

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»**

Стабников Андрей Сергеевич

**Разработка алгебраической модели ламинарно-турбулентного перехода для
расчета турбулентных течений на основе метода моделирования
отсоединенных вихрей**

Направление подготовки 01.06.01 – Математика и механика
Направленность 01.06.01_03 – Механика жидкости, газа и плазмы

НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д. ф.-м. н.
Гарбарук А.В.

Санкт-Петербург – 2021

Оглавление

Введение.....	4
Глава 1. Модели для предсказания положения ламинарно-турбулентного перехода	9
1.1. Модели ламинарно-турбулентного перехода для замыкания уравнений Рейнольдса.....	9
1.1.1. Дифференциальные модели перехода	10
1.1.2. Алгебраические модели перехода	18
1.2. Учёт ламинарно-турбулентного перехода в гибридных вихреразрешающих подходах	26
Глава 2. Полуэмпирическая модель турбулентности SST KD	28
2.1. Формулировка модели SST KD	28
2.2. Калибровка констант модели SST KD	31
2.2.1. Постановки использовавшихся при калибровке задач.....	31
2.2.2. Метод решения уравнений.....	32
2.2.3. Методика и результаты калибровки.....	33
Глава 3. Тестирование модели SST KD	37
3.1. Переходные пограничные слои на плоской пластине	37
3.1.1. Постановки задач	37
3.1.2. Результаты расчётов	39
3.2. Обтекание крылового профиля NLF(1)-0414F.....	40
3.2.1. Постановка задачи	40
3.2.2. Результаты расчётов	43
3.3. Обтекание тандема крыловых профилей NACA0012	46
3.3.1. Постановка задачи	46
3.3.2. Результаты расчётов	50
3.4. Выводы.....	51
Глава 4. Метод DDES SST KD	52
4.1. Формулировка метода	52
4.2. Метод решения уравнений.....	54
4.3. Тестирование метода	55

4.3.1. Обтекание сферы.....	56
4.3.2. Обтекание круглого цилиндра.....	61
Заключение	65
Список литературы	66
Приложение А. Модель SST KD	73
Приложение Б. Метод DDES SST KD.....	75

ВВЕДЕНИЕ

Главным инструментом проектирования во многих отраслях промышленности на данный момент является компьютерное моделирование, в связи с чем огромные усилия направлены на разработку новых и улучшение существующих методов и моделей численных расчётов физических процессов. Область гидро- и газодинамики не является исключением. Повышение темпов и объёмов производства подтверждает необходимость в надёжных и точных методах численного расчёта всевозможных видов течений. Если в XX веке для инженерных целей использовались в основном приближённые аналитические решения модельных задач и физической эксперимент, то в наше время в подавляющем большинстве случаев инженеры полагаются на результаты численного моделирования течений, а экспериментальные исследования в связи с высокой стоимостью и сложностью, как правило, используются для валидации результатов расчётов.

Подавляющее число представляющих практический интерес течений являются полностью или частично турбулентными. Расчёт таких течений – одна из центральных проблем вычислительной гидроаэродинамики. В отличие от гладкого и слоистого ламинарного течения, в турбулентных течениях присутствует хаотичное неупорядоченное движение частиц жидкости на фоне среднего потока. Турбулентность в значительной степени влияет на трение, сопротивление, перенос тепла и структуру течения в целом. Несмотря на то, что турбулентные течения полностью описываются уравнениями Навье Стокса [1] (такой метод расчёта турбулентных течений называется Direct Numerical Simulation – DNS), в связи с необходимостью разрешения турбулентных пульсаций с очень мелкими временными и пространственными масштабами практическое применение этого метода в ближайшие десятилетия не представляется возможным [2]. В настоящее время DNS используется в основном в исследовательских целях для решения модельных задач при относительно низких числах Рейнольдса.

Альтернативой DNS служит метод моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES), в рамках которого способ описания влияния турбулентных вихрей на осредненное течение зависит от их размера. Методология LES основана на том, что мелкомасштабные турбулентные процессы универсальны для большинства течений, и могут быть моделированы, в то время как крупномасштабные турбулентные структуры не являются универсальными и сильно зависят от таких факторов, как форма обтекаемого тела, число Рейнольдса и уровень возмущений в набегающем потоке. Разрешение таких крупных структур зачастую обеспечивает методу LES сравнимую с DNS точность решения различных задач гидроаэродинамики и аэроакустики. Однако, LES, хоть и требует меньших вычислительных

затрат, чем DNS, всё же является весьма ресурсоёмким, особенно при расчёте пристеночных течений, поскольку в пограничном слое даже самые крупные вихри являются относительно мелкими, что требует очень подробных сеток и маленьких шагов по времени для их разрешения. В связи с этим, широкое использование LES для решения инженерных задач также весьма проблематично [3].

Поэтому для решения прикладных задач чаще всего используется гораздо более экономичный подход, основанный на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (Reynolds Averaged Navier-Stokes, RANS) [4], также называемых уравнениями Рейнольдса. В рамках RANS подразумевается осреднение всех турбулентных пульсаций, а их влияние на осредненное течение описывается при помощи дополнительных слагаемых в уравнениях движения и энергии, зависящих от так называемых Рейнольдсовых напряжений. Уравнения Рейнольдса не являются замкнутыми, для их решения необходимо определить напряжения Рейнольдса. Формулы, связывающие эти напряжения с осреднёнными параметрами потока, называются моделями турбулентности. По степени сложности модели турбулентности варьируют от простых алгебраических соотношений до сложных систем дифференциальных уравнений. Используемые в инженерной практике модели, как правило, опираются на гипотезу Буссинеска, линейно связывающую напряжения Рейнольдса с тензором скоростей деформаций осредненного течения. Это позволяет свести расчет тензора напряжений Рейнольдса к определению коэффициента пропорциональности в формуле Буссинеска – коэффициента турбулентной вязкости. При этом для расчёта турбулентной вязкости зачастую решаются дифференциальные уравнения переноса для вспомогательных величин, таких как кинетическая энергия и диссипация турбулентности. За последние десятилетия накоплен очень большой опыт использования RANS-подхода, свидетельствующий о том, что его точность различна для разных классов течений. В частности, общепризнано, что ошибки, возникающие при моделировании отрывных течений этим методом, весьма существенны [5].

С ростом производительности вычислительных ресурсов все чаще применяются гибридные вихререзающие подходы, комбинирующие RANS и LES. В рамках таких подходов в части расчётной области (как правило, в присоединённом пограничном слое) используется метод RANS в сочетании с той или иной моделью турбулентности, а в остальной части потока, в том числе в отрывных областях и следе за телом, реализуется LES. Таким образом, гибридные подходы позволяют использовать сильные стороны двух подходов: RANS обеспечивает высокую точность расчета пограничных слоев, а LES – отрывных областей. При этом для расчётов при помощи гибридных подходов в пристеночной области требуется сетка, подходящая для RANS, что позволяет существенно сократить вычислительные затраты

по сравнению с LES. По способу определения границ RANS и LES областей гибридные подходы можно разделить на две категории. Если границы задаются пользователем до проведения расчёта и являются статичными, подход называется зонным. Если же переключение между режимами происходит автоматически в процессе решения, то подход называется незонным, или глобальным. Поскольку глобальные подходы не требуют априорных знаний о структуре и деталях рассматриваемого течения, они являются более универсальными, практичными и предпочтительными при решении инженерных задач с использованием кодов общего назначения [6].

Среди глобальных подходов наиболее успешными являются методы семейства DES (Detached Eddy Simulation), в рамках которых в RANS подобластях потока используется базовая полуэмпирическая модель турбулентности, а в LES подобластях – подсеточная модель, построенная на ее основе. При этом переключение между RANS и LES выполняется динамически в процессе решения, основываясь на локальных характеристиках потока и расчётной сетке. Признано [7], что среди методов этого семейства для решения прикладных задач наиболее подходящей является модификация DES, получившая название DDES (Delayed Detached Eddy Simulation) [8], в которой предложено успешное решение проблемы спонтанного переключения в режим LES в присоединённом пограничном слое. Важным обстоятельством является то, что точность гибридных подходов, в том числе и метода DDES, существенно зависит от точности расчета присоединённого пограничного слоя, которая обеспечивается базовой RANS моделью. Поскольку модель SST [9] считается одной из лучших, если не лучшей, полуэмпирической моделью турбулентности, методы, построенные на ее основе, потенциально более точны по сравнению с методами на основе других моделей [7].

Однако, обычно полуэмпирические модели, на основе которых строятся гибридные подходы, в том числе и модель SST, не включают в себя механизмов описания ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое. Это может приводить к снижению точности расчета, поскольку в большинстве течений пограничный слой не является турбулентным на всём своём протяжении. Турбулентному участку, как правило, предшествует ламинарный участок той или иной протяжённости, который может значительно повлиять на характеристики течения в целом. Это влияние проявляется не только при умеренных, но и при высоких числах Рейнольдса, особенно при наличии отрыва от гладкой поверхности. Классическим примером влияния перехода на отрывные течения является явление кризиса сопротивления плохообтекаемых тел, подробно описанное в [10], и заключающееся в том, что при повышении числа Рейнольдса присоединённый пограничный слой турбулизуется до отрыва, что приводит к смещению точки отрыва и резкому падению коэффициента сопротивления (рисунок 1).

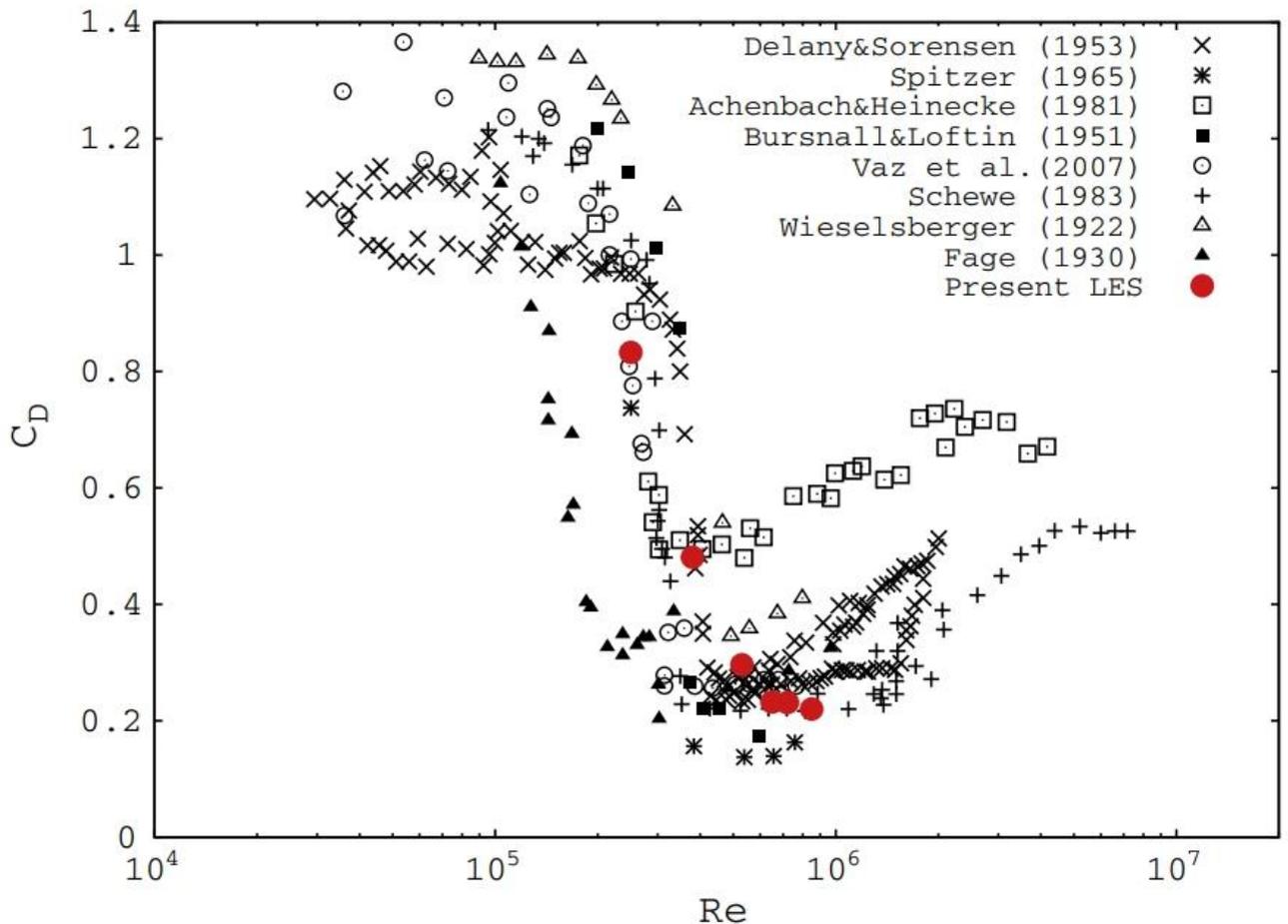


Рис. 1. Зависимость осредненного коэффициента сопротивления круглого цилиндра от числа Рейнольдса в различных экспериментальных исследованиях (из [11])

Таким образом, точность гибридных подходов в некоторых случаях может быть повышена путем использования модели RANS, способной учесть ламинарно-турбулентный переход, в качестве базовой.

Однако, даже в рамках RANS предсказание положения ламинарно-турбулентного перехода не является до конца решённой задачей, хотя существует большое количество моделей, обеспечивающих приемлемую точность расчёта для широкого спектра течений. Наилучшей по точности из таких моделей на данный момент считается дифференциальная модель Menter, Langtry γ - Re_{θ} (2009) [12], разработанная на основе полуэмпирической модели турбулентности с двумя уравнениями k - ω SST [9]. В рамках модели SST γ - Re_{θ} производится решение четырёх дифференциальных уравнений (двух для характеристик турбулентности k и ω , и двух для вспомогательных величин, перемежаемости γ и критического числа Рейнольдса Re_{θ}). Хотя модель SST γ - Re_{θ} за счет возможности описания перехода различных сценариев превосходит по точности модель SST, ее использование связано с повышением вычислительных затрат, затрачиваемых на получение сошедшегося решения, а иногда и к отсутствию сходимости итерационного процесса [13] [14]. Эти проблемы не являются

специфическим недостатком модели γ - Re_{θ} , а также характерны для других, менее точных, дифференциальных моделей перехода (их обзор приведён в разделе 1.1.1 Главы 1).

В этой связи в последнее время всё больше усилий прилагается к разработке алгебраических моделей перехода, в рамках которых не производится решения дополнительных дифференциальных уравнений для характеристик перехода. Эти модели кажутся весьма перспективными, поскольку их отличает от дифференциальных моделей простота в использовании, лучшая сходимость и сравнительно небольшое количество дополнительных вычислений относительно базовых моделей турбулентности, на основе которых они построены.

Следует отметить, что подавляющее большинство попыток учесть влияние ламинарно-турбулентного перехода в рамках гибридных вихререзающих подходов основано на использовании дифференциальных моделей перехода в качестве базовых RANS моделей (обзор гибридных подходов на основе моделей перехода приведен в разделе 1.2 Главы 1). Это, как и в случае RANS, может приводить к вычислительным проблемам, выражающимся в отсутствии сходимости итераций на шаге по времени и увеличении времени расчета. В этой связи весьма перспективным кажется применение в рамках гибридных подходов алгебраических моделей перехода, что и определило направление настоящей работы.

Таким образом, цель настоящей работы состоит в разработке алгебраической модели учёта ламинарно-турбулентного перехода в рамках модели SST для применения в рамках гибридного глобального вихререзающего метода DDES.

ГЛАВА 1. МОДЕЛИ ДЛЯ ПРЕДСКАЗАНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА

Как уже отмечалось во Введении, описание ламинарно-турбулентного перехода в рамках гибридных вихререзающих подходов построено на основе моделей, разработанных для замыкания уравнений Рейнольдса. Исходя из этого, настоящая глава построена следующим образом. В разделе 1.1. рассматриваются RANS модели для описания перехода, а в разделе 1.2. приведен опыт их применения совместно с вихререзающими подходами.

1.1. МОДЕЛИ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА ДЛЯ ЗАМЫКАНИЯ УРАВНЕНИЙ РЕЙНОЛЬДСА

Моделирование ламинарно-турбулентного перехода является весьма нетривиальной задачей. Это связано с тем, что в зависимости от уровня турбулентности внешнего потока и градиента давления ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое может проходить различным образом (конкретный способ перехода принято называть сценарием).

При низких интенсивностях турбулентных пульсаций внешнего потока в пограничном слое реализуется естественный сценарий перехода к турбулентности, характерный для задач внешней аэродинамики. При естественном переходе в ламинарном пограничном слое образуются волны Толлмина-Шлихтинга, амплитуда которых растёт вниз по потоку. Волны инициируют развитие продольных и поперечных вихревых структур, которые приводят к появлению турбулентных пятен; эти пятна увеличиваются в размере и постепенно заполняют весь пограничный слой.

Повышенные уровни турбулентности внешнего течения (как, например, в задачах турбомашиностроения) приводят к сокращению длины перехода (Рис. 1.1.) [15]. В этом случае пропускается этап постепенного роста волн Толлмина-Шлихтинга и реализуется байпасный (или вынужденный) сценарий (от англ. bypass – пропускать, обходить). При таком типе

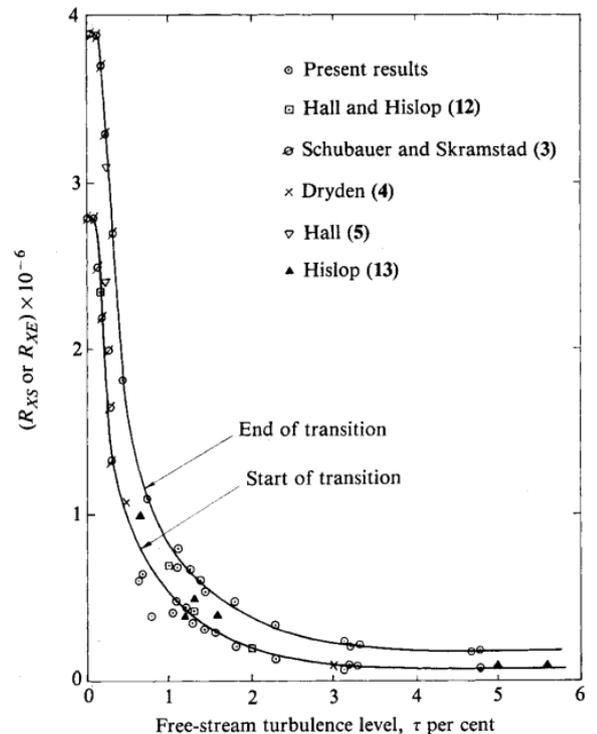


Рис. 1.1. Зависимость длины ламинарно-турбулентного перехода от уровня интенсивности турбулентности набегающего потока (из [15])

перехода сильные турбулентные пульсации из свободного потока проникают в пограничный слой, приводя к его быстрой турбулизации.

Стоит отметить, что между этими двумя сценариями перехода не существует чёткой границы. В литературе [16], для определённости, иногда эту границу определяют по значению интенсивности турбулентности во внешнем течении $Tu = 100 \cdot \overline{u'^2} / U_0$, примерно равному 0.8-1.0%. Здесь u' – интенсивность турбулентных пульсаций, а U_0 – скорость во внешнем течении.

Продольный градиент давления также оказывает существенное влияние на положение ламинарно-турбулентного перехода, особенно при низких уровнях турбулентности внешнего потока. Наличие благоприятного (отрицательного) градиента давления, как правило, стабилизирует поток, способствует затягиванию перехода и удлинению переходной зоны. В некоторых случаях благоприятный градиент может привести к реламинаризации течения. Положительный градиент оказывает обратный эффект. При достаточно сильном неблагоприятном градиенте давления ламинарный пограничный слой может оторваться от стенки, после чего происходит турбулизация в сдвиговом слое, за которой может последовать присоединение уже турбулентного пограничного слоя. В оторвавшемся пограничном слое переход к турбулентности вызывается неустойчивостью Кельвина – Гельмгольца, способствующей формированию поперечных вихрей, аналогично волнам Толлмина-Шлихтинга. Вихри затем группируются и распадаются приводя к турбулизации потока [17]. Такой сценарий носит название отрывного, или пузырькового и встречается, например, при обтекании крыловых профилей.

Таким образом, плавное изменение параметров набегающего потока может приводить не только к изменению положения и протяженности ламинарно-турбулентного перехода, но и смене сценария перехода. Например, при обтекании одного и того же крылового профиля в зависимости от угла атаки и уровня турбулентности набегающего потока может реализовываться любой из вышеперечисленных сценариев перехода. Это обстоятельство существенно усложняет построение моделей перехода, поскольку эти модели должны предсказывать не только влияние уровня турбулентности и градиента давления на положение перехода в рамках каждого из сценариев, но и обеспечить своевременное переключение от одного сценария к другому.

1.1.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ПЕРЕХОДА

Исторически первым сценарием перехода, для описания которого была предложена математическая модель, был естественный переход. В 1956 году были независимо опубликованы две работы [18] и [19], предлагающие так называемый метод e^9 , основанный на

линейной теории устойчивости. В рамках этого подхода решаются уравнения Орра – Зоммерфельда для пограничного слоя на плоской пластине без градиента давления. Решение этих уравнений позволяет построить однозначную зависимость максимального усиления возмущений N от координаты x , или локального числа Рейнольдса $Re_x = U_0 x / \nu$.

$$N = \ln(a / a_0) = \int_{x_0}^x -\alpha_i dx, \quad (1.1)$$

где a – амплитуда возмущения, α_i – показатель роста возмущения, x_0 – координата начала роста возмущений.

На основе экспериментальных данных [20] было установлено, что при низких уровнях турбулентности ($Tu < 0.1\%$) переходный участок на плоской пластине находится в интервале чисел Рейнольдса от $Re_x = 2.8 \cdot 10^6$ до $Re_x = 3.9 \cdot 10^6$, что соответствует значениям N от 8.22 до 10.3. Позднее, на основе новых экспериментальных данных, границы области перехода неоднократно уточнялись (см., например, [21]). Для крыловых профилей и плоской пластины значение $N_{crit} = 9$ позволило получить хорошее совпадение с экспериментами в положении точки перехода и широко использовалось в последующих расчётах.

Неоднократно предпринимались попытки расширить область применимости метода e^9 и обобщить его на другие типы перехода. Так, в 1975 году один из авторов метода J.L. van Ingen, используя новые экспериментальные данные для калибровки, распространил модель на течения с отрывным пузырем [22]. В 1977 году на основе экспериментальных исследований L. M. Mask [23] предложил метод e^N , в рамках которого возможности оригинального метода были расширены за счет учета уровня турбулентности внешнего потока. для этого постоянное значение 9 было заменено на переменное N_{crit} , которое зависит от уровня турбулентности и рассчитывается по формуле

$$N_{crit} = -8.43 - 2.4 \ln(Tu / 100). \quad (1.2)$$

Метод применим при $N_{crit} > 0$, т.е. при уровнях турбулентности внешнего потока $Tu < 3\%$.

В 1986 году Drela [23] при разработке кода ISES, предназначенного для расчёта параметров крыловых профилей, использовал интегральный метод (решение уравнений Эйлера и уравнений для интегральных характеристик пограничного слоя) в сочетании с подходом e^N , в рамках которого помимо уравнений для интегральных характеристик пограничного слоя, решалось уравнение для N . При достижении N критического значения N_{crit} , задаваемого пользователем, корреляционные функции метода переключались с ламинарных на

турбулентные. Этот же подход используется в находящемся в свободном доступе коде XFOIL [24], предназначенном для расчета обтекания крыловых профилей.

В целом, метод e^N хорошо подходит для определения положения точки естественного перехода, но, даже с учетом формулы (1.2), он весьма неточен для течений с высокими уровнями турбулентности внешнего потока. Кроме того, в рамках этого метода игнорируется протяженность переходного участка, т.е. подразумевается, что переход осуществляется мгновенно, в точке, где N достигает критического значения.

К сожалению, использование этого метода (независимо от формулировки) в кодах общего назначения крайне затруднительно, в первую очередь из-за использования интегрирования вдоль пограничного слоя. Попытка исправить этот недостаток была предпринята в работе Coder, Maughmer [25], где уравнения модели Спаларта-Аллмареса SA [26] дополнены уравнением переноса для величины N , источники слагаемых которого построены на основе корреляций метода Drela [23]. При этом уравнение для турбулентной вязкости модели SA модифицировано таким образом, чтобы отключить генерационное слагаемое при $N < N_{crit}$.

Другой подход к моделированию ламинарно-турбулентного перехода основан на феноменологическом подходе к описанию байпасного перехода и концепции «ламинарной кинетической энергии», которая привлекается для описания физических процессов, имеющих место в «предпереходном» пограничном слое при наличии сильных турбулентных пульсаций во внешнем потоке. В отличие от естественного сценария перехода, при котором развитие возмущений Толлмина-Шлихтинга постепенно приводит к турбулизации течения (на описание этого процесса направлены методы класса e^N), за байпасный переход отвечают сильные пульсации, проникающие во внутреннюю часть пограничного слоя из внешнего потока. Эти пульсации приводят к резким продольным искажениям или «полосам» в профиле скорости, называемыми полосами Клебанова (Klebanoff Streaks). Такая изогнутость профиля скорости является источником неустойчивости, которая затем инициализируется и усиливается мелкомасштабными турбулентными пульсациями. Подробное описание механизмов байпасного перехода на основе расчётов DNS приведено в статьях [27] - [30]. В 1996 году Maule, Schulz [31] предложили уравнение переноса для ламинарной кинетической энергии и решили его в рамках приближения пограничного слоя, получив при этом хорошее совпадение с экспериментальными данными для интенсивности пульсаций вверх по потоку от точки перехода к турбулентности. В статье предлагается метод нахождения начала перехода, основанный на сравнении вязких напряжений на стенке с напряжениями, порожденными наличием «ламинарных пульсаций». Найденные таким образом положения точек перехода хорошо совпадают с экспериментальными значениями для высоких уровней турбулентности

внешнего потока, однако при низких значениях этого параметра точность метода существенно снижается.

В работе [32] уравнение для ламинарной кинетической энергии [31] использовалось для учета перехода совместно с нелинейной моделью турбулентности. Для определения степени турбулентности использовался коэффициент перемежаемости, определяемый по алгебраической формуле из [33]. Полная кинетическая энергия возмущений в потоке определялась как $k = (1 - \gamma)k_L + \gamma k_T$, где k_L и k_T – ламинарная кинетическая энергия и кинетическая энергия турбулентности, соответственно.

Наиболее успешными моделями, разработанными с использованием концепции ламинарной кинетической энергии, можно считать модели, разработанные Walters. С использованием уравнения для ламинарной кинетической энергии k_L он построил две модели перехода, основанные на уравнениях для k и ϵ и [34] и для k и ω [35]. Несмотря на сложность формулировки, обе эти модели используют для расчётов только локальную информацию, поэтому они полностью применимы в современных CFD кодах.

Среди моделей перехода наиболее представительным является класс эмпирических моделей, опирающихся на экспериментальные корреляции для описания положения и длительности любого типа ламинарно-турбулентного перехода. Большинство из таких моделей используют понятие коэффициента перемежаемости, значение которого $\gamma = \Delta t_{turb} / \Delta t$ по определению равно отношению времени Δt_{turb} , в течение которого наблюдается турбулентное течение к общему времени наблюдения Δt в каждой точке потока. Таким образом, при $\gamma = 0$ течение полностью ламинарное, а при $\gamma = 1$ – турбулентное, а область с промежуточными значениями коэффициента перемежаемости является переходной.

В первых моделях этого класса коэффициент перемежаемости использовался для сшивки ламинарного и турбулентного решений задачи. Для его нахождения использовались эмпирические корреляции для определения точек начала и конца перехода в зависимости от параметров задачи, в промежутке между которыми коэффициент перемежаемости вычислялся при помощи интегрирования или алгебраических формул (подробный обзор таких подходов приведён в [36]). Типичными примерами эмпирических корреляций являются Hall, Gibbings [37], в которой критическое число Рейнольдса потери импульса представлено как функция градиента давления и уровня турбулентности внешнего потока, и Abu-Ghannam & Shaw [15], в которой начало и конец перехода определяются по значениям числа Рейнольдса потери импульса. Однако, как и в случае с методом e^N , использование этих корреляций в современных кодах весьма затруднительно.

Следующим естественным шагом в развитии эмпирического подхода, направленным на упрощение его использования в вычислительных кодах, было построение дифференциальной модели. В рамках первой модели этого типа, принадлежащей Libby [38], в расчётной области одновременно решаются две системы уравнений: одна для величин ϕ_L , соответствующих ламинарному обтеканию, а вторая – для величин ϕ_T , соответствующих турбулентному обтеканию. Актуальные значения получаются путем взвешивания этих двух решений с весами γ и $(1-\gamma)$, определяемыми локальным значением коэффициента перемежаемости ($\phi = (1-\gamma)\phi_L + \gamma\phi_T$).

Подход получил развитие в работах [39] - [41]. Так, Dopazo [39] и Byggstoyl & Kollmann [40] независимо пришли к одному и тому же дифференциальному уравнению для γ :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\gamma(1-\gamma) (\langle u_{L,i} \rangle - \langle u_{T,i} \rangle) \right) + S_\gamma, \quad (1.3)$$

где $u_{L,i}$, $u_{T,i}$ – скорости, полученные из решений уравнений для ламинарного и турбулентного обтекания, а S_γ – член, отвечающий за средний перенос «ламинарной» жидкости в «турбулентные» зоны, x_i – координаты, t – время. Схожее уравнение было получено Steelant, Dick [41].

К сожалению, использование этого подхода связано с целым рядом трудноразрешимых проблем, наиболее существенной из которых является сложность обеспечения уравнения неразрывности для актуального (взвешенного) поля скорости. Не менее существенными оказались и вычислительные проблемы, поскольку метод решения разных уравнений для турбулентного и ламинарного режимов является не только более затратным, но и более сложным в имплементации. Большое количество недостатков привело к тому, что этот подход не нашел применения в кодах общего назначения.

Гораздо более успешным оказался подход, основанный на внедрении коэффициента перемежаемости в существующие модели турбулентности таким образом, чтобы при его низких значениях турбулентная вязкость была мала (и, соответственно, реализовывался ламинарный режим течения), а при высоких уравнения исходной и модифицированной модели совпадали. Так, Suzen, Huang [42] построили уравнение переноса для коэффициента перемежаемости, основываясь на уравнениях Steelant, Dick [41] и Cho, Chung [43], и использовали его в качестве множителя для турбулентной вязкости в модели Ментера SST [44]. Тем самым им удалось создать замкнутую дифференциальную модель, однако при получении решения требовалось проведение нелокальных операций (интегрирование поперек пограничного слоя) для определения значения числа Рейнольдса потери импульса, которое необходимо для нахождения

точки начала перехода путем сравнения с алгебраической корреляцией. К сожалению, использование таких нелокальных операций практически невозможно в рамках современных кодов общего назначения, поэтому эта модель также не нашла широкого применения.

В 2002 году Menter [45] предложил модель перехода с уравнением переноса для коэффициента перемежаемости, в которой отсутствуют вышеупомянутые недостатки:

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \gamma)}{\partial x_j} = P_\gamma - E_\gamma + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_f} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right], \quad (1.4)$$

где P_γ и E_γ – источниковые члены, ρ – плотность, U_j – компоненты скорости, μ и μ_t – динамические молекулярная и турбулентная вязкости, а σ_f – эмпирическая константа.

Интегрирования пограничного слоя удалось избежать, основываясь на идее van Driest, Blumer [46] о связи числа Рейнольдса потери импульса с величиной $Re_v = \rho d_w^2 S / \mu$, называемой числом Рейнольдса завихренности. Здесь d_w – расстояние до стенки, а $S = \sqrt{2S_{i,j}S_{i,j}}$ – модуль тензора скоростей деформаций. Идея заключается в том, что в каждом сечении пограничного слоя число Рейнольдса потери импульса связано с максимальным поперек слоя числом Рейнольдса завихренности следующим соотношением:

$$Re_\theta = \max_{BL}(Re_v) / 2.193. \quad (1.5)$$

Ламинарно-турбулентный переход обеспечивался умножением генерационного члена в уравнении для кинетической энергии модели SST [44] на функцию, зависящую от коэффициента перемежаемости.

Данная модель продемонстрировала хорошие результаты при расчётах различных пограничных слоёв на плоских пластинах без градиента давления, однако из-за «назначения» критического числа Рейнольдса она не способна описывать влияние на переход градиента давления, что сильно сужает область ее применения.

Этот недостаток был исправлен в модели γ - Re_θ [47], которая содержит дополнительное уравнение переноса для критического числа Рейнольдса потери импульса $\tilde{Re}_{\theta t}$:

$$\frac{\partial(\rho \tilde{Re}_{\theta t})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \tilde{Re}_{\theta t})}{\partial x_j} = P_{\theta t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{\theta t} (\mu + \mu_t) \frac{\partial \tilde{Re}_{\theta t}}{\partial x_j} \right], \quad (1.6)$$

где $\sigma_{\theta t}$, $c_{\theta t}$ – константы модели.

Уравнение построено таким образом, что во внешнем потоке величина $\tilde{Re}_{\theta t}$ определяется генерационным членом $P_{\theta t} = c_{\theta t} \frac{\rho}{\tilde{t}} (Re_{\theta t} - \tilde{Re}_{\theta t})(1.0 - F_{\theta t})$, который “принуждает” $\tilde{Re}_{\theta t}$ соответствовать корреляционным значениям $Re_{\theta t}$ (зависящим от уровня турбулентности внешнего потока и градиента давления). В пограничном слое генерация отключается при помощи вспомогательной функции $F_{\theta t}$, равной нулю в свободном течении и единице в пограничном слое, определяющей границы пограничного слоя, а величина $\tilde{Re}_{\theta t}$ переносится из внешнего потока за счёт диффузии. Такой подход позволяет «доставить» информацию о критическом числе Рейнольдса, определяемую во внешнем течении, в пограничный слой, где по формуле (1.5) можно оценить локальное число Рейнольдса потери импульса. В формуле для генерационного слагаемого \tilde{t} – временной масштаб, а $c_{\theta t}$ – константа.

Модель содержит три эмпирические корреляции для следующих величин: $Re_{\theta c}(\tilde{Re}_{\theta t})$ – точка начала роста перемежаемости, $F_{length}(\tilde{Re}_{\theta t})$ – функция, отвечающая за длину области перехода и $Re_{\theta t}(Tu, \lambda_{\theta})$ – точка начала перехода, где λ_{θ} – безразмерный параметр, характеризующий градиент давления. Корреляционные функции не были представлены в оригинальной публикации [47], а опубликованы в свободный доступ на несколько лет позже [12].

Таким образом, для проведения расчётов с помощью этой модели требуется знать только характеристики турбулентности набегающего потока: уровень турбулентности Tu и линейный масштаб, необходимый для вычисления удельной диссипации. Модель обладает наиболее широкими возможностями среди существующих моделей перехода. Так, в ее рамках предусмотрено описание естественного, байпасного и отрывного переходов, а также предусмотрена возможность реламинаризации потока под действием градиента давления. Данная модель является первой, полностью подходящей для использования в кодах общего назначения в 2D и 3D течениях со сложной геометрией. К недостаткам модели можно отнести сложность в достижении сошедшегося решения [14] [48] [49], а также трудности при расчёте задач с движущимися сетками, так как для расчёта локальной степени турбулентности Tu используется скорость относительно стенки. Модель была протестирована на ряде двумерных и трёхмерных течений различной степени сложности и ее точность превосходила точность других моделей для предсказания ламинарно-турбулентного перехода. Однако даже эта модель, которую можно назвать лучшей в своем классе, не способна обеспечить высокую точность предсказания положения перехода во многих течениях.

С момента публикации модели γ - Re_θ появился целый ряд ее модификаций.

В работах [50] и [51] были предложены поправки для предсказания перехода, вызванного неустойчивостью поперечного течения, которая иногда возникает при обтекании стреловидных крыльев.

Наконец, в 2015 году, Menter, Smirnov, Liu, Avancha [52] опубликовали модель перехода с одним дифференциальным уравнением для величины γ (SST γ модель). При формулировке новой модели авторы отказались от уравнения переноса для Re_θ , а также от громоздких корреляций для величин Re_{θ_c} , Re_{θ_t} , и F_{length} , заменив их одной простой алгебраической корреляцией и приняв F_{length} за константу. Такие сильные упрощения улучшили сходимость итераций и сократили время расчета, однако в ряде случаев точность предсказания перехода снизилась.

Модель γ - Re_θ неоднократно адаптировали для использования совместно с моделью с одним уравнением SA [26]. Так, Medida и Baeder [53] слегка изменили модель γ - Re_θ и применили её к модели SA [26]. Полученные результаты для крыловых профилей оказались схожи с результатами, полученными при помощи оригинальной модели. Coder, Maughmer [54] упростили модель γ - Re_θ , заменив уравнение переноса для Re_{θ_t} на алгебраическую корреляцию, и применили её совместно с моделями SST [9] и SA [26]. Для неизвестных в рамках модели SA величин k (кинетическая энергия турбулентности) и ω (удельная скорость диссипации) авторы использовали следующие оценки:

$$\omega = \frac{\Omega}{\sqrt{\beta^*}}, \quad (1.7)$$

$$k = \nu_t \max\left(\omega, \frac{SF_2}{a_1}\right), \quad (1.8)$$

где $F_2 = \tanh(\arg_2^2)$, $\arg_2 = \max\left(\frac{2}{\beta^* d_w} \sqrt{\frac{\nu_t}{\omega}}, \frac{500\nu}{d_w^2 \omega}\right)$, $\Omega = \sqrt{2\Omega_{i,j}\Omega_{i,j}}$ – модуль тензора

завихренности, β^* и a_1 – константы модели SST, а ν и ν_t – кинематические коэффициенты молекулярной и турбулентной вязкости. Полученные при помощи модели [54] результаты также схожи с результатами оригинальной модели. Отметим также, что поскольку в модели SA локальное значение интенсивности турбулентности недоступно, в данной модели перехода используется ее величина в набегающем потоке, что в ряде случаев может снизить точность расчета.

Наконец, Coder, Maughmer [55] предложили свою версию γ модели, основанную на двух уравнениях переноса: для перемежаемости γ и для показателя роста возмущений N из метода e^N . Уравнение для перемежаемости практически без изменений взято из модели γ - Re_θ , однако в данном случае точка начала перехода (в которой «включается» генерация в уравнении для коэффициента перемежаемости) определяется координатой, где величина N достигает критического значения N_{crit} . Модель ориентирована на задачи внешней аэродинамики с низкими уровнями турбулентности внешнего потока и при расчете крыловых профилей превосходит оригинальную модель не только по точности, но и по скорости сходимости. Модель получила дальнейшее развитие в работе [56], в которой была модифицирована и приобрела галилееву инвариантность.

Таким образом, в последние десятилетия дифференциальные модели ламинарно-турбулентного перехода получили большое развитие и обеспечивают приемлемую точность для широкого круга переходных течений. Однако, с опытом использования дифференциальных моделей пришло понимание об их чрезмерной сложности и громоздкости, в связи с чем в данный момент все больше исследований в этой сфере направлены на упрощение структуры моделей, не жертвуя при этом их точностью [52], [57].

1.1.2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЕРЕХОДА

Алгебраические модели перехода появились сравнительно недавно вследствие попыток упростить дифференциальные модели без существенного снижения их точности. Учёт перехода в таких моделях происходит только при помощи алгебраических соотношений, без решения дополнительных дифференциальных уравнений, что, в теории, позволяет сократить вычислительные затраты и улучшить сходимость, в частности, для нестационарных течений.

Одной из первых таких моделей является Kubacki, Dick – k - ω KD [58], построенная на основе феноменологического подхода, использованного ранее в дифференциальной модели k - k_L - ω Walters [35], для описания физических процессов происходящих при байпасном сценарии перехода к турбулентности. Модель KD используется совместно с моделью турбулентности Wilcox k - ω [59]. Авторы модели предприняли попытку формализовать явление проникновения крупных пульсаций внутрь пограничного слоя и ускорения турбулизации. Учёт перехода происходит при помощи введения коэффициента перемежаемости γ и разделения турбулентной вязкости на крупномасштабную и мелкомасштабную составляющие. При помощи введения дополнительных функций, модель также настроена на описание пузырькового режима перехода. После оригинальной публикации модель претерпела ряд изменений и доработок [60] - [62], направленных на улучшение предсказания перехода и учёта других механизмов.

В модели KD используется разделение кинетической энергии турбулентности на мелкомасштабную и крупномасштабную части:

$$k_s = f_{SS} k, \quad (1.9)$$

$$k_l = k - k_s, \quad (1.10)$$

с соответствующими им мелкомасштабной и крупномасштабной вязкостями:

$$v_s = \frac{k_s}{\tilde{\omega}}, \text{ где } \tilde{\omega} = \max \left[\omega, \frac{C_{lim} S}{a_1} \right]; \quad (1.11)$$

$$v_l = \frac{k_l}{\tilde{\omega}}, \text{ где } \tilde{\omega} = \max \left[\omega, \frac{C_{lim} S}{a_2} \right]. \quad (1.12)$$

Функция f_{SS} , определяющая долю мелкомасштабных пульсаций в кинетической энергии турбулентности, а также соображения, лежащие в основе ее определения, приведены ниже.

Дифференциальные уравнения переноса турбулентных характеристик (модель Wilcox k- ω [59] со внесёнными моделью KD изменениями) выглядят следующим образом:

$$\frac{Dk}{Dt} = \gamma P_k + (1-\gamma) P_{sep} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \sigma^* \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \quad (1.13)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \sigma \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\sigma_d}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \quad (1.14)$$

где $\alpha, \beta, \sigma, \sigma^*$ и σ_d – константы модели k- ω [59].

Все 3 модификации модели k- ω , сделанные авторами модели перехода, связаны с генерационными слагаемыми в уравнениях (1.13) - (1.14). Во-первых, по аналогии со многими эмпирическими моделями перехода, генерация P_k умножается на коэффициент перемежаемости γ . Второе изменение касается самой генерации, в которой вместо турбулентной вязкости ($P_k = \nu_T S^2$), используется “мелкомасштабная” вязкость v_s :

$$P_k = v_s S^2. \quad (1.15)$$

Данная модификация генерации отражает наблюдение, что за генерацию турбулентности сдвигом в пограничном слое отвечают только мелкомасштабные пульсации. При этом, турбулентная вязкость, используемая в уравнениях Рейнольдса, является суммой «мелкомасштабной» и «крупномасштабной» вязкостей: $\nu_T = \nu_s + \nu_l$.

Третья модификация состоит в добавлении в уравнение для кинетической энергии (1.13) дополнительного источникового члена P_{sep} , позаимствованного в упрощённой форме из модели Менгера SST γ [52],

$$P_{sep} = C_{sep} F_{sep} \nu S^2, \quad (1.16)$$

$$F_{sep} = \min \left(\max \left(\frac{R_V}{2.2 A_V} - 1.0, 0.0 \right) 1.0 \right), \text{ где } R_V = \frac{d_w^2 S}{\nu}. \quad (1.17)$$

P_{sep} отвечает за генерацию турбулентности в оторвавшемся ламинарном пограничном слое и имеет в качестве множителя $(1-\gamma)$, т.е. активирующийся только при отсутствии турбулентности.

Функция f_{SS} , используемая в формуле разделения кинетической энергии (1.9) имеет следующий вид

$$f_{SS} = \exp \left(- \left(\frac{C_{SS} \nu}{\sqrt{k} d_w} \right)^2 \right). \quad (1.18)$$

Идея, лежащая в основе разделения кинетической энергии на две составляющие, базируется на том, что к появлению полос Клебана могут привести только крупномасштабные пульсации, обеспечивающие достаточную деформацию профиля скорости. Что касается мелкомасштабных пульсаций, их влияние в ламинарной части предпереходного пограничного слоя «блокируется» из-за сильного градиента скорости (это явление в зарубежной литературе получило название защиты сдвигом, или “Shear Sheltering” [27]). Таким образом, для правильного описания байпасного перехода требуется разделить крупномасштабные и мелкомасштабные пульсации, что и делается с помощью функции f_{SS} (1.18). Структура функции f_{SS} (1.18) основана на соображении [27], что защита сдвигом зависит от отношения двух временных масштабов. В статьях [35], [63] первый из них, масштаб конвективных перемещений возмущений, определяется как $\tau_c = \frac{l}{\Omega}$, где Ω – модуль тензора завихренности.

Второй временной масштаб – масштаб диффузии по нормали к стенке, $\tau_d = \frac{l^2}{\nu}$, где l – пульсационный масштаб в нормальном направлении. В работе [63] Walters оценивает $l \propto \frac{\sqrt{k}}{\Omega}$ и,

следовательно $\tau_d \propto \frac{k}{\nu \Omega^2}$. Отношение этих масштабов даёт формулу, обозначенную авторами как число Рейнольдса защиты сдвигом в форме

$$Re_{\Omega} = \frac{k}{\nu \Omega}, \quad (1.19)$$

использованную в аналогичной защитной функции в модели k-k1- ω Walters, Cokljat [35] и более ранней версии модели KD [60]:

$$f_{ss} = \exp\left(-\left(\frac{C_{ss}\nu\Omega}{k}\right)^2\right). \quad (1.20)$$

Однако, позже авторы отказались от такой формулировки в пользу другого выражения. В предпереходном пограничном слое нормальные пульсации пропорциональны расстоянию до стенки, и, следовательно \sqrt{k} можно заменить на $\nu\Omega$, что приводит к другой форме числа Рейнольдса

$$Re_y = \frac{\sqrt{k}y}{\nu}, \quad (1.21)$$

и формуле (1.18).

Функция C_{ss} определяет интенсивность защиты сдвигом и отвечает за подавление или усиление изгибов профиля скорости (полос Клебанова) в, соответственно, ускоряющемся или замедляющемся потоке

$$C_{ss} = C_s (1.0 + C_A f_w \psi). \quad (1.22)$$

Здесь

$$\psi = \tanh\left(\frac{-\Omega(S-\Omega)}{C_{\psi}(\beta^*\omega)^2}\right), \quad (1.23)$$

функция, чувствительная к ускорению и замедлению потока, а также к кривизне линий тока, а

$$f_w = 1 - \tanh\left(\frac{k}{C_w \nu \omega}\right), \quad (1.24)$$

ограничивает влияние ψ только на среднюю часть предпереходного пограничного слоя.

Наконец, выражение для перемежаемости имеет следующий вид

$$\gamma = \min \left(\max \left(\frac{\sqrt{k} d_w}{A_\gamma \nu} - 1.0, 0.0 \right), 1.0 \right). \quad (1.25)$$

Во внешнем течении и пограничном слое ниже по потоку от перехода функции γ и f_{ss} обе принимают значение 1 и модель турбулентности функционирует в оригинальном виде без изменений.

Значения констант были откалиброваны, основываясь на экспериментах серии ТЗ [64] переходного пограничного слоя на плоской пластине:

$$\begin{aligned} A_\gamma &= 12, \quad C_S = 21, \quad C_A = 1.0, \quad C_\psi = 10.0, \quad C_W = 10.0, \\ C_{sep} &= 2.0, \quad A_V = 550.0, \quad a_1 = 0.3, \quad a_2 = 0.45, \quad C_{lim} = 7.0 / 8.0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Другая попытка создать алгебраическую модель перехода путем упрощения дифференциальной модели SST γ [52] была предпринята в работе Sandhu [65] (модель SST $k\gamma$). Модель получена путём объединения уравнений для “ k ” и “ γ ” и создания новой гибридной переменной $k_\gamma = k \cdot \gamma$. Кроме того в модель включена модификация на основе некоторых слагаемых из алгебраической модели KD [60]. На данный момент модель представлена в трёх различных публикациях [65] - [67] с различными формулировками. Все опубликованные в настоящее время версии этой модели существенно уступают по точности модели Menter SST γ [52], поэтому пока данную модель можно признать удачной лишь отчасти.

Одной из недавних попыток построения алгебраической модели на основе SST γ [52], предпринятой при участии автора, является модель SST alg- γ [57]. В рамках этой модели начало перехода определяется при помощи отношения текущего значения числа Рейнольдса завихренности и корреляционного значения критического числа Рейнольдса. Значение перемежаемости затем рассчитывается по формуле

$$\gamma = \tanh(Rat_{Re}^2), \quad (1.27)$$

$$Rat_{Re} = \frac{\max(Re_{V22}, 60.0)}{Re_{\Theta C}}, \quad (1.28)$$

$$Re_{V22} = \frac{\Omega d_w^2}{2.2\nu}, \quad \Omega = \max(S, \Omega, 0.1\omega). \quad (1.29)$$

Корреляционная функция зависит от локального уровня турбулентности Tu_l и градиента давления $\lambda_{\theta l}$ и имеет следующий вид:

$$Re_{\Theta C} = \min \left(\frac{Re C_{c1}}{Tu_l^{Re C_{c2}}} C Tu_{Crit}, Re C_{Max} \right) FPG(\lambda_{\theta l}). \quad (1.30)$$

Функция CTu_{Crit} вводит чувствительность к типу перехода и позволяет изменить коэффициент в корреляции с CTu_{High} для байпасного перехода на CTu_{low} для естественного:

$$CTu_{Crit} = CTu_{High}(1 - F_{RV1}) + CTu_{low}F_{RV1}, \quad (1.31)$$

$$F_{RV1} = \min \left[\left(\frac{Re_{V22}}{RVI_{switch}} \right)^2, 1 \right]. \quad (1.32)$$

Аналогичная чувствительность к типу перехода была введена в функцию градиента давления $FPG(\lambda_{\theta l})$, поскольку степень его влияния зависит от сценария перехода.

Локальные значения Tu_l и $\lambda_{\theta l}$ рассчитываются аналогично [52]:

$$Tu_l = \min \left(\frac{\sqrt{2k/3}}{\omega d_w}, 1.0 \right) \cdot 100, \quad (1.33)$$

$$k = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}}, \quad (1.34)$$

$$\lambda_{\theta l} = -0.1111 \frac{dV}{dn} \frac{d_w^2}{\nu} + 0.1875. \quad (1.35)$$

Здесь $\lambda_{\theta l}$ ограничено интервалом $[-10, 10]$. dV/dn – производная по нормали к стенке от нормальной скорости. k – гармоническое среднее кинетической энергии турбулентности k по всем ячейкам, имеющим общую грань с текущей.

Функция, учитывающая влияние градиента давления, имеет вид

$$FPG = \begin{cases} \min \left[\max(1 - CFPG \max(\lambda_{\theta l}, 0), 0.25), 4.0 \right], & \text{при } \lambda_{\theta l} \geq 0, \\ \min \left[\max(1 - CAPG \min(\lambda_{\theta l}, 0), 0.25), 4.0 \right], & \text{при } \lambda_{\theta l} < 0, \end{cases} \quad (1.36)$$

с коэффициентами:

$$CFPG = CFPG_{High}(1 - F_{RV1}) + CFPG_{low}F_{RV1}, \quad (1.37)$$

$$CAPG = CAPG_{High}(1 - F_{RV1}) + CAPG_{low}F_{RV1}. \quad (1.38)$$

Для описания отрывного сценария перехода перемежаемость локально увеличивается до значений, больших единицы для ускорения перехода. Функции Φ_i служат индикаторами отрывного течения:

$$\gamma \rightarrow \gamma + \gamma_{Bubble}, \quad (1.39)$$

$$\gamma_{Bubble} = C_{BubbleC1} \cdot \gamma \cdot \Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdot \Phi_3, \quad (1.40)$$

$$\Phi_1 = \frac{\max\left(\mu - \frac{1}{2}\mu_t, 0.0\right)}{0.2\mu + \mu_t}, \quad (1.41)$$

$$\Phi_2 = \min\left[\left(\frac{Re_{V22-H}}{300}\right)^2, 1.0\right], \quad (1.42)$$

$$\Phi_3 = \min\left[\max(Rat_{Re} - C_{bubbleC2}, 0.0), 5.0\right], \quad (1.43)$$

$$Re_{V22-H} = \frac{\min(Re_{V22}, 1000) \min(S, \Omega)}{\max(S, \Omega, 0.1\omega)}. \quad (1.44)$$

Константы модели имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} CTu_{High} &= 1.06, CTu_{Low} = 2.25, CFPG_{High} = 0.6, CFPG_{Low} = 1.0, \\ CAPG_{High} &= -0.5, CAPG_{Low} = -0.5, ReC_{C1} = 210, ReC_{C2} = 1.0, \\ ReC_{Max} &= 1000, RV1_{switch} = 1000, C_{bubbleC1} = 0.5, C_{bubbleC2} = 2.5. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Переменяемость (1.27) используется в качестве множителя для генерации в уравнении для кинетической энергии k модели SST. Также вводится модификация генерационного члена в уравнении для скорости диссипации для избегания деления на 0:

$$\frac{\alpha\rho}{\mu_t} P_k \rightarrow \frac{\alpha\rho}{\mu_t + 0.001\mu} P_k. \quad (1.46)$$

Итоговые уравнения модели SST alg- γ принимают вид

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k k)}{\partial x_k} = \gamma P_k - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right], \\ \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\rho u_k \omega)}{\partial x_k} = \frac{\alpha\rho}{\mu_t + 0.001\mu} P_k - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}. \end{cases} \quad (1.47)$$

Здесь

$$P_k = \min\left(-\overline{u'_i u'_j} \partial U_i / \partial x_j, 10 \cdot \rho \beta^* k \omega\right), \text{ где } \overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2\nu_t S_{ij}. \quad (1.48)$$

Функция F_1 модифицирована аналогично моделям SST γ [52] и SST γ -Re Θ [12]:

$$F_1 = \max(F_{1orig}, F_3), F_3 = e^{-\left(\frac{R_y}{120}\right)^8}, R_y = \frac{\rho d_w \sqrt{k}}{\mu}, \quad (1.49)$$

$$F_{1orig} = \tanh(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{C_\mu \omega d_w}, \frac{500\nu}{\omega d_w^2} \right), \frac{2k\omega}{d_w^2 (\nabla k) \cdot (\nabla \omega)} \right], \quad (1.50)$$

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2), \quad \arg_2 = \max \left(2\sqrt{k}/(0.09\omega d_w), 500\nu/(d_w^2\omega) \right). \quad (1.51)$$

Константы модели SST:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= F_1\sigma_{k1} + (1-F_1)\sigma_{k2}, \quad \sigma_{k1} = 0.85, \quad \sigma_{k2} = 1.0, \\ \sigma_\omega &= F_1\sigma_{\omega1} + (1-F_1)\sigma_{\omega2}, \quad \sigma_{\omega1} = 0.5, \quad \sigma_{\omega2} = 0.856, \\ \beta &= F_1\beta_1 + (1-F_1)\beta_2, \quad \beta_1 = 0.075, \quad \beta_2 = 0.0828, \\ \beta^* &= 0.09, \quad \alpha = \beta/\beta^* - \sigma_\omega \kappa^2 / \sqrt{\beta^*}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Модель обладает большим количеством констант и ограничителей, основная идея которых – быть гибкими и прозрачными, чтобы пользователь мог изменять их значения для разных задач.

Еще одна модель, предложенная в [68], предназначена для описания пузырькового перехода. Разработка и калибровка модели полностью основана на серии DNS расчётов пузырькового перехода Laurent et al. [69], в которых подробно изучены закономерности увеличения генерации кинетической энергии турбулентности в области пузырька. Модель применимая к любой k- ω модели турбулентности и получила название Laminar Separation Transition Triggering (LSTT). В статье [70] авторами модель была протестирована и расширена для использования совместно с моделью турбулентности SA. Модель LSTT демонстрирует очень хорошие результаты на тестовых задачах, однако она не является локальной и неприменима в кодах общего назначения, поскольку требует расчётов толщин пограничного слоя, а также дополнительных нелокальных величин, как, например, путь вдоль поверхности стенки.

Наконец, модель SA BCM [71], [72], построенная на базе модели Спаларта-Аллмареса SA [26]. использует экспериментальные корреляции для определения положения и длительности перехода. Эта модель, построенная для решения задач внешней аэродинамики, проста в имплементации и демонстрирует хорошие результаты при расчётах пограничных слоёв и крыловых профилей.

Таким образом, лишь две алгебраические модели перехода можно признать подходящими для применения в рамках гибридного метода DDES SST, а именно модели SST KD [62] и SST alg- γ [57].

1.2. УЧЁТ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА В ГИБРИДНЫХ ВИХРЕРАЗРЕШАЮЩИХ ПОДХОДАХ

Использование моделей ламинарно-турбулентного перехода в рамках гибридных вихреразрешающих подходов – сравнительно новое направление исследований, на данный момент представленное в небольшом количестве работ. Большая часть попыток связана с развитием вихреразрешающих подходов, базирующихся на моделях турбулентности с двумя уравнениями для k и ω .

Заметную часть из них составляют гибридные подходы, основанные на дифференциальной модели перехода k - k_L - ω [35]. Так, Alam, Walters [73] взяли за основу гибридный метод DHRL (dynamic Hybrid RANS-LES), использующий альтернативный, независимый от сетки, механизм перехода от RANS к LES и использовали его совместно с моделью k - k_L - ω . Полученный подход был протестирован на обтекании крылового профиля РАК-В при различных значениях интенсивности турбулентности набегающего потока. В проведенных расчётах использование модели перехода не всегда приводит к повышению точности. Совместное использование DDES и k - k_L - ω было предложено в двух диссертациях Beehook 2015 [74] и Steenbeek 2017 [75]. В первой из них тестирование предложенного подхода проведено только на двумерном обтекании кругового цилиндра. Вторая работа является весьма подробной и фундаментальной, с подробным описанием методик и большим количеством результатов. Предложенный подход демонстрирует хорошие результаты, однако является крайне сложным, а лежащая в его основе модель турбулентности претерпела много изменений, в том числе в полностью турбулентной области.

Другая группа подходов базируется на модели SST γ - Re_θ [12]. Sørensen и др. [76] предложили метод DDES с учётом перехода на основе модели SST γ - Re_θ . В частности, авторами были протестированы различные эмпирические корреляции и был выбран наиболее оптимальный вариант. Предложенный гибридный подход был протестирован на двух течениях – обтекании круглого цилиндра в широком диапазоне чисел Рейнольдса и обтекании толстого крылового профиля при высоких углах атаки. В целом, было продемонстрировано преимущество предложенного подхода над методом SST DDES, однако была выявлена сильная зависимость результатов от входных граничных условий для характеристик турбулентности. Hodara и Smith (2015) [77] предложили гибридный подход, основанный на двух разных моделях турбулентности: SST γ - Re_θ в RANS части течения и LDKM (Local dynamic kinetic model) [78] в LES области. Использование такой комбинации подходов привело к улучшению точности расчётов тестовых течений, однако, ожидаемо, к значительному увеличению вычислительных затрат относительно базового вихреразрешающего подхода. В статье Hart [79] сравниваются

различные методы расчётов турбулентных течений на примере обтекания шарика для гольфа. В качестве одного из методов использовалась комбинация SAS (Scale Adaptive Simulation) [80] и SST γ -Re $_{\theta}$, однако этот подход с использованием модели перехода не продемонстрировал преимущество относительно других подходов.

В 2019 году Coder, Ortiz-Melendez [81] использовали метод SA DDES совместно с модифицированной версией дифференциальной модели перехода Coder [56], в рамках которой происходит решение двух дополнительных дифференциальных уравнений, первое для параметра \tilde{n} , отражающего степенной рост возмущений в ламинарном пограничном слое и служащий активатором для источникового члена во втором дополнительном уравнении для перемежаемости γ . Модель рассчитана на описание только естественного сценария ламинарно-турбулентного перехода и не приводит к однозначному повышению точности расчётов.

Наконец, единственная известная из литературы попытка использования алгебраической модели перехода в рамках вихререзающих подходов была предпринята Wang, Ge и Deng 2019 [82]. Авторы использовали алгебраическую модель перехода SA BC в качестве подсеточной модели вихререзающего метода WALE. Авторы указывают на недостатки использования дифференциальных моделей совместно с гибридными методами и отмечают большой потенциал применения алгебраических моделей для упрощения формулировок и сокращения вычислительных затрат, однако выбрали за основу модель с одним уравнением SA BC, уступающую по точности многим другим моделям перехода.

Исходя из проведённого обзора и личного опыта, наиболее перспективным гибридным подходом, позволяющим учесть ламинарно-турбулентный переход в присоединенных пограничных слоях, представляется метод DDES на базе модели SST и алгебраической модели перехода. На момент выполнения данной работы публикации, описывающие подобный подход, отсутствовали.

В качестве основы для разработки алгебраической модели перехода, применимой совместно с вихререзающим подходом SST DDES, была выбрана модель k - ω KD [60]. Поскольку модель KD разработана на базе модели Wilcox k - ω , был предложен ряд ее модификаций, обеспечивающих высокую точность расчета совместно с моделью SST (см. Главу 2 настоящей диссертации).

Как уже было отмечено, недавно появилась новая алгебраическая модель перехода SST alg- γ , построенная на совершенно иных принципах, нежели модель KD. Эта модель была также использована в настоящей работе для повышения точности метода SST DDES.

ГЛАВА 2. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ SST KD

Модель описания положения ламинарно-турбулентного перехода KD, как уже упоминалось в разделе 1.1.2., была разработана для применения совместно с полуэмпирической моделью турбулентности k- ω Wilcox [59]. Это касается как формулировки соответствующих соотношений модели, так и калибровки ее эмпирических констант. Расчеты различных течений с переходом показали, что точность модели, полученной путем использования выражений модели k- ω KD (1.9-1.26) совместно с уравнениями переноса турбулентных характеристик модели SST [9], является весьма невысокой и существенно уступает точности оригинальной модели KD. На рисунке 2.1 приведено 2 примера, демонстрирующих низкую точность этой модели¹.

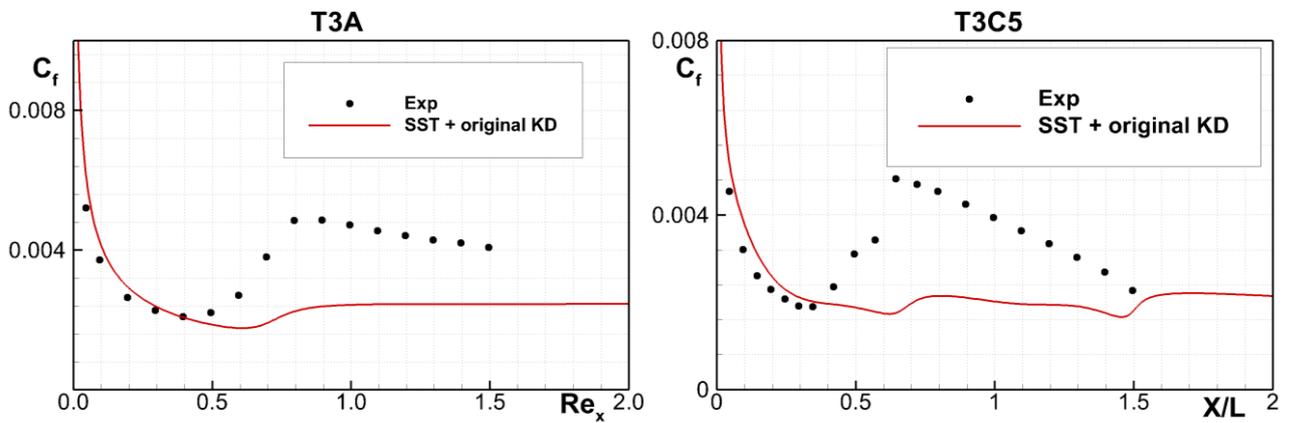


Рис. 2.1. Примеры использования оригинальной модели k- ω KD при её непосредственном использовании совместно с моделью SST. Изображены распределения коэффициента трения вдоль пластины для двух задач расчёта переходного пограничного слоя – режимы T3A и T3C5

Очевидно, что подобная точность расчета положения ламинарно-турбулентного перехода неприемлема, в связи с чем модель перехода KD доработана для совместного использования с моделью SST, а ее константы были оптимизированы с использованием специально разработанной для этого процедуры. Предложенные изменения модели KD представлены в разделе 2.1, а методика калибровки констант – в разделе 2.2 настоящей главы.

2.1. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ SST KD

Разработанная в работе модель SST KD базируется на модифицированных уравнениях переноса турбулентных характеристик модели SST [9]:

¹ Постановки соответствующих задач приведены ниже в разделах 2.2.1 и 3.1.1, а также метод решения уравнений движения и переноса турбулентных характеристик описан в разделе 2.2.2.

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k k)}{\partial x_k} = \gamma P_k + (1-\gamma)P_{sep} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right], \\ \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\rho u_k \omega)}{\partial x_k} = P_k - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] + 2(1-F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{C_\mu \omega d_w}, \frac{500\nu}{\omega d_w^2} \right), \frac{2k\omega}{d_w^2 (\nabla k) \cdot (\nabla \omega)} \right] \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1) имеют следующие отличия от уравнений оригинальной модели SST:

- Генерация кинетической энергии турбулентности P_k рассчитывается при помощи мелкомасштабных вязкости и кинетической энергии:

$$P_k = \min \left(-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, 10 \cdot \rho \beta^* k \omega \right), \quad (2.3)$$

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} k_s \delta_{ij} - 2\nu_s S_{ij}. \quad (2.4)$$

- Генерационное слагаемое в уравнении для k умножается на перемежаемость γ :

$$P_k \rightarrow \gamma P_k. \quad (2.5)$$

- В уравнение для k добавляется дополнительное слагаемое $(1-\gamma)P_{sep}$, где P_{sep} рассчитывается по формуле (1.16).

Для описания ламинарно-турбулентного перехода использовались уравнения модели KD (1.9-1.26) с рядом перечисленных ниже модификаций.

Первое изменение связано с использованием ограничителя SST в формулах расчёта мелкомасштабной и крупномасштабной вязкостей (1.11, 1.12). Вместо них в модели SST KD предлагается использовать следующие выражения:

$$\nu_s = \frac{a_1 k_s}{\tilde{\omega}}, \quad \text{где } \tilde{\omega} = \max[a_1 \omega, F_2 S]; \quad (2.6)$$

$$\nu_l = \frac{a_2 k_l}{\tilde{\omega}}, \quad \text{где } \tilde{\omega} = \max[a_2 \omega, F_2 S]. \quad (2.7)$$

Здесь F_2 – функция модели SST (1.51). Поскольку в полностью турбулентном режиме модель перехода не должна вносить изменений в модель турбулентности, константа a_1 была взята из модели SST ($a_1 = 0.31$), а константа a_2 сохранила значение 0.45, соответствующее модели KD.

Второе, наиболее важное с практической точки зрения изменение, коснулось функции, определяющей защиту сдвигом (Shear Sheltering) f_{ss} (1.18). При проведении предварительных расчётов совместно с SST стала ясна необходимость использования более ранней формулировки (1.20), поскольку использование выражения (1.18) приводило к существенному ухудшению сходимости итераций. Кроме того, во время тестирования различных видов функции f_{ss} , возведение подэкспоненциального выражения в степень 4 дало лучшие результаты по интенсивности перехода и росту перемежаемости в направлении по нормали к стенке. Предложенная для модели SST KD функция имеет следующий вид

$$f_{ss} = \exp\left(-\left(\frac{C_{SS}v\Omega}{k}\right)^4\right). \quad (2.8)$$

Третье и последнее изменение состоит в изменении формулы для перемежаемости. Серия предварительных расчетов показала, что наиболее эффективным является использование следующего выражения для коэффициента перемежаемости γ :

$$\gamma = \min\left(\max\left(\frac{k}{vA_\gamma\Omega} - 1.0, 0.0\right), 1.0\right). \quad (2.9)$$

Остальные функции, используемые в модели KD, оставлены без изменений. Полная формулировка модели приведена в приложении А.

Предлагаемая модель содержит 9 эмпирических констант, а именно A_γ , C_S , C_A , C_ψ , C_W , C_{sep} , A_V , a_1 , a_2 . Константы C_{sep} и A_V входят в неизменённую функцию P_{sep} (1.16), (1.17) и не требуют перекалибровки. Как уже упоминалось, значение константы a_1 было изменено на 0.31 для соответствия модели SST в полностью турбулентном режиме. Оставшиеся 6 констант требуют калибровки. Предварительные расчёты показали, что значение константы a_2 не оказывало значительного влияния на положение перехода. Значения оставшихся 5 констант, а именно A_γ , C_S , C_A , C_ψ и C_W были заново откалиброваны.

Константа A_γ используется в формуле (2.9) и устанавливает граничное значение комплекса $\frac{k}{v\Omega}$ после которого начинается рост перемежаемости. Также эта константа отвечает за скорость роста перемежаемости в продольном и поперечном (в направлении от стенки) направлениях. В связи с изменением комплекса, для которого она является множителем $\left(\frac{k}{v\Omega}\right)$, константа требует нового значения. Константа C_S выступает в роли множителя функции C_{SS} (1.22) подстепенного выражения в формуле (2.8) и, по сути, регулирует интенсивность защиты сдвигом. Остальные

константы C_A , C_ψ и C_W контролируют влияние градиента давления на положение ламинарно-турбулентного перехода.

Для калибровки вышеописанных констант и оптимизации модели была разработана специальная процедура, детали реализации и результаты работы которой представлены в следующем разделе.

2.2. КАЛИБРОВКА КОНСТАНТ МОДЕЛИ SST KD

Поскольку для отрывных течений, для расчёта которых предназначается модель, характерно наличие продольного градиента давления, калибровка проводилась на основе серии экспериментов о переходных пограничных слоях на плоской пластине серии ТЗС [64] с градиентом давления. Рассмотрены режимы ТЗС2, ТЗС3, ТЗС4 и ТЗС5, построенные таким образом, что ламинарно-турбулентный переход происходит при различных уровнях положительного или отрицательного градиентов давления.

2.2.1. ПОСТАНОВКИ ИСПОЛЬЗОВАВШИХСЯ ПРИ КАЛИБРОВКЕ ЗАДАЧ

В таблице 3.1. приведено описание режимов серии ТЗС.

Таблица 2.1. Описание режимов серии ТЗС

Режим	Начало перехода	Входная скорость U_0 , м/с	Tu , %	μ_τ/μ
ТЗС2	Сразу после минимума давления	5.29	3	8
ТЗС3	Положительный градиент давления	4	3	5
ТЗС4	Оторвавшийся пограничный слой	1.37	3	2
ТЗС5	Отрицательный градиент давления	9	3	15

Пример расчётной области для режима ТЗС3 приведён на рисунке 2.2. Длина расчётной области во всех случаях составляла $2L$, где L – масштаб длины. Верхние границы расчётных областей имеют профилированную форму, повторяющую линии тока из эксперимента, для повторения экспериментального распределения давления вдоль пластины. На профилированных (верхних) стенках расчётной области задавалось условия непроницаемости, а на нижних – условие прилипания. На входе в расчётную область задавались однородные профили скорости и характеристик турбулентности. Значения величин на входе приведены в таблице 2.1. Значения характеристик турбулентности подбирались таким образом, чтобы повторить экспериментальное распределения уровня турбулентности во внешнем потоке.

Значения кинетической энергии турбулентности и скорости диссипации рассчитывались по формулам $k = \frac{3}{2} \left(U_0 \cdot \frac{Tu}{100} \right)^2$, $\omega = \frac{k}{\nu_t}$. На выходной границе задавалось постоянное давление.

Все использовавшиеся сетки имели размер 257 x 129. Сетка сгущена ко входной границе и нижней стенке, при этом безразмерная величина первого пристенного шага y^+ не превышала значения 1, а коэффициент расширения – значения 1.1. Такие расчётные сетки обеспечивают сошедшееся решение для всех режимов.

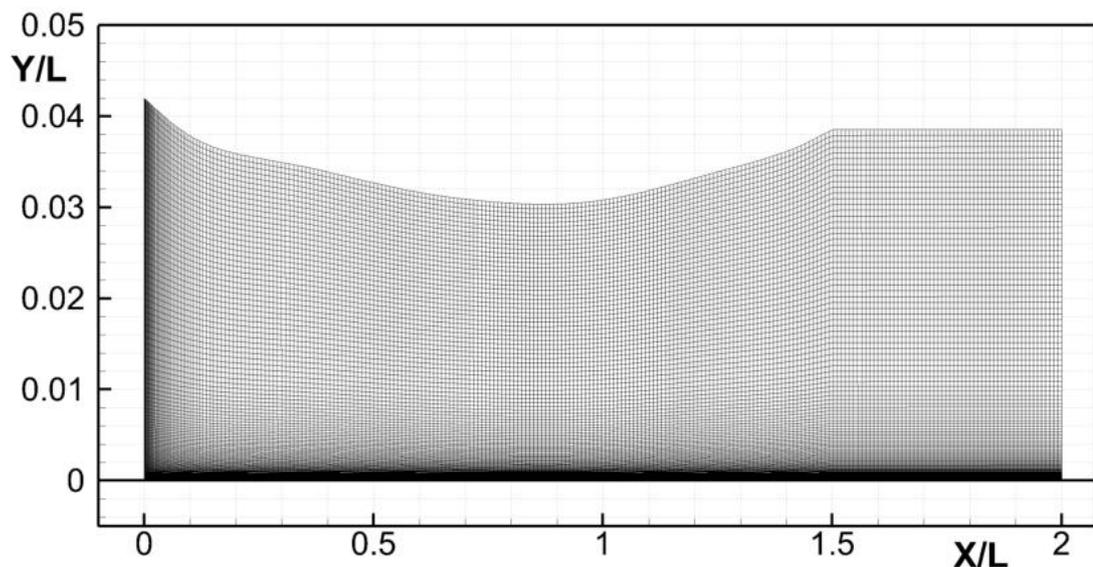


Рис. 2.2. Расчётная область и сетка для режима ТЗСЗ. Для наглядности масштаб по оси Y увеличен в 20 раз.

2.2.2. МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Все представленные ниже результаты были получены при помощи академического кода NTS [83]. Конечно-объёмный код NTS работает на многоблочных структурированных перекрывающихся сетках (технология *Chimera*), что позволяет применять схемы повышенного порядка аппроксимации и также предоставляет возможность проводить расчеты течений со сложной геометрией.

Калибровка и тестирование модели SST KD, представленные в Главах 2 и 3, осуществлялись путем решения стационарных уравнений Рейнольдса для несжимаемой жидкости. Эти уравнения решались методом установления с первым порядком точности расчёта производных по псевдовремени. При этом для ускорения сходимости итераций использовался локальный шаг интегрирования по псевдовремени Δt , определяемый в каждой точке расчётной области по формуле $\Delta t = CFL \cdot \Delta / U_0$, где CFL – число Куранта, а

$\Delta = \max[\min\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}, h_{\min}]$ – локальный минимальный шаг сетки, ограниченный снизу глобальным для всего течения параметром h_{\min} .

Для аппроксимации невязких составляющих векторов потоков в уравнениях Рейнольдса использовалась противопоточная схема третьего порядка точности, а в уравнениях для турбулентных переменных – второго или первого порядка. Вязкие составляющие векторов потоков во всех уравнениях аппроксимировались с использованием центрально-разностной схемы второго порядка.

Для расчётов использовался метод расщепления разностей векторов потоков Роджерса-Квака [84], основанный на комбинации схемы расщепления разностей векторов газодинамических потоков и метода введения искусственной сжимаемости Яненко-Чорина [85].

Для решения системы дискретных аналогов исходных газодинамических уравнений на каждой итерации использовалась релаксация Гаусса-Зейделя по плоскостям. Решение уравнений переноса турбулентных характеристик производилось при помощи модифицированного (с диагональным преобладанием) метода приближенной факторизации по пространственным направлениям.

Параллелизация расчётов проводилась на основе MPI/Open-MP концепции, позволяющей обеспечить эффективную работу программы на компьютерах как с распределенной, так и с общей или комбинированной оперативной памятью.

Следует отметить, что все использовавшиеся в работе модели перехода, а именно SST γ - Re_{θ} [12], k- ω KD [61] и SST alg- γ [57] были реализованы в коде автором. Верификация (проверка правильности реализации) модели SST γ - Re_{θ} проводилась путём сравнения с результатами коммерческих кодов ANSYS Fluent и ANSYS CFX, верификация модели SST alg- γ путём сравнения только с ANSYS Fluent, а верификация модели k- ω KD путём сравнения с результатами расчётов переходных пограничных слоёв, приведёнными в статье с формулировкой модели [60].

2.2.3. МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ КАЛИБРОВКИ

Критерий оптимизации констант

При оптимизации констант модели необходимо сформулировать критерий, минимизация которого обеспечит оптимальный набор констант. Было протестировано несколько вариантов такого критерия и наиболее удачным оказался следующий его вариант

$$F = \sum_{T3C2}^{T3C5} \left(x_{\frac{\partial C_f}{\partial x}}^{exp} - x_{\frac{\partial C_f}{\partial x}}^{calc} \right)^2, \quad (2.10)$$

представляющий собой сумму квадратов разностей положений максимума производной от коэффициента трения (середина перехода), полученного в экспериментах ($x_{\frac{\partial C_f}{\partial x}}^{exp}$) и расчётах ($x_{\frac{\partial C_f}{\partial x}}^{calc}$). Суммирование проводится по четырём рассмотренным режимам (ТЗС2, ТЗС3, ТЗС4, ТЗС5). Этот критерий отражает близость положения середины переходной области (место, в котором рост коэффициента трения максимальный) в расчёте и эксперименте. Поскольку доступных экспериментальных результатов недостаточно для взятия производной (для каждого режима доступно всего 16 точек), данные интерполировались с использованием кубических сплайнов.

Методика оптимизации

Калибровка констант проводилась итерационно, каждая итерация состояла из двух этапов.

На первом этапе для каждой константы выбирался некий диапазон, который разбивался на 4 промежутка с равномерным шагом (в итоге выбиралось 5 значений константы). На первой итерации эти диапазоны были выбраны на основании предварительных расчётов. В таблице 2.2. приведён список этих значений. Далее, в автоматическом режиме производился расчёт всех режимов со всеми возможными комбинациями констант ($4 \cdot (5^5) = 12500$ расчётов). Расчёты производились на лабораторном вычислительном кластере, имеющем 12 12-ядерных расчётных узлов. Для автоматического создания на жёстком диске кластера файловой системы, содержащей расчёты, контролирования очереди задач и мониторинга прогресса была написана программа на языке Python.

Таблица 2.2. Начальные значения констант при калибровке

	A_γ	C_S	C_A	C_ψ	C_w
1	0.5	1.0	0.5	5.0	5.0
2	1.0	2.0	1.0	6.0	6.0
3	1.5	3.0	1.5	7.0	7.0
4	2.0	4.0	2.0	8.0	8.0
5	2.5	5.0	3.0	9.0	9.0

На втором этапе производился выбор наиболее удачного набора констант на основе сравнения с экспериментальными данными [64]. Определение такого набора происходило путём минимизации критерия (2.10). В таблице 2.2. значения, обеспечивающие минимум функции выделены жирным шрифтом.

Полученные значения затем служили опорной точкой для выбора нового диапазона значений для проведения следующей итерации калибровки.

- Если одна из констант принимала граничное значение в своём диапазоне (как, например, C_ψ или C_w в таблице 2.2. для первого цикла расчётов), то на следующей итерации это значение сдвигалось в центр диапазона с сохранением шага интервала (в таблице 2.3. представлены диапазоны для второй итерации калибровки).
- Если же значение было не граничным (A_γ , C_S и C_A в случае таблицы 2.2.) – то шаг диапазона уменьшался, а полученное значение также помещалось в его центр.

Таблица 2.3. Значения констант на втором цикле калибровки

	A_γ	C_S	C_A	C_ψ	C_w
1	1.3	1.8	0.8	7.0	3.0
2	1.2	1.9	0.9	8.5	4.5
3	1.5	2.0	1.0	9.0	5.0
4	1.6	2.1	1.1	9.5	5.5
5	1.7	2.2	1.2	10.0	6.0

Итерационный процесс повторялся, пока значения констант не перестали меняться в первом знаке после запятой. Для оптимизации констант по такой методике понадобилось 4 итерации.

В итоге были получены следующие обновлённые значения констант:

$$A_\gamma = 1.3, C_S = 2.0, C_A = 1.0, C_\psi = 10.0, C_w = 5.0. \quad (2.11)$$

Результаты расчетов при оптимизированных константах модели

Рисунок 2.3. иллюстрирует результаты расчетов рассмотренных течений с использованием модели SST KD с оптимизированным набором констант. Полученные распределения коэффициента трения вдоль пластины сравниваются с экспериментальными данными [64] и результатами расчетов, полученными с использованием дифференциальной модели SST γ - Re_θ [12] и алгебраической модели SST alg- γ [57]. Полученные результаты также сравниваются с результатами оригинальной модели k- ω KD [61], на которой основана предлагаемая модель.

С использованием оптимизированных констант удалось достичь близости экспериментальных и расчётных положений середины перехода для режимов ТЗС3-ТЗС5, однако в режиме ТЗС3 ошибочно предсказывается отрывной сценарий перехода, что

наблюдается и для алгебраической модели SST alg- γ . Наименее точный результат получился для режима ТЗС2, в котором модель SST KD предсказывает переход лишь после отрыва ламинарного пограничного слоя.

В целом в рассматриваемых задачах предложенная модель не уступает по точности дифференциальной модели SST γ - Re_θ и алгебраической модели SST alg- γ . Так, новая модель SST KD уступает по точности описания положения перехода алгебраической модели SST alg- γ только в режиме ТЗС2, превосходя её в 3 других задачах. Что касается дифференциальной модели SST γ - Re_θ , она значительно затягивает переход к турбулентности при режиме ТЗС5, в то время как алгебраические правильно предсказывают его положение.

Модель k- ω KD уступает предлагаемой модели во всех случаях, кроме ТЗС3, в котором предсказывает положение перехода несколько ближе к экспериментальному.

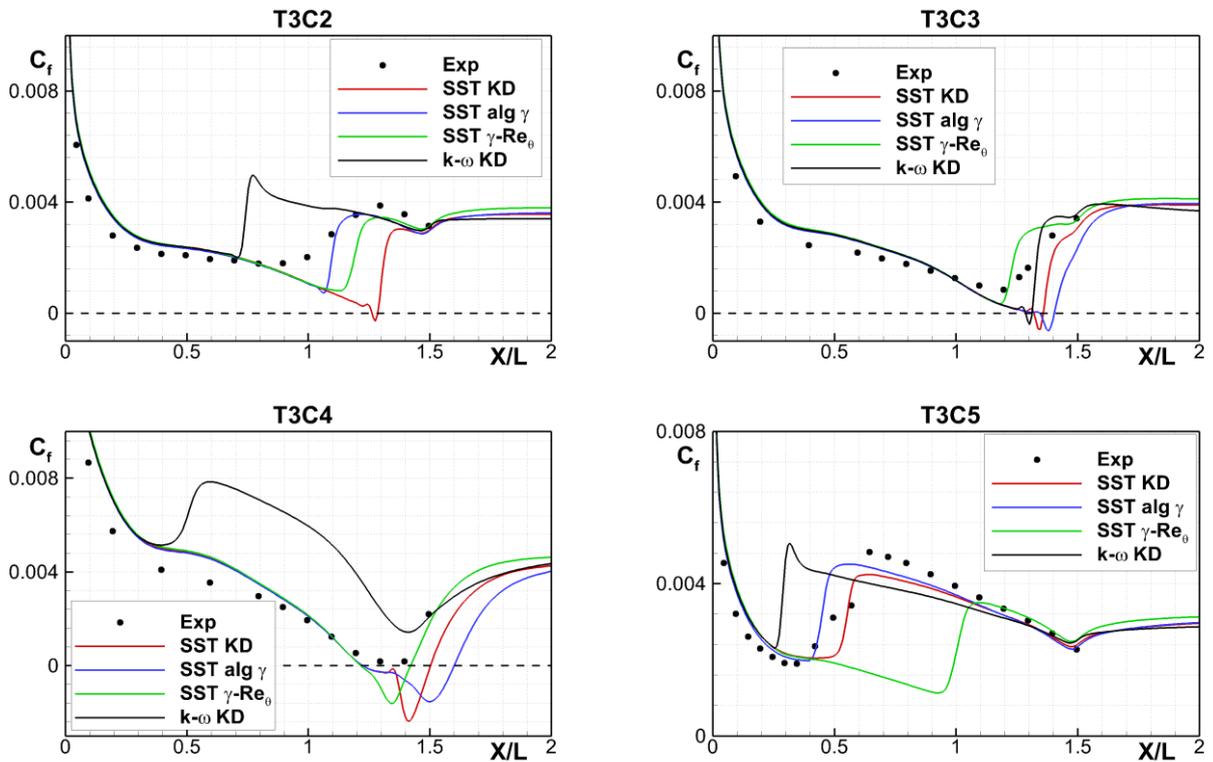


Рис. 2.3. Сравнение расчётных и экспериментальных распределений коэффициента трения вдоль переходного пограничного слоя для режимов с продольным градиентом давления

ГЛАВА 3. ТЕСТИРОВАНИЕ МОДЕЛИ SST KD

Предложенная в Главе 2 модель SST KD была протестирована на ряде течений, в которых существенную роль играет ламинарно-турбулентный переход. Оценка точности, обеспечиваемой предложенной моделью, проводилась путем сравнения с известными из литературы экспериментальными данными. Также проводилось сравнение с результатами расчетов, полученных с использованием модели SST γ - Re_{θ} [12], которая, как было показано в разделе 1.1, в настоящий момент является лучшей моделью перехода, с результатами модели алгебраических моделей k - ω KD [61] и SST alg- γ [57].

3.1. ПЕРЕХОДНЫЕ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ

Традиционно основу для тестирования моделей, предназначенных для предсказания ламинарно-турбулентного перехода, составляет серия задач, соответствующая экспериментам, проведенным в компании Роллс-Ройс в начале 90х годов прошлого века. Эти экспериментальные данные включены в базу данных ERCOFTAC и в литературе встречаются под названием «серия T3». К серии T3 относятся 3 режима без продольного градиента давления (T3A-, T3A и T3B) и серия режимов с градиентом давления [64], использованная при калибровке предлагаемой модели. Экспериментальные исследования проводились при различных уровнях турбулентности набегающего потока, что позволяет оценить способность моделей описать влияние этого параметра на переход.

Поскольку во всех режимах из серии T3 уровни турбулентности набегающего потока около 1% или выше, для оценки возможности модели описывать переход при низком уровне турбулентности также было рассмотрено добавлено течение, соответствующие классическому эксперименту Schubauer & Klebanoff [86] (SK), в котором исследовалось обтекание плоской пластины при низком уровне турбулентности набегающего потока.

3.1.1. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

В экспериментах серии T3 различные уровни турбулентности внешнего потока достигались при помощи различных турбулизующих решёток, расположенных вверх по течению от пластины. Различным решёткам соответствуют различные уровни турбулентности: 0.9% для T3A-, 3.3% для T3A и 6.5% для T3B. В двух рассмотренных случаях (T3A и T3B) интенсивность турбулентности была выше 1.0%, что соответствует байпасному механизму перехода. В третьем случае (T3A-) уровень турбулентности является пограничным, что затрудняет априорное определение типа перехода. Схема экспериментальной установки экспериментов серии T3 изображена на рисунке 3.1. Изотермический пограничный без

градиента давления развивался на заостренной спереди плоской пластине (test plate) длиной $L=1.7$ м. Уровень турбулентности во внешнем потоке изменялся с помощью турбулизирующей решетки (turbulence grid), расположенной непосредственно вниз по потоку от конфузора (contraction).

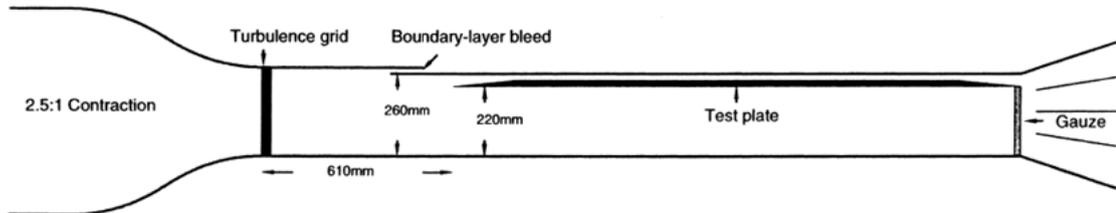


Рис. 3.1. Схема установки для Т3 серии экспериментов без градиента давления

Схема расчетной области представлена на рисунке 3.2. Высота расчётной области составляла $0.2L$, а длина – $2L$. Все сетки имели размер 257×129 . Сетки были сгущены к входной границе и нижней стенке, при этом безразмерная величина первого пристенного шага y^+ не превышала значения 1, а коэффициент расширения – величины 1.1. Такие расчётные сетки обеспечивают сошедшееся решение для всех режимов.

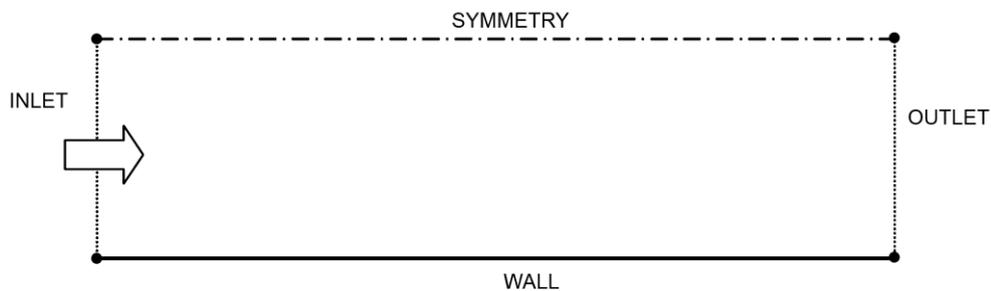


Рис. 3.2. Схема расчётной области для задач о переходном пограничном слое без градиента давления.

На входе в расчётную область задавались однородные профили скорости и характеристик турбулентности (их значения величин приведены в таблице 3.1). Характеристики турбулентности подбирались таким образом, чтобы повторить распределения уровня турбулентности во внешнем потоке, наблюдавшиеся в экспериментах. Значения кинетической энергии турбулентности и скорости диссипации рассчитывались по формулам $k = \frac{3}{2} \left(U_0 \cdot \frac{Tu}{100} \right)^2$,

$\omega = \frac{k}{v_t}$. На выходной границе задавалось постоянное давление.

Таблица 3.1. Описание расчётных режимов

Режим	Входная скорость U_0 , м/с	Tu , %	ν_i/ν
SK	50.1	0.03	1
T3A-	19.8	0.9	8
T3A	5.4	3.3	12
T3B	9.4	6.5	80

3.1.2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Сравнение распределений коэффициента трения вдоль пластины представлено на рисунке 3.3. Как и следовало ожидать, предложенная модель SST KD правильно предсказывает положение перехода при режимах с большими уровнями турбулентности набегающего потока (T3A и T3B).

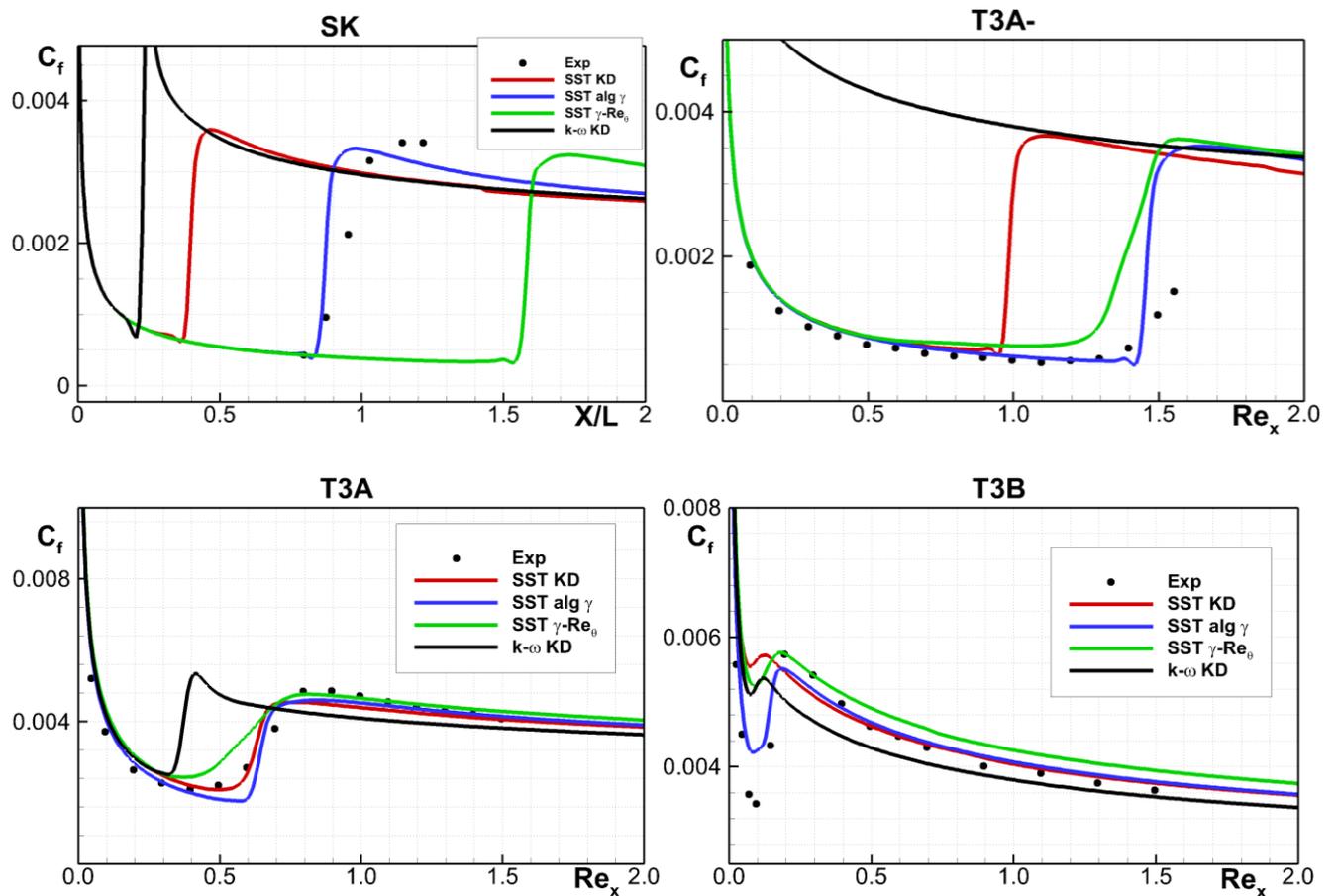


Рис. 3.3. Сравнение расчётных и экспериментальных распределений коэффициента трения вдоль переходного пограничного слоя для режимов без градиента давления

При расчете режимов SK и T3A-, характеризующихся низким уровнем интенсивности турбулентности, точность модели SST KD заметно снижается, модель предсказывает

преждевременную турбулизацию. Это неудивительно, поскольку модель SST KD создавалась на основе модели $k-\omega$ KD, предназначенной для предсказания положения байпасного перехода. Модель $k-\omega$ KD в свою очередь предсказывает правильное положение перехода только в случае режима ТЗВ с наивысшим уровнем турбулентности набегающего потока, а при режимах с низкими уровнями предсказывает переход практически на передней кромке пластины.

3.2. ОБТЕКАНИЕ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ NLF(1)-0414F

3.2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Измерения коэффициента подъемной силы C_L и коэффициента сопротивления C_D авиационного профиля NLF(1)-0414F (см. Рис. 3.4) были выполнены в работе [87]. В экспериментах секция крыла с этим профилем была установлена между боковыми стенками канала прямоугольного сечения с высотой $h = 2.5C$ (C – хорда профиля) и обтекалось под различными углами атаки при трех значениях числа Рейнольдса, построенного по скорости набегающего потока и хорде: $3.0 \cdot 10^6$, $6.0 \cdot 10^6$ и $1.0 \cdot 10^7$. В настоящей работе расчёты проводились для этих чисел Рейнольдса при углах атаки от -5° до 10° .

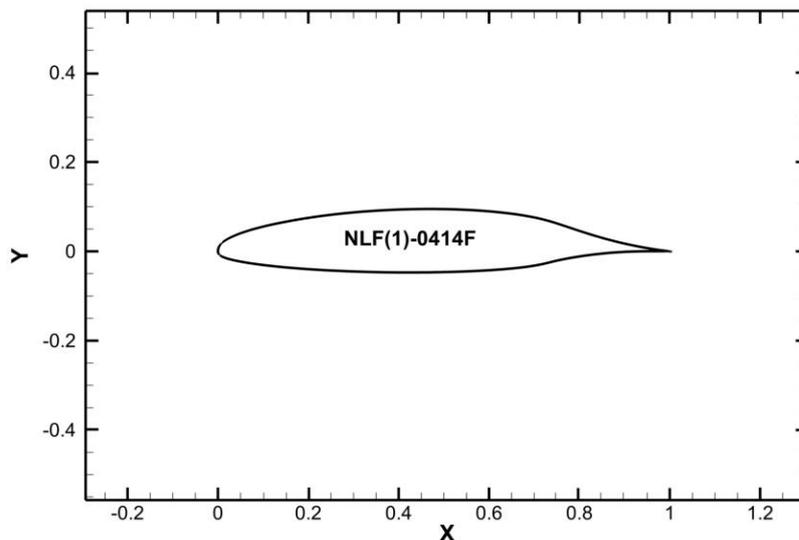


Рис. 3.4. Профиль NLF(1)-0414F

Характерной особенностью данного течения является явление, получившее в зарубежной литературе название “Laminar drag bucket”. Суть этого явления состоит в том, что при углах атаки, близких к нулю, на большей части профиля (около 70%) наблюдается ламинарное течение, что приводит к значительному снижению сопротивления по сравнению со случаем полностью турбулентного режима обтекания. В результате, на поляре профиля, то есть на графике, по оси абсцисс которого отложен коэффициент сопротивления, а по оси ординат –

коэффициент подъемной силы появляется так называемая «корзинка» (bucket) (см. Рис. 3.5.). Таким образом, основной целью расчетов данного течения с использованием моделей ламинарно-турбулентного перехода – выяснить, способны ли они описать это явление.

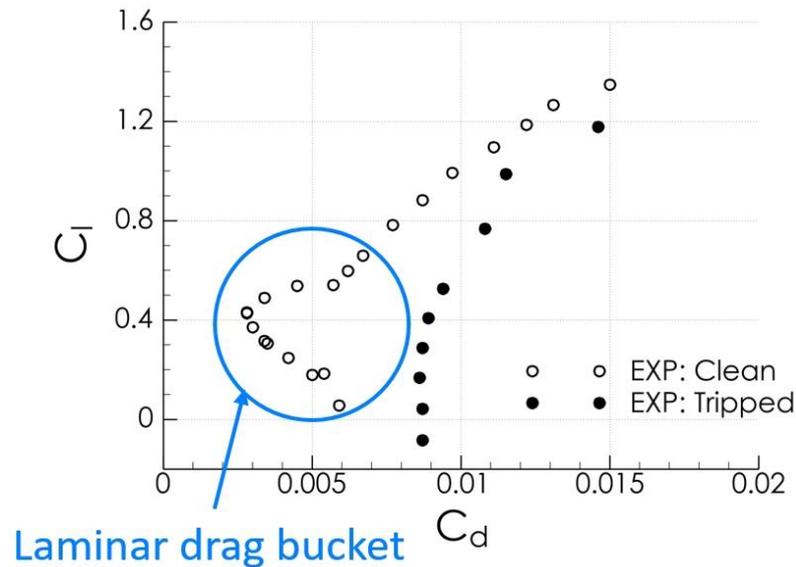


Рис. 3.5. Экспериментальная зависимость коэффициента подъемной силы C_l от коэффициента сопротивления C_d . Закрытые символы (Tripped) – пограничный слой, искусственно турбулизированный вблизи передней кромки профиля при помощи полоски шероховатости; открытые символы (Clean) – гладкий профиль

Расчётная область, используемая система координат и блочно-структурированная сетка, построенная для расчета обтекания расположенного в плоском канале под нулевым углом атаки профиля NLF(1)-0414F, изображены на рисунке 3.6.

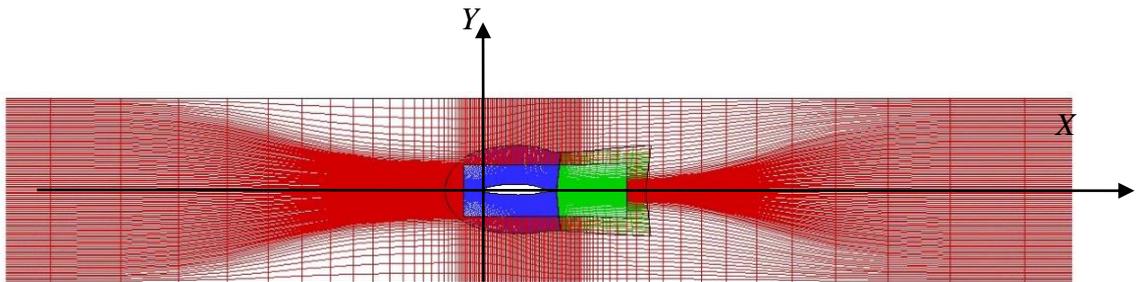


Рис. 3.6. Фрагмент блочно - структурированной сетки для расчёта обтекания профиля NLF(1)-0414F, расположенного в плоском канале, под углом атаки 0°

Высота канала задавалась равной высоте измерительной секции в эксперименте, то есть $2.5C$, а его длина составляла $20C$. Таким образом, в пределах расчетной области координата x изменяется от $-10C$ до $10C$, а координата y – от $-1.25C$ до $1.25C$ (начало координат соответствует положению передней кромки профиля).

Как видно из рисунка, сетка состоит из трёх структурированных блоков. Расчётные сетки для этой задачи являются очень подробными. Блок №1 (синие линии на рисунке) представляет

собой С-сетку, построенную вокруг профиля, и имеет размер 942x481. Блок №2 (зеленые линии) является продолжением блока №1 и имеет размер 140x961. Наконеч, внешний («канальный») блок №3 (красные линии) имеет вырез для блоков №1 и №2 (используется так называемая технология Chimera) и содержит около 8000 ячеек. Описанная топология сетки удобна для проведения расчетов обтекания профиля в канале под различными углами атаки, так как при изменении угла атаки требуются ее минимальные изменения (в качестве примера на Рис. 3.7 показана сетка для угла атаки 5°).

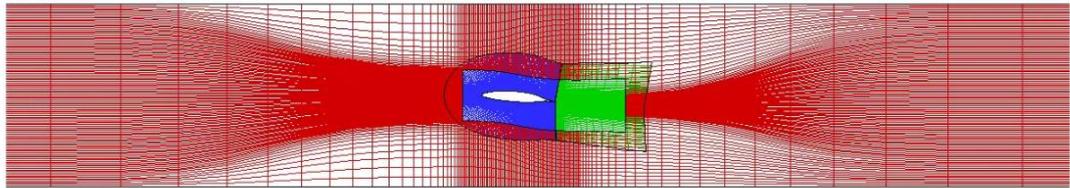


Рис. 3.7. То же, что на Рис. 3.6 при угле атаки 5°

На входе в расчётную область задавались постоянная скорость U_0 .

В связи с тем, что в модели SST кинетическая энергия турбулентности в однородном турбулентном потоке убывает (диссипирует), зачастую для того, чтобы турбулентные характеристики в окрестности обтекаемого тела соответствовали неким необходимым значениям, граничные условия для уравнений модели турбулентности необходимо скорректировать. Такие значения на входе в расчётную область могут быть получены из аналитического решения уравнений модели SST в однородном потоке по следующим формулам

$$k = c_2 (\beta x + c_1)^{\frac{c_\mu}{\beta}}, \quad (3.1)$$

$$\omega = \frac{1}{\beta x + c_1}, \quad (3.2)$$

где x – координата вдоль течения в свободном потоке, C_μ, β – константы модели SST, а c_1 и c_2 – константы интегрирования, получаемые из граничных значений. Зачастую, при достаточно больших продольных размерах расчётной области, уравнения не имеют аналитического решения. В таких случаях характеристики турбулентности “замораживались” до определённой точки вверх по потоку от тела, затем “отпускались” и диссипировали до необходимых значений. В экспериментальной работе [87] уровень турбулентности набегающего на передней кромке равен $Tu = 0.08\%$. Для обеспечения такого уровня характеристики турбулентности замораживались до сечения $X = -2C$ на своих входных значениях, приведённых в таблице 3.2.

Значения кинетической энергии турбулентности и скорости диссипации рассчитывались по

$$\text{формулам } k = \frac{3}{2} \left(U_0 \cdot \frac{Tu}{100} \right)^2, \quad \omega = \frac{k}{\nu_t}.$$

На выходной границе расчётной области задавалось постоянное давление. Наконец, на стенках профиля задавались условия прилипания, а на верхней и нижней стенках канала – условия свободного скольжения (вязкие эффекты на этих стенках не учитывались).

Граничные условия на стенке для удельной диссипации турбулентности задавались по формуле

$$\omega_w = \frac{60\nu}{\beta_1 (\Delta d_1)^2}, \quad (3.3)$$

где $\beta_1 = 0.075$ – константа модели SST, а Δd_1 – высота первого пристенного шага сетки.

Таблица 3.2. Входные граничные условия для разных режимов в задаче об обтекании профиля NLF(1)-0414F

Re	Tu , %	ν_t/ν
$3 \cdot 10^6$	0.118	1.058
$6 \cdot 10^6$	0.426	1.307
$1 \cdot 10^7$	0.189	2.295

3.2.2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

На Рисунке 3.8 показано сравнение с экспериментом расчетных поляр профиля при трех экспериментальных значениях числа Рейнольдса, полученных с использованием рассматриваемых моделей ламинарно-турбулентного перехода. Кроме того, на том же рисунке для сравнения показаны поляры, рассчитанные с использованием модели турбулентности без учета перехода (для полностью турбулентного режима течения). Поскольку основной целью расчетов рассматриваемого течения является выяснение способности описания в расчетах явления *Laminar drag bucket*, на рисунке представлены результаты только в диапазоне изменения угла атаки -2° до 5° , в котором это явление наблюдается в эксперименте. Кроме того, при использовании модели перехода SST γ - Re_θ не удалось получить сошедшее решение для некоторых углов атаки с массивным отрывом.

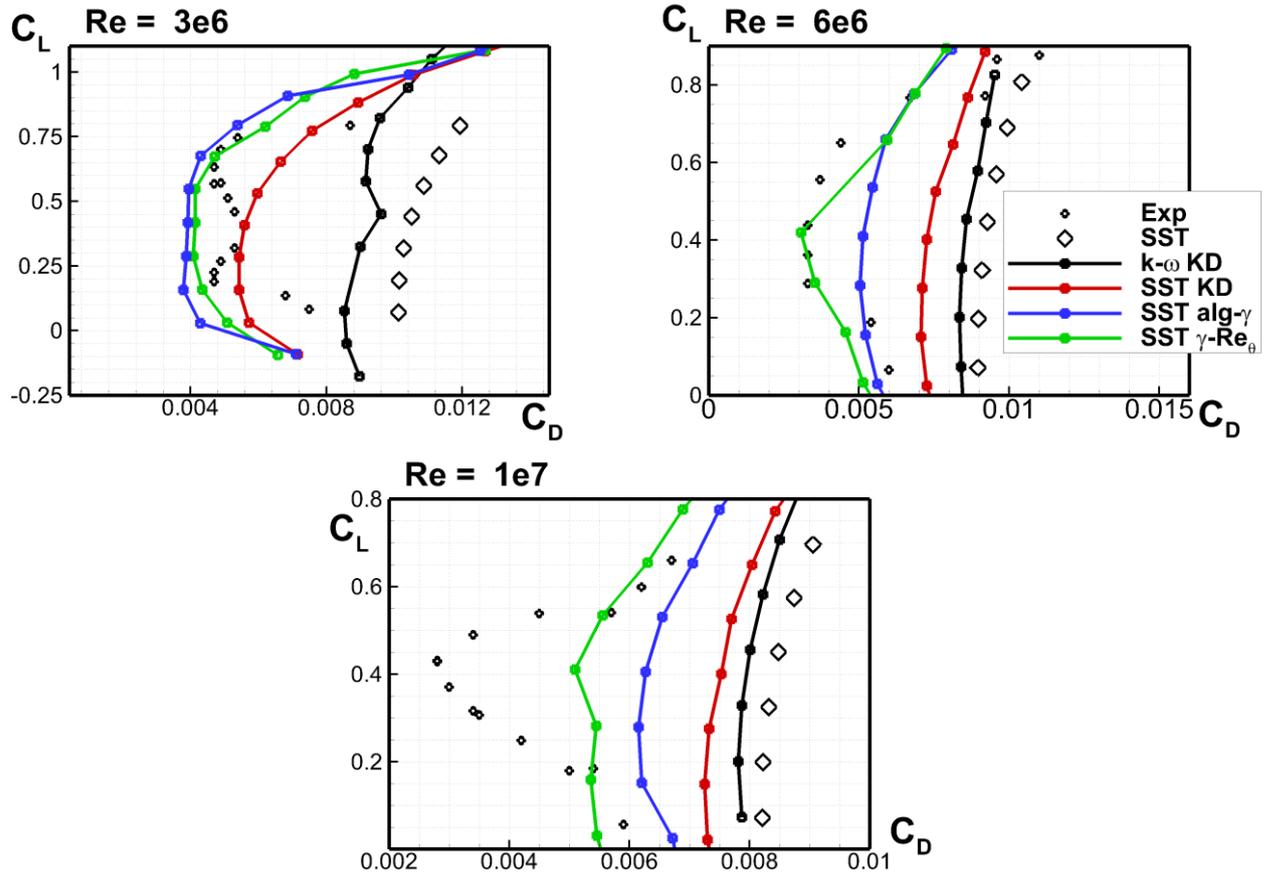


Рис. 3.8. Сравнение с экспериментом расчетных зависимостей C_L от C_D для профиля NLF(1)-0414F при различных числах Рейнольдса, полученных с использованием рассматриваемых моделей перехода и модели SST без учета перехода (полностью турбулентный режим течения)

Видно, что при наименьшем из рассмотренных значений числа Рейнольдса ($3 \cdot 10^6$) все модели, предсказывают наличие достаточно протяженного участка ламинарного пограничного слоя, однако ни одна из моделей не воспроизводит немонотонный характер поляры в окрестности минимума коэффициента сопротивления. Про этом сам минимум, предсказываемый моделью SST KD несколько выше минимума, предсказываемого другими моделями, что связано с предсказанием более раннего положения перехода, обеспечиваемого этой моделью по сравнению с другими моделями.

При повышении числа Рейнольдса до $6 \cdot 10^6$ ситуация изменяется. В этом случае только модель перехода SST γ - Re_θ описывает явление Laminar drag bucket, причем результаты, полученные с ее использованием очень близки к экспериментальным данным. Результаты алгебраических моделей находятся между результатами моделей SST γ - Re_θ и результатами, полученными в предположении о полностью турбулентном характере течения.

Наконец, при максимальном из рассмотренных чисел Рейнольдса (10^7) все модели предсказывают переход в районе передней кромки и, как следствие этого, не воспроизводят

наличие «глубокого» минимума коэффициента сопротивления в окрестности $C_L = 0.4$, наблюдаемого в эксперименте.

Модель $k-\omega$ KD предсказывает переход в районе передней кромки во всех рассмотренных режимах и вовсе не описывает явление Laminar Drag Bucket.

Таким образом, при расчете данного течения наилучшие результаты получаются при использовании модели перехода SST $\gamma-Re_\theta$, однако даже эта модель обеспечивает удовлетворительное описание Laminar drag bucket только при одном из экспериментальных значений числа Рейнольдса. Тем не менее, результаты, полученные с использованием моделей, учитывающих ламинарно-турбулентный переход, все же лучше согласуются с экспериментальными данными, чем результаты, полученные в предположении о полностью турбулентном режиме обтекания профиля (Модель SST).

3.3. ОБТЕКАНИЕ ТАНДЕМА КРЫЛОВЫХ ПРОФИЛЕЙ НАСА0012

3.3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Данное течение (см. схему на рис. 3.9) экспериментально исследовалось в работе [88], посвящённой изучению ламинарно-турбулентного перехода при обтекании тел, находящихся в аэродинамическом следе, создаваемом другим, находящимся вверх по потоку телом. В силу того, что числа Рейнольдса в эксперименте были относительно невелики, пограничный слой на первом профиле искусственно турбулизовался в точке $x/C = 0.58$ с помощью полоски шероховатости и турбулентный след за ним взаимодействовал со вторым профилем, находящимся на расстоянии G вниз по потоку от задней кромки первого.

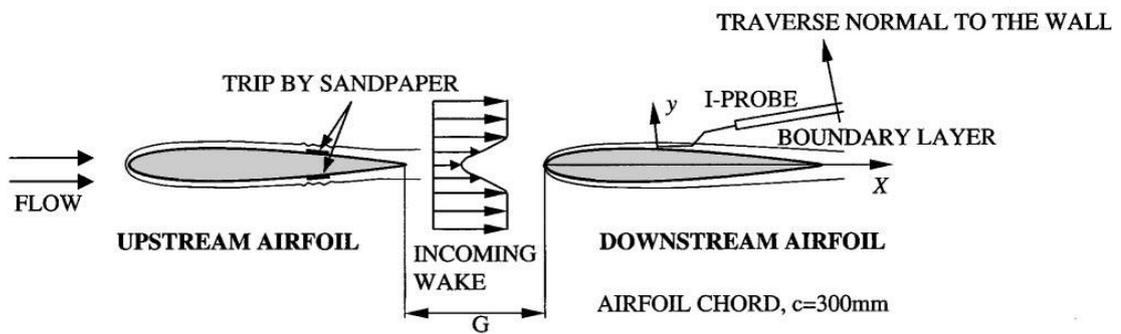


Рисунок 3.9. Схема экспериментального исследования обтекания тандема профилей

Было рассмотрено 6 различных конфигураций течения с идентификаторами Case 0-5, которые отличаются друг от друга числом Рейнольдса набегающего потока и расстоянием между профилями. Параметры различных конфигураций приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3. Экспериментальные режимы течений

Режим	Case 0	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
Относительное расстояние между профилями (G/C)	Один профиль с фиксированным переходом	1	1	1	0.5	0.25
Re	$6 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$

Расчётная область, система координат и сетка, построенная для конфигураций Case 1, Case 2 и Case 3, показаны на Рис 3.10. Протяженность области по оси X составляет $22C$ (от $x = -10C$ до $x = 12C$), а по оси Y – $2C$ (от $-C$ до C).

Блочнo-структурированная сетка, использовавшаяся в расчетах тандема, аналогична по структуре сетке, использовавшейся для расчета обтекания профиля NLF(1)-0414F, и состоит из пяти блоков. Блок №1 (синие линии на рисунке) представляет собой C сетку вокруг первого

профиля и имеет размер 440x100. Блок №2, расположенный в следе первого профиля (зеленые линии на рисунке), является продолжением сетки вокруг профиля и имеет размерность 63x199. Блоки №3 и №4 для второго профиля и его следа идентичны блокам №1 и №2. Наконец, сетка внешнего блока №5 имеет вырез для блоков 1, 2, 3 и 4 сгущается в области профилей. Она содержит около 42000 ячеек. Блоки 1, 2, 3 и 4 перекрываются с блоком 5 (используется так называемая технология Chimera). Сетка такой размерности полностью удовлетворяет критериям, сформированным в [89].

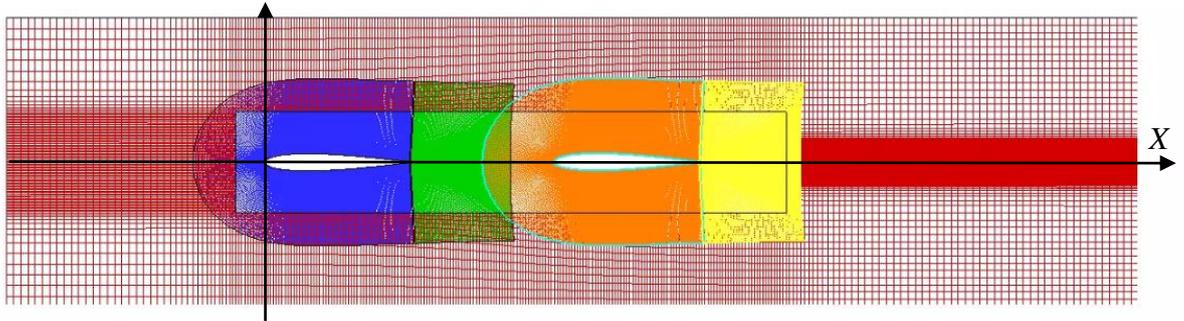


Рис. 3.10 Пятиблочная структурированная сетка для расчёта обтекания тандема профилей NACA0012 при длине зазора равной хорде профиля (Case 1, 2 и 3)

Для конфигурации Case 0 с одним профилем используется аналогичная сетка, содержащая 3 блока.

На входе в расчетную область ($x = -10C$) задавались однородные профили скорости и параметров турбулентности. Из экспериментов известна интенсивность турбулентности набегающего потока в области передней кромки первого профиля (она составляет 0.3%). Поэтому для моделей перехода на основе SST параметры турбулентности во входном сечении определялись с помощью стандартной процедуры, то есть путем расчета по аналитическим формулам (3.1), (3.2) на отрезке от $x = -2C$ до $x = 0$ и «замораживания» полученных значений вплоть до входной границы (при $x < -2C$). Определенные в результате значения турбулентной вязкости и интенсивности турбулентности на входной границе оказались равными $\nu_t/\nu = 2.25$ и $Tu = 0.5\%$. Значения кинетической энергии турбулентности и скорости диссипации рассчитывались по формулам $k = \frac{3}{2} \left(U_0 \cdot \frac{Tu}{100} \right)^2$, $\omega = \frac{k}{\nu_t}$. На выходной границе задавалось

постоянное давление. Пример поля кинетической энергии турбулентности в области передней кромки для варианта Case 1 из расчета с использованием модели перехода SST γ - Re_θ показан на Рис. 3.11. Из него видно, что при $x < -2C$ кинетическая энергия «заморожена», а и затем экспоненциально падает. На выходе из расчётной области задавалось постоянное. На стенках профилей тандема задавалось условие прилипания, а на верхней и нижней стенках канала использовались условия свободного скольжения (вязкие эффекты на этих стенках не

учитывались). Граничные условия на стенке для удельной диссипации задавались по формуле (3.3).

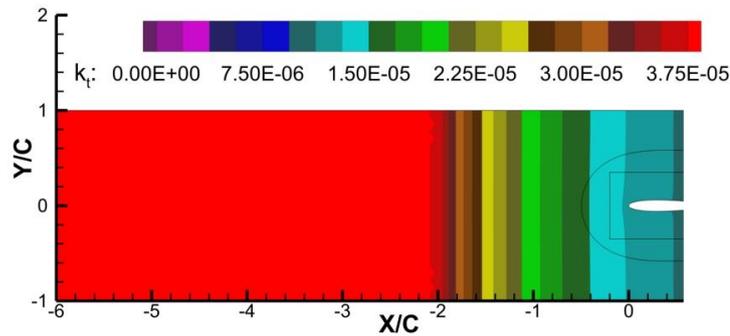


Рис. 3.11. Поле кинетической энергии турбулентности в районе передней кромки переднего профиля для варианта расчёта Case 1, рассчитанное с использованием модели SST γ - Re_0

Как уже было сказано, отличительной особенностью рассматриваемого течения является то, что ламинарно-турбулентный переход на первом профиле инициируется в экспериментах искусственно и начинается в предписанном месте, а именно в точке $x/C = 0.58$. Для того, чтобы имитировать это в расчётах с использованием моделей перехода, коэффициент перемежаемости при $0.58 < x/C < 1$ определялся не из уравнения переноса γ или соответствующих алгебраических формул, а принудительно полагался равным единице. Для модели SST alg- γ для достижения эффекта турбулизации в точке $x/C = 0.58$ коэффициент перемежаемости задавался равным единице при $0.44 < x/C < 1$. В качестве иллюстрации работы моделей в таком режиме на Рис. 3.12 представлены поля турбулентной вязкости и коэффициента перемежаемости γ , а на Рис. 3.13 – продольные распределения коэффициента трения для варианта Case 0. Видно, что в этому случае модель SST KD предсказывает существенно более быструю турбулизацию потока по сравнению с остальными моделями.

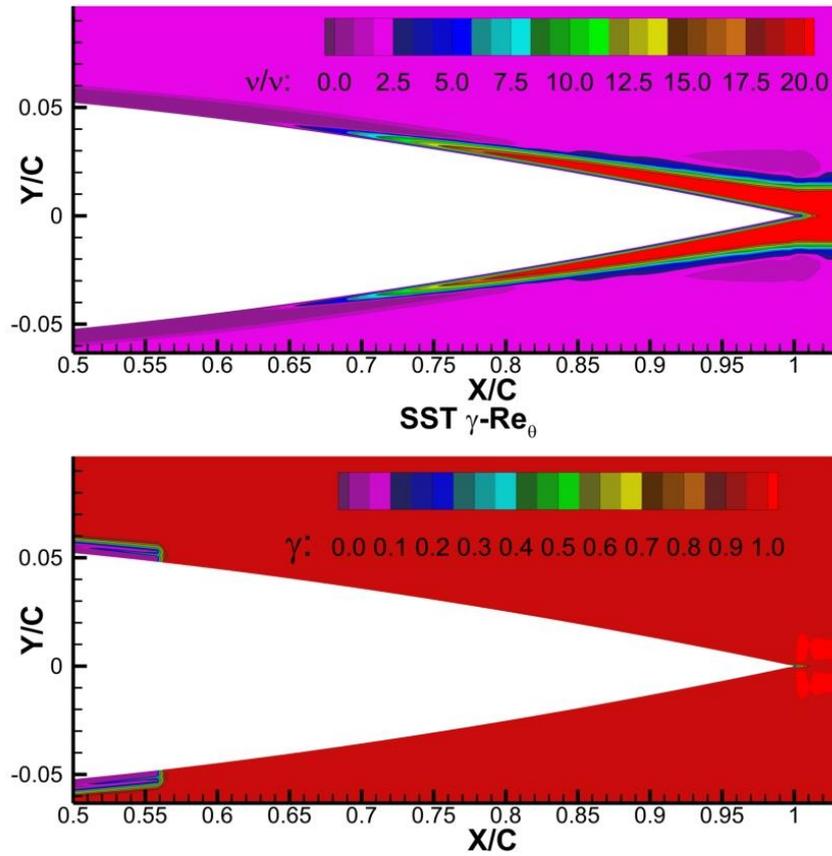


Рис. 3.12. Поля турбулентной вязкости и перемежаемости, полученные при использовании модели перехода SST γ - Re_θ на профиле с искусственным переходом (CASE 0)

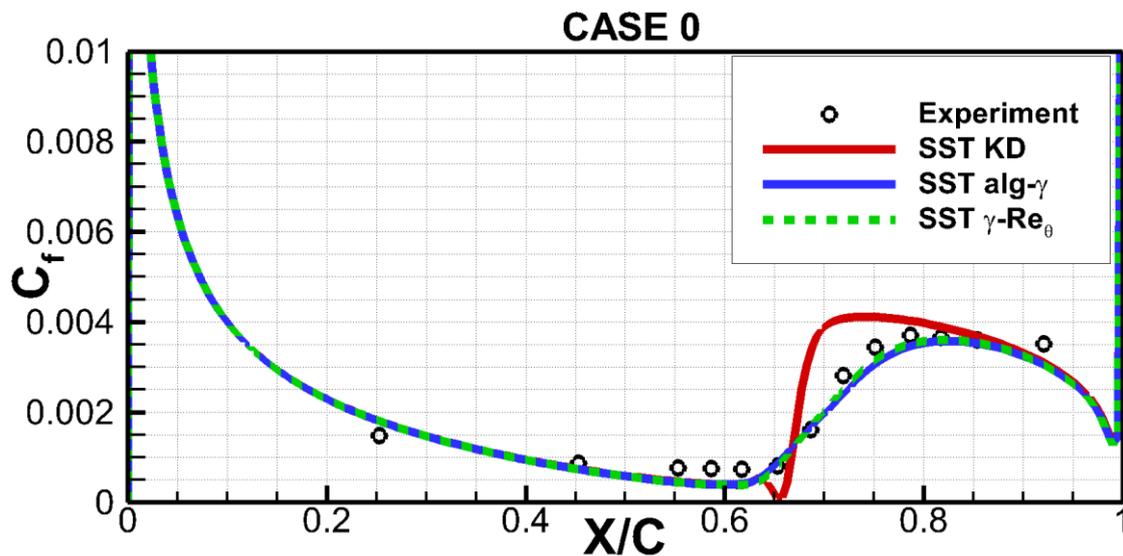


Рис. 3.13. Сравнение с экспериментом расчётных распределений коэффициента трения, полученных с использованием рассматриваемых моделей перехода на профиле с искусственным переходом (CASE 0)

3.3.2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Сравнение расчетных и экспериментальных распределений коэффициента трения вдоль второго профиля тандема представлено на рис. 3.14. Наблюдается аналогичная уже рассмотренным задачам ситуация. Модель SST KD во всех случаях демонстрирует преждевременный переход к турбулентности и несколько уступает двум другим моделям. При этом точность всех моделей оставляет желать лучшего. Так, для конфигураций Case 1 и Case 2 (широкий зазор, относительно высокие числа Рейнольдса) эти модели предсказывают слишком ранний или слишком резкий переход по сравнению с экспериментом, а для конфигураций 4 и 5 (узкий зазор, относительно низкие числа Рейнольдса) – заметно завышают терние в переходной области. Как и в случае предыдущих рассмотренных течений, модель k- ω KD предсказывает слишком ранний переход при всех режимах.

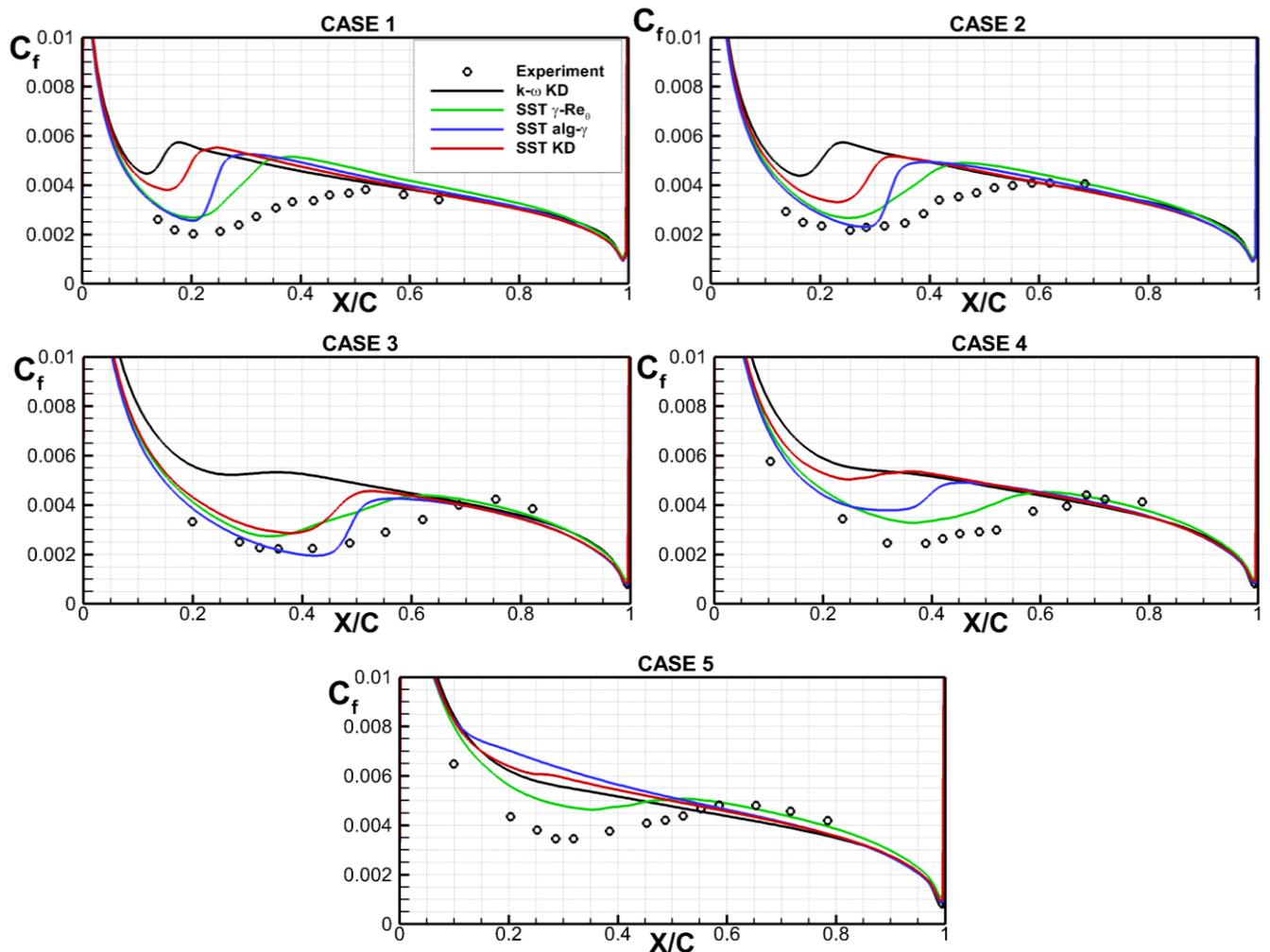


Рис. 3.14. Сравнение с экспериментом расчетных зависимостей C_L от C_D для профиля NLF(1)-0414F при различных числах Рейнольдса, полученных с использованием рассматриваемых моделей перехода и модели SST без учета перехода (полностью турбулентный режим течения)

3.4. ВЫВОДЫ

Из проведённого тестирования можно сформулировать следующие выводы.

Во всех рассмотренных задачах предложенная модель SST KD существенно превосходит по точности модель $k-\omega$ KD, на которой она основана.

Ни одна из моделей турбулентности, включая лучшую из существующих в настоящее время моделей SST γ - Re_{θ} , не способна предсказать с высокой точностью положение ламинарно-турбулентного перехода для всех рассмотренных течений.

В среднем, рассмотренные алгебраические модели несколько уступают по точности дифференциальной модели перехода SST γ - Re_{θ} . При этом, дифференциальная модель требует ощутимо больше вычислительных ресурсов для получения сошедшегося решения: одна итерация в среднем занимает на 15% больше времени, и достижение глубокой сходимости при использовании такой модели может требовать до 2-3 раз больше итераций, чем при использовании модели SST KD при равных вычислительных параметрах задачи.

ГЛАВА 4. МЕТОД DDES SST KD

4.1. ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА

Предложенная алгебраическая модель перехода SST KD вместе с методом DDES [8] послужили основой для создания нового метода DDES SST KD, предназначенного для расчета отрывных течений при наличии ламинарно-турбулентного перехода в присоединённом пограничном слое. В данном методе используется версия DDES с линейным подсеточным масштабом, адаптированным к слоям смешения [90] (DDES Δ_{SLA}). Данная модификация подсеточного масштаба направлена на ускорение перехода к развитой трёхмерной турбулентности на начальных участках слоёв смешения, и позволяет существенно повысить точность расчета отрывных течений без увеличения расчетной сетки и, как следствие, вычислительных затрат.

В предлагаемом методе уравнение модели SST для кинетической энергии турбулентности записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k k)}{\partial x_k} = \gamma P_k + (1-\gamma)P_{sep} - \frac{\beta^* \rho \omega k^{3/2}}{l_{DDES}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right], \quad (4.1)$$

а уравнение для диссипации ω сохраняет свою форму (2.1) без изменений.

Линейный масштаб турбулентности определяется из соотношения:

$$l_{DDES} = l_{RANS} - f_d \max\{0, (l_{RANS} - C_{DES} \Delta_{SLA}^{DDES})\}, \quad (4.2)$$

где $C_{DES} = F_1 C_{DES1} + (1-F_1) C_{DES2}$, $C_{DES1} = 0.78$, $C_{DES2} = 0.61$ – константа модели, а

$$l_{RANS} = k^{1/2} / \beta^* \omega, \quad (4.2)$$

линейный масштаб турбулентности модели SST, а

$$f_d = 1 - \tanh \left[(C_{d1} r_d)^{C_{d2}} \right], \quad r_d = (v_t + \nu) / \left(\kappa^2 d_w^2 \sqrt{0.5 \cdot (S^2 + \Omega^2)} \right), \quad (4.3)$$

эмпирическая функция метода DDES, обеспечивающая работу метода в режиме RANS во всём присоединённом пограничном слое. Здесь $C_{d1} = 20.0$, $C_{d2} = 3.0$.

Особенностью модификации Δ_{SLA} [90] является определение линейного подсеточного масштаба

$$\Delta_{SLA}^{DDES} :$$

$$\Delta_{SLA}^{DDES} = \tilde{\Delta}_\omega F_{KH}^{DDES} \left(\langle VTM \rangle \cdot \max \left\{ 1, \frac{0.2\nu}{\max \{ (\nu_i - \nu_{i,\infty}), 10^{-6} \nu_{i,\infty} \}} \right\} \right). \quad (4.4)$$

Безразмерная функция F_{KH}^{DDES} используется для уменьшения линейного масштаба и ускорения перехода к развитой турбулентности на начальных участках сдвиговых слоёв.

Ограничитель

$$F_{KH}^{DDES} = \begin{cases} 1.0 & \text{при } f_d < (1 - \varepsilon) \\ F_{KH} & \text{при } f_d \geq (1 - \varepsilon) \end{cases} \quad (4.5)$$

служит для деактивации функции в присоединённых пограничных слоях. Здесь $\varepsilon = 0.01$ – эмпирическая константа. Ограничиваемая функция имеет вид:

$$F_{KH}(\langle VTM \rangle) = \max \left\{ F_{KH}^{min}, \left[F_{KH}^{max}, F_{KH}^{min} + \frac{F_{KH}^{max} - F_{KH}^{min}}{a_2 - a_1} (\langle VTM \rangle - a_1) \right] \right\}. \quad (4.6)$$

Значения констант $F_{KH}^{min} = 0.1$, $F_{KH}^{max} = 1.0$, $a_1 = 0.15$, $a_2 = 0.3$.

Аргументом функции (4.6) является осреднённый по текущей и ближайшим ячейкам ($\langle \rangle$) параметр

$$VTM = \frac{\sqrt{6} |(S \cdot \Omega) \times \Omega|}{\Omega^2 \sqrt{3tr(S^2) - [tr(S)]^2}}, \quad (4.7)$$

изменяющийся от 0 до 1 и являющийся “детектором” двумерности течения. В областях, где двумерный и квазидвухмерный характер данный критерий принимает нулевые значения активируя понижение линейного подсеточного масштаба при помощи формул (4.5 и 4.6). В формуле (4.7) S и Ω – тензоры скоростей деформации и завихренности, а $tr()$ – операция взятия следа тензора.

Наконец, подсеточный масштаб, корректируемый при помощи функций (4.4) – (4.7) определяется формулой

$$\tilde{\Delta}_\omega = \frac{l}{\sqrt{3}} \max_{n,m=1,8} |(\mathbf{l}_n - \mathbf{l}_m)|, \quad (4.8)$$

где $\mathbf{l}_n = \mathbf{n}_\omega \times \mathbf{r}_n$, \mathbf{n}_ω – орт вектора завихренности, а \mathbf{r}_n – радиус векторы вершин рассматриваемой ячейки сетки ($n = 1, \dots, 8$).

Величина коэффициента перемежаемости γ определяется из уравнений предложенной в Главе 3 модели SST KD. В эту модель для работы в рамках вихреразрешающего метода внесена

лишь одна модификация. На основе предварительных расчётов было обнаружено неверное поведение функции перемежаемости в областях, где модель турбулентности работает в подсеточном режиме. В некоторых областях с низкими уровнями турбулентной вязкости перемежаемость принимала низкие значения, приводя к значительным ошибкам в расчётах. Поскольку перемежаемость должна принимать значения, отличные от единицы только в пристенных областях, введена модификация

$$\gamma = 1.0 \text{ при } F_1 < 0.9. \quad (4.9)$$

Где F_1 – функция модели SST, рассчитываемая по формуле (2.2), используемая для сшивания k - ϵ и k - ω ветви модели и определяющая границы пограничного слоя.

Полная формулировка метода приведена в приложении Б.

4.2. МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Описание методов, используемых при решении стационарных уравнений в рамках кода NTS, приведено в разделе 2.2.2. В данном разделе описаны специфические особенности решения уравнений в нестационарных постановках при проведении расчетов при помощи гибридных RANS-LES подходов.

Для аппроксимации временных производных применяется трехслойная схема Эйлера второго порядка [91]. На каждом шаге по времени проводится 20 внутренних итераций по псевдовремени.

При проведении расчётов при помощи гибридных RANS-LES подходов важную роль играет способ аппроксимации невязких составляющих векторов потоков в уравнениях переноса, определяющий диссипативные свойства схемы, требования к которым различны в разных областях течения. В области RANS схема должна обеспечивать устойчивость решения на относительно грубых анизотропных сетках, что достигается при помощи использования высоко-диссипативных противопоточных схем. В противоположность этому, в LES подобластях необходимо использовать низкодиссипативные схемы, обеспечивающие разрешение мелкомасштабной турбулентности. В настоящее время для численной реализации гибридных подходов общепринятым является использование взвеси низкодиссипативных центрально-разностных и противопоточных схем с переменным по пространству весом, что позволяет удовлетворить обоим указанным требованиям.

При априорном разбиении расчётной области на RANS и LES подобласти (зонные подходы) в RANS области используется противопоточная схема третьего порядка, а в LES подобластях – центрально-разностная схема четвёртого порядка.

При применении незонных гибридных подходов, к которым относится используемый в работе метод DDES, граница между RANS и LES подобластями определяются автоматически в процессе решения, что не позволяет предписать использование той или иной схемы в определённых частях расчётной области заранее. Для решения этой проблемы используются автоматические схемы определяющие вычислительные параметры в процессе решения.

Одной из наиболее популярных схем такого типа является гибридная схема [92], в которой веса противопоточной и центрально-разностной схем определяются на основе текущего решения и параметров используемой сетки. Данная гибридная схема реализована в NTS коде и использовалась для проведения расчётов в настоящей работе.

Однако, схема [92] не является универсальной и в некоторых случаях её использование приводит к возникновению артефактов на границах областей с центрально-разностной и противопоточной схемами, которые, в свою очередь, приводят к неустойчивости решения и различным нефизическим особенностям в решении. В связи с этим схема требует введения искусственных явных ограничителей, не позволяющих схеме переключиться в центрально-разностный режим в области потока без турбулентных пульсаций.

На основе предварительных расчётов, для настоящей работы был выбран ограничитель, устанавливающий противопоточную схему в областях потока, в которых уровень кинетической энергии ниже некоего заданного. Этот минимальный уровень кинетической энергии был установлен опытным путём и равен $k/U_0^2 = 1 \cdot 10^{-5}$ для всех рассматриваемых задач.

4.3. ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДА

Для оценки возможностей предложенного метода DDES SST KD были рассмотрены две задачи, точность расчета которых в значительной мере определяется точностью предсказания положения ламинарно-турбулентного перехода. Рассмотрены задачи обтекания сферы и круглого цилиндра в широком диапазоне числе Рейнольдса, включающем докритические, критические и сверхкритические режимы, что позволяет оценить способность метода предсказывать явление кризиса сопротивления. Для этих течений в литературе представлены подробные экспериментальные данные, полученные различными группами исследователей на разных установках, что позволяет считать их надежными валидационными задачами.

Результаты метода DDES SST KD сравнивались с результатами аналогичного метода, основанного на модели SST alg- γ и DDES SST без учёта перехода.

4.3.1. ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ

4.3.1.1. Постановка задачи

Рассматривается нестационарное обтекание сферы несжимаемой жидкостью в диапазоне значений числа Рейнольдса, построенного по диаметру сферы и скорости набегающего потока, от $5.0 \cdot 10^4$ до $1.0 \cdot 10^6$. Такой диапазон полностью захватывает кризис сопротивления, наблюдающийся при $3.4 \cdot 10^5 < Re < 4.4 \cdot 10^5$ [93]. Результаты расчётов сравнивались с данными различных серий экспериментальных исследований.

Расчётная область представляет из себя сферу с радиусом $20D$, где D – диаметр обтекаемой сферы и состоит из 6 блоков. Блоки 1, 2 и 3 прилегают к поверхности сферы и образуют внутреннюю область с мелкими шагами сетки, а блоки 4, 5 и 6 аналогично прилегают к блокам 1, 2 и 3 и имеют более грубые шаги сетки (рис 4.1). Блоки 1 и 4 имеют кольцевую форму и замыкаются сами на себя вокруг оси основного течения X (рис. 4.2). Блоки 2,3 имеют форму усеченной пирамиды и прилегают к поверхности сферы и блоку 1 как показано на рисунке 4.3. Блоки 5 и 6 аналогично прилегают к блокам 2 и 3 соответственно. В блоках 3, 4 и 6 нет нестационарных пульсаций и реализуется RANS ветка метода и для аппроксимации невязких потоков используется противопоточная схема, в то время как в блоках 1, 2 и 5 используется гибридная схема, описанная в пункте 4.2.

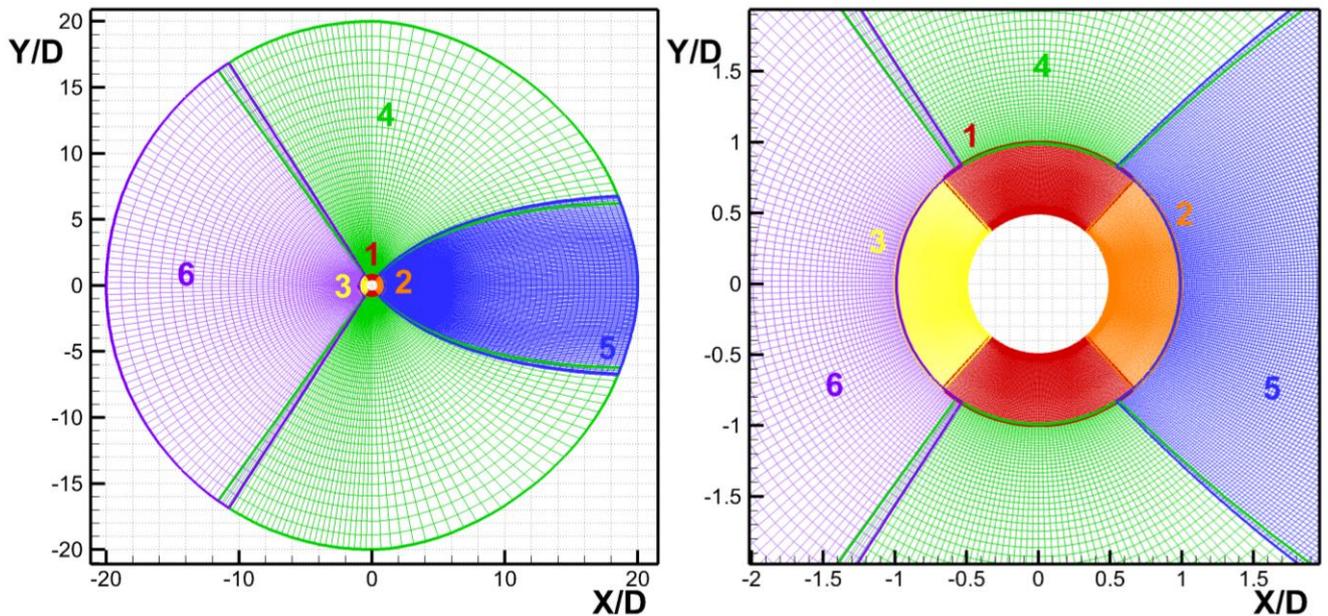


Рис. 4.1. Расчётная сетка для задачи об обтекании сферы, сечение $Z = 0$

Расчётная сетка разделена на внутренние и внешние блоки для уменьшения количества ячеек и сокращения вычислительных затрат. В пристенных блоках на окружность сферы приходится 514 ячеек, в то время как во внешних – 180. Сетка сгущена к стенкам сферы и в области следа за сферой – блоке 5. Для достижения условия $y^+ < 1.0$ для разных чисел

Рейнольдса были построены разные сетки, отличающиеся в пристенной области. Общее количество ячеек составило порядка $1.6 \cdot 10^7$.

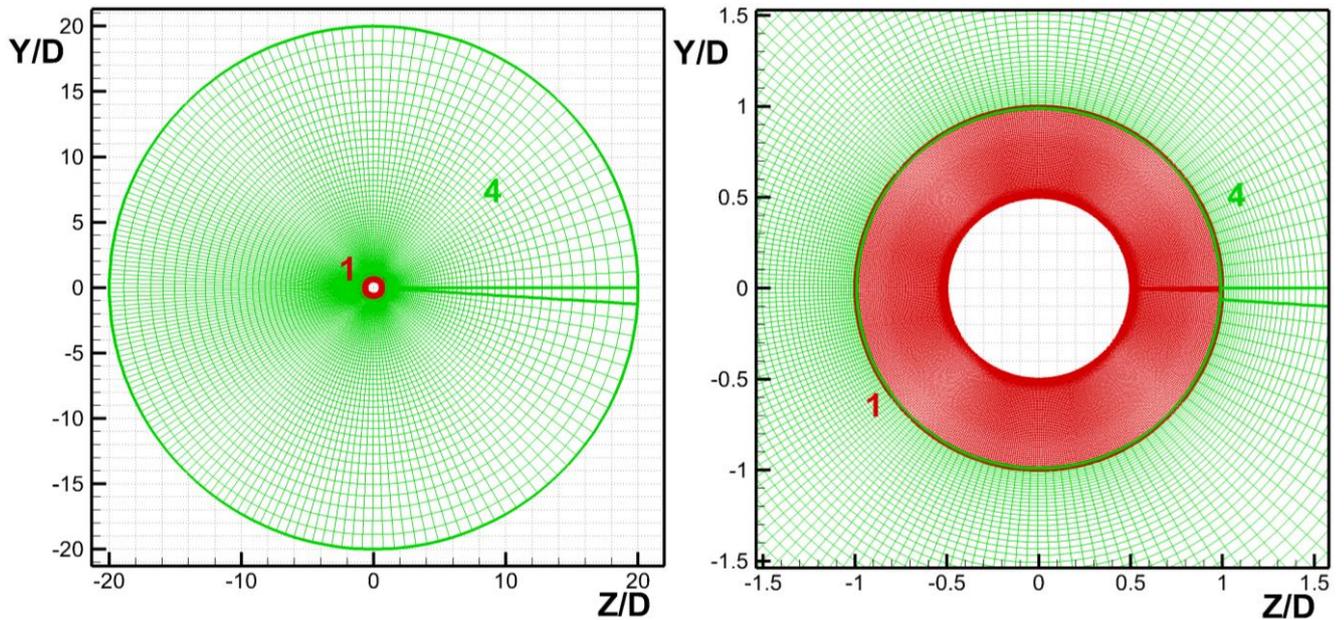


Рис. 4.2. Расчётная сетка для задачи об обтекании сферы, сечение $X = 0$

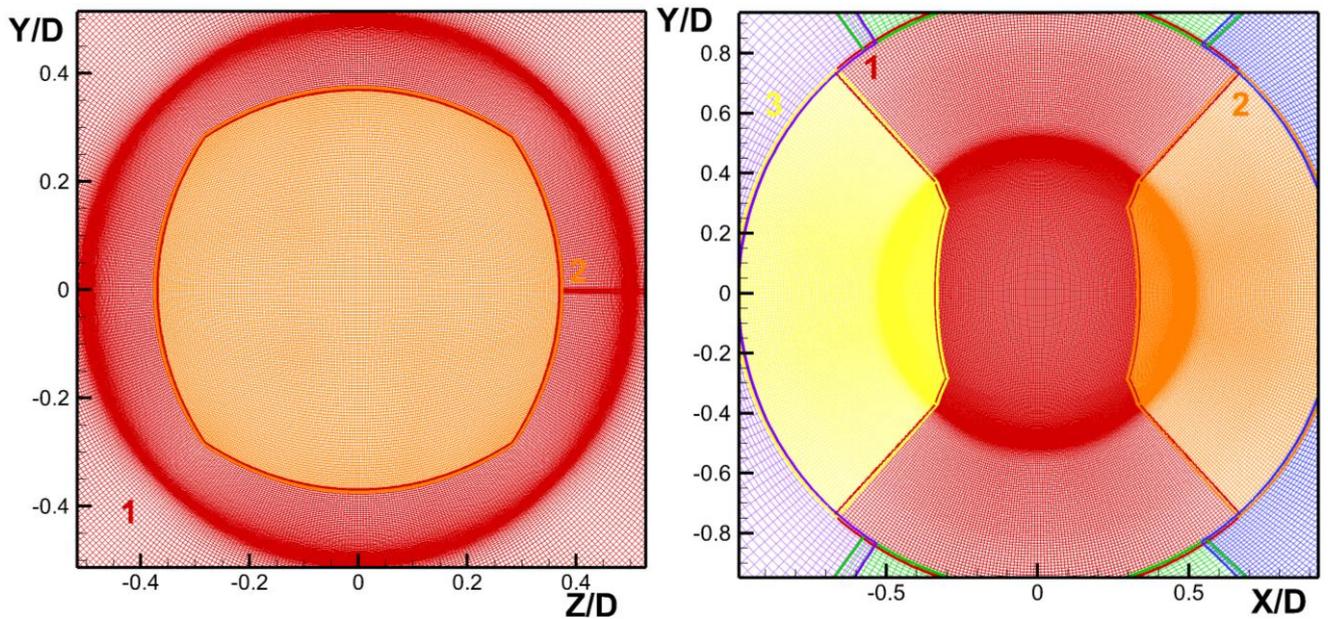


Рис. 4.3. Расчётная сетка для задачи об обтекании сферы, топология блоков на поверхности сферы

На входной части расчётной области задавался однородный профиль скорости, на выходной – постоянное давление, на поверхности сферы задавалось условие прилипания. Граничные условия для удельной диссипации на поверхности сферы рассчитывались по формуле (3.3). Граничные условия для турбулентных характеристик задавались таким образом, чтобы обеспечить интенсивность турбулентности 0.45% в окрестности среднего сечения сферы. Для этого турбулентные переменные замораживались и сохраняли значения на входе при $X/D <$

-2.0. Необходимые для этого входные значения Tu и v_t/v получены при помощи формул (3.1) и (3.2) и приведены в таблице 4.1. Значения турбулентных характеристик рассчитывались по

$$\text{формулам } k = \frac{3}{2} \left(U_0 \cdot \frac{Tu}{100} \right)^2, \quad \omega = \frac{k}{v_t}.$$

Таблица 4.1. Граничные условия для характеристик турбулентности для задачи об обтекании сферы

Re	v_t/v	$Tu, \%$
$5.0 \cdot 10^4$	0.35	1.2
$1.0 \cdot 10^5$	0.7	1.2
$2.0 \cdot 10^5$	1.4	1.4
$4.0 \cdot 10^5$	2.8	1.6
$6.0 \cdot 10^5$	4.2	1.7
$1.0 \cdot 10^6$	7.0	1.9

Шаг по времени был равен $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3} D/U_\infty$, что обеспечивает значение числа Куранта $CFL < 1$ в отрывной зоне в следе за сферой. Осреднение решения проводилось после установления течения на временных промежутках длительностью порядка $50 \cdot D/U_\infty$.

4.3.1.2. Исследование влияния шагов по пространству и по времени

Получаемые расчётные результаты не должны зависеть от выбранных численных параметров задачи. Для валидации расчётов было проведено исследование на зависимость коэффициента сопротивления от расчётной сетки и шага по времени. Для проверки использовался режим при $Re = 1.0 \cdot 10^5$ и методы DDES SST и DDES SST KD.

Для определения сеточной зависимости построены в 1.5 раза более грубая (около $4 \cdot 10^6$ ячеек) и в 1.5 более подробная (около $4.6 \cdot 10^7$ ячеек) во всех направлениях сетки. В таблице 4.2. приведены полученные значения коэффициента сопротивления. Видно, что эти результаты весьма близки, поэтому выбранная сетка достаточна для получения сошедшегося по сетке решения.

Таблица 4.2. Значения коэффициента сопротивления, полученные на разных расчётных сетках

Сетка	C _D	
	DDES SST	DDES SST KD
Грубая сетка	0.32	0.47
Исходная сетка	0.32	0.48
Измельченная сетка	0.31	0.47

Для определения влияния шага по времени были проведены расчёты с шагом в два раза меньшим ($\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-3} D/U_{\infty}$) и в два раза большим ($\Delta t = 1.0 \cdot 10^{-2} D/U_{\infty}$) основного. В таблице 4.3. приведены полученные значения коэффициента сопротивления, видно, что они также весьма близки.

Таблица 4.3. Значения коэффициента сопротивления, полученные при разных значениях шага по времени

Шаг по времени	C _D	
	DDES SST	DDES SST KD
$1.0 \cdot 10^{-2} D/U_{\infty}$	0.31	0.48
$5 \cdot 10^{-3} D/U_{\infty}$	0.32	0.48
$2.5 \cdot 10^{-3} D/U_{\infty}$	0.3	0.47

Таким образом, приведенные в данном разделе результаты свидетельствуют о том, что для получения независимых от вычислительных параметров результатов не требуется измельчение сетки и уменьшение шага по времени.

4.3.1.3. Результаты расчётов

На рисунке 4.4. приведено сравнение расчётных зависимостей коэффициента сопротивления $C_D = \frac{4F_x}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 \pi D^2}$ от числа Рейнольдса $Re = \frac{U_{\infty} D}{\nu}$ с экспериментальными

данными. Здесь F_x – сила сопротивления, действующая на сферу.

Сравнения результатов расчётов проводится с данными экспериментальных исследований, представленных в [94] - [96] и эмпирическими корреляциями [97] и [98].

В первую очередь следует отметить, что использование моделей перехода позволяет значительно повысить точность расчётов при докритических режимах обтекания. Однако, оба

метода, основанные на моделях перехода, предсказывают существенно более медленное падение коэффициента сопротивления при $Re = 3.0 \cdot 10^5$. При этом оригинальный метод DDES SST вовсе не предсказывает связанного с кризисом сопротивления падения трения с ростом числа Рейнольдса.

При закритических значениях $Re > 4.0 \cdot 10^5$ все модели демонстрируют очень высокие уровни коэффициента сопротивления, не вписывающиеся в диапазон экспериментальных значений. При этом обтекание является крайне нестабильным и нестационарным. Причина такого поведения на данном этапе работы неясна и требует дальнейших исследований.

Следует отметить, что результаты, полученные при помощи методов, учитывающих ламинарно-турбулентный переход, близки между собой. Это позволяет предположить, что наблюдаемое отклонение расчетных результатов от экспериментальных данных при закритических режимах не связано с недостатками конкретной модели перехода, а вызвано какими-то особенностями метода SST DDES.

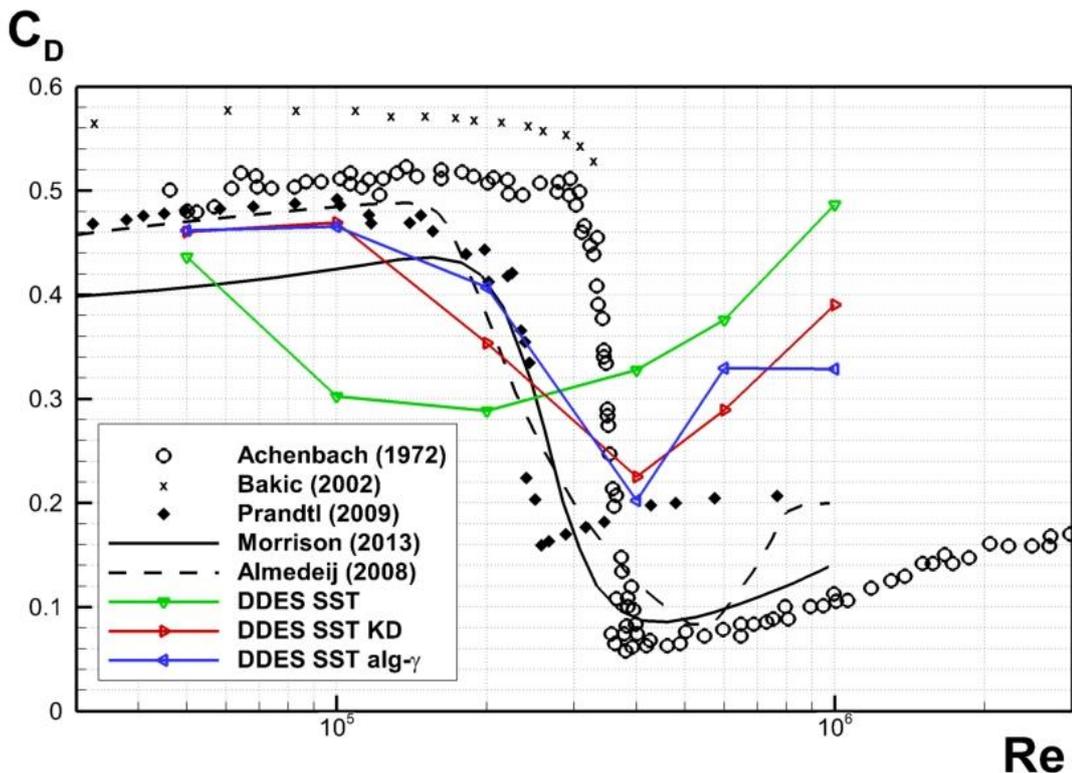


Рис. 4.4. Зависимость коэффициента сопротивления сферы от числа Рейнольдса.

4.3.2. ОБТЕКАНИЕ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА

4.3.2.1. Постановка задачи

Рассматривается нестационарное поперечное обтекание круглого цилиндра несжимаемой жидкостью в диапазоне значений числа Рейнольдса, построенного по диаметру цилиндра и скорости набегающего потока, от $5.0 \cdot 10^4$ до $1.2 \cdot 10^6$. Такой диапазон полностью захватывает кризис сопротивления, наблюдающийся при $1.3 \cdot 10^5 < Re < 5.0 \cdot 10^5$ [11].

Расчётная область представляет из себя цилиндр с радиусом $25D$, где D – диаметр обтекаемого цилиндра, и центром в точке $(x, y) = (0.0, 0.0)$. Длина расчётной области в поперечном направлении $\Delta Z = 5D$, что больше обычно используемой в таких расчётов величины πD [99], [100] и не должно влиять на результат. Область состоит из 3 расчётных блоков (рис. 4.5). Блок 1 содержит измельченную сетку для расчёта высоких градиентов величин вблизи поверхности цилиндра. Блок 2 измельчён для расчёта следа за цилиндром. На блок 3 приходится однородное невозмущённое течение без нестационарных пульсаций, и он содержит наиболее грубую сетку.

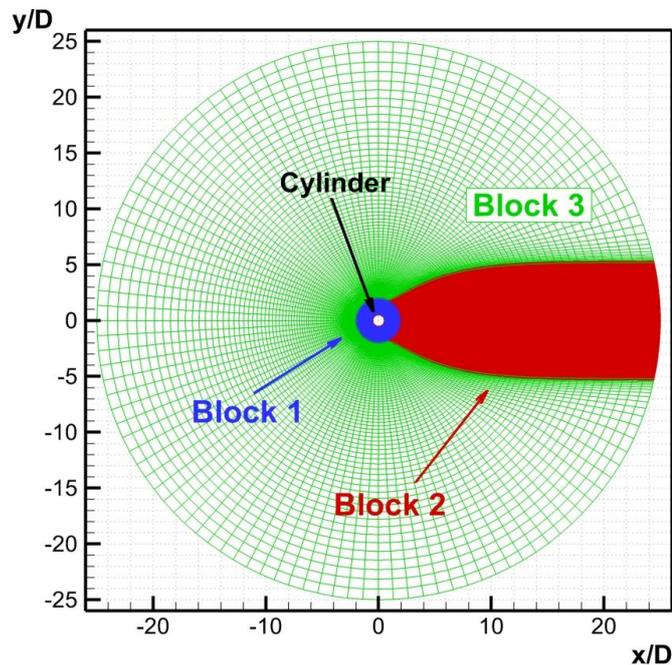


Рис. 4.5. Расчётная сетка для задачи об обтекании сферы, сечение $Z = 0$

Всего было построено три расчётные сетки различного размера для расчёта течений с различными числами Рейнольдса и поддержания достаточно низкого значения безразмерной величины первого пристенного шага меньше ($y^+ < 1$). Сетки отличаются только в пристенной

области блока 1. В таблице 4.4 приведены параметры используемых расчётных сеток. Сетки построены с учётом методических расчётов, приведённых в пункте 4.3.1.2.

Таблица 4.4. Параметры расчётных сеток для задачи об обтекании цилиндра

№	Диапазон чисел Рейнольдса	Размер блока 1	Размер блока 2	Размер блока 3	Общее количество ячеек
1	$5.0 \cdot 10^4 - 2.0 \cdot 10^5$	$512 \times 161 \times 560$	$200 \times 184 \times 256$	$131 \times 101 \times 52$	56,270,732
2	$2.5 \cdot 10^5 - 6.0 \cdot 10^5$	$512 \times 191 \times 560$	$200 \times 184 \times 256$	$131 \times 101 \times 52$	64,872,332
3	$7.0 \cdot 10^5 - 1.2 \cdot 10^6$	$512 \times 221 \times 560$	$200 \times 184 \times 256$	$131 \times 101 \times 52$	73,473,932

На входной границе расчётной области задавался однородный профиль скорости, на выходной – постоянное давление, на поверхности сферы задавалось условие прилипания. Граничные условия на поверхности цилиндра для удельной диссипации задавались по формуле (3.3). Граничные условия для турбулентных характеристик задавались таким образом, чтобы обеспечить интенсивность турбулентности 0.3% в окрестности среднего сечения цилиндра. Для этого турбулентные переменные замораживались и сохраняли значения на входе при $X/D < -2.0$. Необходимые для этого входные значения Tu и ν_t/ν получены при помощи формул (3.1) и (3.2) и приведены в таблице 4.5. Значения турбулентных характеристик рассчитывались по формулам

$$k = \frac{3}{2} \left(U_0 \cdot \frac{Tu}{100} \right)^2, \quad \omega = \frac{k}{\nu_t}.$$

Таблица 4.5. Граничные условия для характеристик турбулентности для задачи об обтекании цилиндра

Re	ν_t/ν	$Tu, \%$
$5.0 \cdot 10^4$	0.30	0.40
$8.0 \cdot 10^4$	0.30	0.55
$1.0 \cdot 10^5$	0.36	0.60
$1.3 \cdot 10^5$	0.45	0.64
$1.7 \cdot 10^5$	0.56	0.73
$2.0 \cdot 10^5$	0.65	0.77
$2.5 \cdot 10^5$	0.79	0.95
$3.0 \cdot 10^5$	0.94	1.00
$4.0 \cdot 10^5$	1.25	1.02
$5.0 \cdot 10^5$	1.55	1.15
$7.0 \cdot 10^5$	2.16	1.35
$9.0 \cdot 10^5$	2.75	1.55
$1.2 \cdot 10^6$	3.65	1.70

Шаг по времени был равен $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3} D/U_\infty$, что обеспечивает значение числа Куранта $CFL < 1$ в отрывной зоне в следе за цилиндром. Осреднение решения проводилось после установления течения на временных промежутках длительностью порядка $50 \cdot D/U_\infty$.

4.3.2.2. Результаты расчётов

На рисунке 4.6. изображено сравнение расчётных зависимостей коэффициента сопротивления $C_D = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}$ от числа Рейнольдса $Re = \frac{U_\infty D}{\nu}$ с экспериментальными данными.

Здесь F_x – сила сопротивления, действующая на цилиндр.

Сравнения результатов расчётов проводится с данными экспериментальных исследований, представленных в [101] - [107].

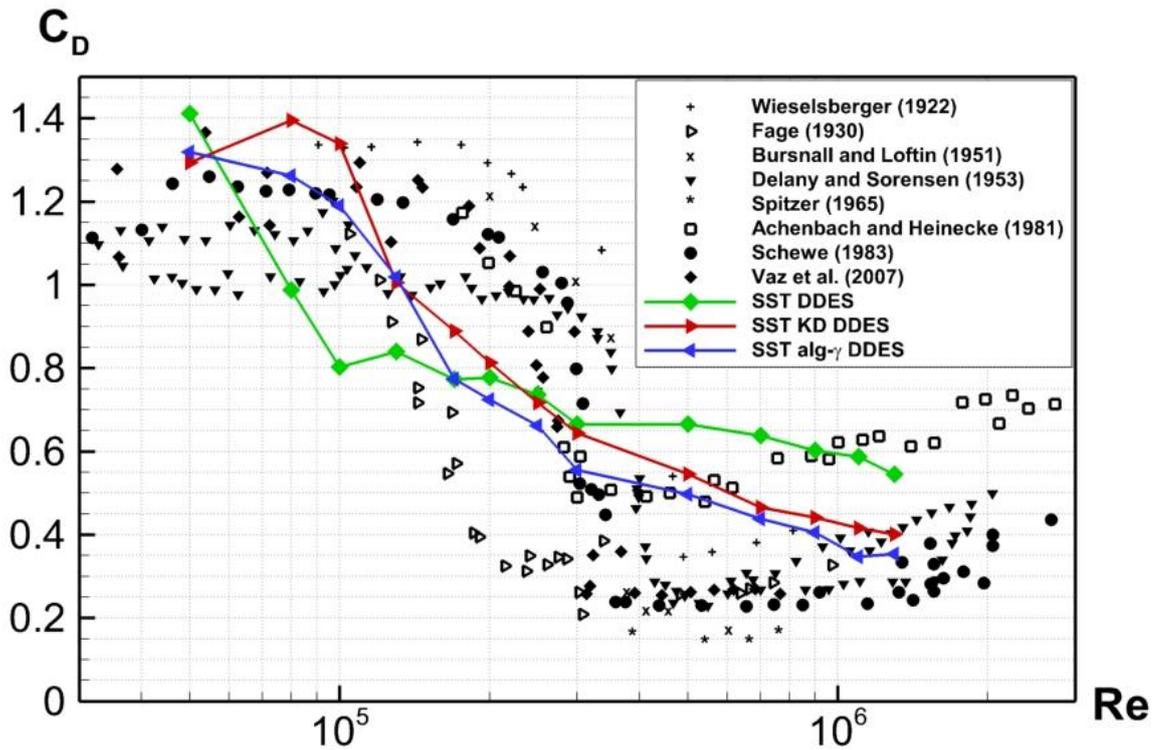


Рис. 4.6. Зависимость коэффициента сопротивления круглого цилиндра от числа Рейнольдса.

Данное течение наглядно демонстрирует преимущество использования моделей перехода, расчётные значения коэффициента сопротивления при использовании которых ближе к экспериментальным, чем полученные при помощи SST DDES, практически во всём диапазоне чисел Рейнольдса. Однако, так же, как и в задаче обтекания сферы, падение трения в области критического числа Рейнольдса происходит недостаточно резко.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты проведенных исследований состоят в следующем.

1. На основе аналитического обзора показано, что наиболее перспективным вихреразрешающим подходом для расчета отрывных течений с учётом ламинарно-турбулентного перехода в присоединенном пограничном слое является метод DDES, основанный на полуэмпирической модели SST и алгебраической модели перехода.
2. На базе модели турбулентности SST и алгебраической модели перехода $k-\omega$ KD разработана новая модель, предназначенная для расчета течений при наличии ламинарно-турбулентного перехода.
3. Предложенная модель протестирована на трёх течениях. Показано, что эта модель существенно превосходит по точности оригинальную модель $k-\omega$ KD, на основе которой она была построена, и не уступает по точности другим алгебраическим моделям перехода. Сравнение с лучшей на сегодняшний день моделью перехода γ - Re_θ показало, что хотя и разработанная модель несколько уступает ей по точности, она существенно экономичней и для получения сошедшегося решения требует меньших вычислительных затрат.
4. Предложен глобальный гибридный вихреразрешающий подход DDES SST KD, предназначенный для расчёта отрывных течений при наличии перехода в присоединенном пограничном слое.
5. На примере задач об обтекании сферы и круглого цилиндра в широком диапазоне чисел Рейнольдса продемонстрировано повышение точности метода DDES SST за счет использования алгебраической модели перехода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chapman D.R. Computational Aerodynamics Development and Outlook // *AIAA J.* 1979. Vol. 17, № 12. P. 1293–1313.
2. Spalart P.R. Strategies for turbulence modelling and simulations // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2000. Vol. 21, № 3. P. 252–263.
3. Menter F. et al. An Overview of Hybrid RANS–LES Models Developed for Industrial CFD // *Appl. Sci.* 2021. Vol. 11, № 6. P. 2459.
4. Reynolds O. On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion // *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A.* 1895. Vol. 18. P. 123–164.
5. Spalart P.R. Philosophies and fallacies in turbulence modeling // *Prog. Aerosp. Sci.* 2015. Vol. 74. P. 1–15.
6. Fröhlich J., von Terzi D. Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows // *Prog. Aerosp. Sci.* 2008. Vol. 44, № 5. P. 349–377.
7. Гарбарук А.В. et al. *Современные подходы к моделированию турбулентности : учеб. пособие.* Изд-во Политехн. ун-та, 2016.
8. Spalart P.R. et al. A New Version of Detached-eddy Simulation, Resistant to Ambiguous Grid Densities // *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 2006. Vol. 20, № 3. P. 181–195.
9. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // *Heat Mass Transf.* 2003. Vol. 4.
10. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа / ed. Чекмарев А.И.* 1950.
11. Rodríguez I. et al. On the flow past a circular cylinder from critical to super-critical Reynolds numbers: Wake topology and vortex shedding // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2015. Vol. 55. P. 91–103.
12. Langtry R.B., Menter F.R. Correlation-Based Transition Modeling for Unstructured Parallelized Computational Fluid Dynamics Codes // *AIAA J.* 2009. Vol. 47, № 12. P. 2894–2906.
13. Wauters J., Degroote J. On the study of transitional low-Reynolds number flows over airfoils operating at high angles of attack and their prediction using transitional turbulence models // *Prog. Aerosp. Sci.* 2018. Vol. 103. P. 52–68.
14. Lopes R., Eça L., Vaz G. On the Numerical Behavior of RANS-Based Transition Models // *J. Fluids Eng.* 2020. Vol. 142, № 5. P. 051503.
15. Abu-Ghannam B.J., Shaw R. Natural Transition of Boundary Layers—The Effects of Turbulence, Pressure Gradient, and Flow History // *J. Mech. Eng. Sci.* 1980. Vol. 22, № 5. P. 213–228.
16. Hosseinverdi S., Fasel H.F. Numerical investigation of laminar–turbulent transition in laminar separation bubbles: the effect of free-stream turbulence // *J. Fluid Mech.* 2019. Vol. 858. P. 714–759.
17. McAuliffe B.R., Yaras M.I. Transition Mechanisms in Separation Bubbles Under Low- and Elevated-Freestream Turbulence // *J. Turbomach.* 2010. Vol. 132, № 1. P. 011004.
18. A. M. O. Smith, N. Gamberoni. 1956. Transition, Pressure Gradient and Stability Theory. Technical Report ES-26388, Douglas Aircraft Company.

19. J. L. van Ingen. 1956. A Suggested Semi-empirical Method for the Calculation of the Boundary Layer Transition Region. Report, VTH-74.
20. G. B. Schubauer, H. K. Skramstadt. 1948. Laminar Boundary Layer Oscillations and Transition on a Flat Plate. Report NACA 909.
21. van Ingen J. The eN Method for Transition Prediction. Historical Review of Work at TU Delft // 38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit. Seattle, Washington: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008.
22. Van Ingen J.L. On the Calculation of Laminar Separation Bubbles in Two-dimensional Incompressible Flow. 1975.
23. Drela M., Gilest M.B. Viscous-Inviscid Analysis of Transonic and Low Reynolds Number Airfoils // AIAA J. 1987. P. 9.
24. Drela M. XFOIL: An Analysis and Design System for Low Reynolds Number Airfoils // Low Reynolds Number Aerodynamics / ed. Mueller T.J. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1989. Vol. 54. P. 1–12.
25. Coder J.G., Maughmer M.D. Computational Fluid Dynamics Compatible Transition Modeling Using an Amplification Factor Transport Equation // AIAA J. 2014. Vol. 52, № 11. P. 2506–2512.
26. Spalart P., Allmaras S. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno,NV,U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1992.
27. Jacobs R.G., Durbin P.A. Shear sheltering and the continuous spectrum of the Orr–Sommerfeld equation // Phys. Fluids. 1998. Vol. 10, № 8. P. 2006–2011.
28. Jacobs R.G., Durbin P.A. Simulations of bypass transition // J. Fluid Mech. 2001. Vol. 428. P. 185–212.
29. Zaki T.A. From Streaks to Spots and on to Turbulence: Exploring the Dynamics of Boundary Layer Transition // Flow Turbul. Combust. 2013. Vol. 91, № 3. P. 451–473.
30. Durbin P.A. Perspectives on the Phenomenology and Modeling of Boundary Layer Transition // Flow Turbul. Combust. 2017. Vol. 99, № 1. P. 1–23.
31. Mayle R.E., Schulz A. The Path to Predicting Bypass Transition // Volume 1: Turbomachinery. Birmingham, UK: American Society of Mechanical Engineers, 1996. P. V001T01A065.
32. Lardeau S., Leschziner M.A., Li N. Modelling Bypass Transition with Low-Reynolds-Number Nonlinear Eddy-Viscosity Closure // Flow Turbul. Combust. Former. Appl. Sci. Res. 2004. Vol. 73, № 1. P. 49–76.
33. Dhawan S., Narasimha R. Some properties of boundary layer flow during the transition from laminar to turbulent motion // J. Fluid Mech. 1958. Vol. 3, № 4. P. 418–436.
34. Walters D.K., Leylek J.H. A New Model for Boundary Layer Transition Using a Single-Point RANS Approach // J. Turbomach. 2004. P. 10.
35. Walters D.K., Cokljat D. A Three-Equation Eddy-Viscosity Model for Reynolds-Averaged Navier–Stokes Simulations of Transitional Flow // J. Fluids Eng. 2008. Vol. 130, № 12. P. 121401.

36. Narasimha R. The laminar-turbulent transition zone in the boundary layer // *Prog. Aerosp. Sci.* 1985. Vol. 22, № 1. P. 29–80.
37. Hall D.J., Gibbings J.C. Influence of Stream Turbulence and Pressure Gradient upon Boundary Layer Transition // *J. Mech. Eng. Sci.* 1972. Vol. 14, № 2. P. 134–146.
38. Libby P.A. On the prediction of intermittent turbulent flows // *J. Fluid Mech.* 1975. Vol. 68, № 02. P. 273.
39. Dopazo C. On conditioned averages for intermittent turbulent flows // *J. Fluid Mech.* 1977. Vol. 81, № 03. P. 433.
40. Byggstoyl S., Kollmann W. A closure model for conditioned stress equations and its application to turbulent shear flows // *Phys. Fluids.* 1986. Vol. 29, № 5. P. 1430.
41. Steelant J., Dick E. Modelling Of Bypass Transition With Conditioned Navier-Stokes Equations Coupled To An Intermittency Transport Equation // *Int J Numer Meth Fluids.* 1996. Vol. 23. P. 193–220.
42. Suzen Y., Huang P. An intermittency transport equation for modeling flow transition // 38th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno,NV,U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.
43. Cho J.R., Chung M.K. A $k-\varepsilon-\gamma$ equation turbulence model // *J. Fluid Mech.* 1992. Vol. 237. P. 301–322.
44. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA J.* 1994. Vol. 32, № 8. P. 1598–1605.
45. Menter F.R., Esch T., Kubacki S. Transition Modelling Based On Local Variables // *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 5.* Elsevier, 2002. P. 555–564.
46. Driest E.R.V. Boundary Layer Transition: Freestream Turbulence and Pressure Gradient Effects // *AIAA J.* P. 4.
47. Menter F.R., Langtry R., Völker S. Transition Modelling for General Purpose CFD Codes // *Flow Turbul. Combust.* 2006. Vol. 77, № 1–4. P. 277–303.
48. Stabnikov A.S., Garbaruk A.V. Comparative analysis of transition models at different farfield turbulence intensities // *J. Phys. Conf. Ser.* 2017. Vol. 929. P. 012101.
49. Stabnikov A.S., Garbaruk A.V. Analysis of the abilities of algebraic laminar-turbulent transition models // *J. Phys. Conf. Ser.* 2018. Vol. 1135. P. 012104.
50. Medida S., Baeder J. A New Crossflow Transition Onset Criterion for RANS Turbulence Models // 21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. San Diego, CA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2013.
51. Grabe C., Krumbein A. Extension of the $\gamma-Re_{\text{ot}}$ Model for Prediction of Crossflow Transition // 52nd Aerospace Sciences Meeting. National Harbor, Maryland: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2014.
52. Menter F.R. et al. A One-Equation Local Correlation-Based Transition Model // *Flow Turbul. Combust.* 2015. Vol. 95, № 4. P. 583–619.

53. Medida S., Baeder J. Application of the Correlation-based Gamma-Re Theta t Transition Model to the Spalart-Allmaras Turbulence Model // 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. Honolulu, Hawaii: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011.
54. Coder J., Maughmer M. One-Equation Transition Closure for Eddy-Viscosity Turbulence Models in CFD // 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. Nashville, Tennessee: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2012.
55. Coder J., Maughmer M. A CFD-Compatible Transition Model Using an Amplification Factor Transport Equation // 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. Grapevine (Dallas/Ft. Worth Region), Texas: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2013.
56. Coder J.G. Enhancement of the Amplification Factor Transport Transition Modeling Framework // 55th AIAA Aerospace Sciences Meeting. Grapevine, Texas: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2017.
57. Menter F.R. et al. An Algebraic LCTM Transition Model // Proceedings of the ERCOFTAC Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurement (ETMM13). Rhodes, Greece, 2021.
58. Kubacki S., Górecki B., Dick E. An Algebraic Intermittency Model Added to the $k-\omega$ RANS Model for Transition Simulation. 2015. P. 12.
59. Wilcox D.C. Formulation of the $k-w$ Turbulence Model Revisited // AIAA J. 2008. Vol. 46, № 11. P. 2823–2838.
60. Kubacki S., Dick E. An algebraic model for bypass transition in turbomachinery boundary layer flows // Int. J. Heat Fluid Flow. 2016. Vol. 58. P. 68–83.
61. Kubacki S., Dick E. An algebraic intermittency model for bypass, separation-induced and wake-induced transition // Int. J. Heat Fluid Flow. 2016. Vol. 62. P. 344–361.
62. Kubacki S. et al. An Extended Version of an Algebraic Intermittency Model for Prediction of Separation-Induced Transition at Elevated Free-Stream Turbulence Level // Int. J. Turbomach. Propuls. Power. 2020. Vol. 5, № 4. P. 28.
63. Walters D.K. Physical Interpretation of Transition-Sensitive RANS Models Employing the Laminar Kinetic Energy Concept // ERCOFTAC Bull. 2009. Vol. 80.
64. Savill A.M. Evaluating turbulence model predictions of transition: An ERCOFTAC Special Interest Group Project // Appl. Sci. Res. 1993. Vol. 51, № 1–2. P. 555–562.
65. Sandhu J.P.S. Local-Correlation Based Zero-Equation Transition Model for Turbomachinery // Volume 1: Compressors, Fans, and Pumps; Turbines; Heat Transfer; Structures and Dynamics. Chennai, Tamil Nadu, India: American Society of Mechanical Engineers, 2019. P. V001T02A017.
66. Sandhu J.P.S., Ghosh S. A local correlation-based zero-equation transition model // Comput. Fluids. 2021. Vol. 214. P. 104758.
67. Sandhu J.P.S., Ghosh S. A Simplified Local Correlation-Based Zero-Equation Transition Model. 2020. P. 15.

68. Bernardos L. et al. Algebraic Nonlocal Transition Modeling of Laminar Separation Bubbles Using $k-\omega$ Turbulence Models // *AIAA J.* 2019. Vol. 57, № 2. P. 553–565.
69. Laurent C. et al. DNS database of a transitional separation bubble on a flat plate and application to RANS modeling validation // *Comput. Fluids.* 2012. Vol. 61. P. 21–30.
70. Bernardos L.F., Richez F., Gleize V. RANS modeling of Laminar Separation Bubbles around Airfoils at Low Reynolds conditions // *AIAA Aviation 2019 Forum*. Dallas, Texas: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2019.
71. Cakmakcioglu S.C., Bas O., Kaynak U. A correlation-based algebraic transition model // *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.* 2018. Vol. 232, № 21. P. 3915–3929.
72. Cakmakcioglu S.C. et al. A Revised One-Equation Transitional Model for External Aerodynamics // *AIAA AVIATION 2020 FORUM. VIRTUAL EVENT*: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2020.
73. Alam M., Walters K., Thompson D. A Transition-Sensitive Hybrid RANS/LES Modeling Methodology for CFD Applications // *51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*. Grapevine (Dallas/Ft. Worth Region), Texas: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2013.
74. Beehook A. Development and implementation of a new hybrid RANS/LES model for transitional boundary layers in OpenFOAM. 2015.
75. J.D. Steenbeek. Development of a hybrid RANS/LES model for transitional boundary layers. 2017.
76. Sørensen N.N., Bechmann A., Zahle F. 3D CFD computations of transitional flows using DES and a correlation based transition model // *Wind Energy.* 2011. Vol. 14, № 1. P. 77–90.
77. Hodara J., Smith M.J. Improved Turbulence and Transition Closures for Separated Flows. Munich, Germany, 2015. P. 18.
78. Sánchez-Rocha M., Menon S. The compressible hybrid RANS/LES formulation using an additive operator // *J. Comput. Phys.* 2009. Vol. 228, № 6. P. 2037–2062.
79. Hart J. Comparison of Turbulence Modeling Approaches to the Simulation of a Dimpled Sphere // *Procedia Eng.* 2016. Vol. 147. P. 68–73.
80. Menter F., Egorov Y. A Scale Adaptive Simulation Model using Two-Equation Models // *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, Nevada: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005.
81. Coder J.G., Ortiz-Melendez H.D. Transitional Delayed Detached-Eddy Simulation of Multielement High-Lift Airfoils // *J. Aircr.* 2019. Vol. 56, № 4. P. 1303–1312.
82. Wang S. et al. Blending of Algebraic Transition Model and Subgrid Model for Separated Transitional Flows // *AIAA J.* 2019. Vol. 57, № 11. P. 4684–4697.
83. Shur M., Strelets M., Travin A. High-Order Implicit Multi-Block Navier-Stokes Code: Ten-Years Experience of Application to RANS/DES/LES/DNS of Turbulent Flows // *Invited lecture. 7th Symposium on Overset Composite Grids and Solution Technology*. Huntington Beach, USA. 2004.

84. Rogers S., Kwak D. An upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier-Stokes equations // 6th Applied Aerodynamics Conference. Williamsburg, VA, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1988.
85. Chorin A.J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // J. Comput. Phys. 1967. Vol. 2, № 1. P. 12–26.
86. Schubauer G.B., Klebanoff P.S. Contributions on the mechanics of boundary-layer transition. 1955.
87. Robert J. McGhee et al. 1984. Experimental Results for a Flapped Natural-Laminar-Flow Airfoil with High Lift/ Drag Ratio. NASA Technical Memorandum 85788.
88. Lee H., Kang S.-H. Flow Characteristics of Transitional Boundary Layers on an Airfoil in Wakes // J. Fluids Eng. 2000. Vol. 122, № 3. P. 522–532.
89. Matyushenko A.A., Stabnikov A.S., Garbaruk A.V. Criteria of computational grid generation for turbulence models taking into account laminar-turbulent transition // J. Phys. Conf. Ser. 2019. Vol. 1400. P. 077047.
90. Probst A. et al. Evaluation of grey area mitigation tools within zonal and non-zonal RANS-LES approaches in flows with pressure induced separation // Int. J. Heat Fluid Flow. 2017. Vol. 68. P. 237–247.
91. Kim S.-E., Makarov B. An Implicit Fractional-Step Method for Efficient Transient Simulation of Incompressible Flows // 17th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. Toronto, Ontario, Canada: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005.
92. Travin A. et al. Physical and Numerical Upgrades in the Detached-Eddy Simulation of Complex Turbulent Flows // Advances in LES of Complex Flows / ed. Friedrich R., Rodi W. Dordrecht: Springer Netherlands, 2002. Vol. 65. P. 239–254.
93. Tiwari S.S. et al. Flow past a single stationary sphere, 2. Regime mapping and effect of external disturbances // Powder Technol. 2020. Vol. 365. P. 215–243.
94. Achenbach E. Experiments on the flow past spheres at very high Reynolds numbers // J. Fluid Mech. 1972. Vol. 54, № 3. P. 565–575.
95. V. Bakic, Experimental Investigation of Turbulent Flows Around a Sphere, PhD thesis, Technische Universität Hamburg–Harburg, 2002.
96. L. Prandtl (Ed.), Strömungsmechanik, bd. 5, Universitätsverlag Göttingen, 2009.
97. Almedeij J. Drag coefficient of flow around a sphere: Matching asymptotically the wide trend // Powder Technol. 2008. Vol. 186, № 3. P. 218–223.
98. Morrison F.A. An introduction to fluid mechanics. Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 2013. 927 p.
99. Pereira F.S., Vaz G., Eca L. An assessment of Scale-Resolving Simulation models for the flow around a circular cylinder // Proceeding of THMT-15. Proceedings of the Eighth International Symposium On Turbulence Heat and Mass Transfer. Sarajevo, Bosnia and Herzegovina: Begellhouse, 2015. P. 295–298.

100. Pereira F.S., Vaz G., Eça L. Flow Past a Circular Cylinder: A Comparison Between RANS and Hybrid Turbulence Models for a Low Reynolds Number // Volume 2: CFD and VIV. St. John's, Newfoundland, Canada: American Society of Mechanical Engineers, 2015. P. V002T08A006.
101. Wieselsberger, C., 1922. New Data on the Laws of Fluid Resistance. Tech. Rep. TN- 84, NACA.
102. Fage, A., 1930. Drag of Circular Cylinders and Spheres. Tech. Rep. R&M 1370, Aeronautical Research Council.
103. Bursnall, W., Loftin, L.J., 1951. Experimental Investigation of the Pressure Distribution About a Yawed Circular Cylinder in the Critical Reynolds Number Range. Tech. Rep. NACA TN2463, NACA.
104. Delany, N., Sorensen, N., 1953. Low-Speed Drag of Cylinders of Various Shapes. Tech. Rep. NACA TN3038, NACA.
105. Spitzer, R., 1965. Measurements of Unsteady Pressures and Wake Fluctuations for Flow Over a Cylinder at Supercritical Reynolds Number. Ph.D. thesis, California Institute of Technology.
106. Achenbach E., Heinecke E. On vortex shedding from smooth and rough cylinders in the range of Reynolds numbers 6×10^3 to 5×10^6 // J. Fluid Mech. 1981. Vol. 109. P. 239–251.
107. Schewe G. On the force fluctuations acting on a circular cylinder in crossflow from subcritical up to transcritical Reynolds numbers // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 133. P. 265–285.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. МОДЕЛЬ SST KD

Уравнения модели SST KD:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k k)}{\partial x_k} = \gamma P_k + (1-\gamma)P_{sep} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right], \\ \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\rho u_k \omega)}{\partial x_k} = P_k - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] + 2(1-F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$P_k = \min\left(-\overline{u'_i u'_j} \partial U_i / \partial x_j, 10 \cdot \rho \beta^* k \omega\right), \text{ где } \overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} k_s \delta_{ij} - 2\nu_s S_{ij}. \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma = \min\left(\max\left(\frac{k}{\nu A_\gamma \Omega} - 1.0, 0.0\right), 1.0\right). \quad (\text{A.3})$$

$$P_{sep} = C_{sep} F_{sep} \nu S^2, \quad (\text{A.4})$$

$$F_{sep} = \min\left(\max\left(\frac{R_\nu}{2.2 A_\nu} - 1.0, 0.0\right), 1.0\right), \text{ где } R_\nu = \frac{d_w^2 S}{\nu}, \quad (\text{A.5})$$

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{C_\mu \omega d_w}, \frac{500\nu}{\omega d_w^2}\right), \frac{2k\omega}{d_w^2 (\nabla k) \cdot (\nabla \omega)}\right] \quad (\text{A.6})$$

$$f_{ss} = \exp\left(-\left(\frac{C_{ss} \nu \Omega}{k}\right)^4\right) \quad (\text{A.7})$$

$$k_s = f_{SS} k, \quad (\text{A.8})$$

$$k_l = k - k_s, \quad (\text{A.9})$$

$$\nu_s = \frac{a_1 k_s}{\tilde{\omega}}, \text{ где } \tilde{\omega} = \max[a_1 \omega, F_2 S]; \quad (\text{A.10})$$

$$\nu_l = \frac{a_2 k_l}{\tilde{\omega}}, \text{ где } \tilde{\omega} = \max[a_2 \omega, F_2 S]. \quad (\text{A.11})$$

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2), \quad \arg_2 = \max\left(2\sqrt{k}/(0.09\omega d_w), 500\nu/(d_w^2 \omega)\right). \quad (\text{A.12})$$

$$C_{SS} = C_S (1.0 + C_A f_w \psi). \quad (\text{A.13})$$

$$\psi = \tanh\left(\frac{-\Omega(S - \Omega)}{C_\psi (\beta^* \omega)^2}\right), \quad (\text{A.14})$$

$$f_w = 1 - \tanh\left(\frac{k}{C_w \nu \omega}\right), \quad (\text{A.15})$$

Константы SST:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= F_1 \sigma_{k1} + (1 - F_1) \sigma_{k2}, \sigma_{k1} = 0.85, \sigma_{k2} = 1.0, \\ \sigma_\omega &= F_1 \sigma_{\omega1} + (1 - F_1) \sigma_{\omega2}, \sigma_{\omega1} = 0.5, \sigma_{\omega2} = 0.856, \\ \beta &= F_1 \beta_1 + (1 - F_1) \beta_2, \beta_1 = 0.075, \beta_2 = 0.0828, \\ \beta^* &= 0.09, \alpha = \beta / \beta^* - \sigma_\omega \kappa^2 / \sqrt{\beta^*}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Константы, относящиеся к описанию перехода:

$$\begin{aligned} A_\gamma &= 1.3, C_S = 2.0, C_A = 1.0, C_\psi = 10.0, C_W = 5.0, \\ C_{sep} &= 2.0, A_\nu = 550.0, a_1 = 0.31, a_2 = 0.45 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. МЕТОД DDES SST KD

Уравнения модели SST KD:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k k)}{\partial x_k} = \gamma P_k + (1-\gamma)P_{sep} - \frac{\beta^* \rho \omega k^{3/2}}{l_{DDES}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right], \\ \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\rho u_k \omega)}{\partial x_k} = P_k - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] + 2(1-F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}, \end{cases} \quad (\text{Б.1})$$

$$l_{DDES} = l_{RANS} - f_d \max\{0, (l_{RANS} - C_{DES} \Delta_{SLA}^{DDES})\}, \quad (\text{Б.2})$$

$$l_{RANS} = k^{1/2} / \beta^* \omega, \quad (\text{Б.3})$$

$$f_d = 1 - \tanh \left[(C_{d1} r_d)^{C_{d2}} \right], \quad r_d = (v_t + v) / \left(\kappa^2 d_w^2 \sqrt{0.5 \cdot (S^2 + \Omega^2)} \right), \quad (\text{Б.4})$$

$$\Delta_{SLA}^{DDES} = \tilde{\Delta}_\omega F_{KH}^{DDES} \left(\langle VTM \rangle \cdot \max \left\{ 1, \frac{0.2v}{\max\{(v_t - v_{t,\infty}), 10^{-6} v_{t,\infty}\}} \right\} \right). \quad (\text{Б.5})$$

$$F_{KH}^{DDES} = \begin{cases} 1.0 & \text{при } f_d < (1-\varepsilon) \\ F_{KH} & \text{при } f_d \geq (1-\varepsilon) \end{cases} \quad (\text{Б.6})$$

$$F_{KH}(\langle VTM \rangle) = \max \left\{ F_{KH}^{min}, \left[F_{KH}^{max}, F_{KH}^{min} + \frac{F_{KH}^{max} - F_{KH}^{min}}{a_2 - a_1} (\langle VTM \rangle - a_1) \right] \right\}. \quad (\text{Б.7})$$

$$VTM = \frac{\sqrt{6} |(\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\Omega}|}{\Omega^2 \sqrt{3 \text{tr}(S^2) - [\text{tr}(S)]^2}}, \quad (\text{Б.8})$$

где $\mathbf{l}_n = \mathbf{n}_\omega \times \mathbf{r}_n$, \mathbf{n}_ω – орт вектора завихренности, а \mathbf{r}_n – радиус векторы вершин рассматриваемой ячейки сетки ($n = 1, \dots, 8$).

$$\tilde{\Delta}_\omega = \frac{l}{\sqrt{3}} \max_{n,m=1,8} |(\mathbf{l}_n - \mathbf{l}_m)|, \quad (\text{Б.9})$$

$$P_k = \min \left(-\overline{u'_i u'_j} \partial U_i / \partial x_j, 10 \cdot \rho \beta^* k \omega \right), \quad \text{где } \overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} k_s \delta_{ij} - 2v_s S_{ij}. \quad (\text{Б.10})$$

$$\gamma = \min \left(\max \left(\frac{k}{v A_\gamma \Omega} - 1.0, 0.0 \right), 1.0 \right). \quad (\text{Б.11})$$

$$\gamma = 1.0 \quad \text{при } F_1 < 0.9. \quad (\text{Б.12})$$

$$P_{sep} = C_{sep} F_{sep} \nu S^2, \quad (Б.13)$$

$$F_{sep} = \min \left(\max \left(\frac{R_V}{2.2 A_V} - 1.0, 0.0 \right) 1.0 \right), \text{ где } R_V = \frac{d_w^2 S}{\nu}, \quad (Б.14)$$

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{C_\mu \omega d_w}, \frac{500\nu}{\omega d_w^2} \right), \frac{2k\omega}{d_w^2 (\nabla k) \cdot (\nabla \omega)} \right] \quad (Б.15)$$

$$f_{ss} = \exp \left(- \left(\frac{C_{SS} \omega \Omega}{k} \right)^4 \right). \quad (Б.16)$$

$$k_s = f_{SS} k, \quad (Б.17)$$

$$k_l = k - k_s, \quad (Б.18)$$

$$\nu_s = \frac{a_1 k_s}{\tilde{\omega}}, \text{ где } \tilde{\omega} = \max[a_1 \omega, F_2 S]; \quad (Б.19)$$

$$\nu_l = \frac{a_2 k_l}{\tilde{\omega}}, \text{ где } \tilde{\omega} = \max[a_2 \omega, F_2 S]. \quad (Б.20)$$

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2), \quad \arg_2 = \max \left(2\sqrt{k}/(0.09\omega d_w), 500\nu/(d_w^2 \omega) \right). \quad (Б.21)$$

$$C_{SS} = C_S (1.0 + C_A f_w \psi). \quad (Б.22)$$

$$\psi = \tanh \left(\frac{-\Omega(S - \Omega)}{C_\psi (\beta^* \omega)^2} \right), \quad (Б.23)$$

$$f_w = 1 - \tanh \left(\frac{k}{C_w \nu \omega} \right), \quad (Б.24)$$

Константы SST:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= F_1 \sigma_{k1} + (1 - F_1) \sigma_{k2}, \quad \sigma_{k1} = 0.85, \quad \sigma_{k2} = 1.0, \\ \sigma_\omega &= F_1 \sigma_{\omega1} + (1 - F_1) \sigma_{\omega2}, \quad \sigma_{\omega1} = 0.5, \quad \sigma_{\omega2} = 0.856, \\ \beta &= F_1 \beta_1 + (1 - F_1) \beta_2, \quad \beta_1 = 0.075, \quad \beta_2 = 0.0828, \\ \beta^* &= 0.09, \quad \alpha = \beta / \beta^* - \sigma_\omega \kappa^2 / \sqrt{\beta^*}. \end{aligned} \quad (Б.25)$$

Константы DDES SST Δ_{SLA}

$$\begin{aligned} C_{DES} &= F_1 C_{DES1} + (1 - F_1) C_{DES2}, \quad C_{DES1} = 0.78, \quad C_{DES2} = 0.61, \\ C_{d1} &= 20.0, \quad C_{d2} = 3.0, \quad F_{KH}^{min} = 0.1, \quad F_{KH}^{max} = 1.0, \quad a_1 = 0.15, \quad a_2 = 0.3. \end{aligned} \quad (Б.26)$$

Константы, относящиеся к описанию перехода:

$$\begin{aligned} A_\gamma &= 1.3, C_S = 2.0, C_A = 1.0, C_\psi = 10.0, C_W = 5.0, \\ C_{sep} &= 2.0, A_V = 550.0, a_1 = 0.31, a_2 = 0.45 \end{aligned} \tag{Б.27}$$