

**Санкт-Петербургский политехнический университет Петра  
Великого  
Институт прикладной математики и механики**

На правах рукописи

**Погарская Татьяна Аркадьевна**

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ВЫБОРА РАСПОЛОЖЕНИЯ И  
ПОРЯДКА УСТАНОВКИ ВРЕМЕННЫХ КРЕПЕЖНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СБОРКИ  
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Направление подготовки: 09.06.01 Информатика и вычислительная техника

---

*Код и наименование*

Направленность: 09.06.01\_09 «Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ»

---

*Код и наименование*

**НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

Автор работы: Погарская Т.А.

Научный руководитель:  
доцент, к.ф.-м.н., Лупуляк С.В.

Санкт Петербург – 2020

Оглавление	
Введение.....	3
Глава 1. Постановка задачи.....	13
1.1 Контактная задача.....	13
1.2 Контактная задача с учетом касательных смещений.....	17
1.3 Задача поиска расположения крепежных элементов при моделировании временной сборки.....	18
1.4 Задача поиска порядка установки крепежных элементов.....	21
Глава 2. Методы решения задач поиска наилучшего расположения и порядка крепежных элементов.....	24
2.1 Особенности задачи и выбор методов.....	24
<b>2.1.1 Комбинаторная оптимизация.....</b>	<b>24</b>
<b>2.1.2 Оптимизация черного ящика.....</b>	<b>27</b>
2.2 Алгоритм имитации отжига.....	30
2.3 Метод локальных вариаций (поиск восхождением).....	31
<b>2.3.1 Метод прямого поиска на адаптивных сетках.....</b>	<b>33</b>
2.4 Генетический алгоритм.....	36
2.5 Сравнение методов.....	37
<b>2.5.1 Оптимизации по одному зазору.....</b>	<b>38</b>
<b>2.5.2 Оптимизации по облаку зазоров.....</b>	<b>42</b>
Глава 3. Метод решения задач поиска наилучшего расположения крепежных элементов.....	45
3.1 Геодезический алгоритм поиска наилучшего расположения крепежных элементов.....	46
<b>3.1.1 Геодезическое расстояние.....</b>	<b>46</b>
<b>3.1.2 Вычисление поля давления и ранжирование отверстий.....</b>	<b>51</b>

3.1.3 Расстановка крепежных элементов.....	57
3.2 Примеры.....	64
Глава 4. Определения порядка установки крепежных элементов .....	79
4.1 Алгоритм определения порядка установки крепежных элементов..	79
4.2 Пример использования .....	81
Заключение .....	84
Список литературы .....	86

## **Введение**

### **Актуальность исследования**

Во многих областях машиностроения, таких как, например, авиастроение, кораблестроение или автомобильная промышленность, важной составляющей производственного процесса является сборка конструкций с использованием точечных соединений (сварка, клёпочные, болтовые соединения и проч.). Такие конструкции, как правило, имеют значительные размеры и сложную форму, легко деформируются. При этом, к качеству сборки, в том числе к допускам, предъявляются достаточно жесткие требования. На данный момент, только часть производственных процессов механизирована и автоматизирована, многие этапы вынужденно выполняются вручную, что увеличивает их трудоемкость и временные затраты. Одним из таких этапов в авиастроении является предварительная сборка, в ходе которой части соединяются временными крепежными элементами для последующего сверления или других операций. В связи с этим, временного крепежа должно быть достаточно для обеспечения достаточно плотного соединения деталей. При производстве кузовных конструкций машин для соединения отдельных деталей зачастую используется контактная точечная сварка, а сварные точки располагаются равномерно вдоль шва. Такое расположение не всегда является оптимальным для передачи силового потока, воспринимаемого соединением, и зачастую требует более детального исследования и оптимизации [1,2,3,4,5].

В то же время большое влияние на процесс сборки оказывает не только количество и расположение крепежных элементов, но и порядок их установки, поскольку для компенсации возникающих при соединении деформаций зачастую может потребоваться корректировка технологического процесса. Как было показано в [6] и [7], очередность сварки швов и, соответственно, последовательность формирования общей конструкции позволяют снизить возникающие деформации при сборке корпусов буровых платформ и танкеров, но при этом соблюсти необходимые требования к форме и размерам.

Подобные сложности возникают и в других отраслях машиностроения. Так, например, анализ процесса сборки вагона показывает значительное влияние способа закрепления его стенки на возникающие в процессе деформации и относительные перемещения собираемых частей [8].

В авиастроении процесс сборки является весьма сложным и включает в себя множественные операции по сверлению, а также временную сборку конструкции путём установки специальных крепёжных элементов в отверстия для постоянных заклепок, чтобы соединить детали и предотвратить открытие зазора при последующих манипуляциях [9, 10]. Сборка может занимать около 40% всего времени производства [11] из-за сверления тысяч отверстий и непрерывного контроля технологического процесса и качества сборки, выполняемых вручную. Предварительная сборка создает основу для обеспечения надежного контакта между соединяемыми деталями. Несмотря на их большой размер, требования к качеству сборки являются очень строгими, а зазор между соединяемыми поверхностями деталей должен находиться в определённых пределах после установки временного крепежа и в ходе операций сверления. При этом необходимо учитывать, что практически все детали неизбежно деформируются во время производства, транспортировки и установки на сборочной линии. Из-за вышеперечисленных факторов полный контакт во всей области соединения не может быть достигнут – всегда имеет место некоторый начальный зазор. Наличие остаточных зазоров между соединяемыми деталями на этапе временной сборки влияет на долговечность конечного продукта. Как отмечается в [9] и [10], этот зазор в дальнейшем может стать причиной вибраций во время сверления новых отверстий, из-за чего возникает их несоосность, а также увеличивается риск попадания стружки между соединяемыми деталями. Всё это может привести к повышенным механическим напряжениям в конструкции самолёта и в дальнейшем вызвать усталостные явления (в частности, развитие трещин), что может послужить причиной развития аварийных ситуаций. Поэтому, с одной стороны, крайне важно установить

достаточное количество временных крепежных элементов на определенных этапах, но с другой стороны, необходимо избежать установки их излишнего количества, поскольку установка и дальнейшее снятие крепежа – это трудоемкий ручной процесс, увеличивающий общее время производства.

Уменьшение числа крепежных элементов при временной сборке, а соответственно и числа выполняемых операций, при сохранении высоких стандартов качества, является важным фактором при оптимизации производственного процесса. Одним из наиболее эффективных путей решения данной задачи является использование математического моделирования на разных стадиях сборочного процесса. Моделирование процесса сборки влечет за собой необходимость проведения серийных расчетов. Это обусловлено тем, что каждая деталь в процессе производства и транспортировки неизбежно подвергается деформациям. В тоже время изделия внутри одной серии собираются по одним и тем же шаблонам, что не позволяет учесть индивидуальные особенности каждого элемента, однако качество сборки должно оставаться наилучшим, поэтому для учета всевозможных вариаций собираемых деталей необходимо использовать статистический анализ.

Таким образом, актуальной задачей является разработка алгоритма нахождения положения и порядка установки фиксирующих элементов при сборке авиационных конструкций, который бы позволил проводить серийные расчеты в приемлемое время без потери качества получаемых решений.

### **Степень разработанности проблемы**

На сегодняшний день задача нахождения расстановки крепежных элементов рассматривалась во многих работах. Зачастую решается задача оптимизации – необходимо улучшить уже имеющуюся (начальную) расстановку. В зависимости от области применения и направления исследования, функция цели, а также используемые методы оптимизации могут быть различны. При моделировании сборки с учетом контактного взаимодействия и решения возникающих в ее процессе задач (определение необходимых сил для качественной сборки, анализ допусков и т.д.). в

автомобильной промышленности широко используется метод коэффициентов влияния (MIC – Method of Influence Coefficients) и анализ вариаций формы [12, 13, 14]. Главный недостаток данной методики заключается в том, что учитывать контактное взаимодействие собираемых частей возможно только в предварительно заданных точках, а не по всей области соединения, что в дальнейшем не позволяет в полной мере анализировать качество сборки.

В ряде работ по оптимизации процесса сборки применяется генетический алгоритм и его модификации. Так, в работе [15] он используется для оптимизации положения временного крепежа с заданным начальными зазорами при сборке прототипа панели фюзеляжа. Целью оптимизации является нахождение расстановок фиксирующих элементов, сводящих начальные зазоры между деталями до заданного значения. Отверстия, в которые могут быть установлены крепежные элементы, располагаются группами (по 18, 21 и 23 отверстия), на каждой группе отверстий оптимизация производится отдельно (12 расчетов). В работе [1] авторы используют генетический алгоритм совместно с конечно-элементным анализом для оптимизации положения сварных точек. Точки располагаются на прямой стальной балке, имитирующей лонжерон кузова автомобиля. Целью оптимизации является нахождение минимального необходимого количества точек, обеспечивающего жесткость конструкции не хуже, чем при исходной процедуре сборки с 22мя точками. При этом сварные точки могут располагаться только в преопределённых узлах расчетной сетки. Комбинация генетического алгоритма и алгоритма имитации отжига была использована в работе [16] для нахождения оптимального положения 15 сварных точек при сборке кузова автомобиля с сохранением необходимой жесткости конструкции.

В работе [17] авторы, используя оптимизацию топологии, определяли наилучшее расположение крепежных элементов, а также определяли их минимальное возможное количество, для того, чтобы избежать зон сосредоточения напряжений, но обеспечить необходимое качество. Подобные

идеи использовались в [18], где позиции крепежных элементов не были определены заранее; вместо этого авторы рассматривали минимальное допустимое расстояние между соседними элементами. Метод, основанный на использовании матриц коэффициентов влияния, был предложен в [19] для оптимизации расположения креплений при сборке сваркой листовых панелей, что позволило автору избежать многократных вычислений функции цели, однако механические свойства деталей не принимались во внимание.

Основным недостатком описанных выше методов является их итерационный характер. Поскольку критерием качества полученной расстановки служит какая-либо механическая характеристика (конечный зазор [15], жесткость [1, 16], напряжения [17] и т.д.), любое изменение расположения крепежей влечет за собой необходимость ее вычисления. Это означает, что время работы алгоритма оптимизации увеличивается пропорционально времени вычисления необходимой механической характеристики. Так, например, для нахождения оптимальной расстановки из 4 элементов по 21 пустому отверстию с помощью генетического алгоритма потребовалось 12 минут [15], что накладывает ограничение на количество переменных для оптимизации (число фиксирующих элементов), а также делает невозможным проведение массовых расчетов на множестве реальных измерений (начального состояния системы до сборки). Последнее обстоятельство оказывается существенно важным, поскольку большая часть соединений собирается по одним и тем же шаблонам внутри одной серии производства. В работе [1] оптимальное положение 22х сварных точек было найдено с использованием генетического алгоритма на 25м поколении с популяцией в 40 особей (порядка 1000 вычислений функции цели). Необходимо отметить, что при решении реальных задач количество крепежей и возможных позиций их размещения исчисляется сотнями. Это означает, что время работы подобных методов значительно возрастет.

## **Цели и задачи исследования**

Цель исследования состоит в разработке нового метода выбора расположения крепежных элементов, а также метода выбора порядка их установки, адаптированных под особенности решаемых задач при сборке авиационных конструкций. В данной работе рассматривается задача оптимизации сборочного процесса с помощью методов математического моделирования – повышение качества соединения и ускорение сборки за счет уменьшения числа временных крепежных элементов.

В ходе работы были поставлены и решены следующие задачи:

- провести анализ существующих методов, используемых для решения задач оптимизации расположения, числа и порядка установки крепежных элементов применительно к исследуемым задачам нахождения расположения крепежных элементов и порядка их установки;
- разработать новый метод выбора расположения временных крепежных элементов при математическом моделировании сборки авиационных конструкций, позволяющий максимально эффективно использовать особенности рассматриваемых задач;
- разработать новый метод выбора порядка установки крепежных элементов при математическом моделировании сборки авиационных конструкций, позволяющий максимально эффективно использовать особенности рассматриваемых задач;
- реализовать разработанные методы в рамках имеющегося программного комплекса для математического моделирования сборочных процессов;
- верифицировать разработанные методы путем сравнения полученных результатов с результатами, полученными существующими методами на модельных задачах;
- применить разработанные методы к решению полноразмерных задач сборки, в том числе для множества начальных состояний, полученных в результате измерений.

## **Методологическая и теоретическая основа исследования**

Основу настоящей работы преимущественно составили труды зарубежных и российских авторов, как в области численных методов безградиентной оптимизации [28, 43, 36], так и в области решения комбинаторных задач, например, [24]. Также затронуты вопросы теории решения контактных задач [10], вычислительной геометрии [68] и задач упаковки [20].

Расчётные процедуры реализованы в виде комплекса компьютерных программ на языке программирования C++. В силу специфики работы верификация результатов в основном производится путем сравнения с широко используемыми методами решения подобных задач.

## **Научная новизна исследования**

В диссертации предложены новые методы определения положения и порядка фиксирующих элементов при сборке авиационных конструкций. Эти методы позволяют учитывать механические свойства скрепляемых деталей, не требуют вычисления производных функции цели и не имеют итерационной структуры. Это позволяет проводить массовые расчеты на полномасштабных моделях реальных соединений, в том числе с учетом начальных данных, полученных при измерениях большого количества типовых соединений, в то время как большинство имеющихся исследований посвящено использованию эвристических алгоритмов, методов Монте-Карло или квазиньютоновских методов применительно к модельным задачам или реальным задачам с небольшим числом переменных (до 100). Разработанные методы успешно применены как для решения модельных задач, так и для полномасштабных задач, возникающих при моделировании сборочного процесса.

## **Достоверность результатов**

Достоверность полученных результатов подтверждается сравнительным анализом с результатами, полученными с помощью опубликованных в литературе методов, используемых при решении подобного рода задач, а

также сравнением с точным решением задачи оптимизации, полученным с помощью полного перебора.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

В работе сформулированы универсальные постановки задач оптимизации числа, расположения и порядка установки крепежных элементов при сборке авиационных конструкций, применимые к любым другим задачам о точечном соединении частей (сварка, болтовое соединение и т.д.). Разработаны и верифицированы методы выбора расположения и порядка установки временных крепежных элементов.

Работа над диссертацией велась в рамках совместных проектов СПбГПУ и компании AIRBUS. Программный комплекс, в основе которого лежит разработанная методика, включён в план внедрения в компанию AIRBUS.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Впервые предложены универсальные постановки задач оптимизации числа, расположения и порядка установки крепежных элементов при сборке авиационных конструкций.
2. Разработан новый безитерационный метод поиска расположения крепежных элементов при сборке авиационных конструкций.
3. Разработан новый безитерационный метод определения порядка крепежных элементов при сборке авиационных конструкций.
4. На базе вычислительного эксперимента проведено сравнения разработанных методов с наиболее часто используемым методами.

### **Апробация результатов исследования**

Результаты работы докладывались:

1. на конференции с международным участием «Неделя Науки СПбПУ 2015», г. Санкт-Петербург, Россия.
2. на международной конференции «Суперкомпьютерные дни в России 2018», г. Москва, Россия.

3. на международной конференции «2018 Global Smart Industry Conference», г. Челябинск, Россия.
4. на конференции с международным участием «Неделя Науки СПбПУ 2018», г. Санкт-Петербург, Россия.
5. на международной конференции «SAE 2019», г. Бордо, Франция.
6. на международной конференции «INTERNATIONAL YOUTH CONFERENCE ON ELECTRONICS, TELECOMMUNICATIONS AND INFORMATION TECHNOLOGIES» 2019, г. Санкт-Петербург, Россия.
7. на международной конференции «53rd CIRP Conference on Manufacturing Systems 2020», г. Чикаго, США.
8. на международной конференции «Суперкомпьютерные дни в России 2020», г. Москва, Россия.
9. на семинарах научно-исследовательской лаборатории «Виртуально-имитационного моделирования», 2016-2020 (Санкт-Петербург, Россия).

Работа поддержана грантом Правительства Санкт-Петербурга для аспирантов ВУЗов и академических институтов в 2019 году. По теме работы опубликовано 11 статей, в том числе 8 в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных журналов и изданий ВАК.

### **Структура работы**

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 93 страницы. В тексте содержится 53 рисунка, 6 таблиц. Список литературы включает 71 наименование.

Во введение обозначена актуальность исследования, сформулированы цели и задачи работы, а также положения, выносимы на защиту.

Первая глава посвящена описанию специальной модели сборки, методу решения контактной задачи. Так же в ней сформулированы универсальные постановки задач оптимизации числа, расположения и порядка установки крепежных элементов при сборке авиационных конструкций.

Вторая глава посвящена описанию основных особенностей поставленных задач, обзору основных групп методов их численного решения, сравнительному анализу указанных методов и выбору методов для дальнейшего сравнения.

Третья глава описывает предложенный в работе метод решения задач поиска наилучшего расположения крепежных элементов, называемый геодезическим алгоритмом. Он состоит из трех основных частей – вычисления поля сил, которые необходимо приложить для сведения начального зазора между деталями и построения карт геодезических расстояний между возможными положениями установки крепежных элементов. Приведены несколько примеров работы предложенного метода, в том числе его пошаговое описание. Полученные результаты сравниваются с результатами работы методов, выбранных в главе 2.

Четвертая глава описывает предложенный в работе метод решения задачи определения порядка установки крепежных элементов. Приведен пример работы предложенного метода и сравнение результата его работы с точным решением, полученным методом полного перебора.

## Глава 1. Постановка задачи

Для решения исследуемых в данной работе задач нахождения расположения и порядка установки крепежных элементов необходимо вычисление некоторой целевой функции, которая должна давать представление о качестве получаемого соединения. В авиастроении основной характеристикой предварительного (временного) соединения является результирующий (остаточный) зазор между соединяемыми деталями конструкции после установки крепежных элементов. Для определения напряжённо-деформированного состояния собираемой конструкции необходимо решить контактную задачу. В связи с этим, в первой части данной главы приводятся постановки решаемых контактных задач, а после формулируются непосредственно несколько вариантов задач оптимизации сборочного процесса.

### 1.1 Контактная задача

Во время сборки самолета необходимо контролировать как зазоры между соединяемыми деталями, так и напряжения. С одной стороны, начальный зазор между деталями должен быть сведен полностью, а с другой стороны, необходимо избегать трещин и расслоения деталей, преимущественно изготовленных из композитных материалов, которые могут возникнуть из-за напряжений от установленных фиксирующих элементов. Исходя из этого, при оптимизации расстановки необходимо определять зазор между деталями, а также возникающие напряжения.

В данной работе рассматривается особый класс контактных задач [21], используемый для моделирования процесса соединения деталей. Эти контактные задачи имеют следующие характерные особенности:

- Зона возникновения контакта известна заранее (далее – *зона стыка*);

- Касательные перемещения пренебрежимо малы вследствие установки крепёжных элементов по сравнению с нормальными, что дает возможность рассматривать модель контакта “узел в узел”;
- Задача является стационарной;
- Ввиду небольших касательных смещений, трение можно исключить из рассмотрения;
- Напряженно-деформированное состояние каждой собираемой описывается линейной теорией упругости.

Математически такая контактная задача формулируется как задача поиска минимума энергии квадратичного функционала при наличии линейных ограничений. Используя стандартный метод конечных элементов, согласно [21] задача может быть переформулирована как дискретная вариационная в виде:

$$\min_{x \in S_h} \left( \frac{1}{2} x^T K \cdot x - F^T x \right), \quad (1)$$

где  $x$  – вектор перемещений узлов конечных элементов всех частей сборки,  $K$  – матрица жесткости системы конечных элементов,  $F$  – вектор приложенных сил,  $S_h$  – допустимое множество перемещений.

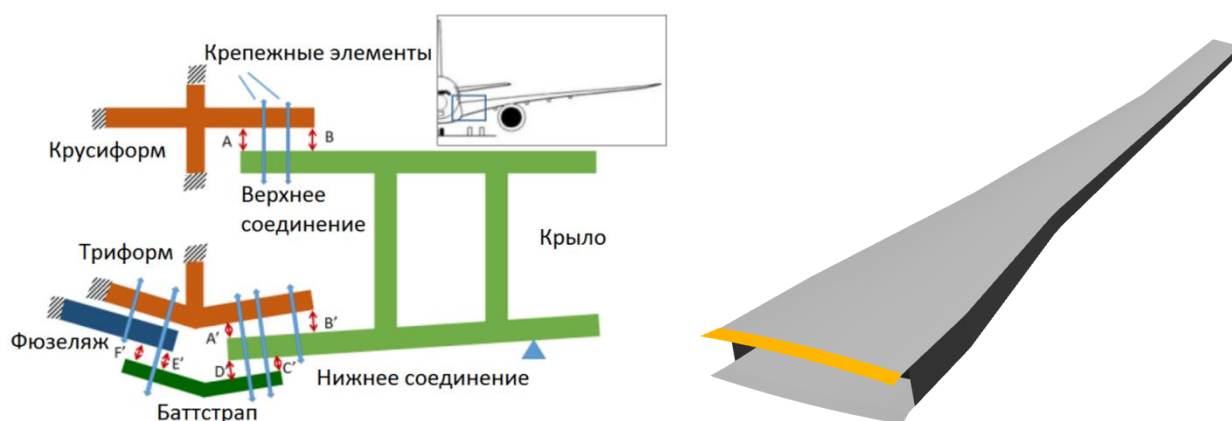


Рисунок 1 – слева представлена схема соединения частей центроплана, справа представлена зона соединения крыла и фюзеляжа (оранжевая полоса)

В ряде работ [10, 22, 21] авторами был предложен подход, позволяющий существенно уменьшить размерность решаемой задачи и выполнять расчеты

в пределах зоны стыка (рис. 1) за счет исключения из рассмотрения узлов, не входящих в эту зону, но с учетом их влияния на узлы в зоне контакта. Этот подход, во-первых, позволяет намного быстрее пересчитывать решение при изменениях таких параметров задачи как начальный зазор, расположение крепежных элементов или приложенные нагрузки, а, во-вторых, не требует использования времязатратных процедур поиска зоны контактного взаимодействия. Далее опишем основные идеи данной методики.

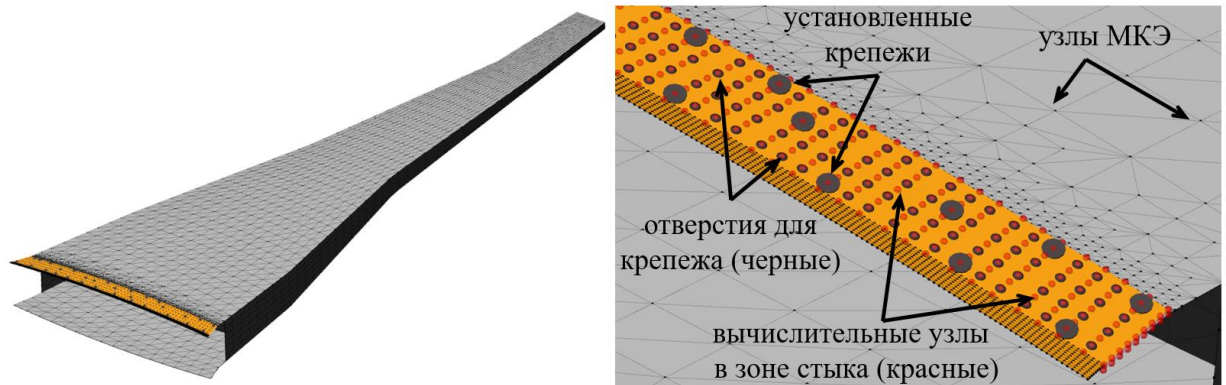


Рисунок 2 –конечно-элементная модель соединения крыла и фюзеляжа

Из множества всех конечно-элементных узлов рассматриваемых деталей выбирается подмножество узлов, лежащих в зоне стыка (далее – *вычислительные узлы*, рисунок 2). Таким образом вектор перемещения узлов конечных элементов всех частей сборки  $x \in S_h$  может быть представлен как  $x = \begin{pmatrix} u \\ u_R \end{pmatrix}$ , где  $u$  – вектор перемещений вычислительных узлов, ограниченных

условиями непроникновения деталей,  $u_R$  – вектор остальных, неограниченных, перемещений всех остальных узлов. Подобным образом может быть

представлен и вектор приложенных сил  $F = \begin{pmatrix} F_C \\ F_R \end{pmatrix}$ , где  $F_C$  – вектор сил,

приложенных в расчетных узлах,  $F_R$  – вектор сил, приложенных в остальных узлах. Тогда матрица жесткости системы конечных элементов  $K$  может быть

записана в блочном виде:  $K = \begin{pmatrix} K_{CC} & K_{CR} \\ K_{CR}^T & K_{RR} \end{pmatrix}$ .

Редуцированная матрица жесткости  $K_C$  вычисляется как дополнение Шура матрицы  $K_{RR}$  и оказывается связанной с глобальной конечно-элементной матрицей жесткости  $K$  по формуле  $K_C = K_{CC} - K_{CR} \cdot K_{RR}^{-1} \cdot K_{CR}^T$ . Тогда согласно [Introб] исходная задача (1) может быть приведена к эквивалентному виду, более удобному для вычисления вектора перемещений  $u$ :

$$\min_{u \in U_A} \left( \frac{1}{2} u^T K_C u - F_C^T u \right), \quad (2)$$

где  $U_A = \{u: g^{res} = g - A^T u \geq 0\}$  – допустимое множество, определяемое условием непроникновения,  $g^{res}$  – вектор результирующего зазора,  $F_C$  – вектор приложенных нормальных сил в зоне стыка (например, от крепежных элементов или сварки);  $K_C$  – редуцированная матрица жесткости;  $A$  – линейный оператор, определяющий нормальное направление к контактной поверхности,  $g$  – начальный зазор в зоне стыка, который представляет собой начальное расстояние по нормали между узлами, которые могут прийти к контактному взаимодействию.

На основе квадратичной задачи программирования (2) в [21] была сформулирована специальная модель сборки, включающая в себя:

- $\{c_i\}_{i=1, n_{cn}}$  – вычислительные узлы в зоне стыка (рис. 2);
- Матрицы  $A$  и  $K_C$ , описывающие общую топологию соединения, крепление деталей и их механические свойства;
- Позиции отверстий для установки крепежных элементов в зоне стыка  $H = \{h_i\}_{i=1, n_h}$ , где  $n_h$  – их общее число. Используются для интерполяции нагрузок от крепежных элементов на вычислительные узлы.
- Расположение крепежных элементов, установленных в отверстиях (далее *расстановка*). Описывается набором занятых отверстий  $H^0 = \{h_i^0\}_{i=1, n_f} \subset H$ , где  $n_f$  – общее количество установленных крепежных элементов. В дальнейшем эти данные используются для построения вектора  $F_C$  приложенных нормальных сил в зоне стыка.

- Вектор начального зазора  $g$ . Начальный зазор между частями в большинстве случаев определяется как случайное поле, и множество (далее *облако*) таких зазоров  $G = \{g_k\}_{k=1, n_g}$ , где  $n_g$  – общее количество зазоров в облаке, генерируется на основе статистического анализа доступных измерений и допусков [23].

Вектор результирующего зазора  $g^{res} = \{g^{res}\}_{i=1, n_u}$  между частями после установки крепежных элементов вычисляется на основе решения задачи (2):

$$g^{res} = -A^T u + g. \quad (3)$$

Вектор результирующего зазора  $g^{res} = g^{res}(g, H^0)$  является неотрицательной функцией начального зазора  $g$  и расстановки крепежных элементов  $H^0$  (условие непроникновения  $A^T \cdot u \leq g$ ).

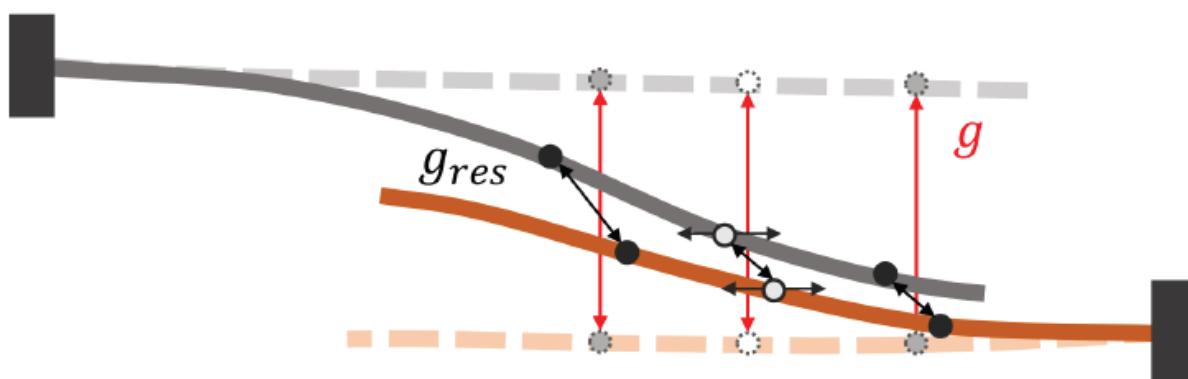


Рисунок 3 – схематичное изображение начального зазора  $g$  между двумя частями и результирующего зазора  $g^{res}$  после установки двух крепежных элементов

## 1.2 Контактная задача с учетом касательных смещений

Процесс сборки частей планера самолета включает в себя в том числе сверление отверстий в деталях, закрепленных на сборочной стойке. Отверстия просверливаются в определённом порядке и сразу после сверления в них устанавливаются временные крепежные элементы. Это означает, что относительные касательные смещения деталей, которые имели место во время

сверления, будут зафиксированы (рис. 4) при установке крепежного элемента в только что просверленное отверстие. Данный эффект не всегда является значительным, однако, для достаточно гибких деталей с высокой кривизной (например, панели фюзеляжа) он оказывается очень важным. Чтобы учесть порядок установки крепежных элементов, необходимо моделировать их установку последовательно – одного за другим. Для этого необходимо дополнить допустимое множество  $U_A$  (2) дополнительными ограничениями после установки каждого крепежного элемента. Эти ограничения делают решение зависимым от порядка установки и не позволяют изменить конфигурацию расстановки без пересчета с самого первого установленного элемента.

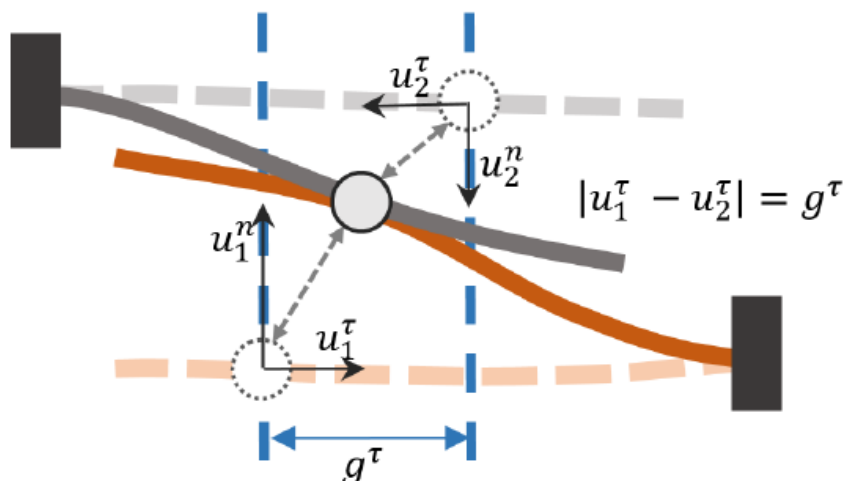


Рисунок 4 – относительные касательные смещения при установке крепежного элемента

### 1.3 Задача поиска расположения крепежных элементов при моделировании временной сборки

При осуществлении временной сборки авиационных конструкций необходимо выбрать из существующего множества возможных позиций для установки те, занятие которых обеспечит достижение заданной цели на том или ином этапе. Соответственно, задача поиска расстановки фиксирующих элементов может быть сформулирована по-разному в зависимости от целей

дальнейшего использования результатов, однако в любом случае в процессе решения задачи необходимо определить положения фиксирующих элементов, которые обеспечат достаточное качество соединения (то есть сведут начальный зазор между деталями до заданного диапазона значений). Рассмотрим несколько возможных формулировок данной задачи.

*Задача 1. Минимизация максимального значения зазора.* Для заданного числа крепежных элементов с заданными силами определить их расположение в имеющихся отверстиях так, чтобы оно обеспечивало минимальное значение максимального зазора в вычислительных узлах зоны стыка для всех начальных зазоров из облака.

Величина максимального зазора  $g_{max}^{res}$  для некоторой расстановки  $H^0$  и облака начальных зазоров  $G$  может быть вычислена как

$$g_{max}^{res}(H^0) = \max_{g_k \in G} \left( \max_{i=1, n_u} g_i^{res}(g_k, H^0) \right). \quad (4)$$

Тогда задача оптимизации формулируется следующим образом: требуется найти такую расстановку  $H_*^0$  из  $n_*$  крепежных элементов

$$H_*^0 = \arg \min_{H^0, |H^0|=n_*} (g_{max}^{res}(H^0)). \quad (5)$$

*Задача 2. Минимизация вероятности дефекта.* Для заданного числа крепежных элементов с заданными силами определить их расположение в имеющихся отверстиях так, чтобы оно обеспечивало минимальную вероятность дефекта в зоне стыка для всех начальных зазоров из облака.

Будем называть вычислительный узел “дефектным”, если значение результирующего зазора, вычисляемое для заданной расстановки крепежей  $H^0$  и начального зазора  $g$ , превосходит некоторое заданное значение  $g_*$  (рис. 5).

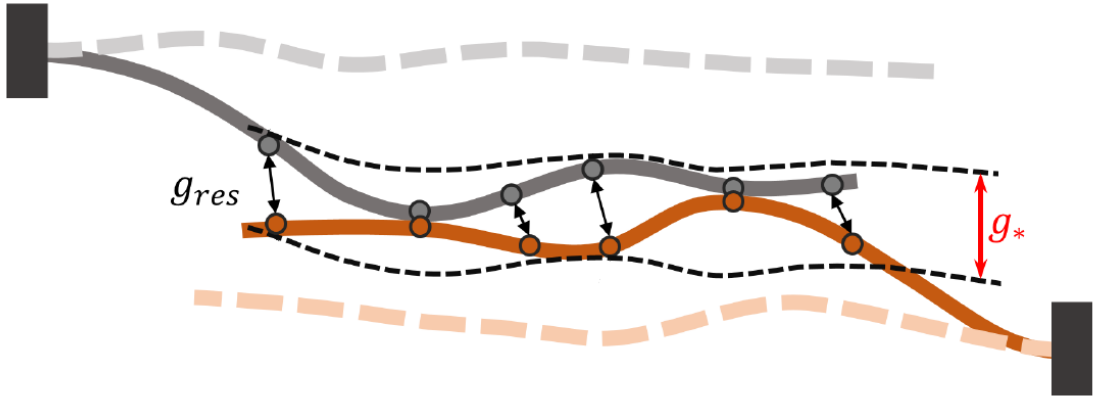


Рисунок 5 – результирующий зазор  $g^{res}$  после установки крепежа не превосходит значение  $g_*$

Вероятность дефекта  $P_d$  определяется как отношение количества дефектных узлов к общему количеству узлов

$$P_d(H^0, g) = \frac{\sum_{i=1}^{n_u} \theta(g_i^{res}(g, H^0) - g_*)}{n_u}, \quad (6)$$

где  $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$  – ступенчатая функция Хевисайда. В случае оптимизации по облаку начальных зазоров  $G$ , выражение (6) примет вид:

$$P_d(H^0, G) = \frac{\sum_{k=1}^{n_g} \sum_{i=1}^{n_u} \theta(g_i^{res}(g_k, H^0) - g_*)}{n_g n_u}. \quad (7)$$

Тогда задача оптимизации может быть сформулирована следующим образом: найти такую расстановку  $H_*^0$  из  $n_*$  крепежных элементов, что

$$H_*^0 = \arg \min_{H^0, |H^0|=n_*} (P_d(H^0)). \quad (8)$$

*Задача 3. Поиск минимального числа и положения фиксирующих элементов.* Требуется найти расстановку  $H_*^0$  минимального размера, обеспечивающую значение результирующего зазора во всех вычислительных узлах не более некоторого значения  $g_*$

$$n_f(H_*^0) = \min_{\substack{H^0, |H^0|=n_f \\ g_{max}^{res}(H^0) \leq g_*}} (n_f). \quad (9)$$

Несмотря на то, что основная цель всех трех постановок задачи заключается в нахождении расстановки крепежей, способной свести начальный зазор до некоторого допустимого значения, выбор функции цели оказывает значительное влияние на результаты, что будет продемонстрировано разделе 2.4.1.

#### 1.4 Задача поиска порядка установки крепежных элементов

В практике сборки самолетов очень важно правильно выбрать порядок установки временного крепления. Временные крепежные элементы устанавливаются сразу после просверливания отверстий и фиксируют относительные тангенциальные смещения деталей, возникающие при сверлении. Таким образом, необходимо моделировать установку каждого крепежа поочередно. Данное обстоятельство существенно усложняет моделирование процесса сборки и становится оправданным только в том случае, если эффект значительный, например, для достаточно гибких деталей и панелей с большой кривизной (например, панелей фюзеляжа).

*Задача 4. Поиск порядка установки крепежных элементов, обеспечивающего минимально возможное значение максимального зазора.* Для заданной расстановки  $H^0$  из  $n_f$  крепежных элементов требуется определить порядок их установки, обеспечивающий минимально возможное значение максимального результирующего зазора. Расстановка  $H^0$  описывается набором занятых отверстий  $H^0 = \{h_i^0\}_{i=1, n_f}$ . Пронумеруем эти отверстия, поставив каждому из них в соответствие некоторый номер, и получим множество  $J = \{j_i\}_{i=1, n_f}$ , где  $j_i$  – номер, соответствующий занятому отверстию  $h_i^0$ . Тогда всевозможные порядки установки элементов  $H^0$  соответствуют всем перестановкам из  $n_f$  элементов множества  $J$ :

$$\begin{aligned} J_{n_f} &= \{\pi^j\}_{j=1, n_f!} = \{ \{ \pi_k^j \}_{k=1, n_f} \}_{j=1, n_f!} = \\ &= \{ \{ j_1, j_2, \dots, j_{n_f-1}, j_{n_f} \}, \{ j_1, j_2, \dots, j_{n_f}, j_{n_f-1} \}, \dots, \{ j_{n_f}, j_{n_f-1}, \dots, j_2, j_1 \} \} \end{aligned} \quad (10)$$

Пронумеруем эти отверстия, поставив каждому из них в соответствие некоторый номер от 1 до  $n_f$ , и получим вектор  $hn = (hn_1, hn_2, \dots, hn_{n_f})$ , где  $hn_i$  – номер, согласно которому в отверстие  $h_i^0$  будет установлен крепежный элемент. Тогда множество всевозможных порядков установки элементов в расстановке  $H^0$  имеет размерность  $n_f!$  и соответствует всем перестановкам без повторений из  $n_f$  элементов  $Hn = \{hn_i\}_{i=1, n_f}$ .

Рассмотрим некоторый порядок установки  $hn^j$  для расстановки  $H^0$ . При учете порядка установки для расчета результирующего зазора необходимо решить последовательно  $n_f$  контактных задач с расстановками из 1, 2, 3, ...,  $n_f$  крепежных элементов соответственно. Сначала решается контактная задача с начальным зазором  $g$  для нахождения результирующего зазора  $g^{res}(g, (hn_1^j))$  после установки первого крепежного элемента в отверстие  $hn_1^j$ .

Рассмотрим некоторый порядок установки  $\pi^j = \{\pi_1^j, \pi_2^j, \dots, \pi_{n_f}^j\}$  для расстановки  $H^0$ . После установки первого крепежного элемента  $\pi_1^j$  и решения контактной задачи (2) с начальным зазором  $g$  и вектором приложенных сил, соответствующим установленному крепежу, результирующий зазор  $g^{res}(g, \{\pi_1^j\})$  будет выступать начальным зазором для новой контактной задачи вида (2), но с измененными параметрами:

$$\min_{u \in U_A^1} \left( \frac{1}{2} u^T K_C u - F_{1C}^T u \right), \quad (11)$$

где  $U_A^1 = \{u: g^{res} = g^{res}(g, (\pi_1^j)) - A^T u = g^1 - A^T u \geq 0\}$  с дополнительным ограничением  $g_\tau^1 - A^T u_\tau = 0$  на относительные касательные перемещения в узле, соответствующем отверстию, в которое только что был установлен крепежный элемент. Предположим, что был установлен  $n_f - 1$  крепежный элемент. Тогда величина максимального зазора  $g_{max}^{res}$  для некоторого порядка  $\pi^j$  установки  $n_f$  элементов и начального зазора  $g$  может быть вычислена по формуле

$$g_{max}^{res}(\pi^j) = \max_{i=1, n_u} g_i^{res} \left( g^{j-1}, (\pi_1^j, \pi_2^j, \dots, \pi_{n_f}^j) \right), \quad (12)$$

где  $g^{j-1}$  – вектор результирующего зазора после установки  $n_f - 1$  крепежного элемента. В случае облака начальных зазоров соотношение (12) примет вид

$$g_{max}^{res}(\pi^j) = \max_{g_k \in G} \left( \max_{i=1, n_u} g_i^{res} \left( g_k^{j-1}, (\pi_1^j, \pi_2^j, \dots, \pi_{n_f}^j) \right) \right). \quad (13)$$

Тогда задача поиска порядка расстановки формулируется следующим образом: найти расстановку  $\pi^*$

$$\pi^* = \arg \min_{\pi^j \in J_{n_f}} \left( g_{max}^{res}(\pi^j) \right). \quad (14)$$

## Глава 2. Методы решения задач поиска наилучшего расположения и порядка крепежных элементов

В этом разделе рассмотрим основные особенности рассматриваемых задач оптимизации и методы, наиболее часто используемые для решения задач подобного вида, проведен их сравнительный анализ.

### 2.1 Особенности задачи и выбор методов

В рассматриваемой задаче существуют некоторые основные особенности, накладывающие существенные ограничения на выбор методов ее решения:

1. крепежи могут быть поставленные только в уже просверленные отверстия, т.е. их потенциальные позиции предопределены заранее, и отверстие может быть либо свободно, либо занято;
2. необходимость решения времязатратной контактной задачи после каждого изменения конфигурации крепежных элементов;
3. сложный вид функции цели (*задачи 1-4* из разделов 1.3-1.4) не позволяет использовать методы, основанные на вычислении производных.

#### 2.1.1 Комбинаторная оптимизация

Согласно [24, 25,], задачи определения числа и предъявления самих элементов конечного множества, обладающего некоторым свойством (или совокупностью), относятся к основным задачам комбинаторики. Согласно [24], комбинаторная задача называется *переборной*, если в ней требуется найти один некоторый элемент из ее множества решений. *Задача перечисления*, соответствующая некоторой переборной задаче, заключается в определении мощности множества решений данной переборной задачи. Если задача позволяет ввести функцию величины на множестве решений и, тем самым, произвести упорядочение этого множества, то обычно можно сформулировать задачу *комбинаторной оптимизации*: определить подмножество решений

исходной задачи, для которого функция величины максимальна (минимальна), а также определить соответствующий максимум (минимум).

Таким образом, первая особенность означает, что все задачи 1-4, описанные в параграфе, относятся к комбинаторным, поскольку поиск решения осуществляется среди предопределенного конечного множества отверстий. В тоже время, в задаче 3 (поиск минимального числа и положения фиксирующих элементов) можно отдельно выделить задачу перечисления. Действительно, для определения расстановки крепежей минимального размера с определенным свойством (после установки зазор не более определенного значения), требуется сначала найти все расстановки, обладающие этим свойством, после чего выбрать одну.

Первая и вторая особенности накладывают существенные ограничения на выбор методов. В реальных задачах число отверстий исчисляется сотнями, а количество крепежей, которые требуется установить, обычно соответствует половине от количества отверстий [26, 27], перебор всех возможных вариантов с решением контактной задачи для каждого из них не представляется возможным: в случае поиска наилучшей расстановки фиксированного размера необходимо проверить все возможные сочетаний без повторов (в случае, когда порядок установки не учитывается) из  $n_h$  по  $n_f$ , то есть перебор  $C_{n_h}^{n_f} = \frac{n_h!}{n_f!(n_h-n_f)!}$  вариантов (при  $n_h = 200$  и  $n_f = 100$ ); в случае определения порядка установки для расстановки из  $n_f$  элементов, потребуется проверить  $n_f!$  вариантов.

Если предположить, что зона стыка рассматриваемого соединения настолько велика, что пустые отверстия располагаются так далеко друг от друга, что установка нового крепежа не вызывает деформации детали в области возможной установки других крепежей, то задача 1 может быть сведена к известной задаче о рюкзаке [24]: заданы конечное множество  $U$ , положительны целые числа  $B$  и  $K$  а также размеры  $s(u)$  и стоимость  $v(u)$  для каждого элемента  $u \in U$ . Требуется определить такое подмножество  $U' \subset U$ ,

что  $\sum_{u \in U} s(u) \leq B$  и  $U' = \arg \max_{U' \subset U} \sum_{u \in U'} v(u)$ . Это наблюдение позволяет полагать, что исходная задача окажется заведомо труднее.

Ситуация, в которой установленные крепежные элементы не оказывают влияние друг на друга, является нехарактерной для сборки авиационных конструкций. Основная сложность описанных задач оптимизации заключается как раз в том, что нельзя оценить каждый фиксирующий элемент отдельно, поскольку установка нового крепежного элемента существенно влияет на положение всей зоны стыка и классифицировать установленные крепежи в рассматриваемой зоне стыка можно только в совокупности [sae11].

Про задачу о рюкзаке известно, что она является NP-полной, то есть не может быть решена за полиномиальное время. Большинство методов решения подобных задач можно разделить на группы:

1. методы Монте-Карло,
2. эвристические методы,
3. методы локального поиска.

Среди первой группы методов можно выделить широко используемый алгоритм имитации отжига. Серия работ [28] (из 16 статей) посвящена различным вариантам применения данного алгоритма для решения задач комбинаторной оптимизации из различных областей, в том числе NP-трудных задач (квадратичная задача о назначениях, задача разбиения множества чисел, задача о коммивояжере), задач распознавания изображений, задач размещения. В работе [29] рассматривается задача, похожая по структуре на описанные выше задачи оптимизации 1-3. В центре исследования находится оптимизационная задача поиска расположения сирен, оповещающих гражданское население, с нелинейной функцией цели для увеличения числа оповещенных людей при ограниченных финансовых затратах, решаемая алгоритмом имитации отжига. Статья [30] посвящена поиску алгоритмом имитации отжига оптимального положения ветряных турбин, которые,

аналогично задаче позиционирования крепежа, перемещаются одна за другой в некотором определенном радиусе.

Среди второй группы методов можно выделить генетический алгоритм, как наиболее часто используемый при решении как различных NP-полных задач [31, 32,33,34], так и задач поиска оптимального расположения крепежей в различных областях машиностроения [1, 15, 3, 16, 35]. Среди третьей группы методов можно выделить генетический алгоритм, алгоритм имитированного отжига, поиск восхождением, который, как отмечают авторы [36], часто позволяет получить приемлемое решение. Также в литературе часто встречается метод ветвей и границ как вариант метода для решения комбинаторных задач.

Несмотря на часто высокую эффективность, метод ветвей и границ основан на идее разбиения множества решений на подмножества и нахождении для каждого из них нижней границы значений минимизируемой функции [25], что в рассматриваемых случаях оказывается отдельной трудновыполнимой задачей, как ввиду мощности множества решений ( $2^{n_h}$ , где  $n_h$  - число пустых отверстий, где возможно установить крепежные элементы), так и из-за сложной зависимости функции цели от установки нового крепежа. В тоже время, жадный алгоритм не обладает подобными недостатками и зачастую может оказаться достаточно эффективным при решении задач комбинаторной оптимизации [24, 37, 38, 39]. В работе [29]], посвященной поиску оптимального расположения сирен и описанной выше, помимо алгоритма имитации отжига был также реализован жадный алгоритм, показавший близкие результаты относительно алгоритма имитации отжига как по времени, так и по точности найденного решения.

### ***2.1.2 Оптимизация черного ящика***

Сложный вид функций цели задач оптимизации 1-3, их неявная зависимость от расстановки крепежных элементов, а также возможность

оценки целевой функции только в конкретной точке (определение результирующего зазора возможно только для конкретной расстановки) при недоступности информации о ее свойствах и поведении, позволяют отнести рассматриваемые задачи оптимизации к типу «черный ящик» [40, 41, 42]. В качестве дополнительного ограничения на выборы методов для решения поставленных задач выступает бинарный (отверстие занято или свободно) или целочисленный (порядковые номера занятых отверстий) характер переменных. Как отмечается в монографиях [42-43], посвященных обзору безградиентных методов и методов решения задач оптимизации «черного ящика», для решения задач с описанными свойствами выделяют эвристические методы (генетические алгоритмы, алгоритм имитации отжига и алгоритм Нелдера-Мида), а также методы прямого поиска.

Среди первой группы методов можно выделить генетический алгоритм и алгоритм имитации отжига, так как они успешно используются и при решении задач комбинаторной оптимизации разной сложности, как было описано выше. Среди второй наибольшее внимание привлекает алгоритм прямого поиска с адаптивной сеткой (*mesh adaptive direct search*, далее *MADs*), поскольку он был успешно применен как в ряде задач поиска лучшего положения [42-43, 44], так и при решении NP-трудных и -полных задач комбинаторной оптимизации [45-46].

В ряде работ было произведено сравнение эффективности использования генетического алгоритма, алгоритма имитации отжига и *MADs*. В работе [47] сравниваются 4 метода (алгоритм на основе суррогатной модели, генетический алгоритм, метод ветвей и границ и *MADs*, реализованный в приложении *NOMAD*) для оптимизации времязатратных (с вычислительной точки зрения) функций «черного ящика» с целочисленными переменными. Авторы сравнивают методы по результатам решения 16 различных тестовых задач. Задачи отличаются типами ограничений, накладываемых на функцию цели, унимодальностью и мультимодальностью функции цели; также рассматриваются две прикладные задачи оптимизации

механических конструкций. Наихудшие результаты были получены методом ветвей и границ, в то время как MADs показал себя как эффективный метод при решении практически всех рассматриваемых задач, но в некоторых задачах лучшие результаты были получены генетическим алгоритмом. В работах [48-49] решается задача оптимизации структуры полимера путем нахождения наилучшего положения атомов. Авторы рассматривают алгоритм имитации отжига, генетический алгоритм и один из методов группы прямого поиска. Авторы отмечают, что в зависимости от размерности решаемой задачи, алгоритм имитации отжига показывает существенно разные результаты. При решении задач большой размерности он существенно уступает генетическому алгоритму, который, в свою очередь, позволяет получить результаты, очень близкие к результатам работы методов группы прямого поиска. В диссертации [50] автор рассматривает различные варианты задачи о рюкзаке с бинарными переменными и несепабельной функцией цели, решаемые 3 основными методами – ветвей и границ, генетическим алгоритмом и алгоритмом на основе жадного выбора. В работе отмечается, что метод ветвей и границ оказывает наихудшим с вычислительной точки зрения, поскольку время его работы растет экспоненциально в зависимости от размера задачи; наилучшие результаты за приемлемое время были получены генетическим алгоритмом; алгоритм на основе жадного выбора в ряде тестовых задач позволяет получить лучшие результаты относительно метода ветвей и границ. В тоже время в работе [51] авторами представлена параллельная версия алгоритма имитации отжига, успешно примененная для решения бинарной задачи о рюкзаке.

Таким образом, исходя из обзора описанных выше работ и особенностей решаемой задачи, для реализации и дальнейшего применения к решению поставленных задач оптимизации были выбраны следующие четыре метода, как наиболее эффективные при решении подобных задач и относящиеся к различным группам методов оптимизации:

1. Метод прямого поиска на адаптивных сетках (Mesh Adaptive Direct Search, MADS), методы прямого поиска;
2. Поиск восхождением;
3. Генетический алгоритм, эвристический метод;
4. Алгоритм имитации отжига, метод Монте-Карло.

Все эти методы применяются как для решения задач комбинаторной оптимизации различной сложности, так и для решения задач оптимизации «черного ящика» с целочисленными (в том числе бинарными) переменными, в которых вычисления значений функции цели является времязатратной операцией.

## 2.2 Алгоритм имитации отжига

Алгоритм имитированного отжига (имитация отжига) широко используется для поиска глобального минимума, особенно когда пространство поиска дискретно и число переменных существенно. Идея этого метода исходила из физической аналогии с отжигом в металлообрабатывающей промышленности [11] и сейчас широко применяется для решения задач комбинаторной оптимизации.

Метод имеет два основных параметра – начальную температуру  $T_0$  и коэффициент уменьшения температуры  $\alpha$ . Основной алгоритм [12] поиска минимума функции  $F(X)$ , где  $X$  – вектор неизвестных, выглядит следующим образом:

Инициализировать переменные:  $X := X_0, T := T_0, \varepsilon$ .

**Повторить:**

**Повторить:**

Внести случайные возмущения  $X := X + \Delta X$ ;

Вычислить  $\Delta F(X) = F(X + \Delta X) - F(X)$ ;

Если  $\Delta F(X) < 0, X := X + \Delta X$ ;

Иначе, принять текущее состояние с вероятностью  
 $P := e^{-\Delta F/T}$ .

**Пока** число переходов не превысило заданный уровень.

Уменьшить температуру  $T := T - \Delta T$ .

**Пока**  $T > \varepsilon$ .

Основной трудностью применения метода имитации отжига является настройка параметров. Эти параметры являются критическими для эффективности метода. Если температура снижается слишком быстро, то алгоритм может сходиться к локальному минимуму. Если же температура снижается слишком медленно, то алгоритм очень медленно сходится. Согласно [12] и [13], необходимое и достаточное условие сходимости состоит в том, что  $T$  должна убывать как  $T(t) \geq \frac{T_0}{\ln(1+t)}$ ,  $t = 1, 2, \dots$ . Также в некоторых случаях [30] требуется множество запусков алгоритма (порядка 100) для настройки параметров метода.

В [28] отмечается, что эффективность алгоритма в решающей степени зависит от того, как генерируется вектор неизвестных. Для эффективной реализации требуется как использование всей доступной информации (теоретической и практической) по решаемой задаче, так и характерного набора тестов для настройки параметров.

### **2.3 Метод локальных вариаций (поиск восхождением)**

Метод локальных вариаций основан на идее поиска восхождением, то есть осуществлении локально оптимального выбора положения каждого крепежного элемента поочередно. Он основывается на последовательном изменении положения крепежных элементов и продолжает работу до тех пор, пока вносимые изменения позволяют улучшить значение функции цели [52]. Во многих реализациях предполагается проверять только соседние узлы при поиске нового приближения на шаге алгоритма. Известно, что для при решении задач выпуклого программирования, поиск восхождением находит

оптимальное решение, но в других случаях он с большой вероятностью находит локальный оптимум. Для того, чтобы уменьшить вероятность попадания в локальный оптимум, на каждой итерации все крепежные элементы перемещаются один за другим в пустые отверстия в пределах определенного радиуса (рис. 6). Итерации продолжаются до тех пор, пока алгоритм не сойдется к некоторому локальному минимуму. Преимущество данного подхода заключается в том, что алгоритм принимает только те перестановки, которые улучшают целевую функцию, в отличие от эвристических методов.

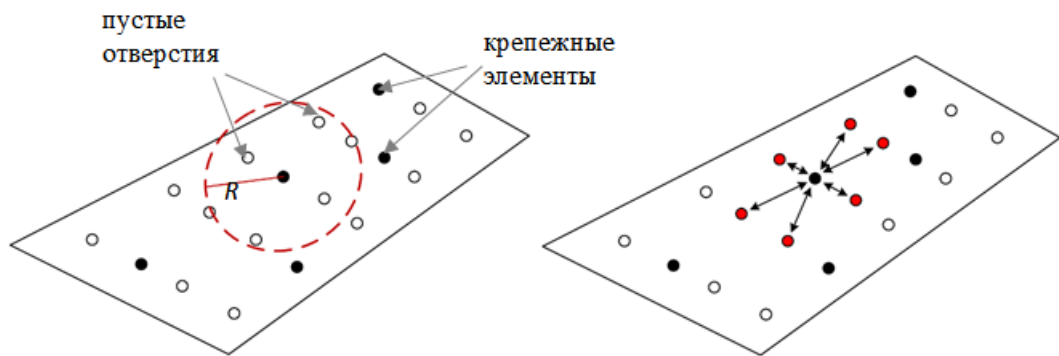


Рисунок 6 – радиус, внутри которого возможна перестановка

Рассмотрим некоторую специальную модель сборки на основе квадратичной задачи программирования (2) и задачу 1 (минимизация максимального зазора). В простейшем случае минимизации целевой функции  $F(H^0, H, G)$ , где  $H$  – вектор отверстий,  $H^0$  – некоторая начальная расстановка,  $G$  – облако начальных зазоров алгоритм метода может быть представлен следующим образом:

**Шаг 0.** Инициализация параметров:  $i := 0$ ,  $H_i^0 := H^0$ , выбор локального радиуса  $r \in \mathbf{R}$ ,  $Progress := 0$ ,  $dist(a, b)$  – евклидово расстояние между отверстиями  $a$  и  $b$ .

**Шаг 1.**  $Progress := 0$ ;

Для каждого непустого отверстия  $h_j^0 \in H_i^0, j = 1..n_f$

Для каждого свободного отверстия  $h_k \in H/H_i^0$  такого, что  $dist(h_j^0, h_k) \leq r, k = 1..n_h - n_f$

$H_i^* := H_i^0$ , в расстановке  $H_i^*$  передвинуть крепеж из отверстия  $h_j^0$  в отверстие  $h_k$ ;

Вычислить  $\Delta F = F(H_i^*, H, G) - F(H_i^0, H, G)$ ;

Если  $\Delta F(X) < 0, H_i^0 = H_i^*, Progress := 1$

**Шаг 2.**  $i := i + 1$ ;

**Шаг 3.** Если  $Progress=1$ , перейти к шагу 1 с  $H_{i+1}^0 := H_i^0$ ; иначе – остановиться.

### 2.2. Метод прямого поиска на адаптивных сетках

Метод прямого поиска на адаптивных сетках (Mesh Adaptive Direct Search, далее *MADS*) основан на генерации последовательности точек, с целью локального исследование поверхности целевой функции вокруг текущего приближения [43, 53, 54, 55, 56, 57]. Основная цель каждой итерации – найти *пробную точку* сетки, которая могла бы улучшить текущее решение. Важно отметить, что сетка в данном методе подразумевает дискретизацию пространства переменных вокруг текущего приближения, а не пространственную сетку в обычном понимании. Каждая итерация метода состоит из двух шагов, называемых *поиском* и *опросом*. Шаг поиска должен найти точку сетки, которая улучшает текущее лучшее решение. Этот шаг не является обязательным, однако позволяет реализовать практически любой численный метод в качестве дополнительного инструмента оптимизации. Шаг опроса генерирует пробные точки, вычисляя серию дополнительных значений функции цели в окрестности текущего решения. Первая из пробных точек, позволяющая улучшить текущее решение, принимается в качестве нового приближения. Если генерация набора пробных точек не привела к улучшению значения целевой функции, сетка должна быть перестроена с меньшим размером (рис. 6).



Точные точки на шаге опроса

Серия итераций без уменьшения сетки

Уменьшение сетки на шаге опроса

Рисунок 6 – иллюстрация шага опроса на начальном этапе работы алгоритма, после серии успешно завершившихся итераций, после неудачно завершившейся итерации с дальнейшим уменьшением сетки, [58]

Для решения поставленных оптимизационных задач используется MADS с подходом прогрессивных барьеров (progressive barrier approach). Этот подход позволяет нарушать ограничения на целевую функцию в промежуточных шагах алгоритма, не исключая ее из рассмотрения. Как отмечают создатели метода в статье [59], этот подход оказывается наиболее эффективным при решении реальных задач.

Дополнительный шаг алгоритма, шаг поиска, был реализован для того, чтобы использовать всю имеющуюся информацию о рассматриваемой задаче. Все отверстия сортируются по координате, соответствующей основному направлению рядов установки, каждому отверстию сопоставляется суммарный зазор в окрестных узлах (рис. 7).

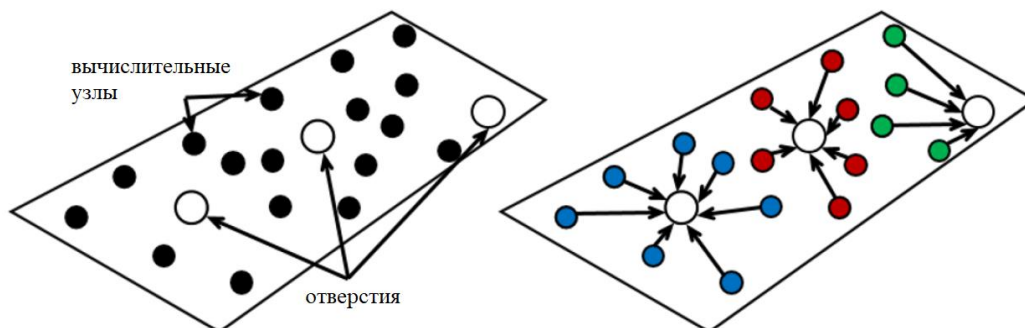


Рисунок 7 – Сопоставление отверстию зазора в соседних вычислительных узлах

Рассмотрим некоторую специальную модель сборки на основе квадратичной задачи программирования (2) и задачу 1 (минимизация максимального зазора). Пусть  $n_f$  – количество крепежных элементов,  $n_{f_{cur}}$  – текущее количество установленных крепежных элементов,  $g_i$  – текущий зазор в отверстии  $i$ . Тогда алгоритм может быть описан следующим образом:

**Если** ( $n_{f_{cur}} \geq n_f$ )

**Повторить:**

Если ( $g_{i-1} > g_i$ ) и ( $g_{i+1} > g_i$ ) и отверстие занято

Удалить фиксирующий элемент из отверстия  $i$

$$n_{f_{cur}} := n_{f_{cur}} - 1$$

**Пока**  $n_{f_{cur}} \geq 0.9 n_f$

**Иначе**

**Повторить:**

Если ( $g_{i-1} < g_i$ ) и ( $g_{i+1} < g_i$ ) и отверстие свободно

Поставить фиксирующий элемент в отверстие  $i$

$$n_{f_{cur}} := n_{f_{cur}} + 1$$

**Пока** ( $n_{f_{cur}} < n_f$ )

Таким образом, 10 % крепежей, зазор в которых оказывается меньше, чем зазор в ближайших занятых справа и слева элементах (ближайших в смысле сортировки по координате, соответствующей основному направлению расположения отверстий, рис. 8), удаляются, после чего, крепежные элементы устанавливаются в отверстия, зазор в которых превосходит зазор в ближайших соседних пустых отверстиях. Крепежные элементы устанавливаются до тех пор, пока их количество не достигнет максимального допустимого значения  $n_f$ .

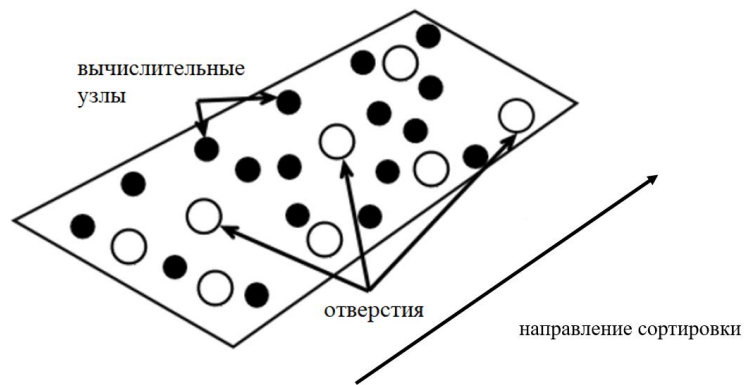


Рисунок 8 – направление, по которому позиции отверстий сортируются

## 2.4 Генетический алгоритм

Генетический, или эволюционный, алгоритм, основан на генерации наборов потенциальных решений задачи (популяция) и использует концепцию «выживания наиболее приспособленных», что позволяет исключить из рассмотрения наименее подходящие элементы популяции (особи) и генерировать новые наборы на основе наилучших элементов из предыдущих при помощи операторов скрещивания и мутации. Операция скрещивания предполагает выбор некоторым образом двух особей из текущей популяции и получения новой особи на их основе. Операция мутации предполагает случайное изменение некоторой, определенной в настройках алгоритма, доли популяции. После этого формируется новая популяция из новых особей, обладающих наибольшей приспособленностью [42, 43, 60].

Для заданной функции цели  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  (далее функция приспособленности) и набора начальных приближений  $P^0 = \{x^1, x^2, \dots, x^p\}, x^i \in \mathbf{R}^n$  основная идея алгоритма выглядит следующим образом:

**Шаг 0.** Инициализация  $\gamma \in [0, 1]$  – вероятность мутации,  $k := 0$ .

**Шаг 1.** Для каждого  $x^i \in P^k$  вычислить  $f(x^i)$ .

**Шаг 2.** Выбрать два элемента  $x^i, x^j \in P^k$  и подействовать на них оператором скрещивания, получить новую особь  $\check{x}_l$ . Подвергнуть новую особь мутации с вероятностью  $\gamma$ .

**Шаг 3.** Если новая особь – допустима, добавить ее в новую популяцию  $P^{k+1} := P^k \cup \{\check{x}_l\}$ .

Если  $|P^{k+1}| < p$ , перейти к шагу 2. Иначе перейти к шагу 4.

**Шаг 4.** Если условие остановки не выполнено,  $k := k + 1$  и перейти к шагу 1. Иначе – остановиться.

Как отмечается в [43], одной из ключевых особенностей алгоритма является широкая гибкость реализации в каждом конкретном случае:

1. отсутствует строгий критерия остановки;
2. отсутствует правило выбора родителей на шаге 2;
3. операции скрещивания и мутации могут быть определены любым образом при соблюдении «наследования признаков» обоих родителей и случайного изменения.

Первая особенность обусловлена отсутствием какой-либо внутренней меры алгоритма, как, например, величина шага, из-за чего критерием остановки обычно выбирают либо число смен популяций, либо фиксируют максимальное допустимое число шагов, за которое не было достигнуто улучшения функции цели.

## 2.5 Сравнение методов

В качестве тестового примера для настройки и сравнения методов рассмотрим упрощенную модель соединения крыла и фюзеляжа. Модель состоит из 410 вычислительных узлов в зоне стыка и 60 отверстий, где могут быть установлены крепежные элементы. Между соединяемым частями задан некоторый начальный зазор (рис. 9).

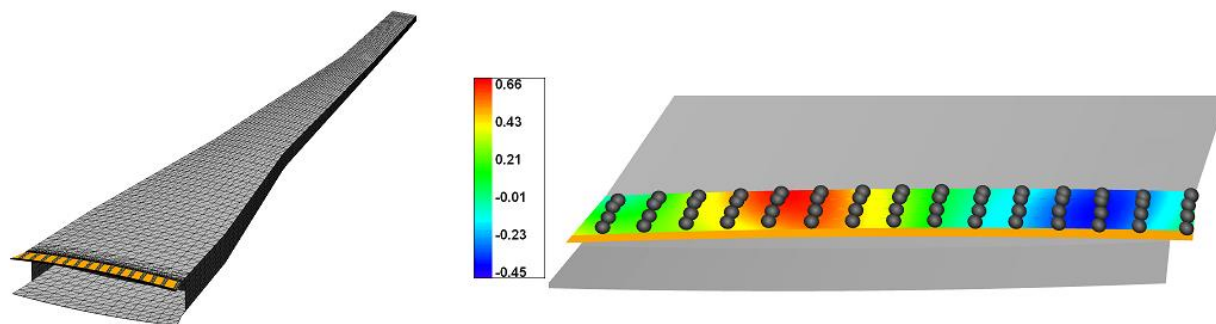


Рисунок 9 – упрощенная модель соединения крыла и фюзеляжа (слева), начальный зазор в области соединения деталей, мм (справа)

### *2.5.1 Оптимизации по одному зазору*

Настройка параметров алгоритма имитации отжига была произведена согласно подходу, описанному в [30]. Случайное отклонение на каждом шаге заключается в перемещении случайной выбранного крепежа в случайно выбранное пустое отверстие. Чтобы уменьшить количество возможных перемещений и, соответственно, вычислений функции цели, возможные новые позиции для каждого крепежного элемента были ограничены радиусом локализации  $r$ , поэтому новое положение находится внутри сферы радиуса  $r$  и вокруг текущего положения. Тестовая задача – задача 1 из параграфа 1.3. Требуется найти расстановку из 10 крепежных элементов, обеспечивающую минимальный результирующий зазор. Начальный зазор представлен на рисунке 9.

На рисунке 10 показано изменение значения целевой функции в зависимости от номера итерации. Было произведено 10 независимых запусков с одинаковыми параметрами, что привело к различным результатам. Для оценки полученных расстановок эта же задача была решена методом локальных вариаций, что показало, что только в 4 из 10 случаев алгоритм имитированного отжига позволяет получить результаты не хуже, чем метод на основе поиска восхождением. Более половины запусков дают худшие результаты.

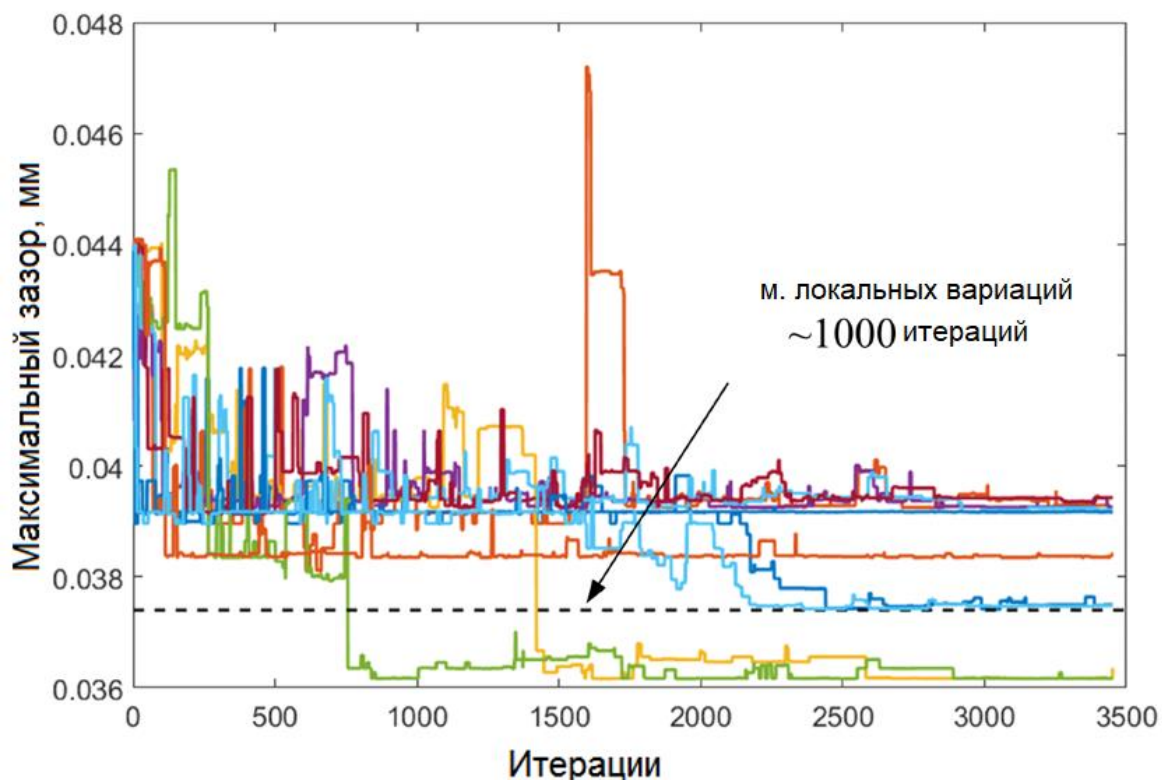


Рисунок 10 – повторяемость результатов при оптимизации методом имитированного отжига, 10 запусков

С целью уменьшения количества итераций (на каждой из которых происходит время затратное вычисление конечного зазора), было реализовано итеративное уменьшение радиуса локализации. Результаты оптимизации показаны на рисунке 11 для методов локальных вариаций и имитированного отжига. В целом можно отметить, что изменение радиуса локализации не привело к значительным качественным улучшениям.

Как показывает рассмотренный пример, случайный характер метода требуют множество вычислительных экспериментов для получения результатов, что не может быть сделано в случае оптимизации расстановок на полномасштабных моделях ввиду времязатратных вычислений функции цели. Исходя из этих соображений, алгоритм имитированного отжига не будет использоваться в дальнейшем.

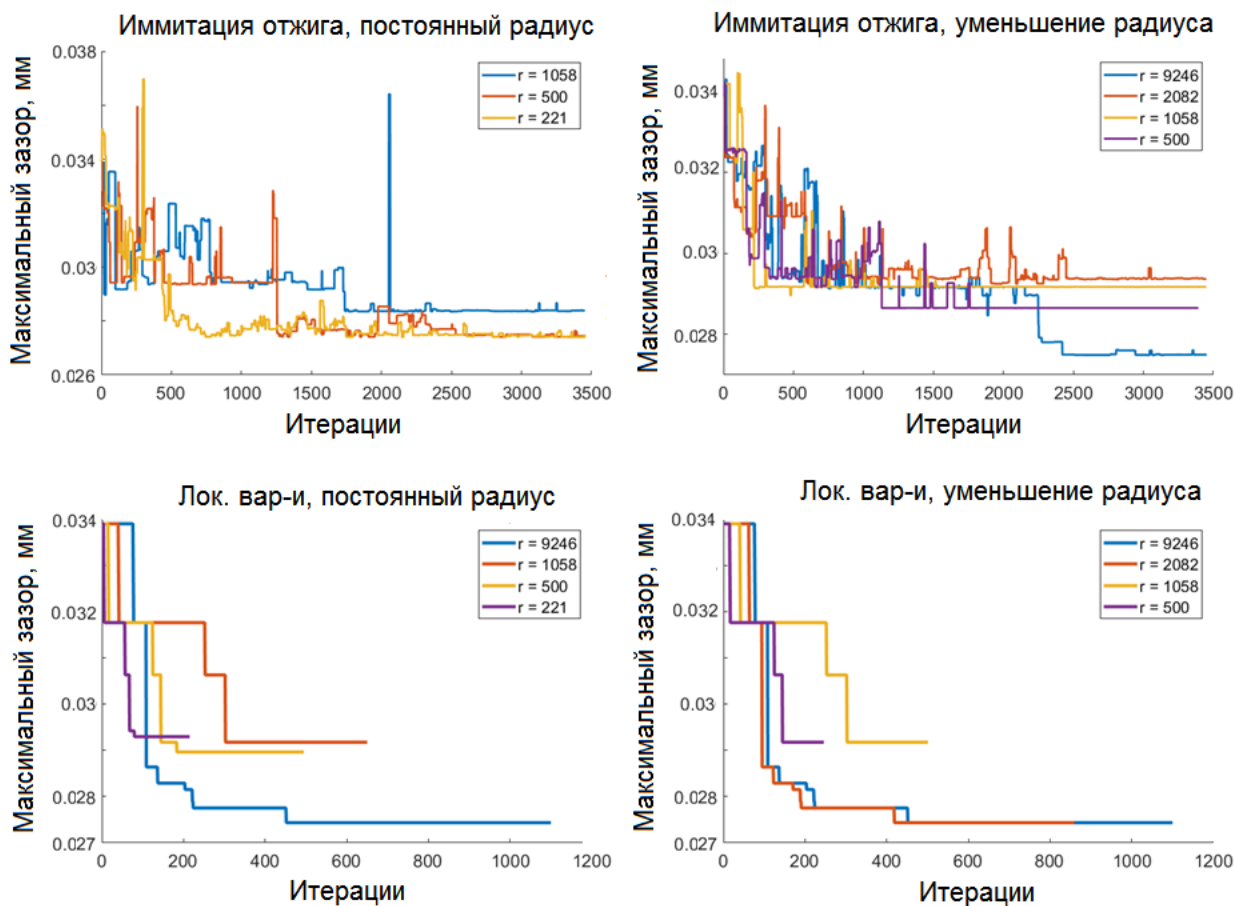


Рисунок 11 – сравнение методов имитированного отжига и локальных вариаций с постоянным радиусом локализации и с уменьшающимся радиусом

Для сравнения метода локальных вариаций, генетического алгоритма и MADs рассмотрим следующую тестовую задачу: найти  $H^*$  расстановку из 5 крепежных элементов, обеспечивающую  $g_{max}^{res}(H^*)$  минимальное значение максимального результирующего зазора.

Генетический алгоритм был настроен в соответствии с подходами, представленными в работах [2, 155] – популяция включает 12 особей, начальная популяция включает все возможные позиции. Несмотря на эвристический характер, в отличие от алгоритма имитированного отжига генетический алгоритм позволяет получать воспроизводимые результаты (рис. 12). Горизонтальная пунктирная линия на рисунке соответствует значению функции цели, полученному методом локальных вариаций.

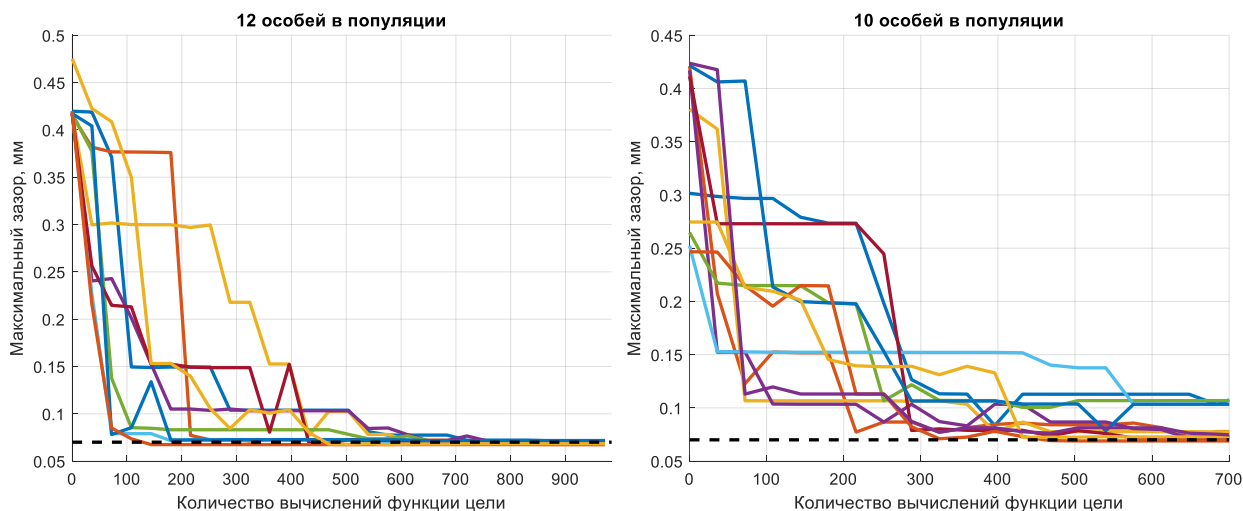


Рисунок 12 – повторяемость результатов при оптимизации генетическим алгоритмом с размером популяции в 12 (слева) и 10 особей (справа), 10 запусков

Начальный зазор представлен на рисунке 9. Результаты вычислений представлены в таблице 1; расстановки крепежных элементов, полученные каждым из описанных методов изображены на рисунке 13.

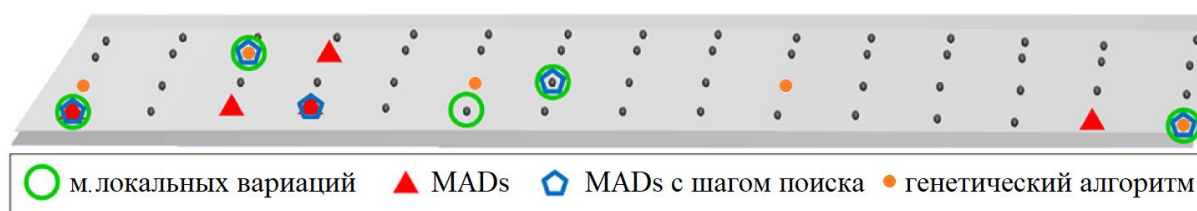


Рисунок 13 – расстановки крепежных элементов, полученные каждым из рассматриваемых методов

MADs без шага поиска оказывается наименее эффективным методом как по времени, так и по значению функции цели, поэтому он исключается из дальнейшего рассмотрения. MADs с шагом поиска позволяет получить решение наиболее быстрым образом, однако значение функции цели оказывается наихудшим. Наилучшее значение целевой обеспечивают метод

локальных вариаций и генетический алгоритм, однако время работы последнего существенно превосходит время работы метода локальных вариаций. Сокращение размера популяции до 10 особей позволяет сократить время работы до 31 секунды, однако результаты становятся плохо воспроизводимы (рис. 12).

Таблица 1 – результаты оптимизации

Алгоритм	Время работы, с	$g_{max}^{res}(H^*)$ , мм
MADs без шага поиска	150.0	0.15
MADs с шагом поиска	24.3	0.17
Метод локальных вариаций	32.1	0.07
Генетический алгоритм	45.5	0.07

Для дальнейшего тестирования используются MADs с шагом поиска и метод локальных вариаций, как самые быстрый и качественный методы.

### **2.5.2 Оптимизации по облаку зазоров**

#### **Оптимизация на тестовой модели**

После первых вычислительных экспериментов, MADS и метод локальных вариаций, как лучшие, были протестированы на облаке из десяти начальных зазоров для модели из предыдущего раздела. Оптимизация на облаке зазоров имеет наибольшую значимость, поскольку позволяет подобрать позиции креплений для всевозможных вариантов деформаций и шероховатостей частей, а также уменьшить влияние особенностей конкретного начального зазора. Результаты (таблица 2) показывают, что основная тенденция сохраняется: метод локальных вариаций работает медленнее, но позволяет получить более качественные расстановки, то есть способные свести начальные зазоры до меньшего значения или уменьшающие вероятность дефекта.

Таблица 2 – Результаты оптимизации на облаке зазоров

Метод	Значение целевой функции	Вычислительное время, сек
Минимизировать % узлов, в которых зазор превышает 0,1 мм, используя 5 крепежей		
Локальные вариации	0,15 %	549,5
MADs с шагом поиска	1,90 %	289,1
Минимизировать % узлов, в которых зазор $\geq 0,1$ мм, используя 10 крепежей		
Локальные вариации	0 %	351,4
MADs с шагом поиска	0%	190,05
Минимизировать макс. зазор, используя 30 крепежей		
Локальные вариации	0,042 мм	1524,6
MADs с шагом поиска	0,048 мм	987,4
Минимизировать число крепежей, чтобы макс. зазор не превышал 0,1 мм		
Локальные вариации	7 крепежей	3315,5
MADs с шагом поиска	7 крепежей	842,6

### Оптимизация на полномасштабной модели

Рассмотрим полномасштабную модель соединения верхней части крыла и фюзеляжа самолета A350-900 (рис. 14). В работе [23] было показано, что исходная расстановка, используемая согласно текущей технологии, не позволяет полностью свести начальный зазор до требуемого значения 0.1мм.



Рисунок 14 – части рассматриваемого соединения [assaut]

Оптимизация положения крепежных элементов на полномасштабной модели требует существенных вычислительных ресурсов. Поэтому для данной модели (7308 узлов в зоне стыка, 200 отверстий, исходная расстановка из 110 крепежных элементов) был осуществлен один расчет, в котором требовалось оптимизировать позиции уже имеющихся 110 крепежей так, чтобы минимизировать вероятность дефекта при  $g_* = 0.1$  мм (Задача 2 из). Облако 340 начальных зазоров, полученных по результатам измерений на сборочной линии, было разделено на две группы по 200 и 140 зазоров. Первая группа использовалась для оптимизации, вторая – для оценки качества полученных результатов. Поскольку задача может быть распараллелена по данным, вычисления производились на базе суперкомпьютерного центра «Политехник РСК ТОРНАДО» с характеристиками: 612 вычислительных узлов по два процессора Intel Xeon E5-2697v3, 64ГБ оперативной памяти и адаптер сети Infiniband FDR.

Таблица 3 – Результаты оптимизации на полномасштабной модели на облаке

Метод	Функция цели	Вычислительно время
Локальные вариации	0,049	7,7 дней
MADs с шагом поиска	0,1264	4,6 дня

Результаты оптимизации показывают (таблица 3), что метод локальных вариаций работает медленнее и на полномасштабной модели, но обеспечивает меньшее значение функции цели. Для верификации обеих расстановок, а также начальной, были произведены вычисления по 140 начальным зазорам, не использовавшимся для оптимизации. Кривые на рисунке 15 показывают процент вычислительных узлов, результирующий зазор (по облаку) в которых не превосходит соответствующее значение по горизонтальной оси; чем выше

кривая, тем меньше вероятность дефекта при использовании расстановки, которой она соответствует. Результаты верификации показывают, что метод локальных вариаций качественно превосходит MADs с шагом поиска.

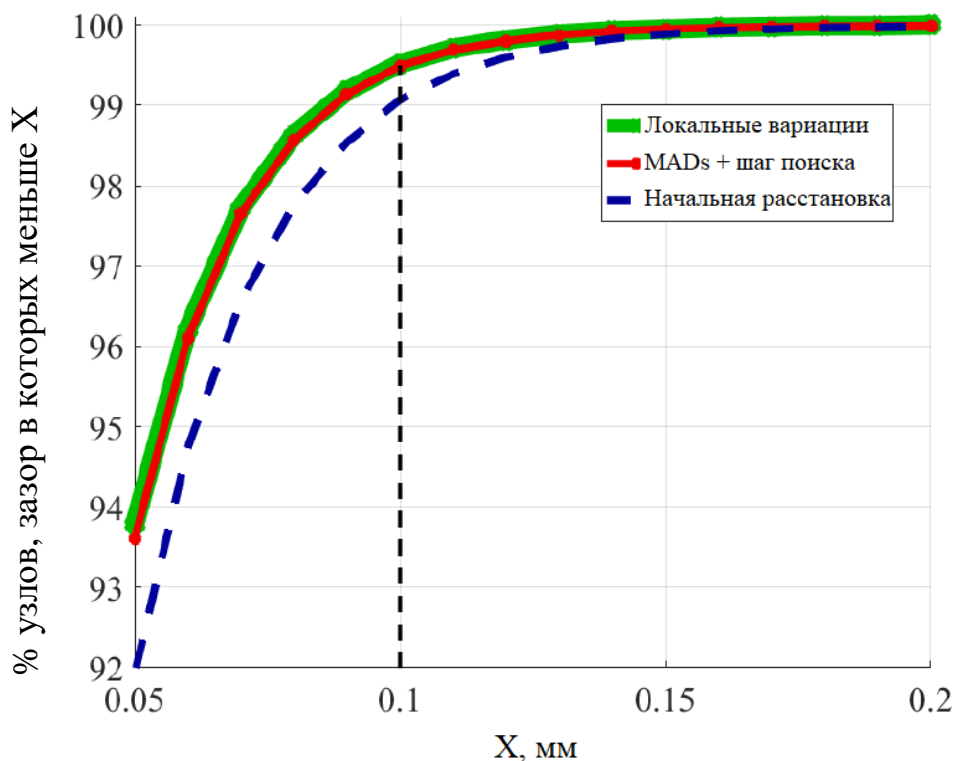


Рисунок 15 – Верификация полученных расстановок крепежных элементов на облаке зазоров

### Глава 3. Метод решения задач поиска наилучшего расположения крепежных элементов

В данной главе представлена разработанный метод поиска расположения временных крепежных элементов при сборке авиационных конструкций, основанный на вычислении поля сил, необходимого для сведения зазоров между собираемыми деталями, и картах геодезических расстояний между отверстиями. Изложены численные результаты работы метода и приведен сравнительный анализ с методами, описанными в предыдущей главе. Полученные в данном разделе результаты опубликованы в работах автора [61, 62, 63, 26].

### **3.1 Геодезический алгоритм поиска наилучшего расположения крепежных элементов**

Основная идея предлагаемого методика (далее *геодезический алгоритм*) заключается в использовании информации о механических свойствах соединяемых деталей и геометрических особенностях одновременно. Определение положения крепежных элементов происходит последовательно, но без пересчета результирующего зазора после установки. Учет механических характеристик осуществляется за счет вычисления поля давления, которое необходимо приложить к собираемым частям, чтобы свести зазор между ними до заданного значения. Учет геометрических особенностей происходит при определении положения каждого следующего: новая позиция определяется как наиболее удаленное свободное отверстие (с весовым коэффициентом) от уже занятых, в качестве меры расстояния используется кратчайшее расстояние по поверхности, т.е. геодезическое расстояние.

#### ***3.1.1 Геодезическое расстояние***

Геодезическое расстояние представляет собой длину кратчайшего пути между двумя точками, лежащими на поверхности, по этой поверхности. В первую очередь необходимость вычисления расстояния по поверхности возникает в таких прикладных областях, как обработка и классификации изображений [64], распознавание образов и классификации объектов [65], построение карт местности [66] и др. В авиационной промышленности соединяемые детали зачастую имеют сложную форму или оказываются изогнутыми (рис. 16), поэтому необходимость учета геометрических особенностей рассматриваемых объектов делает невозможным использование Евклидова расстояния и в других задачах, не связанных с обработкой графических объектов [67].

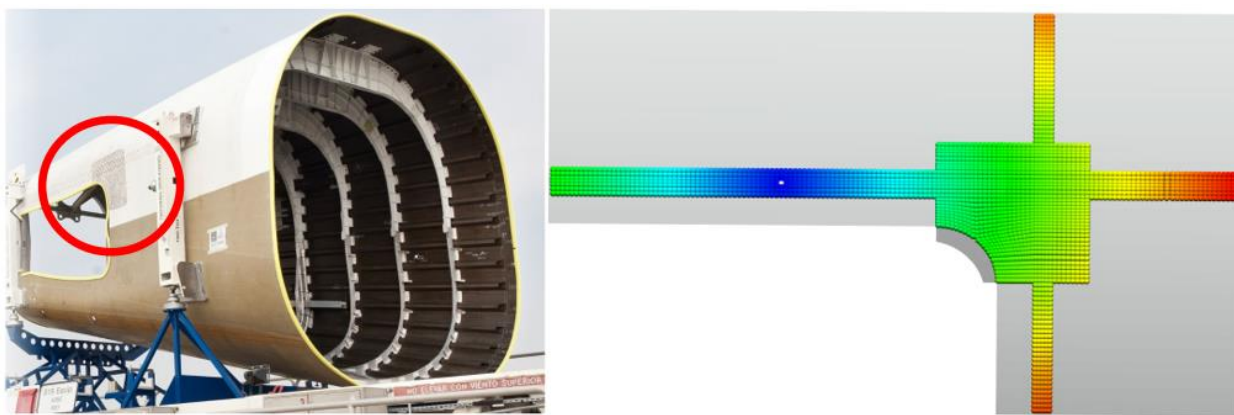


Рисунок 16 – зона соединения листов обшивки (слева) и соответствующая модель сборки (справа), раскрашенная соответственно геодезическому расстоянию по мере удаления от точки, отмеченной белым

Рассмотрим поверхность  $\varphi(x, y)$ , заданную параметрически. Первой фундаментальной (первой квадратичной) формой поверхности  $\varphi(x, y)$  называется тензор  $I_\varphi$ , определяемый по формуле (15)

$$I_\varphi = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle. \quad (15)$$

Используя первую фундаментальную форму можно определить длину кривой  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  по формуле (16)

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\gamma'(t)^T I_\varphi(\gamma(t)) \gamma'(t)} dt. \quad (16)$$

Для произвольных точек  $a$  и  $b$ , лежащих на поверхности  $\varphi$  можно определить геодезическое расстояние как длину кратчайшей кривой, их соединяющей, то есть

$$\rho_g(a, b) = \min_{\gamma \in \mathcal{P}(a, b)} L(\gamma), \mathcal{P}(a, b) = \{\gamma \mid \gamma(0) = a, \gamma(1) = b\}. \quad (17)$$

В задачах, возникающих в авиастроении, трехмерные поверхности в большинстве случаев представлены в виде треугольной или многоугольной сетки. Существует множество способов численного вычисления расстояния по поверхности, большинство из которых опираются на использование графов. Графом  $G(V, E)$  называется совокупность двух множеств – непустого

множества вершин  $V$  и множества  $E$  двухэлементных подмножеств множества  $V$ . После того, как граф построен, задача нахождения геодезического расстояния между точками сводится к задаче поиска кратчайшего пути между вершинами в графе. Если поверхность задана конечноэлементной сеткой, граф может быть построен следующим образом: в вершинах графа будем хранить координаты центров геометрических элементов сетки, а центры соседних элементов соединим ребром. Это можно сделать разными способами.

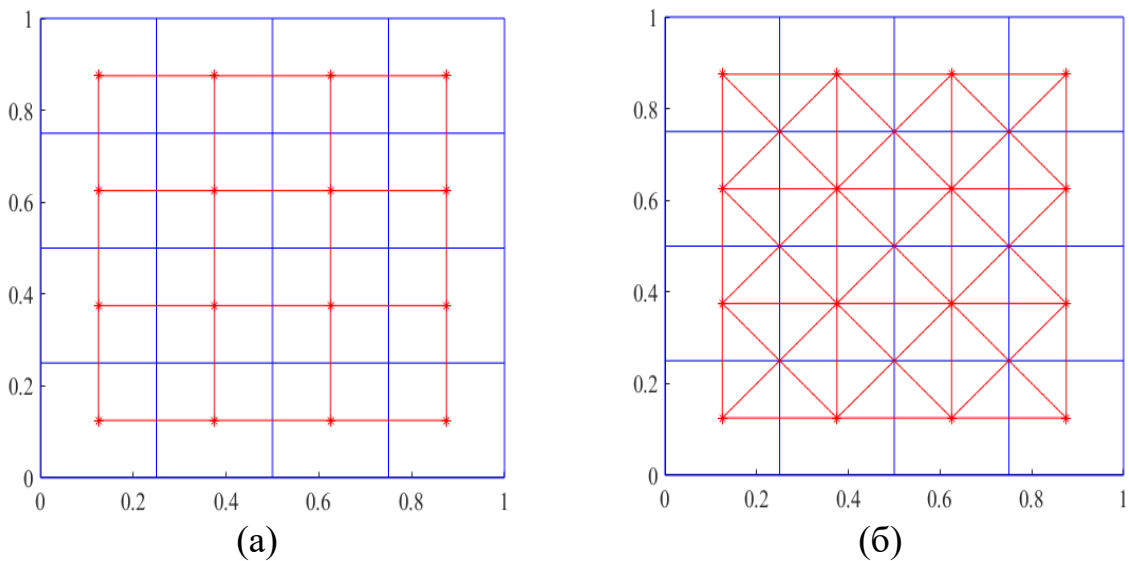


Рисунок 17 – Примеры соединения вершин графа

На рисунке 17(a) приведен пример построения графа на основе регулярной прямоугольной сетки, в котором ребром соединены центры элементов, имеющих общую сторону, на рисунке 17(б) – имеющих общий узел.

Алгоритм Дейкстры и его модификация с использованием очереди с приоритетами, алгоритм Белмана-Форда, а также алгоритм распространения фронта (fast marching algorithm) как наиболее часто используемые методы были протестированы на ряде моделей. Результаты были опубликованы в работе [61]. Для оценки эффективности работы алгоритмов был рассмотрен модельный пример из работы [68], где методом распространения фронта

требовалось построить карту расстояний на поверхности, заданной по формуле от точки  $(0.5; 0.5)$  (рис. 18).

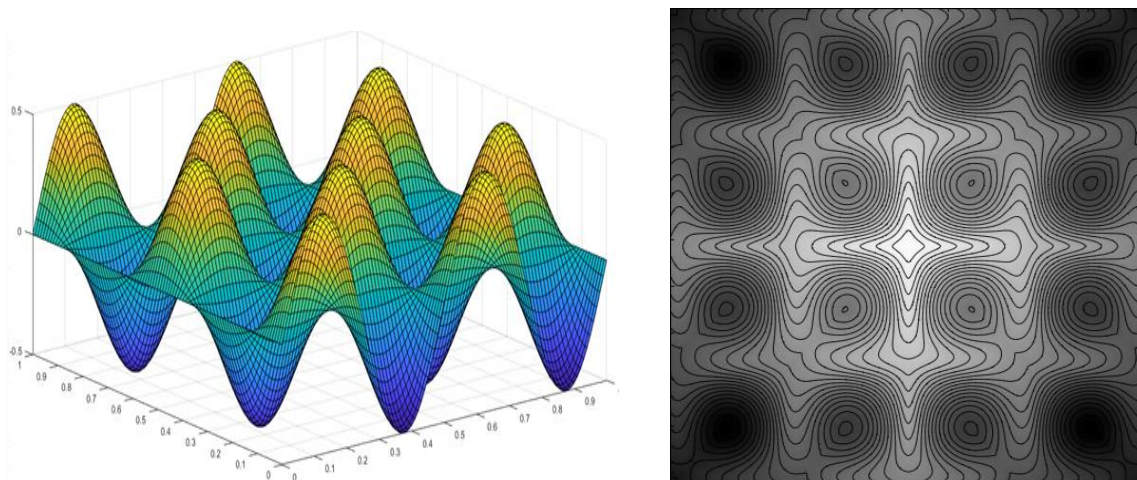


Рисунок 18 – поверхность (слева) и решение в виде линий уровня [68]

Кратчайшие расстояния от центра  $(0.5,0.5)$  были вычислены до остальных точек. На рисунках (а-д) построены линии уровня решения, полученного разными алгоритмами. Линии уровня, построенные в результате работы алгоритмов, качественно совпадают друг с другом, а также с результатами, полученными авторами.

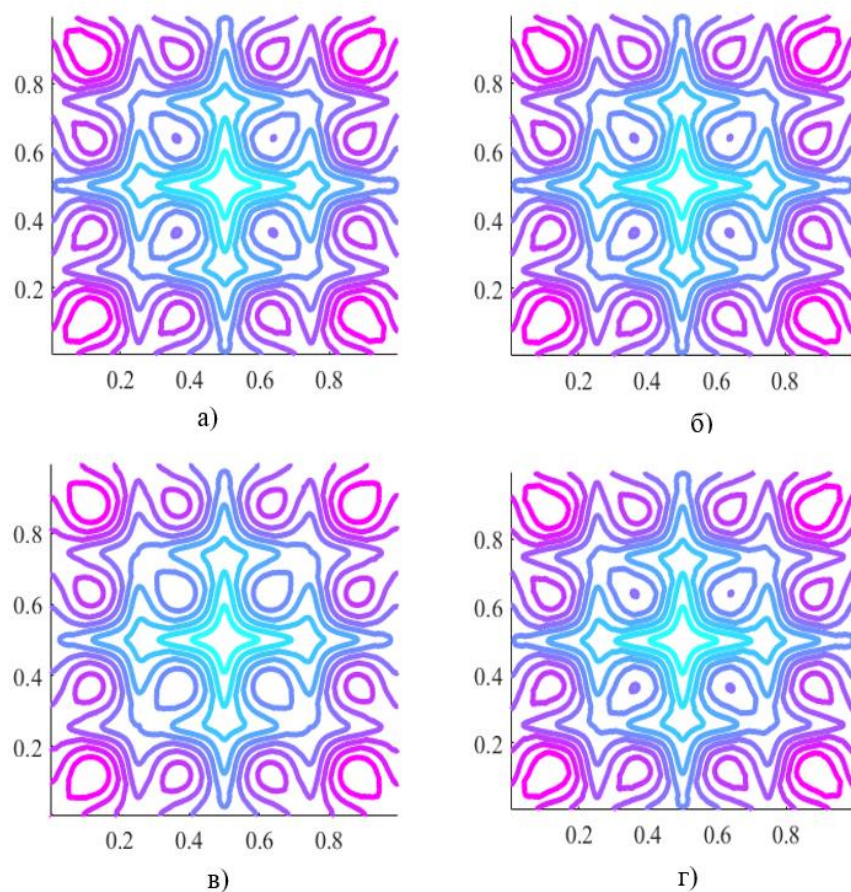


Рисунок 19 – решения, полученные алгоритмом Беллмана-Форда (а), Дейкстры (б), модифицированным алгоритмом Дейкстры (в) и методом распространения фронта (г)

На рисунке 20 представлены графики зависимости времени работы алгоритмов в зависимости от количества вершин в логарифмических осях. Из графика видно, что наиболее быстрым алгоритмом является модифицированный алгоритм Дейкстры. Этот алгоритм используется в дальнейшем в работе.

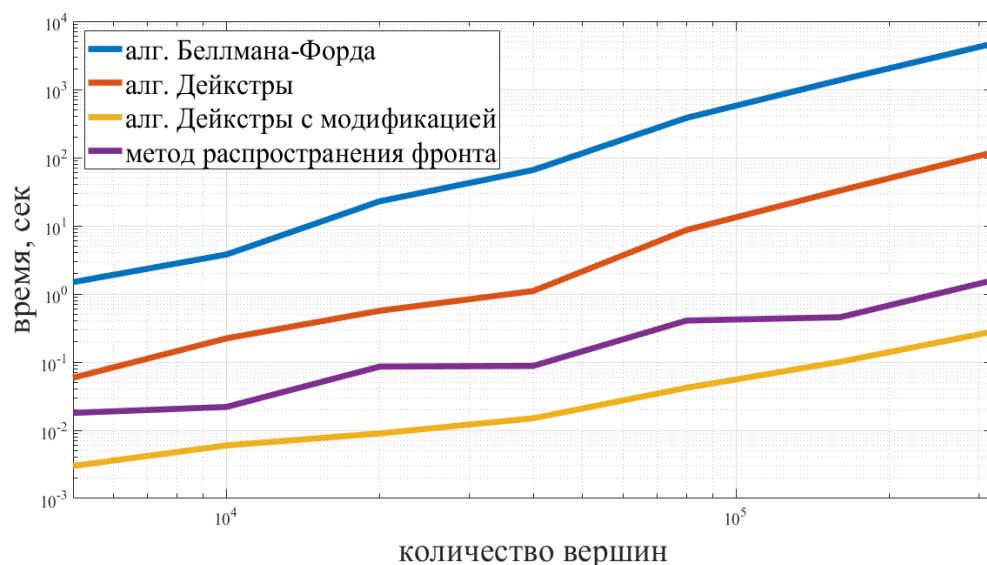


Рисунок 20 – время работы рассматриваемых алгоритмов на задачах разной размерности

Алгоритм Дейкстры находит кратчайшие пути от одной из вершин в графе до всех остальных. Изначально все вершины графа считаются непосещенными. Приведем краткое описание алгоритма. Пусть  $V$  – множество вершин графа,  $E$  – множество ребер графа,  $w(u, v)$  – вес ребра  $uv$ ,  $s$  – вершина, расстояния от которой ищутся,  $d[v]$  – по окончании работы алгоритма равно длине кратчайшего пути из  $s$  в  $v$ . На очередном шаге алгоритма из множества непосещенных вершин выбирается вершина  $u$  с наименьшим расстоянием до вершины  $s$ . Вершину  $u$  будем считать посещенной, а значение  $d[u]$  окончательным. Далее рассматриваются все возможные соседние с  $u$  вершины и проверяется, не сообщают ли они меньшее значение расстоянию до вершины  $s$ . Чтобы увеличить скорость работы алгоритма Дейкстры, для хранения множества непосещенных вершин используется очередь с приоритетами.

### 3.1.2 Вычисление поля давления и ранжирование отверстий

Результирующий зазор после установки крепежных элементов является основным критерием качества рассматриваемой расстановки и, зачастую,

исходя из тех или иных технологических требований существует некоторое критическое значение, которое не должно быть превышено, то есть зазор после сборки должен оставаться в некотором заданном диапазоне  $[0 g_*]$ . Чтобы определить поле давления, которое необходимо приложить к собираемым деталям, удовлетворяющее этому условию (результатирующий зазор находится диапазоне  $[0 g_*]$ ) достаточно модифицировать постановку контактной задачи следующим образом:

$$\min_{u \in U_C} \left( \frac{1}{2} u^T K_C u \right), \quad (18)$$

$$U_C = \{u: 0 \leq g_{res}^n \leq g_*\},$$

где вектор  $g_{res}^n = (g - Au)_n$  определяется как разница между начальным зазором и перемещениями деталей после сборки. Можно отметить, что задача (18) не включает в рассмотрения вектор каких-либо внешних нагрузок. Вектор сил  $p$  является вектором множителей Лагранжа в двойственной постановке контактной задачи и имеет смысл контактных сил в зоне соединения деталей [69]. Таким образом, решение задачи в данной формулировке позволяет получить вектор перемещений, а также вектор сил  $p$ , которые необходимо приложить, чтобы удовлетворить требованию  $0 \leq g_{res}^n \leq g_*$ , то есть обеспечить результирующий зазор не более чем  $g_*$ . Как отмечают авторы в этой работе, перемещения и силы связаны следующим образом

$$x = -K^{-1} A p. \quad (19)$$

В случае поиска расстановки по облаку начальных зазоров  $G = \{g_i\}_{i=1, n_g}$  задача (18) с одними и те же параметрами должна быть решена для каждого из них, после чего будет определено множество векторов сил  $P = \{p_i\}_{i=1, n_g}$ . Контактные задачи имеют одну и ту же структуру, основаны на одной и той же модели соединения и используют одни и те же параметры задачи (матрица  $A$ ,  $K$ , начальный зазор).

В качестве иллюстрации рассмотрим модель соединения крыла и фюзеляжа. На рисунках 21.1 и 21.3 приведены значения в вычислительных узлах для двух разных начальных зазоров (мм) в области соединения –

постоянного и переменного. На рисунках 21.2 и 21.4 изображены соответствующие им значения сил в вычислительных узлах (дН), вычисленные с учетом ограничения  $0 \leq g_{res}^n \leq g_*$ , где  $g_* = 0,1\text{мм}$ . Можно отметить, что в зависимости от начального зазора поле полученных сил отличается как по значениям, так и по общему распределению по поверхности соединения.

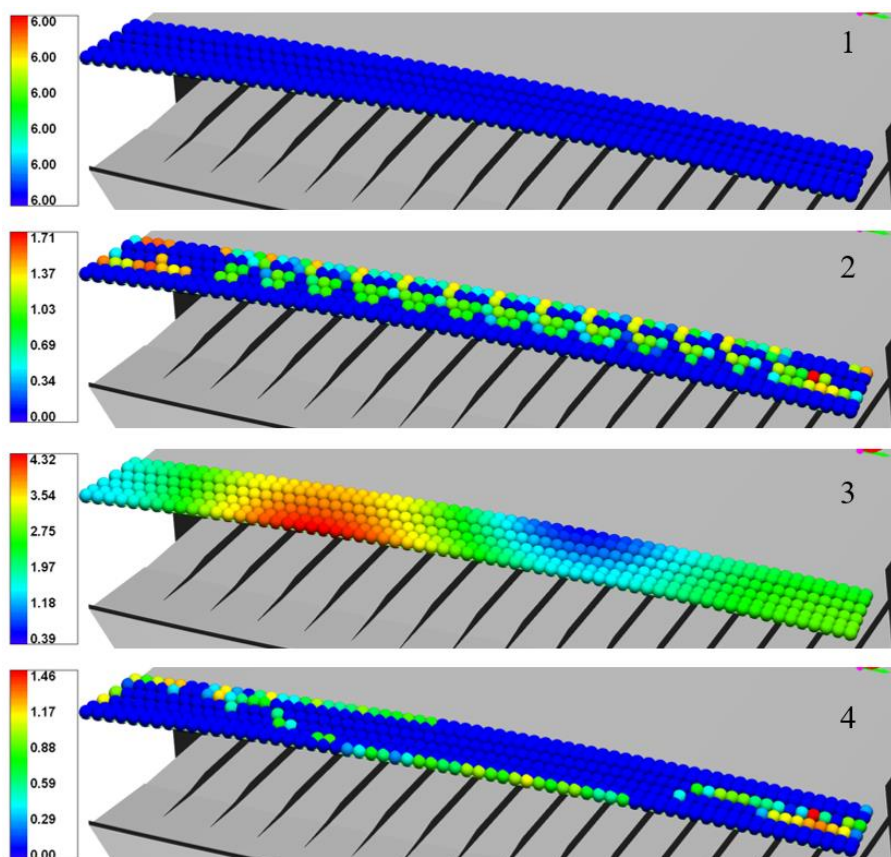


Рисунок 21 – постоянный начальный зазор (1) и соответствующее поле сил (2), переменный начальный зазор (3) и соответствующее поле сил (4)

При уменьшении значения  $g_*$  количество узлов с отличными от нуля значениями сил возрастает (рис. 22). Это связано с тем, что большая распределенная сила требуется для более плотного сведения деталей. Основные места сосредоточения ненулевых сил располагаются над стрингерами, то есть элементами жесткости, находящимися снизу обшивки крыла (нижнее изображение на рисунке).

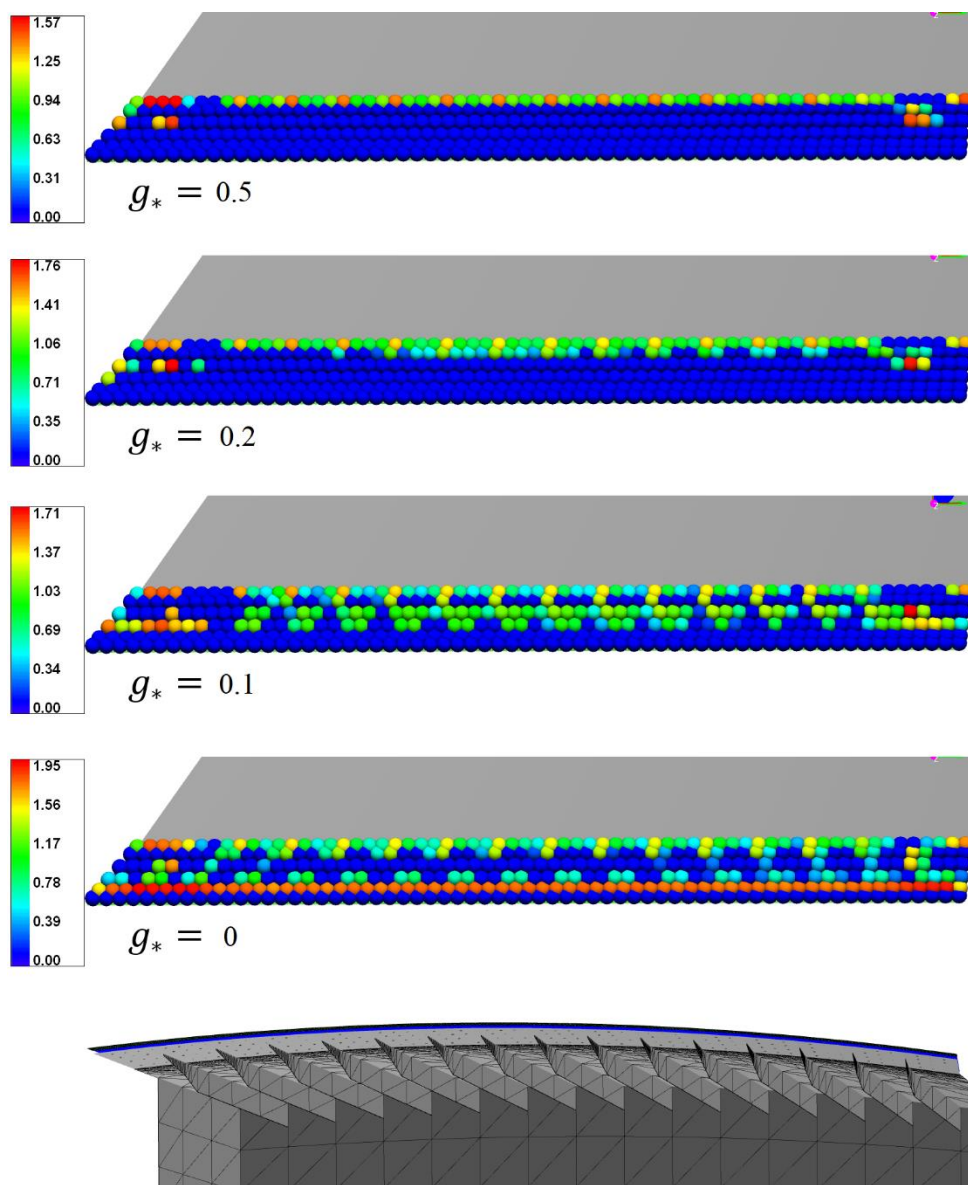


Рисунок 22 – поля сил, соответствующие начальному зазору рис. 21.1 при разных значения  $g_*$  и вид снизу на усиленную стрингерами панель соединения

При ужесточении требований, накладываемых на результирующий зазор, например  $g_* = 0$ , можно заметить (рис 23.1, 23.2), что поля сил становятся более похожи качественно при даже при разных начальных зазорах

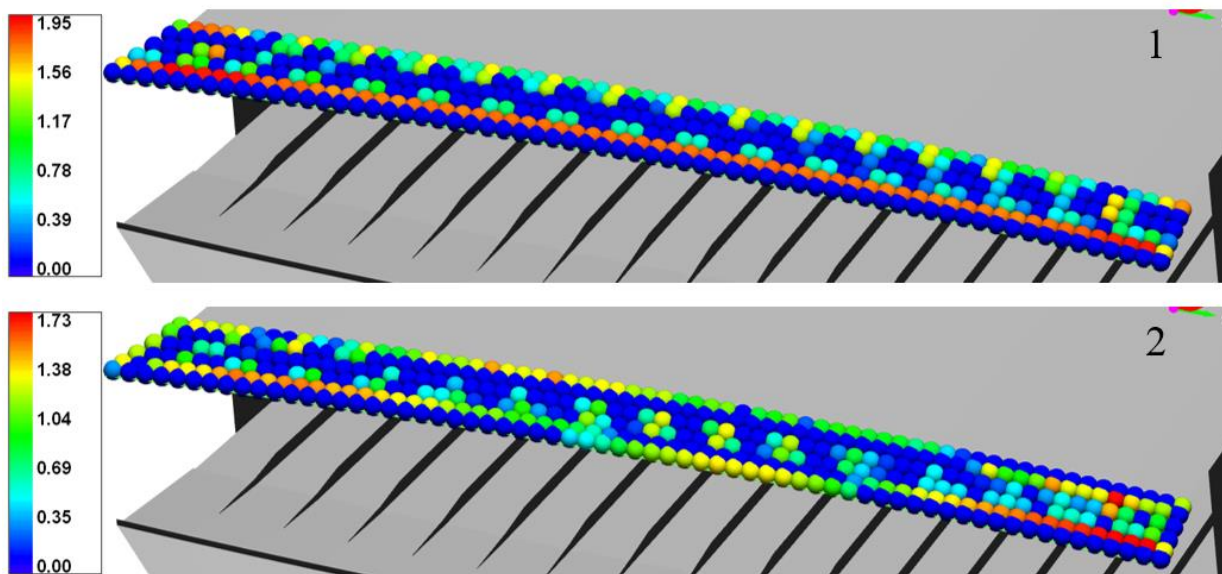


Рисунок 23 – поля сил, соответствующие начальному зазору рис. 21.1 (1) и начальному зазору рис. 21.1 (3) при  $g_* = 0$

Как было сказано выше, в случае вычислений по облаку начальных зазоров, после решения контактной (15) задачи будет определено множество векторов сил  $\{p_i\}_{i=1, n_g}$ , где  $p_i = \{p_i^j\}_{j=1, n_{cn}}$ , – вектор сил, которые необходимо приложить к деталям для сведения начального зазора  $g_i \in G$ . Облака начальных зазоров представляют собой результаты измерений или моделирования, количество которых ( $n_g$ ) может измеряться сотнями, что необходимо для наиболее полного учета всевозможных вариантов поверхностей соединяемых деталей. Для того, чтобы использовать всю эту информацию и избежать дополнительного решения времязатратной контактной задачи (2), в разработанной методике предлагается в дальнейшем работать с осредненным вектором сил

$$\tilde{p}^j = \max_{i=1, n_g} \{p_i^j\}. \quad (20)$$

Стоит отметить, что количество расчетных узлов зачастую превосходит количество отверстий, в которые могут быть установлены крепежные элементы. При возникновении подобной ситуации необходимо учесть всю информацию о вычисленных в расчётных узлах силах, которые необходимо

приложить для обеспечения заданного качества сборки, несмотря на то, что при отыскании расстановки возможно оперировать только отверстиями, положения которых фиксированы и не могут быть изменены. В данной работе предлагается ввести некоторую характеристику каждого отверстия, вес. Для этого множество вычислительных узлов предлагается разделить на непересекающиеся множества  $\{H_i\}_{i=1, n_h}$  по количеству отверстий в рассматриваемом соединении (их количество  $n_h$ ). В множество  $H_1$  входят те вычислительные узлы, для которых отверстие  $h_1$  является ближайшим, в множество  $H_2$  – для которых отверстие  $h_2$  является ближайшим, и так далее (рисунок 24):

$$H_i = \left\{ c_j \mid h_i = \arg \min_{i=1, n_h} \|h_i = c_j\| \right\}. \quad (21)$$

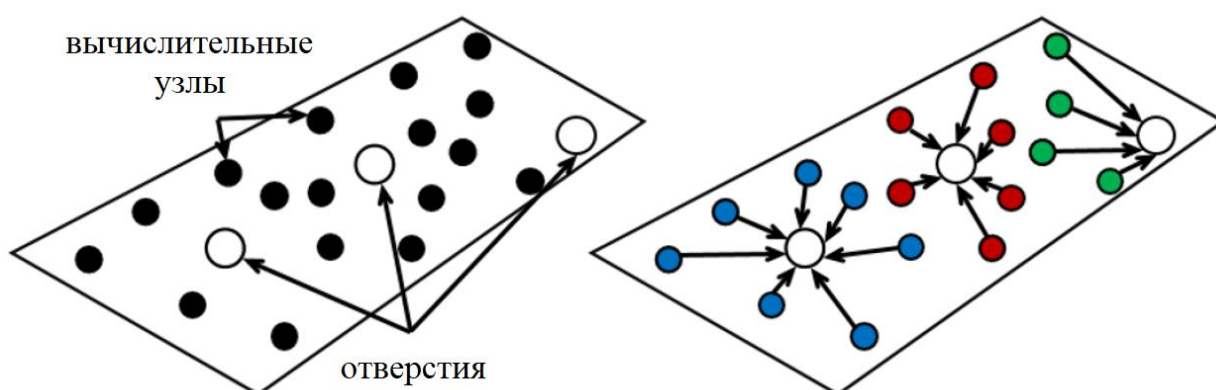


Рисунок 24 – разбиение узлов по группам.

Вес  $w_i$  отверстия  $h_i$  определяется как сумма сил в вычислительных узлах множества  $H_i$

$$w_i = \sum_{j=1}^{n_{cn}} \tilde{p}^j, c_j \in H_i, i = 1, n_h. \quad (22)$$

Стоит отметить, что полученная таким образом характеристика  $w_i$  каждого отверстия зависит механических свойств соединения (через матрицу

жесткости  $K$ ) и, в то же время, содержит информацию о вариациях поверхностей в случае облака начальных зазоров.

### 3.1.3 Расстановка крепежных элементов

Построение графа и дальнейшее вычисление геодезических расстояний, а также вычисление поля давления и ранжирование отверстий можно рассматривать как подготовительный этап для непосредственной процедуры позиционирования крепежных элементов. Согласно разработанной методике первый крепежный элемент ставится в отверстие с максимальным весовым коэффициентом

$$h_i: i = \operatorname{argmax}_{i=1, n_h} w_i. \quad (23)$$

Предположим, что требуется решить задачу 2 из раздела . Пусть  $k$  ( $k \leq n_*$ ) крепежных элементов уже установлены и требуется найти положение элемента  $k + 1$ . Его позиция определяется так, чтобы, с одной стороны, обеспечить оптимальное расположение на плоскости соединения [20], а, с другой стороны, учесть особенности соединения и начальных зазоров и избежать множественно пересчета функции цели. На данном этапе порядок установки крепежных элементов не учитывается, под шагом в данном случае предполагается последовательный выбор отверстий, формирующих общую расстановку для сборки того или иного соединения (отверстия, в которые будут установлены временные крепежные элементы для дальнейших манипуляций). Порядок установки будет определен после для каждого элемента полученной расстановки.

Пусть расстановка крепежных элементов на данном шаге описывается набором занятых отверстий  $H_k^O = \{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_k\}$ . Чтобы определить следующее отверстие расстановки, согласно разработанной методике, предлагается сначала вычислить геодезическое расстояние от каждого свободного отверстия  $h \in H \setminus H_k^O$  до уже включенных в расстановку  $H_k^O$ :

$$r(h) = \min_{\tilde{h} \in H_k^0} \rho_g(h, \tilde{h}). \quad (24)$$

После того, как  $r(h)$  определено для всех вакантных отверстий, очередное отверстие, которое будет включено в расстановку определяется наиболее удаленное от уже включенных в расстановку с учетом весового коэффициента:

$$h_k = \operatorname{argmax}_{h_i \in H \setminus H_k^0} \{(w_i)^\alpha r(h_i)\}. \quad (25)$$

Такой выбор логики поиска нового положения основан на идеях, применяемых при решении задач о поиске наилучшего расположения системы точек на плоскости, где точки обычно располагают в центрах окружностей одинакового радиуса для обеспечения равномерности покрытия [20].

Описанные действия повторяются до тех пор, пока количество отверстий в расстановке не достигнет заданного числа  $n_*$ . Параметр  $\alpha \geq 0$  позволяет регулировать вклад весового коэффициента отверстия. Для более подробного описания разработанного метода проиллюстрируем его работу на тестовом примере, имитирующем часть соединения панели крыла и фюзеляжа (рис. 25). Верхняя часть соединения представляет собой усиленную двумя стрингерами панель из алюминиевого сплава толщиной 5 мм, нижняя часть имитирует неподвижное основание.

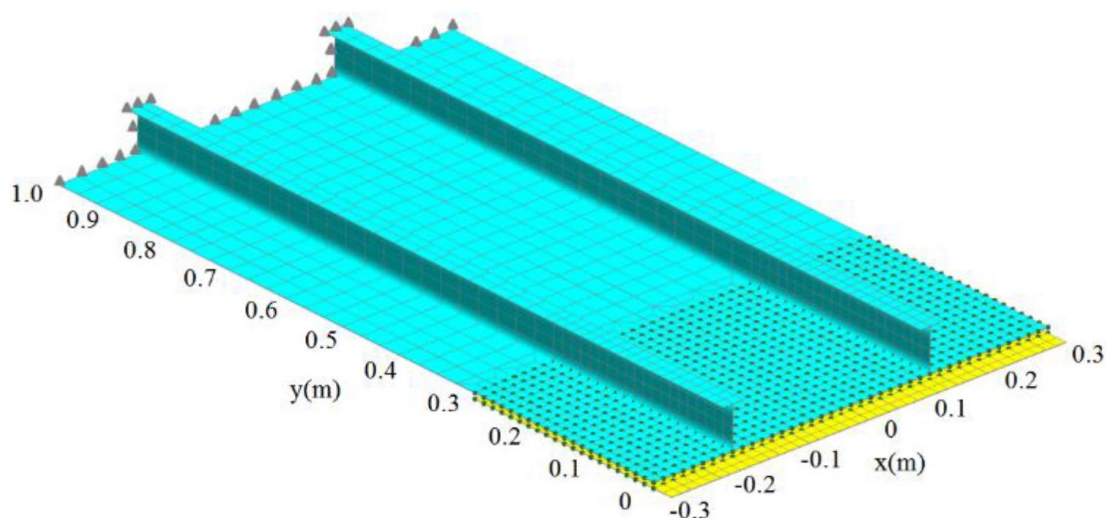


Рисунок 25 – тестовое соединение

Общая последовательность действий геодезического алгоритма для любой специальной модели сборки, максимально допустимого значения результирующего зазора  $g_*$  и числа крепежных элементов  $n_*$  может быть представлена в виде следующих шагов:

**Шаг 0:** инициализировать параметры  $k := 1, G := \{g_j\}_{j=1, n_g}$ .

Для простоты рассмотрим случай облака из одного постоянного начального зазора величиной 0.6 мм во всей рассматриваемой области (рис. 26), то есть  $n_g = 1$ .

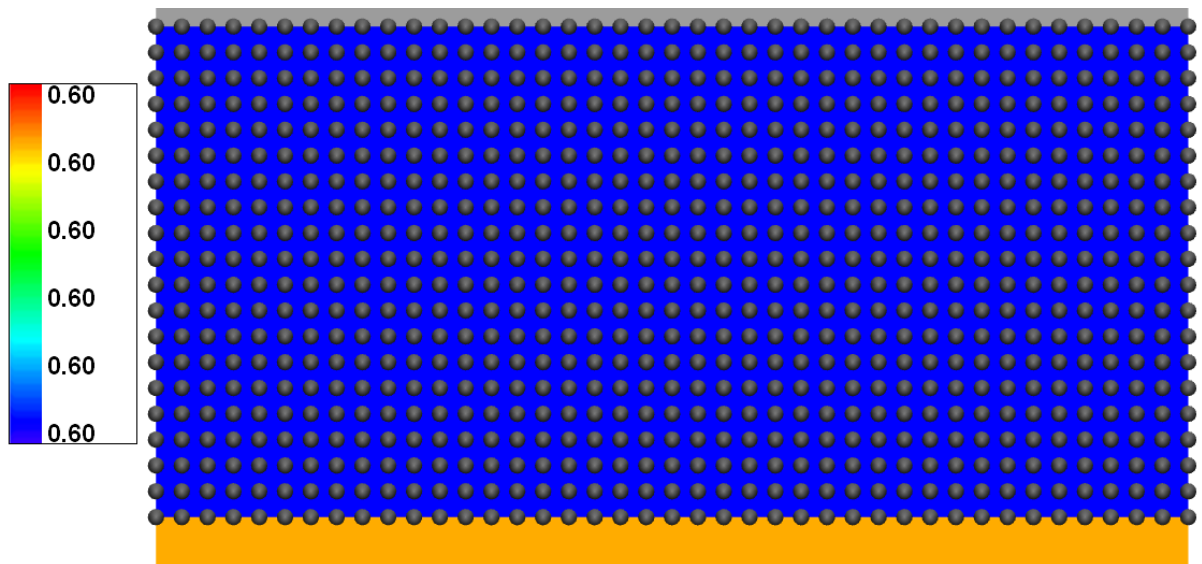


Рисунок 26 – постоянный начальный зазор

**Шаг 1:** решить задачу (18) и определить множество векторов сил  $P = \{p_i\}_{i=1, n_g}$ , которые необходимо приложить к соединению для сведения каждого начального зазора из облака  $G$ .

Положим  $g_* = 0$ , то есть требуется найти поле способное полностью свести начальный зазор между деталями. Полученные значения сил в логарифмическом масштабе (дН) в вычислительных узлах представлены на рисунке 27.

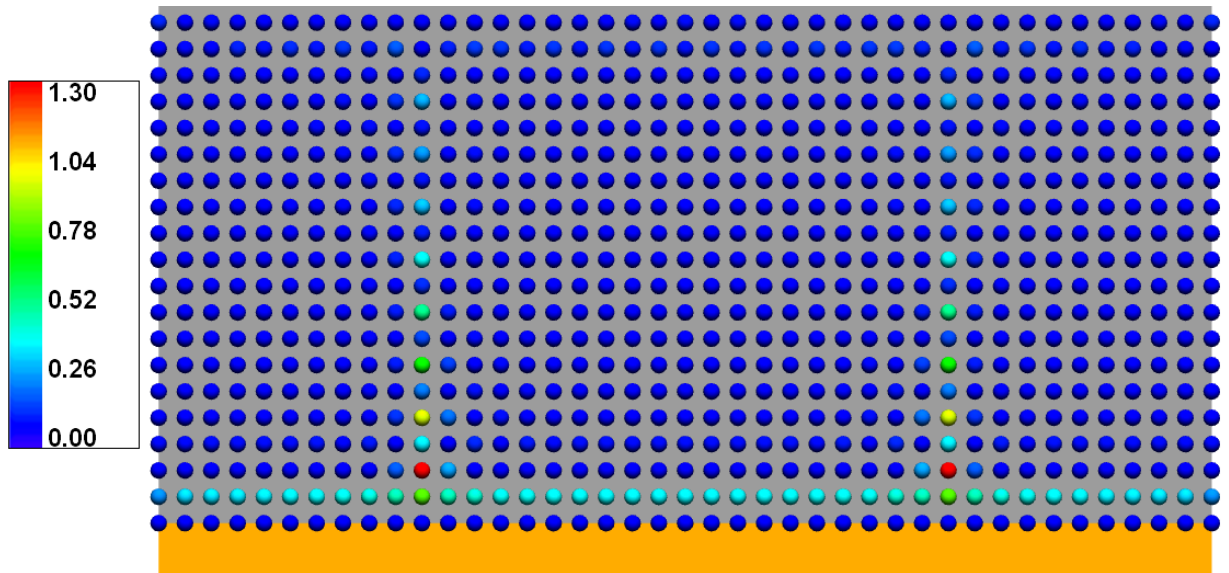


Рисунок 27 – значение сил в вычислительных узлах

**Шаг 2:** построить граф со значениями трехмерных координат вычислительных узлов в вершинах графа.

**Шаг 3:** для каждого отверстия в зоне установки крепежных элементов определить его вес  $w_i = \sum_{j=1}^{n_{cn}} \tilde{p}^j$ ,  $c_j \in H_i, i = 1, n_h$ , где  $\tilde{p}^j = \max_{i=1, n_g} \{p_i^j\}$ .

В рассматриваемом примере вес отверстия совпадает силе в расчетном узле, совпадающем с этим отверстием, то есть рисунок 27 иллюстрирует не только значения сил в вычислительных узлах, но и веса свободных отверстий.

**Шаг 4:** первое отверстие  $\tilde{h}_1$  в расстановке определить среди всех свободных отверстий как то, которому соответствует максимальный весовой коэффициент  $w_i$ :  $\tilde{h}_k := h_i: i = \operatorname{argmax}_{i=1, n_h} w_i$ .  $H_k^0 := \{\tilde{h}_k\}$ .

Рассматриваемая задача является симметричной, поэтому первый крепежный элемент (рис. 28) устанавливается первое из двух найденных отверстий с максимальным весом (то есть отверстия, которые соответствуют вычислительным узлам с максимальной силой приложения).

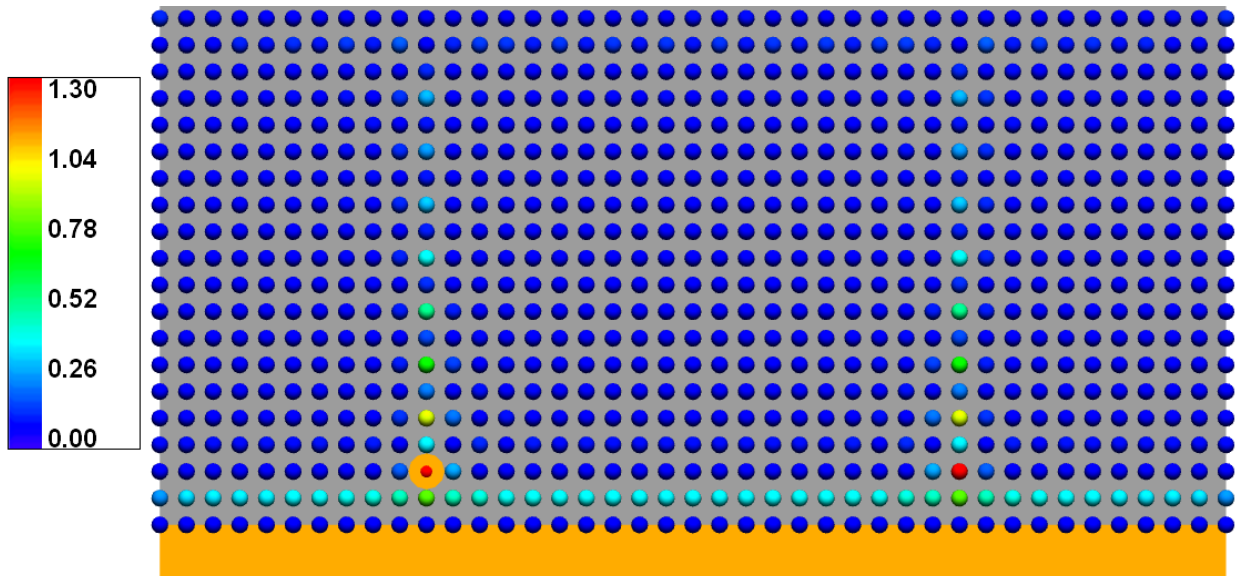


Рисунок 28 – положение первого крепежного элемента

**Шаг 5:** для каждого свободного отверстия  $\forall h \in H \setminus H_k^O$  вычислить расстояние до включенных в расстановку  $H_k^O$  отверстий  $r(h) = \min_{\tilde{h} \in H_k^O} \rho_g(h, \tilde{h})$ .

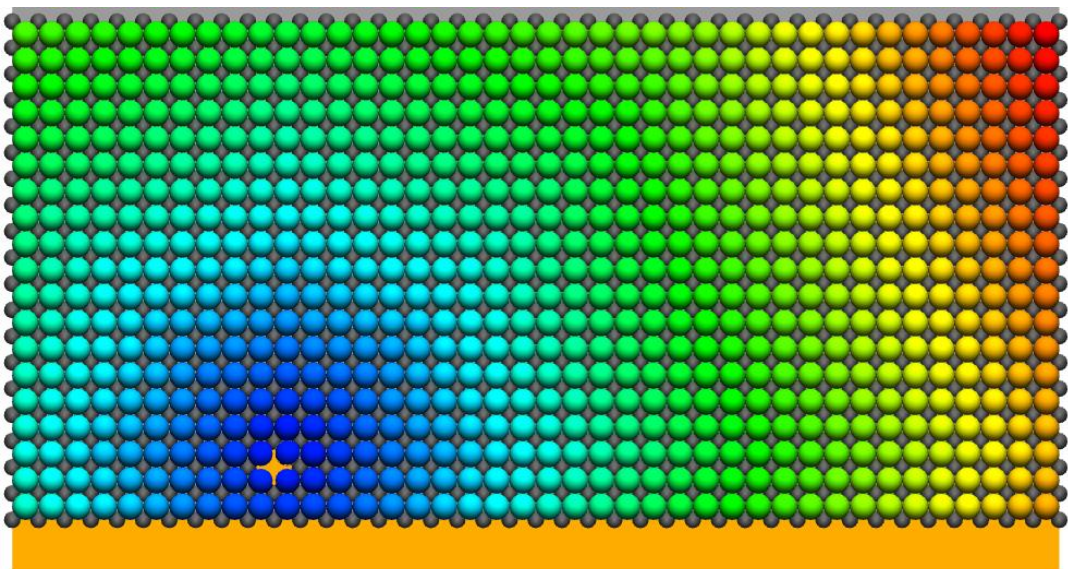


Рисунок 29 – геодезическое расстояние по поверхности соединения по мере удаления от занятого отверстия

**Шаг 6:**  $\tilde{h}_{k+1} := h_k = \operatorname{argmax}_{h_i \in H \setminus H_k^O} \{(w_i)^\alpha r(h_i)\}$ ,  $H_k^O := H_k^O \cup \{\tilde{h}_{k+1}\}$ .

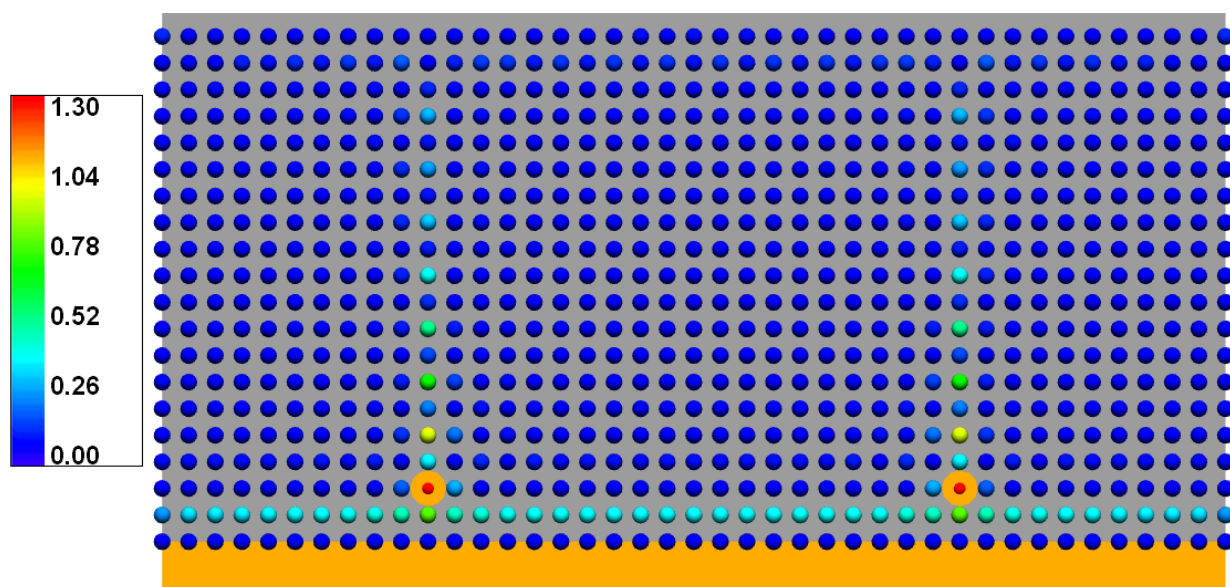


Рисунок 30 – расположение первых двух найденных крепёжных элементов,  
 $\alpha = 1$

**Шаг 7:**  $k := k + 1$ . Если  $k > n_*$ , то закончить вычисления, иначе перейти к шагу 5.

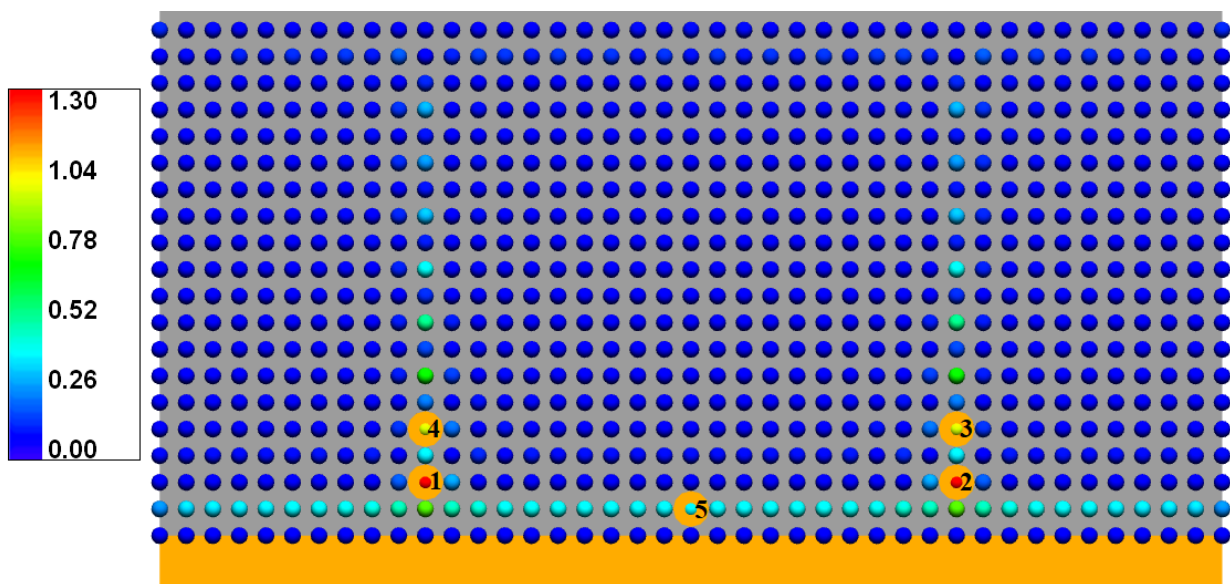


Рисунок 31 – полученная расстановка из 5 элементов

В зависимости от выбора значения параметра  $\alpha$  вклад весов отверстий будет меняться, определяя то, какая составляющая соотношения (25), механическая или геометрическая, имеет приоритет. На рисунке 32 приведены

шесть различных расстановок, полученных для разных значений параметра  $\alpha$  для одного и того же поля сил, рассматриваемого ранее. В каждом случае первый фиксирующий элемент устанавливается согласно шагу 4 в отверстие с максимальным весом. При  $\alpha = 0$  полученная расстановка характеризуется исключительно геометрическими соображениями и поле сил не оказывает на результат никакого влияния. По мере увеличения значения коэффициента  $\alpha$  увеличивается и вклад механической составляющей, в результате при  $\alpha \geq 2$  геометрия соединения перестает влиять на результат, который в таком случае зависит только от поля сил.

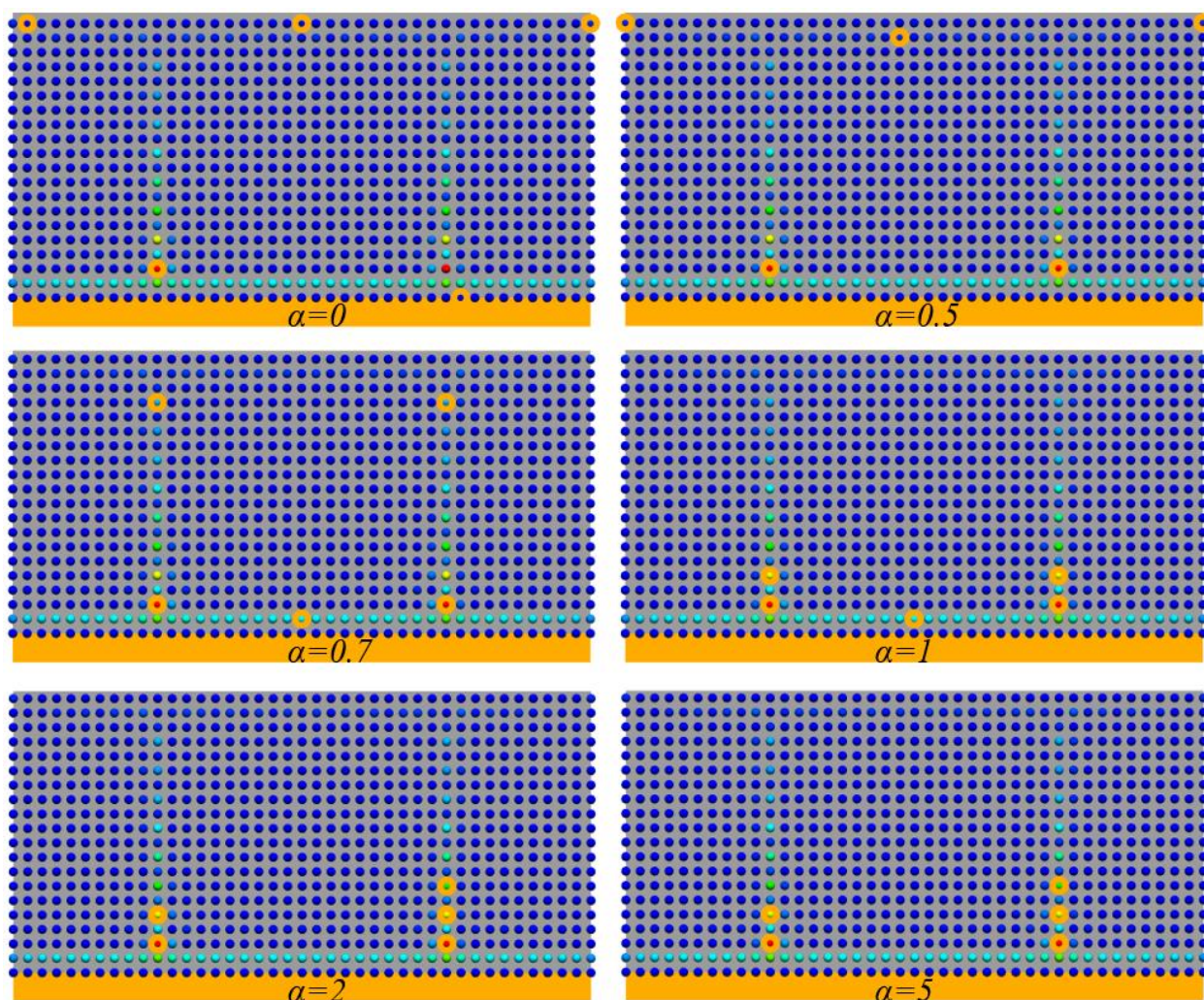


Рисунок 32 – расстановки из 5 элементов, полученные при разных значениях параметра  $\alpha$

### 3.2 Примеры

Пример 1. В качестве первого примера рассмотрим соединение крыла и фюзеляжа и один начальный зазор (рис), описанные в разделе 2.4. *Сравнение методов (оптимизация по одному зазору)*. Согласно первому шагу геодезического алгоритма необходимо вычислить поле сил, которое необходимо приложить к деталям для сведения начального зазора между ними. Как было отмечено в работе [assAut], зазор, превышающий значение 0.1мм считается дефектом, поэтому величина  $g_*$  для расчета сил была принята равной 0.5 мм. Значения полученных сил (дН) и расстановка 5 фиксирующих элементов представлены на рисунке 33пол (верхний).

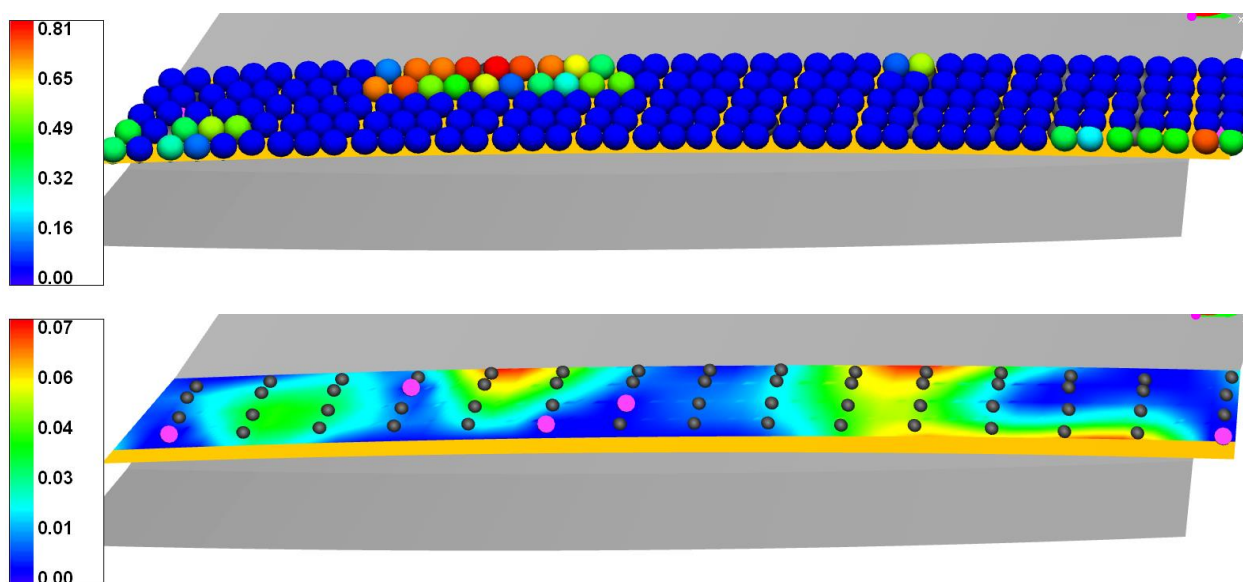


Рисунок 33 – поле сил (сверху) и полученная расстановка

Результаты сравнения с используемыми ранее методами времени работы и значения результирующего зазора после установки расстановки, определенной геодезическим алгоритмом приведены в таблице 4. Время работы предлагаемого метода оказывается в разы меньше при сравнении с другими рассматриваемыми методами, в то же время максимальная величина результирующего зазора не превосходит значения, полученные другими методами.

Таблица 4 – время работы и значение результирующего зазора для полученных расстановок

Алгоритм	Время работы, с	$g_{max}^{res}(H^*)$ , мм
<b>Геодезический алгоритм</b>	<b>5</b>	<b>0.07</b>
MADs с шагом поиска	24.3	0.17
Метод локальных вариаций	32.1	0.07
Генетический алгоритм	45.5	0.07

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим соединение крыла и фюзеляжа описанные в разделе 2.4. Сравнение методов (Оптимизация на полномасштабной модели с облаком зазоров). Все вычисления производились на тех же начальных зазорах, что и предыдущие. Результаты сравнения с используемыми ранее методами времени работы и значения количества дефектных узлов (%) после установки расстановки, определенной геодезическим алгоритмом приведены в таблице 5.

Таблица 5 – время работы и значение результирующего зазора для полученных расстановок

Метод	Функция цели, %	Вычислительное время
Локальные вариации	0,0490	7,7 дней
MADs с шагом поиска	0,1264	4,6 дня
<b>Геодезический алгоритм</b>	<b>0,0447</b>	<b>4,5 мин</b>

Для верификации полученной расстановки были произведены вычисления по 140 начальным зазорам, не использовавшимся для оптимизации. Кривые на рисунке 34 показывают процент вычислительных узлов, результирующий зазор в которых не превосходит соответствующее значение по горизонтальной оси; чем выше кривая, тем меньше вероятность

дефекта при использовании расстановки, которой она соответствует. Можно отметить, что полученная геодезическим алгоритмом расстановка отказывается качественно не хуже, чем расстановки, полученные другими методами.

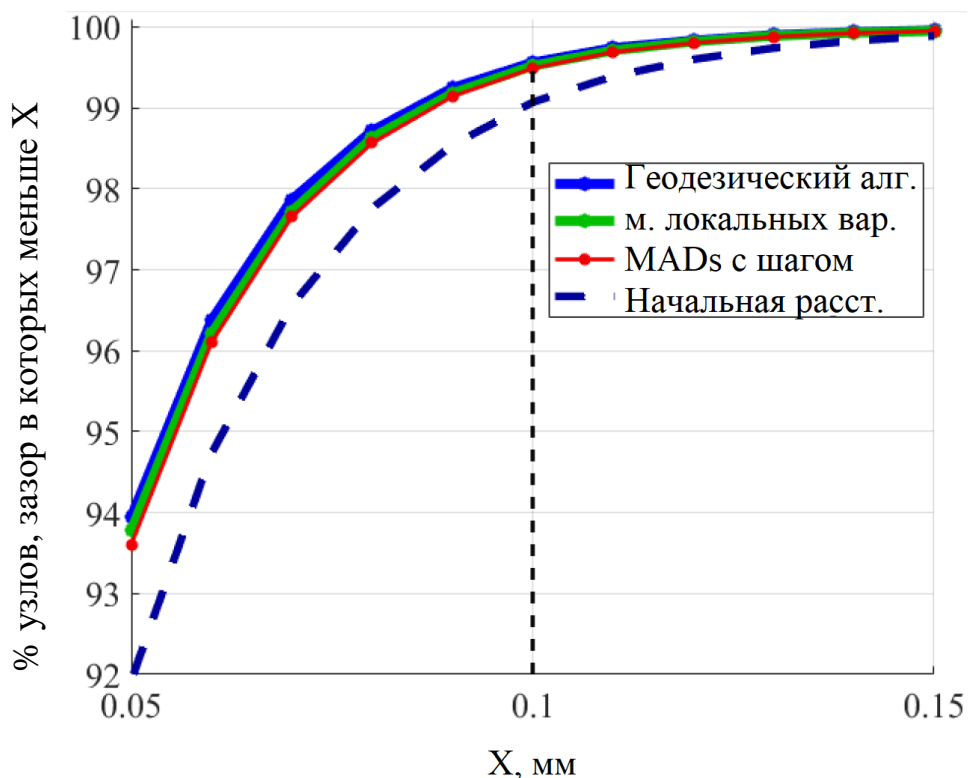


Рисунок 34 – результаты верификации расстановок, полученных рассматриваемыми методами

Стоит отметить, что размер облака начальных зазоров, по которому проводится оптимизация геодезическим алгоритмом, имеет влияние на результат его работы. На рисунке 35 представлены результаты верификации расстановок, полученных геодезическим алгоритмом по облакам начальных зазоров разного размера 1, 10, 20, 50 и 100, по облаку из 50 зазоров, не использовавшихся при оптимизации. Можно отметить, что при увеличении размера облака, уваливается вероятность получения результирующего зазора в заданном диапазоне. В то же время при использовании для оптимизации облаков от 20 начальных зазоров и более результирующие расстановки

перестают существенно отличаться и соответствующие им кривые при верификации располагаются близко друг к другу.

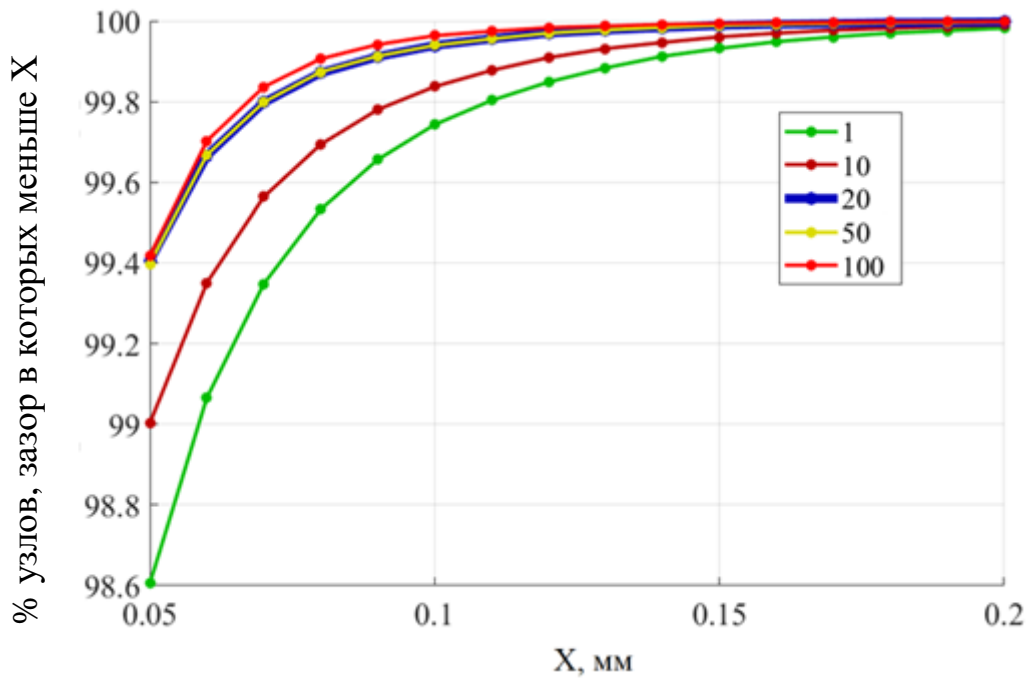


Рисунок 35 – результаты верификации расстановок, полученных геодезическим алгоритмом по облакам начальных зазоров разного размера

Пример 3. В качестве следующего примера рассмотрим технологический процесс рассверливания отверстий при сборке, описанный в работах [63] – соединение листов обшивки внахлест с креплением к элементам каркаса агрегата хвостовой части самолета А350-900 (рис. 36).

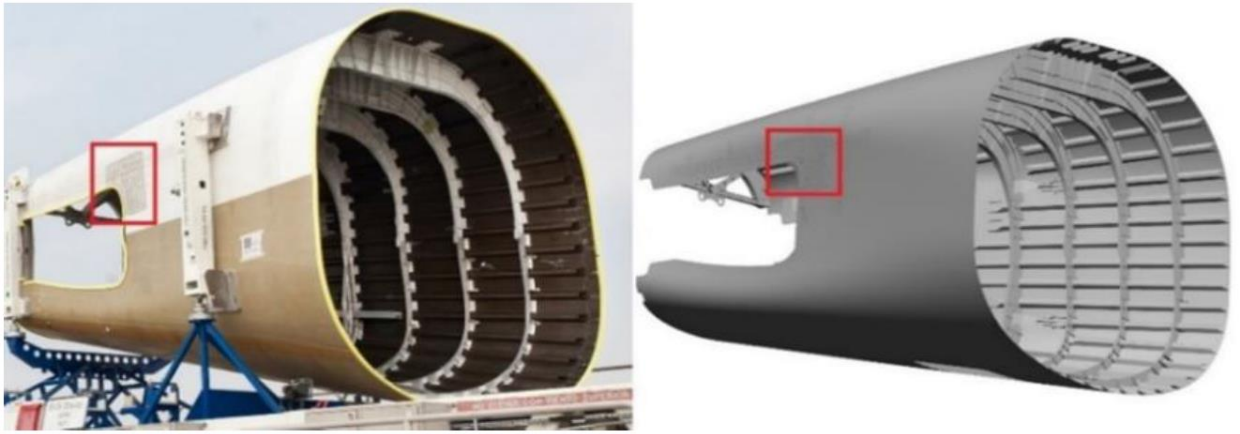


Рисунок 36 – каркаса агрегата хвостовой части самолета А350-900 (слева) и соответствующая модель

В зоне соединения расположены 283 отверстия, в которые установлено 76 временных крепежных элементов, 48 из оставшихся свободных 207 отверстий должны быть последовательно рассверлены для дальнейшей установки постоянных крепежей (рис. 37).

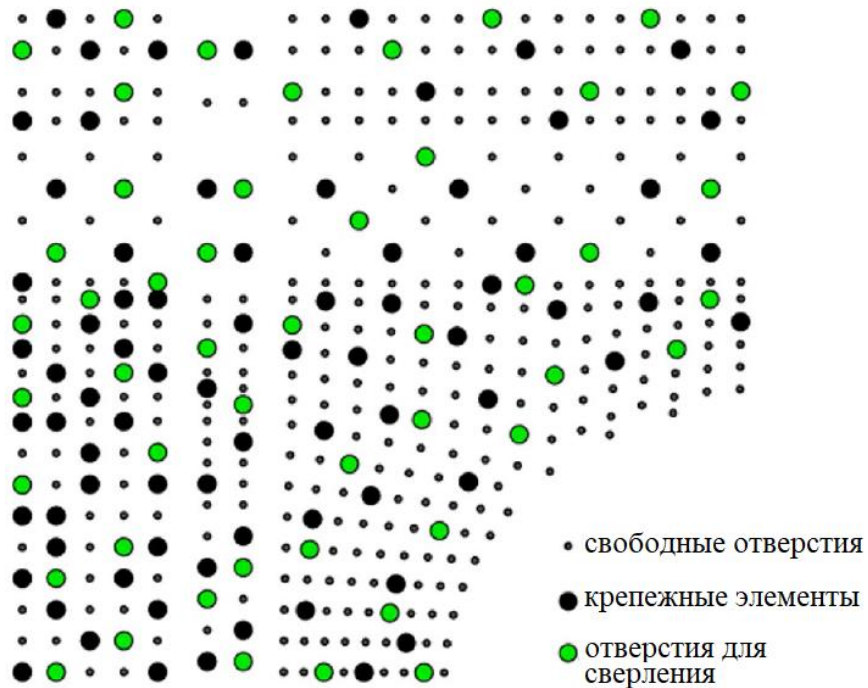


Рисунок 37 – зона рассматриваемого соединения

При рассверливании зазор между соединяемыми частями может увеличиваться, что при превышении величины в 0.3 мм может привести к несоосности отверстий и дальнейшим дефектам [70]. В тоже время требуется решить оптимизационную задачу 3, то есть определить минимальное число и положение крепежных элементов, обеспечивающих результирующий зазор (при сверлении) не более, чем 0.3 мм. На рисунке 38 красным цветом отмечены отверстия, при рассверливании которых зазор превосходит 0.3 мм (19 отверстий). Далее будем называть такие отверстия дефектными.

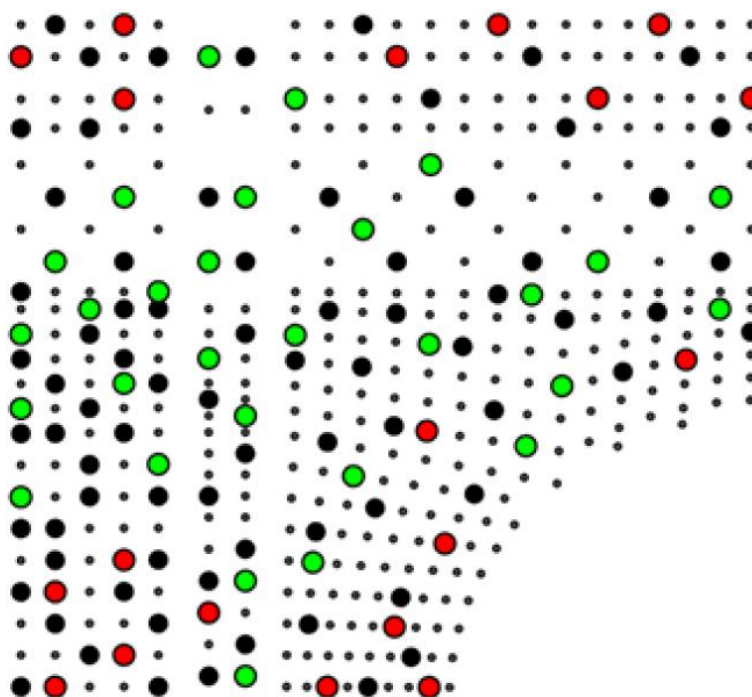


Рисунок 38 – отверстия с результирующим зазор более 0.3 мм (красные) и не более 0.3 мм (зеленые); крупными черными точками обозначена начальная расстановка крепежных элементов

Данная задача была решена в работе [70] следующим образом: сначала каждый крепежный элемент по очереди удаляли из расстановки и добавляли обратно, если это приводило к увеличению числа дефектных отверстий, избавляясь таким образом от избыточных элементов. После этого осуществлялась перестановка оставшихся элементов методом локальных

вариаций и использованием распараллеливания по задачам. В результате за время порядка 4 суток авторам удалось получить расстановку из 53 крепежных элементов без увеличения числа дефектных отверстий. Данная задача была решена с использованием предложенного в работе геодезического алгоритма вместо метода локальных вариаций на шаге перестановки крепежных элементов после удаления излишних [63]. Полученная в результате расстановка содержит 50 крепежных элементов и приводит к уменьшению дефектных отверстий до 17. Полученные расстановки представлены на рисунке (39).

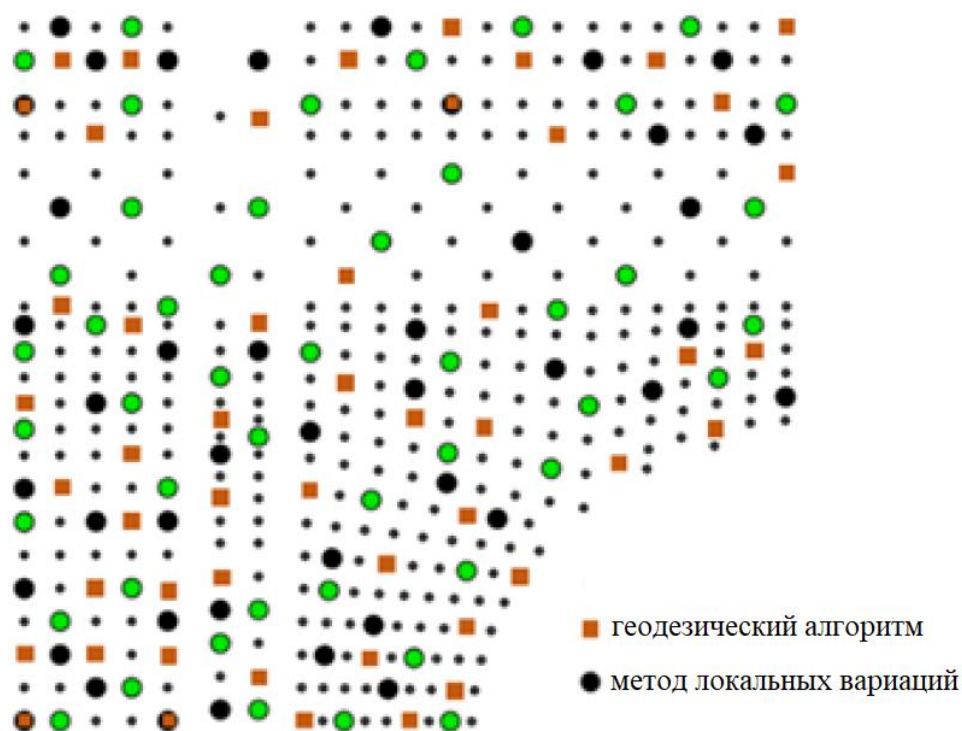


Рисунок 39 – результирующие расстановки, полученные после оптимизации с использованием метода локальных вариаций (черные) и геодезического алгоритма (оранжевые)

Ввиду того, что предложенный в работе геодезический алгоритм, не требует множественного решения времязатратной контактной задачи (2), время вычислений существенно уменьшается (см. табл. 6). Это дало

возможность провести оптимизацию по облаку начальных зазоров, чтобы невозможно до этого.

Таблица 6 - время работы и число крепежных элементов в полученных расстановках

Алгоритм	Время работы, с	Число крепежей
Начальная расстановка	-	76
Метод локальных вариаций	4 дня	53
<b>Геодезический алгоритм</b>	<b>110 минут</b>	<b>50</b>
<b>Геодезический алгоритм по облаку</b>	<b>250 минут</b>	<b>55</b>

Полученные расстановки были верифицированы на облаке из 200 начальных зазоров (эти данные использовались в работе [70]). Контактная задача (2) решается для из этого облака с использованием одной и той же расстановки крепежных элементов, после чего может быть получено облако соответствующих результирующих зазоров, в том числе в расверливаемых отверстиях. На рисунке 40 отмечены отверстия 7 и 44, на примере которых будут описаны результаты. Сами же отверстия раскрашены в соответствии с величиной зазора (мм) в них при использовании начальной расстановки.



Рисунок 40 – зазоры в рассверливаемых отверстия при использовании начальной расстановки

На рисунках 41(1) и 41(2) приведены результаты распределения значений зазоров в отверстиях 7 и 44 для расстановок, полученных методом локальных вариаций и геодезическим алгоритмом при оптимизации по одному зазору. Можно отметить, что значения результирующих зазоров оказываются качественно и количественно близки.

На рисунках 41(3) и 41(4) приведены результаты распределения значений зазоров в отверстиях 7 и 44 для расстановок, полученных методом локальных вариаций при оптимизации по одному зазору и геодезическим алгоритмом при оптимизации по облаку зазоров. В случае оптимизации по облаку значения результирующего зазора в части отверстий удалось уменьшить.

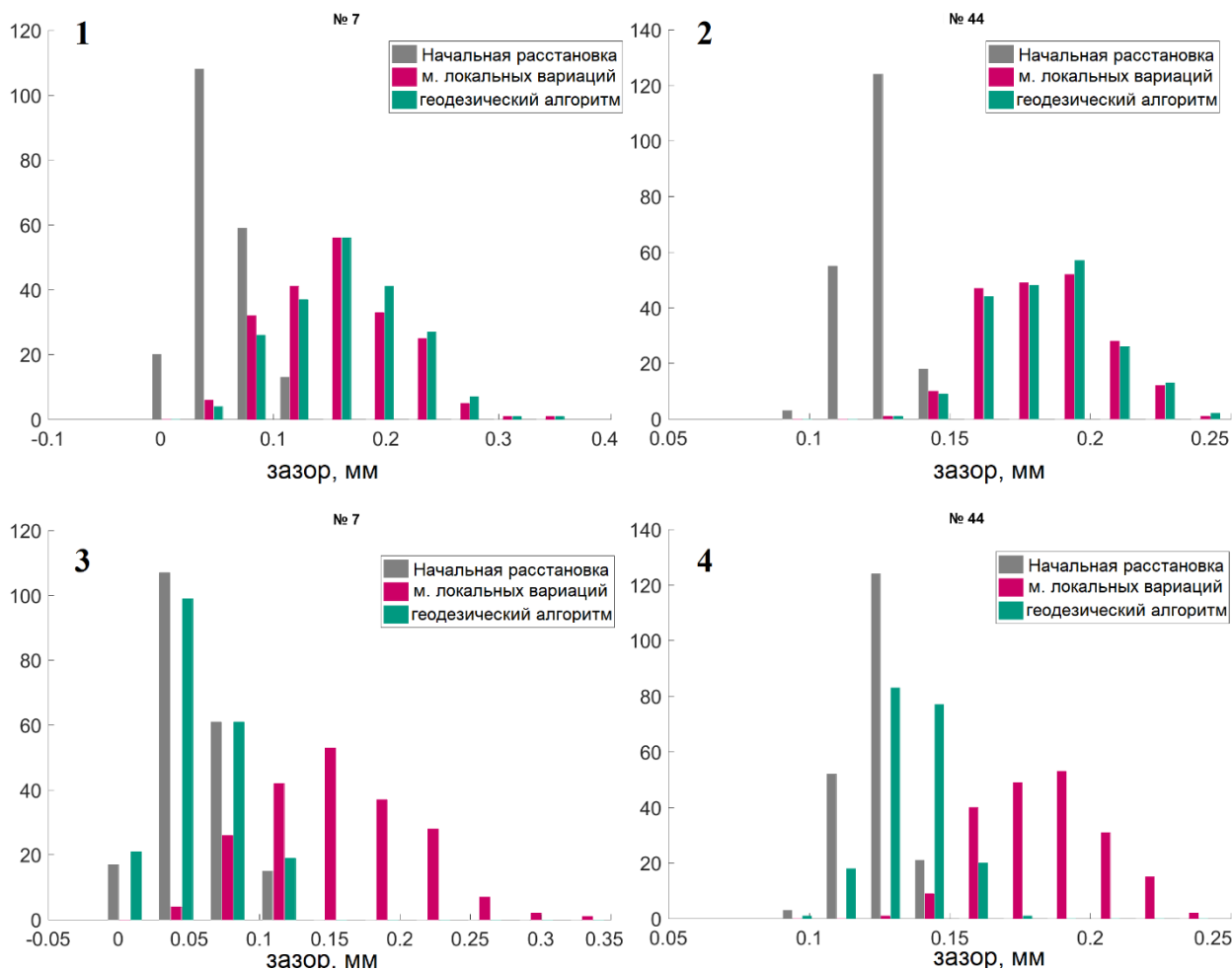


Рисунок 41 – сравнение расстановок, полученных методом локальных вариаций по одному зазору и геодезическим алгоритмом по одному зазору (1 и 2) и геодезическим алгоритмом по облаку зазоров (3 и 4)

Кроме того, стоит отметить, что ввиду особенности метода локальных вариаций, при его использовании возникла необходимость исключить из рассмотрения два верхних и два нижних ряда отверстий. Это было сделано, поскольку именно там находятся отверстия с максимальными значениями зазоров при просверливании и данный метод, основанный на идее локального перебора, с каждой новой итерацией будет выбирать свободные отверстия из их окрестностей, что сделает результирующую расстановку непригодной для использования. Геодезический алгоритм не обладает таким недостатком, потому был применен ко всей области без каких-либо ограничений.

Пример 4. Рассмотрим модель соединения двух панелей фюзеляжа (рис.42), на которой была верифицирована методология решения контактной задачи (2) путем сравнения с физическим экспериментом. Модель состоит из 1400 узлов в зоне соединения деталей и включает в себя 140 отверстий, в которые могут быть установлены крепежные элементы.

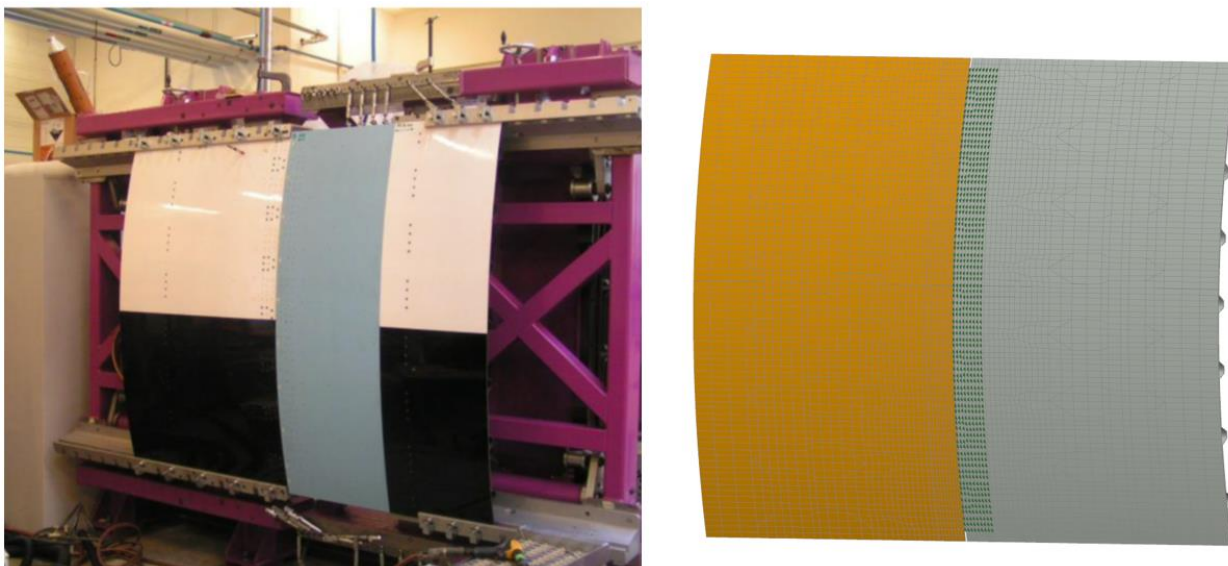


Рисунок 42 – фотография испытательного стенда и конечно-элементной модели

Рассмотрим влияние выбора параметра  $\alpha$  в формуле (25) на качество получаемой расстановки. Согласно методологии, описанной в работе [23], было сгенерировано облако из 200 начальных зазоров (рис. 43). Облако было разделено на 2 группы по 100 зазоров в каждом для поиска расстановки и последующей верификации результатов.

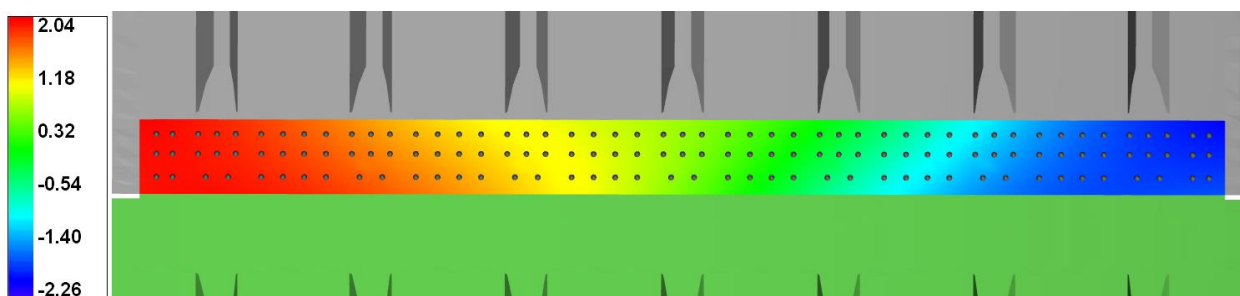


Рисунок 43 – один из полученных начальных зазоров, мм

Геодезический алгоритм был запущен на первом облаке со значениями параметра  $\alpha = 0, 0.5, 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20$  для разных значений  $g_* = 0, 0.1, 0.15, 0.2$  для нахождения расстановки из 15 элементов. После того, как соответствующие 27 расстановки были получены, каждая из них была верифицирована на втором облаке (рис. 45-48).

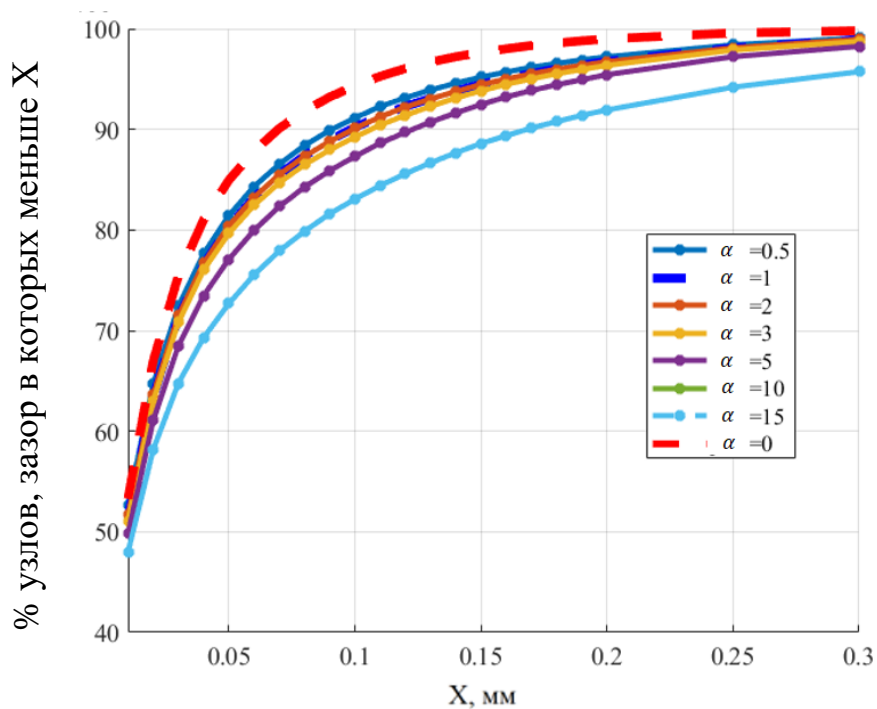


Рисунок 44 – результаты верификации расстановок, полученных для  $g_* = 0.1$

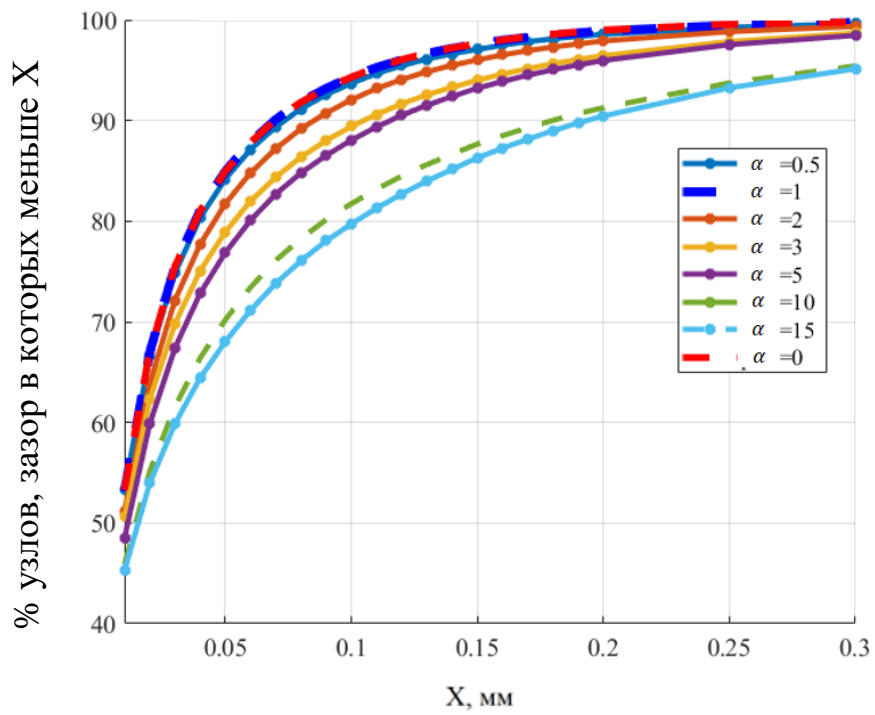


Рисунок 45 – результаты верификации расстановок, полученных для  $g_* = 0.1$

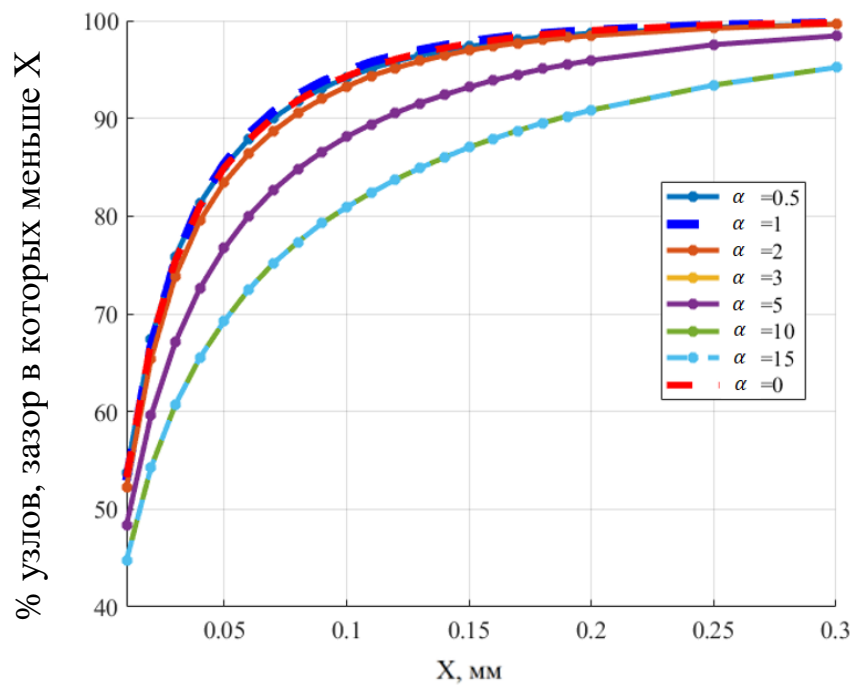


Рисунок 46 – результаты верификации расстановок, полученных для  $g_* = 0.15$

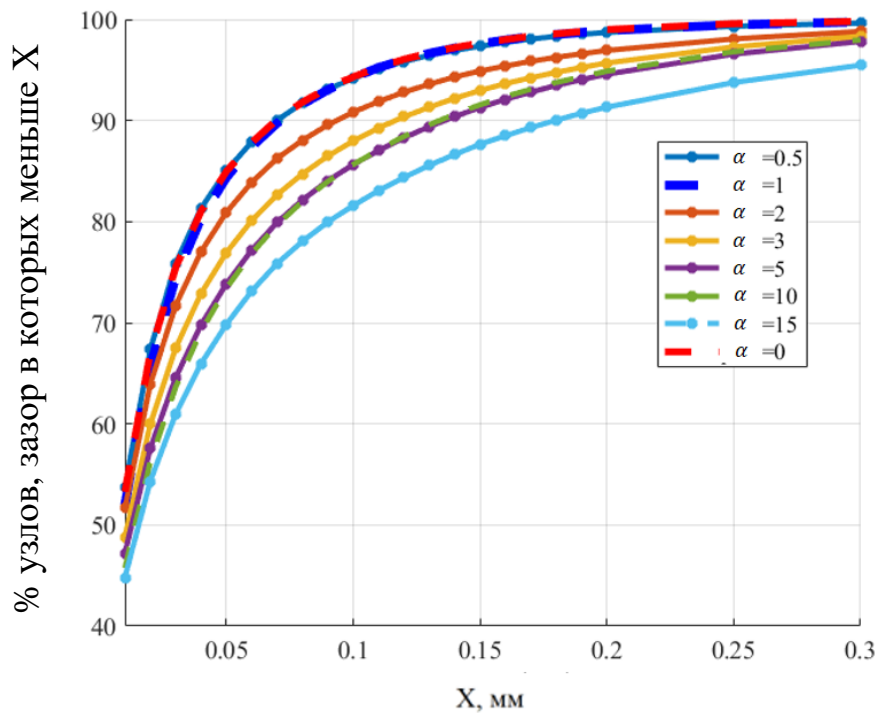


Рисунок 47 – результаты верификации расстановок, полученных для  $g_* = 0.15$

Анализ приведенных на рисунках 44-47 графиков показывает, что все кривые имеют одинаковый характер монотонности и выпуклости. Благодаря этому для численного сравнения результатов, получаемых для разных значений параметра  $\alpha$ , можно вычислить площадь под соответствующим графиком, интеграл кривой. Чем выше лежит кривая на плоскости, тем более качественной оказывается расстановка и тем больше будет значение получаемого интеграла. Результаты вычислений приведены на рисунке 48.

Сравнение результатов показывает, что выбор значения параметра  $\alpha$  в диапазоне от  $(0;2]$  не оказывает значительного влияния на качество получаемой расстановки. Выход из этого диапазона немедленно приводит к снижению качества. Особый характер поведения кривой, соответствующей  $g_* = 0$ , может быть обусловлен физической недостижимостью полного сведения зазора в рассматриваемой задаче.

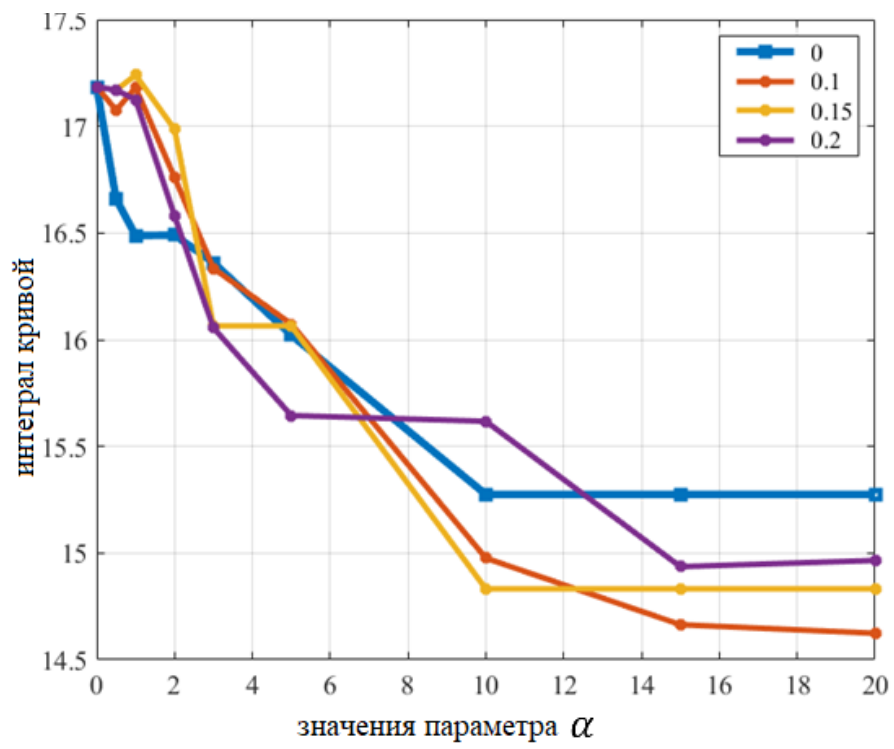


Рисунок 48 – значения интегралов верификационных кривых для разных  $g_*$

## Глава 4. Определения порядка установки крепежных элементов

В данной главе представлен разработанный метод определения порядка установки крепежных элементов для уже известной расстановки. Изложены численные результаты работы метода. Полученные в данном разделе результаты опубликованы в работе [62].

### 4.1 Алгоритм определения порядка установки крепежных элементов

Общая идея предлагаемого алгоритма схожа с идеей, высказанной авторами в работе [71], где предполагается использовать функционал энергии системы для априорной оценки и последующего ранжирования потенциальных положений точек сварного шва. При решении контактной задачи (2) относительные касательные смещения  $\{\tilde{u}_i^T\}_{i=1,n_f}$  отверстий  $H^0$ , в которые установлены крепежные элементы, можно рассматривать как референтные значения, поскольку они соответствуют состоянию минимуму потенциальной энергии соответствующей механической системы. Отмеченная ранее особенность (эффект памяти), значительно увеличивает требуемое время вычислений, так как теряется коммутативность установки крепежных элементов и множество допустимых решений  $U_A$  дополняется новыми ограничениями после установки каждого крепежного элемента.

Последовательность действий алгоритма для любой специальной модели сборки и некоторой расстановки крепежных элементов  $H^0 = \{h_1, \dots, h_{n_f}\}$  может быть описана следующим образом.

**Шаг 1:** Первым устанавливается тот элемент расстановки  $H^0$ , который сообщает системе минимум энергии, то есть

$$\tilde{h}_1 = \operatorname{argmin}_{h_i \in H^0} \left( \min_{u \in U_A} \left( \frac{1}{2} u^T K u - f_{h_i}^T u \right) \right),$$

где вектор  $f_{h_i}$  советует силе от установленного в отверстие  $h_i$  крепежного элемента. Допустимое множество должно быть заменено на  $U_A^1$  путем

добавления к  $U_A$  соответствующего ограничения после установки крепежного элемента, чтобы зафиксировать относительное касательное смещение в советующем отверстии.

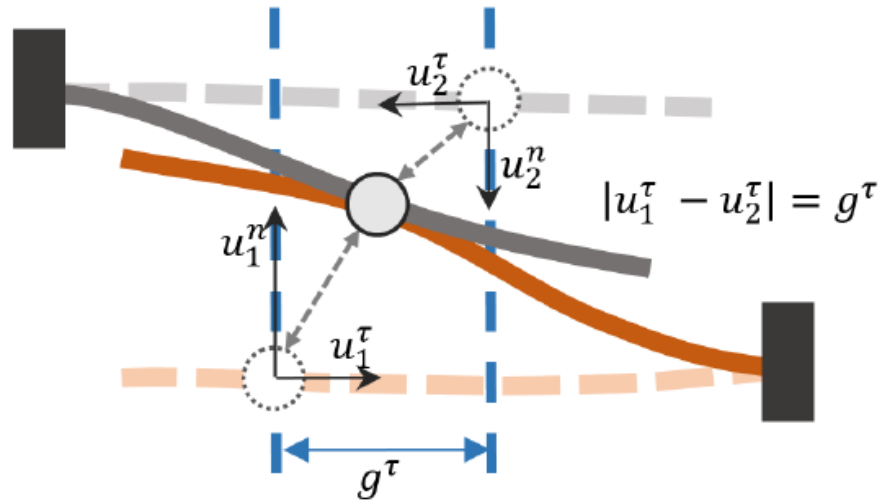


Рисунок 49 – относительные касательные смещения после установки крепежного элемента

**Шаг 2:** предположим, что для  $k$  элементов уже определен их порядок установки  $H_{order}^O = \{\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_k\}$ ,  $k < n_f$ , тогда следующий элемент выбирается так, чтобы уменьшить отклонение от референтного значения:

$$\tilde{h}_{k+1} = \operatorname{argmin}_{h_i \in H^O \setminus H_{order}^O} |u_i^\tau - \tilde{u}_i^\tau|,$$

где  $u^\tau$  – вектор относительных касательных смещений, полученный при решении контактной задачи с множеством допустимых решений  $U_A^k$ .

**Шаг 3:** аналогично шагу 1, допустимое множество должно быть заменено на  $U_A^{k+1}$  путем добавления к соответствующего ограничения после установки крепежного элемента, чтобы зафиксировать относительное касательное смещение в советующем отверстии.  $H_{order}^O := H_{order}^O \cup \{\tilde{h}_{k+1}\}$ .

Шаги 2 и 3 повторяются до тех пор, пока порядок установки всех элементов не будет определен. Данный подход позволяет избежать множественных пересчетов результирующего зазора и существенно сократить время расчетов.

## 4.2 Пример использования

В предыдущих примерах в качестве иллюстраций приводились в основном соединения типа крыло-фюзеляж, однако в данном случае рассмотрим более гибкую модель соединения двух панелей фюзеляжа из примера 4 раздела 3.2. На рисунке 50 представлена расстановка из 6 элементов, получена при помощи геодезического алгоритма, описанного ранее.

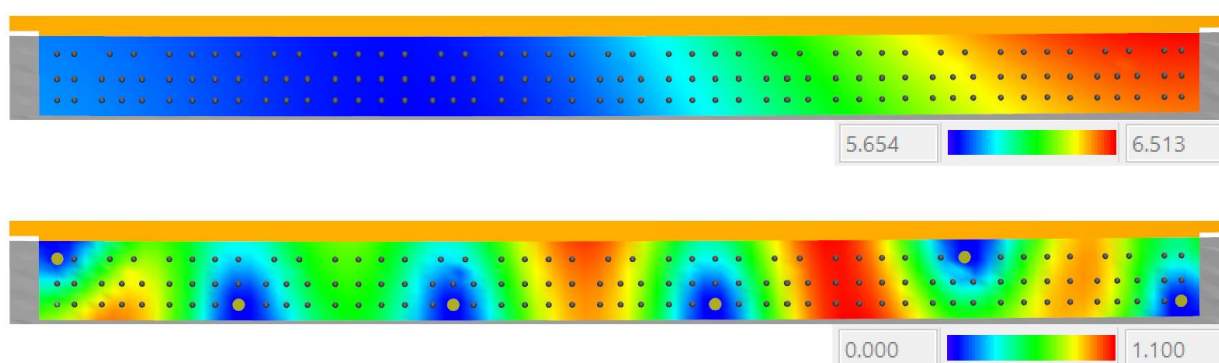


Рисунок 50 – начальный зазор (сверху) и расстановка из 6 крепежей, полученная геодезическим алгоритмом и результирующий зазор после их установки без учета касательных смещений (снизу)

Для того, чтобы продемонстрировать влияние порядка установки, рассмотрим случай, представленный на рисунке 51. Крепежные элементы пронумерованы в порядке их установки, максимальное значение результирующего зазора в таком случае составляет 7.124 мм, что превышает максимальное значение начального зазора (6.513 мм). Таким образом в зоне соединения появляется «пузырь».

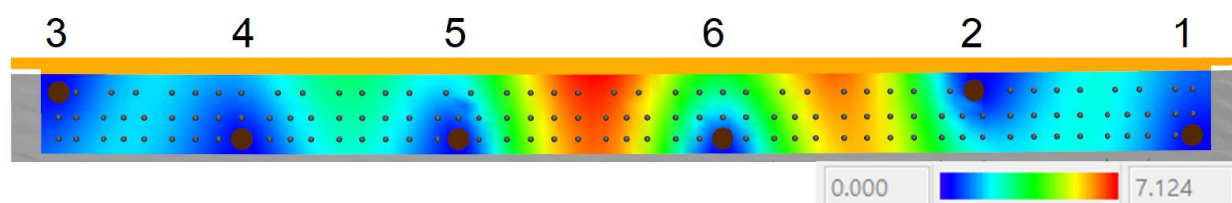


Рисунок 51 – эффект возникновения «пузыря» при указанном порядке установки крепежей

Используя описанный в предыдущем разделе метод, порядок установки был определен и затем вычислен результирующий зазор. Также методом полного перебора всевозможных вариантов была найдена расстановка, сообщающая минимум максимальному значению результирующего зазора (рисунок 52).

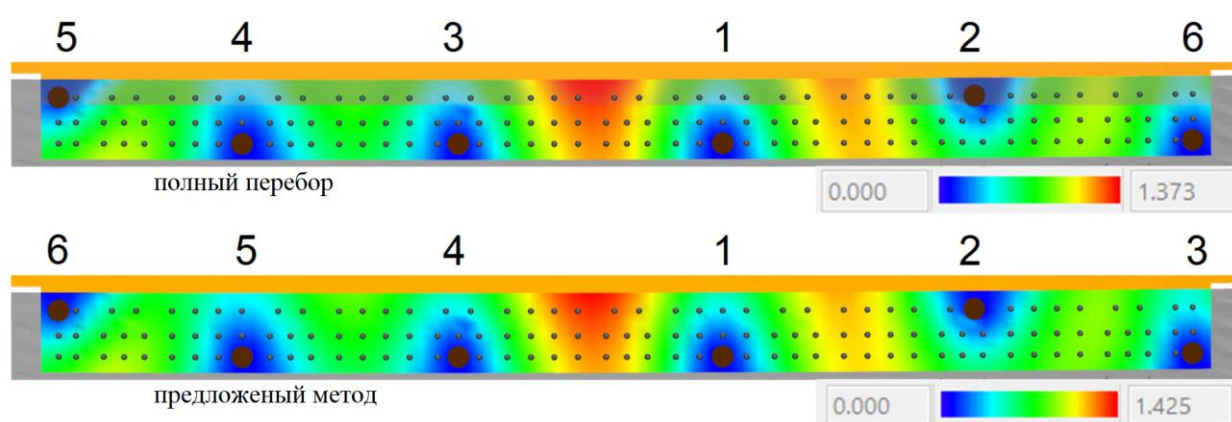


Рисунок 52 – порядок установки, полученный методом полного перебора (сверху), и предложенным в работе алгоритмом (снизу)

Полученное решение отличается от глобального оптимума не более, чем на 3,8%. Для более детальной оценки полученного результата была построена гистограмма распределения всех возможных порядков установки крепежей по максимальному значению результирующего зазора. Диапазоны максимальных значений зазора располагаются на оси X, количество различных порядков установки крепежа – на оси Y. Полученное решение является четвертым в порядке возрастания значений зазора.

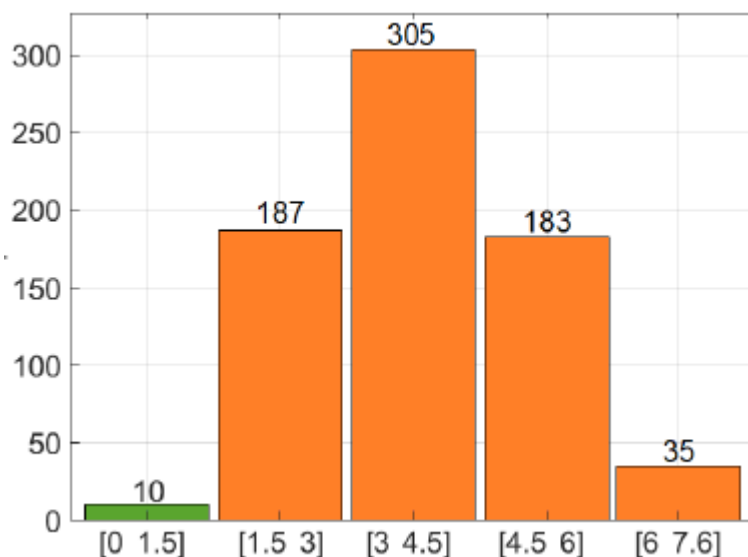


Рисунок 53 – распределение возможных порядков установки по получаемым максимальным значениям зазоров

Предложенный метод позволяет определять порядок установки крепежных элементов на основе числа решений контактной задачи, равного числу элементов расстановки. При этом получаемые результаты отличаются от глобального оптимума менее, чем на 5%.

## **Заключение**

Исследование, проведенное в рамках данной работы посвящено разработке безитерационных методов определения положения и порядка крепежных элементов при временной сборке авиационных конструкций. Решаемые задачи лежат на стыке таких областей знаний как механика, комбинаторика и оптимизация. Комплексная природа задачи делает затруднительным или неэффективным ее решение методом, относящимся только к одной из ее областей, что было наглядно продемонстрировано на примерах методов, рассмотренных в главе 2.

Анализ существующего методологического аппарата показал отсутствие единого подхода к постановке и формализации подобного рода задач. Поэтому такие формулировки были предложены в данной работе.

Существующие методы, применяемые при решении задач, схожих с рассматриваемыми в работе, хорошо зарекомендовали себя для решения задач малых размерностей с относительно небольшим числом возможных вариантов или при отсутствии комбинаторной составляющей, то есть без predetermined позиций возможных установок крепежей. Однако в случае временной сборки реальных авиационных конструкций невозможно ограничиться небольшим числом вариантов и отказаться от комбинаторной составляющей. Это делает неэффективным применение упомянутых методов, так как требует большого количества вычислений функции цели и не позволяет проводить расчеты на персональном компьютере.

Методы решения поставленных задач, предложенные в работе, позволяют на порядки сократить время вычислений без потери точности. Значительная часть работы посвящена вычислительному эксперименту и анализу применимости предложенных методов.

Предложенные методы построены таким образом, что для их работы и получения результатов достаточно провести небольшое количество предварительных расчетов, которое в случае геодезического алгоритма

соответствует объему начальных данных (облако начальных зазоров), а в случае метода определения порядка — числу элементов рассматриваемой расстановки с одним дополнительным расчетом.

Таким образом, все сформулированные во Введении задачи исследования решены. Перечислим основные результаты, полученные в работе:

- в работе сформулированы универсальные постановки задач оптимизации числа, расположения и порядка установки крепежных элементов при сборке авиационных конструкций, применимые к любым другим задачам о точечном соединении частей (сварка, болтовое соединение и т.д.) ;
- разработан новый эффективный метод выбора расположения временных крепежных элементов при математическом моделировании временной сборки авиационных конструкций;
- разработан новый эффективный метод определения порядка установки крепежных элементов при математическом моделировании временной сборки авиационных конструкций;
- разработанные методы верифицированы путем сравнения полученных результатов с результатами, полученными существующими методами на тестовых и реальных задачах.

## Список литературы

1. Вдовий Д., С., «Оптимизация расположения сварных точек на кузовных конструкциях несущих систем колесных машин», Известия высших учебных заведений. Машиностроение (4), - Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана 2007. - С. 34-39.
2. Shelley Xie, L. and Hsieh, C., 2002. Clamping and welding sequence optimization for minimizing cycle time and assembly deformation. International Journal of Materials and Product Technology, 17(5-6), pp. 389-399.
3. Liao, Y. Optimal design of weld pattern in sheet metal assembly based on a genetic algorithm. Int J Adv Manuf Technol 26, 512–516 (2005)
4. Puchner, K., Dannbauer, H., and Meise, M., "Spot Weld Optimization Regarding Stiffness and Fatigue Using Standard Software," SAE Technical Paper 2006-01-1247, 2006
5. Bhatti Q.I., Ouisse M., Cogan S. (2011) Robust optimization and quality control in spot welded structures. In: Proulx T. (eds) Linking Models and Experiments, Volume 2. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. Springer, New York, NY.
6. Горбач В. Д., Михайлов В. С., Попов А. Е., Куликов В. П., Зеленин М. Н., Антонова Н. П. Отработка технологии изготовления сложных пространственных конструкций корпусов судов и кораблей на основе математического моделирования и расчетной оценки сварочных деформаций с использованием метода конечных элементов. Морской вестник. 2009. Т.30. № 31. С. 106-110.
7. M. Faiq and R. A. Mufti, "Welding sequence optimization for the fabrication of Box Girder," 2016 International Conference on Emerging Technologies (ICET), Islamabad, 2016, pp. 1-6.
8. Кудаев С.П., Чугунов М.В., Фоминов А.Г., Борискин С.И., Курганов В.В., Кармишин А.М. Моделирование процесса сварки боковой стенки вагона

зерновоза в среде SOLIDWORKS SIMULATION. Вестник Мордовского университета. 2015. Т. 25. № 1. С. 96-100.

9. Yang, D., Qu, W., Ke, Y., Evaluation of residual clearance after pre-joining and pre-joining scheme optimization in aircraft panel assembly // *Assembly Automation*. – 2016 – Vol. 36. – p.376-387;

10. Petukhova, M., Lupuleac, S., Shinder, Y., Smirnov, A., Yakunin, S., Bretagnol, B., Numerical approach for airframe assembly simulation // *Journal of Mathematics in Industry*. – 2014. – 4(8) ;

11. Muelaner, J. E. and Maropoulos, P., Large Scale Metrology In Aerospace Assembly // *Proceedings of 5th International Conference on Digital Enterprise Technology*, Nantes, France, October, 22-24 – 2008;

12. Wärmfjord, K., Lindkvist, L., and Söderberg, R., 2008. "Tolerance simulation of compliant sheet metal assemblies using automatic node-based contact detection". *ASME IMECE 2008*, Vol. 14, pp. 35–44

13. Lorin, S., Lindau, B., Lindkvist, L. and Söderberg, R., 2019. Efficient Compliant Variation Simulation of Spot-Welded Assemblies. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 19(1)

14. Lorin, S., Lindau, B., Tabar, R.S., Lindkvist, L., Wärmefjord, K. and Söderberg, R., 2018. Efficient variation simulation of spot-welded assemblies, *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Proceedings (IMECE) 2018*.

15. Yang, D., Qu, W. and Ke, Y. (2016), 'Evaluation of residual clearance after prejoining and pre-joining scheme optimization in aircraft panel assembly', *Assembly Automation* 36(4), 376-387.

16. Hasegawa H., Sasaki H., Uehara H., Kawamo K. Optimization of spot-weld positions for vehicle design by using hybrid meta-heuristics. *Int. J. of Vehicle Design*, vol 43; Nos. 1-4; 2007, p. 151-172.

17. Chickermane, H., Gea, H. C., Yang, R.-J., Chuang, C.-H. , Optimal fastener pattern design considering bearing loads, 1999, *Structural Optimization* 17(2), 140-146.

18. Oinonen, A., Tanskanen, P., Bjork, T., Marquis, G., Pattern optimization of eccentrically loaded multi-fastener joints, 2009, Structural and Multidisciplinary Optimization 40(1).
19. Cai, W., 2008. Fixture optimization for sheet panel assembly considering welding gun variations. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 222(2), pp. 235-246.
20. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве// М., Физматгиз, 1958. 364 с.
21. Петухова, Маргарита Владимировна. Разработка алгоритмов решения одного класса контактных задач : диссертация ... кандидата технических наук : 05.13.18 / Петухова Маргарита Владимировна; [Место защиты: Ин-т систем. анализа РАН].- Москва, 2013.- 119 с.
23. Lupuleac, S., Zaitseva, N., Stefanova, M., Berezin, S., Shinder, J., Petukhova, M., and Bonhomme, E. (April 19, 2019). "Simulation of the Wing-to-Fuselage Assembly Process." ASME. J. Manuf. Sci. Eng. June 2019; 141(6)
24. М.Гэри, Д.Джонсон. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И ТРУДНОРЕШАЕМЫЕ ЗАДАЧИ. М.: Мир, 1982
25. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. -Пер. с франц. - М.: Наука, 1975. - 480 с.
26. Zaitseva, N., Pogarskaia, T., Minevich, O., Shinder, J. et al., "Simulation of Aircraft Assembly via ASRP Software," SAE Technical Paper 2019-01-1887, 2019
27. Pogarskaia T., Churilova M., Petukhova M., Petukhov E. (2019) Simulation and Optimization of Aircraft Assembly Process Using Supercomputer Technologies. In: Voevodin V., Sobolev S. (eds) Supercomputing. RuSCDays 2018. Communications in Computer and Information Science, vol 965. Springer, Cham
28. R.V. Vidal (ed.), Applied simulated annealing. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993). DOI 10.1007/978-3-642-46787-5

29. Hansen T.D. (1993) Location of Civil Defence Sirens. In: Vidal R.V.V. (eds) Applied Simulated Annealing. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol 396. Springer, Berlin, Heidelberg
30. Luckehe, D., Kramer, O. & Weisensee, M. (2015), Simulated annealing with parameter tuning for wind turbine placement optimization, in `LWA Workshops', pp. 108-119.
31. B. H. Arabi, "Solving NP-complete Problems Using Genetic Algorithms," 2016 UKSim-AMSS 18th International Conference on Computer Modelling and Simulation (UKSim), Cambridge, 2016, pp. 43-48, doi: 10.1109/UKSim.2016.65.
32. A.I. Diveev, O.V. Bobr, Variational Genetic Algorithm for NP-hard Scheduling Problem Solution, Procedia Computer Science, Volume 103, 2017, Pages 52-58
33. Oren, L., & Thirer, N. (2019). A rapid convergent genetic algorithm for NP-hard problems. Defense + Commercial Sensing.
34. H. Razip and M. N. Zakaria, "Combining approximation algorithm with genetic algorithm at the initial population for NP-complete problem," 2017 IEEE 15th Student Conference on Research and Development (SCORED), Putrajaya, 2017, pp. 98-103, doi: 10.1109/SCORED.2017.8305413.
35. Yujiang Xiang, Qian Wang, Zijie Fan, Hongbing Fang, Optimal crashworthiness design of a spot-welded thin-walled hat section, Finite Elements in Analysis and Design, Volume 42, Issue 10, 2006, Pages 846-855
36. Artificial Intelligence A Modern Approach
37. M Haouari & J S Chaouachi (2002) A probabilistic greedy search algorithm for combinatorial optimisation with application to the set covering problem, Journal of the Operational Research Society, 53:7, 792-799
38. A. Potebnia, "Representation of the greedy algorithms applicability for solving the combinatorial optimization problems based on the hypergraph mathematical structure," 2017 14th International Conference The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM), Lviv, 2017, pp. 328-332

39. Zheng, Y., Xu, C. & Xue, J. A simple greedy algorithm for a class of shuttle transportation problems. *Optim Lett* 3, 491–497 (2009).
40. Вахнин А. В., Сопов Е. А. Новый метод группировки переменных для задач параметрической оптимизации большой размерности // *Сибирский журнал науки и технологий*. 2018. Т. 19, № 3. С. 386–395. Doi: 10.31772/2587-6066-2018-19-3-386-395
41. Сопов Е.А., Аплеснин С.С. Самоконфигурируемый ансамбль генетических алгоритмов для решения задач мультимодальной оптимизации // *Сибирский журнал науки и технологий*. 2015. №4.
42. Pardalos, P M, and Themistocles M. Rassias. *Mathematics Without Boundaries: Surveys in Interdisciplinary Research.*, 2014. Internet resource.
43. C. Audet and W. Hare, *Derivative-Free and Blackbox Optimization*, ser. *Mathematics and Statistics*. Springer, Cham, 2017.
44. Isebor, O.J., Durlofsky, L.J. & Echeverría Ciaurri, D. A derivative-free methodology with local and global search for the constrained joint optimization of well locations and controls. *Comput Geosci* 18, 463–482 (2014).
45. M. Ahmad, M. Naeem, M. Iqbal, W. Ejaz and A. Anpalagan, "Joint user selection, mode assignment, and power allocation in cognitive radio-assisted D2D networks," in *IET Communications*, vol. 12, no. 10, pp. 1207-1214, 26 6 2018
46. Orakzai, F.A., Iqbal, M., Naeem, M. et al. Energy efficient joint radio resource management in D2D assisted cellular communication. *Telecommun Syst* 69, 505–517 (2018).
47. Juliane Müller, Christine A. Shoemaker, and Robert Piché. 2013. SO-MI: A surrogate model algorithm for computationally expensive nonlinear mixed-integer black-box global optimization problems. *Comput. Oper. Res.* 40, 5 (May, 2013), 1383–1400.
48. Judson, R.S., Colvin, M.E., Meza, J.C., Huffer, A. and Gutierrez, D. (1992), Do intelligent configuration search techniques outperform random search for large molecules?. *Int. J. Quantum Chem.*, 44: 277-290.
49. J.C. Meza, M.L. Martinez, On the use of direct search methods for the molecular

- conformation problem. *J. Comput. Chem.* 15, 627–632 (1994)
50. Jarugumilli, Krishna Prashant. “A Nonlinear Knapsack Problem Arising in Location Problems with Lead Time and Safety Stock Considerations.” (2011).
51. B. De Almeida Dantas and E. N. Cáceres, "A Parallelization of a Simulated Annealing Approach for 0-1 Multidimensional Knapsack Problem Using GPGPU," 2016 28th International Symposium on Computer Architecture and High Performance Computing (SBAC-PAD), Los Angeles, CA, 2016, pp. 134-140
- K.L. Du, M. Swamy, Search and optimization by metaheuristics (Birkhauser, Basel, 2016)
52. Zaitseva, N., Pogarskaia, T., Minevich, O., Shinder, J. & Bonhomme, E. (2019), Simulation of aircraft assembly via asrp software, in `SAE Technical Paper', SAE International.
53. Charles Audet and J. E. Dennis, Jr., Mesh Adaptive Direct Search Algorithms for Constrained Optimization, *SIAM Journal on Optimization* 2006 17:1, 188-217
54. Abramson, M. A., Audet, C., Chrissis, J. W. & Walston, J. G. (2008), `Mesh adaptive direct search algorithms for mixed variable optimization', *Optimization Letters* 3(1), 35.
55. Audet, C., Ihaddadene, A., Digabel, S. L. & Tribes, C. (2018), `Robust optimization of noisy blackbox problems using the mesh adaptive direct search algorithm', *Optimization Letters* 12(4), 675-689.
56. Audet, C., Kokkolaras, M., Le Digabel, S. & Talgorn, B. (2018), `Order-based Error for Managing Ensembles of Surrogates in Mesh Adaptive Direct Search', *Journal of Global Optimization* 70, 645 - 675.
57. Audet, C., Le Digabel, S. & Tribes, C. (2009), NOMAD user guide, Technical Report G-2009-37, Les cahiers du GERAD.
58. Isebor, O.J., Durlofsky, L.J. & Echeverría Ciaurri, D. A derivative-free methodology with local and global search for the constrained joint optimization of well locations and controls. *Comput Geosci* 18, 463–482 (2014)
59. Charles Audet and J. E. Dennis, Jr., A Progressive Barrier for Derivative-Free Nonlinear Programming, *SIAM Journal on Optimization* 2009 20:1, 445-472

60. Reeves CR (1993) Using genetic algorithms with small populations. In: Proceedings of the 5th international conference on genetic algorithms. Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, pp 92–97
61. Popov, N. P., & Pogarskaia, T. A. (2019). Geodesic distance numerical computation on compliant mechanical parts in the aircraft industry. *Journal of Physics: Conference Series*, 1326(1).
62. Pogarskaia T., Lupuleac S., Bonhomme E., (2020). Novel approach to optimization of fastener pattern for airframe assembly process. *Procedia CIRP*, 93 1151-1157.
63. Pogarskaia T., Churilova M., Bonhomme E. (2020) Simulation and Application of a novel approach based on geodesic distance and pressure distribution to optimization of automated airframe assembly process. In: Voevodin V., Sobolev S. (eds) *Supercomputing. RuSCDays 2020. Communications in Computer and Information Science*, Springer, inprint
64. A.B. Hamza, H. Krim, *IEEE Transactions on Image Processing* 15, 2249 (2006).
65. E. Prados, S. Soatto, C. Lenglet, J.P. Pons, N. Wotawa, R. Deriche, O. Faugeras, in *Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, vol. 1 (IEEE Computer Society, New York, 2006), vol. 1, pp. 1076-1083
66. G. Peyre, L.D. Cohen, *Advances in Computational Vision and Medical Image Processing* 13, 29 (2009).
67. Ne P, Fische A and Martin R J., 2016, *Rational Mechanics and Analysis* , 222-2
68. Spira, A., Kimmel, R.: An efficient solution to the eikonal equation. *Interfaces Free Boundaries* 6(3) (2004) 315–327
69. S. Baklanov, M. Stefanova & S. Lupuleac (2020) Newton projection method as applied to assembly simulation, *Optimization Methods and Software*
70. Lupuleac, S., Shinder, J., Churilova, M., Zaitseva, N. et al.: Optimization of Automated Air-frame Assembly Process on Example of A350 S19 Splice Joint. *SAE Technical Paper 2019-01-1882* (2019)

71. Bhatti Q.I., Ouisse M., Cogan S. (2011) Robust optimization and quality control in spot welded structures. In: Proulx T. (eds) Linking Models and Experiments, Volume 2. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. Springer, New York