

**Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого
Институт компьютерных наук и технологий**

На правах рукописи

Целищева Анастасия Алексеевна

**Методы метрологически обоснованного решения уравнений и систем
уравнений при косвенных, совокупных и совместных измерениях**

Направление подготовки 12.06.01 «Фотоника, приборостроение, оптические и биотехнические системы и технологии»

Код и наименование

Направленность 12.06.01_01 «Приборы и методы измерения (по видам измерений)»

Код и наименование

НАУЧНЫЙ ДОКЛАД

об основных результатах научно-квалификационной работы (диссертации)

Автор работы: Целищева А.А.

Научный руководитель: к.т.н., Семенов К.К.

Санкт Петербург – 2021

Научно-квалификационная работа выполнена в Высшей школе киберфизических систем и управления Института компьютерных наук и технологий федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Директор ВШ КФСУ: – Шкодырев Вячеслав Петрович, д.т.н., проф.

Научный руководитель: – Семенов Константин Константинович, к.т.н.,
доцент ВШКФСУ

Рецензент: – Мешалкин Михаил Анатольевич, к.т.н.,
старший научный сотрудник ФГУП «ВНИИМ
им. Д.И.Менделеева»

С научным докладом можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» и на сайте Электронной библиотеки СПбПУ по адресу: <http://elib.spbstu.ru>

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

В ходе работы было выполнено исследование методов метрологически обоснованного решения уравнений и систем уравнений при косвенных, совокупных и совместных измерениях. Актуальность выбранной темы работы подтверждается большим количеством публикаций в рецензируемых изданиях, посвященных вопросам обработки измерительной информации в компьютеризированных средствах измерения. Особое значение, выбранное направление научного исследования, приобретает в связи с нарастающим применением вычислительных средств в метрологических задачах и увеличивающейся, как следствие, потребности в средствах метрологического сопровождения используемого программного обеспечения.

Задача поиска решения нелинейных уравнений или систем нелинейных уравнений, чьи параметры заданы неточно, возникает при проведении научных исследований, при обработке результатов прямых измерений для получения результатов косвенных, совокупных или совместных измерений. Решение данной задачи представляет собой также математический интерес, поскольку предполагает разработку новых методов решения систем уравнений, устойчивых к неопределенности их параметров. Современное состояние исследований в данной области характеризуется отдельными работами, предлагающими упрощенные подходы к учету неопределенности исходных данных. Системных исследований и разработок в данной области практически нет.

Цель и задачи исследования

Основной целью диссертационной работы является получение новых методов решения уравнений и систем уравнений при косвенных, совокупных и совместных измерениях, учитывающих метрологическую специфику решаемых задач и в частности обеспечивающих гарантию получаемых интервальных оценок возможных значений корней уравнений и решений систем уравнений. Для достижения данной цели был решен ряд задач как

теоретического плана, так и практической направленности: обоснование сходимости создаваемых итерационных процедур и достоверности предоставляемых ими оценок; обоснование полученных теоретических результатов численными расчетами как на модельных примерах, так и на примерах из реальной метрологической практики.

Научная новизна

В ходе работы над диссертационным исследованием были разработаны методы и программные средства метрологического сопровождения расчетов, ведущихся в измерительных информационных системах и программах обработки неточных данных с решением нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений. Научная новизна заключается: в получении новых методов решения отдельных уравнений и их систем (коэффициенты которых выражаются результатами измерений), согласованных с точностью исходных данных и с действующими метрологическими нормами; в получении новых правил остановки итерационных процессов, также согласованных с точностью исходных данных; в достижении метрологического сопровождения решения уравнений или систем уравнений.

Теоретическая и практическая значимость

Настоящее исследование имеет высокую теоретическую и практическую значимость, т.к. в нем представлены новые методы и формулы для решения как отдельных, так и систем нелинейных уравнений, чьи коэффициенты заданы с погрешностями, а также разработаны реализующие их программные средства. Полученные оценки корней и решений оказываются согласованы с погрешностью исходных данных в соответствии с требованиями метрологической практики.

Апробация работы

Результаты работы апробированы на следующих научных конференциях и семинарах:

1. Студенческая научная конференция Института информационных технологий и управления «Информатика и кибернетика (COMCON-2015)»,

Санкт-Петербург, 22-24 апреля 2015 г.

2. Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Комплексная защита объектов информатизации – 2016», Санкт-Петербург, 1-5 июня 2016 г..

3. Всероссийская научно-практическая конференция «Измерения в современном мире», Санкт-Петербург, 6-7 июня 2017 г.

4. International Scientific Conference «Telecommunications, Computing and Control (TELECCON-2019)», St. Petersburg, November 18-19, 2019.

5. Юбилейные чтения, посвященные научной школе измерительных информационных технологий (90-летие первого выпуска студентов кафедры ИИТ ЛПИ), Санкт-Петербург, 1-2 ноября 2019 г.

6. XXIV Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям (SCM-2021). Санкт-Петербург, 26-28 мая 2021 г.

The XXIV International Conference on Soft Computing and Measurement (SCM-2021), St. Petersburg, May 26-28, 2021.

7. 2nd International Conference on Cyber-Physical Systems & Control (CPS&C-2021), St. Petersburg, June 29 –July 2, 2021.

8. Семинар кафедры измерительных информационных технологий Института компьютерных наук и технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. 2017-2019 гг.

Исследование было поддержано Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ), проект №19-31-90165.

Публикации

По материалам работы было опубликовано 9 печатных работ в журналах и сборниках конференций, из них 4 работы – в журналах из Перечня ВАК, а также изданиях, индексируемых в международных наукометрических базах данных. Также 2 статьи приняты к печати в научные журналы по специальности представляемого научного доклада и подготовлено одно учебное пособие.

Представление научного доклада: основные положения

Основными положениями представляемой работы, выносимыми на защиту научного доклада, являются следующие.

1. Разработан интервальный метод бисекции, позволяющий находить корни нелинейных уравнений, коэффициенты которых известны неточно, с учетом этих погрешностей, а также получать оценку пределов погрешности корней.

2. Разработан интервальный метод многомерной бисекции, позволяющий находить решения систем нелинейных уравнений, коэффициенты которых известны неточно, с учетом этих погрешностей, а также получать оценку пределов погрешности решений.

3. Выведены аналитические формулы для оценки погрешностей корней нелинейных уравнений и решений систем нелинейных уравнений, коэффициенты которых известны неточно, на основе линеаризации вычисляемых функций.

4. Разработана комбинация интервального метода Ньютона и аффинной интервальной арифметики для решения уравнений или систем уравнений с учетом погрешностей коэффициентов этих уравнений.

5. Разработаны правила остановки созданных итерационных процедур, согласующие момент их остановки с точностью исходных данных.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении поставлены основные цели и задачи по разработке подходов к решению уравнений и систем уравнений при косвенных, совокупных и совместных измерениях, которые обоснованы с метрологической точки зрения. Значения многих физических величин измеряются только косвенно, а значения других оцениваются по результатам совокупных или совместных измерений. При косвенных измерениях производятся прямые измерения величин, которые находятся в известной функциональной взаимосвязи с искомой величиной. Задача поиска решения в

таком случае с математической точки зрения сводится к решению уравнения или системы уравнений. Т.к. коэффициенты данных уравнений связаны с результатами проведенных прямых измерений, то на результат оказывает влияние наследуемая от них погрешность. Для решения подобных уравнений на практике используются различные итерационные методы. При применении таких методов на каждом шаге итерационного процесса происходит улучшение оценки корня вплоть до достижения необходимой точности. Но при этом зачастую погрешность исходных данных (коэффициентов уравнения) во внимание не принимается и не учитывается, что может приводить к искажениям получаемых результатов. Целью любого измерения является получение оценки действительного значения измеряемой величины с требуемой точностью. К достигаемым результатам метрологические нормативные документы предъявляют ряд требований. Согласно закону «Об обеспечении единства измерений» [1] результат выполненных измерений (в том числе и косвенных) должен быть в обязательном порядке сопровождается характеристикой его предельно возможной погрешности. Поэтому была поставлена задача разработать такие итерационные методы и способы их остановки, чтобы они позволяли учитывать подобные погрешности исходных данных.

При выполнении совокупных и части совместных измерений определение искомым результатов измерений также требуется выполнять решение систем уравнений (зачастую являющихся линейными). Таким образом, получение отмеченных методов и средств для обеспечения косвенных измерений естественным образом распространяется и на отмеченные прочие типы измерений.

В первой главе был выполнен обзор существующих методов решения нелинейных уравнений или систем нелинейных уравнений. Были рассмотрены различные итерационные методы (метод Ньютона и его модификации, метод простой итерации, метод Мюллера, метод бисекции и подобные ему вариации с другим подходом к делению интервала

локализации корня уравнения или решения системы нелинейных уравнений). Также были рассмотрены интервальные методы. В интервальном анализе используется замена арифметических операций и вещественных функций с вещественными числами интервальными операциями и функциями от интервального аргумента. При применении итерационных подходов к поиску решения сначала требуется определить его начальное приближение, а затем оно последовательно уточняется. Поэтому также были рассмотрены способы остановки итерационного процесса. Приведенные методы, обычно используемые для решения таких задач, не позволяют учитывать неточность исходных данных (коэффициентов уравнений), правила остановки также их не учитывают (можно оценить только методическую погрешность). Также был рассмотрен способ аналитической оценки погрешности корней полинома, представленный в литературе.

Во второй главе было выполнено расширение аналитического подхода к оценке погрешности корней уравнений и решений систем уравнений для любого вида функции, не только полинома. Полученный метод позволяет получать достоверные оценки при малых значениях погрешности коэффициентов.

Для оценки погрешности, унаследованной от коэффициентов решаемых уравнений, возможно использование аналитического подхода, основанного на идее В.Я. Крейнвича [2]. Суть этого метода заключается в следующем. Пусть задано уравнение $f(x, \mathbf{p}) = 0$, x_0 – корень данного уравнения, $\mathbf{p}^T = (p_1, \dots, p_m)$ – вектор параметров уравнения. При неточности коэффициентов \mathbf{p} данного уравнения ($\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}$, где $\Delta\mathbf{p}$ – значения абсолютной погрешности коэффициента, не превышающие пределов $\Delta^T = (\Delta_1, \dots, \Delta_m)$, таким образом, $|\Delta p_i| \leq \Delta_i$, где $i = 1, 2, \dots, k$) получается, что требуется найти корень уравнения $f(x, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) = 0$, корнем которого будет $\tilde{x}_0 = (x_0 + \Delta x_0)$, где Δx_0 – абсолютная погрешность корня. В этом случае должно иметь место равенство $f(x_0 + \Delta x_0, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) = 0$. Разработанный подход

к оценке погрешности корня x_0 , унаследованной от коэффициентов уравнения, действителен для малых погрешностей исходных данных.

Таким образом, для оценки погрешности Δx_0 функцию $f(x_0 + \Delta x_0, \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) - f(x_0, \mathbf{p})$ можно разложить в ряд Тейлора и использовать из него слагаемые первого порядка:

$$f(x_0 + \Delta x_0, \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) - f(x_0, \mathbf{p}) \approx \frac{\partial f(x_0, \mathbf{p})}{\partial x_0} \Delta x_0 + \sum_{i=1}^k \frac{\partial f(x_0, \mathbf{p})}{\partial p_i} \Delta p_i = 0.$$

Тогда, если решить полученное выражение относительно Δx_0 , для оценки Δx_0 будет применяться выражение:

$$|\Delta x_0| \leq \sum_{i=1}^k \left| \frac{\partial f(x_0, \mathbf{p})}{\partial p_i} / \frac{\partial f(x_0, \mathbf{p})}{\partial x_0} \right| \cdot \Delta_i. \quad (1)$$

Если при разложении функции $f(x_0 + \Delta x_0, \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) - f(x_0, \mathbf{p})$ в ряд Тейлора использовать слагаемые первого и второго порядка:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x_0, \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) - f(x_0, \mathbf{p}) \approx & \left(\frac{\partial f(x_0, \mathbf{p})}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 f(x_0, \mathbf{p})}{\partial x_0 \partial p_i} \cdot \Delta p_i \right) \cdot \Delta x_0 + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, \mathbf{p})}{\partial x_0^2} \cdot \Delta x^2 + \sum_{i=1}^k \frac{\partial f(x_0, \mathbf{p})}{\partial p_i} \cdot \Delta p_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 f(x_0, \mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j} \cdot \Delta p_i \cdot \Delta p_j = 0, \end{aligned}$$

для оценки Δx_0 будет применяться выражение:

$$|\Delta x_0| \leq \max \{ d_j \}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} d_j = & \left| \text{sign} \left(\frac{\partial f(x_0, \mathbf{p})}{\partial x_0} \right) \cdot \sqrt{D_j} - \left(\frac{\partial f(x_0, \mathbf{p})}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 f(x_0, \mathbf{p})}{\partial x_0 \partial p_i} \cdot \Delta p_i \right) \right| / \left| \frac{\partial^2 f(x_0, \mathbf{p})}{\partial x_0^2} \right|, \\ & j = 1, 2, \dots, 2^k, \end{aligned}$$

где d_j – значение погрешности корня, которое находится для значений $\Delta p_i = \pm \Delta_i$ для всех возможных сочетаний знаков погрешности.

Дискриминант вычисляется как

$$D = \left(\frac{\partial f(x_0, \mathbf{p})}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 f(x_0, \mathbf{p})}{\partial x_0 \partial p_i} \cdot \Delta p_i \right)^2 - \frac{\partial^2 f(x_0, \mathbf{p})}{\partial x_0^2} \left(2 \cdot \sum_{i=1}^k \frac{\partial f(x_0, \mathbf{p})}{\partial p_i} \Delta p_i + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 f(x_0, \mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j} \Delta p_i \Delta p_j \Bigg).$$

Отношение производных, входящих в каждое слагаемое суммы в формуле (1), является, по сути, коэффициентом чувствительности значения корня x_0 к погрешности коэффициента p_i .

Пусть задана система уравнений $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}^T$, где $\mathbf{F}^T = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ – вектор функций, чьи компоненты f_1, f_2, \dots, f_n достаточно гладкие, $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор аргументов, $\mathbf{p}^T = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ – вектор коэффициентов функций, значения которых неточны. Они имеют погрешности $\Delta \mathbf{p}^T = (\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_k)$, при этом их пределы не больше величин $\Delta^T = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k)$, т.е. $|\Delta p_i| \leq \Delta_i$, $i = 1, \dots, k$. Пусть точным решением системы является \mathbf{x}_0 . Тогда требуется решить систему $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) = \mathbf{0}^T$. Вектор $\tilde{\mathbf{x}}_0 = (\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0)$ является решением данной системы, где $\Delta \mathbf{x}_0^T = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ – вектор значений погрешностей компонент решения, возникающих из-за влияния погрешностей коэффициентов уравнения $\tilde{\mathbf{p}} = (\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p})$. Тогда должно обеспечиваться равенство $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0, \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) = \mathbf{0}^T$. Таким образом, для оценки погрешности $\Delta \mathbf{x}_0$ каждую компоненту \mathbf{F} функций вида $f_i(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0, \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) - f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})$ можно разложить в ряд Тейлора и использовать слагаемые первого порядка. Система уравнений в матричном представлении будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{J}_x \cdot \Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{c}, \quad (3)$$

$$\text{где } \mathbf{J}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ – матрица Якоби для вектор-функции } \mathbf{F},$$

$$\mathbf{c}^T = - \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})}{\partial p_j} \cdot \Delta p_j, \dots, \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})}{\partial p_j} \cdot \Delta p_j \right) - \text{вектор правых частей}$$

уравнений, входящих в систему. Вектор \mathbf{c} можно записать как $\mathbf{c} = -\mathbf{J}_p \cdot \Delta \mathbf{p}$,

$$\text{где матрица } \mathbf{J}_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})}{\partial p_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})}{\partial p_k} \end{pmatrix}.$$

При условии, что матрица \mathbf{J}_x не является особенной, систему уравнений (3) можно решить относительно компонент вектора $\Delta \mathbf{x}_0$ следующим образом: $\Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{J}_x^{-1} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{J}_x^{-1} \cdot \mathbf{J}_p \cdot \Delta \mathbf{p}$, где \mathbf{J}_x^{-1} – обратная матрица \mathbf{J}_x .

Поскольку заданы лишь ограничения сверху на значения погрешностей коэффициентов уравнений, то оценку погрешности i -го элемента Δx_0 можно выразить следующим образом:

$$|\Delta x_i| \leq \sum_{j=1}^k |g_{ij}| \cdot \Delta_j, \quad (4)$$

где g_{ij} – элемент матрицы $\mathbf{G} = \mathbf{J}_x^{-1} \cdot \mathbf{J}_p$.

Если погрешности коэффициентов уравнений системы будут не достаточно малыми, необходимо использовано приближение второго порядка, но тогда будет невозможно получить простую оценку погрешности получаемого решения.

В пакете Matlab были разработаны процедуры, реализующие описанный аналитический подход к оценке пределов погрешности корня. Было проведено моделирование на различных примерах для проверки получаемых результатов, сравнение проводилось на простых примерах, для которых возможно вычислить аналитически погрешности корня. Полученные оценки пределов погрешности корня при сравнении с их действительными значениями оказались достоверными.

В третьей главе приведена модификация метода традиционного бисекции, которая позволяет искать корни уравнений (или решения систем уравнений) совместно с оценками предела их погрешности, наследуемой от погрешности коэффициентов решаемых уравнений. Также для данного метода разработаны правила остановки, использующие информацию о неточности данных.

Метод бисекции был модифицирован таким образом, что он позволяет с гарантией с заданной точностью получить оценку корня уравнения и учитывает при этом погрешность коэффициентов этого уравнения. Пусть ищется корень уравнения $f(x, \mathbf{p}) = 0$, где x – искомая величина (результат косвенных измерений), $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ – вектор коэффициентов (результат прямых измерений). В начале алгоритма определен начальный интервал локализации корня $I_1 = [a_1, b_1]$. Данный алгоритм может применяться при условии монотонности функции f , а также необходимо, чтобы f на границах интервала I_1 принимала бы значения разных знаков. Алгоритм интервальной бисекции разделен на две части: в первой части применяется обычный метод бисекции до тех пор, пока он применим для уравнений с неточными коэффициентами, во второй – происходит дальнейшее уточнение границ интервала возможных значений корня.

Первой частью алгоритма является выполнение обычного метода бисекции. В этой части на каждом i -м шаге итерационной процедуры вычисляется значение середины $c_i = (a_i + b_i) / 2$ текущего интервала локализации корня $I_i = [a_i, b_i]$, а также определяется величина $\Delta f(c_i, \mathbf{p})$ – оценка погрешности вычисления значения функции f с учетом неточности коэффициентов в середине c_i , которое можно вычислить, например,

следующим образом:
$$\Delta f(c_i, \mathbf{p}) = \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial f(c_i, \mathbf{p})}{\partial p_j} \right| \cdot \Delta p_j,$$
 где Δp_j – предел

абсолютной погрешности коэффициента p_j решаемого уравнения. Для определения значений частных производных может быть использован алгоритм автоматического дифференцирования функций [3]. На каждом

итерационном шаге отбрасывается часть интервала I_i в зависимости от знака функции в c_i : если $f(a_i, \mathbf{p}) \cdot f(c_i, \mathbf{p}) > 0$, то $I_{i+1} = [a_i, c_i]$, иначе $I_{i+1} = [c_i, b_i]$. Данная процедура продолжается до тех пор, пока значения $(f(c_i, \mathbf{p}) - \Delta f(c_i, \mathbf{p}))$ и $(f(c_i, \mathbf{p}) + \Delta f(c_i, \mathbf{p}))$ имеют разный знак, или, что то же самое,

$$|f(c_i, \mathbf{p})| < \Delta f(c_i, \mathbf{p}). \quad (5)$$

Если условие (5) выполняется, то на данной итерации уже нельзя точно определить, в какой половине I_i располагается корень и, следовательно, какая его часть должна быть отброшена. Данная ситуация проиллюстрирована рис. 1. В таком случае начинает выполняться вторая часть алгоритма: находятся границы интервала возможных значений корня, возникающего из-за погрешностей коэффициентов уравнения.

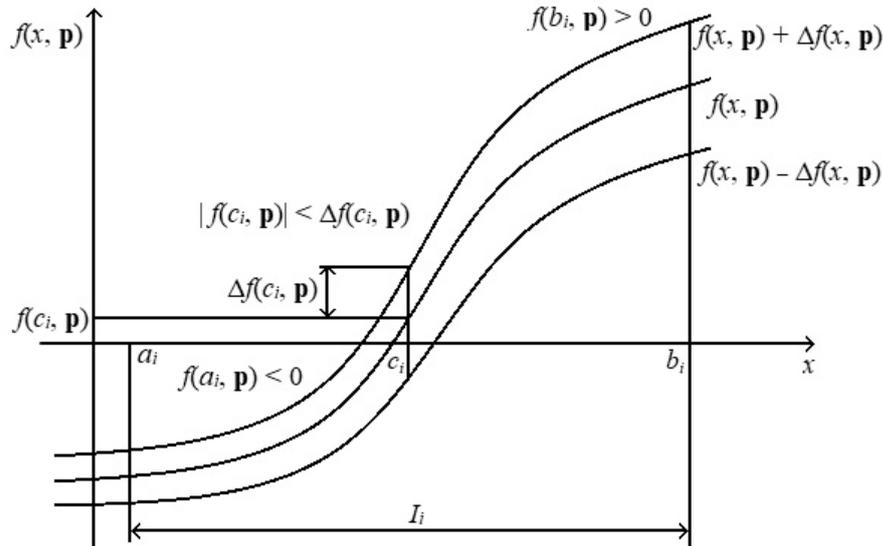


Рисунок 1 – Момент перехода от первой ко второй части алгоритма интервальной бисекции

При поиске левой границы интервала возможных значений корня используется следующее правило. Интервал $\mathbf{a}_j = [\underline{a}_j, \bar{a}_j]$ локализует левую границу искомого интервала на j -ой итерации второго этапа рассматриваемого алгоритма. При $j = 1$ этот интервал равен левой части интервала I_i , т. е. $\mathbf{a}_1 = [a_i, c_i]$. Если выполняется следующее условие

$$(f(\text{mid } \mathbf{a}_j) - \Delta f(\text{mid } \mathbf{a}_j)) \cdot (f(\text{mid } \mathbf{a}_j) + \Delta f(\text{mid } \mathbf{a}_j)) < 0$$

$$\text{или } |f(\text{mid } \mathbf{a}_j, \mathbf{p})| < \Delta f(\text{mid } \mathbf{a}_j, \mathbf{p}),$$

где $\text{mid } \mathbf{a}_j = (\bar{a}_j + \underline{a}_j) / 2$ – середина интервала \mathbf{a}_j , $\Delta f(\text{mid } \mathbf{a}_j)$ – оценка возможных значений погрешности значения функции f в точке $\text{mid } \mathbf{a}_j$, то отбрасывается правая часть интервала, и новый интервал будет равен $\mathbf{a}_{j+1} = [\underline{a}_j, \text{mid } \mathbf{a}_j]$. В противном случае отбрасывается левая часть, и новый интервал будет равен $\mathbf{a}_{j+1} = [\text{mid } \mathbf{a}_j, \bar{a}_j]$ (рис. 2а).

Для поиска правой границы интервала возможных значений корня применяется аналогичный подход. Интервал $\mathbf{b}_j = [\underline{b}_j, \bar{b}_j]$ локализует правую границу искомого интервала на j -ом итерационном шаге второго этапа данного алгоритма. При $j = 1$ этот интервал равен правой части интервала I_i , т.е. $\mathbf{b}_1 = [c_i, b_i]$. Если выполняется условие

$$\left(f(\text{mid } \mathbf{b}_j) - \Delta f(\text{mid } \mathbf{b}_j) \right) \cdot \left(f(\text{mid } \mathbf{b}_j) + \Delta f(\text{mid } \mathbf{b}_j) \right) < 0$$

$$\text{или } |f(\text{mid } \mathbf{b}_j, \mathbf{p})| < \Delta f(\text{mid } \mathbf{b}_j, \mathbf{p}),$$

где $\text{mid } \mathbf{b}_j = (\bar{b}_j + \underline{b}_j) / 2$ – середина интервала \mathbf{b}_j , $\Delta f(\text{mid } \mathbf{b}_j)$ – оценка возможных значений погрешности значения функции f в точке $\text{mid } \mathbf{b}_j$, то отбрасывается его левая часть, и новый интервал будет равен $\mathbf{b}_{j+1} = [\text{mid } \mathbf{b}_j, \underline{b}_j]$. Иначе отбрасывается правая часть, и новый интервал будет равен $\mathbf{b}_{j+1} = [\bar{b}_j, \text{mid } \mathbf{b}_j]$ (рис. 2б).

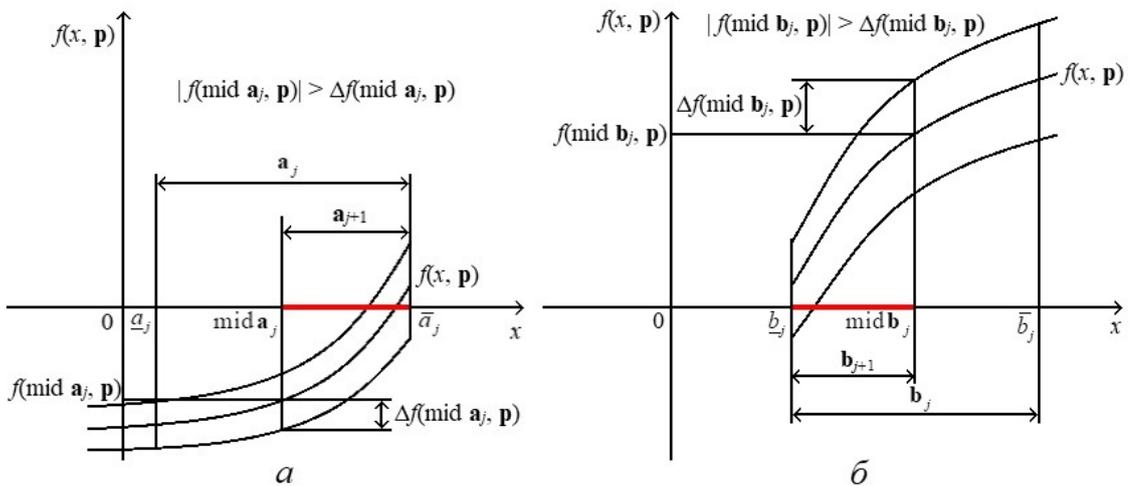


Рисунок 2 – Одна итерация уточнения (а) нижней границы \mathbf{a} и (б) верхней границы \mathbf{b} множества возможных значений корня во второй части алгоритма интервальной бисекции

Уточнение границ интервалов \mathbf{a}_j и \mathbf{b}_j будет производиться, пока не будет выполнено условие остановки. В качестве условия остановки итерационного процесса может быть использовано одно из следующих правил.

1) На каждом итерационном шаге второй части алгоритма выполняется вычисление полуширины интервала: $\Delta_j = |\bar{b}_j - \underline{a}_j| / 2$. Данное значение является оценкой предела погрешности искомого корня уравнения косвенных измерений, вызванного неточностью его коэффициентов, и подвергается округлению по правилам метрологии. В соответствии с ними пределы возможной погрешности приводятся с одной, максимум двумя, значащими цифрами. Это условие задает по сути дела дополнительное метрологическое требование к остановке итерационного процесса, которое позволяет своевременно остановить вычисления и не выполнять лишние итерации. Итерационный процесс предлагается остановить, если выполнено

$$\text{round}(\Delta_j) = \text{round}(\Delta_{j-1}), \quad (6)$$

где round – оператор округления.

2) На каждом j -ом шаге выполняется вычисление оценок левой и правой границ искомого интервала. Значение $\bar{\Delta}_j = |\bar{b}_j - \underline{a}_j| / 2$ оценивает предел возможной погрешности корня уравнения сверху получаемого интервала, а $\underline{\Delta}_j = |\underline{b}_j - \bar{a}_j| / 2$ – снизу. Эти величины округляются в большую сторону до одной или двух значащих цифр по правилам метрологии. Итерационный процесс будет остановлен, если округленное значение $\bar{\Delta}_j$ будет совпадать с округленным значением $\underline{\Delta}_j$:

$$\text{round}(\bar{\Delta}_j) = \text{round}(\underline{\Delta}_j), \quad (7)$$

где round – оператор округления. Иначе будет продолжаться уточнение I_j интервала локализации корня.

Псевдокод описанного алгоритма приведен ниже.

`intervalBisection1D(I, f, p, Δp, ε)`

Исходные данные:

$f(x, \mathbf{p}) = 0$ // решаемое уравнение
 $I_1 = [a_1, b_1]$ // начальный интервал локализации корня
 $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ // вектор коэффициентов уравнения
 $\Delta \mathbf{p} = (\Delta p_1, \dots, \Delta p_m)$ // вектор пределов абсолютной погрешности \mathbf{p}
 ε // малая величина

Алгоритм:

$i := 1$ // инициализация счетчика итераций первого этапа
 $c_i := (a_i + b_i)/2$ // вычисление середины интервала
While $|b_i - a_i| \leq 2\varepsilon$ // условие выхода из итерационного цикла в первой
// части бисекции
 $\Delta f(c_i, \mathbf{p}) := \text{findErrorFunc}(c_i, f, \mathbf{p}, \Delta \mathbf{p})$ // определение предела
// возможной абсолютной
// погрешности значения $f(c_i, \mathbf{p})$
If $|f(x, \mathbf{p})| < \Delta f(x, \mathbf{p})$ // условие перехода ко второй части алгоритма
Then $j := 1$ // инициализация счетчика итераций второго этапа
 $\mathbf{a}_1 := [a_i, c_i]; \mathbf{b}_1 := [c_i, b_i]$ // инициализация интервалов \mathbf{a}_j и \mathbf{b}_j
 $\Delta_j = |\underline{b}_j - \underline{a}_j|/2$ // оценка предела возможной погрешности корня
 $\lceil \Delta_j \rceil := \text{round}(\Delta_j)$ // округление Δ_j
Do
// вычисление середин интервалов \mathbf{a}_j и \mathbf{b}_j
 $\text{mid}\mathbf{a}_j := (\underline{a}_j + \bar{a}_j)/2; \text{mid}\mathbf{b}_j := (\underline{b}_j + \bar{b}_j)/2$
// определение пределов возможной абсолютной
// погрешности значения $f(\text{mid}\mathbf{a}_j, \mathbf{p})$ и $f(\text{mid}\mathbf{b}_j, \mathbf{p})$
 $\Delta f(\text{mid}\mathbf{a}_j, \mathbf{p}) := \text{findErrorFunc}(\text{mid}\mathbf{a}_j, f, \mathbf{p}, \Delta \mathbf{p})$
 $\Delta f(\text{mid}\mathbf{b}_j, \mathbf{p}) := \text{findErrorFunc}(\text{mid}\mathbf{b}_j, f, \mathbf{p}, \Delta \mathbf{p})$
// сокращение интервалов \mathbf{a}_j и \mathbf{b}_j
If $|f(\text{mid}\mathbf{a}_j, \mathbf{p})| < \Delta f(\text{mid}\mathbf{a}_j, \mathbf{p})$
Then $\underline{a}_{j+1} := \underline{a}_j; \bar{a}_{j+1} := \text{mid}\mathbf{a}_j;$
Else $\underline{a}_{j+1} := \text{mid}\mathbf{a}_j; \bar{a}_{j+1} := \bar{a}_j;$
End
If $|f(\text{mid}\mathbf{b}_j, \mathbf{p})| < \Delta f(\text{mid}\mathbf{b}_j, \mathbf{p})$
Then $\underline{b}_{j+1} := \text{mid}\mathbf{b}_j; \bar{b}_{j+1} := \bar{b}_j;$
Else $\underline{b}_{j+1} := \underline{b}_j; \bar{b}_{j+1} := \text{mid}\mathbf{b}_j;$
End
 $I_{i+j+1} := [\underline{a}_{j+1}; \bar{b}_{j+1}];$ // новый интервал локализации
// корня
 $\Delta_{j+1} := |\underline{b}_{j+1} - \underline{a}_{j+1}|/2$ // оценка предела возможной
// погрешности корня
 $\lceil \Delta_{j+1} \rceil := \text{round}(\Delta_{j+1})$ // округление Δ_{j+1}
 $j := j + 1;$ // увеличение счетчика итераций
// условие выхода из вложенного цикла во второй части бисекции

```

While       $\lceil \Delta_j \rceil \neq \lceil \Delta_{j-1} \rceil$  OR  $(|\underline{a}_j - \bar{a}_j| \leq 2\varepsilon$  AND  $|\underline{b}_j - \bar{b}_j| \leq 2\varepsilon)$ 
i := i + j;    // общий счетчик итераций для двух частей алгоритма
Break;     // выход из основного цикла
End
// сокращение интервала локализации корня  $I_i$ 
If       $f(a_i, \mathbf{p}) \cdot f(c_i, \mathbf{p}) < 0$ 
Then   $a_{i+1} := a_i; b_{i+1} := c_i;$ 
Else   $a_{i+1} := c_i; b_{i+1} := b_i;$ 
End
 $I_{i+1} := [a_{i+1}; b_{i+1}];$     // новый интервал локализации корня
 $c_{i+1} := (a_{i+1} + b_{i+1})/2;$     // середина интервала
i := i + 1;    // увеличение счетчика итераций
End
Return   $I_i$     // найденное значение интервала локализации корня

```

Выходные данные:

I_i // найденное значение интервала локализации корня

Также была создана модификация метода бисекции, которая позволяет найти решение систем уравнений косвенных измерений. Кратко ее суть состоит в следующем. Заданная система нелинейных уравнений $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (f_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \dots, f_k(\mathbf{x}, \mathbf{p}))^T = \mathbf{0}^T$ (где f_1, \dots, f_k – монотонные функции) связывает искомые значения $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ (результаты косвенных измерений) со значениями параметров $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ (результатами прямых измерений). Определена такая подобласть Ω_i для каждой функции f_i , что в точках ее границы $\delta\Omega_i$ значения f_i имеют разный знак. Тогда, т.к. функция f_i монотонна, в подобласти Ω_i будет содержаться хотя бы один ее корень, который может быть решением для данной системы уравнений.

Из этого следует, что решения системы уравнений ищутся среди значений заданной области локализации. В начале выполнения алгоритма данная область определена как $\Omega^{(1)} = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ (n -мерный прямоугольный параллелепипед или n -брус), после выполнения первой итерации границы этой области будут сужены до $\Omega^{(2)} \subseteq \Omega^{(1)}$, далее – до $\Omega^{(3)} \subseteq \Omega^{(2)}$ и т.д. На произвольном шаге метода сужение происходит делением области локализации решения на текущем итерационном шаге на части по

каждому аргументу x_i , из которых исключаются подобласти, заведомо не содержащие решений. В данном методе выполняется деление на прямоугольные подобласти $\Omega^{(jk)}$, $k = 1, 2, \dots, K$ на каждом j -м шаге. При этом находятся знаки функций f_i в вершинах всех n -брусков $\Omega^{(jk)}$ с учетом неточности коэффициентов \mathbf{p} – как и в одномерном случае. Это выполняется, потому что вследствие этой неточности, знак функции, возможно, будет неопределенным в пределах погрешности параметров \mathbf{p} : при одних возможных значениях параметров функция будет принимать положительные значения, при других – отрицательные. Затем, используя полученные знаки функций, по их сочетанию находятся и исключаются бруски, в которых точно не содержатся решения системы (т.е. на их границах знак всех функций f_i одинаковый). Далее выполняется очередная итерация алгоритма.

Границы области локализации решений системы сужаются, пока размеры данной области не будут удовлетворять метрологически обоснованному условию остановки алгоритма, например, как в уже приведенном ранее методе для одномерного случая.

1) На каждой итерации выполняется вычисление оценок $\Delta_j = (\Delta_{j1}, \dots, \Delta_{jn})^T$ предельных погрешностей для всех компонент решения. Здесь Δ_{ji} – полуширина интервала возможных значений переменной x_i на j -ой итерации, получаемая проекцией множества $\Omega^{(j)}$ на ось значений x_i . Итерационный процесс предлагается остановить, когда будет выполнено условие $\text{round}(\Delta_j) = \text{round}(\Delta_{j-1})$, где round – оператор округления компонент вектора по правилам метрологии.

2) На каждом итерационном шаге выполняется вычисление двух оценок: предела возможной погрешности решения системы снаружи подобласти $\Omega^{(j)}$ $\bar{\Delta}_j$ и предела возможной погрешности внутри $\underline{\Delta}_j$. Затем выполняется округление этих значений по правилам метрологии. Итерационный процесс будет остановлен, когда округленное внутреннее значение $\bar{\Delta}_j$ будет совпадать с округленным значением $\underline{\Delta}_j$:

$$\text{round}(\bar{\Delta}_j) = \text{round}(\underline{\Delta}_j).$$

В пакете Matlab были разработаны процедуры, реализующие описанный аналитический подход к оценке пределов погрешности корня. Было проведено математическое моделирование на различных примерах для проверки получаемых результатов. Полученные оценки пределов погрешности корня при сравнении с их действительными значениями оказались достоверными.

Приведем пример решения одного уравнения для иллюстрации описанного метода интервальной бисекции. Пусть необходимо найти корень следующего уравнения, описывающее распространение загрязнения во внешней среде [4]:

$$f(x, a, b) = e^{ax} - bx = 0, \quad (8)$$

где a, b – коэффициенты уравнения, результаты прямых измерений, имеющие погрешности, x – искомая величина, результат косвенных измерений. Было проведено моделирование для следующих исходных данных: значения коэффициентов $a = -1,10$, $b = 8,00$, их погрешности $\Delta a = 0,05$, $\Delta b = 0,15$. Начальный интервал локализации корня для бисекции выбран равным $I_1 = [0; 0,50]$. Округление получаемой оценки погрешности Δx выполнялось по правилам метрологии до одной значащей цифры. Остановка выполнялась по правилу (6). Величина допустимой вычислительной ошибки выбрана равной $\varepsilon = 10^{-5}$.

Полученные приближения корня и оценки границ интервала его погрешности на выполненных итерациях алгоритма приведены в табл. 1. Значение корня, если выполнять его поиск без учета погрешностей коэффициентов уравнения, составило $x^* = 0,110672$. Последовательности полученных приближений корня и границ интервала его возможной погрешности, унаследованной от результатов прямых измерений, представлены в табл. 1, а также на рис. 3 и 4.

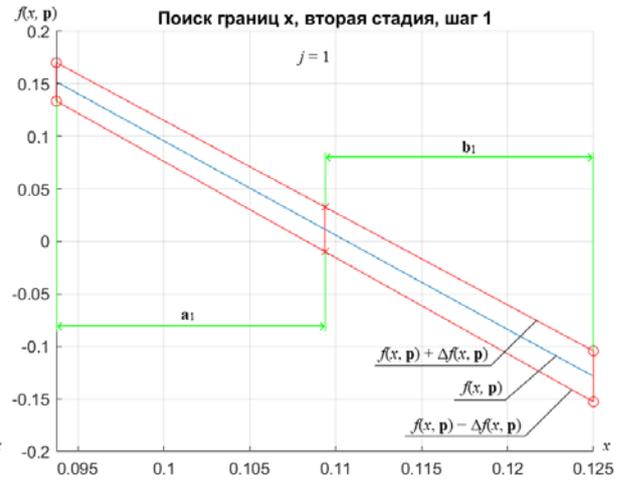
Таблица 1 – Приближения корня уравнения и пределы его погрешности на разных итерациях интервальной бисекции

Номер итерации		Приближение корня на различных итерациях	Оценки границ интервала возможных значений корня	
первый этап, i	второй этап, j		левая	правая
1	–	0,2500	0,0000	0,5000
2	–	0,1250	0,0000	0,2500
3	–	0,0625	0,0000	0,1250
4	–	0,0937	0,0625	0,1250
5	1	0,1094	0,0937	0,1250
–	2	0,1094	0,1015	0,1172
–	3	0,1094	0,1054	0,1133
–	4	0,1104	0,1074	0,1133
–	5	0,1104	0,1074	0,1133

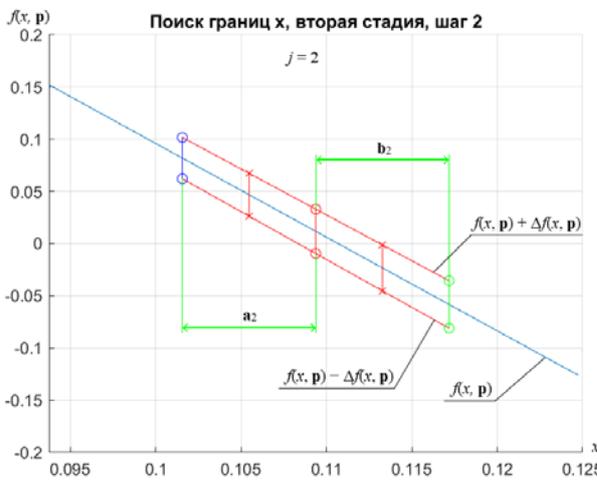
На 5-ой итерации значение корня или середины интервала локализации корня было таким, что условие (6) было выполнено, т.е. в данной точке функция может принимать как положительные, так и отрицательные значения из-за неточности ее параметров. После этого шага началось выполнение второй части алгоритма, по результатам окончания которой были найдены следующие оценки границ интервала возможных значений корня: $[0,107422, 0,113281]$. Было выполнено 8 итераций, если не считать шаги с начальными приближениями для каждого этапа. Полученное решение $x = 0,110 \pm 0,003$ содержит в себе значение x^* .



a



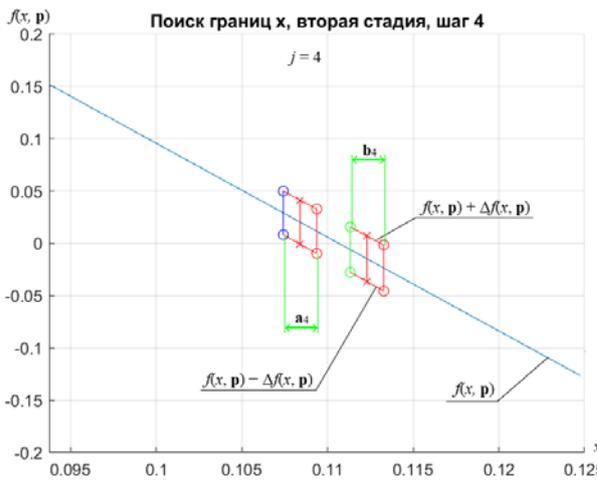
б



в



г



д



е

Рисунок 3 – Поиск границ интервала корня: а – первая часть алгоритма бисекции ($i = 1 \dots 5$ шаги итерационного процесса), б-е – вторая часть алгоритма бисекции ($j = 1 \dots 5$ шаги итерационного процесса)

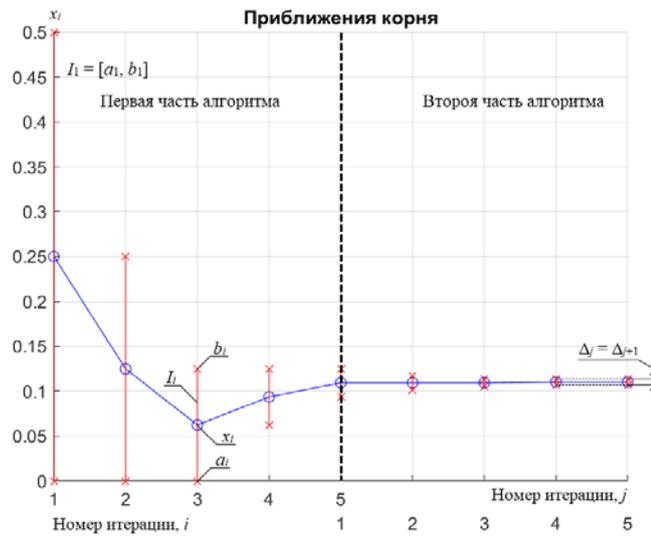


Рисунок 4 – Поиск границ интервала корня: последовательность приближений корня и оценок границ его погрешностей на разных итерациях

На рис. 3а представлен процесс поиска корня в первой части алгоритма интервальной бисекции. На рис. 3б изображена 5-ая его итерация, на которой было выполнено условие перехода ко второму этапу (5). На рис. 3б-3е представлены итерационные шаги во второй части алгоритма, когда выполнялось уточнение границ интервала возможных значений корня. На шаге $j = 5$ (рис. 3е) итерационный процесс остановился, т.к. было выполнено условие (6), т.е. округленная предельная погрешность корня на данном и предыдущем шагах оказались равны: $\lceil \Delta_5 \rceil = \lceil \Delta_4 \rceil$. На рис. 4 изображены приближения корня и оценки интервала его возможной погрешности на выполненных итерациях.

Была выполнена проверка полученного результата методом Монте-Карло. Уравнение (8) было решено с помощью функции Matlab fzero. Данные для расчетов соответствовали описанным условиям выше. Количество испытаний в методе Монте-Карло было равным 10^6 . Начальное приближение корня было принято равным $x_0 = 0,12$. Был получен интервал возможных значений корня $x = [0,108330, 0,113119]$, после округления результат будет следующим $x = 0,1107 \pm 0,0025$. Полученные значения с помощью интервальной бисекции и метода Монте-Карло хорошо согласуются, данный факт показывает, что полученные оценки погрешностей достоверны.

В четвертой главе впервые рассмотрена такая модификация интервального метода Ньютона, которая позволяет искать решения уравнений с учетом погрешностей коэффициентов. В предложенном подходе в качестве представления значений искомых величин и коэффициентов уравнений были использованы как классические интервалы, так и их обобщение в виде аффинной арифметики.

При применении интервального метода Ньютона поиск решения уравнения производится посредством последовательных приближений [5]. Сначала задается начальный интервал значений x_0 , заключающий в себе область, которая содержит все корни. Пусть f – непрерывно дифференцируемая функция на x_0 . Пусть $x^* \in x_0$ – корень уравнения $f(x^*) = 0$. Тогда для любой точки $x \in x_0$ из этого интервала по теореме Лагранжа следует $f(x) - f(x^*) = (x - x^*)f'(\xi)$, где ξ – некоторая точка между x и x^* . Из того, что $f(x^*) = 0$ и $f'(\xi) \neq 0$, следует:

$$x^* = x - \frac{f(x)}{f'(\xi)}. \quad (7)$$

Пусть $f'(x)$ – интервальная оценка производной f . Тогда, выполнив интервальное расширение (выполнив аналитическое продолжение оператора Ньютона $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}$) приведенного выше выражения (7), получим следующее включение:

$$x^* \in x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

при $0 \notin f'(x)$.

В рассматриваемом методе применяется интервальный оператор Ньютона N для функции f и ее интервальной производной f' (выполняющий отображение $\mathbb{IR} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}$) [6]:

$$N(x, x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad (9)$$

где x – некоторая точка из интервала x . С помощью оператора Ньютона

отыскивается новый интервал, в котором будет находиться решение уравнения. На каждой итерации для сужения интервала, содержащего решение уравнения, применяется вычисление пересечения интервалов $\mathbf{x} \cap N(\mathbf{x}, x)$. Таким образом, для нахождения корня в интервальном методе Ньютона используется следующая формула [6]:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} \cap N(\mathbf{x}_{k-1}, x_{k-1}), \quad x_{k-1} \in \mathbf{x}_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В качестве правила прекращения выполнения итераций возможно применение следующего условия: ширина интервала \mathbf{x}_k должна стать меньше заданного малого числа ε (т.е. необходимо уменьшать интервал, пока не будет получена некоторая заданная точность корня) [6]. Середина интервала \mathbf{x}_{k-1} , обозначаемая как $\text{mid } \mathbf{x}_{k-1}$, часто используется в качестве x_{k-1} [7].

В многомерном интервальном методе Ньютона используются аналогичные формулы [5]. При этом скалярные величины заменяются векторными, производные – матрицами Якоби, которые должны быть невырожденными. Тогда для нахождения решения системы нелинейных уравнений $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ или $f_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$ на заданном многомерном интервале значений \mathbf{x}_0 , используется многомерный оператор Ньютона (выполняющий отображение $ID \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) [6]:

$$N(\mathbf{x}, x) = x - \mathbf{J}(\mathbf{x})^{-1} \cdot \mathbf{F}(x). \quad (10)$$

В многомерном интервальном методе Ньютона применяется следующая формула, которая является обобщением формулы (9) с использованием многомерного интервального оператора Ньютона [6]:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} \cap N(\mathbf{x}_{k-1}, x_{k-1}), \quad x_{k-1} \in \mathbf{x}_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для того, чтобы с помощью интервального метода Ньютона можно было учитывать неточность коэффициентов уравнения при нахождении корня, необходимо внести изменения в формулу (9). Так, если ищется корень уравнения $f(x, \mathbf{p})$, где \mathbf{p} – коэффициенты уравнения, заданные с погрешностью, можно применить следующую формулу:

$$\mathbf{x}_k = \left(\text{mid } \mathbf{x}_{k-1} - \frac{f(\text{mid } \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{p})}{f'(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{p})} \right) \cap \mathbf{x}_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Значения коэффициентов уравнения \mathbf{p} и получаемых приближений корня задаются как интервалы (классические или аффинные). Аналогичным образом можно изменить и формулу (10) для поиска решения системы уравнений.

Таким образом, при использовании интервального метода Ньютона сначала задаются начальные условия (параметры и их погрешности и начальный интервал корня), далее на каждой итерации вычисляется приближение интервала возможных значений корня по формуле (11). Итерационный процесс будет продолжаться, пока не будет выполнено правило останова. Условия выхода из цикла могут быть следующими.

1) Расстояние между границами полученного интервала приближения корня будет меньше требуемой точности ε : $|\bar{x}_k - \underline{x}_k| \leq \varepsilon$, где \bar{x}_k , \underline{x}_k – компоненты вектора \mathbf{x}_k (его границы), ε – малая величина.

2) Разница между интервалами приближений корня на последних двух шагах меньше некоторой заданной малой величины ε :

$$|\underline{x}_k - \underline{x}_{k-1}| \leq \varepsilon \quad \text{и} \quad |\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}| \leq \varepsilon, \quad (12)$$

где \bar{x}_k , \underline{x}_k – компоненты вектора \mathbf{x}_k (его границы), ε – малая величина.

3) Округленное значение предела возможной погрешности корня на текущем шаге будет равно значению предела погрешности на предыдущем шаге: $\lceil \Delta_k \rceil = \lceil \Delta_{k-1} \rceil$, где Δ_k , Δ_{k-1} – округленные значения предела возможной погрешности корня на текущем и предыдущем шагах, $\Delta_k = |\bar{x}_k - \underline{x}_k| / 2$ (т.е. можно использовать правило (б)).

При выполнении одного из этих условий, итерационный процесс следует остановить.

В пакете Matlab были разработаны процедуры, реализующие описанный интервальный метод Ньютона, который локализует корни уравнений на заданном интервале рассмотрения с учетом погрешностей

коэффициентов уравнений. Также была выполнена реализация интервальной арифметики и аффинной арифметики на основе объектно-ориентированного подхода в программировании. Было проведено моделирование на различных примерах для проверки получаемых результатов с помощью метода Монте-Карло. Полученные оценки корня и границ его погрешности оказались достоверными.

В пятой главе выполнено сравнение методов, описанных в 2-4 главах. Модификации интервального метода Ньютона обладают теми же достоинствами и недостатками, что и традиционный метод Ньютона: методы обладают квадратичной сходимостью, но для ее достижения необходимо, чтобы начальное приближение было хорошо задано; многие задачи не обеспечивают глобальную сходимость; в случае с поиском решения системы нелинейных уравнений на каждом итерационном шаге метода необходимо вычислять обратные матрицы – возможно, в условиях плохой обусловленности. Часть этих недостатков может быть преодолена с помощью модификаций интервального метода Ньютона (метод Кравчика и метод Хансена-Сенгупты). Также преимуществом интервальных методов Ньютона является то, что с их помощью можно получить решения, которые включают в себя точные значения, а также предоставляют точные границы интервала неопределенности [7].

Недостатком метода бисекции можно назвать линейную скорость сходимости. Также должны быть выполнены требования к функции, корень которой требуется найти: необходимо, чтобы она была монотонна на начальном интервале локализации искомого корня. Преимущество метода заключается в том, что возможно применение бисекции для недифференцируемых непрерывных функций. Предложенные в работе модификации метода бисекции позволяют, как и обычный метод бисекции, гарантированно найти решение (при выполнении условий работы метода).

При использовании интервального метода Ньютона возможна ситуация, когда в интервале локализации корня уравнения содержится ноль

производной функции. В таком случае выполняется деление исходного интервала локализации [6], при этом применяется бисекция или другие способы разбиения интервала.

Аналитический подход к оценке погрешности решения уравнений, вызванной погрешностями его коэффициентов, сводится к оценке производных функции или вектор-функции, чьи нули требуется отыскать. Достоинством данного метода является то, что при его использовании выполняется оценка пределов погрешности корня или решения, не зависящая от примененного метода решения уравнения или системы. При этом методические погрешности, которые возникают вследствие применения конкретного метода решения, не будут учтены. Недостатком же подхода является то, что достоверность оценок погрешности решения гарантируется лишь при малых погрешностях коэффициентов уравнения.

Было проведено исследование для определения характера зависимости получаемых результатов оценки погрешности корня уравнения от величины погрешности параметров этого уравнения. Выполнено сравнение на примерах расчетов и изучена зависимость от величины погрешности параметров. В пакете Matlab было проведено моделирование для ряда модельных примеров уравнений.

Рассматривались результаты работы ряда методов:

- интервального метода Ньютона с учетом погрешности параметров функции, чей корень отыскивался, при применении классической интервальной арифметики (`intNewtonParamIntIA`);

- интервального метода Ньютона с учетом погрешности параметров функции, чей корень отыскивался, при использовании аффинной арифметики (`intNewtonParamIntAA`);

- модифицированной бисекции, учитывающей погрешности параметров функции (`intervalBisection1D`);

- аналитического метода расчета погрешности корня решаемого уравнения, основанного на локальном его приближении усеченным рядом

Тейлора (analytmeth1 – первые слагаемые, analytmeth2 – первые и вторые слагаемые).

Также для проверки достоверности полученных результатов использовались значения погрешности корня, вычисленные аналитически, т.к. уравнения, использованные для моделирования, позволяли выполнить аналитическое решение, поэтому было возможно выписать выражение для корня, которое связывает его со значениями коэффициентов уравнения. Непосредственная программная реализация такой формулы позволила получить точные границы интервала возможных значений искомого корня для заданных значений параметров уравнений.

В частности моделирование было выполнено для уравнения

$$f(x) = ax^2 - b = 0, \quad (13)$$

где a, b – результаты прямых измерений, x – неизвестная величина (результат косвенных измерений). Моделирование было произведено для следующих значений коэффициентов: $a = 1,00$, $b = 9,000$. Начальный интервал был задан равным $x_0 = [2, 5]$. Точное значение корня – $x^* = 3$. Для всех испытаний упомянутая выше среди критериев остановки итерационного процесса величина допустимой вычислительной ошибки была выбрана равной $\varepsilon = 10^{-5}$. Округление получаемой оценки погрешности Δx для метода intervalBisection1D выполнялось по правилам метрологии до 2 значащих цифр. Остановка для метода intervalBisection1D выполнялась по правилу (7), для методов intNewtonParamIntIA и intNewtonParamIntAA – по правилу (12). Для оценки погрешности корня методами analytmeth1 и analytmeth2 использовалось точное значение корня. Аналитические значения погрешности корня вычислялись по формуле:

$$\Delta x_{Ex} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{b + \Delta b}{a - \Delta a}} - \sqrt{\frac{b - \Delta b}{a + \Delta a}} \right).$$

Полученные оценки погрешности корня уравнения представлены на рис. 5 для различных значений погрешности одного из коэффициентов уравнения (13). Вычисления были произведены для методов

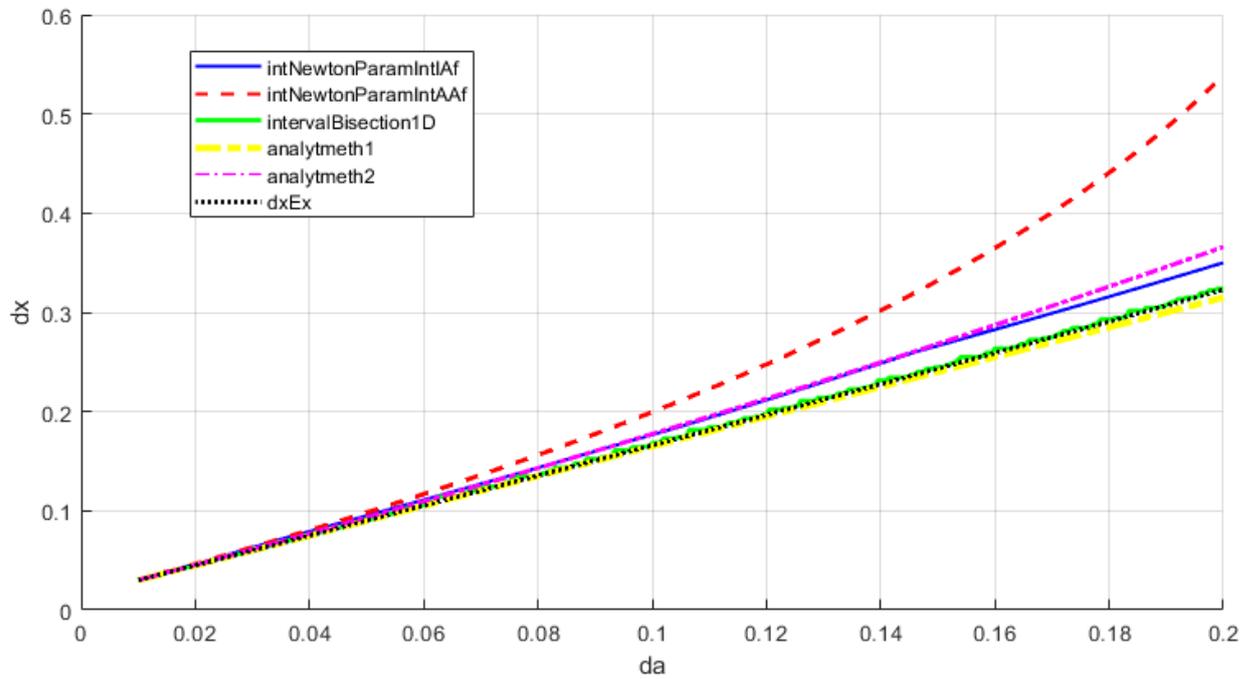
intNewtonParamIntIAf, intNewtonParamIntAA, intervalBisection1D, analytmeth1 и analytmeth2, а также для аналитического вычисления погрешности корня Δx_{Ex} . На рис. 6 представлены абсолютные отклонения полученных значений оценок погрешности корня от действительных значений погрешности Δx_{Ex} . На рис. 5 и 6 использованы следующие обозначения:

- сплошной линией синего цвета обозначены результаты, полученные при применении процедуры intNewtonParamIntIA;
- штриховой линией красного цвета обозначены результаты, полученные при применении процедуры intNewtonParamIntAA;
- сплошной линией зеленого цвета проиллюстрированы оценки, выданные процедурой intervalBisection1D;
- штрихпунктирной линией желтого цвета представлены результаты работы процедуры analytmeth1 при усечении ряда Тейлора до слагаемых первого порядка;
- штрихпунктирной линией пурпурного цвета – результаты работы процедуры analytmeth2 при усечении ряда Тейлора до слагаемых второго порядка;
- пунктирной линией черного цвета отображены значения погрешности корня, вычисленные аналитически (действительные значения погрешности корня).

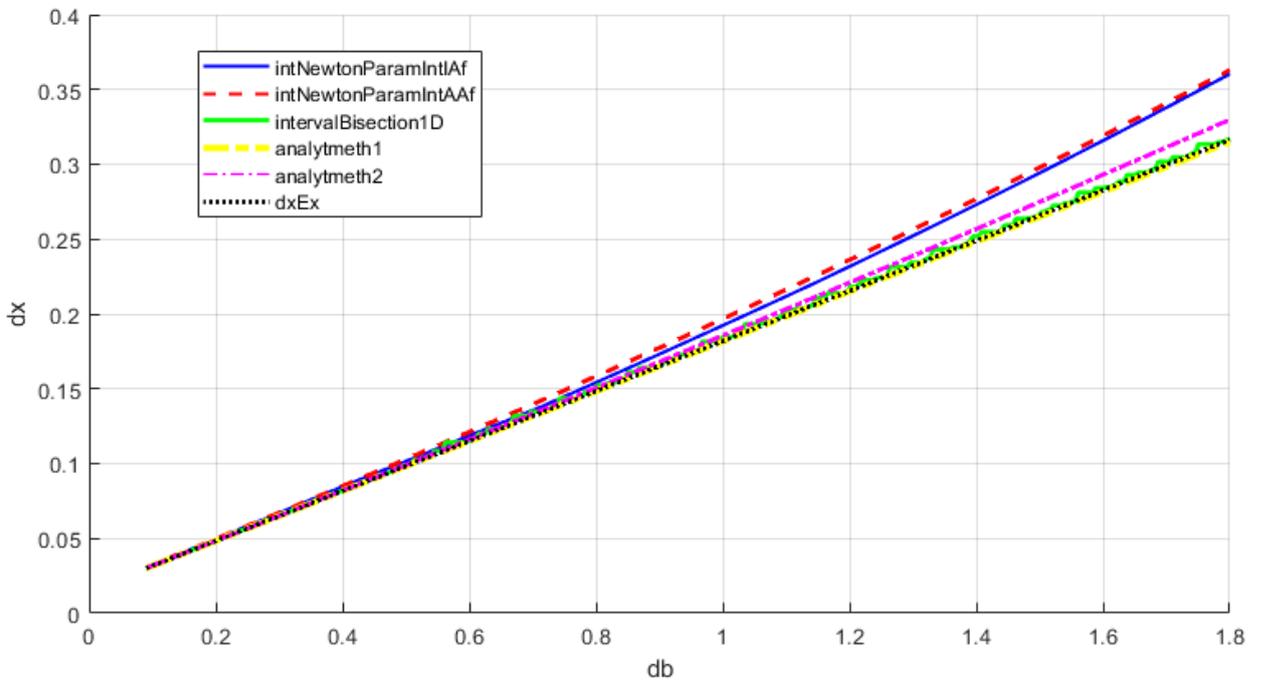
На осях рис. 5 отложены значения: dx – оценки предела погрешности корня; da – предела погрешности коэффициента a и, наконец, db – предела погрешности коэффициента b решаемого уравнения. На осях рис. 6 отложены значения: $|dx - dx_{Ex}|$ – разность между оценками предела погрешности корня, полученных с помощью рассматриваемых методов, и действительными значениями оценок погрешности корня; da – предела погрешности коэффициента a и, наконец, db – предела погрешности коэффициента b решаемого уравнения.

Погрешности коэффициентов задавались следующим образом: для результатов, изображенных на рис. 5а и 6а, значение Δa задавалось в

интервале от 0,01 до 0,2 (с шагом 0,0005), $\Delta b = 0,09$; для рис. 5б и 6б – $\Delta a = 0,01$, значение Δb задавалось в интервале от 0,09 до 1,8 (с шагом 0,0045).



a



б

Рисунок 5 – График оценок пределов погрешности корня уравнения при различных значениях погрешности коэффициентов

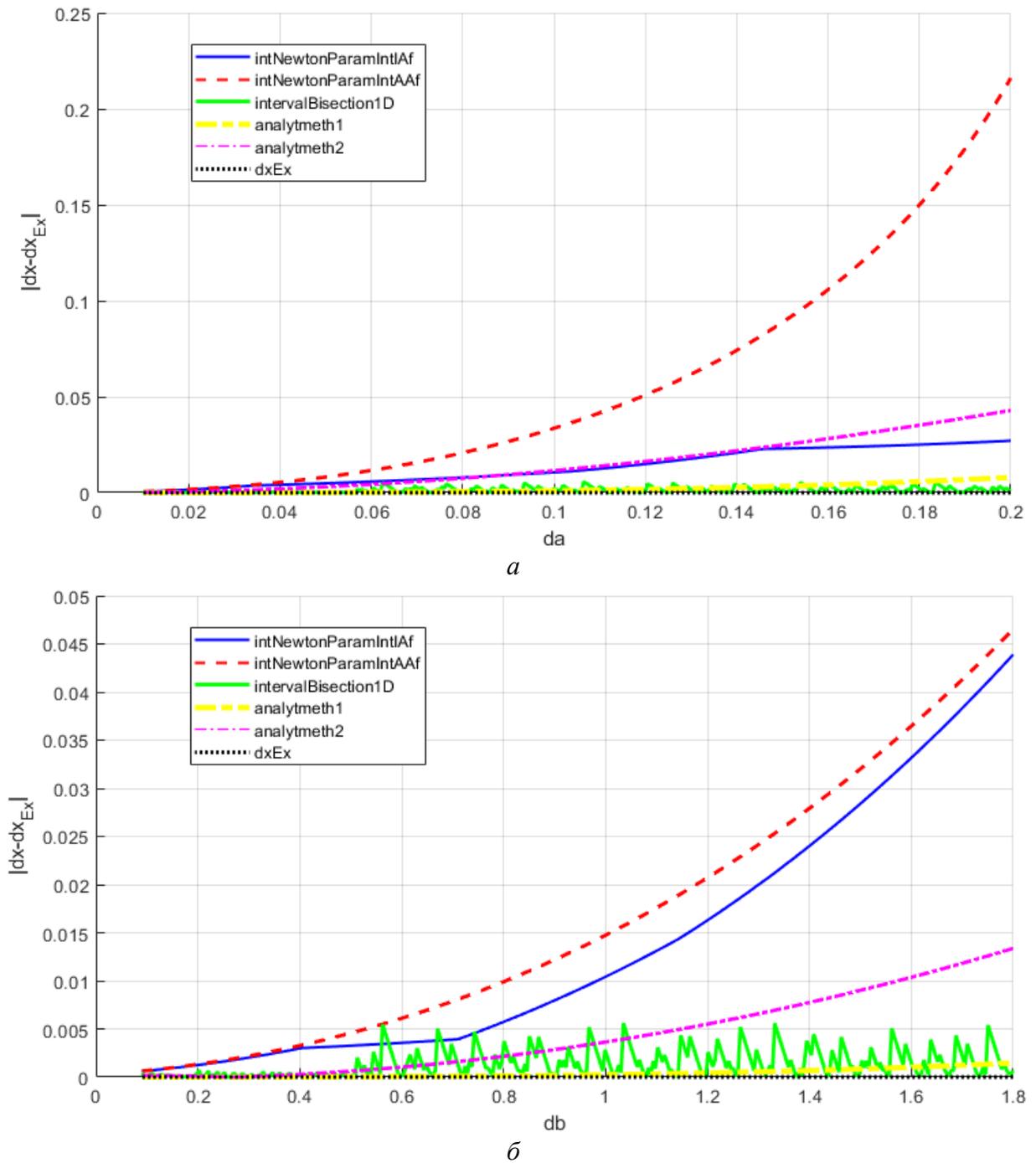


Рисунок 6 – График оценок пределов погрешности корня уравнения при различных значениях погрешности коэффициентов

Средние значения количества i выполненных итераций для рассмотренных методов составили: для рис. 5а для `intNewtonParamIntIA` $i_{NIA} = 5,13$; для `intNewtonParamIntAA` $i_{NAA} = 9,15$; для `intervalBisection1D` $i_B = 10,05$; для рис. 5б – соответственно $i_{NIA} = 5,18$, $i_{NAA} = 7,52$, $i_B = 10,15$.

Из графиков на рис. 5 видно, что результаты оценок погрешности корня, полученные рассматриваемыми методами, достаточно близки.

Результаты, полученные с помощью метода `intNewtonParamIntAA`, имеют максимальное отклонение от точных значений погрешности корня (особенно на рис. 5а). При использовании `intNewtonParamIntIA` также получаются результаты, отклоняющиеся в большую сторону от действительных значений погрешности корня. При использовании `intNewtonParamIntAA` и `intNewtonParamIntIA` при увеличении погрешности коэффициента оценки погрешности корня уравнения начинают также возрастать и становятся больше значений, полученных аналитически, при этом значения dx при использовании `intNewtonParamIntAA` возрастают быстрее. Оба метода `analytmeth` имеют похожие результаты при малых погрешностях коэффициента. Но при увеличении погрешности коэффициента оценки погрешности корня, полученные с помощью метода `analytmeth2`, использующего для оценки погрешности корня слагаемые первого и второго порядка в ряду Тейлора, становятся больше, чем значения, полученные аналитически, а оценки погрешности корня, полученные с помощью метода `analytmeth1`, использующего для оценки погрешности корня слагаемые только первого порядка, становятся меньше. При использовании модифицированного метода бисекции `intervalBisection1D` применялось округление, поэтому на всех графиках часть результатов не совпали в точности со значениями, полученными аналитически. При этом видно, что отличия не являются существенными с метрологической точки зрения (полученные с помощью бисекции округленные оценки корня и его погрешности достаточно близки к действительным значениям корня и пределам его погрешности после округления соответственно). При этом видно, что оценки погрешности корня уравнения, получаемые методом бисекции, содержат в себе оценки погрешности корня, получаемые аналитически. Из графиков на рис. 6а видно, что полученные с помощью бисекции оценки чаще всего являются наиболее близкими к действительным значениям.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что хотя при

использовании метода `intervalBisection1D` выполняется в среднем больше итераций, точность получаемых оценок не хуже интервального метода Ньютона, а в большинстве случаев – лучше. При решении уравнений с достаточно сильно неточными значениями коэффициентов использование модифицированного метода бисекции также оправдано (по сравнению с `intNewtonParamIntIA`, `intNewtonParamIntAA` и `analytmeth` – в частности для метода `analytmeth1` оценки погрешности корня получаются заниженными).

В шестой главе представлено применение разработанных методов интервальной бисекции и программных средств к ряду примеров из измерительной практики. Среди них – задача измерения длины волн на поверхности воды на основе дисперсионного соотношения по результатам измерения периода волнения. При ее решении в выбранной точке наблюдения заранее определяют глубину, а после с помощью специальных измерительных средств регистрируют период волнения. Для получения значения длины волны необходимо найти корень следующего нелинейного уравнения [8]:

$$g \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \operatorname{th}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right) = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2, \quad (14)$$

где d – измеренная глубина, м, λ – неизвестная длина волны, м, T – измеренный период, с, g – ускорение свободного падения, $g = 9,806 \text{ м/с}^2$. Таким образом, значение длины волны λ измеряется косвенным образом по значениям периода и глубины.

Было проведено моделирование для следующих значений коэффициентов с погрешностями: $d = 20,5 \pm 0,1$ м, $T = 10,0 \pm 0,2$ с. Наблюдения за волнением на открытых акваториях показывают, что длина волны, как правило, находится в диапазоне от 30 до 150 м. Поэтому в качестве интервала локализации корня для бисекции выбран: $[30, 150]$. Округление получаемой оценки погрешности Δ_λ выполнялось по правилам метрологии. Остановка выполнялась по правилу (7). Величина допустимой вычислительной ошибки выбрана равной $\varepsilon = 10^{-5}$.

Последовательности полученных приближений корня и границ интервала погрешности корня представлены в табл. 2. Точное значение корня $\lambda^* = 122,2$ м.

Таблица 2. – Приближение корня уравнения и пределы его погрешности

Номер итерации		Приближение корня на различных итерациях	Оценки границ интервала возможных значений корня	
первый этап, i	второй этап, j		левая	правая
1	–	90,000000	30,000000	150,000000
2	1	120,000000	90,000000	150,000000
–	2	120,000000	105,000000	135,000000
–	3	120,000000	112,500000	127,500000
–	4	121,875000	116,250000	127,500000
–	5	122,812500	118,125000	127,500000
–	6	122,343750	118,125000	126,562500
–	7	122,343750	118,593750	126,093750
–	8	122,343750	118,828125	125,859375
–	9	122,343750	118,828125	125,859375
–	10	122,343750	118,886719	125,800781

На 2 шаге итерационного процесса было получено приближение значения измеряемой длины волны λ , при котором значение функции в середине интервала локализации корня имело неопределенный знак из-за погрешности, вносимой неточностью исходных данных. После этого был выполнен переход ко второму этапу алгоритма. Были найдены пределы возможных значений корня (за 10 шагов). Оценка корня с учетом его погрешности, унаследованной от неточности исходных данных, составила $\lambda = 122,3 \pm 3,5$ м. Данный результат содержит точное значение корня λ^* .

Была выполнена проверка полученного результата методом Монте-Карло. Уравнение (14) было решено с помощью функция Matlab fzero. Данные для расчетов соответствовали условиям, описанным выше.

Количество испытаний в методе Монте-Карло было равным 10^6 . Начальное приближение корня было принято равным $x_0 = 140$. Был получен интервал возможных значений корня $\lambda = [118,822641, 125,661612]$ м, после округления результат будет следующим $\lambda = 122,2 \pm 3,5$ м. Полученные значения с помощью интервальной бисекции и метода Монте-Карло хорошо согласуются, данный факт показывает, что полученные оценки погрешностей достоверны.

Список упомянутой литературы

1. Федеральный закон Российской Федерации «Об обеспечении единства измерений» от 26.06.2008 № 102-ФЗ.
2. Крейнович В.Я. Личное сообщение Г.Н. Солопченко.
3. Семенов К.К., Солопченко Г.Н. Исследование комбинированного метода метрологического автосопровождения программ обработки результатов измерений // Измерительная техника. 2011. № 4. С. 14–19.
4. Воцинин А.П. Интервальный анализ данных: развитие и перспективы // Заводская Лаборатория. 2002. Т. 68, № 1. С. 118-126.
5. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986.
6. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – Новосибирск: XYZ, 2017.
7. Добронев Б.С. Интервальная математика. – Красноярск: Издательство КГУ, 2004.
8. Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. – Л.: изд-во ЛГУ, 1981. – 196 с.

Объекты, (предмет) и методы исследования

Объектом исследования являются способы решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений. Предметом исследования являются методы и программные средства, применяемые для решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений, возникающих в

измерительной практике, позволяющие получать оценки самого решения и его погрешности, наследуемые от погрешностей коэффициентов уравнений. Методы исследования – методы математического моделирования, вычислительной математики, функционального анализа.

Результаты и их обсуждение

В результате выполнения диссертационного исследования были получены новые метрологически обоснованные методы решения уравнений и систем уравнений с неточными коэффициентами. При их использовании будут получены искомые решения, а также характеристики их погрешности. Также были проведены исследования достоверности предоставляемых методами значений. Каждый полученный результат содержит точное значение корня или решения системы. В частности представленный метод интервальной бисекции позволяет на каждой итерации получать интервал, который гарантированно содержит все возможные значения корня или решения системы в случае соблюдения требований (что выполняется при решении задач из измерительной практики). Данный метод позволяет удовлетворить всем требованиям, что предъявляются в метрологии к результату измерений. Представленные в работе примеры применения демонстрируют принцип работы представленного подхода и достоверность предоставляемых им результатов.

Заключение

В работе получены новые подходы к поиску решений нелинейных уравнений и систем уравнений, а также оценке их погрешности, которая возникает из-за влияния неточности исходных данных, т.е. погрешностей коэффициентов решаемых уравнений, в качестве которых в измерительной практике выступают результаты измерений.

В результате работы над диссертационным исследованием было достигнуто метрологическое сопровождение расчетов, ведущихся в измерительных информационных системах и программах обработки неточных данных с решением нелинейных уравнений и систем уравнений.

**Список работ, опубликованных по теме научно-квалификационной
работы (диссертации)**

Публикации в изданиях, рекомендуемых ВАК или приравненных к ним

1. Семенов К.К., Целищева А.А. Интервальный метод бисекции для метрологически обоснованного поиска корней уравнений с неточно заданными исходными данными // Измерительная техника. 2018. № 3. С.10-15.

Переводная версия статьи: Semenov K.K., Tselishcheva A.A. (2018). Interval method of bisection for a metrologically based search for the roots of equations with inaccurately specified initial data. Measurement Techniques. Vol. 61. No 3. P. 203-209. **(Scopus, Web of Science)**

2. Семенов К.К., Целищева А.А. Обобщенный интервальный метод бисекции для метрологически обоснованного поиска решений систем уравнений с неточно заданными исходными данными // Измерительная техника. – 2019. – №. 3. – С. 13-18.

Переводная версия статьи: Semenov K.K., Tselishcheva A.A. (2019). Generalized interval method of bisection for metrologically based search for solutions of systems of equations with inaccurately specified initial data. Measurement Techniques. Vol. 62. No. 3. P. 193-201. **(Scopus, Web of Science)**

3. Semenov K.K., Tselishcheva A.A. (2021). The Interval Method of Bisection for Solving the Nonlinear Equations with Interval-Valued Parameters. Smart Innovation, Systems and Technologies. Vol. 220. P. 373-384. **(Scopus)**

4. Tselishcheva A.A., Semenov K.K. (2021) Metrological Approach to Solve Nonlinear Equations and Systems of Nonlinear Equations. Proceedings of XXIV International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM-2021), IEEE. P. 8-11. **(Scopus)**

5. Semenov K.K., Tselishcheva A.A. (2021). Solving Fuzzy Equations Based on Fuzzy Interval Bisection Method for Intelligent Data Processing in Cyber-Physical

Systems. Communications in Computer and Information Science, 2021. [Принята к печати] (**Scopus**)

6. Семенов К.К., Гаранин В.А., Целищева А.А. Аналитические оценки предельных погрешностей корней уравнений, вызванных погрешностями их коэффициентов // Измерительная техника. 2022. [принята к печати] (переводная версия индексируется **Scopus**).

Публикации в других изданиях

1. Целищева А.А. К вопросу о метрологически обоснованном решении уравнений косвенных измерений // Сборник докладов студенческой научной конференции Института информационных технологий и управления «Информатика и кибернетика (COMCON-2015)», 22-24 апреля 2015, Санкт-Петербург. – СПб: Изд-во Политех. ун-та, 2015. – С. 267-271. (**РИНЦ**)

2. Целищева А.А., Семенов К.К. Модификация метода бисекции для поиска корней уравнений, согласованного с точностью исходных данных // Сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Комплексная защита объектов информатизации – 2016», 1-5 июня 2016, Санкт-Петербург. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – С. 56-59. (**РИНЦ**)

3. Целищева А.А., Семенов К.К. Решение систем уравнений косвенных измерений, согласованное с точностью исходных данных // Сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции «Измерения в современном мире», 6-7 июня, Санкт-Петербург. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2017. – С. 123-129. (**РИНЦ**)

4. Семенов К.К., Целищева А.А. Метод многомерной бисекции для решения систем нелинейных уравнений управления с неточно заданными коэффициентами // Юбилейные чтения, посвященные научной школе измерительных информационных технологий: сборник научных трудов. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС. – 2020. – С. 84-101. (**РИНЦ**)

5. Целищева А.А., Семенов К.К. Метрологический подход к решению нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений. // XXIV Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям (SCM-2021). Сборник докладов. Санкт-Петербург. 26 – 28 мая 2021 г. СПб.: СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2021. – С. 9-13. **(РИНЦ)**

6. Семенов К.К., Гаранин В.А., Целищева А.А. Оценивание предельных погрешностей корней уравнений и систем уравнений с неточными коэффициентами, решаемых в информационно-измерительных и управляющих системах. Учебное пособие. СПб: изд-во Политехн. ун-та, 2021. Принято к печати **(РИНЦ)**

Аспирант _____ **Целищева Анастасия Алексеевна**
(подпись)