

Министерство образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

---

Б.А.Мартынов

## ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГПУ  
2003

УДК 534 (075.8)

Мартынов Б.А. Теория колебаний. Колебательные процессы в распределенных системах: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 52 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Теория колебаний» учебного плана специальности 071500 «Радиофизика и электроника» (направление подготовки дипломированных специалистов 654200 «Радиотехника») и посвящено анализу некоторых специфических явлений, которые могут наблюдаться в нелинейных и параметрических распределенных системах.

Предназначено студентам специальности 071500 «Радиофизика и электроника» радиофизического факультета.

Ил. 19. Библиогр.: 25 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет, 2003

# 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Монохроматическая волна. Фазовая скорость, длина волны, волновое число. Дисперсионное уравнение. Дисперсия

Модели реальных систем, изучаемые в теории колебаний, подразделяются на сплошные, или *системы с распределенными параметрами* (коротко, *распределенные системы*), и дискретные, или *системы с сосредоточенными параметрами* [2, 9, 13, 15, 17, 19, 21].

Анализ распределенной системы должен быть построен таким образом, чтобы для динамических переменных, которыми задается её состояние, было учтено их возможное изменение как во времени, так и в пространстве, причем зависимости динамических переменных от времени  $t$  и координат пространства, как правило, представляют собой те или иные волновые процессы (волны).

Для описания большинства рассматриваемых ниже процессов используются динамические переменные, являющиеся функциями времени и только одной пространственной координаты (декартовой координаты  $z$ ).

К числу простейших примеров волновых процессов относится одномерная *монохроматическая* (*гармоническая*, или *синусоидальная*) волна:

$$a_{\sim}(t, z) = A_m \cos(\omega t - kz + \theta_0). \quad (1.1)$$

Здесь  $A_m$  – постоянная положительная величина, называемая *амплитудой*, функция  $\theta(t, z) = \omega t - kz + \theta_0$  – *фаза* волны, причем начальную фазу  $\theta_0$  можно во многих случаях без потери общности положить равной нулю.

Для наблюдателя, передвигающегося параллельно оси  $z$  со скоростью

$$v_{\phi} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k},$$

фаза остается неизменной. Поэтому величину  $v_{\phi}$ , которая в зависимости от знака  $k$  может быть положительной или отрицательной, называют *фазовой скоростью*. В фиксированных точках наблюдения формулой (1.1) определяются гармонические колебания периода  $\frac{2\pi}{\omega}$ . В точках оси  $z$ , отстоящих друг от друга на расстояние

$$\lambda = \frac{2\pi}{|k|},$$

фазы колебаний различаются на  $2\pi$ , т. е. колебания в этих точках синфазны. Величина  $\lambda$  называется *длиной волны*, а  $k$  – *фазовой постоянной* или *волновым числом*.

Функциональное соотношение, связывающее частоту  $\omega$  и волновое число  $k$ , называют *дисперсионным уравнением*. На его вид могут влиять свойства среды (структуры), в которой распространяется волна. Если фазовая скорость  $v_\phi$  постоянна, т. е. не зависит от частоты (и от волнового числа), то говорят о волне, среде или структуре без дисперсии. В этом случае дисперсионное соотношение сводится к пропорциональной связи между  $\omega$  и  $k$ :

$$\omega = v_\phi k. \quad (1.2)$$

При постоянной величине  $v_\phi$  формулу (1.2) иногда условно именуют «бездисперсионным» дисперсионным уравнением.

Под *дисперсией* понимается явление зависимости фазовой скорости волны от частоты, а среды, в которых такое явление наблюдается, называются *диспергирующими*. В случае дисперсии соотношение между частотой и волновым числом усложняется по сравнению с линейной зависимостью вида (1.2).

Приведем в качестве примера волноведущую структуру (волновод) в виде полой металлической трубы с не изменяющимся по длине волновода поперечным сечением. Для электромагнитных волн внутри такого волновода дисперсионное уравнение в предположении идеальной проводимости стенок представляется как

$$\omega = \sqrt{\omega_{кр}^2 + c^2 k^2} \quad \text{или} \quad k = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{кр}^2}. \quad (1.3)$$

Здесь  $c$  — электродинамическая постоянная (скорость света в пустоте), а  $\omega_{кр}$  — определяемая для рассматриваемого типа волны (волноводной моды) *критическая частота*, ограничивающая снизу область частот, в которой соответствующая мода распространяется по волноводу без затухания [20]. В частности, для моды  $H_{11}$  в полом волноводе, имеющем круглое сечение радиуса  $R$

$$\omega_{кр} = 1,84 \frac{c}{R}. \quad (1.4)$$

## 1.2. Волновой пакет. Групповая скорость

С явлением дисперсии тесно связано понятие групповой скорости. Чтобы подойти к этому понятию, рассмотрим волновой процесс  $s(t, z)$ , представляющий собой сумму трех распространяющихся в положительном направлении оси  $z$  и одинаковых по амплитуде монохроматических волн, которым отвечают различные, хотя и близкие друг другу, частоты.

Допустим, что

$$s(t, z) = a_0(t, z) + a_+(t, z) + a_-(t, z), \quad (1.5)$$

где  $a_0(t, z) = A_m \cos(\omega_0 t - k_0 z)$ ,  $a_\pm(t, z) = A_m \cos(\omega_\pm t - k_\pm z)$ , причем имеет

место следующая связь между частотами:

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \Delta\omega, \quad 0 < \Delta\omega \ll \omega_0.$$

Для предполагаемых в данном случае положительными величинами волновых чисел  $k_0 = k(\omega_0)$ ,  $k_+ = k(\omega_+)$  и  $k_- = k(\omega_-)$  можно записать соотношения:

$$k_{\pm} = k_m \pm \Delta k, \quad k_m = \frac{1}{2}(k_+ + k_-), \quad |\Delta k| \ll k_m, k_0.$$

Задаваемая формулой (1.5) сумма трех волн является частной разновидностью совокупностей, для которых используются наименования «*группа волн*» и «*волновой пакет*».

При неодинаковых фазовых скоростях монохроматических волн, образующих группу, характер зависимостей  $s$  от  $z$ , получаемых в результате суммирования, может быть различным в разные моменты времени. В этом нетрудно убедиться при помощи следующего выражения для  $s(t, z)$ , выводимого из (1.5) посредством тождественных преобразований:

$$s(t, z) = A_m \operatorname{Re}\{[1 + 2 \exp(j(k_0 - k_m)z) \cos(\Delta\omega t - \Delta kz)] \exp(j\omega_0 t - jk_0 z)\}. \quad (1.6)$$

Если  $\exp(j(k_0 - k_m)z) \approx 1$ , например, в том случае, когда

$$|(k_0 - k_m)z| \ll 1, \quad (1.7)$$

правая часть (1.6) может быть упрощена:

$$s(t, z) = A_m [1 + 2 \cos(\Delta\omega t - \Delta kz)] \cos(\omega_0 t - k_0 z). \quad (1.8)$$

При малых  $\Delta\omega$  и  $|\Delta k|$  содержащееся в (1.8) произведение  $A_m$  и выражения в квадратных скобках трактуется как низкочастотная огибающая высокочастотной волны, перемещающаяся со скоростью  $v_{\text{гр}}$ , которую принято считать скоростью движения волнового пакета и именовать *групповой* [8, 10, 21]. Как видно из (1.8),

$$v_{\text{гр}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}, \quad \text{или} \quad v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (1.9)$$

Величина  $\Lambda = \frac{2\pi}{|\Delta k|}$  может быть названа *характерным размером* волнового

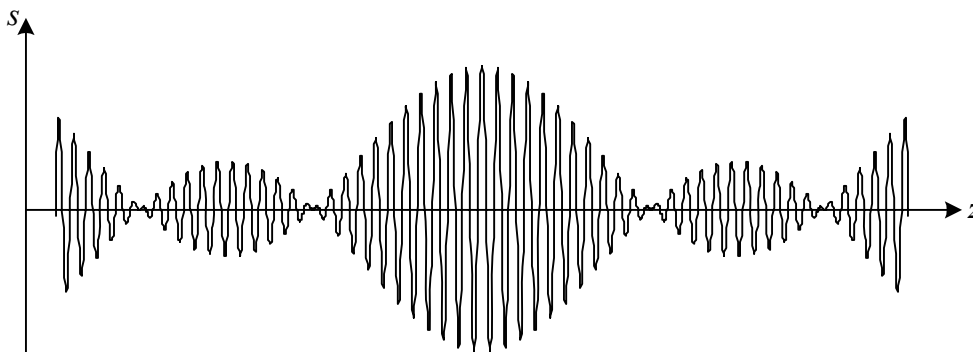


Рис.1

пакета [8], а для произведения  $A_m$  на выражение в квадратных скобках в формуле (1.6) используется наименование «*комплексная огибающая*».

На рис.1 показано, как при условии (1.7) выглядит профиль волнового пакета, распространяющегося в круглом волноводе и состоящего из трех одинаковых по амплитуде монохроматических волн типа  $H_{11}$ , для которых  $\omega_0 = 1,4\omega_{кр}$ ,  $\Delta\omega = 0,02\omega_{кр}$ . С учетом (1.3, 1.4) условие (1.7) для рассматриваемого примера преобразуется в неравенство

$$|z| \ll 2500R,$$

а характерный размер волнового пакета  $\Lambda \approx 120R$ .

Увеличивая число складываемых гармонических волн и подбирая соотношения между их амплитудами и фазами, можно строить волновые пакеты со сложным пространственным профилем. В пределе бесконечного числа гармоник может быть получен локализованный волновой пакет (своего рода «частица», или одиночный импульс), который движется со скоростью  $v_{гр}$ . Основываясь на утверждении, что энергия волновых пакетов содержится в основном в подобных «сгустках», можно также понять, почему групповая (а не фазовая) скорость определяется как скорость переноса энергии [10].

Найдем теперь соотношение, выражающее связь фазовой и групповой скоростей. Исходя из приведенного в (1.9) определения групповой скорости через производную  $\frac{d\omega}{dk}$  и принимая во внимание, что в общем случае  $\omega = kv_{\phi}(k)$ , получим

$$v_{гр} = v_{\phi} + k \frac{dv_{\phi}}{dk}. \quad (1.10)$$

Переходя здесь от волнового числа к длине волны  $\lambda$ , перепишем найденную связь в виде

$$v_{гр} = v_{\phi} - \lambda \frac{dv_{\phi}}{d\lambda}. \quad (1.11)$$

Это соотношение называется формулой Рэлея.

Как следует из (1.10, 1.11), для сред (структур) без дисперсии фазовая и групповая скорости совпадают. При  $v_{\phi} > 0$  среды, для которых  $\frac{dv_{\phi}}{d\lambda} > 0$ , называются средами с *нормальной дисперсией*. В противоположном случае говорят о средах с *аномальной дисперсией*. Согласно (1.11) в случае нормальной дисперсии  $v_{гр} < v_{\phi}$ . Основываясь на (1.3, 1.10), нетрудно показать, что рассмотренный выше в качестве примера полый волновод относится к структурам с нормальной дисперсией.

Следует обратить внимание на то, что понятие групповой скорости имеет ограниченное применение, поскольку при наличии дисперсии перемещающийся волновой пакет с течением времени меняет форму. Сказанное может быть проиллюстрировано на примере рассмотренной выше

группы монохроматических волн в круглом волноводе. Вычисления по формуле (1.6) при значениях  $z$ , лежащих в интервале, в котором  $\exp(j(k_0 - k_m)z)$  не может считаться близкой к единице, приводят к зависимости (рис.2), существенно отличающейся по виду от профиля, представленного на рис.1.

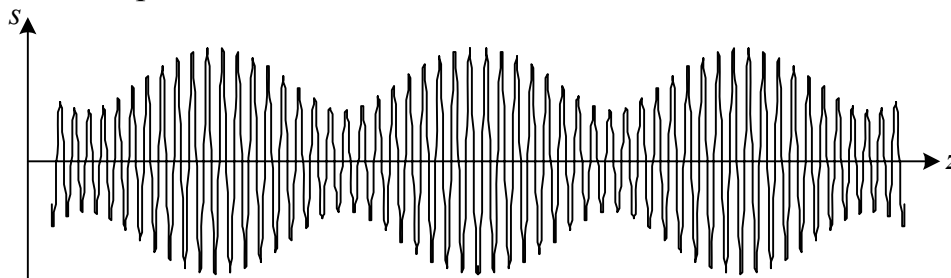


Рис.2

### 1.3. Двухпроводная линия. Телеграфные уравнения. Цепочки из сосредоточенных элементов, эквивалентные распределенным системам

К числу рассматриваемых далее простейших распределенных систем относится вытянутая вдоль оси  $z$  электрическая линия передачи, которая образована двумя расположенными в однородном изотропном диэлектрике параллельными проводниками. Это может быть, например, полосковая линия, состоящая из двух металлических лент (рис.3).

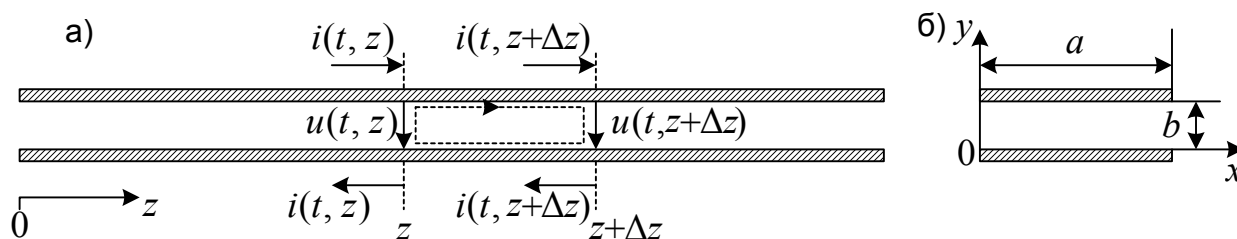


Рис.3

Полагая, что в каждом поперечном сечении линии токи в верхнем и нижнем проводниках равны и противоположны по направлению, введем для токов в близко расположенных сечениях  $z$  и  $z+\Delta z$  обозначения, указанные на рисунке. Предположим, что электромагнитное поле, возбуждаемое протекающими в линии токами, удовлетворяет условию квазистационарности [5, 20]. Это, в частности, означает, что распределение поля в любом поперечном сечении линии в каждый момент времени может считаться таким, каким оно было бы при токах, не изменяющихся с течением времени. Благодаря условию квазистационарности в последующем изложении можно опираться на использование в основном таких понятий, как электрический заряд, ток, напряжение, магнитный поток, не ставя без специальной надобности задачу отыскания соотношений для напряженностей электрического и магнитного поля.

На рис.3 показаны условные положительные направления

напряжения между проводниками в сечениях  $z$  и  $z+\Delta z$ . Предполагая, что потери в диэлектрике и металле пренебрежимо малы, запишем соотношения, при помощи которых могут быть получены дифференциальные уравнения, связывающие ток  $i(t, z)$  и напряжение  $u(t, z)$ .

Рассматривая контур, помеченный на рис.3 штриховой линией, приравняем сумму напряжений на его отдельных участках электродвижущей силе индукции, которая обусловлена изменением магнитного потока  $\Delta\psi$ , пронизывающего контур. Поскольку идущие по поверхности металла горизонтальные участки не дают вклада в суммарное напряжение, получим, что при выбранных направлениях отсчета

$$u(t, z + \Delta z) - u(t, z) = -\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t}. \quad (1.12)$$

Здесь  $\Delta\psi = \Psi\Delta z$ , а величина  $\Psi$  может быть названа *погонным магнитным потоком*, т. е. магнитным потоком, приходящимся на единицу длины линии.

Принимая во внимание ток смещения, равный производной по времени от электрического заряда  $\Delta q$ , запасенного к моменту  $t$  на участке линии между сечениями  $z$  и  $z+\Delta z$ , и учитывая отсутствие в диэлектрике тока проводимости, имеем

$$i(t, z + \Delta z) - i(t, z) = -\frac{\partial \Delta q}{\partial t}, \quad (1.13)$$

где  $\Delta q = Q\Delta z$ , а  $Q$  — *погонный заряд*.

Поделим теперь (1.12, 1.13) на  $\Delta z$  и, устремляя  $\Delta z$  к нулю, воспользуемся следующими определениями для производных по  $z$ :

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u(t, z + \Delta z) - u(t, z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{i(t, z + \Delta z) - i(t, z)}{\Delta z} = \frac{\partial i}{\partial z}.$$

В результате из (1.12, 1.13) получается система уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \frac{\partial i}{\partial z} = -\frac{\partial Q}{\partial t}, \quad (1.14)$$

которую необходимо дополнить соотношениями, связывающими  $\Psi$  и  $Q$  с током  $i$  и напряжением  $u$ . Рассматривая погонный магнитный поток  $\Psi$  как функцию  $i$ , а погонный заряд  $Q$  как функцию  $u$ , определим *погонные индуктивность  $L$  и емкость  $C$*  линии через производные:

$$L = \frac{d\Psi}{di}, \quad C = \frac{dQ}{du},$$

что при постоянных  $L$  и  $C$  приводит к линейным относительно производных напряжения и тока соотношениям, получившим название *телеграфных уравнений*:



$$\frac{\partial u}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad \frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1.15)$$

Телеграфные уравнения могут быть получены также посредством предельного перехода ( $\Delta z \rightarrow 0$ ) [12] из дифференциальных уравнений одномерной цепочки (рис.4), составленной из сосредоточенных индуктивностей  $L\Delta z$  и емкостей  $C\Delta z$ .

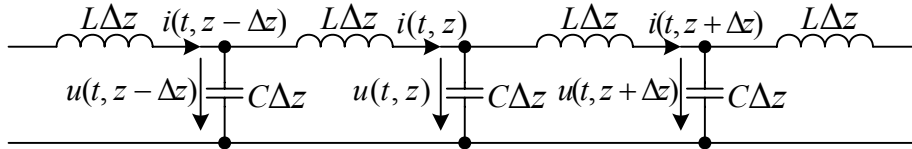


Рис.4

При помощи подобных эквивалентных схем, включающих только сосредоточенные элементы, можно составить представление о многих свойствах распределенных систем, чем объясняется широкое использование таких моделей [18, 24]. Например, вывод уравнений линии передачи, которыми учитывались бы потери в металлических проводниках и диэлектрике, может быть выполнен при помощи цепочки, представленной на рис.5.

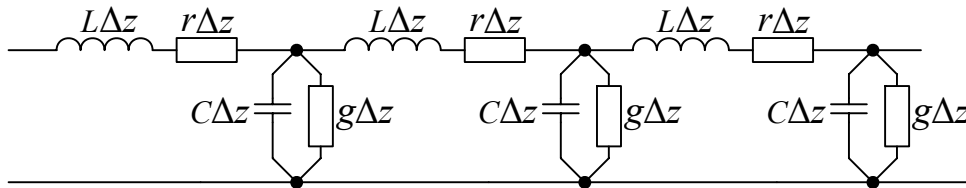


Рис.5

Если поделить на  $\Delta z$  соотношения, связывающие в этом случае напряжение  $u$  и ток  $i$  в сечениях  $z$  и  $z+\Delta z$ , и перейти к пределу при  $\Delta z \rightarrow 0$ , то получаются уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} - ri, \quad \frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial u}{\partial t} - gu, \quad (1.16)$$

которые отличаются от (1.15) дополнительными членами, содержащими в качестве коэффициентов *погонное сопротивление*  $r$  и *погонную проводимость* («утечку»)  $g$  [12].

#### 1.4. Линейные и нелинейные распределенные системы

Согласно общей классификации динамических систем [9, 13, 21] различают *линейные* и *нелинейные распределенные системы*. К линейным относят такие системы, процессы в которых могут быть описаны при помощи линейных относительно искомым величин дифференциальных уравнений. Если коэффициенты этих уравнений представляют собой величины, не зависящие от времени, то соответствующие динамические системы являются линейными системами с постоянными параметрами.

В качестве примера такой системы приведем рассмотренную выше однородную полосковую линию, анализ процессов в которой может проводиться на основе телеграфных уравнений (1.15).

Линейные динамические системы, для описания поведения которых приходится прибегать к линейным дифференциальным уравнениям с коэффициентами, зависящими от времени, называются линейными системами с переменными параметрами. Эти системы именуют также *параметрическими*. Нелинейные системы определяются как системы, описание процессов в которых не может проводиться на основе одних лишь линейных дифференциальных уравнений.

Последующий материал посвящен главным образом некоторым свойствам отдельных частных разновидностей нелинейных и параметрических распределенных систем, причем выбраны системы, анализ процессов в которых может считаться умеренно сложным с точки зрения используемых математических приемов. Линейные распределенные системы с постоянными параметрами рассматриваются лишь в той мере, в какой это необходимо для определения основных понятий, с помощью которых вводятся в рассмотрение самые общие характеристики волновых процессов и волноведущих структур.

## 2. ЛИНЕЙНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 2.1. Волны в линии передачи, волновое сопротивление (характеристический импеданс) линии

Исключая из телеграфных уравнений (1.15), записанных для линии передачи без потерь, какую-нибудь переменную ( $u$  или  $i$ ), получим так называемое *одномерное волновое уравнение* [10, 21], относящееся к простейшим примерам дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа [3],

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь  $v = 1/\sqrt{LC}$ , а под  $f$  понимается либо напряжение  $u$ , либо ток  $i$ . Отметим также, что к соотношению (2.1) сводятся уравнение малых поперечных колебаний натянутой струны, уравнение продольных колебаний в однородном упругом стержне (без учета эффектов поперечной инерции), а также ряд других уравнений [10, 21].

Если (2.1) представить в виде уравнения

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) f = 0, \quad (2.2)$$

то легко видеть, что оно удовлетворяется тождественно, в частности, тогда, когда функция  $f(t,z)$  подчиняется одному из уравнений:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \text{ или } \frac{\partial f}{\partial t} - v \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Первое из этих двух уравнений имеет решение  $f_1(t - z/v)$ , которое представляет собой волну, бегущую в положительном направлении оси  $z$  со скоростью  $v$ . Второе уравнение имеет решение  $f_2(t + z/v)$  и дает волну, распространяющуюся с той же скоростью в отрицательном направлении. У волнового уравнения (2.2) вид решения, выражаемого в общем случае суммой произвольных функций  $f_1(t - z/v)$  и  $f_2(t + z/v)$ , зависит от условий возбуждения волн и характера источников.

Предположим, например, что полосковая линия (рис.3), простирающаяся по  $z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , возбуждается источником, расположенным в сечении  $z=0$  и обеспечивающим для напряжения и тока в этом сечении зависимости от времени  $u(t,0)=u_0(t)$  и  $i(t,0)=i_0(t)$  соответственно. Пусть также в начальный момент времени  $t=0$  напряжения и токи в линии при  $z \neq 0$  отсутствуют. Тогда справа от источника, т.е. для  $z > 0$ , при  $t > 0$  по линии распространяется волна напряжения  $u_0(t-z/v)$ , а волна тока для  $z > 0$  выражается, как  $i_0(t-z/v)$ .

Из телеграфных уравнений (1.15) вытекают в этом случае соотношения

$$u'_0 = vLi'_0, \quad i'_0 = vCu'_0, \quad (2.3)$$

позволяющие получить связь между током и напряжением для волны, которая бежит вправо от точки  $z=0$  (штрихом отмечены производные соответствующих функций по аргументу  $t-z/v$ ). При сформулированных выше условиях соотношения (2.3) удовлетворяются, если положить, что для этой волны, т. е. при  $z > 0$ ,

$$i(t, z) = \frac{u(t, z)}{w}, \quad (2.4)$$

где  $w = vL = \frac{1}{vC} = \sqrt{\frac{L}{C}}$  – волновое сопротивление (характеристический импеданс) линии.

Тем же способом можно показать, что для волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси  $z$ ,

$$i(t, z) = -\frac{u(t, z)}{w}. \quad (2.5)$$

Отметим, что для соотношений (2.4, 2.5) характерна локальная связь между  $i$  и  $u$ , ибо в каждое из этих соотношений входят ток и напряжение, относящиеся к одному и тому же сечению, и в них не содержатся токи и напряжения в других сечениях линии.

## 2.2. Монохроматические волны в линии передачи. Приближенные оценки погонных параметров полосковой (ленточной) линии

В частном случае монохроматической волны вида (1.1) из волнового уравнения (2.1) вытекают формула  $\omega^2 = v^2 k^2$  и равносильное ей соотношение  $\omega = v|k|$ , откуда следует, что, поскольку  $v$  – постоянная положительная величина, уравнение (2.1) соответствует структурам без дисперсии. При этом фазовая скорость волны, бегущей в положительном направлении оси  $z$ , равна  $v$ , а для противоположного направления распространения  $v_{\phi} = -v$ .

Как и волновое сопротивление  $w$ , скорость волны в линии без потерь определяется погонными индуктивностью  $L$  и емкостью  $C$ . Для их нахождения при строгом подходе необходимо использование уравнений электродинамики. В данном случае эта задача облегчается тем, что электромагнитное поле в рассматриваемой линии соответствует ТЕМ-волне, для которой характерно тождественное равенство нулю продольных компонент напряженностей электрического и магнитного поля ( $E_z = H_z = 0$ ) [5, 20].

Достаточно просто можно получить приближенные выражения для погонных параметров полосковой (ленточной) линии (рис.3), если принять, что  $b \ll a$  (см. рис.3,б). При этом дополнительном условии электромагнитное поле линии концентрируется в основном в области  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ , в которой можно пренебречь зависимостью компонент  $E_y$  и  $H_x$  от координат  $x$  и  $y$ , а компоненты  $E_x$  и  $H_y$  (также как  $E_z$  и  $H_z$ ) положить равными нулю. В упомянутой области между лентами считаются справедливыми следующие формулы, выражающие  $E_y$  и  $H_x$  через напряжение  $u$  и ток  $i$  соответственно:

$$E_y = \frac{u(t, z)}{b}, \quad H_x = -\frac{i(t, z)}{a}. \quad (2.6)$$

Первая из входящих в (2.6) формул не требует специальных пояснений, а ко второй формуле можно прийти, если воспользоваться, например, граничным условием, задающим связь между поверхностной плотностью электрического тока и касательной компонентой магнитного поля на поверхности идеального проводника при  $y=0$  или при  $y=b$  [5, 20].

В рассматриваемом случае из уравнения Максвелла [1]

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (2.7)$$

вытекает, в частности, скалярное соотношение

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad (2.8)$$

преобразуемое, если принять во внимание (2.6), в телеграфное уравнение  $\frac{\partial u}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t}$ , где для погонной индуктивности оказывается справедливой приближенная формула

$$L = \mu_0 \mu \frac{b}{a}. \quad (2.9)$$

Выражение для погонной емкости полосковой линии при  $b \ll a$ , выводимое из формулы для емкости плоского конденсатора, записывается как

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{a}{b}. \quad (2.10)$$

Последнюю оценку можно также получить при помощи уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.11)$$

если с учетом (2.6) преобразовать вытекающее из (2.11) скалярное соотношение между  $\frac{\partial H_x}{\partial t}$  и  $\frac{\partial E_y}{\partial t}$  в телеграфное уравнение  $\frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial u}{\partial t}$ .

В приведенных выше равенствах (2.7–2.11) величины  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  являются используемыми в международной системе единиц (СИ) электрической и магнитной постоянными ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м,  $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ , где  $c$  — скорость света в вакууме), а  $\varepsilon$  и  $\mu$  — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, в которой находятся проводники линии.

При  $b \ll a$  волновое сопротивление рассматриваемой полосковой линии выражается формулой

$$w = w_0 \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}},$$

где  $w_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 377$  Ом — так называемое волновое сопротивление свободного пространства (вакуума).

Для определяемой через погонные индуктивность и емкость скорости  $v$  получается в данном случае выражение

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad (2.12)$$

которое оказывается справедливым при произвольных соотношениях между  $b$  и  $a$ , т. е. остается в силе и тогда, когда нарушено условие  $b \ll a$ .

Как следует из общего рассмотрения [20], формулой (2.12) задается скорость распространения ТЕМ-волны по любой линии передачи, заполненной средой с относительными диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ .

### 2.3. Прямоугольный волновод с волной основного типа. Распределенная система с дисперсией в области низких частот

Известно, что полые металлические трубы и трубы с однородным заполнением относятся к волноведущим структурам, вдоль которых не

могут распространяться волны типа ТЕМ [20]. Далее в качестве примера подобной структуры рассматривается волновод с прямоугольным поперечным сечением (рис.6,а). При  $b < a$  основной модой прямоугольного волновода (модой с наименьшей критической частотой) является волна поперечно-электрического типа  $H_{10}$ , для которой  $E_z = E_x = H_y = 0$ ,  $\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$ , причем с изменением координаты  $x$  от нуля до  $a$  компоненты  $E_y$  и  $H_x$  изменяются как  $\sin \frac{\pi x}{a}$ , зависимость же  $H_z$  от  $x$  соответствует функции  $\cos \frac{\pi x}{a}$ .

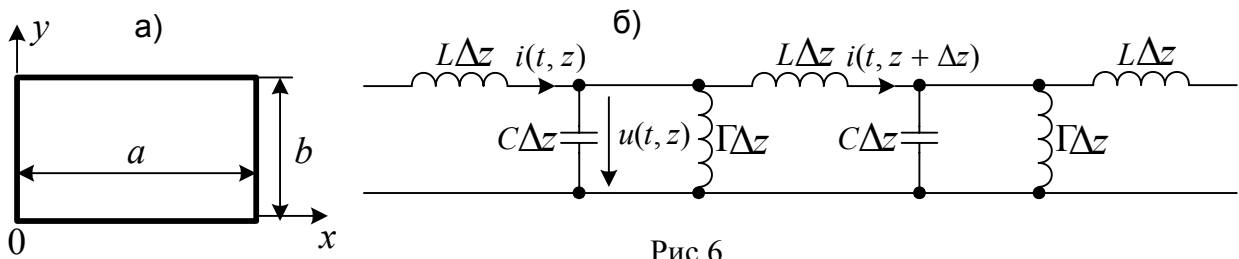


Рис.6

Записывая для компонент  $E_y$  и  $H_x$  выражения, содержащие вспомогательные функции  $u(t, z)$  и  $i(t, z)$ ,

$$E_y = \frac{u(t, z)}{b} \sin \frac{\pi x}{a}, \quad H_x = -\frac{i(t, z)}{a} \sin \frac{\pi x}{a}, \quad (2.13)$$

выясним, как для прямоугольного волновода, в котором возбуждается мода  $H_{10}$ , может выглядеть эквивалентная цепочная схема, составленная из сосредоточенных элементов. По поводу физического смысла упомянутых вспомогательных функций необходимо сделать следующее замечание. Для рассмотренной выше полосковой линии с ТЕМ – волной  $u(t, z)$  и  $i(t, z)$  были исходно определены соответственно как напряжение и ток в момент времени  $t$  в сечении с координатой  $z$ . В случае прямоугольного волновода условно вводимым функциям  $u(t, z)$  и  $i(t, z)$  не удастся дать столь же очевидные определения. Окончательный ответ на вопрос о том, в каком смысле можно понимать входящие в (2.13) функции  $u(t, z)$  и  $i(t, z)$ , окажется ясным после построения эквивалентной схемы.

Воспользуемся уравнением Максвелла (2.7), которому в случае моды  $H_{10}$  равносильна система скалярных уравнений, включающая (2.8) и соотношение

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (2.14).$$

Из (2.8), принимая во внимание (2.13), можно получить встречавшееся ранее уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad (2.15)$$

где коэффициент  $L$  определяется согласно (2.9).

Запишем также вытекающее из уравнения Максвелла (2.11) соотношение

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (2.16)$$

Дифференцируя (2.16) по  $t$  и выражая  $\frac{\partial H_z}{\partial t}$  через  $\frac{\partial E_y}{\partial x}$  в соответствии с (2.14), получим равенство

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z \partial t} + \frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2},$$

умножая которое на  $a$  и учитывая (2.13), придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Gamma u = 0, \quad (2.17)$$

где  $\Gamma = \frac{\pi^2}{\mu_0 \mu a b}$ , а для  $C$  справедлива формула (2.10). Характерно, что с точки

зрения размерности коэффициент  $\Gamma$  представляет собой отнесенную к единице длины величину, обратную индуктивности.

Убедимся теперь в том, что система уравнений (2.17, 2.15) может быть получена в результате предельного перехода  $\Delta z \rightarrow 0$  из уравнений изображенной на рис.6,б одномерной цепочки из сосредоточенных элементов, каждое звено которой помимо индуктивности  $L\Delta z$  и емкости  $C\Delta z$  содержит также индуктивность, шунтирующую емкость, (на рисунке указана величина  $\Gamma\Delta z$ , обратная этой индуктивности).

Тем самым функции  $i$  и  $u$ , формально введенные в (2.13), можно будет трактовать как ток и напряжение в соответствующем сечении цепочки из сосредоточенных емкостей и индуктивностей, эквивалентной волноводу.

Вводя обозначения  $\Delta i_C$  и  $\Delta i_\Gamma$  для относящихся к интервалу  $\Delta z$  токов через емкость и шунтирующую индуктивность, имеем

$$\Delta i_C = C\Delta z \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Delta i_\Gamma}{\partial t} = \Gamma\Delta z u.$$

Тогда, если записать в качестве исходного равенства соотношение

$$i(t, z + \Delta z) - i(t, z) + \Delta i_C + \Delta i_\Gamma = 0,$$

поделить его на  $\Delta z$  и устремить  $\Delta z$  к нулю, то после дифференцирования по времени получится уравнение (2.17).

Что касается уравнения (2.15), то процедура его вывода посредством предельного перехода такая же, как для рассмотренной выше полосковой линии с ТЕМ - волной.

Исключая из (2.15, 2.17) производную  $\frac{\partial i}{\partial t}$ , получим уравнение

$$C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \Gamma u = 0, \quad (2.18)$$

которое, если перейти к безразмерному времени  $\tau = t\sqrt{\Gamma/C}$  и безразмерной координате  $\xi = z\sqrt{L\Gamma}$ , может быть преобразовано к стандартной форме линейного уравнения Клейна-Гордона [10, 21]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + u = 0.$$

В теории колебаний подобное уравнение используется для приближенного описания поведения цепочки маятников, связанных между собой пружинами, и при рассмотрении некоторых других задач [21].

Полагая, что изменение  $u$  во времени и пространстве соответствует одномерной монохроматической волне (1.1), получим из (2.18) дисперсионное уравнение, аналогичное (1.3),

$$\omega = \sqrt{\omega_{\text{кр}}^2 + v^2 k^2}, \quad (2.19)$$

где для  $v$  справедливы приведенные выше выражения

$$v = 1/\sqrt{LC} = c/\sqrt{\epsilon\mu},$$

а  $\omega_{\text{кр}} = \sqrt{\Gamma/C} = \pi v / a$  – критическая частота моды  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе, заполненном средой с относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$ . Вытекающая из (2.19) зависимость  $\omega(k)$ , соответствует так называемой системе с дисперсией в области низких частот.

### 3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

#### 3.1. Предварительные замечания

В теории колебаний линейная система с распределенными изменяющимися во времени параметрами представляет собой по большей части модель, к рассмотрению которой можно при определенных условиях свести приближенный анализ взаимодействия волн в слабонелинейных средах (структурах). Такую идеализированную модель можно построить, например, если интересоваться тем, как одна из волн, распространяющихся в нелинейной распределенной системе, сказывается на свойствах других волн, считая при этом допустимым пренебрежение их влиянием на первую волну, воздействие которой учитывается заданием волнообразного изменения параметров линейной модели.



Наибольший интерес обычно вызывают ситуации, когда благодаря изменению во времени того или иного энергоемкого параметра системы наблюдается увеличение амплитуд распространяющихся в ней волн, означающее так называемую *накачку* энергии в систему. Поэтому в последующем изменение во времени любого энергоемкого параметра линейной распределенной системы, даже если оно не приводит к росту амплитуд волн в этой системе, именуется накачкой. Упомянутая выше первая волна в исходной системе может быть названа *волной накачки*.

Подход, опирающийся на предположение о том, что характеристики этой волны известны заранее (*приближение заданного поля накачки* [6]), позволяет в случае малых амплитуд прочих волн рассматривать вместо нелинейной системы линейную систему с переменными параметрами (*параметрическое приближение* [15]).

### 3.2. Постановка задачи

Проанализируем некоторые особенности процессов, возможных в электрической линии передачи с малыми потерями и изменяемой погонной емкостью. Воспользуемся для этого системой уравнений (1.16), причем входящие в (1.16) в качестве коэффициентов погонная индуктивность  $L$  и малые погонные сопротивление  $r$  и утечка  $g$  будут считаться постоянными величинами, а погонную емкость  $C$  выразим суммой постоянной составляющей  $C_0$  и малой переменной составляющей  $C_{\sim}$ , соответствующей монохроматической волне накачки:

$$C = C_0 + C_{\sim}(t, z), \quad C_{\sim}(t, z) = C_H \cos \theta_H(t, z), \quad \theta_H(t, z) = \omega_H t - k_H z. \quad (3.1)$$

Постоянная величина  $m = C_H/C_0$ , т.е. коэффициент модуляции, предполагается далее много меньшей единицы, а волновое число  $k_H$  выбрано для определенности положительным.

Обозначая через  $v$  и  $w$  соответственно скорость волны и волновое сопротивление в случае линии без потерь ( $r = g = 0$ ) с постоянными погонной индуктивностью  $L$  и погонной емкостью  $C_0$ :

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}, \quad w = vL = \frac{1}{vC_0} = \sqrt{\frac{L}{C_0}},$$

перейдем от (1.16) к уравнениям для вспомогательных переменных  $s_+$  и  $s_-$ , определяемых согласно формулам

$$s_+ = \frac{1}{2}(u + wi), \quad s_- = \frac{1}{2}(u - wi). \quad (3.2)$$

С этой целью умножим на  $\pm \frac{w}{2L}$  первое из уравнений (1.16) и, складывая полученные соотношения со вторым уравнением, умноженным предварительно на  $\frac{1}{2C_0}$ , придем, учитывая (3.1, 3.2), к системе

дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial s_{\pm}}{\partial t} \pm v \frac{\partial s_{\pm}}{\partial z} = -\frac{C_{\sim}}{2C_0} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{g}{2C_0} u \pm \frac{rw}{2L} i, \quad (3.3)$$

правые части которых являются малыми величинами порядка  $m$ , а содержащиеся в них напряжение  $u$  и ток  $i$  следующим образом выражаются через  $s_+$  и  $s_-$ :

$$u = s_+ + s_-, \quad i = \frac{1}{w} (s_+ - s_-). \quad (3.4)$$

Если положить  $g$ ,  $r$  и  $C_{\sim}$  равными нулю и ограничиться решениями системы (3.3) в виде монохроматических волн с частотой  $\omega$ , то

$$s_{\pm}(t, z) = s_{\pm}^0(t, z) = \operatorname{Re} \left\{ A_{\pm}^0 \exp \left[ j\omega \left( t \pm \frac{z}{v} \right) \right] \right\},$$

где  $A_{\pm}^0$  – не зависящие от  $t$  и  $z$  комплексные амплитуды, аргументы которых равняются начальным фазам волн.

Для отличных от нуля  $g$ ,  $r$  и  $C_{\sim}$  воспользуемся формой записи решений системы (3.3) через фазы  $\theta_{\pm}(t, z)$  и комплексные огибающие  $A_{\pm}(t, z)$ :

$$s_{\pm}(t, z) = \operatorname{Re} \{ A_{\pm}(t, z) \exp [j\theta_{\pm}(t, z)] \}, \quad (3.5)$$

где  $\theta_{\pm}(t, z) = \omega t - k_{\pm} z$ .

Волновые числа  $k_+$  и  $k_-$  считаются близкими соответственно к  $\omega/v$  и  $-\omega/v$ , а  $A_+(t, z)$  и  $A_-(t, z)$  предполагаются медленно меняющимися функциями времени  $t$  и координаты  $z$  (в отличие, например, от быстро осциллирующих функций  $\exp [j\theta_{\pm}(t, z)]$ ).

Согласно (3.5) решение  $s_+(t, z)$ , представляющее в последующем наибольший интерес, можно трактовать как волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $z$ , а решение  $s_-(t, z)$  – как волну, бегущую в противоположном направлении. В случае медленно меняющихся комплексных огибающих такие волны называют *квазимонохроматическими* (*квазигармоническими*). При  $k_{\sim} > 0$  в положительном направлении оси  $z$  кроме  $s_+(t, z)$ , распространяется и волна накачки  $C_{\sim}(t, z)$ , что дает основание называть принятый подход к отысканию решений *двухволновым приближением*.

### 3.3. Укороченные уравнения. Основные выводы, вытекающие из анализа решений укороченных уравнений

Принимая во внимание малость правых частей уравнений (3.3) и учитывая (3.4, 3.5), можно при помощи процедуры, аналогичной процедуре метода медленно меняющихся амплитуд [15] получить для  $A_{\pm}(t, z)$

приближенные соотношения, именуемые далее укороченными уравнениями. Воспользуемся упомянутой процедурой в частном случае, когда считаются выполненными условия  $\omega_{\text{н}} = 2\omega$ ,  $k_{\text{н}} = 2k_+$ , из которых вытекает равенство  $\theta_{\text{н}}(t, z) = 2\theta_+(t, z)$ .

Выражая  $s_+(t, z)$  и  $s_-(t, z)$  согласно (3.5) в уравнении, которому в системе (3.3) отвечают верхние знаки, и отбрасывая в получающемся после тождественных преобразований соотношении члены более высокого порядка малости, чем  $m$ , к которым относятся слагаемые, содержащие произведения производных  $\frac{\partial A_+}{\partial t}$  и  $\frac{\partial A_-}{\partial t}$  на  $C_{\text{н}}$ , имеем

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left[ \left( \frac{\partial A_+}{\partial t} + v \frac{\partial A_+}{\partial z} + j\delta\omega_+ A_+ \right) \exp(j\theta_+) \right] = \\ & = \frac{C_{\text{н}}}{4C_0} [\exp(j\theta_{\text{н}}) + \exp(-j\theta_{\text{н}})] \text{Re} \left\{ j\omega [A_+^* \exp(-j\theta_+) + A_-^* \exp(-j\theta_-)] \right\} - \\ & - \frac{g}{2C_0} \text{Re} [A_+ \exp(j\theta_{\text{н}}) + A_- \exp(j\theta_-)] - \frac{r}{2L} \text{Re} [A_+ \exp(j\theta_+) - A_- \exp(j\theta_-)], \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $\delta\omega_+ = \omega - vk_+$ , а звездочками отмечены комплексно-сопряженные величины.

Умножая (3.6) на  $2 \exp[-j\theta_+(t, z)]$  и оставляя в получившемся соотношении только слагаемые, медленно изменяющиеся как во времени, так и в пространстве, приходим к укороченному уравнению

$$\frac{\partial A_+}{\partial t} + v \frac{\partial A_+}{\partial z} = j \frac{\omega m}{4} A_+^* - (\alpha + j\delta\omega_+) A_+, \quad (3.7)$$

где  $\alpha = \frac{g}{2C_0} + \frac{r}{2L}$ .

Нетрудно также показать, что для  $A_-(t, z)$  при заданных условиях получается укороченное уравнение

$$\frac{\partial A_-}{\partial t} - v \frac{\partial A_-}{\partial z} = -(\alpha + j\delta\omega_-) A_-, \quad (3.8)$$

где  $\delta\omega_- = \omega + vk_-$ . Из (3.8), в частности, можно заключить, что в рассматриваемом приближении волна накачки никак не сказывается на волне  $s_-(t, z)$ .

Выражая  $A_+$  суммой вещественной и мнимой частей:

$$A_+ = \xi_1 + j\xi_2,$$

заменяем комплексное соотношение (3.7) равносильной ему системой двух вещественных укороченных уравнений

$$\frac{\partial \xi_{1,2}}{\partial t} + v \frac{\partial \xi_{1,2}}{\partial z} = \left( \frac{\omega m}{4} \pm \delta\omega_+ \right) \xi_{2,1} - \alpha \xi_{1,2}. \quad (3.9)$$

От величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$  можно перейти к таким линейно связанным с ними переменным  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , что при  $\omega m \neq 4|\delta\omega_+|$  система уравнений (3.9) может быть преобразована к виду:

$$\frac{\partial \eta_{1,2}}{\partial t} + v \frac{\partial \eta_{1,2}}{\partial z} = \beta_{1,2} \eta_{1,2}, \quad (3.10)$$

где

$$\beta_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\left(\frac{\omega m}{4}\right)^2 - (\delta\omega_+)^2}. \quad (3.11)$$

Вводя индекс  $l$ , принимающий значения «1» или «2», обозначим  $\eta_l(t, z)$  при  $z=0$  через  $\eta_{l0}(t)$ , что позволяет следующим образом записать решение системы (3.10):

$$\eta_l(t, z) = \exp(\beta_l z/v) \eta_{l0}(t - z/v). \quad (3.12)$$

При помощи (3.12) можно судить о характере изменений амплитуды волны  $s_+(t, z)$ , распространяющейся в положительном направлении оси  $z$ .

Легко видеть, что при любых соотношениях между величинами, входящими в правую часть (3.11),  $\text{Re}\beta_2 < 0$  и в выражении для  $\eta_2$  содержится экспоненциальный множитель, убывающий с ростом  $z$ . Если вещественная часть  $\beta_1$  также отрицательна, для чего необходимо выполнение условия  $m < \frac{4}{\omega} \sqrt{\alpha^2 + (\delta\omega_+)^2}$ , то это проявляется, как видно из сказанного выше, в уменьшении с ростом  $z$  амплитуды волны  $s_+(t, z)$ .

Заметим, что, основываясь на укороченном уравнении (3.8), нетрудно убедиться в характерном для линии с потерями экспоненциальном убывании (при  $z \rightarrow -\infty$ ) амплитуды волны  $s_-(t, z)$ , бегущей в отрицательном направлении оси  $z$ .

При условии

$$m > \frac{4}{\omega} \sqrt{\alpha^2 + (\delta\omega_+)^2} \quad (3.13)$$

коэффициент  $\beta_1$ , определяемый из (3.11), оказывается положительным, что, учитывая (3.12), означает в конечном счете рост амплитуды волны  $s_+(t, z)$  при распространении.

Таким образом, изменение погонной емкости линии (накачка) компенсирует затухание волны, вызываемое диссипацией (потерями). Этот эффект получил название *параметрической регенерации* [15]. Если коэффициент модуляции  $m$  в соответствии с (3.13), превышает пороговое значение, то реализуется параметрическое усиление волны  $s_+(t, z)$ .

Помимо соответствующего двухволновому приближению частного случая, когда  $\omega_n = 2\omega$  и  $k_n = 2k_+$ , представляют интерес задачи, решение которых проводится с учетом трех и большего числа волн [17]. Например,

возможны ситуации, когда напряжение  $u$  и ток  $i$  выражаются через суперпозиции квазимонохроматических волн, имеющих разные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , сумма которых равняется частоте накачки  $\omega_n$ . В этом случае также может быть получено параметрическое усиление [17].

## 4. ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ СВЕТА В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

### 4.1. Вводные замечания

До 60-х годов XX века достаточно полный анализ подавляющего большинства практически интересных оптических явлений мог проводиться на основе моделей, представляющих собой линейные системы с постоянными параметрами. Хотя и тогда в оптике были известны эффекты, адекватно объяснимые только при помощи «нелинейного» подхода. В качестве примера можно привести комбинационное рассеяние света, «модуляционная» трактовка которого, предложенная Л.И. Мандельштамом, базируется на предположении о нелинейном взаимодействии колебаний [8].

Ситуация резко изменилась после создания мощных лазеров, позволяющих получить напряженности поля световой волны, сравнимые с полем внутри атома ( $E_{ат} \sim 10^9$  В/см). При таких полях в некоторых средах (твердых телах, жидкостях, газах) становятся существенными нелинейные эффекты, многие из которых трактуются как проявления характерной для среды нелинейности связи между электрической поляризацией и напряженностью электрического поля. Ниже показано, что распространение в подобной среде электромагнитной волны с частотой  $\omega_1$  может сопровождаться возникновением волны с частотой  $2\omega_1$ . На первый взгляд речь идет просто об умножении частоты в 2 раза. Однако, как будет видно, даже в упрощенной модели все не так однозначно, ибо возможен обратный эффект, а именно, волна 2-й гармоники может выступать как накачка, восполняя при распространении энергию первоначальной волны.

Следует упомянуть также о том, что возникновение волн с удвоенной частотой возможно в распределенных системах различной физической природы [13], в том числе в нелинейных механических системах (например, в балке, лежащей на упругом основании).

### 4.2. Постановка задачи

Поскольку основная цель последующего изложения – анализ нелинейного взаимодействия электромагнитных волн в однородной изотропной среде без диссипации, запишем в качестве исходных

соотношений следующие уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \overset{\circ}{E} = -\frac{\partial \overset{\circ}{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \overset{\circ}{H} = \frac{\partial \overset{\circ}{D}}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Далее считается, что векторы  $\overset{\circ}{B}$  и  $\overset{\circ}{H}$  всюду коллинеарны и параллельны оси  $x$  декартовой системы координат, а коллинеарные векторы  $\overset{\circ}{D}$  и  $\overset{\circ}{E}$  параллельны оси  $y$ :

$$\overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{x}_0 B, \quad \overset{\circ}{H} = \overset{\circ}{x}_0 H, \quad \overset{\circ}{D} = \overset{\circ}{y}_0 D, \quad \overset{\circ}{E} = \overset{\circ}{y}_0 E, \quad (4.2)$$

где  $\overset{\circ}{x}_0, \overset{\circ}{y}_0$  — орты соответствующих осей.

При этом соотношения, связывающие магнитную индукцию  $B$  с напряженностью магнитного поля  $H$  и электрическую индукцию  $D$  с напряженностью электрического поля  $E$  задаются в виде:

$$B = \mu_0 \mu H, \quad D = \varepsilon_0 E + P. \quad (4.3)$$

Здесь  $P$  — поляризованность (электрическая поляризация) среды, складывающаяся из компоненты  $P^{\text{л}}$ , которая линейно зависит от  $E$ , и малой нелинейной компоненты  $P^{\text{нл}}$ , которая предполагается пропорциональной  $E^2$  (квадратичная нелинейность):

$$P = P^{\text{л}} + P^{\text{нл}}, \quad P^{\text{л}} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E, \quad P^{\text{нл}} = \gamma E^2, \quad (4.4)$$

Разность  $\varepsilon - 1$  может быть названа линейной восприимчивостью, а коэффициент  $\gamma$  рассматривается далее как малый положительный множитель.

Подставляя (4.2) в (4.1) и принимая во внимание (4.3, 4.4), имеем

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \mu_0 \mu \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P^{\text{нл}}}{\partial t}. \quad (4.5)$$

Перейдем теперь от (4.5), к уравнениям для выражаемых через  $E$  и  $H$  вспомогательных переменных

$$s_{\pm} = \frac{1}{2} (E \pm w H), \quad (4.6)$$

где  $w = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}}$ .

Для этого, умножив на  $\frac{1}{2}$  первое уравнение (4.5), сложим его со вторым уравнением, умноженным на  $\mu \frac{w}{2}$ . Тогда, учитывая (4.6), получим систему двух уравнений, правые части которых малы,

$$\frac{\partial s_{\pm}}{\partial z} \pm \frac{1}{v} \frac{\partial s_{\pm}}{\partial t} = \mu \frac{w}{2} \frac{\partial P^{\text{нл}}}{\partial t}, \quad (4.7)$$

где  $v = c / \sqrt{\varepsilon \mu}$ , а  $P^{\text{нл}} = \gamma (s_+ + s_-)^2$ .

Будем искать решения системы (4.7), представляя  $s_+(t, z)$  в виде

суперпозиции двух квазимонохроматических волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $z$  и называемых далее *прямыми волнами*:

$$s_+(t, z) = \text{Re}\{A_1(t, z) \exp[j\theta_1(t, z)] + A_2(t, z) \exp[j\theta_2(t, z)]\}, \quad (4.8)$$

где  $\theta_{1,2}(t, z) = \omega_{1,2}t - k_{1,2}z$ , а волновые числа  $k_1$  и  $k_2$  предполагаются положительными.

Для  $s_-(t, z)$  воспользуемся аналогичным представлением через волны, бегущие в обратном направлении:

$$s_-(t, z) = \text{Re}\{A'_1(t, z) \exp[j\theta'_1(t, z)] + A'_2(t, z) \exp[j\theta'_2(t, z)]\}, \quad (4.9)$$

где  $\theta'_{1,2}(t, z) = \omega_{1,2}t + k_{1,2}z$ .

Предположим также, что

$$\omega_2 = 2\omega_1, \quad k_2 = 2k_1 + \delta k, \quad (4.10)$$

где величина  $\delta k$  введена для учета дисперсии. Из (4.10), в частности, вытекает равенство

$$\theta_2(t, z) = 2\theta_1(t, z) - \delta kz. \quad (4.11)$$

### 4.3. Получение укороченных уравнений

Ограничиваясь рассмотрением прямых волн, выберем из системы (4.7) уравнение, которому отвечают верхние знаки, и при помощи процедуры, родственной процедуре метода медленно меняющихся амплитуд [15], получим из этого уравнения дифференциальные уравнения, связывающие медленно меняющиеся комплексные огибающие  $A_1(t, z)$  и  $A_2(t, z)$ .

Сначала умножим выбранное уравнение на  $2 \exp[-j\theta_1(t, z)]$  и, принимая во внимание выражение  $P^{\text{пл}}$  через  $s_+$  и  $s_-$ , подставим в получившееся соотношение  $s_+(t, z)$  и  $s_-(t, z)$  в соответствии с (4.8, 4.9). После выполнения операций дифференцирования по  $z$  и по  $t$ , выделяя в левой и правой частях слагаемые, изменяющиеся медленно как во времени, так и в пространстве, отбросим остальные (так называемые *быстро осциллирующие*) члены.

Вводя обозначение  $\delta k_1 = k_1 - \frac{\omega_1}{v}$  и учитывая (4.10, 4.11), придем к укороченному уравнению

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial A_1}{\partial t} - j\delta k_1 A_1 = -j\omega_1 w \gamma \frac{1}{2} A_2 A_1^* \exp(-j\delta kz), \quad (4.12)$$

в котором выражение для правой части определяется входящим в  $s_+^2$  слагаемым  $\frac{1}{2} A_2 A_1^* \exp[j(\theta_2 - \theta_1)]$ , причем произведения  $\gamma$  на  $\frac{\partial A_1^*}{\partial t}$  и  $\frac{\partial A_2}{\partial t}$  отброшены как величины более высокого порядка малости.

Посредством той же процедуры можно, предварительно умножив выбранное из (4.7) уравнение на  $2 \exp[-j\theta_2(t, z)]$ , получить укороченное уравнение

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial A_2}{\partial t} - j\delta k_2 A_2 = -j\omega_2 w\gamma \frac{1}{4} A_1^2 \exp(j\delta k z), \quad (4.13)$$

где  $\delta k_2 = k_2 - \frac{\omega_2}{v}$ , а вклад в правую часть дает только входящее в  $s_+^2$  слагаемое  $\frac{1}{4} A_1^2 \exp(j2\theta_1)$ .

Как нетрудно убедиться, используя (4.10),

$$\delta k + 2\delta k_1 - \delta k_2 = 0, \quad (4.14)$$

что означает выполнение для рассматриваемой приближенной модели условия так называемого *точного синхронизма* [6].

#### 4.4. Соотношения для стационарного режима

В отсутствие зависимости  $A_1$  и  $A_2$  от времени  $t$ , т. е. в стационарном режиме, запишем комплексные огибающие как

$$A_{1,2} = G_{1,2}(z) \exp[j\varphi_{1,2}(z) + j\delta k_{1,2} z] \quad (4.15)$$

Здесь вещественные множители  $G_1(z)$  и  $G_2(z)$  перед экспоненциальными функциями мнимых аргументов могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Подставляя (4.15) в (4.12, 4.13) и учитывая (4.14), получим

$$\frac{dG_1}{dz} + jG_1 \frac{d\varphi_1}{dz} = -j\sigma G_2 G_1 \exp(-j\Phi), \quad (4.16)$$

$$\frac{dG_2}{dz} + jG_2 \frac{d\varphi_2}{dz} = -j\sigma G_1^2 \exp(j\Phi), \quad (4.17)$$

где  $\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2$ , а  $\sigma = \frac{\omega_2}{4} w\gamma = \frac{\omega_1}{2} w\gamma$ .

Заменим (4.16) равенством комплексно сопряженных величин ( $j \rightarrow -j$ ), умножая которое на  $G_1$  и складывая с (4.17), умноженным на  $G_2$ , придем после деления мнимых и вещественных слагаемых к двум соотношениям:

$$G_1^2 \frac{d\varphi_1}{dz} = G_2^2 \frac{d\varphi_2}{dz}, \quad \frac{d}{dz} (G_1^2 + G_2^2) = 0.$$

Первое из этих соотношений удовлетворяется, если положить  $\frac{d\varphi_1}{dz} = \frac{d\varphi_2}{dz} = 0$ , что достигается в случае  $\Phi = \pm\pi/2$ , т. е. при вещественных правых частях уравнений (4.16, 4.17). Второму соотношению, выражающему закон сохранения энергии в среде без поглощения,



равносильны равенства

$$G_1^2 + G_2^2 = G_0^2 = \text{const}(z), \quad G_1^2 = G_0^2 - G_2^2, \quad (4.18)$$

где под  $G_0$  далее понимается положительная величина.

С учетом сказанного из (4.17) вытекают дифференциальные уравнения

$$\frac{dG_2}{dz} = \pm \sigma(G_0^2 - G_2^2),$$

интегрирование которых дает решения

$$G_2(z) = G_0 \text{th} \left[ \text{Arth} \frac{G_2(0)}{G_0} \pm G_0 \sigma z \right], \quad (4.19)$$

отвечающие при верхнем знаке  $\Phi = \pi/2$ , а при нижнем знаке  $\Phi = -\pi/2$ .

Три варианта зависимостей  $G_2^2(z)$  и  $G_1^2(z)$ , полученных при помощи (4.19, 4.18) для различных сочетаний  $G_2(0)$  и  $\Phi$ , приведены на рис.7.

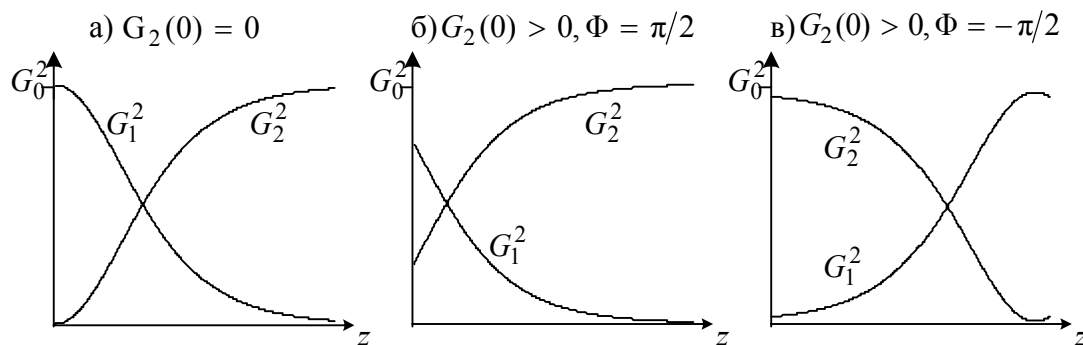


Рис.7

Отметим, что одночастотный режим, которому соответствовали бы  $G_1 = 0$  и  $G_2 \neq 0$ , неустойчив, поскольку, когда  $|G_1|$  становится меньше уровня шумов, в спектре шумов всегда находится компонента частоты  $\omega_1$ , для которой  $\Phi = -\pi/2$ , и начинается обратная перекачка энергии (см. рис.7,в). Поэтому продольные размеры конструкций, предназначенных для практического использования генерации второй гармоники, выбираются таким образом, чтобы минимизировать эффект упомянутой обратной перекачки.

## 5. ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ (ВОЛНЫ РИМАНА) В НЕЛИНЕЙНОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЕ БЕЗ ДИСПЕРСИИ И ДИССИПАЦИИ. УДАРНАЯ ВОЛНА

### 5.1. Исходные соотношения и допущения

Обратимся к рассмотрению модели в виде полосковой (ленточной) линии, процессы в которой можно описывать при помощи полученных выше дифференциальных уравнений (1.14), считая при этом погонный электрический заряд  $Q$  нелинейной функцией напряжения  $u$ . Так может быть, например, если металлические ленты расположены в среде с сегнетоэлектрическими свойствами. Тогда определяемая через производную  $\frac{dQ}{du}$  погонная емкость  $C$  оказывается зависящей от напряжения  $u$  (нелинейная емкость):

$$C(u) = \frac{dQ}{du}. \quad (5.1)$$

Погонный магнитный поток  $\Psi$  предполагается, как и ранее, равным произведению постоянной погонной индуктивности  $L$  на ток  $i$ :

$$\Psi = Li. \quad (5.2)$$

При заданных условиях будем интересоваться таким решением системы уравнений (1.14), для которого ток  $i$  и напряжение  $u$ , отвечающие одному и тому же поперечному сечению линии, связаны алгебраическим соотношением, не содержащим токов и напряжений в других сечениях. Подобное решение называют *простой волной* или *волной Римана* [10, 13, 21]. Полагая, что ток в линии представляется неизвестной функцией  $i(u)$ , отметим локальный характер такой связи, которая для линии без потерь с постоянными погонными индуктивностью и емкостью сводится, как показано выше, к соотношениям (2.4, 2.5).

Подставляя  $i(u)$  в (1.14), учитывая (5.1, 5.2) и выражая  $\frac{\partial i}{\partial t}$  и  $\frac{\partial i}{\partial z}$  через соответствующие частные производные напряжения  $u$  и производную  $\frac{di}{du}$ , придем к уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -L \frac{di}{du} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{di}{du} \frac{\partial u}{\partial z} = -C(u) \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5.3)$$

Эти уравнения для переменной  $u$  равносильны, если

$$L \frac{di}{du} = C(u) / \left( \frac{di}{du} \right),$$

или

$$\frac{di}{du} = \pm \sqrt{C(u)/L}. \quad (5.4)$$

Модуль правой части последней формулы может рассматриваться как аналог волновой проводимости (характеристического адмиттанса) линии, а знаки «плюс» и «минус», как и в (2.4, 2.5), относятся к разным направлениям распространения волн [21]. При знаке «плюс», т. е. для волны, бегущей в положительном направлении оси  $z$ , подстановка (5.4) в (5.3) приводит к уравнению простой волны

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{v(u)} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (5.5)$$

где  $v(u) = \frac{1}{\sqrt{LC(u)}}$  – зависящая от  $u$  скорость.

Решения этого уравнения часто именуют *кинематическими волнами*. При помощи уравнения вида (5.5) в рамках так называемой кинематической теории описывается поведение потока электронов в трубе дрейфа электронных приборов клистронного типа, распространение плоских звуковых волн, паводковых волн и волн в транспортных потоках [21, 24].

## 5.2. Анализ решений уравнения простой волны

Выполняя переход к независимым переменным  $z$  и  $u$  и рассматривая  $t$  как функцию этих переменных, преобразуем (5.5). Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\partial t / \partial u}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial t / \partial z}{\partial t / \partial u},$$

то вместо (5.5) получим уравнение

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{1}{v(u)}, \quad (5.6)$$

общее решение которого дается выражением

$$t = \frac{z}{v(u)} + T(u). \quad (5.7)$$

Здесь зависимость  $T(u)$  может быть определена по известной зависимости от времени для  $u$  в сечении  $z=0$ . Если  $u(t,0)=u_0(t)$ , то  $T(u)$  представляет собой функцию, обратную  $u_0(t)$ . Например, при  $u_0 = U \sin \omega t$

$$T(u) = \frac{1}{\omega} \operatorname{Arcsin} \frac{u}{U}. \quad (5.8)$$

Выясним, как в таком случае может изменяться в ходе распространения форма волны. С этой целью, введя вспомогательную величину

$$t_1 = t - z/v(0),$$

воспользуемся следующим соотношением, вытекающим из (5.7):

$$t_1 = T(u) + \frac{z}{v(u)} - \frac{z}{v(0)}, \quad (5.9)$$

где  $T(u)$  выражается формулой (5.8).

В отсутствие зависимости  $v$  от  $u$ , т. е. для линейной системы без

дисперсии и диссипации, форма волны остается неизменной, что подтверждается выражением для  $u$ , получаемым путем обращения соотношения (5.9). В частности, если принять во внимание (5.8), то (5.9), как и (5.7), преобразуется при  $v = v(0)$  в равенство, отвечающее монохроматической волне с волновым числом  $\omega/v(0)$ , что можно видеть также из неявной формы решения:

$$u = U \sin(\omega t - \omega z/v(u)). \quad (5.10)$$

Проявляющаяся как одно из следствий нелинейности, которой нельзя пренебрегать, зависимость  $v$  и  $u$  сказывается на форме распространяющейся волны тем сильнее, чем больше расстояние  $z$ . Убедимся в этом, полагая для определенности, что в интервале, для которого  $-U \leq u \leq U$ , разность  $\frac{1}{v(u)} - \frac{1}{v(0)}$  монотонно убывает и для  $u$ , близких к нулю, может быть записана как  $-\alpha u$ , где  $\alpha > 0$ .

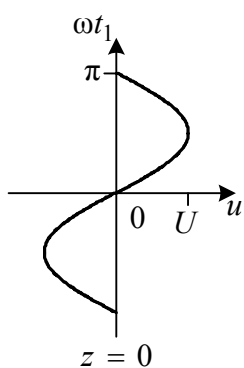


Рис.8

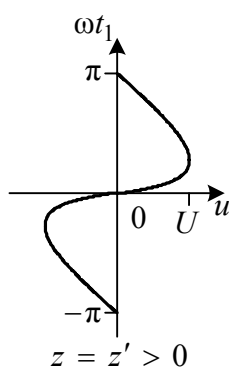


Рис.9

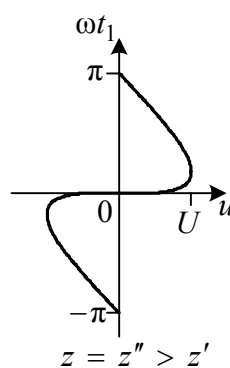


Рис.10

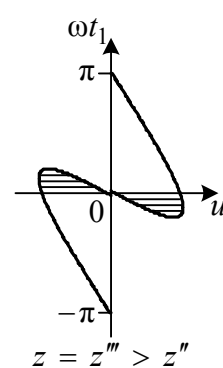


Рис.11

Из графиков, построенных согласно (5.9) для различных  $z$  на рис. 8-11, видно, как увеличиваются с расстоянием отклонения формы волны от исходного синусоидального профиля. Здесь уместна трактовка, в соответствии с которой волна, бегущая в нелинейной распределенной системе, обогащается высшими гармониками, причем ощутимый эффект искажения формы обусловлен в значительной мере тем обстоятельством, что скорости распространения исходной гармонической волны и всех возникающих волн в отсутствие дисперсии одинаковы.

Как следует из примеров, иллюстрируемых рис. 8-10, результаты расчетов по формуле (5.9) при  $0 \leq z \leq \frac{1}{\omega \alpha U}$  позволяют непосредственно судить о характере зависимости  $u$  от  $t$ . К тем же выводам можно прийти посредством анализа выражения (5.10), т. е. решения, представленного в неявном виде. Поскольку, учитывая сделанное выше предположение,  $v(u)$  – монотонно возрастающая функция, необходимо принять во внимание, что скорость перемещения точки пространственного профиля волны тем выше, чем ближе эта точка к вершине (см. показанную на рис.12 эпюру скоростей, состоящую из параллельных стрелок различной длины). Рис.12 поясняет,

как из-за этого в ходе распространения волны изменяется характер зависимости  $u$  от  $z$ , получаемой из (5.10).

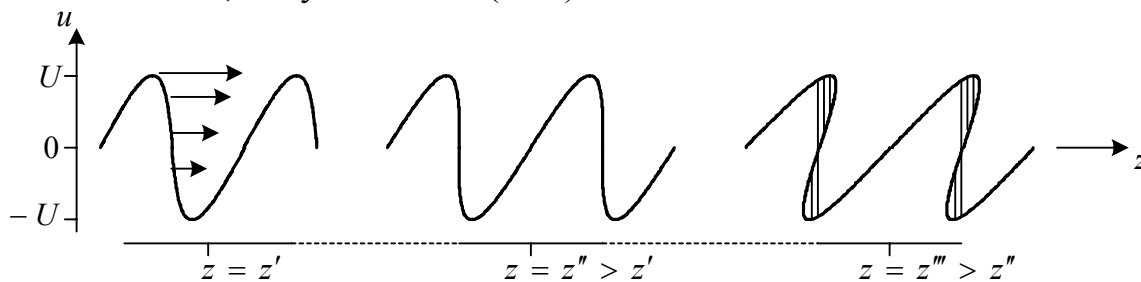


Рис.12

Отметим, что при  $z > \frac{1}{\omega \epsilon U}$  анализ соотношения (5.9) приводит к неоднозначной зависимости  $u$  от  $t$  и  $z$ . (см. рис.11). Тот же вывод вытекает, конечно, и из рассмотрения выражения (5.10). Возможно двойное физическое истолкование этого факта – в зависимости от того, какой смысл имеет величина  $u$ . Если, например,  $u$  есть скорость электрона в электронном потоке, причем можно пренебречь столкновениями электронов, то в данном поперечном сечении потока в данный момент времени могут присутствовать электроны с разными скоростями. Такая ситуация, реализующаяся в сверхвысокочастотной электронике, дает возможность анализировать движение электронов при помощи уравнения (5.5), положив в нем  $v(u) = u$  и оставаясь в рамках кинематической модели как при однозначной, так и при неоднозначной зависимости  $u$  от  $t$  и  $z$ .

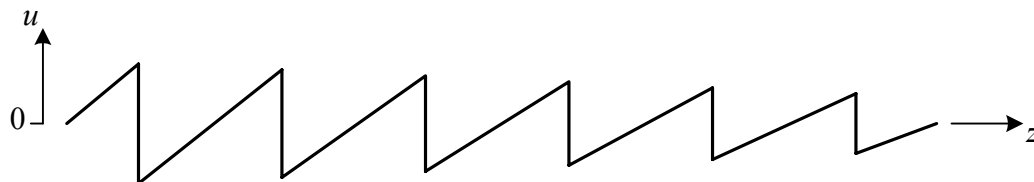


Рис.13

Если  $u$  есть напряжение в линии или скорость частиц непрерывной среды, то многозначность  $u$  физически абсурдна. Поэтому части кривых в зависимостях  $u$  от  $t_1$  и  $z$ , примыкающие к заштрихованным областям на рис.11 и рис.12, не реализуются. В действительности  $u$  в подобных случаях претерпевает чрезвычайно быстрое (близкое к скачкообразному) изменение, означающее возникновение ударной волны, что может быть обосновано, если прибегнуть к рассмотрению вместо (5.5) более строгой усложненной математической модели, учитывающей реально существующие потери [13, 17]. Отметим также, что вследствие потерь (диссипации), учет которых приводит в результате анализа к однозначным зависимостям  $u$  от  $z$  и  $t$ , происходит, кроме того, уменьшение амплитуды волны при распространении. Соответствующая ударной волне пилообразная зависимость  $u$  от  $z$  схематично показана на рис.13.

## 6. ПОЛЯ И ВОЛНЫ В ГАННОВСКИХ ДИОДАХ

### 6.1. Вводные замечания и исходные соотношения

В 1963 г. Дж. Ганн обнаружил, что если к образцу арсенида галлия  $n$ -типа подключить источник постоянной ЭДС с некоторым нагрузочным сопротивлением (рис.14), то при достаточно сильном электрическом поле внутри образца в такой системе возникают автоколебания. Ранее Ридли и Уоткинс (1961 г.), а также Хилсум (1962 г.), показали, что у некоторых полупроводниковых материалов благодаря особому строению зоны проводимости зависимость дрейфовой скорости  $v$  электронов от напряженности электрического поля  $E$  содержит падающий участок. На рис.15 в качестве примера для арсенида галлия с концентрацией ионизированных примесей  $10^{15} \text{ см}^{-3}$  при температуре 300 К приведена расчетная зависимость  $v(E)$ , дающая хорошее совпадение с экспериментом. В 1964 г. Кремер указал, что, опираясь на механизм Ридли–Уоткинса–Хилсума, можно объяснить все основные черты открытого Ганном эффекта. Позднее это было подтверждено посредством прямых экспериментов. С 1967 г., когда появились первые промышленные экземпляры твердотельных генераторов СВЧ диапазона, работающих на основе эффекта Ганна, началось его практическое использование в радиоэлектронике [14].

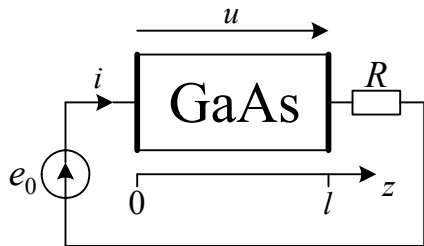


Рис.14

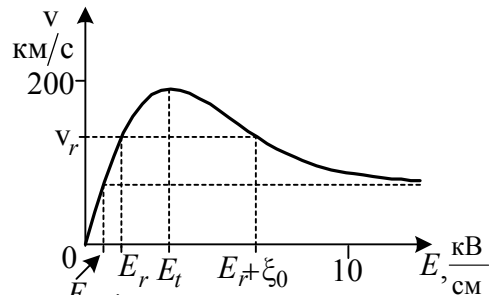


Рис.15

Процессы в ганновских образцах (диодах) отличаются рядом интересных особенностей, анализ которых может служить наглядной иллюстрацией применения методов теории колебаний [13]. Имея в виду систему, представленную на рис.14, будем далее исходить из следующих допущений. Полупроводниковый образец считается однородным и изотропным. Предполагается, что дрейфовая скорость  $v$  и коэффициент диффузии  $D$  подвижных носителей заряда в некоторой точке образца могут зависеть только от мгновенного значения напряженности электрического поля в этой точке. Данное предположение соответствует так называемой локальной полевой модели. Дисперсия диэлектрической проницаемости на частотах, представляющих интерес, считается пренебрежимо малой. Все уравнения пишутся ниже для подвижных носителей заряда положительного знака, т. е. так, как если бы в образце использовался полупроводник  $p$ -типа. При переходе к образцу  $n$ -типа следует изменить знак дрейфовой скорости.

В качестве одного из исходных соотношений выберем уравнение Максвелла для дивергенции вектора электрической индукции [1]

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}) = \rho. \quad (6.1)$$

Здесь  $\rho$  – плотность пространственного заряда, равная сумме плотностей подвижных ( $\rho_e$ ) и неподвижных ( $\rho_t$ ) зарядов:

$$\rho = \rho_e + \rho_t. \quad (6.2)$$

Плотность подвижных носителей заряда может изменяться и во времени, и в пространстве. Плотность неподвижных (связанных) зарядов считается одинаковой во всех точках образца постоянной величиной. В равновесной ситуации при напряженности электрического поля, не зависящей от координат, суммарная плотность  $\rho$  всюду обращается в нуль:

$$\rho_e^0 + \rho_t = 0, \quad (6.3)$$

где  $\rho_e^0$  – равновесная плотность подвижных носителей заряда. Учитывая (6.2, 6.3), можно рассматривать  $\rho$  как отклонение  $\rho_e$  от постоянного равновесного значения  $\rho_e^0$ :

$$\rho_e = \rho_e^0 + \rho. \quad (6.4)$$

Наряду с (6.1) исходным соотношением является также уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho_e \vec{V}(\vec{E}) - D(\vec{E}) \operatorname{grad} \rho_e] = 0, \quad (6.5)$$

где выражение в квадратных скобках представляет собой вектор плотности тока подвижных носителей, складывающийся из дрейфовой ( $\rho_e \vec{V}$ ) и диффузионной компонент. Определяя вектор плотности полного тока  $\vec{J}$  суммой вектора плотности тока носителей заряда и вектора плотности тока смещения  $\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , запишем используемое ниже равенство

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0, \quad (6.6)$$

которое может рассматриваться как следствие соотношений (6.1, 6.5).

В принятом далее одномерном приближении предполагается, что пространственные изменения  $\rho$  и  $\vec{E}$  могут иметь место только вдоль оси  $z$ , идущей от левого края образца к правому так, как показано на рис.14, а векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{V}$  направлены параллельно этой оси, т.е.

$$\vec{E} = \vec{z}_0 E, \quad \vec{V} = \vec{z}_0 v,$$

где  $\hat{z}_0$  – орт оси  $z$ . Подставляя выражения для векторов  $\hat{E}$  и  $\hat{V}$  через их проекции в (6.1, 6.5), учитывая (6.4) и полагая коэффициент диффузии  $D$  постоянной величиной, получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v(E) \frac{\partial \rho}{\partial z} + m_d(E)(\rho_e^0 + \rho) \frac{\partial E}{\partial z} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}, \quad (6.8)$$

где  $m_d = dv/dE$  – дифференциальная подвижность носителей.

## 6.2. Пространственно однородное решение и условия его устойчивости. Конвективная и абсолютная неустойчивость

Рассмотрим решение уравнений (6.7, 6.8), для которого напряженность электрического поля равняется положительной величине  $E_0$ , не зависящей от  $t$  и  $z$ . В этом случае, как видно из (6.7),  $\rho \equiv 0$ , т.е. плотность подвижных зарядов  $\rho_e$  тождественно равна равновесной плотности  $\rho_e^0$ . Исследуем устойчивость такого решения по отношению к малому отклонению плотности подвижных зарядов от значения  $\rho_e^0$ . Если это отклонение (флуктуация) произошло не во всем образце, а только в некоторой его части, то с течением времени изменения  $\rho$  и  $E$  могут распространиться по всему образцу. Примем в качестве упрощающего предположения, что условия распространения флуктуаций по образцу конечной длины такие же, как в случае бесконечного образца.

В силу малости флуктуации  $|\rho| \ll \rho_e^0$ , а скорость  $v$  можно считать практически не отличающейся от  $v_0 = v(E_0)$ . Пренебрегая пока процессами диффузии и учитывая (6.7), вместо уравнения (6.8) имеем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau_{d0}} + v_0 \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0,$$

где  $\tau_{d0} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\rho_e^0 m_0}$  называется *дифференциальным максвелловским временем*

*релаксации*, а  $m_0 = m_d(E_0)$ . Полученное линейное дифференциальное уравнение, являющееся уравнением первого приближения исходной нелинейной задачи, можно путем умножения на  $\exp(t/\tau_{d0})$  привести к виду:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + v_0 \frac{\partial g}{\partial z} = 0, \quad (6.9)$$

где

$$g = \rho \exp(t/\tau_{d0}). \quad (6.10)$$



Принимая во внимание, что общее решение уравнения (6.9) выражается функцией разности  $z - v_0 t$ , обозначая через  $\rho_n(z)$  зависимость  $\rho$  от  $z$  в начальный момент времени  $t = 0$  и учитывая (6.10), имеем

$$\rho(t, z) = \rho_n(z - v_0 t) \exp(-t/\tau_{d0}). \quad (6.11)$$

При помощи (6.1, 6.11) можно получить аналогичную зависимость от  $z$  для флуктуации электрического поля. Таким образом, с течением времени флуктуации плотности заряда перемещаются в направлении постоянного электрического поля со скоростью  $v_0$ . То же самое происходит и с флуктуациями электрического поля. Если  $m_0 > 0$ , а, следовательно, и  $\tau_{d0} > 0$ , то флуктуации при этом уменьшаются и распределения плотности заряда и поля стремятся к пространственно однородным. В случае отрицательной дифференциальной подвижности, которому соответствует  $\tau_{d0} < 0$ , флуктуации в ходе распространения вдоль образца растут по абсолютной величине, т.е. при  $\tau_{d0} < 0$ , пространственно однородные распределения плотности заряда и поля неустойчивы.

Происходящее с течением времени нарастание флуктуаций в распределенной системе является признаком того, что среда, заполняющая эту систему, относится к категории активных сред. Отметим также, что в рассматриваемом приближении продольный размер флуктуации не изменяется в процессе распространения. Это обстоятельство является следствием пренебрежения диффузией носителей.

При учете диффузии ( $D \neq 0$ ) уравнение первого приближения, получаемое из (6.7, 6.8) в предположении, что  $|\rho| \ll \rho_e^0$  и  $v \approx v_0$ , имеет вид:

$$D \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = v_0 \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau_{d0}}.$$

Путем умножения на функцию  $h(t, z) = \exp(t/\tau_{d0}) \exp[(v_0 t - 2z)v_0/(4D)]$  последнее соотношение можно преобразовать в простейшее уравнение теплопроводности (диффузии) [3]:

$$D \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad (6.12)$$

где  $g(t, z) = \rho(t, z) h(t, z)$ .

Введем обозначение:

$$g_n(z) = g(0, z) = \rho_n(z) \exp[-v_0 z/(2D)].$$

Тогда, применяя к (6.12) преобразование Лапласа [12]:

$$\bar{g}(p, z) = \int_0^{\infty} g(t, z) \exp(-pt) dt,$$

получим

$$D \frac{d^2 \bar{g}}{dz^2} = p \bar{g} - g_n. \quad (6.13)$$

Как и ранее, будем полагать, что вдали от концов условия распространения флуктуаций по образцу такие же, как если бы он был бесконечным в обе стороны вдоль оси  $z$ . В этом случае для нахождения решения уравнения (6.13) можно воспользоваться преобразованием Фурье:

$$\tilde{\varphi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) \exp(-jkz) dz.$$

Преобразуя (6.13) по Фурье, имеем  $(-jk)^2 D\tilde{g} = p\tilde{g} - \tilde{g}_n$ , или

$$\tilde{g}(p, k) = \tilde{g}_n(k) \tilde{G}(p, k), \quad (6.14)$$

где  $\tilde{G}(p, k) = \frac{1}{p + Dk^2}$ .

Как следует из (6.14),  $\bar{g}(p, z)$  можно записать в виде свертки:

$$\bar{g}(p, z) = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(z-s) \bar{G}(p, s) ds, \quad (6.15)$$

где согласно формуле обратного преобразования Фурье

$$\bar{G}(p, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(jkz)}{p + Dk^2} dk.$$

Вычисляя последний интеграл посредством сведения его к интегралу по контуру в комплексной плоскости  $k$  с последующим применением теоремы о вычетах и леммы Жордана, получим

$$\bar{G}(p, z) = \frac{1}{2\sqrt{pD}} \exp\left(-|z|\sqrt{\frac{p}{D}}\right), \quad (6.16)$$

где взято значение  $\sqrt{p}$ , имеющее положительную вещественную часть при  $\text{Re } p > 0$ . Как следует из таблиц (см., например, [12]), преобразованной по Лапласу вида (6.16) соответствует функция

$$G(t, z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right),$$

являющаяся функцией Грина уравнения теплопроводности на бесконечной прямой [3]. Полагая допустимой перемену порядка операций интегрирования по  $s$  в формуле (6.15) и нахождения исходной функции по ее лапласовской преобразованной, имеем

$$g(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(z-s) G(t, s) ds.$$

Допустим, что начальная флуктуация плотности заряда возникает в малой окрестности некоторой точки  $z = z_0$ , и представляет собой короткий импульс, аппроксимируемый дельта-функцией:

$$\rho_n(z) = B\delta(z - z_0),$$

где  $\delta(z)$  – дельта-функция Дирака, а  $B = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(z) dz$ .

Тогда, принимая во внимание связь между  $g_n$  и  $\rho_n$ , получим

$$g(t, z) = B \exp[-v_0 z_0 / (2D)] G(t, z - z_0).$$

Учитывая выражение для  $G(t, z)$  и связь между  $g$  и  $\rho$ , приходим к формуле:

$$\rho(t, z) = \frac{B}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp(-t/\tau_{d0}) \exp[-(z - z_0 - v_0 t)^2 / (4Dt)]. \quad (6.17)$$

Последнее выражение для флуктуации плотности заряда, описывает волновой пакет, имеющий форму колокольного (гауссова) импульса и перемещающийся в положительном направлении оси  $z$  со скоростью  $v_0$ . Вследствие диффузии подвижных носителей заряда пакет в процессе распространения расплывается. Как видно из (6.17), для того, чтобы значения  $\rho$  в волновом пакете с течением времени стремились к нулю, необходимо выполнение условия  $\tau_{d0} > 0$ . Таким образом, при учете диффузии носителей условие устойчивости пространственно однородного решения остается тем же, что и без учета диффузии.

Если  $\tau_{d0} < 0$ , то пространственно однородные распределения плотности заряда и напряженности электрического поля неустойчивы. При этом для флуктуации, рассматриваемой при фиксированном значении  $z$ , возможны два варианта зависимости от времени:

- 1) флуктуация в данной точке образца остается ограниченной,
- 2) флуктуация в данной точке с течением времени растет (до тех пор, пока не учитываемые уравнением первого приближения нелинейные эффекты не ограничат этот рост).

В первом случае неустойчивость называется *конвективной* или *сносовой*. Смысл названия очевиден: флуктуации уносятся из образца, не успевая (для образца конечных размеров) заметно нарасти. Во втором случае неустойчивость называется *абсолютной*. В этом случае рассматриваемое стационарное состояние вообще не может быть физически реализовано: в результате флуктуации система должна перейти в какое-то другое состояние, флуктуации около которого будут уже оставаться малыми. Активные среды, для которых выполняется условие абсолютной неустойчивости, называются *локально возбудимыми* [13].

Формула (6.17) позволяет найти условия конвективной и абсолютной неустойчивости пространственно однородного решения для случая, когда условия распространения флуктуаций вдоль образца конечных размеров такие же, как и вдоль бесконечно длинного образца. При больших  $t$  зависимость флуктуации  $\rho$  для фиксированного  $z$  от времени определяется множителем

$$t^{-1/2} \exp(-t/\tau_{d0}) \exp[-v_0^2 t / (4D)],$$

который убывает с ростом  $t$ , если сумма  $1/\tau_{d0} + v_0^2 / (4D)$  неотрицательна, так

что условие конвективной неустойчивости пространственно однородного распределения плотности заряда и электрического поля имеет вид:

$$-v_0^2/(4D) \leq 1/\tau_{d0} < 0.$$

Условие абсолютной неустойчивости выражается неравенством

$$1/\tau_{d0} < -v_0^2/(4D).$$

### 6.3. Неоднородные распределения плотности заряда и электрического поля. Понятие о статической неустойчивости

При строгой постановке задачи анализ состояний, в которых может находиться ганновский образец, требует учета граничных условий, точный вид которых установить во многих случаях не удастся. В рамках феноменологической теории можно указать несколько разумных типов граничных условий, проверяя их последующим сопоставлением с опытом.

Выше в качестве не зависящего от времени решения задачи рассматривались пространственно однородные распределения плотности заряда и электрического поля. Однако такое решение, удовлетворяя уравнениям (6.7, 6.8), может не удовлетворять граничным условиям на концах образца. Например, если в изображенном на рис.14 образце напряженность электрического поля у левого контакта равна нулю (что возможно при инжектирующем контакте), то в этом случае непрерывная зависимость поля от координаты  $z$  реализуется только посредством неоднородного статического распределения вдоль образца. Кроме того, в любом образце имеются различные микроскопические отклонения от регулярной структуры, называемые иногда *затравочными неоднородностями*. Даже если в такой ситуации макроскопические уравнения сохраняют вид (6.7, 6.8), их решение в статическом случае с учетом упомянутых затравочных неоднородностей приводит к распределениям, отличающимся от пространственно однородных. Степень отличия может быть разной. В то время как при положительной дифференциальной подвижности носителей возможным (хотя и не единственным) типом статического распределения является распределение, при котором отклонения от пространственной однородности локализуются в окрестностях затравочных неоднородностей, при отрицательной дифференциальной подвижности такой возможности нет и распределение сильно отличается от однородного и на значительном удалении от затравочных неоднородностей. Попробуем убедиться в этом, ограничиваясь по-прежнему одномерным случаем.

Обратившись к (6.6), отметим прежде всего, что в рассматриваемом одномерном приближении плотность полного тока  $J$  не изменяется по длине образца. В отсутствие зависимости поля  $E$  от времени, т. е. при равной нулю плотности тока смещения, это означает, что

$$(\rho_e^0 + \rho) v(E) - D \frac{d\rho}{dz} = C = \text{const}(z). \quad (6.18)$$

Константа  $C$ , содержащаяся в последнем соотношении, в частном случае пространственно однородного решения  $\rho = 0, E = E_0$  равняется  $\rho_e^0 v_0$ . На основании (6.7) запишем также следующее уравнение

$$\varepsilon_0 \varepsilon \frac{dE}{dz} = \rho. \quad (6.19)$$

Исключая  $\rho$  из (6.18, 6.19), имеем

$$\left( \frac{\rho_e^0}{\varepsilon_0 \varepsilon} + \frac{dE}{dz} \right) v(E) - D \frac{d^2 E}{dz^2} = \frac{C}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (6.20)$$

Представим  $E$ , входящее в (6.20), суммой  $E_0 + E_1$ , где  $E_1$  – малый по сравнению с  $E_0$  добавочный член, после чего воспользуемся процедурой линеаризации. В результате получим с точностью до величин порядка малости  $E_1$  уравнение

$$D \frac{d^2 E_1}{dz^2} - v_0 \frac{dE_1}{dz} - \frac{E_1}{\tau_{d0}} = 0, \quad (6.21)$$

из которого исключено постоянное слагаемое  $(C - \rho_e^0 v_0)/(\varepsilon_0 \varepsilon)$ , ибо его учет может дать лишь малую не зависящую от  $z$  добавку к полю.

Допустим, что затравочная неоднородность располагается в сечении образца, имеющем координату  $z = z_0$ , причем  $0 < z_0 < l$ . Пусть также действие этой неоднородности проявляется в том, в частности, что  $E_1$  в точке  $z = z_0$  отлично от нуля. Тогда при  $\tau_{d0} > 0$  возможно следующее убывающее с удалением от сечения  $z = z_0$  решение уравнения (6.21):

$$E_1(z) = \begin{cases} E_1(z_0) \exp[\lambda_1(z - z_0)], & z < z_0 \\ E_1(z_0) \exp[\lambda_2(z - z_0)], & z > z_0, \end{cases}$$

где  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2D} \left( v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{4D}{\tau_{d0}}} \right)$  – корни характеристического уравнения, соответствующего (6.21), (корню  $\lambda_1$  отвечает плюс перед радикалом, а корню  $\lambda_2$  – минус). Если  $v_0 \ll \sqrt{4D/\tau_{d0}}$ , то решение может быть записано в более компактной форме:

$$E_1(z) = E_1(z_0) \exp[-|z - z_0|/r_D].$$

Входящую в последнюю формулу величину  $r_D = \sqrt{D\tau_{d0}} = \sqrt{\frac{D\varepsilon_0\varepsilon}{\rho_e^0 m_0}}$ ,

при помощи которой оцениваются размеры области, где сказывается действие затравочной неоднородности, называют *радиусом Дебая*.

В случае, когда  $\tau_{d0} < 0$ , оба корня характеристического уравнения имеют положительные вещественные части и любое нетривиальное решение уравнения (6.21) увеличивается по модулю с ростом  $z$ . В этом случае отклонения от однородного распределения не локализуются в ближайшей окрестности затравочной неоднородности и могут достигать таких значений, что становится непригодным подход, основанный на уравнении (6.21), которое получено посредством линеаризации. Исследование, основанное на исходной нелинейной системе уравнений (6.18, 6.19), показывает, что в случае  $m_0 < 0$  около затравочных неоднородностей при определенных условиях возникают области повышенной (пониженной) напряженности поля, имеющие макроскопические размеры и получившие название *статических*, или *локальных*, *доменов*. В роли затравочной неоднородности может выступать контакт. Поэтому у контактов образца (внутри диода) также возможно образование статических доменов.

Ответ на вопрос о том, возможно ли продолжительное существование того или иного неоднородного распределения поля, зависит от поведения отклонений от этого распределения с течением времени. Иными словами, для неоднородных распределений и в том числе распределений, содержащих статические домены, необходимо провести исследование устойчивости, не отличающееся по существу от аналогичного исследования для однородного распределения, хотя и более сложное математически.

Возможна следующая трактовка того обстоятельства, что в статическом случае при  $m_0 < 0$  из-за влияния затравочных неоднородностей не может реализоваться пространственно однородное распределение. С точки зрения теории дифференциальных уравнений упомянутый факт можно рассматривать как неустойчивость не зависящего от  $z$  решения уравнений (6.18, 6.19), и в связи с этим говорят о статической неустойчивости пространственно однородного решения. В отличие от неустойчивостей, рассмотренных в предыдущем параграфе, в случае статической неустойчивости речь идет о развитии неоднородности не во времени, а в пространстве. Здесь имеет место неустойчивость решения относительно вариации граничных условий, что не требует комментариев, если в роли затравочных неоднородностей выступают контакты. Если же затравочная неоднородность расположена внутри образца, например, при  $z = z_0$ , то диод можно рассматривать как два последовательно соединенных образца, разделенных "контактом" при  $z = z_0$ .

6.4. Неустойчивость режима постоянного тока по отношению к флуктуациям, возникающим за пределами образца ( неустойчивость

по импедансу)

Рассмотрим теперь эволюцию флуктуаций, возникающих за пределами образца. Пусть в отсутствие флуктуаций ток  $i$  через зажимы (контакты) образца не меняется с течением времени. Упомянутый ток равен произведению площади поперечного сечения образца  $S$  и плотности полного тока  $J$  внутри образца, которая в одномерном случае, как следует из (6.6), не зависит от  $z$ :

$$J = \frac{i}{S} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + (\rho_e^0 + \rho) v(E) - D \frac{\partial \rho}{\partial z}. \quad (6.22)$$

Исключая  $\rho$  из (6.7, 6.22), получим дифференциальное уравнение, связывающее ток  $i$  и электрическое поле  $E$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \left( \frac{\rho_e^0}{\varepsilon_0 \varepsilon} + \frac{\partial E}{\partial z} \right) v(E) - D \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{i}{\varepsilon_0 \varepsilon S}. \quad (6.23)$$

Назовем режим, в котором ток  $i$  не меняется с течением времени, режимом постоянного тока. В режиме постоянного тока может иметь место зависимость от времени для электрического поля внутри образца, но тогда эта зависимость такова, что левая часть последнего уравнения все равно остается постоянной величиной.

Пусть под действием внешнего возмущения ток через зажимы и электрическое поле внутри образца получили приращения  $\delta i$  и  $\delta E$  соответственно. Учитывая малость этих приращений, выполняя линеаризацию записанного выше уравнения, выведем для них уравнение первого приближения. Для простоты будем считать, что в режиме постоянного тока поле  $E$  не зависит от  $z$  и равно  $E_0$ . На самом деле, как отмечается выше, распределение электрического поля по длине образца в общем случае отличается от пространственно однородного, но это можно не принимать во внимание, если ограничиться получением качественных оценок. Пренебрежем также диффузией носителей заряда. Тогда уравнение первого приближения представляется в следующем виде:

$$v_0 \frac{\partial \delta E}{\partial z} + \frac{\delta E}{\tau_{d0}} + \frac{\partial \delta E}{\partial t} = \frac{\delta i}{\varepsilon_0 \varepsilon S}. \quad (6.24)$$

Вводя преобразованные по Лапласу функции

$$\overline{\delta E}(p, z) = \int_0^{\infty} \delta E(t, z) \exp(-pt) dt, \quad \overline{\delta i}(p) = \int_0^{\infty} \delta i(t) \exp(-pt) dt$$

и полагая, что в начальный момент времени  $t=0$  приращение  $\delta E$  равно нулю всюду внутри образца, т. е.  $\delta E(0, z) = 0$ , перейдем от (6.24) к уравнению, связывающему  $\overline{\delta E}$  и  $\overline{\delta i}$ :

$$v_0 \frac{d\overline{\delta E}}{dz} + \left( \frac{1}{\tau_{d0}} + p \right) \overline{\delta E} = \frac{\overline{\delta i}}{\varepsilon_0 \varepsilon S}. \quad (6.25)$$

Выбирая в качестве граничного условия  $E(t,0) = E_0$ , т. е.  $\overline{\delta E}(p,0) = 0$ , запишем следующую связь между  $\overline{\delta E}$  и  $\overline{\delta i}$ , удовлетворяющую уравнению (6.25):

$$\left( \frac{1}{\tau_{d0}} + p \right) \overline{\delta E}(p, z) = \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{1}{\tau_{d0}} + p \right) \frac{z}{v_0} \right] \right\} \frac{\overline{\delta i}(p)}{\varepsilon_0 \varepsilon S}. \quad (6.26)$$

Интегрирование (6.26) по  $z$  от нуля до  $l$  дает возможность установить связь между  $\overline{\delta i}$  и обозначаемой далее через  $\overline{\delta u}$  преобразованной по Лапласу отклонения напряжения на зажимах от того значения, которое оно имеет в режиме постоянного тока. Введем обозначение  $\alpha = \left( \frac{1}{\tau_{d0}} + p \right) T_0$ , где  $T_0 = \frac{l}{v_0}$  – время пролета носителей заряда через образец в том случае, когда поле в образце всюду равняется  $E_0$ . Поскольку по определению  $u = \int_0^l E dz$ , т. е.

$\overline{\delta u}(p) = \int_0^l \overline{\delta E}(p, z) dz$ , после интегрирования по  $z$  и тождественных преобразований, получим

$$\overline{\delta u}(p) = Z(p) \overline{\delta i}(p), \quad (6.27)$$

где  $Z(p) = \frac{l^2}{\varepsilon_0 \varepsilon v_0} \frac{\exp(-\alpha) + \alpha - 1}{\alpha^2}$  – операторный импеданс образца.

При помощи (6.27) можно выяснить характер изменения во времени  $\delta u$  и  $\delta i$  при различных сопротивлениях  $R$ , включенных последовательно с образцом. Рассмотрим предельные случаи бесконечно большого  $R$  и  $R$ , равного нулю. Бесконечно большое  $R$  соответствует генератору тока, так что  $\delta i(t)$  следует считать заданной функцией времени. Импеданс  $Z(p)$  вообще не имеет особых точек (при  $\alpha = 0$ , как нетрудно видеть,  $Z = \frac{l^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon v_0}$ ), и потому  $\delta u(t)$  – ограниченная функция времени, т. е. при бесконечном  $R$  режим постоянного тока в случае пространственно однородного распределения внутри образца и выбранного граничного условия устойчив. При  $R = 0$ , что соответствует генератору напряжения,  $\delta u(t)$  – заданная функция времени и характер зависимости  $\delta i(t)$  от времени определяется расположением полюсов  $1/Z(p)$ , т. е. нулей  $Z(p)$ .

Согласно формуле разложения



$$\delta i(t) = \sum_s \operatorname{res} \left[ \frac{\overline{\delta u}}{Z(p)} \right]_{p=p_s} \exp(p_s t),$$

где  $p_s$  –  $s$ -ый нуль  $Z(p)$ .

Для устойчивости режима постоянного тока при  $R = 0$  необходимо, чтобы вещественные части всех нулей  $Z(p)$  были отрицательны, что эквивалентно требованию  $\operatorname{Re} \alpha_s < T_0 / \tau_{d0}$  для всех  $s$ , где  $\alpha_s$  –  $s$ -ый нуль функции  $[\exp(-\alpha) + \alpha - 1] / \alpha^2$ . Исследование этой функции показывает, что вещественные части всех ее нулей отрицательны и не превышают  $-2,09$ . Тогда вместо последнего неравенства, принимая во внимание также выражения для  $\tau_{d0}$  и  $T_0$ , можно записать неравенство  $\frac{\rho_e^0 m_0 l}{\varepsilon_0 \varepsilon V_0} > -2,09$ ,

которое всегда имеет место при  $m_0 > 0$ . В рассматриваемом случае это неравенство и есть условие устойчивости режима постоянного тока. Обратное неравенство представляет собой условие неустойчивости режима постоянного тока. Полагая  $m_0 = -|m_0|$  и учитывая, что равновесная плотность заряда подвижных носителей  $\rho_e^0 = q_e n_0$ , где  $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд одного носителя, а  $n_0$  – равновесная концентрация носителей, преобразуем условие неустойчивости к следующему виду:

$$n_0 l > 2,09 \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V_0}{|m_0| q_e}. \quad (6.28)$$

Последнее соотношение носит название *критерия  $n_0 l$* , или *критерия Кремера*. Рассматриваемая неустойчивость может быть названа неустойчивостью по импедансу. Для того чтобы она имела место, недостаточно отрицательности дифференциальной подвижности  $m_0$  и вытекающей из отрицательности  $m_0$  неустойчивости пространственно однородных распределений поля и плотности заряда внутри образца. Распределения поля и плотности заряда внутри образца могут оказаться неустойчивыми, но это не приведет к уходу системы из режима постоянного тока, если не выполняется критерий Кремера.

Условие устойчивости режима постоянного тока можно получить и в том случае, если не пренебрегать диффузией носителей. При этом следует иметь в виду, что вывод условия устойчивости по импедансу проводится в предположении малости отклонения значений поля и плотности заряда в любой точке внутри образца от значений, соответствующих распределениям, не зависящим от времени. Поэтому расчет импеданса имеет смысл лишь тогда, когда эти распределения устойчивы, либо конвективно неустойчивы.

Необходимо сделать также следующее замечание. В качестве

граничного условия было произвольно выбрано условие  $E(t, 0) = E_0$ . При других граничных условиях условия устойчивости по импедансу могут, вообще говоря, отличаться от полученных выше. Например, может случиться, что  $Z(p)$  имеет полюс при  $\text{Re } p > 0$  и тогда режим постоянного тока при большом сопротивлении  $R$  окажется неустойчивым [4].

#### 6.4. Стационарное движение доменов

Как следует из эксперимента, при определенных условиях электрические домены (области повышенной напряженности поля), возникающие в образце арсенида галлия, могут перемещаться по образцу с примерно постоянной скоростью, практически не деформируясь. Такое движение называют стационарным. Убедимся в том, что уравнения (6.7, 6.22) действительно допускают частное решение, соответствующее стационарно движущемуся домену. Предположим, что с точки зрения условий распространения домена по образцу последний может рассматриваться как бесконечный, т.е. при выяснении формы домена можно считать, что концам образца соответствуют абсциссы  $z = \infty$  и  $z = -\infty$ . Если при этом допустить, что вблизи концов образца плотность подвижных зарядов не отличается от равновесной ( $\rho = 0$ ), а электрическое поле равняется некоторой не зависящей от  $t$  и  $z$  величине  $E_r$ , способ нахождения которой будет указан в дальнейшем, то, как следует из (6.22), плотность полного тока

$$J = \rho_e^0 v_r,$$

где  $v_r = v(E_r)$ .

Покажем, что у уравнений (6.7, 6.22) могут быть решения для  $E$  и  $\rho$ , выражаемые функциями вспомогательной переменной  $\zeta = z - v_r t$ . С этой целью, переходя в (6.7, 6.22) от частных производных по  $t$  и  $z$  к производным по  $\zeta$ , получим соотношения

$$\frac{dE}{d\zeta} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad (6.29)$$

$$(\rho_e^0 + \rho)v(E) - D \frac{d\rho}{d\zeta} - \varepsilon_0 \varepsilon v_r \frac{dE}{d\zeta} = \rho_e^0 v_r, \quad (6.30)$$

исключая из которых  $dE/d\zeta$ , приходим к уравнению

$$D \frac{d\rho}{d\zeta} = (\rho_e^0 + \rho)\Delta v, \quad (6.31)$$

где  $\Delta v = v(E) - v_r$ .

Введем далее вместо  $E$  и  $\rho$  переменные  $\xi = E - E_r$  и  $\eta = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}$  и будем

рассматривать  $\Delta v$  как функцию  $\xi$ . Ограничиваясь случаем  $|\rho| \ll \rho_e^0$ , получим тогда систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = \eta, \quad (6.32)$$

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{\rho_e^0 \Delta v(\xi)}{D\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (6.33)$$

Довольно наглядные качественные результаты, можно получить, если взамен точной зависимости  $\Delta v$  от  $\xi$  воспользоваться аппроксимацией функции  $\Delta v(\xi)$  кубическим полиномом:

$$\Delta v = m_r \xi (1 - \xi^2 / \xi_0^2), \quad (6.34)$$

где  $m_r = m_d(E_r)$ .

При этом считается, что  $\xi_0$  можно выбрать таким образом, чтобы сумма  $E_r + \xi_0$  равнялась абсциссе точки пересечения падающего участка зависимости  $v$  от  $E$  (рис.15) с горизонтальной прямой, проведенной на высоте  $v_r$ . Поделим уравнение (6.33) на (6.32). Принимая во внимание (6.34), получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\eta \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi}{r_D^2} \left( 1 - \frac{\xi^2}{\xi_0^2} \right), \quad (6.35)$$

где  $r_D = \sqrt{\frac{D\varepsilon_0 \varepsilon}{\rho_e^0 m_r}}$ .

Интегрируя уравнение (6.35) и учитывая, что при  $\xi = 0$ , т.е. для  $E = E_r$ , величина  $\eta$  равняется нулю, придем к следующей формуле

$$r_D \eta = \pm \xi \sqrt{1 - \xi^2 / \xi_m^2}, \quad (6.36)$$

где  $\xi_m = \xi_0 \sqrt{3/2}$ .

Подставляя  $\eta$ , выраженное согласно (6.36), в (6.32) и применяя после разделения переменных операцию интегрирования к левой и правой частям получившегося соотношения, имеем

$$\pm r_D \int \xi^{-1} \left( 1 - \xi^2 / \xi_m^2 \right)^{-1/2} d\xi = \int d\zeta. \quad (6.37)$$

При помощи подстановки  $\xi = \xi_m / x$ , нетрудно убедиться в том, что интеграл в левой части (6.37) выражается через обратный гиперболический косинус аргумента  $x$ , так что

$$\text{Arch}(\xi_m / \xi) = \mu \zeta / r_D, \quad (6.38)$$

где  $\zeta = z - v_r t$ .

Постоянная интегрирования положена в (6.37) равной нулю, что всегда можно обеспечить должным выбором начала отсчета времени. В результате получается выражение

$$\xi = \xi_m \operatorname{sch}(\zeta/r_D), \quad (6.39)$$

при помощи которого можно судить о форме домена (рис.16), распространяющегося в положительном направлении оси  $z$  со скоростью  $v_r$ . На самом деле из точной зависимости  $v$  от  $E$  получается симметричный домен, имеющий форму, близкую к треугольной. Если условие  $|\rho| \ll \rho_e^0$  не имеет места, то получается асимметричный домен [14].

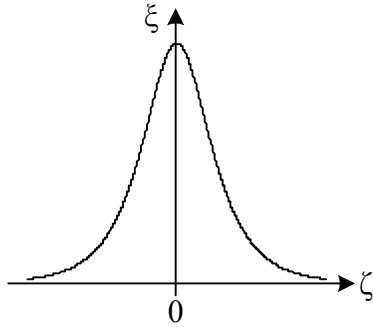


Рис.16

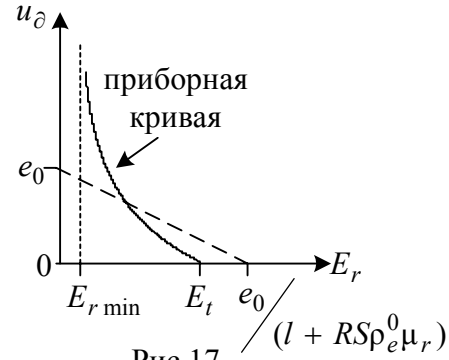


Рис.17

Получим теперь соотношения, при помощи которых может разыскиваться неизвестное поле  $E_r$ , называемое остаточным. Запишем сначала следующее приближенное выражение для напряжения на зажимах образца:

$$u = \int_0^l E dz = E_r l + u_\delta, \quad (6.40)$$

где вторым слагаемым в правой части учитывается вклад в напряжение  $u$ , обусловленный доменом:

$$u_\delta \approx \int_{-\infty}^{\infty} \xi d\zeta = \pi r_D \xi_m,$$

а  $r_D$  предполагается малым по сравнению с  $l$ .

Если основываться на приведенной на рис.15 зависимости дрейфовой скорости от поля, то из последней формулы вытекает зависимость  $u_\delta$  от  $E_r$ , называемая приборной кривой (рис.17). С другой стороны, для протекающего через образец тока  $i$  имеем

$$i = SJ = \frac{e_0 - u}{R}, \quad (6.41)$$

где плотность полного тока  $J$  можно определять за пределами домена:

$$J = \rho_e^0 v_r. \quad (6.42)$$

Из (6.40 – 6.42) нетрудно получить равенство

$$u_\delta = e_0 - E_r l - RS\rho_e^0 v_r,$$

которое наряду с приборной кривой следует учитывать при нахождении

значений остаточного поля  $E_r$ . В частности, при  $E_r$ , незначительно превышающих  $E_{r\min}$ , в первом приближении  $v_r$  можно считать прямо пропорциональным остаточному полю ( $v_r = \mu_r E_r$ ), что приводит к линейной связи между  $u_\delta$  и  $E_r$ , представленной штриховой линией на рис.17. В этом случае искомое остаточное поле определяется абсциссой точки пересечения штриховой линии с приборной кривой.

## 7. СОЛИТОНЫ, АВТОВОЛНЫ И АВТОСОЛИТОНЫ

7.1. Уединенная волна как одно из решений уравнения Кортевега - де Вриза (КдВ)

Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0, \quad (7.1)$$

относящееся к каноническим уравнениям теории нелинейных волн, впервые (1895 г.) было выведено Д. Кортевегом и Г. де Вризом для волн на поверхности жидкости [13, 21]. Оно отличается от уравнения (5.5) членом  $\beta \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}$ , которым учитывается дисперсия среды, частично компенсирующая нелинейные искажения формы волны и стабилизирующая ее профиль.

При помощи (7.1) могут анализироваться многие процессы, для описания которых необходимо принимать во внимание простейшие нелинейные и дисперсионные эффекты [10, 24]. В качестве примеров можно назвать ионно-звуковые и магнитогидродинамические волны, продольные волны в упругих стержнях, волны сжатия в жидкостях, заполненных газовыми пузырьками.

Поставим задачу нахождения решений уравнения КдВ, которым отвечали бы волны, профиль которых остается неизменным при распространении вдоль оси  $z$  с постоянной скоростью  $v$ . Рассматривая  $u$  как функцию переменной  $t_1 = t - \frac{z}{v}$ , получим из (7.1) обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\beta}{v^3} \frac{d^3 u}{dt_1^3} + \left( \frac{u}{v} - 1 \right) \frac{du}{dt_1} = 0,$$

приводящееся после однократного интегрирования по  $t_1$  к уравнению консервативного нелинейного осциллятора

$$y'' + 2y^2 - 4y = 0, \quad (7.2)$$

где  $y = u/v$ , а штрихом обозначается производная по безразмерному времени  $\tau = 0,5t_1 \sqrt{v^3/\beta}$ .

Постоянная интегрирования положена в (7.2) равной нулю, что в случаях, представляющих интерес, всегда можно сделать без ограничения общности (введя, например, новую переменную).

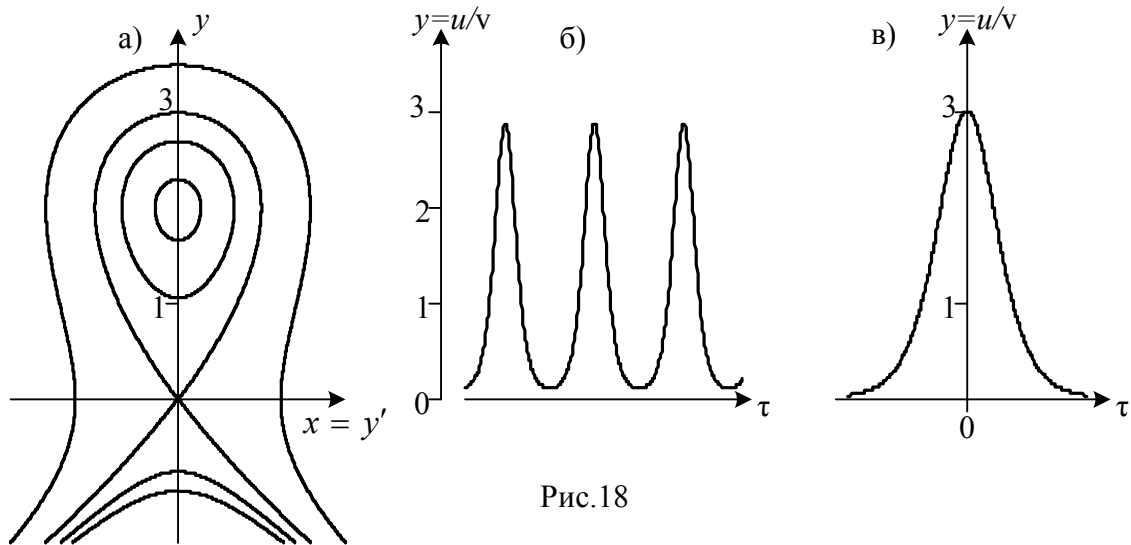


Рис.18

В построенном на рис. 18,а согласно (7.2) фазовом портрете осциллятора содержатся две особые точки: седло (начало координат) и центр (точка (0, 2)). Охватывающим центр замкнутым фазовым траекториям соответствуют периодические колебания  $y$  относительно некоторого среднего уровня. При малой амплитуде колебаний им отвечает волновой процесс, мало отличающийся по форме от монохроматической волны. Периодические движения вблизи сепаратрисы седла называются *кноидальными волнами* (рис. 18,б). Петле сепаратрисы соответствует решение в виде одиночного возвышения (рис. 18,в)

$$y = 3\text{sch}^2 \tau, \quad (7.3)$$

т. е. выражением для переменной  $u$  представляется *уединенная волна* с амплитудой (высотой)  $u_{\max} = 3v$ . Ширина этой волны, определяемая по уровню  $0,5u_{\max}$ , оценивается как  $3,2\sqrt{\beta/v}$ . Следует обратить внимание на однозначную связь ширины волны, скорости  $v$  и амплитуды  $u_{\max}$ .

Несмотря на то, что уединенные волны довольно часто встречаются в природе, первое научное сообщение о наблюдении такой волны (1834 г., Дж. Скотт Рассел) было опубликовано лишь в середине XIX века. И только во второй половине XX века уединенные волны стали объектом широких физических и численных экспериментов, которые, в частности, показали, что эти волны при взаимодействии ведут себя по большей части как классические частицы. По этой причине вместо наименования «уединенная волна» (solitary wave) Н. Забуски и М. Крускал в 1965 г. ввели в употребление термин «*солитон*», созвучный электрону, протону и другим названиям элементарных частиц [23, 24].

Первоначально солитонами были названы уединенные волны, получающиеся при решении уравнения КдВ. Однако, в последующем

обнаружилось, что солитонными решениями обладают ещё несколько типов нелинейных дифференциальных уравнений [10], например, кубическое уравнение Шредингера  $j \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \alpha |u|^2 u = 0$  и уравнение синус-Гордона  $c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u$ . Используемые для интегрирования этих уравнений процедуры базируются на методе обратной задачи рассеяния [10].

## 7.2. Понятие об автоволновых процессах

Каждая из волн постоянного профиля, соответствующих решениям уравнения КдВ, представляет собой волновой процесс в консервативной распределенной системе. Далее мы будем интересоваться частными разновидностями неконсервативных распределенных систем, в которых незатухающие колебания могут поддерживаться в отсутствие внешнего возбуждения. В отечественной литературе подобные колебания называют автоколебаниями [2, 13, 21].

Если исключить из рассмотрения системы, содержащие сосредоточенные активные элементы [17], то для возникновения автоколебаний в распределенной системе необходима неустойчивость стационарного (неколебательного) состояния, выражающаяся в усилении некоторых возмущений, что возможно в случае систем, заполненных активной средой. При конвективной неустойчивости для возбуждения автоколебаний в системе нужна обратная связь, которая обеспечивается обычно многократным прохождением волн через активную среду, характерным для кольцевых структур и структур с отражениями на границах. Такой обратной связи не требуется для распределенных систем с абсолютной неустойчивостью, поскольку в них каждая точка ведет себя как своеобразный автогенератор [13]. Согласно предложению Р.В. Хохлова автоколебания в распределенных системах с абсолютной неустойчивостью принято именовать *автоволновыми процессами (автоволнами)*.

## 7.3. Волна переброса (бегущий фронт)

Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + F(u) \quad (7.4)$$

относится к числу простейших математических моделей распределенных динамических систем, в которых могут возникать автоволны. Эта модель была предложена в 1937 г. в связи с биологической задачей о диффузии популяций А.Н. Колмогоровым, Г.Г. Петровским, Н.С. Пискуновым и одновременно с ними Р. Фишером применительно к задаче о распространении доминантного гена. Несколько позднее, в 1938 г. подобное уравнение было получено Я.Б. Зельдовичем и Д.А. Франк-Каменецким при

изучении процессов горения. В 60-х годах XX века оно было использовано Р. Фитц Хью в качестве приближенного уравнения для описания динамики нервного волокна [13, 22].

Необходимо, чтобы входящая в (7.4) функция  $F(u)$  обращалась в нуль при двух (по меньшей мере) значениях аргумента. Примером такой функции может служить

$$F(u) = 2\alpha u \left( 1 - \frac{u^2}{u_0^2} \right). \quad (7.5)$$

Установим в качестве граничных условий требования, чтобы при  $z \rightarrow +\infty$  и  $z \rightarrow -\infty$  для искомой функции  $u$  было характерно монотонное асимптотическое стремление соответственно к нулю и положительной величине  $u_0$ .

Предполагая, что решение представляется функцией переменной  $\zeta = z - vt$ , т. е. имеет вид волны, бегущей с неизвестной пока скоростью  $v$ , заменим (7.4) обыкновенным дифференциальным уравнением

$$D \frac{d^2 u}{d\zeta^2} + v \frac{du}{d\zeta} + F(u) = 0. \quad (7.6)$$

Введем дополнительную функцию  $x(\zeta)$  согласно формуле

$$\frac{du}{d\zeta} = -x \quad (7.7)$$

и, принимая во внимание соотношение  $\frac{dx}{d\zeta} = -x \frac{dx}{du}$ ,

перейдем от (7.6) к уравнению первого порядка

$$Dx \frac{dx}{du} - vx + F(u) = 0, \quad (7.8)$$

решение которого при  $F(u)$ , выражаемой равенством (7.5), может быть представлено в виде

$$x = \gamma u \left( 1 - \frac{u}{u_0} \right). \quad (7.9)$$

Подставляя (7.5, 7.9) в (7.8) и приравнявая члены с одинаковыми степенями  $u$ , найдем, что  $\gamma = \sqrt{\alpha/D}$ , а скорость  $v = 3\sqrt{\alpha D}$ .

Выбирая начало отсчета  $\zeta$  таким образом, чтобы при  $\zeta = 0$  искомая величина  $u$  равнялась  $u_0/2$ , и учитывая (7.9), получим из (7.7) в результате интегрирования

$$u = \frac{u_0}{1 + \exp(\gamma\zeta)}. \quad (7.10)$$

Соотношением (7.10) описывается волна переброса (переключения), называемая также бегущим фронтом и решением типа доменной стенки



(рис. 19) [10, 13]. Аналогичные решения имеют при соответствующих граничных условиях некоторые другие нелинейные уравнения, в частности уравнение Бюргера [10]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Необходимо, правда, иметь в виду, что волна переброса в случае уравнения Бюргера в отличие от решения уравнения (7.4) не является автоволновым процессом, и ее профиль сохраняется неизменным при распространении только за счет граничных условий, т. е. потоков энергии через границы [13].

Рассмотрим теперь иной вариант задания функции  $F(u)$ :

$$F(u) = 2\alpha \frac{u}{u_0} (u - u_1) \left( 1 - \frac{u}{u_0} \right),$$

где  $0 < u_1 < u_0$ .

В этом случае, как и в разобранном выше, уравнение (7.4) имеет решение вида (7.9) с тем же значением постоянной  $\gamma$ . Отличие имеется только в выражении для скорости волны, которая получается равной

$$v = \left( 1 - \frac{2u_1}{u_0} \right) \sqrt{\alpha D}$$

и может быть как положительной, так и отрицательной: если  $u_0 > 2u_1$ , то  $v > 0$ , в противном случае  $v < 0$ . Первый случай соответствует распространению состояния «горения» ( $u = u_0$ ), а второй – распространению состояния равновесия ( $u = 0$ ), т. е. «угасания пламени». В экологии первый случай называют волной размножения, а второй – волной вымирания.

Из (7.10) при помощи (7.7) выводится выражение для  $x$ , совпадающее по форме с солитонным решением уравнения КдВ,

$$x = \frac{\gamma u_0}{4} \operatorname{sch}^2 \frac{\gamma \zeta}{2}. \quad (7.11)$$

Таким образом, решение для  $x$  может трактоваться как одна из разновидностей автоволн, называемая бегущим автосолитоном. Примерами бегущих автосолитонов могут быть также рассмотренные выше домены, перемещающиеся по ганновскому образцу, и оптические автосолитоны, возникающие в лазере в режиме самосинхронизации многих мод [13]. Автосолитонам различных видов, их теории и механизмам образования в физических, химических и биологических системах посвящена работа [11].

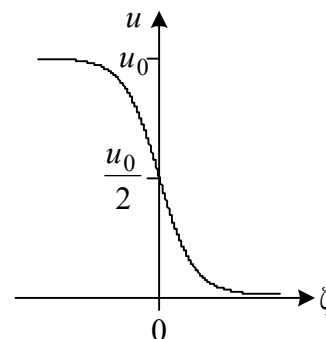


Рис.19

## ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов В.П., Бабенко Л.А. Техническая электродинамика. СПб.: СПбГТУ. 2000. 43 с
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. 568 с.
3. Арсенин В.Я. Математическая физика. М.: Наука, 1966. 368 с.
4. Бонч-Бруевич В.Л., Звягин И.П., Миронов А.Г. Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках. М.: Наука, 1972. 416 с.
5. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Сов.радио, 1957. 582 с.
6. Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 288 с.
7. Васильев В.А. и др. Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987. 240 с.
8. Горелик Г.С. Колебания и волны. М.-Л.: Физматгиз, 1959. 552 с.
9. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.
10. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит, 2001. 496 с.
11. Кернер Б.С., Осипов В.В. Автосолитоны. М.: Наука, 1991. 200 с.
12. Конторович М.И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. М.: Сов. радио, 1975. 320 с.
13. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 416 с.
14. Левинштейн М.Е., Пожела Ю.К., Шур М.С. Эффект Ганна. М.: Сов.радио, 1975. 392 с.
15. Мартынов Б.А. Теория колебаний. Математические модели динамических систем. – СПб.: СПбГПУ, 2002. 63 с.
16. Мартынов Б.А., Молотков В.И. Резонансные явления в электрических цепях с нелинейными элементами. Л.: ЛПИ, 1981. 68 с.
17. Мигулин В.В. и др. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978. 392 с.
18. Нейман М.С. Обобщение теории цепей на волновые системы. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1955. 192 с.
19. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1976. 496 с.
20. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989. 544 с.
21. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992. 432 с.
22. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. М.: Наука, 1984. 304 с.
23. Рэбби К. Солитоны. // УФН, 1980, т.130, № 2, С. 329-356.
24. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977. 368 с.
25. Филиппов А.Т. Многоликий солитон. М.: Наука, 1986. 224 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ</b> .....	3
1.1. Монохроматическая волна. Фазовая скорость, длина волны, волновое число. Дисперсионное уравнение. Дисперсия .....	3
1.2. Волновой пакет. Групповая скорость .....	4
1.3. Двухпроводная линия. Телеграфные уравнения. Цепочки из сосредоточенных элементов, эквивалентные распределенным системам.....	7
1.4. Линейные и нелинейные распределенные системы .....	9
<b>2. ЛИНЕЙНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ</b> .....	10
2.1. Волны в линии передачи, волновое сопротивление (характеристический импеданс) линии .....	10
2.2. Монохроматические волны в линии передачи. Приближенные оценки погонных параметров полосковой (ленточной) линии.....	12
2.3. Прямоугольный волновод с волной основного типа. Распределенная система с дисперсией в области низких частот .....	13
<b>3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ</b> .....	16
3.1. Предварительные замечания.....	16
3.2. Постановка задачи.....	17
3.3. Укороченные уравнения. Основные выводы, вытекающие из анализа решений укороченных уравнений.....	18
<b>4. ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ СВЕТА В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ</b> .....	21
4.1. Вводные замечания .....	21
4.2. Постановка задачи.....	21
4.3. Получение укороченных уравнений .....	23
4.4. Соотношения для стационарного режима .....	24
<b>5. ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ (ВОЛНЫ РИМАНА) В НЕЛИНЕЙНОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЕ БЕЗ ДИСПЕРСИИ И ДИССИПАЦИИ. УДАРНАЯ ВОЛНА</b> .....	26
5.1. Исходные соотношения и допущения.....	26
5.2. Анализ решений уравнения простой волны .....	27
<b>6. ПОЛЯ И ВОЛНЫ В ГАННОВСКИХ ДИОДАХ</b> .....	30
6.1. Вводные замечания и исходные соотношения.....	30
6.2. Пространственно однородное решение и условия его устойчивости. Конвективная и абсолютная неустойчивость .....	32
6.3. Неоднородные распределения плотности заряда и электрического поля. Понятие о статической неустойчивости .....	36
6.4. Неустойчивость режима постоянного тока по отношению к флуктуациям, возникающим за пределами образца ( неустойчивость по импедансу) .....	38
6.4. Стационарное движение доменов.....	42
<b>7. СОЛИТОНЫ, АВТОВОЛНЫ И АВТОСОЛИТОНЫ</b> .....	45
7.1. Уединенная волна как одно из решений уравнения Кортевега - де Вриза (КдВ) 45	
7.2. Понятие об автоволновых процессах.....	47

7.3. Волна переброса (бегущий фронт).....	47
<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	<b>50</b>