

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Инженерно-строительный институт  
Высшая школа гидротехнического и энергетического строительства

*На правах рукописи*

**Котов**  
**Евгений Владимирович**

**НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ БЕЗНАПОРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В  
ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ**

**НАУЧНЫЙ ДОКЛАД**

Специальность 05.23.16 – «Гидравлика и инженерная гидрология»

Санкт-Петербург

2021

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

**Научный руководитель:**

<b>Петриченко Романович</b>	<b>Михаил</b>
---------------------------------	---------------

доктор технических наук, профессор, профессор высшей школы гидротехнического и энергетического строительства инженерно-строительного института

**Локтионова Елена Анатольевна**

кандидат технических наук, доцент, доцент высшей школы гидротехнического и энергетического строительства инженерно-строительного института

**Рецензенты:**

**Ватин Николай Иванович**

доктор технических наук, профессор, профессор высшей школы промышленно-гражданского и дорожного строительства

**Базаров Дилшод Райимович**

доктор технических наук, профессор, профессор Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства

**Ольшевский Вячеслав Янушевич**

кандидат технических наук, доцент, доцент высшей школы гидротехнического и энергетического строительства инженерно-строительного института

### Актуальность темы исследования

Одной из областей исследования, указанных в паспорте специальности 05.23.16 – Гидравлика и инженерная гидрология, п. 6, являются «Подземные потоки жидкостей и газов, фильтрация жидкостей через различные среды, прогноз характеристик движения фильтрационных потоков при решении прикладных инженерных задач».

Исследование процессов фильтрации жидкостей через пористые среды, возможность прогнозирования характеристик движения, разработка методик расчетов являются актуальными задачами при проектировании и строительстве различных гидротехнических сооружений: плотин, перемычек (дамб), откосов котлованов и пр. Так, например, для обоснования формы и размеров плотины, дренажных устройств, требуется проведение фильтрационных расчетов, которые позволяют достоверно определять фильтрационный расход воды сквозь среду (тело плотины, перемычки и т.п.), положение поверхности депрессии и градиенты напора при различных режимах фильтрационных потоков.

В задачах безнапорной фильтрации наиболее часто используется модель с линейным законом фильтрации. Аналитические решения задач безнапорной фильтрации получены в предположении о стационарности движения жидкости в пористой среде. Предположение о стационарности движения *принципиально важно*, поскольку классические методы расчета фильтрационных потоков используют аппарат теории аналитических голоморфных функций. Во многих инженерных задачах фильтрации важно уметь определять мгновенные характеристики фильтрационных потоков, что приводит к необходимости изучения неустановившихся режимов движения. Например, мгновенные положения депрессионной кривой и высоты промежутка высачивания характеризуют эффективность дренирования строительного котлована и размеры шпунтовой стенки, фиксирующей откос. Мгновенные положения депрессионной кривой в теле грунтовой перемычки необходимо учитывать при изменениях уровня воды в бьефах. Неустановившийся режим взаимодействия фильтрационного потока с пористой средой влияет на прочность и устойчивость грунтовых гидротехнических сооружений. Так, расположение депрессионной кривой определяет границу области, занятой насыщенной и ненасыщенной средами, тем самым определяется область, пригодная для проведения строительных работ. Выход депрессионной кривой на низовой откос сопровождается образованием *промежутка высачивания*. Значение промежутка высачивания необходимо учитывать для предотвращения морозного пучения аллювиального грунта и разрушения откоса.

Решение таких задач существенно усложняется из-за нелинейности уравнения, описывающего фильтрационное движение, наличия свободной поверхности и геометрии откосов сооружения.

Поэтому разработка аналитических и численных методов оценки неустановившихся безнапорных фильтрационных потоков в задачах инженерно-строительной гидравлики, как научной дисциплины, так и ее гидротехнических приложений, является актуальной.

### Степень разработанности

Теория фильтрации как раздел механики жидкости (гидравлики) возникла на основе исследований А. Дарси, установившего линейную зависимость между расходом и потерей напора. Значительный вклад в развитие теории внесла отечественная школа фильтрации жидкостей и газов, основоположниками которой являются Н.Е. Жуковский, Н.Н. Павловский, Л.С. Лейбензон, Б.Б. Девисон. П.Я. Полубаринова-Кочина. Несомненной заслугой отечественной школы фильтрации является внедрение и применение методов аналитической теории дифференциальных уравнений (Шварца) для решения конкретных задач мелиорации и гидротехники.

Одно из направлений теории фильтрации неразрывно связано с исследованиями школы Н.Н. Павловского в ППИ-ЛПИ-ЛИИ. Работы, выполненные Н.Н. Павловским и его ближайшими учениками: В.И. Аравиным, С.В. Избашем, С.Н. Нумеровым, А.Н. Патрашевым, М.Д. Чертоусовым, Р.Р. Чугаевым, легли в основу современных инженерных методов расчета

фильтрационных потоков в ГТС. В этих работах решены задачи безнапорной установившейся фильтрации через грунтовые плотины, фильтрации воды из каналов и котлованов и пр.

Задачи фильтрации жидкости в пористых средах отличаются разнообразием граничных условий для искомого комплексного потенциала фильтрации и соответственно этому наличие большого количества геометрических и физических характеристик фильтрационного потока. Первые теоремы существования фильтрационных потоков жидкости в земляных плотинах со свободной границей (депрессионной кривой) установлены Полубариновой - Кочиной П.Я. методами аналитической теории дифференциальных уравнений.

В настоящее время аналитические решения задач безнапорной фильтрации сохраняют свою теоретическую и практическую актуальность, что находит отражение в работах Э.Н. Береславского<sup>1</sup>, М.Р. Петриченко<sup>2</sup>, К.Н. Анахаева<sup>3</sup>, казанской школы фильтрации (институт математики им. Н.Г. Чеботарева), института гидромеханики национальной академии наук Украины и работах чл.-кор. АН УССР А. Я. Олейника<sup>4</sup>.

Интересы современной мировой научной общественности, специализирующейся в области фильтрационных течений, связаны с задачами о применении пористого тела для фильтрации дисперсных включений из потока несущей фазы. Актуальной задачей является описание конвективных течений в пористых средах, этому классу задач посвящена работа Nield D.A., Bejan A.<sup>5</sup> Интерес к ним обусловлен их прикладным значением для нефтедобывающей и нефтеперерабатывающей промышленности.

В тоже время прикладной характер задач, связанных с определением мгновенного положения депрессионной кривой в задачах нестационарной безнапорной фильтрации раскрыт недостаточно, несмотря на практическую потребность в исследовании фильтрационных процессов, происходящих на гидротехнических объектах при наличии дренажа, поверхностных источников и взаимосвязи грунтовых вод с подземными.

Математическое моделирование фильтрационных потоков в нестационарной постановке изучено мало, что и определило направление выполненного исследования.

### Цель и задачи работы

Из обзора источников следует, что, несмотря на большой объем исследований по данной теме, гидравлические методы расчета неустановившихся безнапорных фильтрационных течений разработаны недостаточно. Неизвестны времена установления стационарных режимов фильтрации, влияния на них свойств насыщенной пористой среды, геометрии сооружения, предельных условий.

**Целью работы** является решение задачи о неустановившемся безнапорном движении жидкости в скалярной пористой среде для двумерного фильтрационного движения в вертикальной плоскости.

#### Задачи исследования:

1. Сформулировать предельную задачу Буссинеска нестационарной теории фильтрации для скалярной пористой среды. Произвести редукцию на типичную предельную задачу для ОДУ Крокко.
2. Получить аналитическое и численное решение предельной задачи для

---

<sup>1</sup> Береславский, Э.Н. Задача фильтрации в прямоугольной перемычке с частично непроницаемой вертикальной стенкой / Э.Н. Береславский, Л.М. Дудина // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 2. – С. 288 – 297.

<sup>2</sup> Петриченко, М.Р. Метод Крокко в гидравлической теории фильтрации - однородная прямоугольная перемычка / М.Р. Петриченко, Д.Д. Заборова, Е.В. Котов // Гидротехническое строительство. – 2019. – № 6. – С.41–44.

<sup>3</sup> Анахаев К.Н. О фильтрационном расчете перемычки. // Математическое моделирование, 2011. - т.23, №2. - С.148-158

<sup>4</sup> Олейник А.Я., Кремез В.С. Задача о фильтрации воды в неоднородно-слоистых пластах с учетом влагопереноса в зоне аэрации// Докл. АН УССР. 1984, №1. - с. 56-59.

<sup>5</sup> Donald A. Nield, Adrian Bejan. Convection in Porous Media// Springer International Publishing, 2017.

прямоугольной перемычки. Верифицировать расчет фильтрационного движения.

3. Провести анализ применимости программных комплексов (Plaxis 2D и ANSYS) для решения рассматриваемого класса задач, в том числе и методом установления.

4. Разработать, протестировать и применить вычислительный алгоритм для расчета фильтрационного движения в вертикальной плоскости для перемычек различной формы при отсутствии и наличии линейного дренажа.

**Объектом исследования** в работе является неустановившееся безнапорное фильтрационное течение в пористой изотропной среде, в которой область движения ограничена сверху свободной поверхностью, на которой давление жидкости постоянно и равно внешнему атмосферному давлению.

**Предметом исследования** является положение депрессионной кривой в неустановившемся фильтрационном потоке через перемычку различной формы и длины.

### **Научная новизна**

Научная новизна работы заключается в создании гидравлических методов расчета неустановившихся фильтрационных течений для грунтовых перемычек различной формы с использованием метода установления.

Доказано, что точные классические решения задач безнапорной фильтрации получаются как пределы на больших временах решений нестационарных задач (метод установления).

В результате решения задач на установление получены для каждой конкретной области (перемычки) семейства мгновенных депрессионных кривых и мгновенных высот промежутков высачивания, позволяющие рассчитать мгновенные объемы сухого и насыщенного грунта, сформулировать рекомендации по ускорению процесса осушения насыщенных грунтовых масс.

### **Теоретическая значимость работы**

Большинство классических решений задач фильтрации получены в стационарной постановке методами теории функций. В работе показано, что эти решения можно интерпретировать как пределы на больших временах решений нестационарных задач. Доказывается состоятельность (необходимость и достаточность) такой постановки. Получены следующие теоретические результаты:

1. Сформулирована предельная задача нестационарной теории фильтрации (Буссинеска) для скалярной пористой среды с использованием безразмерной факторизации, что позволяет решать группы задач для областей с подобными областями определения.

2. Предельная задача Буссинеска редуцирована на типичную предельную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения Крокко. Сформулирована и решена предельная задача Крокко. Ее решение используется для определения глубины фильтрационного потока в нижнем бьефе.

3. Верифицирован разностный алгоритм решения сильно-нелинейной (нелинейность при старшей производной) предельной задачи Крокко.

4. Доказано, что предельные задачи нестационарной фильтрации в вертикальной плоскости тождественны предельным задачам стационарной теории пограничного слоя в переменных Мизеса - продольная координата-функция тока.

### **Практическая значимость и реализация результатов работы**

Практическая значимость работы заключается:

- в разработке методики численного расчета неустановившихся фильтрационных течений в перемычках различной формы, позволяющей получать мгновенные и установившиеся формы депрессионной кривой и значения высоты промежутка высачивания. Рассмотрены перемычки: однородная прямоугольная без дренажа; с линейным дренажом при различном его положении относительно и нижнего бьефа; трапецидальная перемычка с вертикальным верховым откосом без дренажа при различных значениях угла низового откоса; трапецидальная перемычка с вертикальным верховым откосом и с линейным дренажом при различном его положении относительно нижнего бьефа; треугольная перемычка с нулевым верховым откосом и различными значениями угла низового откоса ( $\pi/6$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/3$ ); трапецидальная перемычка с отрицательным верховым откосом.

- созданию на основе метода установления численных методов расчета задачи неустановившейся фильтрации со свободной границей, алгоритмов и программной реализации на ЭВМ.

Достоверность полученных решений верифицирована путем сопоставления полученных решений с точными результатами классической теории. Величина фильтрационного расхода верифицируется по результатам измерения расхода на моделях перемычек в гидравлическом лотке.

Методика численного расчета неустановившихся фильтрационных течений внедрена в учебный процесс высшей школы гидротехнического и энергетического строительства инженерно-строительного института СПбПУ в курсовом и дипломном проектировании, при выполнении научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ.

Численные методы расчета задачи неустановившейся фильтрации со свободной границей внедрены в практику проектирования дренажей, фундаментов, проведения работ по осушению котлованов проектно-строительной компанией ООО «ПСК «ВЕНЧУР»

**Методология и методы исследования** основаны на использовании ~~следующих~~ ~~подходов~~ аналитического и численного решений уравнения Крокко в топологии распределений.

Для численного решения уравнения Крокко на компакте  $(0,1)$  расчётная область разделена на участки с постоянным шагом  $b=1/N$ , где  $N$  – число разбиений. При дискретизации уравнения используется разностная схема второго порядка. Исходное уравнение сводится к нелинейной системе уравнений, для решения которой используется итеративный метод Ньютона.

Для проведения численного моделирования процессов фильтрации в областях пористых сред различной формы использован коммерческий программный пакет ANSYS, в частности: сеточный генератор ICEM CFD, солвер ANSYS CFX и постпроцессоры CFD-post и TecPlot

**Достоверность результатов.** Достоверность полученных научных результатов подтверждается логикой изложения, корректным использованием известного математического аппарата, строгостью поставленных ограничений и сделанных умозаключений, а также валидацией результатов предлагаемых математических моделей с результатами физического моделирования.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались и обсуждались на научной конференции по энергетике, экологии и строительной инженерии «ЕЕСЕ» (Санкт-Петербург, 2018, 2019 и 2020 годы); на XXI Международная научная конференция «Строительство - формирование среды жизнедеятельности» и семинар «Молодежные инновации» (г. Москва, 2018); на научной конференции XLII «Неделя науки СПбПУ» (г. Санкт-Петербург).

Результаты работы внедрены в проектно-строительной компании «ВЕНЧУР» (г Санкт-Петербург) и в учебный процесс ВШГиЭС ИСИ.

### Положения, выносимые на защиту

1. Стационарное положение депрессионной кривой и стационарная величина промежутка высачивания получаются как пределы, на больших временах, мгновенных депрессионных кривых и мгновенных промежутков высачивания. Достаточным критерием сходимости задачи на установление является  $t \geq L/k$ , где  $t$  - время,  $L$  - длина перемычки,  $k$  - коэффициент фильтрации пористой среды.

2. Депрессионная кривая в перемычке конечной безразмерной длины  $\Lambda$  получается из депрессионной кривой в полубесконечной перемычке, имеющей мгновенную длину депрессионной кривой  $\lambda = \Lambda$ .

3. В процессе установления фильтрационного потока расход в нижнем бьефе изменяется от  $\theta_0 = \frac{1}{2\lambda}$  до  $\theta_0 = \frac{1-u_e^2}{2\Lambda}$ , где  $u_e = \frac{h_e}{H}$ ,  $\lambda = \frac{l}{H}$ ,  $\theta = \frac{q}{kH}$ , где  $\lambda$  - текущая безразмерная длина депрессионной кривой;  $\Lambda$  - безразмерная длина перемычки,  $\Lambda = L/H$ ;  $\theta$  - безразмерный расход;  $u_e$  - безразмерная глубина воды в нижнем бьефе;  $h$  - текущая глубина фильтрационного потока;  $h_e$  - глубина воды в нижнем бьефе;  $H$  - глубина воды в верхнем бьефе;  $h_0$  - глубина потока в точке выклинивания; иначе, в процессе установления предельное значение расхода совпадает с расходом, найденным по формуле Дюпюи, т.е. достигает (минимального) стационарного значения.

4. Точка выклинивания депрессионной кривой на низовом откосе находится в пределах  $(0, H)$  в моменты времени, близкие к начальному. Касание депрессионной кривой с низовым откосом получается при продолжении решения в область  $x < 0$ , т.е. на петле Герсеванова.

5. В длинных перемычках ( $\Lambda \geq 7 \dots 9$ ) промежутки высачивания мал: точка выклинивания успевает упасть в нижний бьеф за время, в течении которого величина  $\lambda \rightarrow \Lambda - 0$ . И наоборот, в коротких перемычках точка выклинивания не успевает упасть в нижний бьеф за время прохождения через перемычку уединенной волны расхода, растягивающей длину депрессионной кривой до значения  $\Lambda - 0$ .

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 7 научных работ, в том числе 4 статьи в журналах, включённых в перечень ВАК РФ и 3 статьи в журналах, включённых в перечень SCOPUS.

### ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** сформулирована цель работы и задачи, решение которых необходимо для её достижения. Показано, что существуют нерешенные *проблемы*, в области гидравлики и подземной гидродинамики, связанные с вычислением неустановившихся безнапорных фильтрационных течений. Проработка этих *проблем соответствует* научной специальности 05.23.16 - Гидравлика и инженерная гидрология, что указано в п.6 паспорта специальности.

**В первой главе** определены объект и предмет исследования, выполнен обзор работ по теме исследования, обоснован подход в исследовании задач неустановившихся фильтрационных течений в перемычках различной формы.

Объектом исследования в работе является неустановившееся безнапорное фильтрационное течение в пористой изотропной среде, в которой область движения ограничена сверху свободной поверхностью, на которой давление жидкости постоянно и равно внешнему атмосферному давлению. Такие течения характерны, например, при фильтрации грунтовых вод через гидротехнические сооружения (плотины, водопонижения, дренажи, фундаменты, котлованы при их осушении). Теория фильтрации для подобных водохозяйственных, транспортных и природоохранных гидротехнических сооружений была

разработана Н.Н. Павловским<sup>6</sup>. В работе Г.И. Баренблатта<sup>7</sup> отмечается, что в точной постановке исследование безнапорного движения представляет значительные математические трудности. Поэтому большое значение имеют работы П.Я. Полубариновой-Кочиной<sup>8,9</sup>, получившей некоторые точные решения задачи безнапорного фильтрационного течения через прямоугольную перемычку. Таким образом, задачи безнапорной фильтрации сохраняют теоретический интерес, на что обращено внимание в работах И.А. Чарного<sup>10</sup>, К.С. Басниева, И.Н. Кочиной, В.М. Максимова<sup>11</sup>, а их решение имеет практическое значение для прогноза характеристик движения фильтрационных потоков в прикладных инженерных задачах водохозяйственных, транспортных и природоохранных гидротехнических сооружений.

В теории фильтрации основным соотношением, устанавливающим связь между вектором скорости фильтрации  $\mathbf{u}$  и градиентом гидростатического давления  $p$ , которое вызывает фильтрационное течение, является закон фильтрации (закон Дарси)

$$\mathbf{u} = -k \operatorname{grad} H, H := z + \frac{P}{\rho g},$$

Если плоскость сравнения совпадает с горизонтальным водоупором, то в любом сечении  $h=H$ . Таким образом,  $\mathbf{u} = -k \operatorname{grad} h$ .

Область применения закона фильтрации Дарси – ламинарная фильтрация в насыщенной пористой среде. Гидромеханические задачи безнапорной фильтрации стационарных двумерных течений жидкости хорошо изучены и, в случае скалярной (однородной и изотропной) пористой среды, допускают точные решения.

Задача безнапорной фильтрации нестационарных одномерных течений несжимаемой жидкости при линейном и нелинейном законах фильтрации изучена меньше. Причина состоит в том, что предельная задача сильно нелинейная. Предметом исследования является определение мгновенного положения депрессионной кривой в неустановившемся фильтрационном потоке через перемычку различной формы и длины.

Основные допущения, используемые при решении задач нестационарной безнапорной фильтрации, минимальны и физически обоснованы: живые сечения существуют и давление в любом живом сечении фильтрационного потока распределено по гидростатическому закону. Как следствие получается уравнение Буссинеска-Лейбензона для определения глубины безнапорного фильтрационного потока  $h(t,x)$ :

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( kh \frac{\partial h}{\partial x} \right),$$

где  $t$  – время,  $x$  – координата,  $h=h(t,x)$  – глубина фильтрационного потока,  $h_e \leq h_0 < h \leq H$ , рисунок 1,  $m$  – коэффициент пористости среды,  $0 < m < 1$ ,  $k$  – коэффициент фильтрации.

<sup>6</sup> Н.Н. Павловский. Собрание сочинений. - М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1955-. - Т.1: Основы гидравлики. Открытые русла и сопряжение бьефов сооружений. - 547 с.; Т.2: Движение грунтовых вод. - 1956. - 771 с.

<sup>7</sup> Г.И. Баренблатт. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик. - М.: Недра, 1984. - 211 с.

<sup>8</sup> П.Я. Полубаринова-Кочина. Теория движения грунтовых вод. - М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1952. - 677 с.

<sup>9</sup> П.Я. Полубаринова-Кочина. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. АН СССР, Ин-т механики. - М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1942. - 142, [2] с.

<sup>10</sup> И.А. Чарный. Подземная гидрогазомеханика. - М. Государственное научно-техническое изд-во нефтяной и горно-топливной литературы. 1963. - 396 с.

<sup>11</sup> К.С. Басниев, И.Н. Кочина, В.М. Максимов. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. - М.: Недра, 1993. - 416 с.

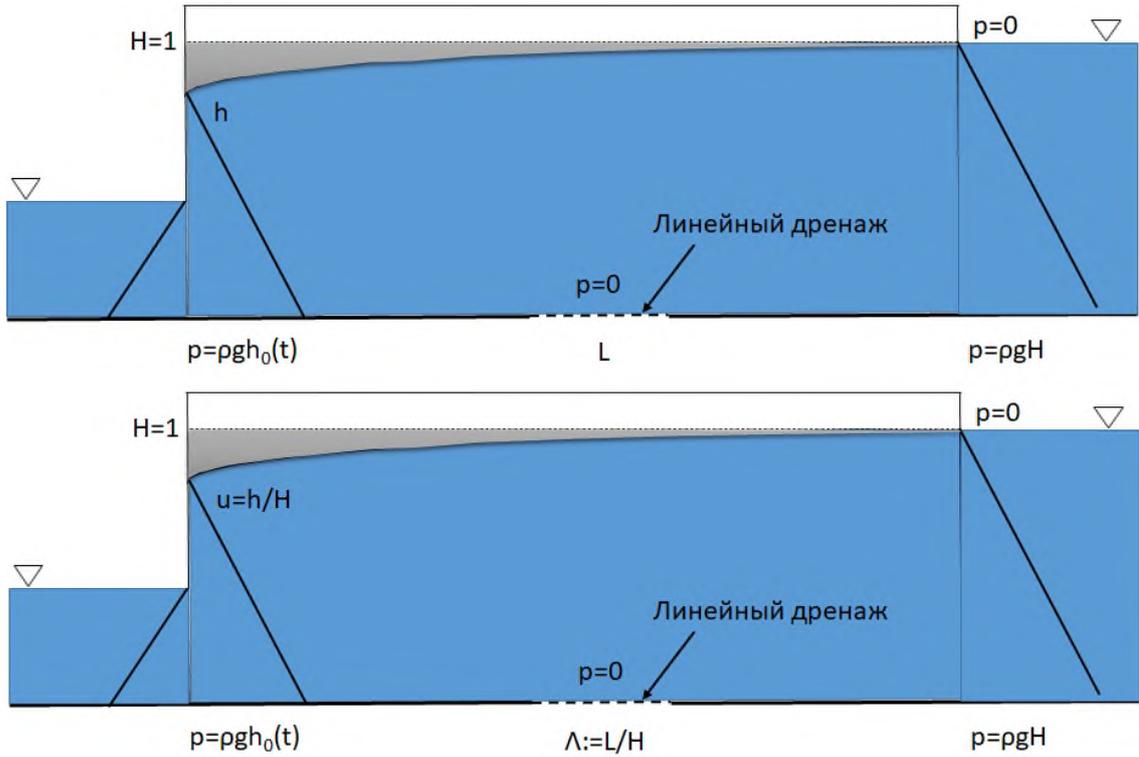


Рис.1. Постановка задачи.

Замена переменных:

$$t' := \frac{kt}{mH} > 0, x' = \frac{x}{H}, 0 < x' < \lambda := l/H, \lambda \leq \Lambda := L/H, u := h/H, u_0 < u < 1, u_0 = h_0/H,$$

приводит уравнение Буссинеска к безразмерному виду:  $\frac{\partial u}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( u \frac{\partial u}{\partial x'} \right)$ . В дальнейшем

штрихи у аргументов опускаются. Предельные условия для факторизованного уравнения Буссинеска ставятся так:  $u(0, x) - 1 = u(t, 0) - u_0 = u(t, \infty) - 1 = 0$ .

Уравнение Буссинеска описывает фильтрационный поток при неустановившемся течении. Результатом решения уравнения Буссинеска является зависимость глубины фильтрационного потока от времени  $t$  и координаты  $x$ . Как следствие, определяется и мгновенная величина промежутка высачивания. Уравнение Буссинеска допускает редукцию к однородному дифференциальному уравнению (ОДУ). Возможны: редукция уравнения Буссинеска к уравнению Блазиуса и редукция к уравнению Крокко.

Замена переменных  $\zeta = \frac{x}{2\sqrt{t}}; u(t, x) = u(\zeta)$  в уравнении Буссинеска приводит его к виду:

$$-2\zeta \frac{du}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta} \left( u \frac{du}{d\zeta} \right). \quad (1)$$

Обозначая  $d\zeta/u := d\eta$  и выражая  $u = d\zeta/d\eta$  уравнение (1) сводится к уравнению Блазиуса (нижние индексы фиксируют порядок производных):

$$\zeta \eta \eta + 2\zeta \zeta \eta \eta = 0, D(\zeta) = (\eta : 0 < \eta < \infty), \quad (2)$$

причем  $\zeta(0) = \zeta'(0) - u_0 = \zeta'(\infty) - 1 = 0$ . Уравнение (1), с помощью понижающей порядок подстановки, принимает вид:

$$\frac{du}{d\zeta} = j(u) \text{ и } d\zeta = \frac{du}{j(u)},$$

преобразуется к виду:

$$2\varphi\varphi'' + u = 0, \quad (3)$$

где  $\varphi(u) := \int_u^1 \zeta(v) dv$ ,  $D(\varphi) = (u : u_0 < u < 1)$ ,  $\varphi(1) = \varphi'(u_0) = 0$ .

Решение уравнения (2) ищется на полубесконечном интервале  $[0, \infty)$ , решение же уравнения (3), по подходу автора, ищется на компакте  $u \in [u_0, 1]$ , что упрощает вычисления.

**Вторая глава** содержит постановку предельной задачи Крокко, сформулированной для прямоугольной перемычки разной длины. В главе проводится сопоставление решений уравнения Крокко, полученных как аналитически, так и численно. Полученные решения сопоставляются с решением П.Я. Полубариновой-Кочиной. Численное решение задачи фильтрации реализовано автором как для прямоугольной перемычки, так и для перемычки с наклонным низовым откосом. Определены условия существования петель Герсеванова. Для мгновенных депрессионных кривых получены петли Герсеванова и решения для наклонных откосов.

Для предельной задачи Буссинеска возможно проведение редукции на типичную предельную задачу Крокко:

$$\begin{aligned} 2\varphi\varphi'' + u &= 0, u_e \leq u_0 \leq u \leq 1, \\ \varphi &:= \int_u^1 \zeta dv, \\ \varphi(1) &= \varphi'(u_0) = 0, \\ \zeta &:= \frac{x'}{2\sqrt{t}} \end{aligned} \quad (4)$$

Для ОДУ второго порядка (Крокко), получено аналитическое решение в топологии слабых решений. Слабое решение предельной задачи Крокко для случая  $u_0 = 0$  имеет вид:

$$\varphi(u) = 1/3\sqrt{1-u^3}.$$

Для верификации решения типичной предельной задачи Крокко проведен численный эксперимент с использованием неявной разностной схемы второго порядка. Показано, что численное решение аппроксимирует слабое решение типичной предельной задачи Крокко, кроме правого конца промежутка интегрирования.

Для численного решения уравнения Крокко на компакте  $(0;1)$  область разделена на участки с постоянным шагом  $b=1/N$ . При дискретизации уравнения используется разностная схема второго порядка. Исходное уравнение сводится к нелинейной системе уравнений, для решения которой используется итеративный метод Ньютона.

При дискретизации уравнения Крокко используется разностная схема второго порядка:

$$\frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{b^2} + \gamma \frac{x_j}{y_j} = 0.$$

Равенство представляет собой дискретный аналог точного равенства

$$y'' = -\gamma \frac{x}{y}.$$

На рисунке 2 приведено сопоставление слабого решения с численным решением задачи Крокко при  $b=10^{-6}$  и  $\gamma=1$ .

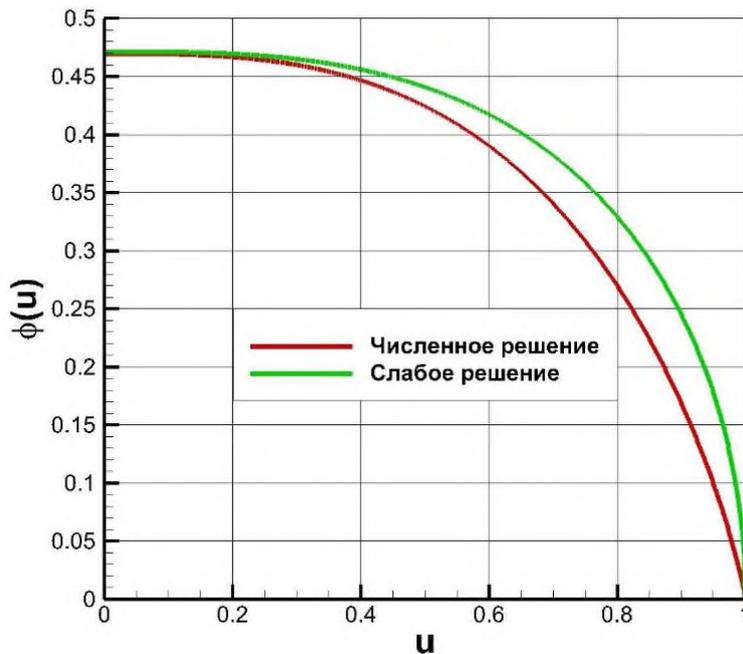


Рис. 2. Сравнение аналитического и численного решений уравнения Крокко.

Слабое решение предельной задачи Крокко обладает всеми свойствами точного решения. Относительная погрешность вычисленного значения постоянной Блазиуса в слабом решении,  $\gamma=1/2$ ,  $y(0)=1/3$ ,  $\gamma=1$ ,  $y(0)=0,4714$ , от точного значения составляет менее чем 0,4%. Вычислительный эксперимент показал равномерную на промежутке  $0 \leq x \leq 1$  сходимость численной аппроксимации решения к слабому решению при небольшой плотности дискретизации промежутка (порядка  $N=10^4$  узлов). На правом конце промежутка интегрирования,  $x=1-0$ , производная численного решения ограничена снизу, и график численного решения не обладает вертикальной касательной. Ограниченность значений численных производных ожидаема, т.к. используются односторонние разности.

Помимо сопоставления аналитического и численного решений задачи Крокко, выполнено численное моделирование нестационарного фильтрационного потока в прямоугольной перемычке с помощью коммерческого программного пакета ANSYS.

Задача решена автором в безразмерной постановке, масштабом длины выбрана глубина верхнего бьефа  $u(t, \Lambda)=1$ . В верхнем бьефе задано гидростатическое давление,  $u=1$ , нижний бьеф – свободная граница, гидростатическое давление экстраполируется изнутри расчетной области,  $u=u_0$ ,  $0 < u < u_0$ . На водоупоре расчетной области задано условие непроницаемости. Для ряда задач, имеющих практическое применение, на отрезке нижней грани задавалось условие равенства давления атмосферному, чтобы промоделировать линейный дренаж,  $u=0$ . На верхней грани расчетной области (депрессионная поверхность) всегда задано давление, равное нулю.

Стационарное решение получено путем установления на больших временах. Критериями установления для рассматриваемой задачи является постоянство расхода через нижний бьеф и нулевая скорость падения депрессионной кривой. На рисунке 3 представлены депрессионные кривые в различные моменты времени  $\tau$  до момента установления.

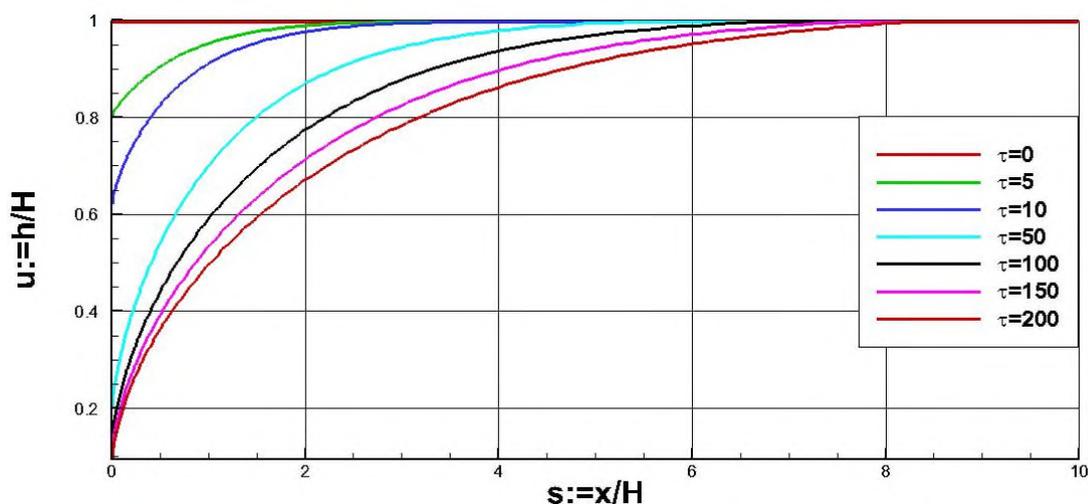


Рис. 3. Депрессионные кривые в разные моменты времени.

Аналогичная задача была решена в программном пакете Plaxis 2D. Методы решения задач фильтрации, реализованные в этом программном пакете, не дают возможности описать мгновенное положение депрессионной кривой, однако дают возможность описать установившейся фильтрационный поток. Расхождение величин промежутков высачивания и расходов через нижний бьеф, полученных в обоих программных комплексах, различаются не более чем на 3% при любом значении  $L/H$ , что показано на рисунке 4.

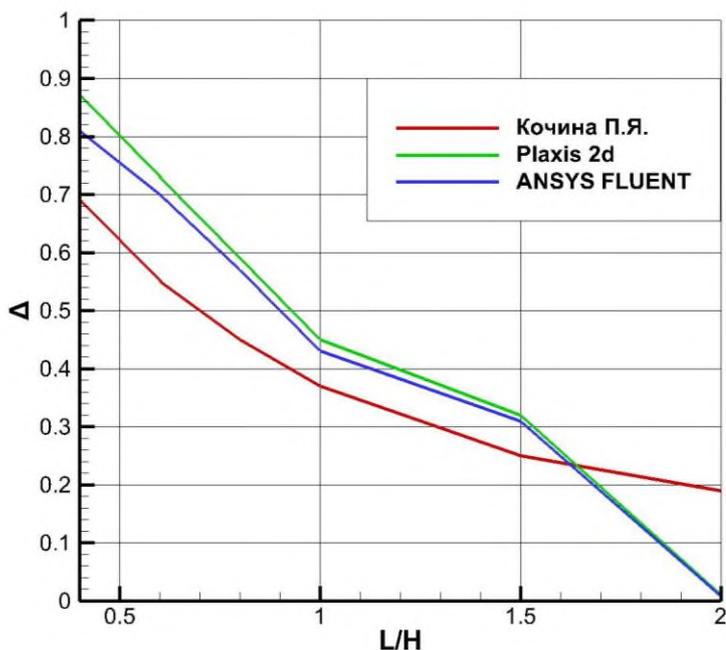


Рис. 4. Сравнение величин промежутков высачивания, полученных аналитически и численно.

На рисунке 5 представлена зависимость расхода через нижний бьеф от времени. Численным критерием установления задачи является изменение расхода не более чем на 0.5% относительно предыдущего шага по времени. Для наглядности сравнения результатов численного моделирования с результатами экспериментальных исследований<sup>12</sup>, расходы в обоих случаях отнесены к расходу по закону Дюпюи, а время приведено ко времени установления фильтрационного течения.

<sup>12</sup> Заборова Д.Д., Козинец Г.Л., Мусорина Т.А., Петриченко М.Р. Математическая модель нестационарной фильтрации в однородных изотропных перемычках. // Гидротехническое строительство. 2020. № 4. С. 38-44.

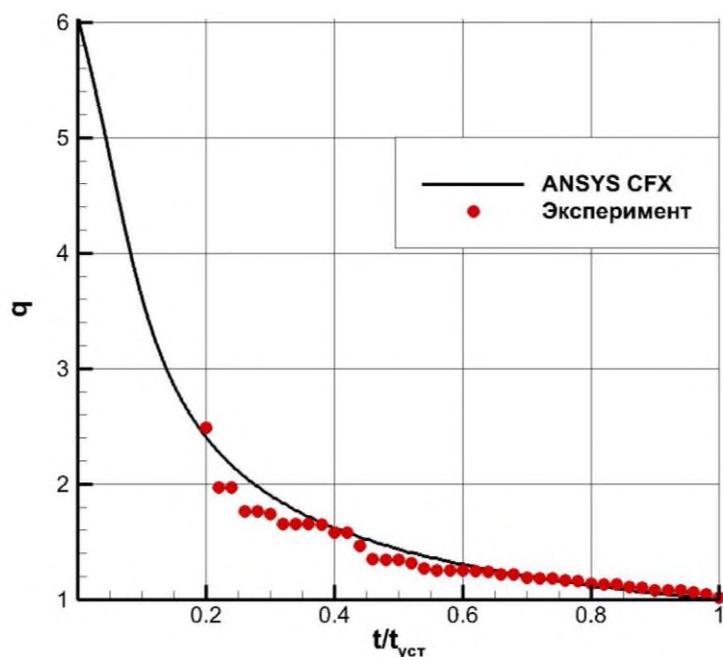


Рис. 5. Сравнение приведенных расходов через нижний бьеф.

Значения депрессионных кривых можно получить для различных моментов времени и продолжить их влево от нижнего бьефа до касания с вертикальной абсциссой  $x < 0$ . Для этого используется экстраполяция влево ближайших к нижнему бьефу координат депрессионной кривой полиномом второй степени от  $x$ . Такой метод позволяет получить так называемые петли Герсеванова, на которых действительной депрессионной кривой соответствует верхняя часть кривой, см. рисунок 6.

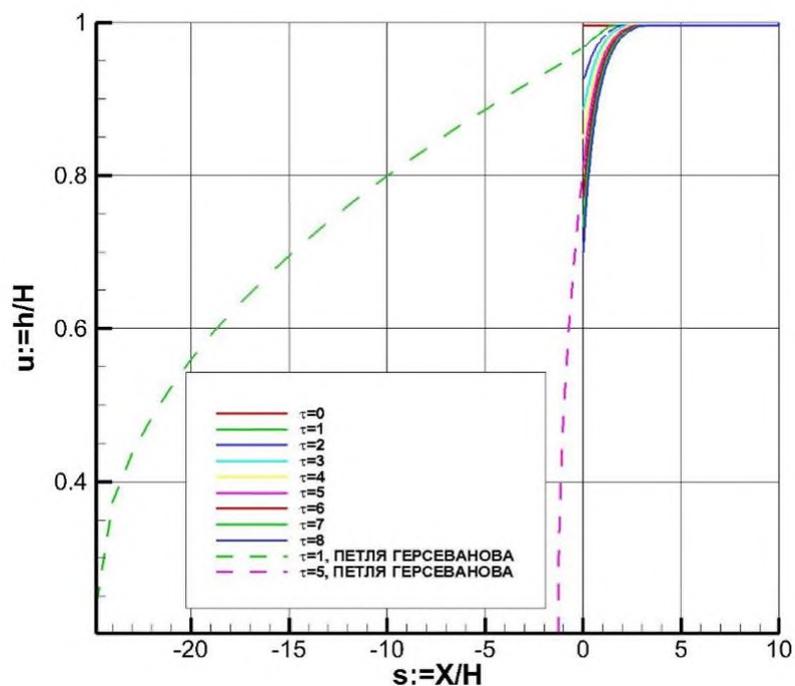


Рис. 6. Петли Герсеванова для различных значений времени  $\tau$ .

Петля Герсеванова существует только при  $u_0 < 4/7$ , т.е. в «длинных» перемычках с относительно небольшими промежутками высачивания (с высотой  $\Delta$  не больше  $4/7 - u_0$ , где  $u_0$

– глубина нижнего бьефа). Если же  $l > u_0 > 4/7$ , то петля Герсеванова не образуется. В этом случае продолженное левее точки  $u_0$  решение уравнения (1) не имеет нулей, кроме «обязательного нуля»  $u=1$ , рисунок 7.

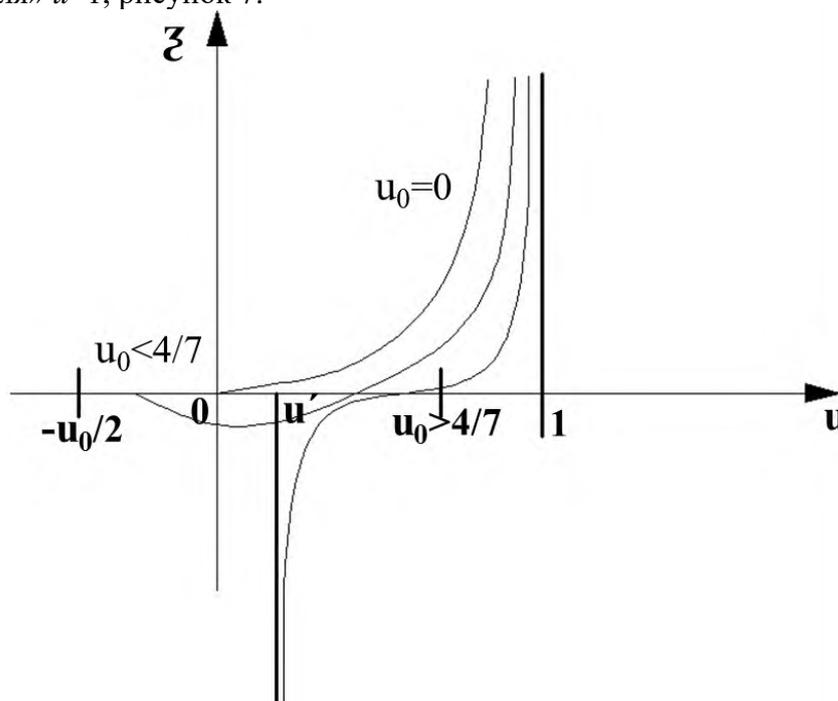


Рис.7. Условие существования петли Герсеванова.

Аналогичным разработанному способу, получены результаты для перемычек с наклонным низовым откосом. Для этого депрессионная кривая продолжается в нижний бьеф с помощью отрезка прямой, касающегося депрессионной кривой в точке выклинивания, см. рисунок 8. Петля Герсеванова линейризуется, зависимость глубины от координаты становится однозначной.

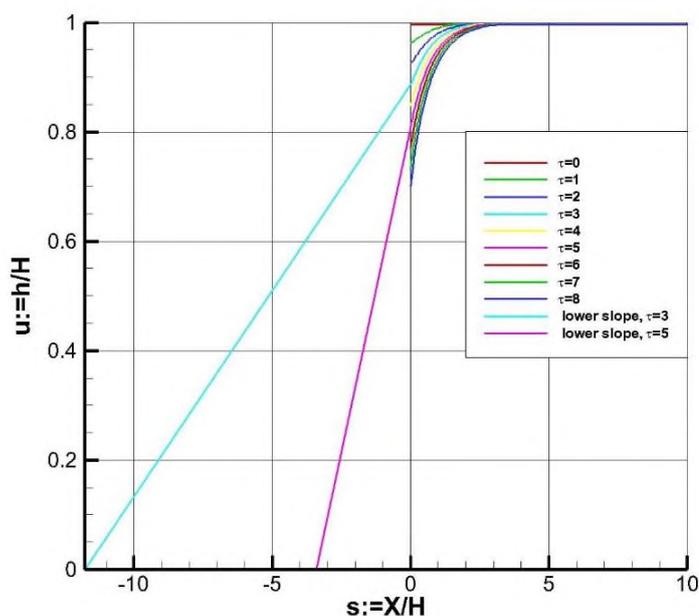


Рис. 8. Линейризация депрессионной кривой касательной в точке выклинивания.

В третьей главе представлены результаты решения задач на установление фильтрационного потока в перемычках различной формы (прямоугольные, трапециевидные, треугольные). Для каждой формы изучено влияние расположения линейного дренажа на форму депрессионной кривой.

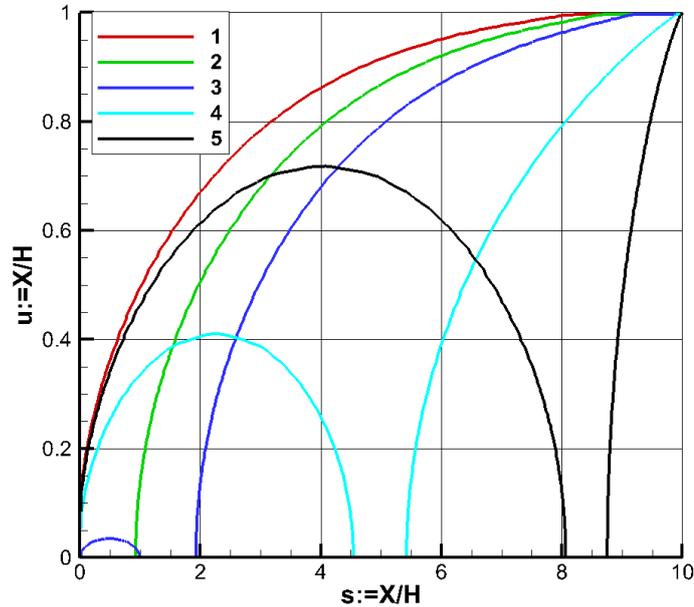


Рис. 9. Депрессионные кривые в прямоугольной перемычке с различным расположением линейного дренажа.

На рисунке 9 показаны депрессионные кривые после установления фильтрационного течения в прямоугольной перемычке  $L/H=10$ . Депрессионная кривая 1 соответствует установившемуся режиму фильтрационного потока в прямоугольной перемычке без дренажа. Кривая 2 соответствует задаче с линейным дренажем единичной длины ( $L/H=1$ ), расположенным вплотную к нижнему бьефу. Депрессионная кривая 3 соответствует задаче с линейным дренажем единичной длины, расположенным на один калибр правее нижнего бьефа. Кривая 4 соответствует задаче с линейным дренажем единичной длины, расположенным на промежутке  $4.5 < L/H < 5.5$ . Кривая 5 соответствует задаче с линейным дренажем единичной длины, расположенным на промежутке  $8 < L/H < 9$ .

Выполненные исследования показывают, что для ускорения осушения прямоугольной перемычки фиксированной длины следует располагать дренаж на удалении  $x=0.5 L/H$  правее от низового откоса, что позволит осушить наибольший объем перемычки. Внедрение линейного дренажа на некотором удалении от нижнего бьефа равносильно уменьшению длины рассматриваемой перемычки на величину этого удаления.

Расход, проходящий через дренаж, значительно выше расхода через нижний бьеф, для всех рассмотренных задач. Общим результатом решения задач на установление фильтрационного потока в перемычках различной формы является то, что расход, проходящий через дренаж, значительно выше расхода через нижний бьеф.

Для перемычки трапециевидальной формы с нулевым верховым откосом изучено влияние коэффициента откоса на время установления фильтрационного течения. Время установления фильтрационного потока уменьшается при увеличении коэффициента низового откоса (при фиксированном основании). Для демонстрации этого положения выполнен численный эксперимент при котором низовой откос был равным  $\pi/6$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/3$ . Стоит отметить, что по сравнению с прямоугольными перемычками, время установления фильтрационного потока в

трапецидальных перемычках меньше, при одинаковых масштабах длины и прочих равных.

Для трапецидальной перемычки изучено влияние расположения линейного дренажа на положение депрессионной кривой. Полученные результаты, качественно схожи с результатами для прямоугольной перемычки со стоком. В качестве примера, на рисунке 10 приведены мгновенные депрессионные кривые для перемычки трапецидальной формы с углом при нижнем бьефе, равным  $\pi/6$ , и линейном дренажем, расположенным вплотную к нижнему бьефу. Представленное изменение депрессионной кривой во времени свидетельствует о том, что расположение линейного дренажа вплотную к низовому откосу равносильно уменьшению длины нижнего основания трапецидальной перемычки.

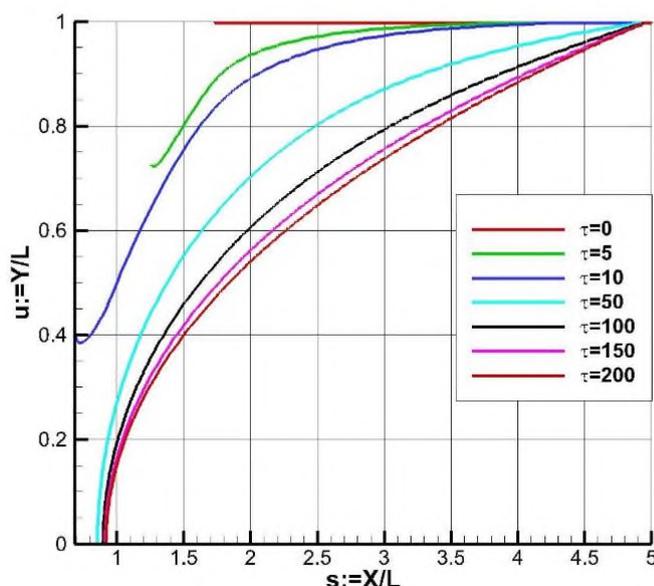


Рис. 10. Мгновенные депрессионные кривые для трапецидальной перемычки со стоком.

Для перемычек треугольной формы характерно малое время установления. Депрессионная кривая достигает установившегося значения практически сразу. Промежуток высачивания для такой формы перемычки равен глубине воды в верхнем бьефе. Вычисления выполнены для трех треугольных перемычек с углами при вершине низового откоса, равными  $\pi/6$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/3$ .

### Заключение

В диссертационной работе решена задача о неустановившемся безнапорном фильтрационном потоке в скалярной пористой среде для двумерного фильтрационного движения.

Сформулирована предельная задача Буссинеска нестационарной теории фильтрации для скалярной пористой среды, произведена редукция на типичную предельную задачу Крокко.

Получено аналитическое и численное решение предельной задачи Крокко для прямоугольной перемычки для последующей верификации вычислительного алгоритма расчета фильтрационного движения.

Применение программного комплекса ANSYS позволяет достоверно описать процесс нестационарной фильтрации в перемычках различной формы. Решение, полученное на больших временах  $t \geq L/k$ , хорошо согласуется с решением в программном комплексе Plaxis 2D.

Разработан, протестирован и применён вычислительный алгоритм для расчета фильтрационного движения в вертикальной плоскости для перемычек различной формы при отсутствии и наличии дренажа.

Исследованы фильтрационные течения в перемычках различной формы с использованием аналитических и численных методов решения уравнения Крокко, описывающего рассматриваемые процессы. Выполнено численное моделирование фильтрационных потоков в пористых средах с помощью пакета ANSYS. Применение методов численного моделирования позволило получить мгновенные значения координат депрессионной кривой и мгновенные значения промежутка высачивания.

Значения координат депрессионной кривой и величины промежутка высачивания для стационарного фильтрационного потока определяются по критерию установления. Критерием установления является постоянство во времени координат депрессионной кривой, величины промежутка высачивания, а также постоянство величины расхода в нижнем бьефе.

В работе *решен* ряд задач для перемычек различной формы, решение которых позволило сделать следующие выводы:

– доказано, что с увеличением длины прямоугольной перемычки высота промежутка высачивания монотонно стремится к нулю. В перемычках длиной не меньше 2-3 напоров высота промежутка высачивания равна нулю. Доказано, что касание депрессионной кривой низового откоса происходит на петле Герсеванова.

– показано, что установление стационарного режима в трапецидальной перемычке происходит тем быстрее, чем короче верхнее основание трапеции. Депрессионная кривая получается линеаризацией влево петли Герсеванова. В треугольной перемычке время установления стационарного режима равно нулю.

– наличие дренажа приводит к образованию «жидкого бугра» в низовой части перемычки и к сокращению длины правой ветви депрессионной кривой. Фильтрационный расход из «жидкого бугра» в нижний бьеф монотонно уменьшается до полного осушения бугра. Эти результаты не зависят от продольного профиля перемычки и определяются только расположением распределенного дренажа.

Практическое значение полученных результатов заключается в определении мгновенных значений депрессионной кривой и промежутка высачивания в перемычках различной формы, установлении влияния расположения дренажа на форму депрессионной кривой.

Результатом работы является создание аналитических и численных методов расчета перемычек различной формы, позволяющих получать мгновенные и установившиеся формы депрессионной кривой и значения высоты промежутка высачивания.

### Список сокращений

**ППИ-ЛПИ-ЛИИ** - Петроградский политехнический институт-Ленинградский политехнический институт-Ленинградский индустриальный институт

**ГТС** - гидротехническое строительство

**ОДУ** - однородное дифференциальное уравнение

**ЭВМ** - электронно-вычислительная машина

### Список условных обозначений

$b$  – шаг сетки расчетной области

$N$  – число разбиений расчетной области

$t$  – время;

$L$  – длина перемычки;

$k$  – коэффициент фильтрации пористой среды;

$\lambda$  – текущая безразмерная длина депрессионной кривой;

$L$  – безразмерная длина перемычки,  $L:=L/H$ ;  
 $\theta$  – безразмерный расход;  
 $u_e$  – безразмерная глубина воды в нижнем бьефе;  
 $h$  – текущая глубина фильтрационного потока;  $h_e$  – глубина воды в нижнем бьефе;  
 $H$  – глубина воды в верхнем бьефе;  $h_0$  – глубина потока в точке выклинивания;  
 $q$  – удельный фильтрационный расход;  
 $x, y, z$  – координаты;  
 $\rho$  – плотность фильтруемой жидкости;  
 $p_0$  – атмосферное давление;  
 $m$  – коэффициент пористости среды,  $0 < m < 1$ ;  
 $\zeta$  - замена переменных в ОДУ  $\zeta = \frac{x}{2\sqrt{t}}$ ;  
 $\varphi(u)$  – слабое решение уравнения Крокко;  
 $\gamma$  - параметр в уравнении Крокко;  
 $\tau$  – безразмерное время,  $\tau:=kt/(mH)$ ;  
 $s$  – безразмерная продольная координата.

### Основные научные результаты диссертации опубликованы в следующих рецензируемых изданиях

Публикации в изданиях, включенных в текущий перечень ВАК РФ:

1. М.Р. Петриченко, Д.Д. Заборова, Е.В. Котов. Метод Крокко в гидравлической теории фильтрации - однородная прямоугольная перемычка // Гидротехническое строительство. 2019. № 6. С. 41-44.
2. М.Р. Петриченко, Е.В. Котов. Численная верификация слабых решений типичной предельной задачи Крокко с помощью неявной разностной схемы второго порядка // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 63-72.
3. М.Р. Петриченко, Д.Д. Заборова, Е.В. Котов, Т.А. Мусорина. Образование промежутка высачивания в прямоугольной перемычке // Гидротехническое строительство. 2018. № 10. С. 49-52.
4. М.Р. Петриченко, Д.Д. Заборова, Е.В. Котов, Т.А. Мусорина. Слабые решения предельных задач Крокко // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2018. Т. 11(3). – С.27–38.

Публикации в изданиях, индексируемых SCOPUS:

1. M.R. Petrichenko, V.V. Sergeev, E.V. Kotov, D.V. Nemova, D.S. Tarasova. Numeric Verification of the Weak Solutions to the Typical Crocco Limit Problem Using Implicit Difference Scheme of the Second Order. Springer Nature Switzerland AG 2019 V. Murgul and M. Pasetti (Eds.): EMMFT-2018, AISC 983, pp. 839–848, 2019.
2. Petrichenko, M.R., Zaborova, D.D., Kotov, E.V. «The Crocco Method in Hydraulic Filtration Theory —A Homogeneous Rectangular Dam» 2019 Power Technology and Engineering 53(4), с. 445-448
3. M.R. Petrichenko, D.V. Nemova, E.V. Kotov, D.S. Tarasova, V.V. Sergeev. Ventilated facade integrated with the hvac system for cold climate // Magazine of Civil Engineering. 2018. 77(1). P. 47-58.