -33.864 |
| 4 | Статическое (формула (5)) при N=8 | -36.093 | -27.168 | -27.837 |
| 5 | Статический вклад высших мод (п.3-п.4) | -8.282 | -5.743 | -6.027 |

| | | | | |
|---|---|---------|--------|---------|
| 6 | Динамическое решение со статическим учетом мод (п.1+п.5) | -35.054 | 53.064 | -30.247 |
| 7 | Разность между найденным значением (п.6) и точным решением (п.2), % | 3.58 | 2.07 | 2.82 |
| 8 | Разность между стандартным методом при учете N=8 мод (п.1) и точным решением (п.2), % | 26.36 | 13.11 | 22.19 |

Анализ результатов, приведенных в Таблица 3.2.2, позволяет сделать следующие выводы: Как видно по результатам расчета, перемещение и изгибающий момент, определенные при решении задачи динамики с учетом всего 8 формы и статическом учете остальных даёт погрешности 2-3.5%, но стандартный метод при учете тоже форм дает погрешности 13-26%. Таким образом, можно снизить время и мощность вычислительной техники, проведя расчет с меньшим числом форм.

ГЛАВА 4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА СТАТИЧЕСКОГО УЧЕТА ВЫСШИХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ НА ПРИМЕРЕ АНАЛИЗА СЕЙСМОСТОЙКОСТИ СООРУЖЕНИЙ

4.1. Исходные данные для расчета

Геометрические параметры:

Общий вид схемы сооружения представлен на рисунке 4.1. Габаритные размеры расчетной схемы составляют 36 x 46 x 56 м, общее число узлов - 139915, элементов - 157501.

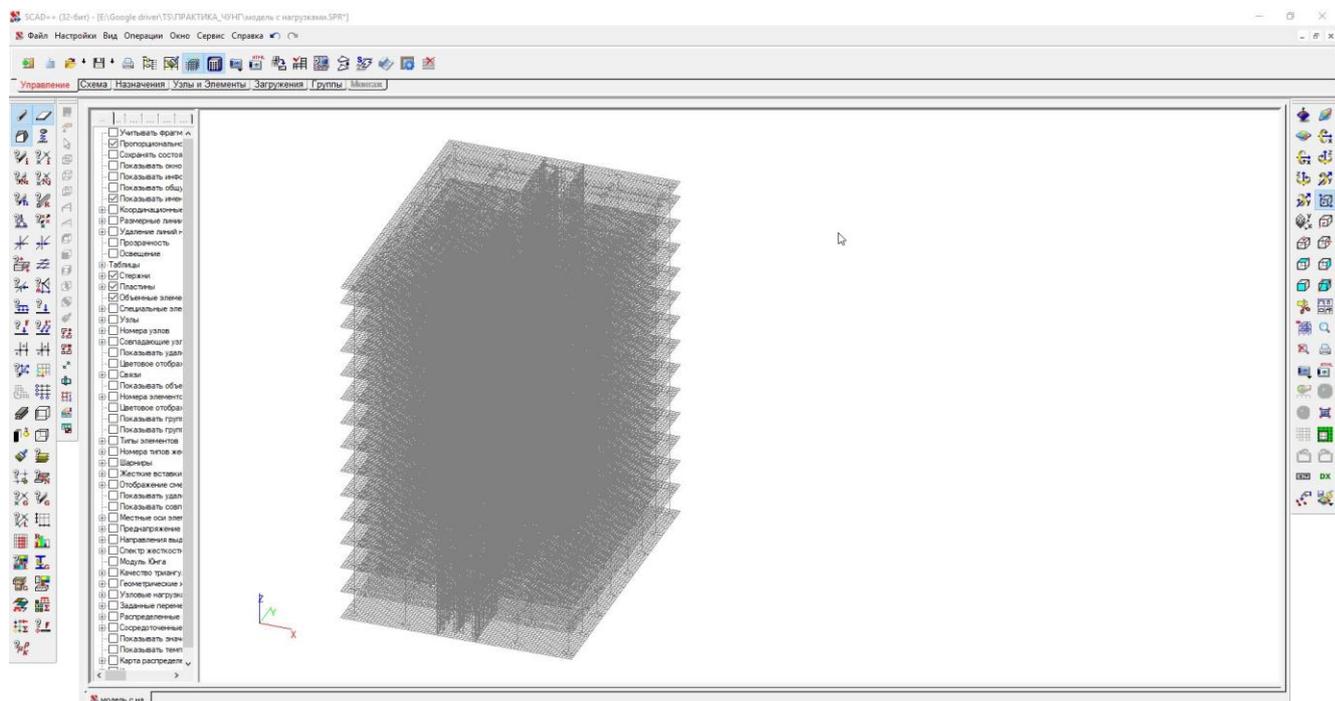


Рисунок 4.1.1. Общий вид расчетной схемы

Первые собственные частоты системы приведены в Таблица 4.1.1:

Таблица 4.1.1. Собственные частоты системы

| N | Собственные частоты | | N | Собственные частоты | |
|---|---------------------|----|---|---------------------|----|
| | рад/с | Гц | | рад/с | Гц |

| | | | | | |
|---|--------|-------|----|--------|-------|
| 1 | 5.642 | 0.898 | 8 | 24.652 | 3.924 |
| 2 | 7.221 | 1.149 | 9 | 24.916 | 3.965 |
| 3 | 8.193 | 1.304 | 10 | 26.620 | 4.237 |
| 4 | 19.858 | 3.161 | 11 | 28.593 | 4.551 |
| 5 | 20.195 | 3.214 | 12 | 29.368 | 4.674 |
| 6 | 21.710 | 3.455 | 13 | 29.602 | 4.711 |
| 7 | 22.014 | 3.504 | 14 | 35.704 | 5.682 |

Акселерограмма землетрясение в Турции 17 августа 1999. Максимальное ускорение - 6,159407 м/сек² достигается в момент времени 5,92 сек.

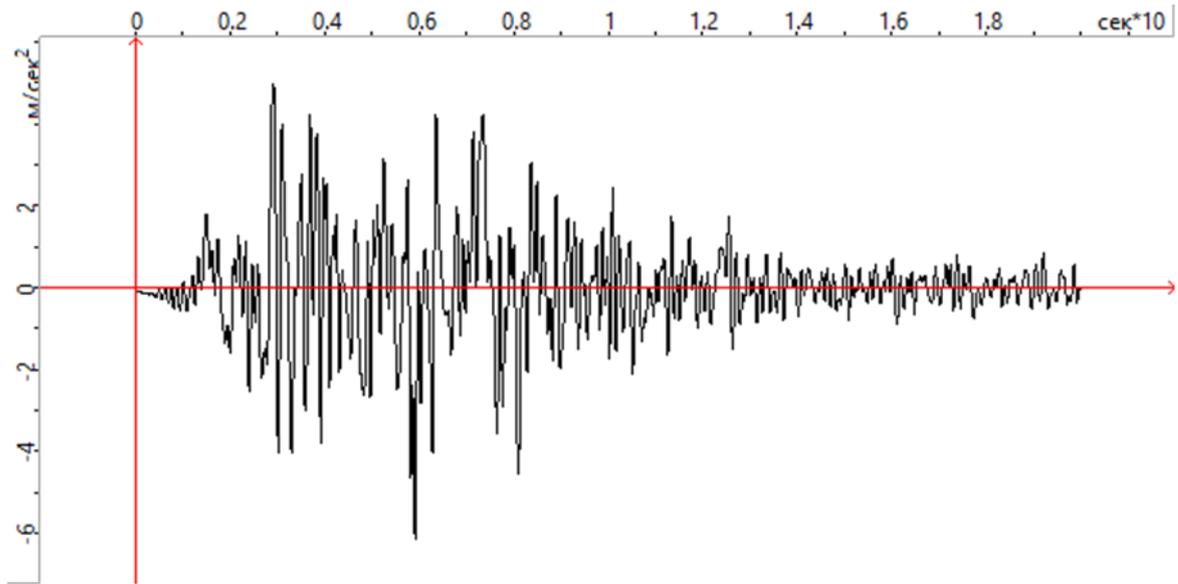


Рисунок 4.1.2. График акселерограммы землетрясения

4.2. Результаты решения задачи

Максимальные перемещения

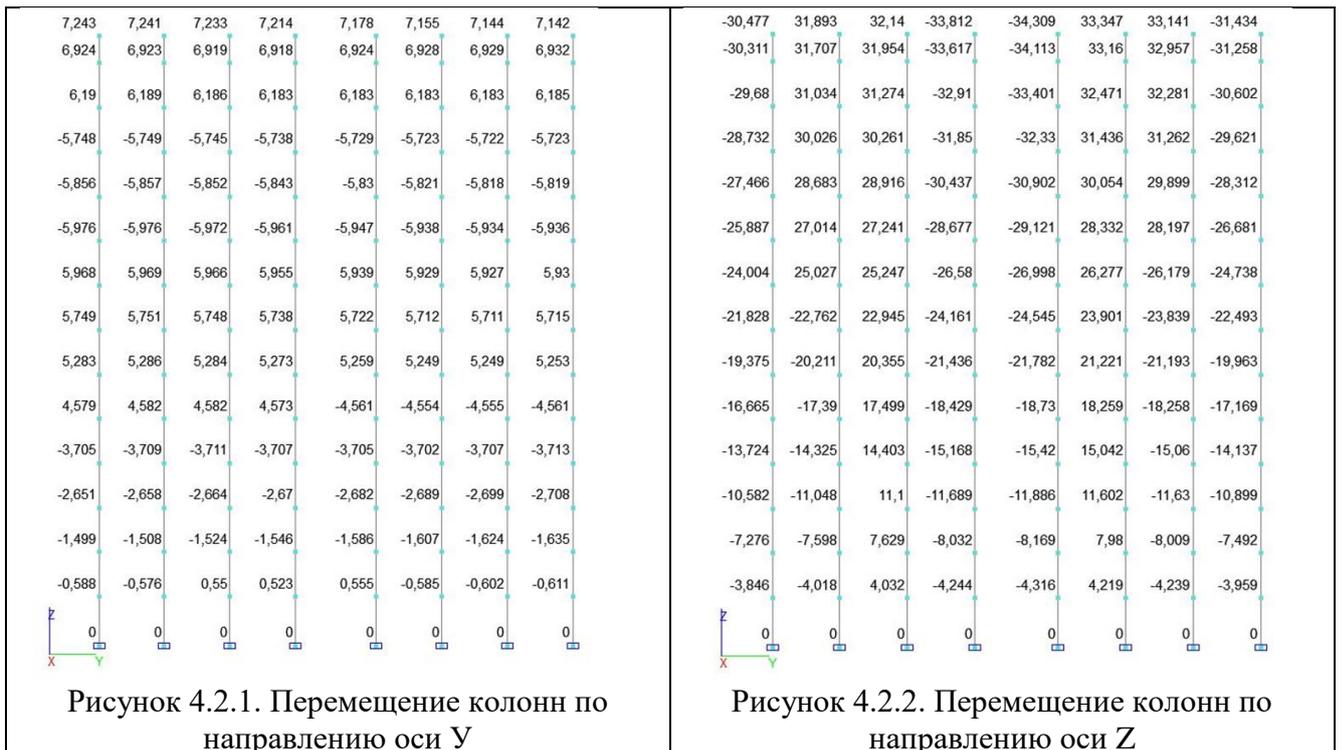


Рисунок 4.2.1. Перемещение колонн по направлению оси Y

Рисунок 4.2.2. Перемещение колонн по направлению оси Z

Эпюры усилий

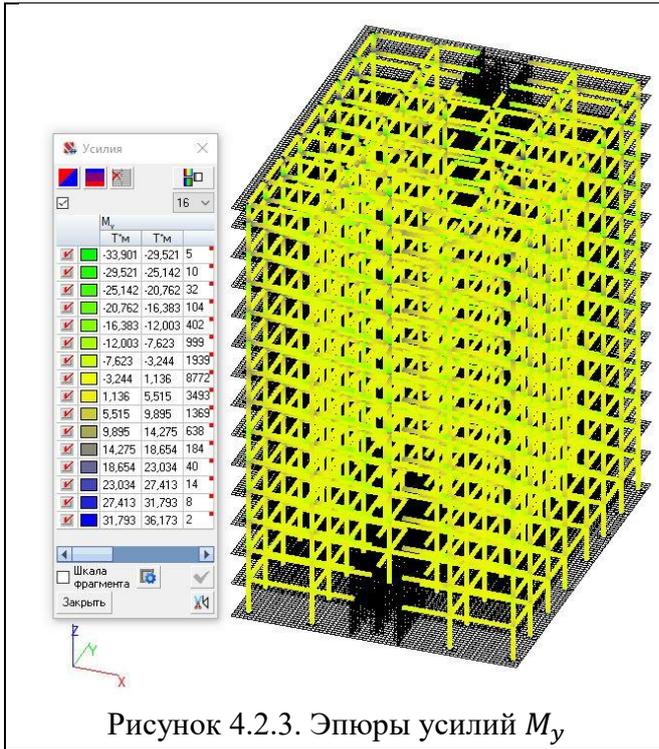


Рисунок 4.2.3. Эпюры усилий M_y

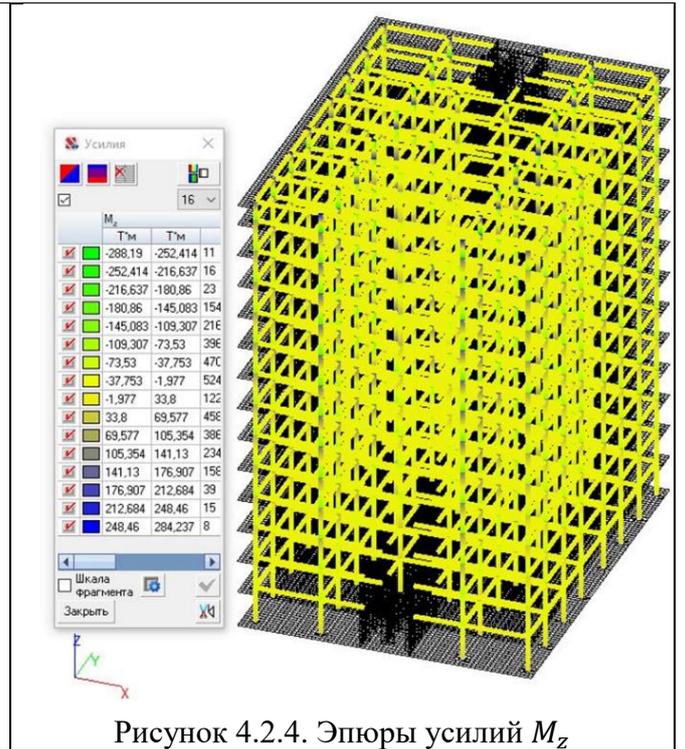


Рисунок 4.2.4. Эпюры усилий M_z

Поля напряжений

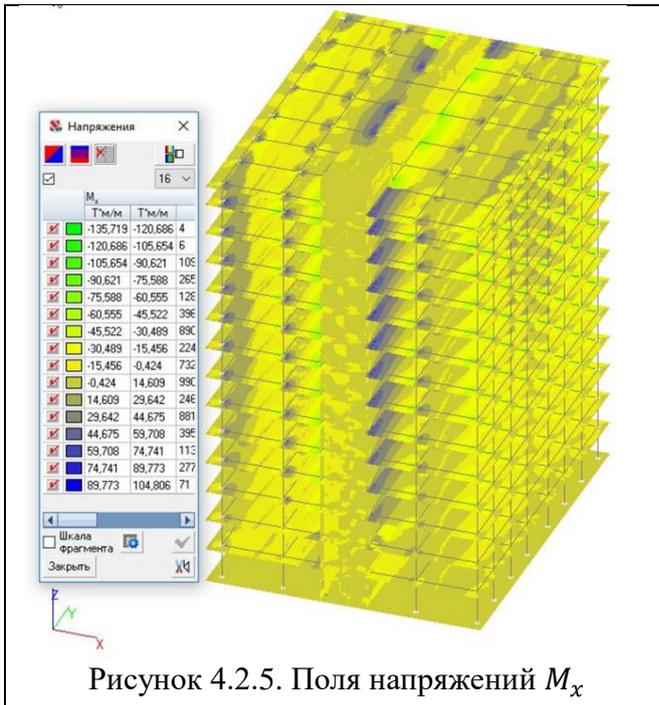


Рисунок 4.2.5. Поля напряжений M_x

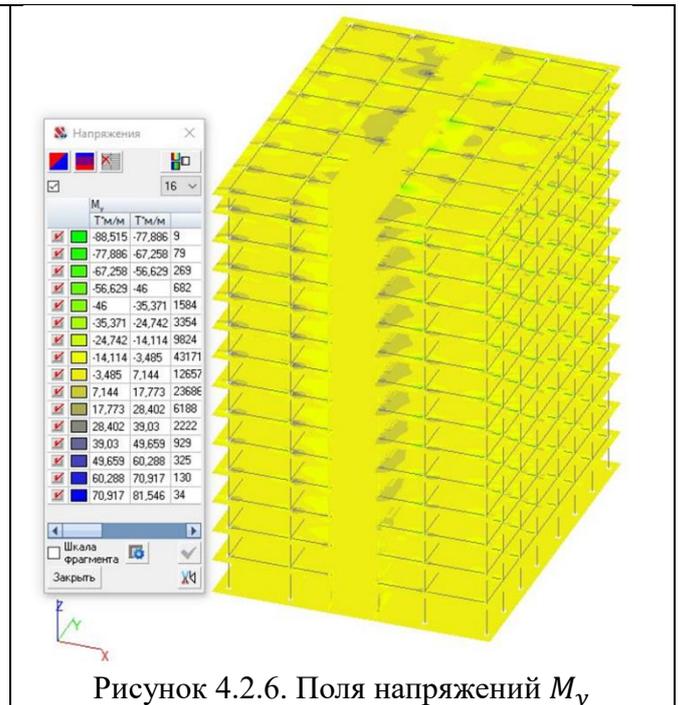


Рисунок 4.2.6. Поля напряжений M_y

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В настоящей работе предложен метод решения динамической задачи от действия гармонической нагрузки на сооружения, основанный на статическом учете высших форм колебаний. Метод требует решения одной динамической задачи и двух статических.

2. Как показано на численных примерах предложенный метод дает высокую точность решения при меньших вычислительных затратах по сравнению со стандартным методом разложения по собственным формам колебаний.

3. Решение динамической задачи со статическим учетом высших мод колебаний позволяет существенно экономить время расчета и ресурсы вычислительной техники, поскольку необходимо решить динамическую задачу при малом числе форм и две статические задачи, вместо решения одной динамической задачи с большим числом учитываемых в расчете форм. Как известно, зависимость между количеством учитываемых форм и вычислительными затратами носит нелинейный характер. С уменьшением размерности задачи ее решение получить на порядок легче и быстрее.

4. В дальнейшем предполагается распространить метод статического учета высших форм колебаний на задачи с произвольной, зависящей от времени нагрузкой, а также на задачи расчета конструкций от сейсмических воздействий.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Научные статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных изданиях, перечень которых размещен на официальном сайте Высшей аттестационной комиссии и приравненные к ним:

1. Ле Т., Лалин В.В., Браташов А.А. Статический учет высших мод колебаний в задачах динамики конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2019. № 4(88). С. 3–13. DOI: 10.18720/MSE.88.1.

2. Лалин В.В, Ле Т.К.Ч. Теория и применение метода статического учета высших форм колебаний в некоторых задачах динамики конструкций // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2020. №1. С. 5-17.

3. Ле Т.К.Ч, Лалин В.В. Расчёт строительных конструкций на несколько динамических воздействий с статическим учетом высших форм колебаний // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. №3(16). С. 171-178.

4. Лалин В.В., Ле Т.К.Ч., Нго Х.Х. Способ статического учета высших форм колебаний в задачах динамики конструкций // Природные и техногенные риски. Безопасность сооружений. 2020. №3(46). С.33-39.

Публикации в изданиях, индексируемых международной системой цитирования (Scopus и Web of Science)

1. Le, T.Q.T., Vavilova, A. A Method of Accounting for Higher Vibration Modes in Structural Dynamics Problems. Proceedings of EECCE 2019. Springer International Publishing. Cham, 2020. Pp. 479–490.

Статьи в других изданиях

1. Ле Т.К.Ч., Лалин В.В. Метод статического учета высших мод колебаний в задачах динамики конструкций // В сборнике: конференции XLVIII «Неделя науки СПбПУ». Секция «строительство и архитектура». Инженерно-строительный институт. 2019. С. 186-189.

Аспирант _____ Ле Т.К.Ч