

На правах рукописи

**Е Р Ш О В Виталий Ильич**

**ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ  
УПРУГОСТИ ПРИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ**

**Автореферат**

**диссертации на соискание ученой степени доктора технических  
наук по специальности 01.02.04 –«Механика деформируемого  
твёрдого тела»**

**С. - ПЕТЕРБУРГ 2004 г..**

Диссертация выполнялась в Вологодском политехническом институте и в Новороссийской государственной морской Академии (1982-2004 г.г.)

Официальные оппоненты

Профессор, д.ф.-м.н. Морозов Н.Ф.

Профессор, д.т.н. Скворцов В.Р.

Профессор, д.т.н. Карпов В. В.

Защита состоится в диссертационном Совете Д 2 С.-Петербургского государственного морского технического университета Лоцманская, корпус , ауд. ноября 20004г.

С работой можно ознакомиться в библиотеке С.-Петербургского государственного морского технического университета

Ученый секретарь

Кадыров

### **Актуальность проблемы.**

В работе рассматриваются основные уравнения теории упругости, являющиеся базовыми для механики деформируемого твердого тела, теории сооружений вообще и транспортного строительства в частности, включают статические, геометрические и физические соотношения. Общеизвестно, что в нелинейной теории упругости физические соотношения находятся в развитии, а в линейной теории упругости статические, геометрические и физические соотношения стали классическими. При решении системы дифференциальных уравнений для конкретной задачи при малых перемещениях во всех уравнениях подразумеваются координаты исходного положения элемента, хотя геометрические соотношения всегда формулируются для деформированного состояния. Исследователи здесь сталкиваются с проблемой соответствия начального и конечного базисов для рассматриваемой точки.

Для больших деформаций существование проблемы различия между базисами начального и конечного состояний очевидно. В конце 19 века эта проблема для малых деформаций была закрыта предположением, что базисы совпадают. Это совершенно справедливо для декартовых координат, но в криволинейных координатах эта проблема имеет место только для угловой деформации, поскольку одна из производных по криволинейной координате совпадает с одним из слагаемых в выражении для соответствующей угловой деформации.

В настоящее время в механике деформируемого твердого тела нелинейные определяющие соотношения опираются в основном на две концепции: на энергетическую (потенциал) и на модифицированную концепцию Г. Генки. Число конкретных зависимостей увеличивается с появлением новых материалов и новых задач, диктуемых тенденцией и темпами технического прогресса, однако такое увеличение свидетельствует и об актуальности вопроса о физических соотношениях, поскольку их обилие свидетельствует либо о слабости существующих концепций, либо о наличии внутри них нереализованных возможностей, раскрытие которых усилит нелинейную теорию механики деформируемых тел и позволит создать более совершенные методы расчёта нелинейных задач механики деформируемого твердого тела.

Об исключительной актуальности рассматриваемой темы свидетельствуют аналитические обзоры, составленные творческими коллективами учёных по заказу Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), которые представлены ведущими учёными России по теории сооружений Александровым А.В., Карпенко Н.И. и

Шапошниковым Н.Н., а также Материалы Восьмого Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике (Пермь, 2001)

Острая необходимость расширения для трёхмерного и двумерного случаев области нелинейной связи между напряжениями и деформациями, достигнутая в настоящей работе, полученные в работе результаты о соответствии базисов начального и конечного деформированного состояний в криволинейных координатах, исключительно важные в задачах теории упругости, свидетельствуют об актуальности темы диссертации.

### **Целью работы является:**

1. Выявление основных закономерностей эволюции линейной и нелинейной теории упругости и вскрытие основных противоречий, имеющих место в существующих определяющих соотношениях.

2. Формулировка наиболее общих соотношений между напряжениями и деформациями для нелинейно-упругого материала при малых и умеренно-больших деформациях в условиях простого нагружения.

3. Развитие вопроса о соответствии базисов начального и конечного состояний и получение выражений для угловой деформации в полярных, цилиндрических и сферических координатах, входящем в систему дифференциальных уравнений при решении соответствующих задач теории упругости и решение конкретных задач.

4. Получение дифференциальных уравнений равновесия для особых точек, когда градиент напряжений велик.

5. Формулировка определяющих соотношений нелинейной теории упругости для плоского напряженного состояния при наличии однородного стационарного температурного поля.

6. Решение эталонных и новых задач нелинейной теории упругости на основе непротиворечивых физических соотношений.

### **Научная новизна.**

Научная новизна исследований заключается в том, что для нелинейной теории упругости вместо сильно ограниченной областью применения соотношений Генки – Каудерера и близких к ним разработаны феноменолого-аналитические обобщенные зависимости между напряжениями и деформациями при малых нелинейных деформациях на основе деформационных инвариантов, введенных автором в теорию упругости по рекомендации профессора П.А. Лукаша. Для плоского и объемного напряженного состояний предложена теория определения функций поперечной деформации, входящих в физические соотношения.

Показывается, что значение угловой деформации в криволинейных координатах может быть вычислено с помощью двух равноценных выражений: одно получено в теории упругости в конце XIX века Борхардтом, содержит три слагаемых и справедливо для координат точек в деформированном состоянии, а другое получено автором несколькими способами, содержит два слагаемых и справедливо для координат точек в исходном недеформируемом состоянии.

Этот результат позволяет преодолеть отмеченное автором частичное несоответствие в криволинейных координатах начального и конечного базиса для рассматриваемой точки, сформулировать новый базис и и наметить корректную последовательность решения соответствующих задач в линейной и в нелинейной постановках. Эта последовательность операций иллюстрируется решением одной из важнейших задач о перемещениях для полуплоскости, нагруженной сосредоточенной силой (задача Фламана), и решением простейших задач кручения бруса круглого и кольцевого поперечных сечений.

Получены дифференциальные уравнения равновесия плоской задачи теории упругости для особых точек, когда градиент напряжений велик.

Рассмотрены вопросы расчета нелинейно-упругого полупространства и нелинейно-упругой полуплоскости.

Разработаны математическая модель поликонического основания, воспринимающего нагрузку частью своего объема, вариант расчета методом сеток плиты на нелинейно-упругом поликоническом основании, в котором при составлении уравнений нет необходимости рассматривать второй слой законтурных значений искомой функции и приведен пример расчета плиты на поликоническом основании.

**Д о с т о в е р н о с т ь** полученных результатов гарантируется тем, что они опираются на хорошо и широко освоенные мировым сообществом эксперименты, а также достоверностью исходных классических положений теории упругости, строгостью методологического и математического анализа.

### **П р а к т и ч е с к а я и т е о р е т и ч е с к а я ц е н н о с т ь.**

Разработанные методики и полученные результаты могут найти применение в научно-исследовательских, проектных и конструкторских организациях при расчете различных задач линейной и нелинейной теории упругости и термоупругости, при расчете оснований и фундаментов .

Теоретические результаты диссертации открывают возможности развития линейной и нелинейной теории упругости как в части решения краевых задач в полярных, цилиндрических и сферических координатах, задач с особыми точками, так и в формулировке определяющих соотношений

при малых деформациях в условиях сложного нагружения и при больших деформациях – при простом нагружении.

### **Апробация работы**

Основные результаты исследований доложены и обсуждены на научно-технической конференции Московского инженерно-строительного института в 1982 г., на Всероссийской научно-технической конференции “Прочность и живучесть конструкций” в 1993 г. (Вологда), на научном семинаре кафедры “Сопrotивление материалов и строительная механика” Кубанского государственного технологического университета в 1993 г., на научном семинаре “Механика” техническом университете в 1994 при С.-Петербургском морском г., на международной научно-технической конференции в Новгороде в 1994 г., на научном семинаре кафедр “Сопrotивление материалов” и “Строительная механика” Саратовского государственного технического университета в 1995 г. на Юбилейной научно-технической конференции Вологодского политехнического института в 1995 г., на Первом Конгрессе механиков Белоруссии в 1995 г., на научном семинаре кафедры “Сопrotивление материалов” Новочеркасского государственного технического университета в 1997 г., на Втором Конгрессе механиков Белоруссии в 1999

В о к о н ч а т е л ь н о м виде работа докладывалась на Восьмом Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике ( Пермь, 2001), на научном семинаре “Механика” при С.-Петербургском государственном морском техническом университете в 2001 г. на научном семинаре кафедры «Механика и процессы управления» в С.-Петербургском государственном техническом университете в 2002 г., на международной научно-технической конференции в Минске в 2004 г.

### **Внедрение результатов.**

Результаты работы могут найти непосредственное применение в учебном процессе для студентов университетов, в практике проектных организаций и конструкторских бюро, занимающихся расчетом и конструированием оболочек, пластинок, а также в расчетах оснований зданий и сооружений.

По теме диссертации опубликовано 40 статей и 6 монографий объемом 30 печатных листов.

### **Объем работы.**

Диссертация состоит из введения, краткого исторического обзора и постановки задачи, шести глав, основных выводов и списка литературы.

Объем работы - 170 страниц машинописного текста, 12 рисунков и 12 таблиц (18 страниц), список использованной литературы из 214 наименований.

### На защиту выносятся:

1. Доказательство противоречивости определяющих соотношений Генки-Каудерера.
2. Эффективная методика использования деформационных инвариантов тензора напряжений при записи определяющих соотношений нелинейной теории упругости.
3. Общее решение проблемы определяющих соотношений нелинейной теории упругости при малых и умеренно-больших деформациях в условиях простого нагружения.
4. Создание начального приведенного базиса, основанного на выводе выражения для угловой деформации в полярных координатах в начальном базисе в соответствии с понятием Коши.
5. Определение перемещений в задаче Фламана.
6. Математическая модель нелинейно-упругого поликонического основания и версия метода сеток при расчете плиты на нелинейно-упругом поликоническом основании.

Разработка в законченном виде общей нелинейной теории упругости принадлежит академику В.В. Новожилову. Большой вклад в нелинейную теорию упругости внес его ученик К.Ф.Черных. Общеизвестна роль в развитии нелинейной теории упругости московской, казанской, тульской и других школ.

Другое направление в нелинейной теории упругости основано Г. Генки, развито в работах Каудерера, А.А. Ильюшина и других авторов.

Интересные работы выполнены Толоконниковым Л.А. и его учениками, в которых предлагаются определяющие соотношения для нелинейно упругих и разномодульных тел. Заметный вклад в решение сложных задач нелинейной теории упругости внесла украинская школа механики деформируемых тел

В шестидесятых-восьмидесятых годах интенсивно развивалась нелинейная теория усилиями кафедры МИСИ им. В.В. Куйбышева, где заметную работу проводил П.А. Лукаш. Сложными вопросами трижды нелинейных систем успешно занималась его ученица Божкова Л.В.. К этому направлению примыкают работы В.В. Петрова и его учеников, в настоящее время сформировавших свою научную школу.

Заметный вклад в решение прикладных задач нелинейной и линейной механики внесли Н.П.Абовский, В.А. Александров, В.М. Александров, В.И. Андреев, П.В. Алявдин, В.А. Бабешко, В.В.Болотин, В.В.Васильев, В.З.Васильев, И.И. Ворович, В.Г.Воронцов, Д.А.Гохфельд, Э.И.Григолюк, А.С. Григорьев, А.Н.Гузъ, Ю.М. Даль, В.П.Ильин,

В.В.Карпов, В.А.Лебедев, М.Д.Мартыненко, А.М.Масленников, В.П. Матвеев, Н.Ф.Морозов, Ю.В.Немировский, И.Ф. Образцов, И.Г.Овчинников, В.А.Пальмов, Г.С.Писаренко, Б.Е.Победря, В.А. Постнов, Р.С.Санжаровский, Д.Н.Соболев, В.И.Соломин, И.Г Терегулов , П.Е. Товстик, А.П. Филин, И.А.Цурпал, А.В.Чигарев и многие другие отечественные и зарубежные ученые.

Моделям нелинейно-деформируемой среды посвящены работы А.А.Бартоломея, А.И.Боткина , Г.М. Ломизе, А.С. Строганова, М.В. Малышева , А.Л.Крыжановского, В.С. Копейкина и др.

Многообразие трактовок физических основ нелинейной теории упругости свидетельствует о необходимости анализа существующих определяющих соотношений, выявление их общих основ и различий с целью создания более совершенной модели, которую можно было бы принять при решении всех задач нелинейной теории упругости. Столь сложную задачу нельзя решить без детального изучения истории теории упругости на всех этапах. развития. Достаточно подробно и полно это изложено в известной монографии С.П. Тимошенко. Представляют также интерес обзоры В.В.Новожилова, Л.А.Толоконникова, К.Ф. Черныха и других авторов.

**В первой главе** проведена методологическая часть работы, в результате которой установлено, что ключевым вопросом в становлении физических соотношений линейной теории упругости является вопрос о становлении упругого потенциала и коэффициента поперечной деформации С.Д. Пуассона.

Определяющие соотношения прикладной нелинейной теории упругости развивались в тесной связи с соответствующими соотношениями теории пластичности, установленными Г.Генки, которые легли в основу не только теории пластичности малых упруго-пластических деформаций А.А.Ильюшина , но и позволили Каудереру систематически изложить физически нелинейный закон упругости , который в настоящее время находит широкое применение при решении физически нелинейных задач в случае малых деформаций:

$$\sigma_x = 3K\chi(\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)(\varepsilon_x - \varepsilon_0) \quad (1)$$

$$\sigma_y = 3K\chi(\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)(\varepsilon_y - \varepsilon_0) \quad (2)$$

$$\sigma_z = 3K\chi(\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)(\varepsilon_z - \varepsilon_0) \quad (3)$$

где:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  - нормальные напряжения;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  - осевые деформации;

$K$  - модуль объемной деформации;



$\chi(\varepsilon_0), \gamma(\psi_0^2)$ -экспериментально определяемые функции.

Связь между средним напряжением и средней деформацией подчиняется зависимости :

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0 \quad (4)$$

Складывая левые и правые части в (1), (2), (3), будем иметь:

$$3\sigma_0 = 9K\chi(\varepsilon_0)\varepsilon_0, \quad (5)$$

т.е. после суммирования функция  $\gamma(\psi_0^2)$  исчезает. Тогда получим:

$$\chi(\varepsilon_0) = 1 \quad (6)$$

Заметим, что функция  $\chi(\varepsilon_0)$  с одной стороны должна быть равна единице, а с другой – должна быть определена экспериментально.

Указанное противоречие не позволяет получать достоверные решения задач нелинейной теории упругости с использованием соотношений Генки – Каудерера и их модификаций.

Другой вопрос, весьма важный для развития механики деформируемого тела, связан с тем, что при решении задач теории упругости в криволинейных координатах все исходные уравнения должны записываться для одного и того же базиса.

Если в выражение для угловой деформации в полярных координатах  $r, \theta$

$$\gamma_{\theta r} = \frac{\partial U}{r\partial\theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}, \quad (7)$$

подставить первый член правой части для координат точки  $a$  (Рис.1), то формула (7) будет соответствовать переменному углу и не соответствовать понятию угловой деформации по Коши, которую затем нельзя использовать в классическом законе Гука.

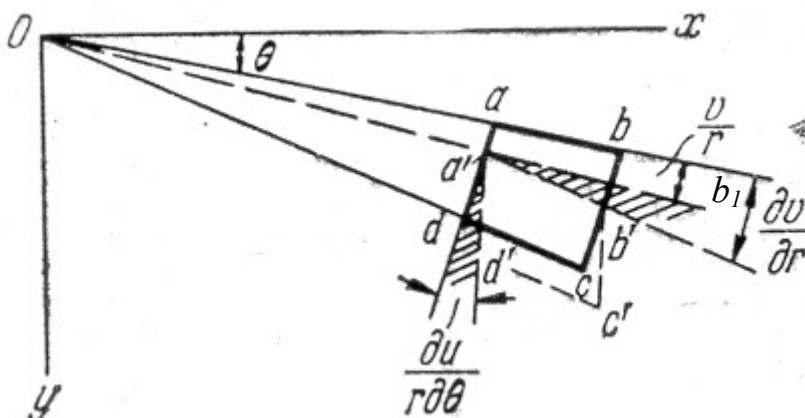


Рис. 1

Правильный результат будет получен, если в выражение (7) подставлять координаты точки в деформированном состоянии.

Затронутый вопрос выходит на вопрос о решении системы исходных дифференциальных уравнений теории упругости в криволинейных координатах, поскольку в уравнениях равновесия присутствуют координаты точек в недеформируемом положении, а в геометрических уравнениях следует подразумевать координаты точек в деформируемом положении.

Таким образом, методологические исследования первой главы позволяют сделать вывод о том, что широко распространенные при малых деформациях в нелинейной механике деформируемого твердого тела определяющие соотношения Генки-Каудерера противоречивы и дальнейшее развитие физических основ нелинейной механики деформируемого твердого тела требует введения обобщенных нелинейных функций поперечной деформации, которые позволяют дать строгие непротиворечивые определяющие соотношения, а вывод выражение для угловой деформации в полярных координатах должно быть преобразовано так, чтобы оно оказалось справедливо для координат точек в исходном недеформируемом положении и соответствовало понятию угловой деформации по Коши.

**Во второй главе** рассматриваются инварианты напряженно-деформированного состояния. и вводятся деформационные инварианты НДС

Простейшими инвариантами НДС в точке тела являются главные напряжения и главные деформации. По поводу главных деформаций В.В. Новожилов писал: "Три независимых инварианта  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  хороши в том отношении, что имеют простой физический смысл (особенно при малой деформации). Математически они, однако, неудобны, так как выражение их через компоненты деформации связано с необходимостью решения кубического уравнения".

С появлением ЭВМ отмеченные В.В. Новожиловым трудности устранены, и имеет смысл возвратиться к простейшим инвариантам тензора напряжений и тензора деформаций. Проблема их определения достаточно сложна, и поиск инвариантов, легко определяемых экспериментально, вполне оправдан на сегодняшний день. Такими инвариантами, на наш взгляд, являются простейшие функции от главных напряжений, определяемые экспериментально при растяжении. Если, например, инвариант  $\sigma_1$  найден, то всегда найдется соответствующая деформация  $\varepsilon_1^0$ , которая может в равной мере характеризовать не только найденный инвариант, но и опосредовано - тензор напряжений. Такую деформацию будем называть деформационным инвариантом тензора напряжений (ДИТН). Простейшим примером ДИТН является деформация, которая принимается по диаграмме напряжений в зависимости от простого инварианта тензора напряжений. Если какие-то две величины зависят друг от

друга, и одна из них является инвариантом, то другая величина тоже является инвариантом той же задачи, т.е. инвариантам  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  соответствуют некоторые инварианты  $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \varepsilon_3^0$ .

Полное взаимное соответствие между ДИТН и  $\sigma_k$  позволяет пользоваться их взаимной заменой в случае необходимости. Выбранное здесь название ДИТН, повидимому, наиболее полно отражает существо этой деформации, являющейся тем необходимым звеном, которое позволяет связать тензоры напряжений и деформаций, поскольку эта величина одновременно является как функцией главных напряжений, так и функцией главных деформаций.

$$\sigma_k = E\varepsilon_k^0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (8)$$

Для линейно-упругого материала ДИТН приводят ко всем известным разновидностям закона Гука, но главный результат исследований по линейной задаче состоит не в этом, а в том, что намечалась и получена методология решения нелинейных задач об обобщенных зависимостях между напряжениями и деформациями..

Для нелинейно-упругого материала для плоского напряженного состояния будем искать деформации как некоторую комбинацию двух известных функций от напряжений, каждая из которых зависит от заданных аргументов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ :

$$\varepsilon_1(\sigma_1, \sigma_2) = \varepsilon_1^0(\sigma_1) - \mu_2(\sigma_1, \sigma_2)\varepsilon_2^0(\sigma_2); \quad (9)$$

$$\varepsilon_2(\sigma_1, \sigma_2) = \varepsilon_2^0(\sigma_2) - \mu_1(\sigma_1, \sigma_2)\varepsilon_1^0(\sigma_1). \quad (10)$$

В этих выражениях коэффициенты  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  являются функциями двух переменных  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и определяются экспериментально. Следует иметь в виду, что при простом нагружении соотношение между главными напряжениями сохраняются и потому исследованию подлежит одна из плоских кривых, совокупность которых дает рассматриваемую поверхность, т.е. имеет место математическая аналогия с задачей оптимального проектирования стальной двутавровой балки, рассмотренной автором.

Деформации  $\varepsilon_1^0$  и  $\varepsilon_2^0$  принимаем по диаграмме растяжения, а функции  $\mu_1$  и  $\mu_2$  находим экспериментально:

$$\mu_1 = \frac{\varepsilon_2^0(\sigma_2) - \varepsilon_2(\sigma_1, \sigma_2)}{\varepsilon_1^0(\sigma_1)}; \quad (11)$$

$$\mu_2 = \frac{\varepsilon_1^0(\sigma_1) - \varepsilon_1(\sigma_1, \sigma_2)}{\varepsilon_2^0}. \quad (12)$$

Значения  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  находятся по результатам испытаний тонкостенных трубок на совместное действие внутреннего давления и растягивающей силы. Методика таких испытаний освоена центральными лабораториями и вопрос об экспериментальном определении функций  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  не связан с техническими или математическими трудностями. По результатам достаточного числа экспериментов строятся поверхности  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в осях  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ . Эти поверхности логичнее называть поверхностями Пуассона, хотя он ими и не занимался. Они могут быть использованы для нахождения обобщенных коэффициентов Пуассона  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , по заданным напряжениям  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ . Если же необходимо найти напряжения по заданным деформациям, то следует ввести другие поверхности. В дальнейшем поверхности в осях  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  будем называть сигма-поверхностями Пуассона, а поверхности, используемые для определения  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  по деформациям, назовем эpsilon-поверхностями Пуассона. Последние строятся по сигма-поверхности заменой осей  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  на  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ .

По деформационным инвариантам находим соответствующие напряжения с помощью одномерных массивов  $\sigma - \varepsilon$ , описывающих диаграмму напряжений.

Аналогично для пространственного напряженного состояния записывается связь между главными деформациями  $\varepsilon_i$  и деформационными инвариантами тензора  $\varepsilon_i^0$  напряжений в таком виде :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= \varepsilon_1^0(\sigma_1) + \mu_{32}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)(\varepsilon_2^0(\sigma_2) + \varepsilon_3^0(\sigma_3)) \\ \varepsilon_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= \varepsilon_2^0(\sigma_2) + \mu_{31}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)(\varepsilon_3^0(\sigma_3) + \varepsilon_1^0(\sigma_1)) \\ \varepsilon_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= \varepsilon_3^0(\sigma_3) + \mu_{12}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)(\varepsilon_1^0(\sigma_1) + \varepsilon_2^0(\sigma_2)) \end{aligned} \quad (13)$$

В соответствии с работами Академика В.В. Новожилова число нелинейных функций  $\mu_{ij}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  равно *трём*.

Эти функции подлежат экспериментальному определению для материалов, позволяющих создавать регулируемое пространственное напряженное состояние. К числу таких материалов относятся некоторые грунты, в которых с помощью стабилометра можно создать объемное напряженное состояние при любых соотношениях между главными напряжениями, измеряя при этом главные деформации. Зная главные напряжения, с помощью диаграммы, характеризующей данный материал,

находим деформационные инварианты  $\varepsilon_1^0$ ,  $\varepsilon_2^0$ ,  $\varepsilon_3^0$ , а затем вычисляем функции поперечной деформации:

$$\begin{aligned}\mu_{32} &= \frac{\varepsilon_1^0 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2^0 + \varepsilon_3^0}; \\ \mu_{31} &= \frac{\varepsilon_2^0 - \varepsilon_2}{\varepsilon_3^0 + \varepsilon_1^0}; \\ \mu_{12} &= \frac{\varepsilon_3^0 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1^0 + \varepsilon_2^0}.\end{aligned}\tag{14}$$

Создавая объемное напряженное состояние при некоторых значениях главных напряжений, замеряем главные деформации и определяем по одной точке для каждой из поверхностей  $\mu_{ij}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Сохраняя определенным образом отношения главных напряжений, проводим серию испытаний и строим три сигма-поверхности Пуассона. Аналогично строятся сигма-поверхности при других соотношениях между главными напряжениями.

В данной работе предлагается в качестве инвариантов использовать линейные комбинации главных деформаций, определяя эти инварианты с помощью некоторых функций двух или трех переменных, отображаемых в виде поверхностей Пуассона. Эти же инварианты одновременно являются деформационными инвариантами тензора напряжений (ДИТН) и могут быть использованы для вычисления главных напряжений. Смешанный характер ДИТН является тем звеном, которое позволяет переходить от тензора напряжений к тензору деформаций и наоборот.

**В третьей главе** получены определяющие соотношения для изотропного нелинейно-упругого материала в условиях простого нагружения.

Деформационные инварианты тензора напряжений можно легко найти с помощью тензора напряжений и диаграммы растяжения-сжатия. Отыскание этих же инвариантов с помощью тензора деформаций несколько сложнее, поскольку требует наличия функций поперечной деформации и построение обратной матрицы. Приравнивая инварианты, найденные для соответствующих тензоров, получаем зависимости между главными напряжениями и главными деформациями, предполагая изотропию материала и соосность рассматриваемых тензоров, один из которых задан, а другой требуется найти. Соосность тензоров позволяет осуществлять переход от главных направлений к исходным произвольным и формировать

определяющие соотношения для нелинейно-упругого материала в самом общем виде как в прямой, так и в обратной форме.

Принимая во внимание соотношения между главными напряжениями и деформационными инвариантами тензора напряжений, которые следуют из физического смысла этих инвариантов, можем записать :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \mu_{32} \left( \frac{\sigma_2}{E_2} + \frac{\sigma_3}{E_3} \right); \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} - \mu_{31} \left( \frac{\sigma_3}{E_3} + \frac{\sigma_1}{E_1} \right); \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E_3} - \mu_{12} \left( \frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2} \right),\end{aligned}\tag{15}$$

где:  $E_k$  - секущий модуль диаграммы напряжений, определяемый по соответствующему главному напряжению (его введение имеет чисто методический характер, поскольку ЭВМ осуществляет прямой поиск ДИТН по главному напряжению и наоборот);

$\mu_{kj}$  - нелинейные функции.

Эти зависимости в обратной форме :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= E_1(v_{11}\varepsilon_1 + v_{12}\varepsilon_2 + v_{13}\varepsilon_3); \\ \sigma_2 &= E_2(v_{21}\varepsilon_1 + v_{22}\varepsilon_2 + v_{23}\varepsilon_3); \\ \sigma_3 &= E_3(v_{31}\varepsilon_1 + v_{32}\varepsilon_2 + v_{33}\varepsilon_3).\end{aligned}\tag{16}$$

где коэффициенты при главных деформациях есть элементы матрицы, которая обратна матрице  $A$ :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -\mu_{32} & -\mu_{32} \\ -\mu_{31} & 1 & -\mu_{31} \\ -\mu_{12} & -\mu_{12} & 1 \end{vmatrix}$$

Обратная матрица в общем случае не будет симметричной

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23} \\ \nu_{31} & \nu_{32} & \nu_{33} \end{vmatrix} \quad (17)$$

Выражения для ДИТН имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \nu_{11}\varepsilon_1 + \nu_{12}\varepsilon_2 + \nu_{13}\varepsilon_3; \\ \varepsilon_2^0 &= \nu_{21}\varepsilon_1 + \nu_{22}\varepsilon_2 + \nu_{23}\varepsilon_3; \\ \varepsilon_3^0 &= \nu_{31}\varepsilon_1 + \nu_{32}\varepsilon_2 + \nu_{33}\varepsilon_3. \end{aligned} \quad (18)$$

Определяя компоненты тензора деформаций по заданным компонентам тензора напряжений, опираясь на гипотезу о коаксиальности рассматриваемых тензоров, находим главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и направляющие косинусы  $l, m, n$  для каждого направления

В соответствии с гипотезой о коаксиальности тензоров эта таблица так же определяет направления главных деформаций, которые найдем по приведенным выше зависимостям..

Зная  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  осуществляем переход от главных осей к исходным. При этом учтем, что положение оси  $x$ , например, в главных осях определится направляющими косинусами  $l_1, l_2, l_3$ , поэтому для сохранения привычного вида введем другие обозначения:

$$\begin{aligned} l_{01} &= l_1; m_{01} = l_2; n_{01} = l_3; \\ l_{02} &= m_1; m_{02} = m_2; n_{02} = m_3; \\ l_{03} &= n_1; m_{03} = n_2; n_{03} = n_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \left[ \frac{\sigma_1}{E_1} - \mu_{32} \left( \frac{\sigma_2}{E_2} + \frac{\sigma_3}{E_3} \right) \right] l_{01}^2 + \left[ \frac{\sigma_2}{E_2} - \mu_{31} \left( \frac{\sigma_3}{E_3} + \frac{\sigma_1}{E_1} \right) \right] m_{01}^2 + \left[ \frac{\sigma_3}{E_3} - \mu_{12} \left( \frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2} \right) \right] n_{01}^2; \\ \varepsilon_{xy} &= \left[ \frac{\sigma_1}{E_1} - \mu_{32} \left( \frac{\sigma_2}{E_2} + \frac{\sigma_3}{E_3} \right) \right] l_{01} l_{02} + \left[ \frac{\sigma_2}{E_2} - \mu_{31} \left( \frac{\sigma_3}{E_3} + \frac{\sigma_1}{E_1} \right) \right] m_{01} m_{02} + \left[ \frac{\sigma_3}{E_3} - \mu_{12} \left( \frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2} \right) \right] n_{01} n_{02}. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогично получают выражения для других компонент тензора деформаций. Если задан тензор деформаций, то компоненты тензора напряжений находим по такой же методике :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} = & E_1 (\nu_{11}\varepsilon_1 + \nu_{12}\varepsilon_2 + \nu_{13}\varepsilon_3)l_{01}^2 + \\ & + E_2 (\nu_{21}\varepsilon_1 + \nu_{22}\varepsilon_2 + \nu_{23}\varepsilon_3)m_{01}^2 + \\ & + E_3 (\nu_{31}\varepsilon_1 + \nu_{32}\varepsilon_2 + \nu_{33}\varepsilon_3)n_{01}^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} = & E_1 (\nu_{11}\varepsilon_1 + \nu_{12}\varepsilon_2 + \nu_{13}\varepsilon_3)l_{01}l_{02} + \\ & + E_2 (\nu_{21}\varepsilon_1 + \nu_{22}\varepsilon_2 + \nu_{23}\varepsilon_3)m_{01}m_{02} + \\ & + E_3 (\nu_{31}\varepsilon_1 + \nu_{32}\varepsilon_2 + \nu_{33}\varepsilon_3)n_{01}n_{02};\end{aligned}$$

Для плоского напряженного состояния получены определяющие соотношения для малых деформаций, содержащие две нелинейные функции поперечной деформации (для главных направлений):

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(\sigma_1, \sigma_2) = & \varepsilon_1^0(\sigma_1) - \mu_2(\sigma_1, \sigma_2)\varepsilon_2^0(\sigma_2); \\ \varepsilon_2(\sigma_1, \sigma_2) = & \varepsilon_2^0(\sigma_2) - \mu_1(\sigma_1, \sigma_2)\varepsilon_1^0(\sigma_1).\end{aligned}$$

Возможно распространение этих выражений на задачи прикладной нелинейной теории термоупругости, если для каждого однородного температурного поля экспериментально найдены деформационные инварианты, функции поперечной деформации и главная силовая деформация, равная разности полной деформации и температурной деформации по соответствующему направлению (она должна стоять слева в этих выражениях).

**В четвертой главе** рассматриваются экспериментальные основы разработанных определяющих соотношениях. Экспериментальная база для реализации полученных определяющих соотношений давно освоена. За последние 50 лет накоплено много экспериментальных исследований над тонкостенными трубами. Известны опыты Лоде, Тейлора и Квинни, Дэвиса и других зарубежных и отечественных исследователей. Серьезные экспериментальные работы проводятся в Институте проблем прочности АН Украины. В России этому много внимания уделяют А.М. Жуков, А.Я.Гольдман, тульская школа и др. Для ряда материалов, находящихся в условиях объемного напряженного состояния, этому вопросу много внимания уделяется в Южно-Уральском государственном университете (г.Челябинск) Если компоненты исходного тензора напряжений строго соответствуют координатной сетке сигма-поверхности Пуассона, то получим тензор деформации, совпадающий с экспериментальным. В противном случае обобщенный коэффициент Пуассона принимается по интерполяции и отклонения от эксперимента имеют место.



Таким образом, физические соотношения для нелинейно-упругого материала при простом нагружении и коаксиальности тензора напряжений и тензора деформаций для произвольных направлений записываются через базовый закон, который устанавливает связь между главными напряжениями и главными деформациями через деформационные инварианты и их функции.

**В пятой главе** рассматривается вопрос о соответствии начального и конечного базиса в задачах теории упругости в криволинейных координатах.

В исходных уравнения теории упругости при малых перемещениях для любой задачи дифференциальные уравнения равновесия сформулированы для координат точек в исходном положении элемента, а геометрические соотношения, начиная с Коши, формулируются для деформированного состояния. В декартовых координатах это не приводит к нарушению точности решения, а в полярных координатах при малых перемещениях производная по криволинейной координате от радиального перемещения для точки в исходном положении и для той же точки в деформируемом состоянии отличаются друг от друга на величину, равную одной из компонент, входящих в существующее выражение для угловой деформации. Корректность решения имеет место только в том случае, когда все исходные уравнения записаны для координат точек одного и того же состояния и соответствуют одному и тому же базису. Если пользоваться выражением для конечного базиса, но подставлять туда координаты точек в исходном положении, то можем получить ситуацию, изображенную на рис.1. Как уже отмечалось на этом рисунке угол  $da'd'$  принадлежит начальному базису, а угол  $b'a'b1$  принадлежит конечному базису. Поскольку исходный угол  $dab$  прямой, то угол  $da'b1$  острый и его изменение, равное сумме заштрихованных углов, не может соответствовать классическому понятию Коши.

Таким образом, если в формулу (7) для угловых деформаций в полярных координатах, полученную Борхардтом в 1873 г.,

подставить координаты точки в начальном положении, то получим угловую деформацию, которая не позволит найти касательные напряжения, что заставляет сделать предварительный вывод о частичном несоответствии конечного и начального базисов в криволинейных координатах и тщательнее изучить этот вопрос.

Под базисом в окрестности рассматриваемой точки подразумевается совокупность искомым функций перемещений, производных для этих функций и координат рассматриваемых точек. Для исходного положения базис содержит определенное множество координат рассматриваемой точки, а остальные множества являются пустыми (

исходный базис). Здесь и далее иллюстрации и выкладки приведены для полярных координат.

Все остальные базисы процесса деформирования, заканчивающегося конечным базисом, имеют все множества неопределенных величин. Координаты точек конечного базиса, например, есть множество координат исходного базиса, сложенное с неопределенным множеством искомым функций, что создает непреодолимые трудности при решении задач. Поэтому возникла необходимость совместного использования исходного базиса, сильной стороной которого является определенное множество координат, и конечного базиса.

Самый простой вариант составления функционирующего базиса из двух вышеуказанных состоит в том, что из исходного берут множество координат, а из конечного - все остальные неопределенные множества, при этом происходит простое перемещение множеств в соответствии со стрелками между таблицами рис. 2б и рис. 2а, в результате чего получается базис, изображенный на рис. 2в (смешанный базис).

Получаемый при этом базис называется начальным по названию исходных координат. **Все начальные базисы есть некоторая математическая модель реального конечного базиса.** Степень соответствия начального и конечного базиса определяет точность решения задачи и её прикладное значение. Начальный смешанный базис хорошо зарекомендовал себя в декартовых координатах, поскольку малое изменение координат точек при изменении нагрузки влечет малое

а) Исходный базис

Координаты	
r	S
Деформации	
	0

б) Конечный базис

Координаты	
r+U	S+V
Деформации	
$\frac{\partial U}{\partial r}$	$\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{U}{r}$



в) Начальный смешанный базис г) Начальный приведенный базис

Координаты	
R	S
Деформации	
$\frac{\partial U}{\partial r}$	$\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{U}{r}$

Координаты	
R	S
Деформации	
$\frac{\partial U}{\partial r}$	$\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial r}$

Рис. 2

изменение всех элементов других множеств конечного базиса, позволяя считать начальный базис эквивалентным конечному, что позволяет получать надежные решения. Такой подход был также распространен на решение задач при малых деформациях в криволинейных координатах и вопрос о соотношении (эквивалентности) начального и конечного базиса в криволинейных координатах был окончательно закрыт в конце XIX века. Между тем, в криволинейных координатах не все элементы множеств конечного базиса и начального смешанного базиса эквивалентны друг другу в силу специфики координат.

В качестве критерия эквивалентности базисов потребуем равенства угловых деформаций для конечного и нового начального базиса и их соответствия методологии теории упругости. Для этого множества конечного базиса перемещаем в начальный базис по схеме рис. 2г, «просеивая» элементы всех множеств через начальные координаты. Переходя к начальным координатам, следует корректно преобразовать выражения для производных от конечных координат, содержащих искомые функции, к начальным, причем следует обращать внимание не только на то, насколько малы полученные дополнения для производных, но и особенно на то, встречаются ли полученные дополнительные члены в выражениях Борхардта, образующих множества конечного базиса.

Вопрос о тождественности выражений для угловых деформаций в конечном и в начальном базисах не столь очевиден, поскольку производные по криволинейной координате для двух соседних положений точки отличаются друг от друга. Такое отличие является **естественным и главным вопросом состоит не в факте незначительного отличия производных, а в том, входит ли эта величина в выражение для угловой деформации.**

Из простых геометрических соображений следует, что в полярных координатах при малых перемещениях частные производные от радиального перемещения по криволинейной координате для двух соседних положений одной и той же точки отличаются на угол поворота радиуса, равный отношению перемещения  $V$  к радиальной координате  $r$ .

$$\partial U / \partial S(S_a + V) = \partial U / \partial S(S_a) + V/r,$$

где  $S_a$  - криволинейная координата рассматриваемой точки  $a$  в исходном

положении.

Вопрос о малости члена  $V/r$  не обсуждается, поскольку этот член встречается в формуле Борхардта.

Полученная зависимость дает выражение для угловой деформации, приведенное в правом нижнем углу таблицы рис. 2г, которая соответствует эквивалентному (или приведенному) начальному базису.

Выражение для угловой деформации в начальном базисе может быть получено другими способами, что сделано далее в силу исключительной важности этого вопроса.

Пусть точка  $a$  получит перемещения  $U$  и  $V$  в радиальном и в окружном направлениях (Рис.3), а исследуемый прямой угол  $bad$  трансформируется в острый угол  $b_1a_1d_1$ . Требуется найти изменение угла  $bad$  в начальном базисе. Очевидно, что исследуемый угол изменится на углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , которые дадут искомую величину угловой деформации:

$$\gamma_{r\theta} = \beta_1 + \beta_2.$$

Принимая во внимание выражения для углов  $\beta_1$  и  $\beta_2$

$$\beta_2 = \frac{\partial V}{\partial r} - \omega_{as}; \beta_1 = \omega_{ad} + \frac{\partial U}{r \partial \theta}$$

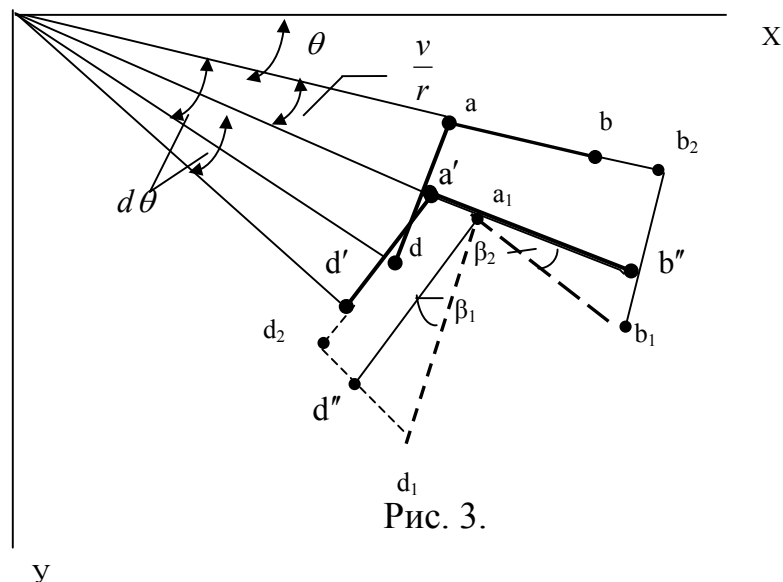
и учитывая, что

$$\omega_{as} = \frac{V}{r}; \omega_{ad} = \frac{V}{r},$$

окончательно имеем:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad (21)$$

Второй способ вывода выражения для угловых деформаций тоже ориентирован на начальный базис.



Основные особенности рассматриваемой задачи состоят в том, что функции для окружных  $V$  и радиальных перемещений  $U$  являются зависимыми между собой, порождаемыми одной и той же функцией  $f$  полного перемещения, каждая из них есть приращение координаты рассматриваемой точки в процессе деформирования, но главная особенность состоит в том, что проекция бесконечно-малой дуги рассматриваемого

элемента в процессе деформирования, оставаясь на исходной криволинейной координатной линии, повернется относительно своего исходного положения в зависимости от окружного перемещения.

Принимая во внимание рис.4 и складывая производные, найденные для точки  $a_1$ , найдем изменение угла, образованного проекцией  $a_1 b_1$  и осью  $r$ :

$$\gamma = \partial U / \partial S + \partial V / \partial r$$

Поскольку угол  $(a_1 b_1 \wedge r)$  отличен от прямого, то полученное выражение для угловой деформации не будет соответствовать понятию Коши. Логично поэтому из этого выражения вычесть угол  $v/r$ :

$$\gamma_{\theta r} = \partial U / \partial r \partial \theta_{(S=S_a+v)} + \partial V / \partial r - V / r \quad (22)$$

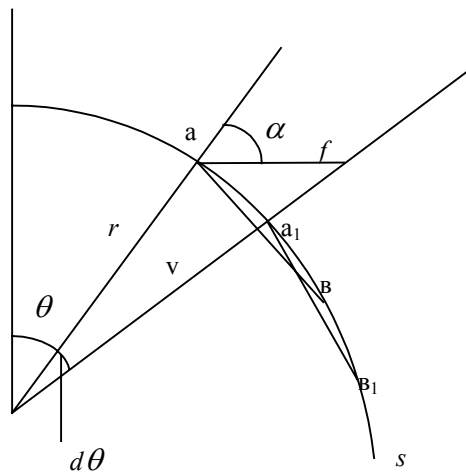


Рис. 4

Полученное выражение совпадает с выражением Борхардта в конечном базисе. Чтобы получить выражение для угловой деформации в начальном приведенном базисе, установим связь между производными конечного и начального базисов. Эту зависимость легко установить, если первую производную для точки  $a_1$  разложить в ряд Тейлора:

$$\partial U / \partial S_{(S=S_a+v)} = \partial U / \partial S_{(S=S_a)} + V \partial^2 U / \partial S^2_{(S=S_a)}$$

Учитывая, что  $r \gg f$ , получим:

$$\partial^2 U / \partial S^2_{(S=S_a)} = 1/r,$$

что позволяет записать уже известное нам выражение:

$$\partial U / \partial S_{(S=S_a+V)} = \partial U / \partial S_{(S=S_a)} + V/r$$

Пользуясь выражением между первыми производными для точек  $a$  и  $a1$ , окончательно имеем:

$$\gamma_{\theta r} = \partial U / \partial r \partial \theta + \partial V / \partial r - V / r + V / r = \partial U / \partial r \partial \theta + \partial V / \partial r .$$

Поскольку оба выражения (21) и (22) справедливы для своих условий, то при их написании следует указывать для каких положений точек они справедливы, как это принято выше или аналогичным образом. К рассмотренным вопросам близки задачи о кручении, решаемые в цилиндрических координатах.

**Рассмотрим задачу о чистом сдвиге.** Предположим, что тонкостенная труба длиной  $l$  и среднего радиуса  $R$  закреплена в начале координат на левом конце.

Пусть сечение на правом конце повернется на угол  $\varphi = c = \text{const}$

Этому краевому условию соответствуют перемещения для произвольного сечения с координатой  $z$  :

$$u_{\theta} = (c/l)z; \quad u_r = 0; \quad u_z = 0. \quad (23)$$

Обозначая криволинейную координату  $S = r\theta$  для произвольной точки в исходном положении через  $S_0$  запишем выражения для угловых деформаций в цилиндрических координатах:

$$\gamma_{\theta r} = \begin{cases} \partial u_r / r \partial \theta + \partial u_{\theta} / \partial r - u_{\theta} / r, & \text{если } S = S_0 + u_{\theta}, \\ \text{или} \\ \partial u_r / r \partial \theta + \partial u_{\theta} / \partial r, & \text{если } r\theta = S = S_0, \end{cases} \quad (24)$$

$$\quad \quad \quad (25)$$

$$\gamma_{rz} = \partial u_r / \partial z + \partial u_z / \partial r, \quad (26)$$

$$\gamma_{\theta z} = \partial u_z / r \partial \theta + \partial u_{\theta} / \partial z. \quad (27)$$

Пользуясь выражением (24) и функциями для перемещений (23), имеем:

$\gamma_{\theta r} = u_{\theta} / r - u_{\theta} / r = 0$ . Этот же результат имеем из выражения (25).

Для других угловых деформаций из (26) и (27) имеем:

$$\gamma_{rz} = \partial u_r / \partial z + \partial u_z / \partial r = 0; \quad \gamma_{\theta z} = \partial u_z / r \partial \theta + \partial u_{\theta} / \partial z = c/l.$$

**Кручение вала круглого поперечного сечения.**

Вал круглого поперечного сечения длиной  $l$  зашпелен при  $z=0$  в начале координат на левом конце, а на правом конце при  $z=l$  имеет следующие краевые условия :

$$u_{\theta} = r\varphi; \quad u_r = 0; \quad u_z = 0.$$

Этому условию соответствуют перемещения для произвольного сечения с координатой  $z$  :

$$u_{\theta} = (\varphi/l)rz; \quad u_r = 0; \quad u_z = 0.$$

Пользуясь функциями для перемещений  $u_{\theta}$ ,  $u_r$ ,  $u_z$ . ивыражениями (4), (5), (6),(7) имеем:

$$\gamma_{\theta r} = (\varphi/l)z$$

$$\gamma_{rz} = \partial u_r / \partial z + \partial u_z / \partial r = 0;$$

$$\gamma_{\theta z} = \partial u_z / r \partial \theta + \partial u_{\theta} / \partial z = (\varphi/l)r.$$

Полученные результаты полностью соответствуют точному решению теории упругости в цилиндрических координатах, получаемому из точного решения в декартовых координатах для бруса эллиптического сечения ( Кац А.М. Теория упругости. 2-е изд., стер.- СПб.: Издательство «Лань», 2002.-С. 132):

$$\tau_{zx} = -2\alpha G a^2 y / (a^2 + b^2); \quad \tau_{zy} = 2\alpha G b^2 x / (a^2 + b^2);$$

где :  $\alpha$  есть угол закручивания на единицу длины;

$G$ -модуль сдвига.

Если полуоси эллипса совпадут ( $a=b=R$ ), то имеем точное решение для круглого сечения, радиуса  $R$ :

$$\tau_{zx} = -\alpha G y; \quad \tau_{zy} = \alpha G x;$$

Складывая полученные касательные напряжения геометрически, будем иметь для точки с цилиндрическими координатами  $z, r, \theta$ :

$$\tau_{\theta r} = 0; \quad \tau_{z\theta} = \alpha G r.$$

Этим напряжениям соответствуют точные выражения для деформаций в цилиндрических координатах:

$$\gamma_{\theta r} = 0; \quad \gamma_{z\theta} = \alpha r.$$

Рассмотрим решение задачи о перемещениях при действии сосредоточенной вертикальной силы  $P$ , приложенной к горизонтальной прямолинейной границе бесконечно большой пластинки (задача Фламана) в приведенном начальном базисе.

Начало координат совпадает с точкой приложения силы. Для напряжений примем известное решение задачи о действии силы на полуплоскость :

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos\theta}{\pi r};$$

$$\sigma_\theta = 0;$$

$$\tau_{r\theta} = 0.$$

Существующее решение о перемещениях в задаче Фламана, опирающееся на выражение для угловой деформации по Борхардту, в качестве граничного использует условие равенства нулю перемещения в некоторой точке, лежащей на линии действия силы, предполагает наличие в этой точке жесткой опоры. Если эта опора является единственной, то возникает вопрос о справедливости исходных зависимостей для напряжений. Таких опор должно быть несколько. Более того, связи должны быть распределены по полуокружности достаточно большого радиуса. Помимо вопроса о граничных условиях возникает вопрос об определении перемещений на основании выражения для угловой деформации в соответствии начальным базисом.

Для случая, когда **связями являются шарнирно-неподвижные опоры**, используя для деформаций выражения начального базиса

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (28)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad (29)$$



$$\gamma_{\theta r} = \frac{\partial U}{r \partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r}. \quad (30)$$

и выражения для напряжений, обозначая  $2P/\pi E = K$ , получим выражения для деформаций:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{K \cos \theta}{r}.$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\mu K \cos \theta}{r}.$$

$$\gamma_{\theta r} = \frac{\partial U}{r \partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \quad (31)$$

Интегрируя уравнение для  $\varepsilon_r$ , имеем:

$$U = -K \cos \theta \ln r + F(\theta)$$

Для определения функции  $F(\theta)$  воспользуемся условием, что при  $r=H$  радиальные перемещения отсутствуют:

$$F(\theta) = K \cos \theta \ln H$$

С учетом полученного результата имеем выражение для радиальных перемещений:

$$U = K \cos \theta \ln \frac{H}{r}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение для  $\varepsilon_\theta$ , имеем:

$$V = \mu K \sin \theta - K \sin \theta \ln \frac{H}{r} + f(r)$$

Подставляя выражения  $U$  и  $V$  в дифференциальное уравнение для  $\gamma_{\theta r}$  получим дифференциальное уравнение для функции  $f(r)$ :

$$\frac{-K \sin \theta}{r} \ln \frac{H}{r} + \frac{K \sin \theta}{r} + f'(r) = 0$$

Интегрируя это уравнение, будем иметь:

$$f(r) = -\frac{K \sin \theta}{2} \ln^2 \frac{H}{r} - K \sin \theta \ln r + \varphi(\theta)$$

Функцию  $\varphi(\theta)$  найдем из условия, что радиальные перемещения при  $r=H$  отсутствуют в соответствии с расчетной схемой:

$$\varphi(\theta) = -\mu K \sin \theta + K \sin \theta \ln H$$

Тогда получим:

$$V = \mu K \sin \theta - K \sin \theta \ln \frac{H}{r} - \frac{K \sin \theta}{2} \ln^2 \frac{H}{r} - K \sin \theta \ln r - \mu K \sin \theta + K \sin \theta \ln H$$

Окончательно имеем для окружных перемещений:

$$V = -\frac{K \sin \theta}{2} \ln^2 \frac{H}{r} \quad (32)$$

Из этой формулы будем иметь вертикальные перемещения для точек горизонтальной поверхности:

$$V_{(\theta=\pi/2)} = \frac{P}{\pi E} \ln^2 \frac{H}{r} \quad (33)$$

**В шестой главе** рассматриваются задачи теории упругости, в которых используются полученные обобщенные зависимости между напряжениями и деформациями нелинейной теории упругости, главной целью которых является иллюстрация полученных обобщенных зависимостей между напряжениями и деформациями.

Для расчета плиты предлагается моноэлементный метод, когда выражение для перемещений задается с точностью до некоторой постоянной, которая затем определяется из дифференциального уравнения равновесия, записанного для весьма малого элемента в конечно-разностной форме.

В физически нелинейной постановке рассматриваются классические задачи о действии сосредоточенной силы на полуплоскость, о действии сосредоточенной силы на полупространство и аналогичные задачи с использованием модели основания, разработанной автором.

Предлагаемое решение используется при решении задачи о расчете линейно-упругой плиты на нелинейно-упругом поликоническом основании, предложенном автором, с использованием развиваемого варианта

метода сеток. Поликоническое основание состоит из усеченных конусов, число которых равно числу узлов рассматриваемой сетки и сплошного верхнего слоя. Для бесконечного конуса, загруженного в вершине сосредоточенной силой, предполагается существующее классическое решение для напряжений.

Задача о расчете физически и геометрически линейной - упругой плиты, свободно лежащей на нелинейно-упругом поликоническом основании, решена методом сеток в сочетании с методом последовательных приближений с использованием методики решения аналогичной задачи на винклеровом основании с переменным коэффициентом постели. Внешняя нагрузка по узлам выбранной сетки распределяется по традиционной схеме. В тех же узлах со стороны основания действуют реактивные усилия.

Дифференциальное уравнение изгиба плиты в координатах  $x, y$ :

$$D \nabla^4 W(x, y) = q(x, y) - p(x, y)$$

где  $W(x, y)$  - осадка основания;

$q(x, y)$  - внешняя нагрузка;

$p(x, y)$  - реакция основания;

$D$  - цилиндрическая жесткость плиты.

Реакция основания нелинейно зависит от осадки:

$$p(x, y) = K(x, y) \cdot W(x, y)$$

где  $K(x, y)$  - коэффициент постели в данной точке.

В методе сеток для свободно опертых граней учет всех краевых усилий требует рассмотрения двух слоев законтурных значений искомой функции перемещений, а это в свою очередь ставит вопрос о погрешности решения. *От второго законтурного слоя можно не только избавиться, но и увеличить точность решения задачи, сохраняя в уравнениях все краевые усилия, если воспользоваться уравнениями равновесия не только в дифференциальной форме для бесконечно малого элемента, но также записать конечно-разностные статические условия для части плиты, получаемой из данной сквозным сечением, проходящем через все узлы одного из внутренних слоев.*

Для всех внутренних узлов сетки записываем уравнение (35) в конечно-разностной форме. При этом в уравнения войдут значения искомой функции  $W$  только для первого законтурного слоя.

При этом силы, входящие в уравнения равновесия отсеченной части плиты, выражаются через перемещения следующим образом :

$$P_i = K_i \cdot W_i$$

где  $K_i$  - переменный коэффициент, зависящий от грузовой площади  $S_i$  - для узла  $i$  и коэффициента постели.

$$K_i = K(X_i, Y_i) S_i$$

Из (5.40) и (5.41) получим:

$$K(X_i, Y_i) = P_i / (W_i S_i)$$

В качестве примера рассматривается плита, имеющую размеры в плане  $6 \times 6$  м., с внешней нагрузкой интенсивностью  $q$ , распределенной в центре плиты симметрично в квадрате размером  $1,91 \times 1,91$  м., принимая шаг сетки  $2,5$  h. С учетом симметрии вместо 49 будем иметь 10 неизвестных. Расхождение с точным значением составляет 0,75%.

Для составления программы расчета плиты на нелинейно-упругом поликоническом основании необходимо подробно ознакомиться с процедурами “ручного” счета в линейной задаче, в основе которого лежит вспомогательная задача о деформациях в некоторой точке. Из рассмотрения исключается верхняя часть конуса, где формулы линейной теории не справедливы.

Последнее обстоятельство заставляет рассматривать слой основания лежащий, над усеченным конусом. На верхней и нижней поверхностях его нормальные напряжения  $\sigma_z$  известны. Для промежуточных точек задача об определении напряжений заслуживает самостоятельного рассмотрения. Учитывая незначительную толщину слоя по сравнению с размерами плиты, принимаем нормальные напряжения в горизонтальных площадках промежуточных точек близкими к напряжениям в основании под подошвой плиты в соответствии с существующими работами В.М.Мальшева, Ю.Н. Мурзенко и другими работами по механике грунтов. Аналогично принимаются другие главные напряжения.

При расчете плиты сопоставляются перемещения плиты и осадку основания во всех точках. Если расхождения между ними велико, все процедуры повторяются, начиная с расчета плиты при переменных коэффициентах постели, вычисляемых в конце предыдущего приближения.

Для первой степени нагружения начальные коэффициенты постели принимаем по винклеровому основанию или по предварительным расчетам для поликонического основания. Для определения условного переменного коэффициента постели необходимо силу в узле разделить на найденную осадку основания. Если для всех узлов сетки разность между перемещениями для соответствующих точек плиты и осадкой основания в начале очередного приближения и в конце этого же приближения соответствует заранее указанным границам, то расчет на первую степень нагружения окончен. Одно из преимуществ метода последовательных

нагружений, введенного в теорию сооружений В. В. Петровым, в данной задаче состоит в том, что в начале очередной ступени нагружения нам известны исходные условные коэффициенты постели и, кроме того, представляется возможным проследить за процессом деформирования. По результатам расчета на ступени нагружения строим диаграмму нарастания осадки.

Переменный коэффициент постели  $K_i$  определяем как отношение напряжений  $\sigma_i$  к осадке основания  $W_i$ . В связи с тем, что безразмерная эпюра напряжений  $\sigma / \sigma_{\max}$  не зависит от положения узла, для контурных узлов при определении  $K_i$  учитываем усредненное напряжение, т.к. конус выходит за контуры плиты в плане. Эта расчетная схема требует дальнейшей детализации и обсуждения.

В заключительной части шестой главы произведен расчет тонкостенных цилиндрической, сферической и конической оболочек на базе гипотетических данных.

Результаты данной научной работы могут найти широкое применение в физически нелинейных задачах теории упругости при малых деформациях, а также при решении задач механики деформируемого тела в криволинейных координатах с дальнейшим выходом на теоретические вопросы создания всевозможных объектов народного хозяйства.

## Общие выводы по научной работе.

1. Имеет место несоответствие существующего начального смешанного и конечного базисов в криволинейных координатах при малых деформациях, что требует при решении системы исходных дифференциальных уравнений задач теории упругости в криволинейных координатах вместо существующего базиса ввести начальный приведенный базис, основанный на корректной замене выражения для угловой деформации, которое справедливо для конечного базиса, выражением для начального базиса, полученное в данной работе.

2. Широко распространенные в нелинейной механике деформируемого твердого тела определяющие соотношения Генки-Каудерера противоречивы. Поскольку ключевым вопросом в развитии физических основ линейной и нелинейной механики деформируемого твердого тела является вопрос о коэффициенте поперечной деформации, то дальнейшее развитие физических основ нелинейной механики деформируемого твердого тела требует введения обобщенных коэффициентов (функций) поперечной деформации, которые позволяют дать строгие непротиворечивые определяющие соотношения.

3. Существует некоторая величина, являющаяся сложным инвариантом и тензора напряжений, и тензора деформаций. Физический смысл этого инварианта- это деформация, определяемая в зависимости от главных напряжений по диаграмме растяжения-сжатия (деформационный инвариант тензора напряжений-ДИТН).. Деформационные инварианты позволяют построить поверхности, с помощью которых определяются обобщенные коэффициенты поперечной деформации, используемые для вычисления главных деформаций в зависимости от ДИТН и наоборот.

4. Физические соотношения для нелинейно-упругого материала при простом нагружении и коаксиальности тензора напряжений и тензора деформаций для произвольных направлений определяются базовым законом, который записывается через деформационные инварианты и их функции и устанавливает связь между главными напряжениями и главными деформациями. Процедура отыскания компонент тензора напряжений по компонентам тензора деформаций предполагает отыскание главных деформаций, главных направлений, обобщенных коэффициентов поперечной

деформации по  $\epsilon$ -поверхности, после чего определяются деформационные инварианты и главные напряжения. На заключительном этапе осуществляется переход от главных направлений к исходным при известных значениях направляющих косинусов и главных напряжений. Аналогичен поиск тензора деформаций по тензору напряжений.

5. Эксперименты, необходимые для реализации предлагаемых обобщенных зависимостей между напряжениями и деформациями при плоском напряженном состоянии давно и хорошо освоены в механике деформируемого твердого тела, а при объемном напряженном состоянии хорошо освоены в механике грунтов и поэтому использование разработанных определяющих соотношений прикладной нелинейной теории упругости, являющихся окончательным решением проблемы определяющих соотношений, не вызывает затруднений в осесимметричных задачах расчета оболочек и в других задачах прикладной нелинейной теории упругости при малых деформациях.

6. Для материалов, воспринимающих нагрузку частью своего объема, может быть использована в расчетах оснований и фундаментов математическая модель, состоящая из нескольких конусов, позволяющая в большей мере математическую модель приблизить к реальному объекту за счет совершенствования определяющих соотношений, расчетной схемы и методики расчета.

## СПИСОК ОСНОВНЫХ ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

### Обязательные публикации в издательствах, рекомендуемых ВАКом РФ

1. Ершов В,И. Определение перемещений в задаче Фламана в соответствии с понятием угловой деформации по Коши. // Изв. Вузов. Сев. Кавк. Регион. Техн. науки. 2002,- №4. С. 111-112.
2. Ершов В,И. Модель угловой деформации в полярных координатах в задачах прикладной теории упругости при малых деформациях.// Изв. Вузов. Сев. Кавк. Регион. Техн. науки. 2002,- Спецвыпуск.- С. 65-66.
3. Ершов В,И. Математическая модель угловой деформации в криволинейных координатах. // Изв. Вузов. Сев. Кавк. Регион. Техн. науки. 2003,- Спецвыпуск.- С. 72-74.
4. Ершов В.И. Моноэлементный метод расчета нелинейно-упругой пластинки. // Изв.вузов. Строительство.-1992,-N 5, с.33-36.
5. Ершов В.И. Расчет невесомой полуплоскости с локализованными зонами физической нелинейности. //Изв. вузов."Строительство".-1993,-N10, с.27-30.
6. Ершов В.И. Действие распределенной нагрузки на нелинейно-деформируемое полупространство. / Изв. вузов. "Строительство". -1994, -N 1, с.25-29.
  
- 7.Ершов В.И. Исходные уравнения расчета на прочность объектов теплотехнологии. // Изв.вузов Сев. Кавк. регион. Техн. науки. 2003. Спецвыпуск. С. 178-180.
- 8.Ершов В.И. Использование криволинейных координат при решении задач теории упругости. // Транспортное дело России. Спецвыпуск. Москва, 2003. Проблемы водного транспорта Российской Федерации. С. 121-123.

### Съезды и Конгрессы

- 9.Ершов В.И. Физические соотношения нелинейной теории упругости. Белорусский конгресс по теоретической и прикладной механике. Минск. Тезисы докладов. ИИМС АНБ, «Инфотрибо», Гомель-1995. С. 100.



10. Ершов В.И. Определение перемещений в задаче Фламана. Второй Белорусский конгресс по теоретической и прикладной механике. Минск. Тезисы докладов. ИИМС АНБ, «Инфотрибо», Гомель -1999. С.78.
11. Ершов В.И. Использование инвариантных определяющих соотношений при решении задач нелинейной теории упругости. Второй Белорусский конгресс по теоретической и прикладной механике. Минск. Тезисы докладов. ИИМС АНБ, «Инфотрибо», Гомель-1999. С.78.
12. Ершов В.И. Физические и геометрические соотношения нелинейной плоской задачи теории упругости в полярных координатах при малых деформациях. //Восьмой Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Пермь, 2001. С. 250.

### **Монографии.**

13. Ершов В.И. Определяющие соотношения нелинейной теории упругости на основе инвариантов тензора напряжений и тензора деформаций. Минск, «Полесье», Гомель-1999, 202 с.
14. Ершов В.И. Исходные уравнения расчетов на прочность.—Новороссийск: НГМА, 2002.- 32 с.
15. Ершов В.И. Исходные уравнения расчетов на прочность.—2-е изд. - Новороссийск: НГМА, 2003.- 44 с.
16. Ершов В.И. Исходные уравнения расчетов на прочность.—3-е изд.- Новороссийск: НГМА, 2004.- 44 с.
17. Ершов В.И. Физические соотношения в задачах нелинейной строительной механики. Часть I. Деп. в ВИНТИ . N1185 В 94,135 с.
18. Ершов В.И. Физические соотношения в задачах нелинейной строительной механики. Часть II. Деп. в ВИНТИ . N В 95,118 с.

### **Статьи и тезисы докладов.**

19. Ершов В.И. Физические соотношения нелинейной теории упругости при малых деформациях. Сборник научных трудов НГМА, выпуск 5.- Новороссийск: НГМА, 2000.-С. 18-19.
20. Ершов В.И. О коэффициенте безопасности по материалу при изгибе за пределом упругости. - Вологда,1982.-6 с. Деп. во ВНИИИПС 18.10.82, N 3187.
21. Ершов В.И., Лебедев А.В. Об определение перемещений при изгибе балок из нелинейно-упругого материала. // Сб.тр. - Л.: ЛИСИ, 1983, 50с.
22. Ершов В.И. Расчет статически неопределимых рам из нелинейно-упругих материалов. Межвузовский сборник "Деформирование и разрушение конструктивных элементов и материалов". СЗПИ, ВПИ. Ленинград, 1988

23. Ершов В.И., Мотыльков В.В. Выбор толщины листа трёхслойной оболочки ёмкостей для транспортировки и хранения жидкости. Деп. в ВИНТИ, 8909- В88.
24. Ершов В.И. Расчет балки переменного сечения и пластинки из нелинейно-упругого материала. В сб.: "Длительное сопротивление конструкционных материалов и вопросы расчета элементов конструкций". Межвуз. сборник .Ленинград-Вологда, 1991, с.61-64.
25. Ершов В.И. Решение задачи Мичелла для нелинейно-деформируемой полуплоскости. - Деп. в ВИНТИ 12.03.93., N 605-В 93.
26. Ершов В.И. Зависимости между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций для нелинейно-упругого материала в произвольных осях. // Материалы Всероссийской научно-технической конференции. "Прочность и живучесть конструкций" (дополнительный выпуск). Вологда. 1993-с.29-34.
27. Ершов В.И. Большие перемещения осесимметричной оболочки из нелинейно- упругого материала. Деп. в ВИНТИ. N 495 В 9421
- 28.Ершов В.И. Использование деформационных инвариантов тензора напряжений в физических соотношениях нелинейной теории упругости. Деп. в ВИНТИ N 1111 -В94.
- 29.Ершов В.И. Дифференциальные уравнения равновесия плоской задачи теории упругости для особых точек. Сборник научных трудов НГМА, вып.6.- Новороссийск: НГМА, 2001.-С.
- 30.Лукаш П.А., Ершов В.И. Обобщенные зависимости между напряжениями и деформациями для нелинейно-упругого материала. // Тезисы докладов Всероссийской научно-технической конференции "Прочность и живучесть конструкций". Вологда.1993 - с.161.
- 31.Ершов В.И. Определение перемещений в задаче Фламана в соответствии с угловой деформацией по Коши. // Сборник научных трудов НГМА, выпуск 6.-Новороссийск: НГМА, 2001.-С. 7-10.
- 32.Ершов В.И. Подбор оптимальных сечений стальной двутавровой балки по двум параметрам. // Изв.вузов. Строительство.-1985, -N 5, с.33-36.
33. Ершов В.И. Физически и геометрически нелинейные соотношения для плоского напряженного состояния./ Проблемы технической и коммерческой эксплуатации и модернизации транспорта: Тез. докл. /Материалы второй региональной научн. техн. конф.- Новороссийск: НГМА, 2001.- С. 115-116.