

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ



В.Н. Цеменко

ПРОЦЕССЫ ПОРОШКОВОЙ МЕТАЛЛУРГИИ

**ТЕОРИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
УПЛОТНЕНИЯ ПОРОШКОВЫХ
МАТЕРИАЛОВ**

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГПУ

2005

Глава 1. СТРУКТУРНО – ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

1.1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПЛОТНЕНИЯ И УРОВНИ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОРОШКОВЫХ СРЕД

Одним из возможных подходов при изучении процессов деформирования материальных тел (порошковых в том числе) является феноменологический, т.е. подход, основанный на общих полученных из опыта закономерностях и гипотезах. Ценность такого подхода, построенного на гипотезе макроскопической однородности (квазиоднородности) деформируемого тела, состоит в том, что он может быть использован в инженерных методах расчета напряжений и деформаций применительно к различным технологическим процессам.

Феноменологический подход механики сплошных сред является физически и математически вполне корректным при правильном выделении уровней исследования. В рамках такого подхода тензоры напряжений и деформаций являются симметричными, пластическая деформация осуществляется трансляционным движением (сдвигом) дефектов под действием силовых напряжений. Описание поведения среды со структурой на основе классических теорий возможно в том случае, если структурные элементы как целые имеют малые повороты и перемещения относительно друг друга. В этом случае уравнения совместности выполнимы для всего тела. При такой постановке задачи феноменологический подход механики сплошных сред может применяться для описания интегральных свойств макрооднородной среды в рамках детерминированной модели, отражающей наиболее существенные обобщенные характеристики, определяемые непосредственно из опыта.

В тоже время механизмы процессов деформирования могут быть изучены при их более детальном рассмотрении, т.е. на соответствующих уровнях рассмотрения среды.

В теории и технологии порошковой металлургии рассматриваются пористые, порошковые тела и порошковые материалы. Пористые тела содержат только объемные дефекты – поры. В отличие от них порошковые тела содержат не только поры, но и межчастичные несплошности (контактные несовершенства). Порошковые материалы – совокупность несвязанных микротел (частиц порошка). Порошковые тела можно получить из порошковых материалов различными методами, в частности, уплотнением. Спеканием порошковых тел получают пористые тела. Механические свойства указанных материалов различаются в основном при растягивающих напряжениях. В технологических процессах со схемами сравнительно высоких напряжений сжатия по всему деформируемому объему эти материалы ведут себя качественно идентично.

Уплотняемые материалы указанных типов и им подобные, а также большинство композиционных материалов можно отнести к классу микroneоднородных тел. Специфику микroneоднородных материалов обуславливает наличие в любом достаточно малом их объеме частиц, обладающих различными свойствами. При этом поведение такого материала определяется не только набором свойств составляющих его компонентов, но также характером их взаимодействия и взаимного расположения.

Отметим одно важное обстоятельство, касающееся структуры неоднородной среды. Среда как со случайной, так и с регулярной (упорядоченной) структурой бывают двух типов: матричные и статистические смеси. В матричных смесях хотя бы одна или несколько фаз дискретным образом распределены в другой непрерывной фазе, называемой матрицей или связующим. В статистических смесях все фазы распределены дискретно и непрерывная фаза отсутствует.

Макроскопические свойства матричных и статистических смесей при одних и тех же физико-механических свойствах и объемных долях элементов структуры могут быть различными. Для пористого тела при $\Pi \ll 1$ обе модели оказываются идентичными.

Для порошкового неспеченного тела модель статистической смеси отражает физическую сущность структурной неоднородности и позволяет учесть влияние не только пористости, но и межчастичное взаимодействие на макрохарактеристики материала в целом.

На физическом уровне строгости от структурных переменных деформирования к макроскопическим можно перейти, используя понятие элементарного макрообъема. Понятие макроскопической однородности среды означает, что элементарные макрообъемы, выделенные вокруг любой пары точек тела, имеют одинаковые свойства.

Напряженное состояние макрообъемов характеризуют тензором макронапряжений σ_{ij} , а деформированное состояние – тензором макродеформаций ε_{ij} . Сопротивление элементарных макрообъемов деформированию определяет связь макронапряжений и макродеформаций. При этих предположениях получаемые методами механики сплошной среды макрохарактеристики (напряжения, деформации, плотность и т.п.) с достаточной точностью совпадают с усредненными по макрообъему микрохарактеристиками.

Заметим, что практическое определение распределения плотности обычно связано с предварительным разбиением образца на некоторые области, объем которых мал по сравнению с объемом всего тела и в то же время существенно превосходит размер отдельной частицы порошка или поры. Разбиение образца на такие области основа введения континуальных представлений для порошковой среды. При этом предполагается, что для любого объема порошка или порошкового тела существует область, идентичная в целом по свойствам указанным средам. Эту область называют представительным элементом, а порошковый объем или порошковое тело объединяют совокупностью таких элементов.

Важно отметить, что определение физико–механических характеристик порошковой или пористой среды в результате применения какой-либо континуальной модели имеет смысл в объемах, не меньших объема представительного элемента. Одновременно анализ особенностей взаимодействия и деформации структурных элементов внутри элементарных объемов позволяет вскрыть физическую основу процесса уплотнения. К числу таких особенностей прежде всего нужно отнести локально неоднородную деформацию, обусловленную взаимным проскальзыванием и поворотом структурных элементов (частиц) внутри представительного элемента среды.

Уплотняемая порошковая среда является некоторой совокупностью частиц определенного размера и формы. Выделяя частицу порошкового материала в качестве основного структурного элемента, можно рассматривать процесс деформирования на следующих уровнях.

- Микроуровень. Определяет механизмы пластического деформирования (разрушения) материала частиц и его физическое упрочнение. Микропластическая деформация описывается в рамках дислокационно–дисклинационных представлений. Континуальным вариантом этого представления является классическая теория упругости и пластичности с внутренними напряжениями, источниками которых являются дефекты кристаллической решетки. Масштабный размер этого уровня не превышает уровень дислокационных субструктур: $l_{cy6} \leq 0,1 \div 3$ мкм.
- Межчастичный (структурный) уровень. Определяет пространственную структуру и формирование межчастичных контактов в процессе взаимного смещения и деформации отдельных частиц порошкового материала. Затрудненность относительного смещения частиц приводит к их взаимодействию как целого и возникновению концентраторов напряжений в стыках нескольких элементов структуры. При этом макронапряжения в теле определяются взаимодействием наибольших структурных элементов, вовлеченных в процесс пластической деформации. Масштабный размер этого

уровня совпадает с размером частиц порошковых материалов, в среднем он лежит в пределах: $l_{стр} = 20 \div 200$ мкм.

- Макроуровень. Основа введения континуальных представлений для порошкового материала, как структурно–неоднородной среды. На этом уровне рассматривается элемент среды достаточно малый по сравнению с объемом всего тела и, в то же время, существенно превосходящий размер структурного элемента (частицы). Структурная неоднородность пластической деформации может быть принята несущественной для характерного размера элемента: $l_m \geq 10l_{стр}$. Макродеформация может быть описана в рамках механики сплошной среды как обобщение классической теории упругости и пластичности для макроконтинуума, точками которого являются элементы структуры, а источниками внутренних напряжений – границы их раздела, т.е. межчастичные границы. Отсюда принципиальное значение имеет состояние межчастичных контактов порошковых материалов и их размеры. Механизм геометрического упрочнения такой среды (за счет изменения общей пористости) определяется этим уровнем.

Представленная модель естественно является некоторым приближением, т.к. на каждом из уровней, особенно на микроуровне, можно выделить подуровни с соответствующими им структурными элементами. Однако принципиально важные физико–механические аспекты деформирования порошковой среды в процессе ее уплотнения она отражает. Таким образом, полная деформация (макродеформация) порошкового тела может быть представлена состоящей из структурной деформации, которая определяется относительным перемещением элементов структуры (частиц), и микродеформации, представляющей собой пластическую деформацию (разрушение) самих частиц

Пластическую деформацию нагруженного порошкового тела следует рассматривать как следствие потери сдвиговой устойчивости пространственной конструкции, состоящей из элементов структуры (частиц), в локальных областях концентраторов напряжений, т.е. в областях межчастич-

ных контактов. Такой процесс по своей природе является сугубо релаксационным. Уплотнение в процессе пластического деформирования возможно в том случае, когда сдвиги сопровождаются достаточно высоким гидростатическим напряжением сжатия. Вследствие чего они локализованы на сравнительно низком уровне (межчастичном – структурном, либо микроуровне – в материале частиц). Если движение структурных элементов относительно друг друга не обеспечивает условия сохранения сплошности сдвигом на низком уровне, то диссипативный процесс осуществляется на более высоком уровне путем разворота больших объемов нагруженного тела. При недостаточном гидростатическом напряжении сжатия (а при его равенстве нулю тем более) происходит образование и трансляционное расширение трещины на более высокий уровень (макроуровень) и разрушение (образование макронесплошностей) в объеме всего тела.

Известно, что исходная плотность укладки частиц сыпучих материалов зависит не столько от физических свойств материала частиц порошка, сколько от их размеров, гранулометрического состава и состояния поверхности частиц (форма, степень окисленности). Это и определяет исходную пространственную ориентацию частиц внутри представительного элемента, а следовательно, и наиболее вероятный механизм уплотнения среды при нагружении.

На рис. 1.1,а показана модель укладки частиц сферической формы одинакового размера. Для такой идеализированной модели пространственная структура наиболее плотная и жесткая. Приложение сжимающей нагрузки может приводить к уплотнению среды лишь за счет деформации самих частиц.

Набор сферических частиц широкого гранулометрического состава снижает жесткость пространственной структуры и ее плотность упаковки (рис. 1.1,б). Приложение нагрузки к такой системе приведет прежде всего к нарушению пространственной устойчивости частиц, их более плотной укладке за счет переориентации множества точек контактов и образованию

такой структуры, дальнейшее уплотнение которой будет происходить уже преимущественно за счет деформации частиц порошка.

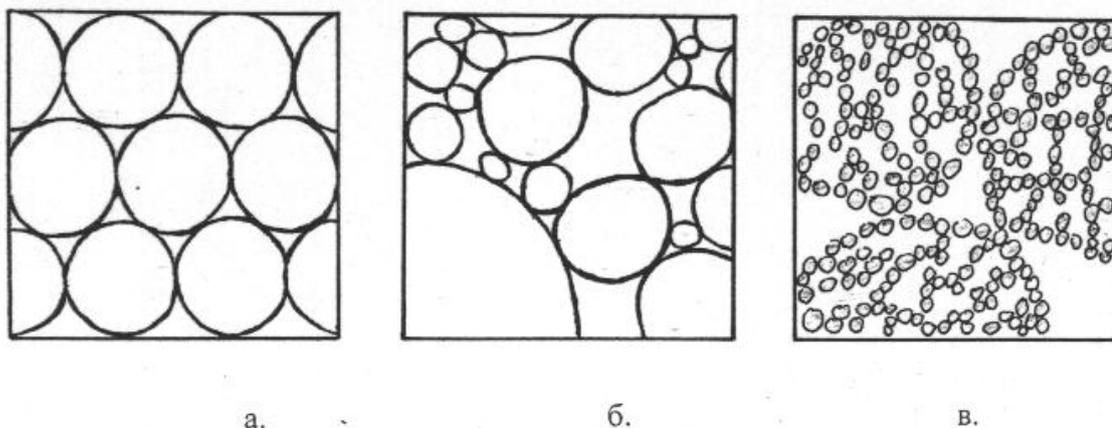


Рис. 1.1. Схемы укладки частиц: а – сферической формы одного размера; б –различного гранулометрического состава; в – конгломератов дисперсных частиц

Следует отметить, что подбором формы и размера частиц можно получать изделия с плотностью до 95% от теоретической. Технологически это осуществляется в процессе виброформования с наложением сравнительно небольшой статической нагрузки. Реологические свойства материала в таких условиях существенным образом отличаются от условий, характерных для деформирования статическим сжатием, поэтому подобные процессы в настоящей работе не подлежат рассмотрению.

Мелкодисперсные частицы, способные к конгломерированию образуют еще более рыхлую структуру (рис. 1.1,в). Приложение нагрузки к такой системе способствует прежде всего разрушению конгломератов и сравнительно свободному относительному смещению частиц до значительных плотностей, так как вероятность образования жесткой структуры из дисперсных частиц мала.

Таким образом, в зависимости от исходных свойств порошковых материалов реализуется более или менее плотная пространственная укладка их частиц, определяющая характер уплотнения элементарных объемов

среды. Представляя порошковый материал как совокупность таких элементов, основываясь в целом на континуальном подходе, можно выделить этапы уплотнения, которые могут быть оценены на основе макрохарактеристик среды.

В реальных процессах уплотнения порошковых материалов можно выделить структурный, упругий и пластический этапы деформирования. Под воздействием нагрузки структурная деформация реализуется при взаимном смещении (организованном сдвиге) элементов среды до нового более плотного и жесткого образования. Упругопластический этап реализуется тогда, когда структурная деформация становится невозможной, а напряженное состояние в материале частиц достигает предела текучести (хрупкое разрушение частиц рассматриваем как частный случай пластической деформации материала). Так как величина упругой деформации частиц мала по сравнению с необратимой деформацией уплотнения всего тела, то процесс уплотнения целесообразно представлять как плавный переход этапа структурной деформации к этапу пластической деформации (разрушения) материала частиц. Причем этот переход отражает качественные и количественные изменения, происходящие в порошковых телах, как на микро-, так и макроуровнях, о чем свидетельствуют экспериментальные исследования физико-механических свойств материалов различной плотности.

1.2. ОЦЕНКА ГРАНИЦЫ ПЕРЕХОДА ОТ СТРУКТУРНОГО К ПЛАСТИЧЕСКОМУ ЭТАПУ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Разделение процесса уплотнения порошковых материалов на различные этапы носит условный характер. Эта условность определяется тем, что практически во всем диапазоне давлений действуют оба механизма уплотнения среды. Однако то обстоятельство, что в определенном диапазоне плотности преимущественным может быть один из механизмов, и позво-

ляет весь процесс уплотнения условно разделить на этап структурного и пластического деформирования. Так как исходные свойства реальных порошковых материалов могут существенным образом отличаться, либо наоборот быть сходными, то представляет особый интерес оценка их поведения на различных этапах деформирования, а также протяженность этих этапов.

Согласно представлениям Н.Н. Павлова и Н.Н. Целесина уплотнение порошкового материала за счет взаимного перемещения частиц переходит в уплотнение вследствие деформации самих частиц тогда, когда относительное изменение объема уплотняемой среды $\Delta V / V_0$ становится равным относительному изменению доли объема, занимаемого в порошке порами $\Delta \Pi / \Pi_0$, т.е.:

$$\frac{\Delta \Pi}{\Pi_0} = \frac{\Delta V}{V_0}, \quad (1.1)$$

где $\Delta V = V_0 - V$, $\Delta \Pi = \Pi_0 - \Pi$; V_0 , Π_0 – исходные значения объема и пористости до уплотнения; V , Π – их текущие значения.

На основании этого соотношения граничным (критическим) является такое состояние уплотняемого порошкового материала, когда объем, занимаемый порами, становится равным доле объема, которую занимали до уплотнения частицы, т.е.:

$$\Pi_{кр} = \theta_0 \quad (1.2)$$

или

$$\Pi_{кр} = 1 - \Pi_0, \quad (1.3)$$

тогда

$$\theta_{кр} = 1 - \theta_0, \quad (1.4)$$

где θ_0 – относительная плотность до приложения нагрузки.

Таким образом, наибольшая плотность упаковки совокупности частиц произвольных размеров и формы (без их деформации) может быть однозначно связана с исходной структурой такой системы, определяющей ее пористость до уплотнения.

Однако, если пористость порошкового материала в исходном состоянии будет $\Pi_0 < 0,5$, то окажется, что $\Pi_{кр} > \Pi_0$. Это противоречие позволяет условно разделить реальные порошковые материалы с точки зрения последовательности протекания этапов уплотнения следующим образом:

- 1) при $\Pi_0 > 0,5$ ($\theta_0 < 0,5$) – уплотнение имеет этап структурного деформирования, а переход к этапу пластической деформации определяется $\Pi_{кр}$ ($\theta_{кр}$);
- 2) при $\Pi_0 \leq 0,5$ ($\theta_0 \geq 0,5$) – уплотнение начинается как процесс пластической деформации материала частиц порошка, этап структурного деформирования условно отсутствует (минимален).

Рассмотренный подход при решении задачи об определении границ этапов уплотнения позволяет комплексно учесть влияние на процесс деформирования порошковых материалов их гранулометрического состава, формы и размера частиц в рамках детерминированной модели.

Экспериментальная проверка соотношений (1.1)–(1.4) на порошковых материалах различных физико–механических свойств, проведенная Н.Н. Целесиним, подтвердила правомерность такого разделения, причем в качестве начальной плотности возможно использование относительной плотности утряски порошковых материалов, которая на практике определяется по стандартной методике. Тогда уравнение (1.4) для порошковых материалов первой группы принимает вид: $\theta_{кр} = 1 - \theta_y$, а для второй группы представляется равенством: $\theta_{кр} = \theta_y$.

Преимуществом действия определенного механизма деформирования на различных этапах уплотнения отражается и на виде уравнений прессования. Разнообразие таких уравнений обусловлено тем, что чаще они представляются математическими аппроксимациями экспериментальных кривых, полученных для порошковых материалов различных физико–механических свойств. Поэтому они не являются зависимостями одного вида. Причем изменение вида уравнений, определенных по эксперимен-

тальным кривым уплотнения, соответствует интервалам перехода от преимущественно структурного к пластическому этапам уплотнения.

Зависимость пористости от давления прессования может быть представлена в экспоненциальном виде:

$$P = P_0 \cdot e^{-\alpha \cdot p}, \quad (1.5)$$

где $\alpha = S_n / m = \text{const}$ для рассматриваемого материал и условий прессования (m – масса порошкового материала в пресс-форме; S_n – площадь поперечного сечения образца).

Эта зависимость теоретически обоснована и экспериментально подтверждена в работах Н.Ф. Кунина и Б.Д. Юрченко

Выражая пористость через относительную плотность с учетом соотношения (1.4), уравнение (1.5) можно привести к виду:

$$\theta = 1 - \theta_{кр} \cdot e^{-\alpha \cdot p}. \quad (1.6)$$

Граничные условия для уравнения (1.6) следующие:

$$\text{при } p = 0 \quad \theta = 1 - \theta_{кр} = \theta_0;$$

$$\text{при } p = \infty \quad \theta \rightarrow 1.$$

Таким образом, введение в уравнение (1.6) критической плотности позволяет производить оценку границы этапов структурного и пластического деформирования, а следовательно, и их протяженности. Однако уравнение (1.6) наиболее точно описывает процесс уплотнения порошковых материалов на этапе интенсивной пластической деформации частиц, т.е. при $\theta \geq \theta_{кр}$.

Рассмотрим одно из уравнений М.Ю. Бальшина, которое приближенно описывает процесс уплотнения порошковых материалов в широком диапазоне изменения плотностей и давлений:

$$p = p_k \cdot \theta^n, \quad (1.7)$$

где p и p_k – текущее давление и давление, соответствующее максимальной степени уплотнения; n – постоянная, зависящая от физико – механических свойств порошковых материалов.

На этапе структурной деформации (если он существует в силу выполнения условия 1, т.е.: $\theta_0 < 0,5$) процесс уплотнения идет интенсивнее, чем на этапе пластического деформирования. В качестве критерия интенсивности процесса примем условие, соответствующее $\theta_{кр}$, т.е.:

$$\frac{dp^*}{d\theta} = 1, \quad \text{где } p^* = \frac{p}{p_k};$$

$\frac{dp^*}{d\theta} < 1$ – соответствует этапу структурной деформации,

$\frac{dp^*}{d\theta} > 1$ – соответствует этапу пластического деформирования.

Из уравнения (1.7) следует, что при $\frac{dp^*}{d\theta} = 1$:

$$\theta_{кр} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (1.8)$$

Величина показателя степени n , зависящая от физико–механических свойств порошковых материалов, может быть определена экспериментально или расчетно. По данным Г.М. Ждановича для медного порошка при $\theta_0 = 0,24$: $n = 6,5$; для железного порошка при $\theta_0 = 0,33$: $n = 4,8$. Тогда относительная плотность $\theta_{кр}$, определенная по формулам (1.4) и (1.8) будет равной: для медного порошка соответственно 0,76 и 0,71; для железного 0,67 и 0,63. Удовлетворительное совпадение результатов расчетов дает основание считать оценку границы разделения процесса уплотнения на этапы структурного и пластического деформирования введением $\theta_{кр}$ обоснованной и учтенной в наиболее типичных уравнениях прессования.

Таким образом, определяя критическую плотность по исходным характеристикам порошковых материалов на основе стандартной методики, можно оценить протяженность этапов и основной уровень деформирования, влияющий на процесс уплотнения и формирование физико–механических свойств порошкового тела заданной плотности.

1.3. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЕЙ УПЛОТНЯЕМОГО ТЕЛА И ДЕФОРМАЦИЕЙ ЧАСТИЦ ПОРОШКОВОГО МАТЕРИАЛА

При уплотнении порошковых материалов в качестве количественной характеристики процесса в практических расчетах используют относительную деформацию всего тела, которая при прессовании в закрытой пресс-форме определяется по формуле:

$$\varepsilon_n = \frac{h_0 - h_1}{h_0}, \quad (1.9)$$

где h_0 – высота объема порошкового материала, соответствующая началу уплотнения; h_1 – высота прессовки.

При континуальном рассмотрении процесса уплотнения порошкового материала ε_n должна соответствовать относительной деформации как представительного элемента среды, так всей прессовки в целом. Следовательно при расчете относительной деформации порошкового тела по формуле (1.9) включается как структурная деформация элемента среды за счет более плотной укладки частиц ε_c , так и пластическая деформация самих частиц порошкового материала $\varepsilon_{ч}$, т.е. $\varepsilon_n = \varepsilon_c + \varepsilon_{ч}$. Таким образом, ε_n не может отражать степень деформации материала частиц и, следовательно, не позволяет оценить возможное упрочнение металлических порошков на стадии их пластического деформирования.

Рассмотрим идеализированную модель элемента порошковой среды (представительного элемента), структурными составляющими которого являются сферические частицы одинакового радиуса из пластичного материала. На рис. 1.2 приведена исходная схема плотнейшей упаковки (ABC ABC ... или AC AC ...) для модели и идеализация беспористого состояния.

При таком расположении частиц уплотнение элемента среды возможно только за счет их пластической деформации. Эта деформация осуществляется путем заполнения межчастичных пустот (пор) материалом частиц.

Для оценки относительной деформации частиц $\varepsilon_{\text{ч}}$ при уплотнении до беспористого состояния достаточно знать объем межчастичных пустот (пор).

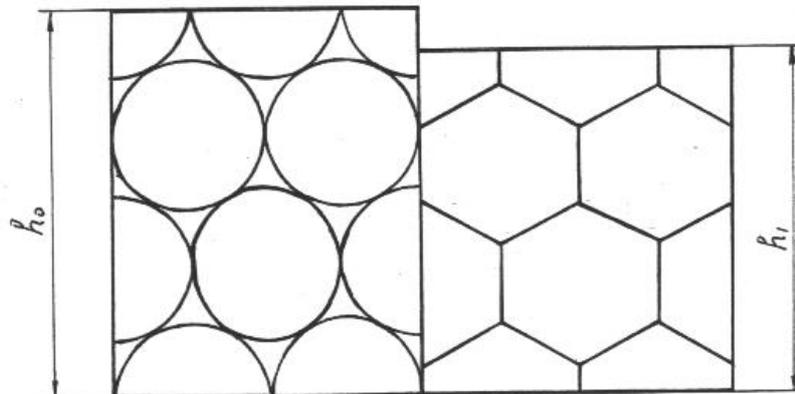


Рис. 1.2. Схема идеализированной модели и уплотнения представительного элемента среды до беспористого состояния

Из кристаллографии известно, что коэффициент компактности рассматриваемой упаковки примерно равен 0,74 и представляет собой исходную относительную плотность идеализированной модели θ_y . Следовательно максимальная деформация, которую претерпевает отдельная частица такой модели при уплотнении до беспористого состояния, равна пористости упаковки:

$$\Pi_y = 1 - \theta_y = 0,26, \text{ т.е. } \varepsilon_{\text{ч}} = 0,26.$$

Для идеализированной модели $\varepsilon_{\text{с}}=0$. Если в начальном состоянии $\varepsilon_{\text{п}}=\varepsilon_{\text{ч}}=0$, тогда в беспористом состоянии $\varepsilon_{\text{п}}=\varepsilon_{\text{ч}}=0,26$. Зная закон изменения $\varepsilon_{\text{ч}}$ от относительной плотности, можно определять ее текущее значение.

Реальные порошковые материалы по форме частиц и их гранулометрическому составу могут в значительной степени отличаться от идеализированной модели плотной упаковки, однако посредством усреднения на структурном уровне любой состав можно приближенно сопоставить такой модели, как одной из вероятных, естественно с определенной долей условности. Тогда за обобщенную предельную деформацию частиц реальных

порошковых материалов можно принять деформацию их идеальных приближений, т.е. $\varepsilon_{ч\max}=0,26$.

Н.Н. Павлов и В. Драйер, основываясь на теоретическом анализе идеализированной модели, экспериментально подтвердили детерминированную зависимость относительной деформации частиц порошкового материала от плотности всего образца на этапе его пластического деформирования, которая достаточно точно описывается уравнением:

$$\varepsilon_{ч} = 1 - e^{-0,3\eta_o}, \quad (1.10)$$

где показатель относительного уплотнения, введенный Н.Н. Павловым, определяется по формуле:

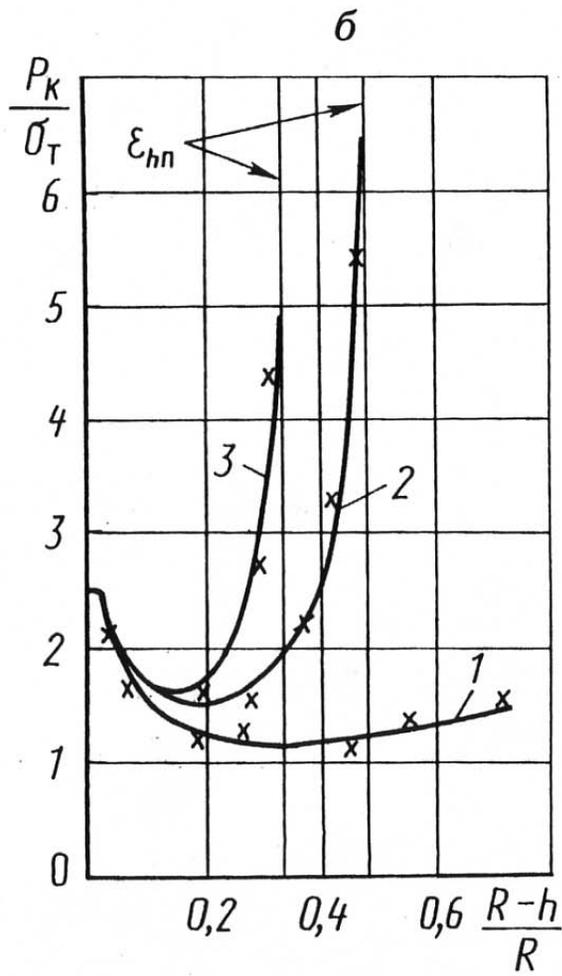
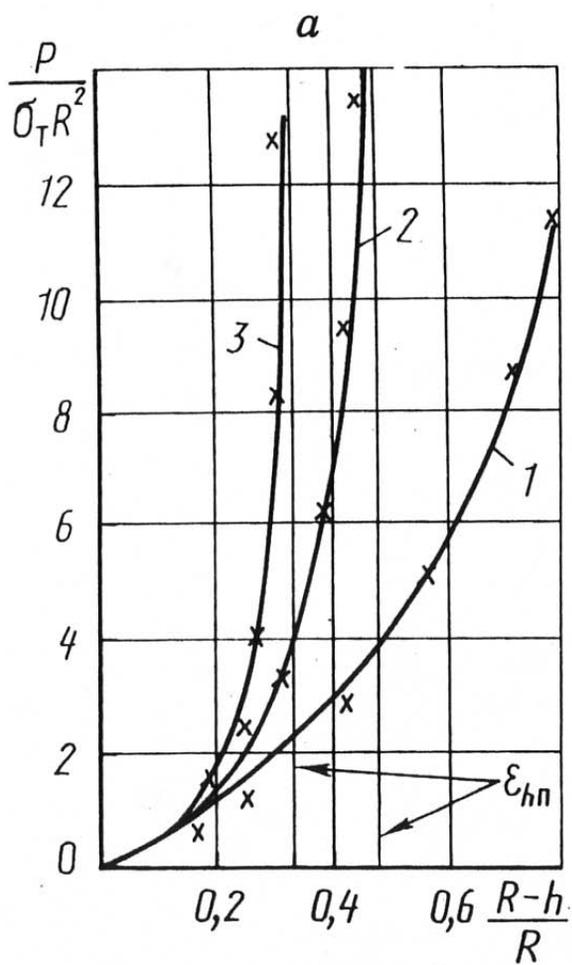
$$\eta_o = \frac{\theta - \theta_y}{1 - \theta_y}. \quad (1.11)$$

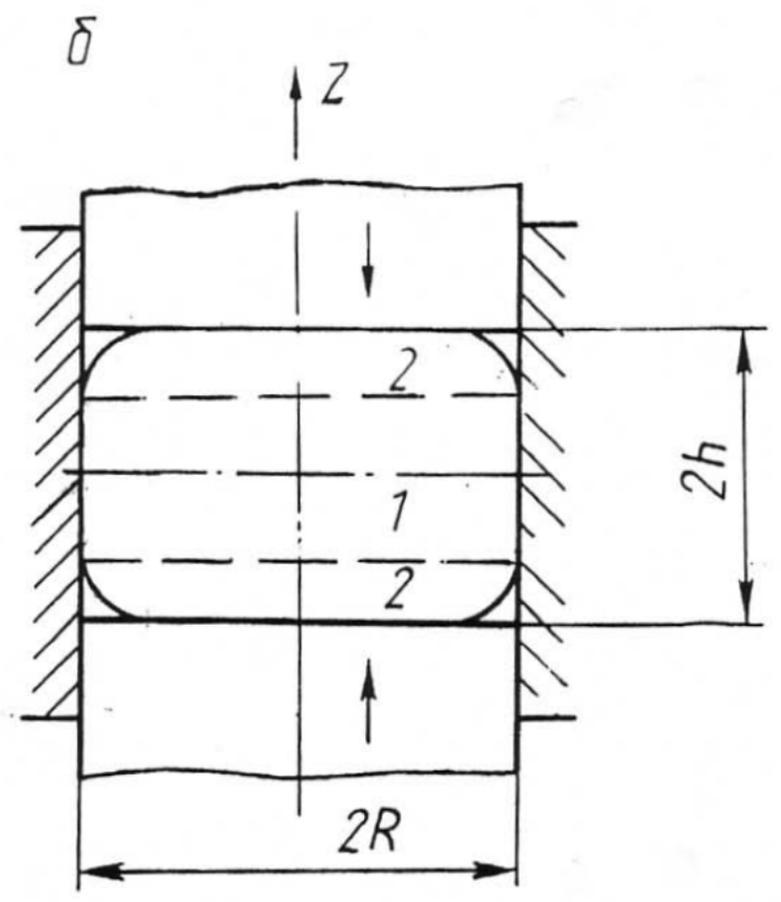
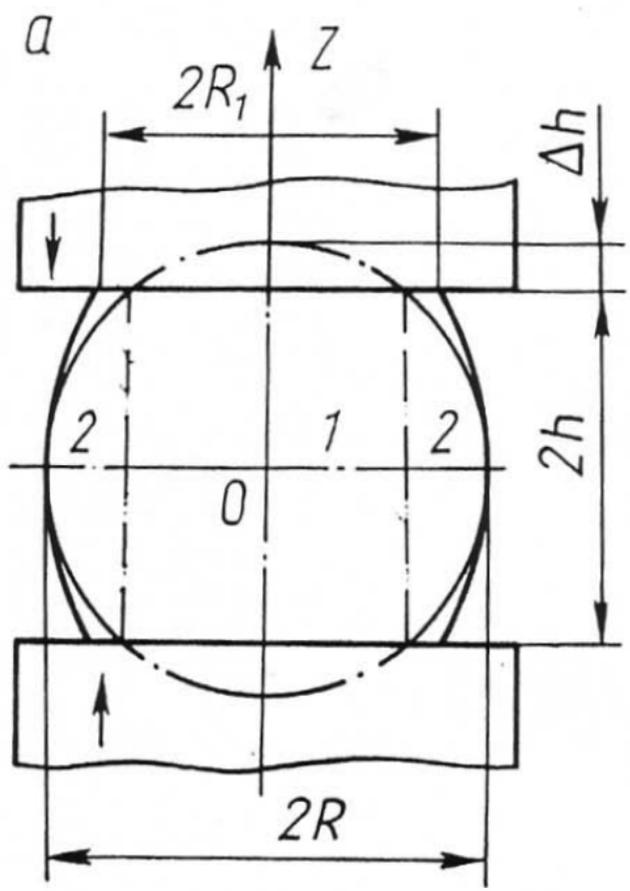
Таким образом, по уравнению (1.10) можно оценить относительную деформацию материала частиц. Точность расчетов будет тем выше, чем однороднее по размеру и форме частицы порошкового материала.

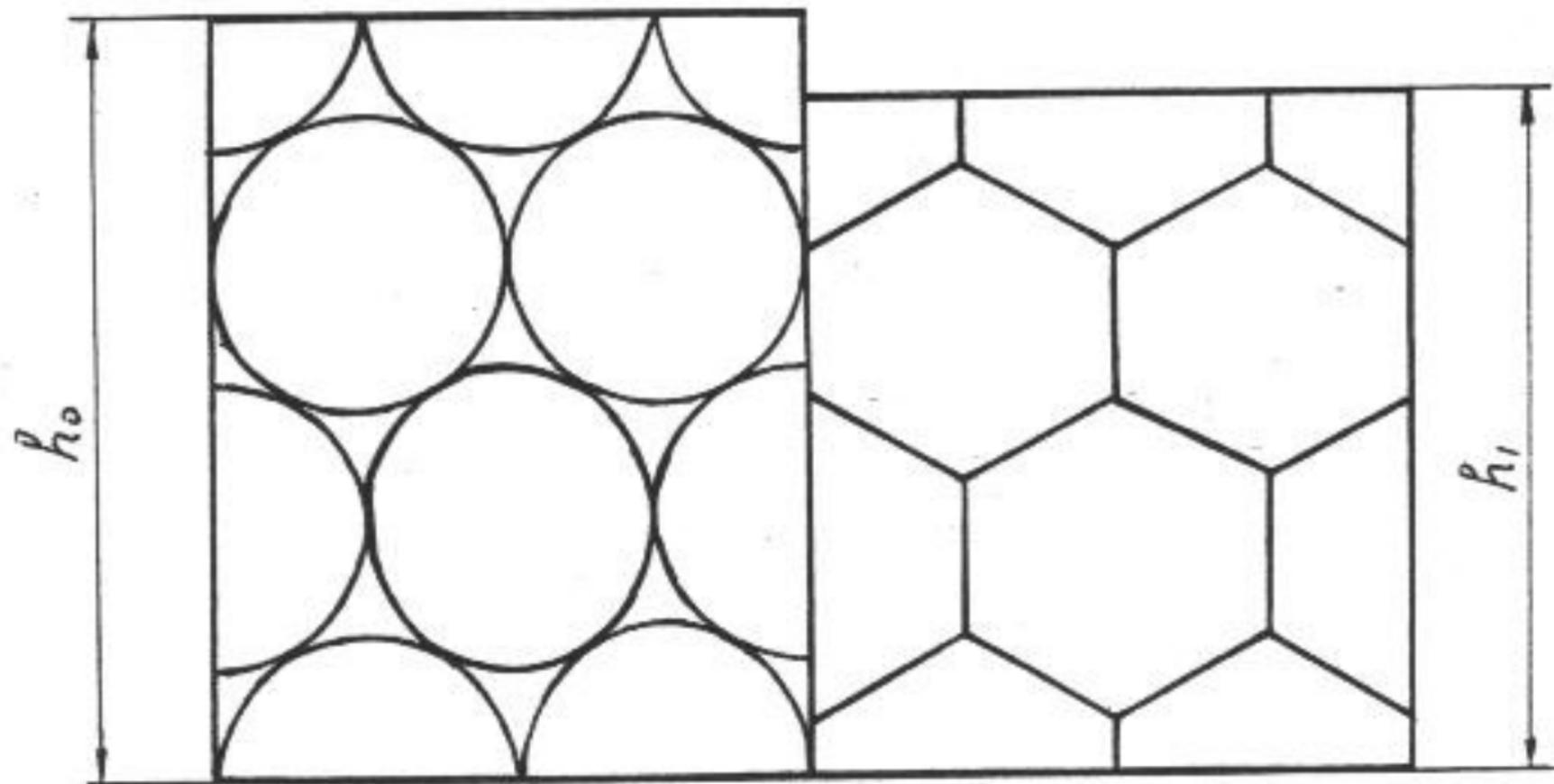
В разделе 1.2 показано, что $\theta_{кр}$ определяет переход к пластическому деформированию частиц при уплотнении порошкового материала. При этом, чем протяженней зона структурного деформирования, тем существенней различие между $\theta_{кр}$ и θ_y . Следовательно, для порошковых материалов с $\theta_y < 0,5$ в показатель η_o целесообразно вводить вместо θ_y относительную плотность $\theta_{кр}$, а для порошковых материалов с $\theta_y \geq 0,5$ показатель η_o использовать в виде (1.11). Тогда для оценки относительной деформации частиц порошковых материалов с $\theta_y < 0,5$ коэффициент относительного уплотнения принимает вид:

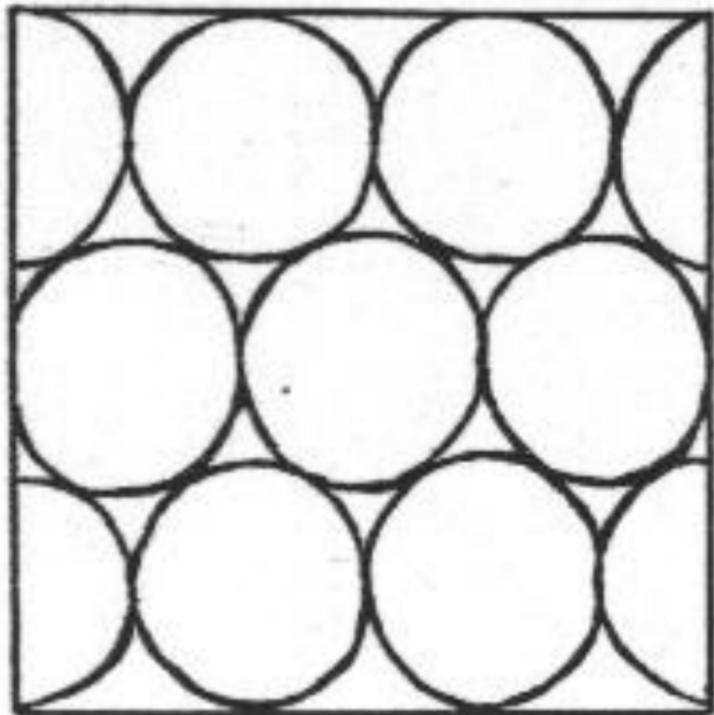
$$\eta_o = \frac{\theta - \theta_{кр}}{1 - \theta_{кр}}. \quad (1.12)$$

При уплотнении порошковых материалов с увеличением относительной плотности прессовки увеличиваются поверхности контакта между от-

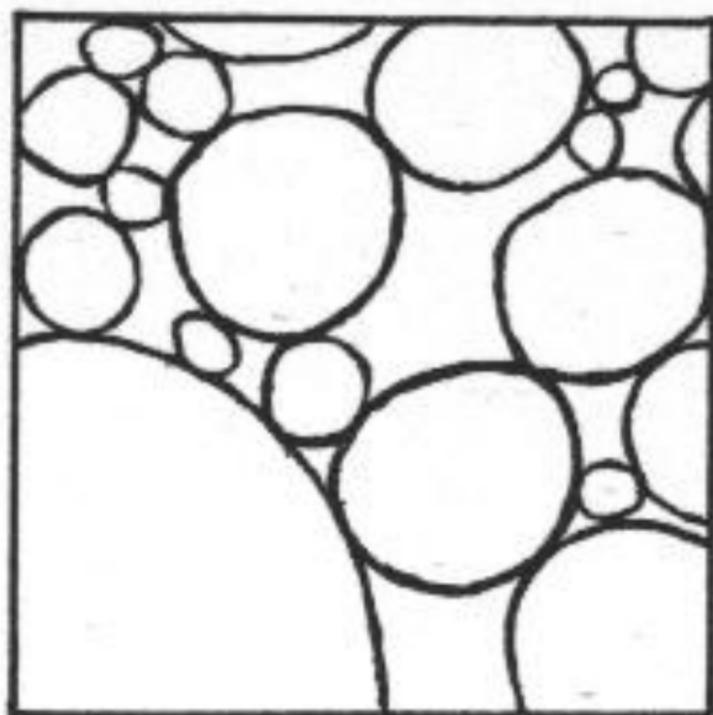




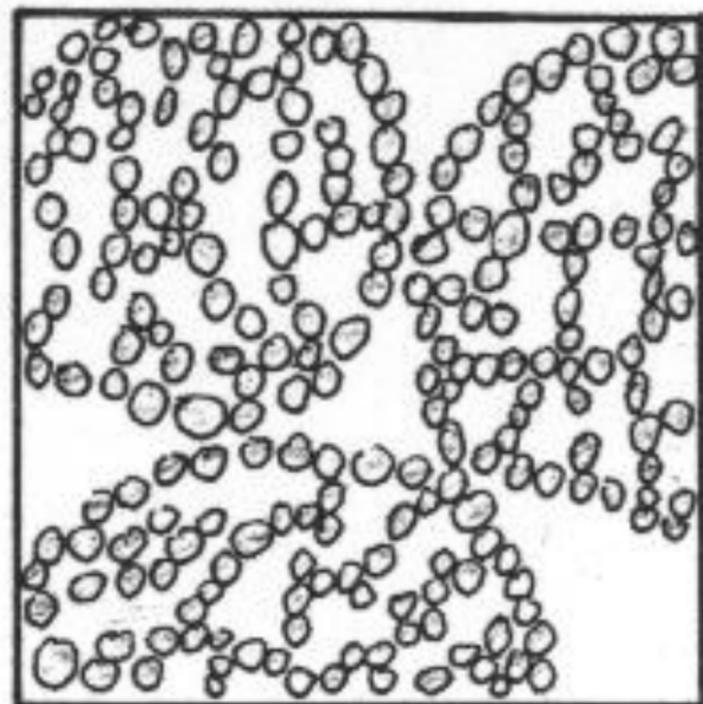




a.



б.



B.

Глава 4. ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ПОРОШКОВОЙ СРЕДЫ НА ОСНОВЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ РАЗРУШЕНИЯ И ТЕЧЕНИЯ

4.1. МЕХАНИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ, УЧИТЫВАЮЩИЕ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТЬ ТЕЛ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

При расчете предельного состояния материала в условиях произвольной схемы напряженного состояния используют критерии, основанные на той или иной теории прочности. Проблема рационального выбора критерия сводится к определению некоторой функции $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, которая не зависит от соотношения главных напряжений, если их значения соответствуют разрушению или заданному допуску на остаточную деформацию. Если эти значения соответствуют состоянию текучести, то условие:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, m_i) \leq K \quad (4.1)$$

называют условием текучести, если рассматривают состояние, предшествующее разрушению, то говорят об условии разрушения.

В условии (4.1) величина K (критерий прочности) обычно имеет определенную физическую интерпретацию: максимальное нормальное или касательное напряжение, энергия формоизменения и т.д. Иногда критерий прочности не имеет прямого физического смысла.

Число констант материала m_i , характеризующих его физико-механические свойства и подлежащих определению, для большинства гипотез не превышает трех. В случае необходимости определения трех констант испытания материалов, как правило, проводятся при одноосном растяжении, одноосном сжатии и чистом сдвиге. Для этих видов нагружения условие (4.1) запишется следующим образом:

$$F_1(\sigma_p, m_i) = K_1; \quad F_2(\sigma_c, m_i) = K_2; \quad F_3(\tau_c, m_i) = K_3. \quad (4.2)$$

Система уравнений (4.2) позволяет исходные константы представлять в виде функций пределов прочности или пластичности при соответствующих нагрузениях.

Условие (4.1) в предельном случае в трехмерном пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ интерпретируется поверхностью. Предельная поверхность разрушения является геометрическим местом точек, координаты которых равны пределам прочности, а точки, лежащие на предельной поверхности пластического течения (текучести) соответствуют пределам текучести материала при различных напряженных состояниях. Геометрическая интерпретация предельного состояния, впервые предложенная Хейфом и Вестергардом, позволяет более ясно представить закономерности влияния вида напряженного состояния на сопротивление материала деформированию и оценить логичность математической формулировки той или иной теории прочности.

Если сопротивление материала считается функцией только напряженного состояния, то основные механические свойства подавляющего числа реальных материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, можно отразить в расчетном уравнении двумя константами. В практике инженерных расчетов при выборе теории прочности часто ориентируются на остаточную деформацию при разрушении. В зависимости от величины этой деформации материалы и подразделяют на пластичные и хрупкие. Такое деление является условным, так как величина остаточной деформации в общем случае зависит от вида напряженного состояния и режима испытаний. Один и тот же материал при одних напряженных состояниях может течь, а при других – хрупко разрушаться, причем резкого перехода от одного вида напряженного состояния к другому нет. Однако общая тенденция такова, что для напряженных состояний, при которых материал течет, характерно наличие сравнительно высоких сжимающих напряжений, а хрупкому разрушению соответствуют нагружения, при которых напряжения положительны.

Для пластичных материалов широкое распространение получили теории максимальных касательных напряжений (условие Кулона–Треска) и теория энергии формоизменения (условие Мизеса). Оба условия связывают сопротивление материала деформированию только с касательными напряжениями: первое с максимальными, второе с октаэдрическими. Условие Треска и Мизеса может быть обобщено в следующей форме:

$$\left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^n + (\sigma_2 - \sigma_3)^n + (\sigma_1 - \sigma_3)^n}{2} \right]^{\frac{1}{n}} = \sigma_p, \quad (4.3)$$

где показатель степени n не обязательно целое число. При $n = 1$ условие сводится к критерию Треска, при $n = 2$ – к критерию Мизеса. Промежуточным значениям соответствуют предельные поверхности, расположенные между призмой Кулона–Треска и цилиндром Мизеса.

Развитие теорий прочности с целью распространения их на хрупкие материалы происходило в основном по пути модификации теории Кулона–Треска и энергетической теории Мизеса путем учета влияния шарового тензора напряжений.

Большинство новейших энергетических теорий укладывается в рамки гипотезы А. Надаи, в соответствии с которой условием наступления предельного состояния следует считать функциональную зависимость вида:

$$\tau_{ок} = f(\sigma_{ок}). \quad (4.4)$$

В системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ это уравнение описывает поверхность вращения, равнонаклоненную к осям.

Первая энергетическая теория вида (4.4) была предложена Ф. Шлейхером, в соответствии с которой предельное состояние материала наступает при определенном значении полной удельной потенциальной энергии, причем критическое для нее значение является функцией шарового тензора. Из предложенной Ф. Шлейхером зависимости следует условие прочности:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + (\sigma_c - \sigma_p) \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_p \cdot \sigma_c, \quad (4.5)$$

откуда: $\tau_c = \sqrt{\frac{\sigma_p \cdot \sigma_c}{2(1+\mu)}}$, где τ_c – предел прочности материала при чистом сдвиге; μ – коэффициент поперечной деформации.

В пространстве главных напряжений условию (4.5) соответствует эллипсоид вращения, центр которого смещен от начала координат.

Теория, основанная на линейной зависимости между касательными и нормальными напряжениями в октаэдрической плоскости, была предложена с соответствующим физическим обоснованием А.И. Боткиным. По этой теории для оценки прочности пластичных металлов необходима одна постоянная – коэффициент сцепления n , а для оценки прочности сыпучих материалов – коэффициент внутреннего трения m . По А.И. Боткину большинство реальных материалов ("хрупкие материалы") занимает промежуточное положение между пластичными и сыпучими. Поэтому для оценки их прочности необходимо знать две константы. Полагая, что разрушение наступает тогда, когда величина напряжения сдвига достаточна для преодоления сил трения и сцепления между частицами, А.И. Боткин представил условие прочности в виде линейной зависимости:

$$\tau_{\text{окт}} \leq m(n + \sigma_{\text{окт}}),$$

которое после выражения коэффициентов m и n через пределы прочности при растяжении и сжатии и переходе к главным напряжениям имеет вид:

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leq \frac{2\sqrt{2}\sigma_c \cdot \sigma_p}{\sigma_c + \sigma_p} - \frac{\sqrt{2}(\sigma_c - \sigma_p)}{\sigma_c + \sigma_p} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) является уравнением кругового конуса, ось которого равнонаклонена к осям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а вершина имеет координаты:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_c \cdot \sigma_p}{\sigma_c - \sigma_p}.$$

Более универсальной является гипотеза В. Бужинского, согласно которой предельное состояние материала наступает при достижении энергии, состоящей из энергии формоизменения и некоторой части энергии изменения объема, определенного критического значения, являющегося в

свою очередь линейной функцией шарового тензора напряжений. Эта гипотеза может быть представлена следующим уравнением:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\left(\frac{\sigma_c \cdot \sigma_p}{2\tau_c^2} - 1\right) \cdot (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + (\sigma_c - \sigma_p) \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c \cdot \sigma_p \quad (4.7)$$

При определенных соотношениях между константами, найденными из опыта на растяжение, сжатие и чистый сдвиг, предельная поверхность может обращаться в любую из поверхностей вращения:

сферу (при $\tau_c = \sqrt{\frac{\sigma_p \cdot \sigma_c}{2}}$), эллипсоид (при $\tau_c > \sqrt{\frac{\sigma_p \cdot \sigma_c}{3}}$), параболоид
(при $\tau_c = \sqrt{\frac{\sigma_p \cdot \sigma_c}{3}}$), круговой цилиндр (при $\tau_c = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$ и $\sigma_c = \sigma_p$),
двупольный гиперболоид (при $\frac{2\sigma_p \cdot \sigma_c}{\sqrt{3}(\sigma_p + \sigma_c)} < \tau_c < \sqrt{\frac{\sigma_p \cdot \sigma_c}{3}}$), круговой конус
(при $\tau_c = \frac{2\sigma_p \cdot \sigma_c}{\sqrt{3}(\sigma_p + \sigma_c)}$), однополюсный гиперболоид (при $\tau_c < \frac{2\sigma_p \cdot \sigma_c}{\sqrt{3}(\sigma_p + \sigma_c)}$).

Таким образом, уравнение (4.7) более общее уравнение поверхностей вращения второго порядка, а гипотеза В. Бужинского содержит в себе как частные случаи все предложенные энергетические теории вида (4.4).

Приведенные теории, интерпретируемые различными поверхностями, при сравнении с экспериментальными данными показывают, что для каждой гипотезы есть области напряженных состояний, в которых они наиболее хорошо согласуются с опытом. Концепция о невозможности описания предельного состояния материалов одним уравнением наиболее ярко выражена в теории прочности Н.Н. Давиденкова – Я.Б. Фридмана.

Таким образом, если для пластичных изотропных (беспористых) материалов за условие наступления предельного состояния с достаточным приближением может быть принято условие Мизеса, то для хрупких материалов трудно отдать предпочтение какой-либо из разработанных теорий. Использование этих теорий для оценки предельного состояния порошко-

вых сред, изменяющих в процессе нагружения свое состояние от сыпучего до практически беспористого, требует специального экспериментального исследования. Построение предельных поверхностей на основе экспериментально определенных механических характеристик таких материалов позволяет выявить форму поверхностей, а также более ясно представить закономерности влияния напряженного состояния на сопротивление деформированию среды при нагружении.

4.2. ПАРАМЕТРЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Г.С. Писаренко и А.А. Лебедев изобразили в цилиндрической системе координат параметры напряженного состояния, определяющие форму предельной поверхности. Причем поворот осей координат X , Y , Z произведен так, чтобы одна из них совпала с диагональю пространства напряжений (гидростатическая ось). Если такой осью является ось X , то переход осуществляется по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{\sqrt{6}}Z, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}X - \frac{2}{\sqrt{6}}Z, \\ \sigma_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{\sqrt{6}}Z,\end{aligned}\tag{4.8}$$

из которых можно получить и обратную связь:

$$\begin{aligned}X &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \\ Y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 - \sigma_2), \\ Z &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(\sigma_1 - \sigma_2).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Тогда, как видно из рис. 4.1, цилиндрические координаты l , r и α будут следующими:

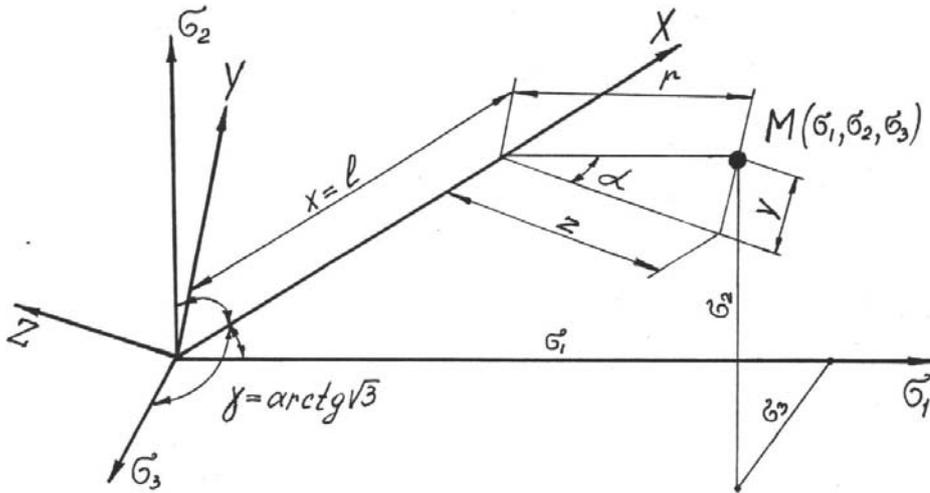


Рис. 4.1. Геометрическая схема пространства напряжений

$$l = X + \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

$$r = \sqrt{Y^2 + Z^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}, \quad (4.10)$$

$$\alpha = \text{arcctg} \frac{Z}{Y} = \text{arcctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \right).$$

Из соотношений (4.10) видно, что координаты введенной цилиндрической системы имеют четкий механический смысл. Так, координата l связана с октаэдрическим нормальным (средним) напряжением:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_o,$$

а следовательно, с энергией объемной деформации. Координата r связана с октаэдрическим касательным напряжением:

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

или любой другой величиной, которая с точностью до постоянного коэффициента равна $\tau_{\text{окт}}$. Угол α связан с параметром Лоде:

$$\mu_{\sigma} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_2},$$

т.е. характеризует вид девиатора напряжений.

Таким образом, форма предельной поверхности, а следовательно, и ее свойства увязываются с тремя параметрами состояния: $\sigma_{окт}$, $\tau_{окт}$ и μ_{σ} .

Уравнение этой поверхности может быть записано в виде:

$$F(\tau_{окт}, \sigma_{окт}, \mu_{\sigma}) = 0 \quad (4.11)$$

Обратная связь между параметрами $\sigma_{окт}$, $\tau_{окт}$ и μ_{σ} , входящими в (4.11), и главными компонентами тензора напряжений может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{окт} + \frac{3 - \mu_{\sigma}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 + \mu_{\sigma}^2}} \cdot \tau_{окт}, \\ \sigma_2 &= \sigma_{окт} + \frac{\sqrt{2} \cdot \mu_{\sigma}}{\sqrt{3 + \mu_{\sigma}^2}} \cdot \tau_{окт}, \\ \sigma_3 &= \sigma_{окт} - \frac{3 - \mu_{\sigma}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 + \mu_{\sigma}^2}} \cdot \tau_{окт}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Из уравнений (4.11) следует, что энергетические теории прочности (пластичности), интерпретирующиеся в пространстве главных напряжений поверхностями вращения, являются функциями нормального и касательного октаэдрических напряжений, влияние вида девиатора напряжений ими не учитывается.

Будем считать, что предельная поверхность выпуклая, т.е. всегда лежит по одну сторону любой касательной к ней плоскости (или опорной плоскости, если поверхность имеет плоские участки). Требование выпуклости поверхности (соответствующее любой стадии деформирования) вытекает из постулата Драккера о неотрицательности приращения работы пластической деформации в процессе дополнительного нагружения. Из свойств выпуклости предельной поверхности естественно вытекает свойство непрерывности. При этом в общем случае предельная поверхность

может быть как регулярной (гладкой), так и сингулярной (имеющей ребра, грани).

Известно, что выпуклое тело пересекается с секущей его плоскостью по выпуклой фигуре. Учитывая также плавность предельной поверхности, приходим к выводу, что предельная кривая в девиаторной плоскости должна быть плавной выпуклой кривой.

Девиаторная плоскость:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \text{const} \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{окт}} = \text{const} \quad (4.13)$$

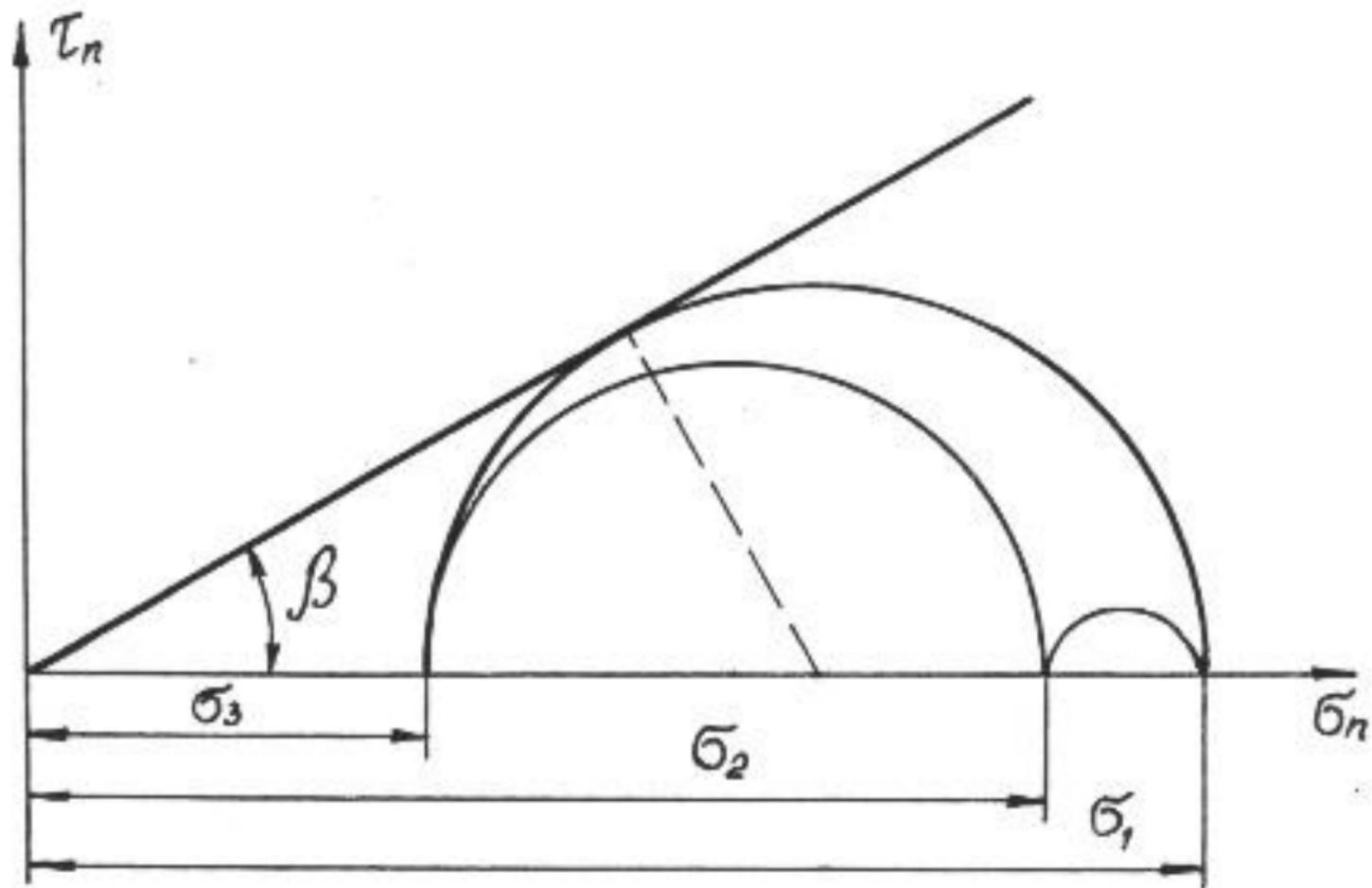
равнонаклонена к главным осям, т.е. перпендикулярна к диагонали пространства напряжений. Уравнение предельной кривой (следа предельной поверхности) в этой плоскости на основании (4.11) и (4.13) имеет вид:

$$f(\tau_{\text{окт}}, \mu_{\sigma}, m_i) = 0. \quad (4.14)$$

Величина $\sigma_{\text{окт}} = \text{const}$ отражается в уравнении (4.14) константами материала m_i . Поэтому при переходе от одного девиаторного сечения к другому параметры предельной кривой в общем случае изменяются таким образом, что проекции этих кривых на одну из девиаторных плоскостей представляются коаксиальными кривыми. Их взаимное расположение (внешнее и внутреннее) определяется характером влияния шарового тензора на значения компонентов девиатора напряжений, соответствующих предельному состоянию материала.

Учет вида девиатора напряжений при построении предельных поверхностей эквивалентно предположению о том, что наступление предельного состояния материала определяется не только октаэдрическим касательным напряжением, критическое значение которого зависит от уровня октаэдрического нормального напряжения (шарового тензора), но и от ориентации $\tau_{\text{окт}}$ по отношению к направлениям главных напряжений.

Таким образом, предельная поверхность в общем виде должна представлять собой равнонаклоненную к главным осям пространственную фигуру, имеющую в сечении, перпендикулярном к ее оси либо окружность



(поверхность вращения), либо более сложную замкнутую кривую, инвариантную к направлениям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Учитывая то, что в литературе практически отсутствуют экспериментальные данные прямых исследований предельных кривых в девиаторной плоскости, а также сложность осуществления таких экспериментов, особенно для порошковых материалов, в дальнейшем считаем, что предельные кривые в девиаторной плоскости могут быть представлены окружностями (либо близкими к ним фигурами вращения), т.е. с теоретической точки зрения придерживаемся энергетических концепций.

Вид предельной кривой в плоскости $\mu_\sigma = \text{const}$ в общем случае определяется уравнением:

$$f(\tau_{\text{окт}}, \sigma_{\text{окт}}, m_i) = 0 \quad (4.15)$$

Исследование этой кривой сводится к изучению характера изменения девиаторного сечения предельной поверхности при изменении шарового тензора. При этом из условий выпуклости предельной поверхности следует, что кривая (4.15) не может быть вогнутой по отношению к диагонали ОХ пространства напряжений (см. рис. 4.1).

О том, что при наложении гидростатического сжатия изменяются пластические свойства материалов, известно давно. Экспериментально установлено, что предельное состояние подавляющего большинства пластичных материалов (изменяющих объем при нагружении только упруго) удовлетворительно описывается критерием Мизеса (цилиндр, ось которого совпадает с пространственной диагональю). Опыты П. Бриджмена по деформированию чистых металлов, углеродистых и специальных сталей в условиях гидростатических давлений показали, что при малых давлениях пластичность практически не изменяется, однако, начиная с некоторого характерного для каждого материала давления, наблюдается рост пластичности. Величина “порогового давления” возрастает с увеличением прочности и твердости материалов, при этом объемная деформация практически остается упругой. Гидростатическое давление для таких материалов, уве-

личивая пластичность, не оказывает влияние на условие предельного состояния, т.е. на переход металла в пластическое состояние (цилиндр в пространстве главных напряжений остается цилиндром при изменении среднего напряжения).

Для малопластичных несжимаемых материалов (для них, как правило, $\sigma_c > \sigma_p$), размеры нормального сечения предельной поверхности несколько увеличиваются с увеличением гидростатического сжатия. При этом кривая (4.15) может быть заменена прямой наклоненной к девиаторной плоскости, хотя в ряде случаев такое упрощение является приближенным.

Значительно больший эффект оказывает шаровой тензор на прочностные и пластические свойства хрупких несжимаемых материалов. Для таких материалов размеры нормального сечения предельной поверхности также увеличиваются с увеличением гидростатического сжатия. Остается предельная поверхность со стороны сжатия открытой или ее уширение имеет определенные пределы пока не установлено.

Вопрос о форме предельной поверхности в области растягивающих напряжений может быть решен только после постановки соответствующих опытов. Если при трехосном равномерном растяжении разрушить беспористый материал практически невозможно, то с этой стороны поверхность должна быть разомкнутой. Если допускать возможность разрушения материала гидростатическим растяжением, то поверхность должна стягиваться в точку. Второе предположение представляется более приемлемым ввиду неизбежного наличия в реальном теле искажений кристаллической решетки, пор и других дефектов, которые в условиях идеально жесткого нагружения при трехосном равномерном растяжении ($\tau_{\text{окт}} / \sigma_{\text{окт}} = 0$) могут явиться причиной развития трещин под действием только нормальных напряжений.

Необратимое изменение объема еще в большей степени усложняет и без того сложный характер изменения девиаторного сечения предельной поверхности при изменении шарового тензора.

Пористой среде, рассматриваемой в порошковой металлургии, при нагружении, как правило, характерна сжимаемость, т.е. необратимое изменение объема в сравнительно широких интервалах изменения давлений. Как показано в разделе 3.3, для порошковых материалов могут применяться различного вида модели. Причем наиболее часто в последнее время для описания поведения такой среды используется условие текучести в форме эллипсоида вращения. Это условие обосновано теоретически и имеет экспериментальное подтверждение, как уже отмечалось, в основном для спеченных порошковых тел. Экспериментальные подтверждения этого условия для неспеченных порошковых материалов немногочисленны и то только для сравнительно высоких плотностей. Поэтому несомненный интерес представляют исследования, позволяющие осуществлять построение кривых предельного состояния на основе механических испытаниях реальных порошковых материалов различной плотности.

4.3. МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ КРИВЫХ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ПОРОШКОВЫХ НЕСПЕЧЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Механические характеристики, полученные для частных схем нагружения, могут служить основой для оценки напряженного состояния, а следовательно, и поведения материала в условиях произвольных схем нагружения. Как было показано в разделах 4.1 и 4.2, геометрической интерпретацией предельного состояния в пространстве главных напряжений служит поверхность нагружения, форму которой можно оценить по виду предельной кривой.

Экспериментальное построение предельных кривых возможно по точкам, которые должны соответствовать различным схемам нагружения материала. Научно обоснованной и экспериментально подтвержденной для пористых сред сравнительно высоких плотностей является эллипсоидальная предельная поверхность нагружения. Поэтому для оценки соответ-

вующих точек, позволяющих построить предельную кривую, примем за основу такую поверхность, точнее ее след на плоскости, проходящей вдоль гидростатической оси, в том виде, в каком она представлена у Б.А. Дряннова.

На рис. 4.2 показана геометрическая интерпретация условия текучести в виде сдвинутого вдоль гидростатической оси эллипса в координатах: интенсивность касательных напряжений τ и гидростатическое давление p ($p = -\sigma_0$) использовано для удобства расположения кривых в положительном квадранте). Скорость деформации на этой плоскости может быть представлена вектором с проекциями ε и η (ε – удельная скорость изменения объема, η – интенсивность скоростей деформации сдвига, ε и η – условно рассматриваются как алгебраические), а ее направление в соответствии с ассоциированным законом течения нормально к кривой текучести. Протяженность эллипса вдоль осей определяется пределами текучести (прочности) при гидростатическом сжатии p_s , равномерном всестороннем растяжении q_s и максимальном пластическом сдвиге τ_s , которые являются функциями состояния порошкового материала различной плотности.

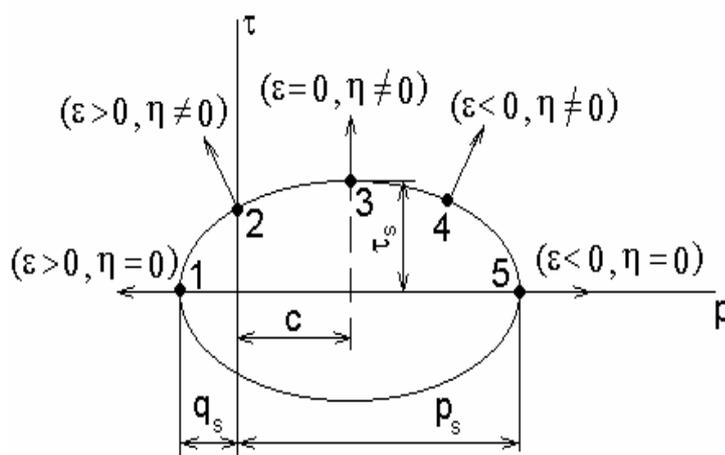


Рис. 4.2. Геометрическая интерпретация эллиптического условия текучести на плоскости p, τ и направление "вектора" (ε, η) в соответствующих точках

Сдвиг эллипса вдоль гидростатической оси (с) соответствует тому минимальному среднему давлению, выше которого возможно уплотнение. В этом случае его можно назвать пределом уплотнения.

Рассмотрим каждую точку, обозначенную цифрами на рис. 4.2, и соответствующий метод экспериментального определения ее координат.

1. Растяжение. Эксперименты по оценке напряженных состояний близких к равномерному всестороннему растяжению для порошковых неспеченных материалов трудно осуществимы. На основании экспериментальных результатов, полученных при одноосном растяжении, установлено (разд. 3.5), что хрупкое разрушение различных по природе и исходных физико-механических свойств порошковых неспеченных материалов происходит во всем исследованном интервале плотностей вследствие отрыва, т.е. под действием напряжения σ_1 . Это испытание дает оценку аутогезионной межчастичной прочности порошкового тела по направлению одной из главных осей. Считая неспеченное порошковое тело изотропным и учитывая его незначительную прочность при растяжении по сравнению со сжатием, с определенной долей условности принимаем экспериментальные данные, полученные при одноосном растяжении, соответствующие условию: $\sigma_o = \sigma_p, \tau = 0, \varepsilon > 0, \eta = 0$ (точка 1, рис. 4.2).

2. Сдвиг. Разрыхление порошкового тела, вызванное простым сдвигом (при $\sigma_o = 0$), так называемая дилатансия – особенность поведения порошковых материалов. Проведенные испытания на срез исследованных материалов подтверждают этот факт и для сравнительно широкого изменения плотности неспеченного порошкового тела. С некоторой долей приближения можно считать, что при испытаниях на срез порошковых материалов реализуется состояние чистого сдвига, которому для рассматриваемой модели соответствуют условия: $\sigma_o = 0, \tau = \tau_c, \varepsilon > 0, \eta \neq 0$ (точка 2, рис. 4.2).

3. Одноосное сжатие. Как установлено при проведении экспериментальных исследований (разд. 3.5), причиной разрушения порошковых неспеченных образцов при одноосном сжатии является межчастичный сдвиг по

поверхностям равнонаклоненным к направлению главной оси σ_3 . Эти результаты хорошо согласуются с экспериментальными результатами, полученными различными авторами. Причем ряду металлических порошковых материалов для сравнительно высоких плотностей разрушению предшествует некоторая пластическая деформация. Для этого вида нагружения интенсивность нормальных напряжений $\sigma_i = \sigma_3$, принимая $\sigma_3 = \sigma_c$, получаем: $\sigma_o = \sigma_c / 3$, $\tau = \sigma_c / \sqrt{3}$. При этом могут быть реализованы условия: $\varepsilon = 0$, $\eta \neq 0$ – пластическое течение до разрушения (точка 3, рис. 4.2) и $\varepsilon > 0$, $\eta \neq 0$ – разрушение сдвигом без пластического течения (точка 3 смещается левее, показанной на рис. 4.2).

4. Сжатие в закрытой матрице. Эта схема обеспечивает уплотнение порошкового материала от плотности утряски θ_y до сравнительно высоких плотностей. При $\theta \rightarrow 1$, как показано ранее (разд. 3.4), давление прессования $p_n \rightarrow \infty$ и схема сжатия в закрытой матрице становится близкой к схеме всестороннего сжатия. Сжатие порошкового материала в закрытой матрице реализует условие, при котором: $\varepsilon < 0$, $\eta \neq 0$ (точка 4, рис. 4.2). Так как при прессовании часть усилия расходуется на преодоление сил трения о стенки матрицы, то расчет σ_o и τ необходимо осуществлять с учетом коэффициента трения материала μ . Для проведения расчетов использованы следующие формулы: $\sigma_3 = p_n \cdot (1 - \mu \cdot \nu)$, $\sigma_o = \sigma_3 \cdot (1 + 2\nu) / 3$, $\tau = \sigma_3 \cdot (1 - \nu) / \sqrt{3}$, где p_n – давление прессования порошкового материала в закрытой матрице; σ_3 – главное напряжение в направлении прессования; ν – коэффициент бокового давления. В соответствии с исследованиями Н.Н. Павлова произведение $\mu \cdot \nu$ определяется по формуле:

$\mu \cdot \nu = (0,5 - 0,8\nu_o) \cdot n_k + 0,8\nu_o$, причем для большинства порошковых материалов в расчетах можно принять: $\nu_o = 0,2$ и $\mu = 0,5$. Расчет n_k производится по формуле (1.13).

5. Всестороннее сжатие. Этому виду испытаний должны соответствовать условия: $\sigma_0 = p_r$, $\tau = 0$, $\varepsilon < 0$, $\eta = 0$. Экспериментальная реализация этих условий для порошковых материалов осуществлялась при осевом давлении пуансоном эластичного формующего элемента (полиуретана), заключенного в жесткую матрицу. По данным К.К. Мертенса способом эластостатического прессования можно обеспечить близкую к всестороннему равномерному сжатию схему напряжений, что позволяет оценить p_r .

Таким образом, разработанная методика, в основу которой положены экспериментальные данные испытаний порошковых материалов при различных схемах нагружения, обеспечивает практическое осуществление построения зависимостей τ и p для различных плотностей. Вид этих зависимостей позволяет оценивать форму поверхностей предельного состояния порошковых тел определенной плотности в пространстве главных напряжений.

4.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВИДА КРИВЫХ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПЛОТНОСТИ НЕСПЕЧЕННЫХ ПОРОШКОВЫХ ТЕЛ

Построение кривых предельного состояния проведено на основе экспериментальных данных, полученных при исследовании порошковых материалов. Для этого использованы аппроксимационные уравнения, устанавливающие зависимости характеристик порошковых тел при растяжении, сдвиге и сжатии от относительной плотности, а также определяющие процесс сжатия этих материалов в закрытой матрице.

Определение соответствующих рассмотренной выше методике точек для фиксированных значений плотности проведено с заданным шагом ее изменения. В приложении (см. табл. П.1–П.6) приведены исходные данные для построения кривые предельного состояния. На рис. 4.3 приведены такие кривые для порошкового материала ПЖ4М2, представленные номо-

граммой, определяющей соотношения между τ и p в интервале изменения плотности от θ_y до $\theta_k = 1$. Для остальных рассмотренных порошковых материалов вид зависимостей качественно идентичен.

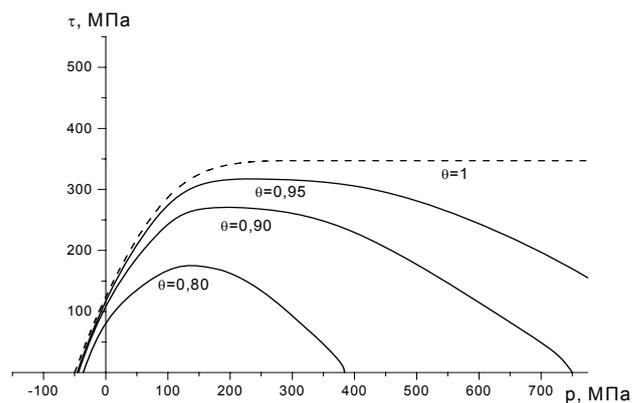
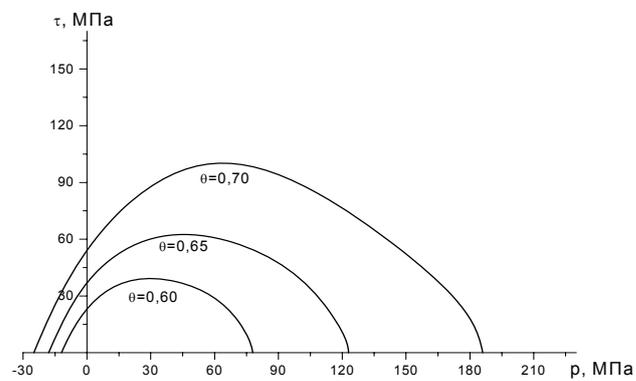
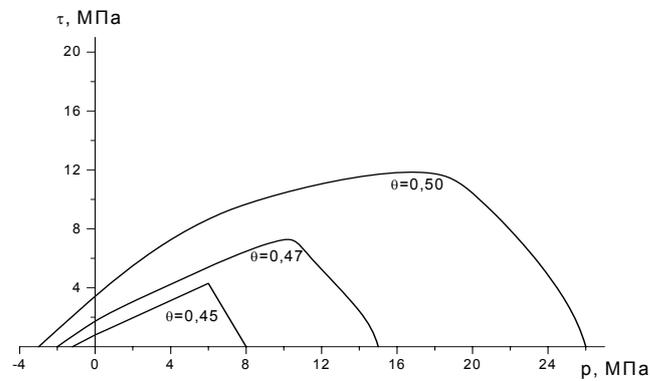


Рис. 4.3. Вид предельных кривых для материала различной плотности из ПЖ4М2

Как следует из приведенных данных, вид предельных кривых, а следовательно, и соответствующая им форма предельных поверхностей в про-

странстве главных напряжений с увеличением плотности (т.е. при изменении состояния среды от сыпучего до условно беспористого) плавно изменяются.

Конической поверхности с замкнутым дном соответствуют плотности, не превышающие нижних границ формуемости исследованных порошковых материалов (θ_{ϕ} в табл. 3.2). При увеличении $\theta > \theta_{\phi}$ коническая поверхность плавно трансформируется. Эллипсоидальной поверхности соответствуют плотности $\theta = 0,5 \div 0,6$ для материалов: ПЖ4М2, ПЖ-губки, ПМС1 и ПНК2; для материалов: Fe_3O_4 , САС1, АКД12 – этой поверхности соответствует плотность $\theta = 0,8$. Превышение указанных значений плотностей приводит к плавному вытягиванию эллипсоидальной поверхности вдоль гидростатической оси, которая в пределе (при $\theta \rightarrow 1$) условно трансформируется в незамкнутую цилиндрическую поверхность. Эта закономерность наблюдается по направлению увеличения средних напряжений сжатия, в направлении растяжения предельные кривые, а следовательно, и соответствующие им поверхности нагружения остаются замкнутыми, при этом интенсивность их вытягивания на всем интервале изменения плотностей значительно ниже. Такое поведение неспеченной порошковой среды даже при сравнительно высоких плотностях связано, как показано ранее, с неадекватностью влияния межчастичных границ на сопротивление материала сжимающим и растягивающим напряжениям.

Таким образом, разнсопротивляемость порошковых неспеченных материалов растяжению и сжатию, обусловленная структурными особенностями таких сред, существенным образом влияет на их поведение при нагружении, причем форма поверхностей нагружения определяется интервалом плотности материала и трансформируется при уплотнении. Полученные результаты являются экспериментальным отражением степени влияния исходных физико–механических свойств неспеченной порошковой среды и ее плотности на форму соответствующих поверхностей предельного состояния.

Области уплотнения и разрыхления разделяются соответствующим средним напряжением, равным пределу уплотнения – c , значение которого определяет максимальную интенсивность касательных напряжений τ_s . При достижении τ_s возможно пластическое течение неспеченного порошкового тела без изменения объема ($\varepsilon = 0$). Причем протяженность таких участков при увеличении гидростатического сжатия, как следует из приведенной номограммы, расширяется при $\theta \rightarrow 1$.

Т а б л и ц а 4.1

Механические характеристики порошковых материалов

Порошковый материал	Аппроксимирующая формула
ПЖ4М2	$p_s = 7349\theta^3 - 10822\theta^2 + 5678\theta - 1026,5$ $\tau_s = 1148,9\theta^2 - 953,5\theta + 201,4$ $c = 1837\theta^3 - 2488,9\theta^2 + 1278,7\theta - 234$
ПЖ-губка	$p_s = 4098,1\theta^3 - 4370,1\theta^2 + 1602,8\theta - 176,2$ $\tau_s = 592\theta^3 - 203,2\theta^2 + 1,25\theta + 4,64$ $c = 1072\theta^3 - 1035,2\theta^2 + 374,46\theta - 40,56$
ПМС1	$p_s = 1638\theta^3 - 1426\theta^2 + 486,6\theta - 58,44$ $\tau_s = 444\theta^3 - 363\theta^2 + 154,6\theta - 23,5$ $c = 475\theta^3 - 410\theta^2 + 169,3\theta - 24,5$
ПНК2	$p_s = 1229\theta^3 + 826,3\theta^2 - 779,2\theta + 129$ $\tau_s = -1173,5\theta^3 + 2760,6\theta^2 - 1364,9\theta + 190,2$ $c = -223,9\theta^3 + 1201\theta^2 - 629,9\theta + 89,2$
САС1	$p_s = 32833\theta^3 - 67475\theta^2 + 47487,95\theta - 11327,81$ $\tau_s = 3333,3\theta^3 - 7750\theta^2 + 6661,67\theta - 1941,62$ $c = 5333,3\theta^3 - 11700\theta^2 + 9386,67\theta - 2590,75$
АКД12	$p_s = 4731\theta^3 - 9042,15\theta^2 + 6379,87\theta - 1543,48$ $\tau_s = -2739\theta^3 + 5948,35\theta^2 - 3796,64\theta + 756,8$ $c = -166\theta^3 + 37,9\theta^2 + 550\theta - 275,08$

Примем, что τ_s и c изменяются подобно зависимостям τ_c и σ_c от нуля при плотности утряски порошкового материала до значений, соответствующих условно беспористому материалу. Тогда, определяя по номограммам эти значения, можно дать математическую аппроксимацию их зави-

симостей от плотности для всего рассматриваемого интервала. Полученные таким образом механические характеристики τ_s и c , а также предел текучести при гидростатическом сжатии p_s (p_T) и равномерном всестороннем растяжении q_s (σ_p) позволяют сформулировать условие пластичности на всех стадиях уплотнения.

Зависимости механических характеристик исследованных порошковых материалов от относительной плотности носят единообразный характер и различаются лишь численными значениями. В табл. 4.1 приведены результаты аппроксимации механических характеристик исследованных порошковых материалов. Поскольку величина q_s мала по сравнению с остальными механическими характеристиками и не может быть определена достаточно точно, ее аппроксимация не приводится.

Уравнения, приведенные в табл. 4.1, позволяют определять условия уплотнения (при пластическом течении) и разрыхления (разрушения без пластического формоизменения) порошкового материала для произвольной схемы напряженного состояния. Так уплотнению (и пластическому течению) соответствует условие:

$$\tau \leq \tau_s, \quad p \geq c ;$$

разрыхлению соответствует условие:

$$\tau < \tau_s, \quad p < c .$$

(4.16)

Полученные результаты позволяют качественно оценивать поведение исследованных порошковых материалов различных исходных физико-механических свойств для произвольных схемах нагружения, а также выполнять моделирование процессов пластического деформирования этих материалов в рамках теории пластического течения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В процессе уплотнения порошковой среды усилия между частицами передаются через контакты, поэтому анализ контактного взаимодействия позволяет глубже проникнуть в суть достаточно сложных явлений, сопровождающих этот процесс. Причем давление уплотнения порошковых материалов при определенных условиях может быть рассчитано на основе деформации самих частиц в рамках так называемой дискретно-контактной теории.

Дискретно-контактная теория достаточно точно реализуется для процессов уплотнения порошков со сравнительно крупными частицами простой формы в замкнутых объемах. При этом теоретические модели, приводящие к практически любому из известных уравнений прессования, основаны на определенной идеализации процесса уплотнения в замкнутом объеме. Все подобного рода зависимости следует рассматривать как различные аналитические аппроксимации экспериментальных кривых. Причем в связи с существенным различием механизмов уплотнения порошковых материалов на различных стадиях деформирования физического уравнения, описывающего единой зависимостью плотность среды от давления и основанного на контактном взаимодействии частиц, получить не представляется возможным. Поэтому проблематичным остается установление связи между плотностью и приложенным давлением на стадиях неустойчивых пространственных структур и объемного течения материала (особенно в незамкнутых объемах).

Эти недостатки менее проблематичны для континуальных теорий уплотнения, изучающих деформацию достаточно больших совокупностей частиц. Тем не менее, исследования характера дискретного взаимодействия между частицами порошков в зависимости от свойств материала, их формы, размеров и гранулометрического состава позволяют более точно описать физический процесс уплотнения при разработке континуальных моделей деформирования порошковой среды с учетом ее структуры.

Органическое сочетание элементов континуального описания и структурного моделирования способствует дальнейшему развитию теории уплотнения порошковых материалов. В связи с этим существенно важна информация о поведении реальных порошковых материалов, полученная на основе структурно–феноменологических исследований процессов деформирования.

Феноменологический подход механики сплошных сред является физически и математически вполне корректным при правильном выделении уровней исследования. Он применен для описания интегральных свойств макрооднородной среды в рамках детерминированной модели, отражающей наиболее существенные обобщенные характеристики, определяемые непосредственно из опыта. При этом механизмы процессов уплотнения могут быть рассмотрены на основе изучения поведения структурных элементов среды. В этой связи в качестве основного структурного элемента выделена частица порошкового материала, а процессам деформирования определены соответствующие уровни: микроуровень, межчастичный (структурный) и макроуровень.

Порошковая среда представляется некоторой совокупностью частиц определенного размера и формы, в зависимости от которых реализуется соответствующая исходная плотность. Процесс уплотнения порошковых материалов условно разделен введением критической плотности ($\theta_{кр}$) на этапы структурного и пластического деформирования. Определением $\theta_{кр}$ осуществлена оценка протяженности этапов деформирования и механизмов, лежащих в основе процессов уплотнения порошковых материалов различных физико–механических свойств. Интенсивность контактного взаимодействия на межчастичном уровне, определяющая механические свойства консолидированных порошковых тел, оценена с помощью коэффициента контакта, соответствующего определенной относительной деформации всего порошкового тела и его частиц.

В макроконтинуальной модели уплотнение порошковых материалов рассматривается как процесс последовательной реализации различных механизмов деформирования на соответствующих уровнях, поэтому в нем качественно отражена структурная особенность порошковой среды.

Исследования показали, что при уплотнении формируется структура, соответствующая определенной плотности и зависящая от исходных характеристик порошковых материалов (размера, формы частиц и гранулометрического состава). Порошковая среда при выделении элемента достаточно большого по сравнению с размерами частиц (макроуровень рассмотрения) представляется непрерывно распределенной квазиоднородной средой. При этом с увеличением плотности, хотя и увеличивается общая контактная поверхность межчастичного взаимодействия, тем не менее сохраняются межчастичные границы. Они и определяют структурную неоднородность на межчастичном (структурном) уровне и физико–механические характеристики порошковых материалов различной плотности, которые оценены испытанием макрообразцов при различных схемах нагружения.

Анализ экспериментальных данных испытаний порошковых материалов определил существенные количественные различия их прочности при растяжении и сжатии. Эти различия для неспеченных порошковых материалов практически всего интервала исследованной плотности обусловлены различным влиянием на прочность контактных межчастичных площадок и наличия контактных дефектов. При сжатии через контакт осуществляется передача давлений всему пористому каркасу, при этом контакт работает как бездефектный. При растяжении эффективное сечение пористого образца, сопротивляющегося действующим напряжениям, определяется величиной таких контактов, прочность которых во многом зависит от наличия дефектов. Подобная картина имеет место и при сопротивлении неспеченного материала срезу.

В практически исследованном диапазоне изменения плотности образцы из порошковых материалов либо хрупко разрушались без заметных

следов макропластической деформации (при сжатии, растяжении и срезе), либо пластически деформировались со сравнительно небольшой остаточной деформацией (не более $6\div 8\%$) без заметного упрочнения (только металлические порошковые материалы сравнительно высокой плотности при сжатии).

Механические характеристики порошковых материалов различной плотности, полученные для частных схем нагружения, и анализ общих свойств поверхностей нагружения различных материалов явились основой для разработки методики построения кривых предельного состояния. Разработанная методика и ее практическая реализация при построении кривых предельного состояния исследованных порошковых материалов позволили установить форму поверхностей предельного состояния, ее зависимость от относительной плотности при произвольных схемах нагружения отличных от схем уплотнения в замкнутых объемах.

По виду предельных кривых установлено, что форма предельных поверхностей с увеличением плотности (от сыпучего состояния до условно беспористого) плавно трансформируется. При этом конической поверхности с замкнутым дном соответствуют плотности, не превышающие нижних границ формуемости исследованных в работе порошковых материалов. При увеличении $\theta > \theta_{\phi}$ коническая поверхность плавно переходит в эллиптическую, которая при превышении определенных плотностей вытягивается вдоль направления гидростатического сжатия и в пределе (при $\theta \rightarrow 1$) условно трансформируется в разомкнутую цилиндрическую поверхность. В направлении средних напряжений растяжения поверхности замкнуты для всего интервала плотностей.

Результаты исследований позволяют качественно оценивать поведение порошковой среды различной плотности при произвольных схемах нагружения, а также выполнять моделирование процессов пластического деформирования этих материалов в рамках теории пластического течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бальшин М.Ю.** Научные основы порошковой металлургии и металлургии волокна. - М.: Металлургия, 1972. 336 с.
2. **Жданович Г.М.** Теория прессования металлических порошков. - М.: Металлургия, 1969. 264 с.
3. **Павлов Н.Н.** Прессование и прокатка металлических порошков. – Л.: ЛПИ, 1980. 63 с.
4. **Соколовский В.В.** Статика сыпучей среды. - М.: Физматгиз, 1960, 243с.
5. Феноменологические теории прессования порошков /Штерн М.Б., Сердюк Г.Г., Максименко Л.А. и др. - Киев: Наук. думка, 1982. 140 с.
6. **Друянов Б.А.** Прикладная теория пластичности пористых тел. - М.: Машиностроение, 1989. 168 с.
7. **Степаненко А.В., Исаевич Л. А., Харлан В.Е.** Обработка давлением порошковых сред. - Минск: Наука и техника, 1993. 167 с.
8. **Писаренко Г.С., Лебедев А.А.** Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1976. 415 с.
9. **Рудской А.И.** Физико-механический анализ процессов холодной пластической деформации пористых материалов. – СПб.: СПбГТУ, 1998. 146 с.
10. **Цеменко В. Н.** Деформирование порошковых сред. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. 104 с.
11. **Рыбин Ю.И.** Теория уплотнения порошковых материалов. Теория и математическое моделирование процессов обработки давлением уплотняемых материалов. СПб.: Из-во СПбГПУ, 2002. 110 с.

Глава 3. КОНТИНУАЛЬНЫЙ ПОДХОД ПРИ ОПИСАНИИ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

3.1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ ГРУНТОВ И СТАТИКА СЫПУЧИХ СРЕД

Механика грунтов формировалась в основном на континуальном рассмотрении среды. Модели, используемые в механике грунтов, во многом способствовали развитию континуальных представлений и в порошковой металлургии. Рассмотрим их более подробно.

Основополагающие представления о реакции грунта на прикладываемую к нему нагрузку были развиты Кулоном еще в 1773 г. По первоначальным представлениям Кулона перемещения в массе грунта происходят в том случае, если по какой-либо поверхности (сдвига) возможно смещение (тангенциальный разрыв скорости) одной части массива относительно другой. На этой граничной поверхности действуют силы сухого трения, удовлетворяющие условию Кулона:

$$|\tau_n| = \sigma_n \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad (3.1)$$

где τ_n , σ_n – касательная и нормальная компоненты напряжений, действующих на поверхностях сдвига (разрыва скоростей), β – угол трения на поверхности раздела.

Расчет предельного равновесия (или условия движения) при известной поверхности скольжения сводился к составлению уравнений статики жесткого недеформированного тела. Первоначально поверхность скольжения (в обычном случае плоских задач) задавалась в виде прямой линии, затем была предложена цилиндрическая форма поверхности скольжения и т.д. Расчет считался завершенным при нахождении такой поверхности сдвига, на которой предельное состояние возникало при наименьших нагрузках.

Позже были развиты представления о предельном состоянии не вдоль отдельной поверхности сдвига (скольжения), а в каждой точке сплошной среды. Этот шаг был сделан в работах Треска и Сен-Венана по пластичности металлов. Эта теория формулировалась также и в связи с приложениями в механике грунтов.

В основу построения определяющих уравнений пластичности, связывающих скорости пластических деформаций и напряжения, был положен тот факт, что пластическое состояние возникает, если касательное напряжение τ_n на площадке, характеризуемой нормалью n , становится равным некоторому предельному значению (условие Треска):

$$|\tau_n| = K \quad (3.2)$$

Этот предел достигается на тех же площадках, где в силу пластической несжимаемости (металла) имеется максимум скорости сдвиговых деформаций. Эти площадки называют площадками скольжения. Определяющие зависимости Сен-Венана представляются в виде пропорциональности тензоров-девиаторов скоростей деформации ε_{ij} и напряжений σ_{ij} , к ним добавляется условие несжимаемости:

$$\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \cdot \delta_{ij} \right) = \dot{\lambda} \cdot \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ij} \cdot \delta_{ij} \right), \quad (3.3)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij} \cdot \delta_{ij} = 0, \quad (3.4)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; $\dot{\lambda}$ – неотрицательная скалярная функция, которая отлична от нуля, если выполнено предельное условие (3.2); $i, j = 1, 2, 3$.

Таким образом, добавление уравнения (3.2) к уравнениям равновесия (движения) и определяющим связям (3.3), (3.4) соответствует появлению дополнительной искомой функции: $\dot{\lambda}(x_i)$, где x_i – декартова система координат, $i = 1, 2, 3$.

При формулировке условий предельного равновесия грунтов заменяется условие Треска (3.2) на условие Кулона (3.1). Тогда кулоновский угол трения β на индивидуальной поверхности разрыва скоростей приобретает

новый смысл – угла внутреннего трения в каждом элементе массы грунта, находящемся в предельном состоянии. Соответственно в этом элементе существуют две площадки, на которых выполнено условие (3.1). Эти площадки называют площадками предельного равновесия, они наклонены к оси наибольшего нормального напряжения под углом $\pm (\pi/4 - \beta/2)$, т.е. угол между самими площадками в общем случае отличен от 90 град. (они могут и не совпадать с площадками скольжения).

Важным этапом было введение О. Мором кругов напряжений на плоскости τ_n, σ_n (рис.3.1) и данная им интерпретация предельного состояния Кулона (3.1) как прямой, касающейся наибольшего круга напряжений. Эту прямую называют прямой Кулона–Мора на плоскости τ_n, σ_n .

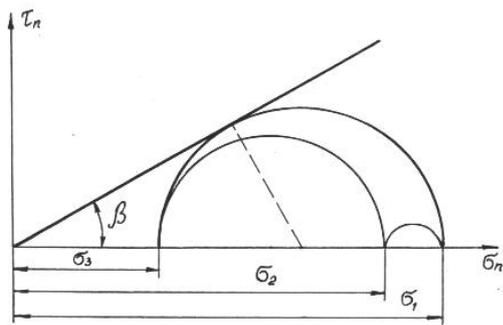


Рис. 3.1. Прямая Кулона–Мора на плоскости τ_n, σ_n .

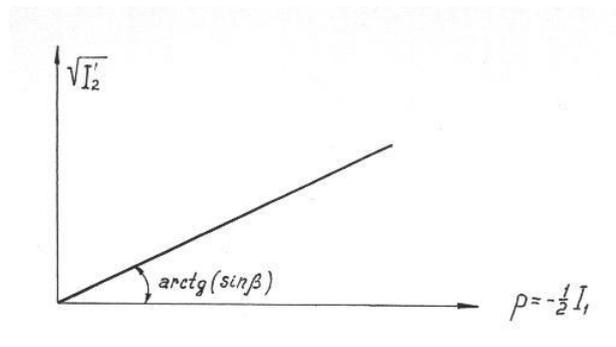


Рис. 3.2. Прямая Кулона–Мора на плоскости $I_1, \sqrt{I_2'}$.

Можно показать, что в плоском случае условие (3.1) может быть представлено в виде:

$$\sqrt{I_2'} + I_1 \cdot \sin \beta = 0, \quad (3.5)$$

где $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2$ – первый инвариант тензора напряжений;

$$I_2' = 1/3(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \tau_{12}^2 - \text{второй инвариант тензора-девиатора.}$$

Отсюда на плоскости $I_1, \sqrt{I_2'}$ прямая Кулона–Мора (3.1) остается прямой (рис. 3.2).

Отметим, что условию Треска (3.2) соответствует также прямая, но параллельная гидростатической оси p :

$$\sqrt{I_2} = K \quad (3.6)$$

О. Мор показал также, что общее условие предельного равновесия можно интерпретировать как огибающую кругов напряжений, соответствующих разрушению элемента среды. Таким образом, понятие предельного состояния грунта и понятие его прочности оказались тождественными.

О. Рейнольдс в 1885 г. экспериментально обнаружил фундаментальное кинематическое свойство внутренней структуры зернистой массы, названное им дилатансией, т.е. свойство изменять объем при сдвиге. Если в металлах такие объемные деформации проявляются лишь при многократных циклических нагружениях, то для грунтов они являются главной характерной чертой и соответствуют изменению пустотности (пористости).

Введение предельного условия Кулона оказалось достаточным для решения статически определимых плоских задач, за тем немногим исключением, когда нужно было привлекать соображения о знаке действия сил сухого трения, противодействующего относительному смещению частиц грунта. Соответствующий разработанный В.В. Соколовским раздел механики грунтов получил наименование статики сыпучих сред, в соответствии с которым в плоском случае уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \cdot \sin \alpha_x, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \cdot \cos \alpha_x,$$

где ρ – плотность материала, α_x – угол наклона оси x к горизонтальной линии.

Уравнения (3.7) дополняются условием предельного равновесия:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y + 2H)^2 \cdot \sin^2 \beta,$$

которое объединяет в себе условие (3.5) и (3.6), так как помимо истинно кулоновского трения учитывает сцепление H .

Введение сцепления связано с тем, что экспериментально измеряемые прямые Кулона–Мора (рис. 3.1, 3.2) не проходят через начало координат. Они пересекают ось τ_n при $\sigma_n = 0$ в точке $K = H \cdot \operatorname{tg}\beta$. В этом случае условие (3.1) записывается в виде:

$$|\tau_n| = \sigma_n \cdot \operatorname{tg}\beta + K \quad (3.8)$$

В монографии В.В. Соколовского «Статика сыпучих сред» дана общая формулировка краевых задач, допускающих статически определимые решения, а также обзор задач статики сыпучей среды. Во всех этих решениях не требуется вычислять поля скоростей, однако предполагается, что характеристики полей напряжений и являются линиями скольжения в традиционном смысле Кулона.

Статика сыпучих сред, рассматривая предельное состояние с точки зрения начала разрушения порошкового материала сдвигом, не объясняет процесс уплотнения, так как в ее основе используется как и в теории пластичности металлов условие несжимаемости. Она может быть использована для оценки предельных состояний порошковых материалов, приводящих к разрушению либо началу течения в бункерных устройствах, однако для нахождения определяющих уравнений нельзя ограничиваться рассмотрением статического равновесия частиц, а нужно изучать их перемещения.

3.2. АССОЦИИРОВАННЫЙ ЗАКОН ТЕЧЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ДИЛАТАНСИОННЫЕ МОДЕЛИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Известно, что в классической теории пластичности, используемой для описания процессов деформирования металлов, определяющие связи можно представить в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3.9)$$

где Ψ – пластический потенциал.

При этом в качестве пластического потенциала целесообразно брать саму функцию нагружения: $\Psi = \Phi(\sigma_{ij}) \equiv I_2'$, определяющую поверхность текучести Треска или Мизеса. Тогда (3.9) и (3.3) будут эквивалентны.

Соотношение (3.9) получило при $\Psi = \Phi$ название ассоциированного закона течения (в том смысле, что ориентация вектора скорости пластической деформации должна быть привязана к форме самой поверхности текучести).

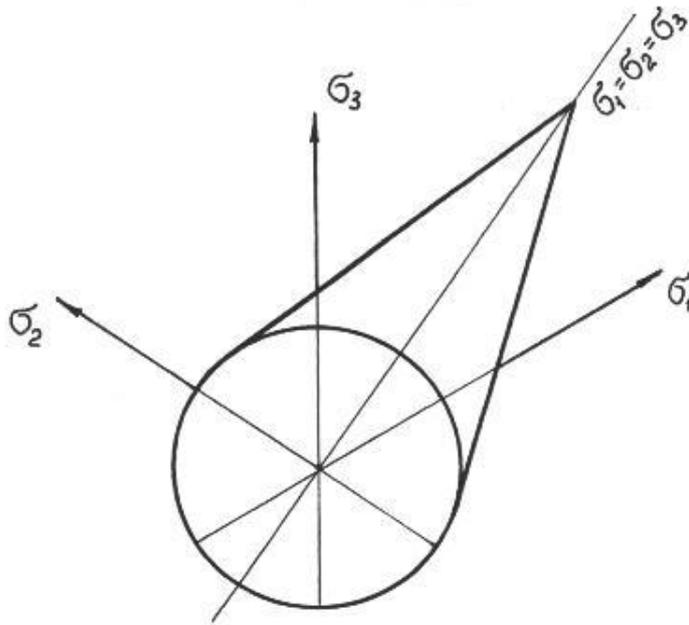


Рис. 3.3. Конус Мизеса-Шлейхера
в пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Друккером и Прагером были выполнены теоретические построения, формально распространяющие концепцию ассоциированного закона (3.9) на условие текучести Кулона. Они записали условие текучести в виде:

$$\Phi = \alpha \cdot I_1 + \sqrt{I_2'} = K, \quad (3.10)$$

где α и K – положительные константы для каждой точки материала,

$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ – первый инвариант тензора напряжений,

$I_2' = 1/2 \cdot s_{ij} s_{ij}$ – второй инвариант девиатора напряжений s_{ij} ,

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \cdot (I_1 \cdot \delta_{ij}).$$

В пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ этому условию соответствует конус Мизеса–Шлейхера (рис. 3.3).

Применение к условию (3.10) ассоциированного закона в форме (3.9) позволило получить следующие определяющие связи:

$$\varepsilon_{ij} = \dot{\lambda} \left[\alpha \cdot \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{I_2'}} \right]. \quad (3.11)$$

Из (3.11) следует, что пластические деформации должны сопровождаться увеличением объемных деформаций, если только $\alpha \neq 0$, так как:

$$\varepsilon \cong I_1 = 3\alpha \cdot \dot{\lambda}. \quad (3.12)$$

Можно по-другому интерпретировать рост объемных пластических деформаций, если найти из (3.11) интенсивность скорости сдвига и подставить в (3.12), тогда:

$$I_1 = 6\alpha \cdot \sqrt{I_2'}. \quad (3.13)$$

Это означает пропорциональность приращений деформаций объема и сдвига. Соответствующий коэффициент пропорциональности принято называть скоростью дилатансии. Для модели Друккера и Прагера скорость дилатансии равна 3α .

Если совместить пространство главных напряжений и пространство главных деформаций и построить вектор, то согласно (3.11) он будет ортогонален поверхности $\Phi = \text{const}$. Поскольку конус расширяется в направлении возрастающих значений сжимающих напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, то объемные деформации оказываются одного знака (имеет место только разрыхление), что видно также из условия (3.13) в силу $\alpha > 0$.

При плоской деформации условие (3.10) сводится к обычному условию Кулона-Мора:

$$\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \cdot \sin \beta - H \cdot \cos \beta = 0 \quad (3.14)$$

При этом:

$$\alpha = \frac{\sqrt{3} \sin \beta}{\sqrt{3 + \sin^2 \beta}}; \quad K = \frac{\sqrt{3} H \cdot \cos \beta}{\sqrt{3 + \sin^2 \beta}}.$$

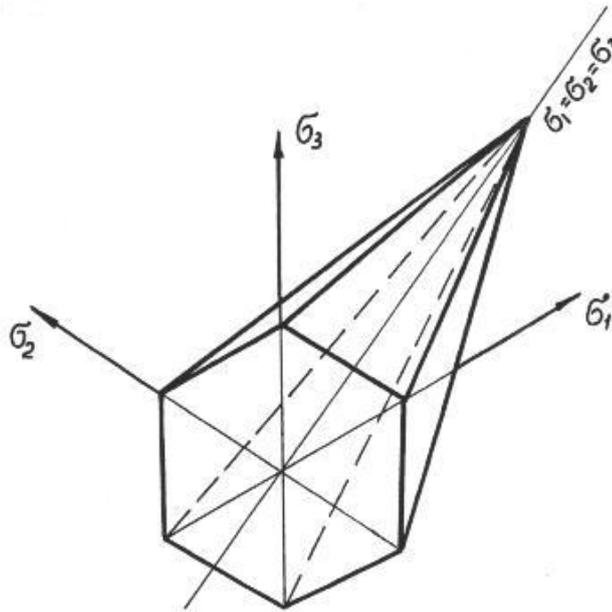


Рис. 3.4. Пирамида Кулона-Мора

в пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Предельное условие Кулона–Мора (3.14) можно обобщить также на случай трехмерного напряженного состояния, рассматривая его как уравнение плоскости в пространстве $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Оно дополняется в этом случае аналогичными условиями для двух других пар главных напряжений σ_2, σ_3 и σ_1, σ_3 . Пересечение этих плоскостей образует поверхность текучести Треска–Кулона. При этом пластическое состояние возникает в пористой среде, если:

$$\omega \cdot (\sigma_3 - \sigma_1) = 2H \cdot \cos \beta - (\sigma_3 + \sigma_1) \cdot \sin \beta, \quad (3.15)$$

$$\omega = 1 \text{ при } \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 ,$$

$$\omega = -1 \text{ при } \sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 ,$$

или же, если выполнено подобное условие текучести для других пар главных напряжений. В пространстве главных напряжений условию Треска–Кулона соответствует шестигранная пирамида, равно наклоненная к осям координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рис. 3.4).

Шилд предложил использовать условия (3.15) в качестве пластического потенциала (3.9), т.е. строить векторы приращений пластических деформаций, ортогональные поверхности пирамиды Треска–Кулона. Отметим, что для точек на гранях пирамиды одна из главных компонент скорости пластической деформации оказывается всегда равной нулю, поскольку одно из главных напряжений не входит в уравнение, определяющее плоскость грани пирамиды. При использовании ассоциированного закона течения пользуются правилом, согласно которому скорость пластической деформации в точках пересечения двух граней пирамиды определяется как линейная комбинация скоростей деформаций смежных граней $\Phi_1=0$ и $\Phi_2=0$, т.е.:

$$\varepsilon_{ij} = \dot{\lambda}_1 \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma_{ij}} + \dot{\lambda}_2 \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma_{ij}} , \quad (3.16)$$

где уже два коэффициента $\dot{\lambda}_1$ и $\dot{\lambda}_2$ оказываются дополнительными искомыми величинами. Соответственно система уравнений также дополняется двумя уравнениями пересекающихся граней. В результате для пирамиды Треска–Кулона на грани, определяемой условием текучести для σ_1 и σ_2 , имеем:

$$\varepsilon_1 = \dot{\lambda}_1 \cdot (1 + \sin \beta), \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = -\dot{\lambda}_1 \cdot (1 - \sin \beta), \quad (3.17)$$

а для смежной грани (определяемой аналогичным условием, но для σ_3 и σ_1):

$$\varepsilon_1 = \dot{\lambda}_2 \cdot (1 + \sin \beta), \quad \varepsilon_2 = -\dot{\lambda}_2 \cdot (1 - \sin \beta), \quad \varepsilon_3 = 0, \quad (3.18)$$

тогда скорость пластической деформации на ребре (линии их пересечения) будет:

$$\varepsilon_1 = (\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2) \cdot (1 + \sin \beta), \quad \varepsilon_2 = -\dot{\lambda}_2 \cdot (1 - \sin \beta), \quad \varepsilon_3 = -\dot{\lambda}_1 \cdot (1 - \sin \beta). \quad (3.19)$$

Параметры $\sin \beta$ и H , определяющие условие (пирамиду) Треска–Кулона, могут быть выражены через параметры α и K условия (конуса) Мизеса–Губера следующим образом:

$$K = H \cdot \frac{2\sqrt{3} \cos \beta}{3 \pm \sin \beta}, \quad \alpha = \frac{2 \sin \beta}{3 \pm \sin \beta}. \quad (3.20)$$

Выбор знака в этих выражениях зависит от того, описывает конус пирамиду или же он вписан в нее. Различие выражений коэффициентов α и K через угол внутреннего трения β и сцепление H отражает различный характер интерпретации случая плоской деформации в приведенных здесь двух теориях. Для обеих теорий характерна неизменность знака объемных деформаций, т.е. неограниченное уменьшение плотности среды при непрерывном пластическом течении. Поэтому использование в качестве определяющих связей ассоциированного закона наиболее эффективно позволяет применять теоремы об оценках предельного состояния для расчетов грунтовых массивов лишь на устойчивость.

Опытные данные о поведении сравнительно рыхлых материалов при больших пластических деформациях способствовали введению замкнутых в пространстве главных напряжений поверхностей текучести. Мотивы построения подобных моделей с замкнутыми поверхностями текучести были следующими. Во-первых, исходной была концепция ассоциированного закона течения, а в применении к поверхности текучести Кулона он определял только чрезвычайно интенсивное разрыхление при сдвиге и исключал уплотнение, характерное для упрочняющихся рыхлых сред. Во-вторых, на основе опытов по сжатию песка считалось, что гидростатическое сжатие приводит к сравнительно большим объемным остаточным деформациям.

В модели Дженике и Шилда предполагалось, что плотность сыпучей среды является функцией гидростатического давления, а потому пирамида Треска–Кулона замыкалась "дном" – плоскостью, перпендикулярной оси гидростатического сжатия. В начальном состоянии сцепление N материала считалось равным нулю, так что вершина пирамиды находилась в точке $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$. С ростом давления среда уплотняется и "дно" соответственно перемещается (параллельно самому себе) вдоль оси $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Угол трения β остается при этом неизменным, но одновременно происходит трансляционное смещение граней и вершины конуса (рис. 3.5). Этому соответствует линейный закон изменения эффективного сцепления:

$$K \cdot \operatorname{ctg} \beta = a \cdot (\sigma_0 + \sigma), \quad (3.21)$$

где a, σ_0 – постоянные.

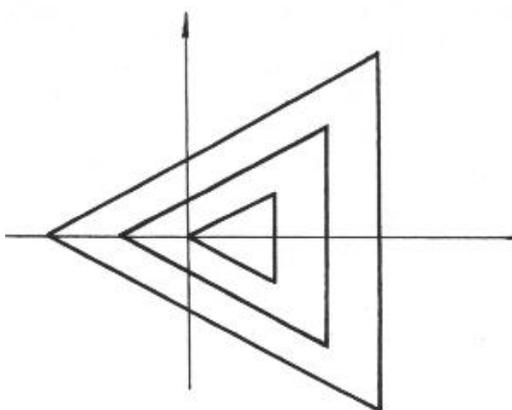


Рис. 3.5. Модель Дженике и Шилда
(схема трансляционного смещения)

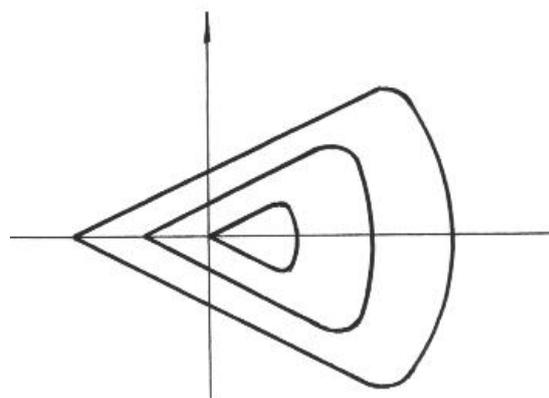


Рис. 3.6. Модель Друккера, Гипсона,
Хенкеля

В соответствии с этой моделью точкам на боковой поверхности соответствует разрыхление, на "дне" – уплотнение, а угловой точке – практически несжимаемость.

Друккер, Гибсон, Хенкель предложили дополнить конус Мизеса–Шлейхера выпуклым "дном", причем "дно" гладко смыкалось с боковой поверхностью конуса. С ростом давления "дно" конуса также перемещает-

ся параллельно самому себе, но нормаль к боковой поверхности своей ориентации не меняет (рис. 3.6).

Ассоциированный закон применяется и к боковой поверхности (где дает разрыхление), и ко "дну" (где определяет уплотнение).

Сах предложил взять в качестве поверхности текучести лемнискату вращения (вокруг оси гидростатического давления). В его модели учитывалось расширение этой поверхности, что отражало упрочнение среды при ее деформации. При малых давлениях лемниската весьма близка к прямой линии, при высоких – ее наклон несколько уменьшается, что отражает экспериментальный факт о снижении угла трения с ростом давления (в отличие от двух предыдущих моделей). Согласно этой модели при промежуточном режиме происходят сдвиговые и объемные деформации одновременно (т.е. можно учесть скорость дилатансии как функцию нормали к поверхности лемнискаты).

Известны модели Д.Д. Ивлева и В.В. Додукаленко, Сандлера, С.С. Григоряна, которые являются обобщениями модели Дженике и Шиллда, они разработаны с целью лучшего удовлетворения опытным данным. Подробный анализ моделей данного типа отражен в работах В.Н. Николаевского. Он анализирует модели как с ассоциированным, так и неассоциированным законом течения применительно к грунтам. В основу моделей с неассоциированным законом течения в механике грунтов положены также коэффициенты, независимо определяемые экспериментально, – угол трения и скорость дилатансии. Неассоциированная модель обладает достаточной общностью и при разумном подборе определяющих связей может включать в себя модели, приведенные выше (с ассоциированным законом течения), однако это несколько усложняет и без того довольно сложный в практическом приложении математический аппарат. Альтернатива моделям с неассоциированным законом течения может быть связана лишь с развитием теории непрерывного нарастания пластических деформаций,

что характерно для процессов уплотнения, используемых широко в порошковой металлургии.

3.3. ОСОБЕННОСТИ КОНТИНУАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ СЖИМАЕМЫХ СРЕД

При обычных давлениях компактные (беспористые) металлы не приобретают необратимых деформаций объема, поэтому их условие текучести не зависит от среднего напряжения σ_0 . Поверхность нагружения таких металлов не замкнута, она представляет собой поверхность с образующими, параллельными октаэдрической оси. Примерами могут служить цилиндр Мизеса и призма Треска, размеры которых определяются пределами текучести материалов на сдвиг.

Под действием гидростатического давления пористые металлические тела, металлические порошковые (непеченные) тела и металлические порошки приобретают необратимые деформации объема, что подтверждается их уплотнением при изостатическом прессовании. На микроскопическом уровне это объясняется затеканием материала в поры. Условия текучести таких тел зависят от среднего напряжения, а поверхности текучести замкнуты.

А.М. Лаптевым, а также Б.А. Друяновым обобщены условия текучести и соответствующие им поверхности нагружения, предложенные рядом авторов для описания процессов пластической деформации порошковых и пористых сред. На рис.3.7 показаны соответствующие им поверхности нагружения в пространстве главных напряжений.

В работах С.С. Григоряна, В.Л. Колмогорова, О.В. Романа использовано условие текучести вида:

$$\Phi_1 = 3I_2' - \varphi = 0, \quad (3.22)$$

$$\Phi_2 = I_1 - \psi = 0,$$

где φ и ψ – функции относительной плотности θ .

Такому условию пластичности соответствует поверхность в виде кругового цилиндра с двумя плоскими доньями (рис. 3.7,а). Ось цилиндра равнонаклонена к осям главных напряжений. Это условие является упрощенным и может быть использовано для выяснения качественной картины течения. Соответствующую модель уплотняемого тела можно назвать моделью с независимыми механизмами сдвига и уплотнения.

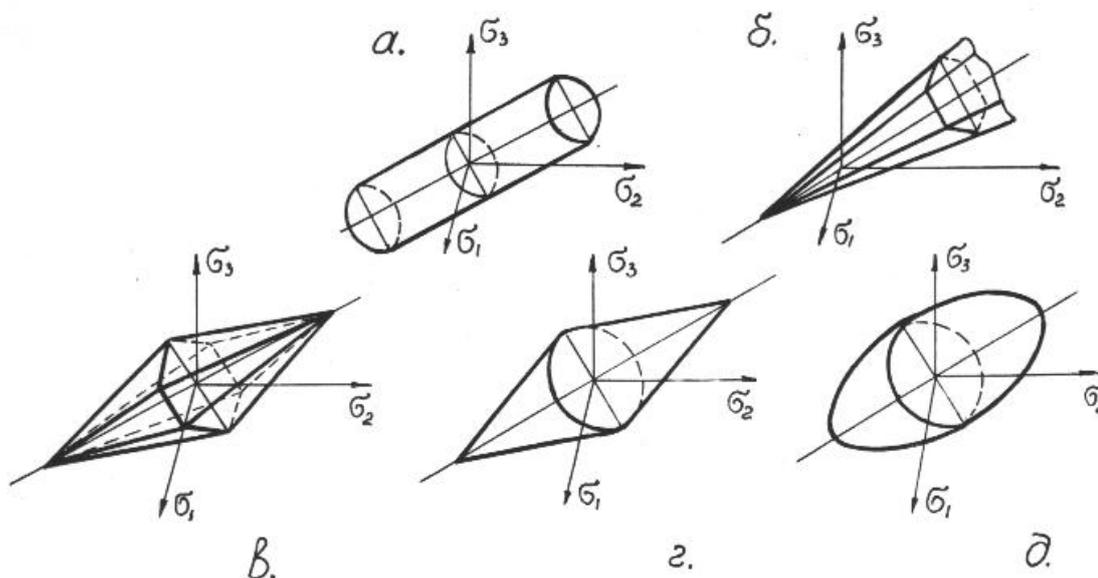


Рис. 3.7. Поверхности нагружения в пространстве главных напряжений, используемые в теории пластичности сжимаемых сред

В порошковой металлургии широко применяются кроме металлических порошков порошки неметаллических материалов (оксиды, карбиды т.д.), а также различные смеси пластичных и непластичных материалов. Уплотнение такого рода материалов происходит за счет переупаковки частиц порошка или их дробления, что возможно при наличии сдвигающих макронапряжений либо значительных контактных микронапряжений, превышающих предел прочности материала частиц. В этом случае поверхность текучести либо незамкнута со стороны отрицательных значений среднего напряжения (что соответствует девиаторным необратимым де-

формациям), либо замкнута "донышком" (что соответствует объемному сжатию). Такие поверхности подобны моделям Мизеса–Шлейхера или Кулона–Треска, разработанные в механике грунтов, о них уже упоминалось в предыдущем параграфе. К ним наиболее близка модель В.Е. Перельмана (рис. 3.7,б), который использовал обобщенный закон Кулона–Мора для анализа процесса уплотнения порошков. По его мнению, интенсивность приращения плотности зависит не от пористости, а от угла внутреннего трения и является функцией давления уплотнения и степени деформации. Таким образом, вид функции пластичности определяется не пористостью, а разрывом свойств по границам структурных элементов, и ее характер в соответствии с обобщенным условием пластичности Кулона–Мора должен отражать повышение прочности с ростом сжимающих напряжений на поверхностях скольжения. Однако использование ассоциированного закона течения с целью описания пластических деформаций уплотняемых материалов на основе этой модели по утверждению самого автора не представляется возможным.

Подобное условие текучести применили Т. Табата, С. Масаки и Ю. Абе. Однако они учли влияние на форму поверхности нагружения знака среднего напряжения. Это условие имеет общий вид:

$$\begin{aligned}
 & I_1 \leq 0 \\
 & \Phi = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \mp (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \cdot \sin \beta - 2K \cdot \cos \beta = 0, \quad (3.23) \\
 & I_2 > 0
 \end{aligned}$$

где σ_{\max} , σ_{\min} – максимальное и минимальное главные напряжения, β – угол внутреннего трения, K – константа материала (коэффициент сцепления).

Этому условию соответствует поверхность пластичности, образованная двумя пирамидами (пирамидальное условие, рис. 3.7,в).

Этими авторами предложено и второе условие, выражаемое уравнениями:

$$I_1 \leq 0$$

$$\Phi = (3I_2)^{\frac{1}{2}} \mp \eta \cdot I_1 - K = 0, \quad (3.24)$$

$$I_1 > 0$$

где η и K – коэффициенты, зависящие от относительной плотности; K – является функцией напряжения текучести твердой фазы пористого тела σ_T , причем эта зависимость в обоих условиях (3.23) и (3.24) одинакова и имеет вид:

$$K = \theta^n \cdot \sigma_T, \quad (3.25)$$

где n – экспериментально определяемая константа.

Условию (3.24) в пространстве главных напряжений соответствует поверхность пластичности в виде двух конусов, равнонаклоненных к осям координат (рис. 3.7,г). Причем различие в высоте конусов (пирамид) может отражать разное сопротивление пористого материала растяжению и сжатию.

Коническое и пирамидальное условия текучести можно рассматривать как одно из возможных обобщений условий Мизеса и Треска на случай уплотняемого тела, так как в пределе (при $\theta \rightarrow 0$) эти поверхности должны расширяться в цилиндр или призму. Критериям (3.23) и (3.24) присущи как достоинства, так недостатки, при этом они имеют экспериментальное подтверждение.

Существенным этапом в развитии представлений о механизме пластического деформирования пористых материалов явилось создание моделей, в которых поверхности нагружения принимаются в виде эллипсоида вращения (рис. 3.7,д). В основу этого были положены результаты экспериментальных исследований поведения пористых материалов (в основном спеченных) при различных условиях нагружения.

Конкретный вид эллиптической поверхности нагружения зависит от принятых при ее разработке реальных представлений о пористом материале, как о физическом объекте. Широко используются модели, полученные

на основе представлений о пористой среде как о вязком материале (В.В. Скороход). Другим вариантом является модель, построенная на представлениях о пористой среде как об упругопластическом материале (Б. А. Друянов, М.Б. Штерн). Если представления о вязкости пористого материала имеют реальную основу для горячих методов пластической деформации, то холодное деформирование связывают обычно с проявлением упругопластических свойств среды. Поверхности нагружения, характерные для упругопластических моделей эллиптического типа, имеют общий вид:

$$I_2' + \alpha^2 \cdot I_1^2 = \delta^2 \cdot K^2, \quad (3.26)$$

где I_2' и I_2 – инварианты девиатора и тензора напряжений, α и δ – функции пористости, K – предел текучести на сдвиг материала основы.

При $\alpha = 0$ и $\delta = 1$ из (3.26) получается условие пластичности Мизеса.

Конкретный вид представленных в (3.26) функций плотности можно определить теоретически или экспериментально. Теоретическое определение возможно на основе решения частных задач расчета напряженного состояния структурных ячеек пористого материала в условиях чистого сдвига или гидростатического нагружения. Экспериментальное определение возможно с помощью простых экспериментов в условиях одноосного или плоского напряженного состояния. Процессу уплотнения будет соответствовать последовательность вложенных друг в друга эллипсов, большая полуось которых совпадает с гидростатической осью. Предельным случаем является цилиндр, образующие которого параллельны гидростатической оси. Таким образом, пористость или относительная плотность в моделях типа (3.26) играет роль упрочняющего фактора. Это явление носит название геометрического упрочнения, т.е. увеличения сопротивления деформации пористого материала за счет изменения пустотности (пористости).

В модели, предложенной В.В. Скороходом, единственным упрочняющим параметром является относительная плотность. Однако более точный анализ поведения пористых металлических материалов при холодной деформации требует необходимости учета такой характеристики, как

деформационное упрочнение материала матрицы. Тогда общий вид поверхности пластичности можно представить следующим образом:

$$\Phi = (\sigma_{ij}, \theta, \chi) = 0, \quad (3.27)$$

где θ – относительная плотность, χ – параметр упрочнения материала матрицы.

Поверхность вида (3.27) независимо от изменения плотности пористого материала расширяется при упрочнении материала матрицы и, наоборот, сжимается после снятия наклепа.

Уравнение (3.27) может быть представлено в осях $\sqrt{3I_2'}$ и $1/3I_1$ в следующем виде:

$$\frac{3I_2'}{a^2} + \frac{1/9I_1^2}{b^2} = 1, \quad (3.28)$$

где $a = \delta K$ – малая полуось, $b = \delta \cdot K / \alpha$ – большая полуось, причем функции δ и α должны обладать следующими свойствами:

$$\lim_{\theta \rightarrow 1} \delta = 1, \quad \lim_{\theta \rightarrow 1} \alpha = 0. \quad (3.29)$$

Тогда в предельном случае, соответствующем компактному состоянию материала ($\theta = 1$), уравнение (3.29) вырождается в уравнение цилиндра, а это значит, что эллиптическое условие пластичности переходит в пределе в условие пластичности Мизеса. Следовательно, условие Мизеса является условием пластичности для матрицы пористого материала. При упрочнении матрицы в процессе деформации цилиндр Мизеса также расширяется. Поверхность пластичности пористого материала вложена в поверхность пластичности своей матрицы. При этом положение поверхности пластичности матрицы является предельным для поверхности пористого материала. Вектор скорости деформации, определяемый ассоциированным законом течения, ортогонален к поверхности пластичности (3.28), поэтому при изменении ее формы и приближению к цилиндрической, он также будет менять свое направление в процессе деформации.

Еще одним важным свойством деформируемого пористого пластического материала является дилатансия. Это явление, т.е. связь сдвиговой и объемной деформации, характерное для сыпучих сред, нашло как теоретическое, так и экспериментальное обоснование и для уплотняющейся пористой пластичной среды. Поверхность пластичности (3.28) является геометрическим местом точек напряженных состояний пористого материала, соответствующих его переходу в пластическое состояние. Дилатансия имеет место в каждой точке этой поверхности пластичности, за исключением точки ее пересечения с гидростатической осью, а также линии пересечения с девиаторной плоскостью, т.е. при гидростатическом нагружении и чистом сдвиге. В первом происходит только изменение объема, во втором – только формоизменение.

Таким образом, физико–механический анализ поведения пористых материалов при пластической деформации на основе модели (3.28), учитывающей сопротивление деформации за счет изменения и упрочнения материала основы, позволяет оценить их макроскопическое напряженно–деформированное состояние.

Экспериментальные и теоретические исследования различных авторов показали, что эллиптическое условие пластичности вида (3.28) хорошо описывает реальное поведение малопористых спеченных порошковых заготовок. Причем в подавляющем большинстве теоретических исследований предполагалось, что поведение пористой среды при растяжении и сжатии идентичны, т.е. эллипс симметричен относительно как гидростатической оси, так и девиаторной плоскости.

В работах Б.А. Дрянова и В.З. Мидукова использовано условие пластичности со сдвинутым в направлении сжатия вдоль гидростатической оси эллипсом. Такое условие позволяет учитывать различие физико–механических свойств пористых сред при растяжении и сжатии, что существенно для порошковых и высокопористых материалов. Однако экспериментальных данных о пригодности использования условий пластичности

эллиптического типа для процессов уплотнения порошковых материалов (пластичных и малопластичных), высокопористых сред представлено крайне мало.

К основным уравнениям теории пластичности сжимаемых сред относятся также и уравнения связи. На основе условия пластичности того или иного типа можно получить физические уравнения связи напряжений и деформаций, пользуясь законом течения ассоциированным с поверхностью нагружения (3.9). Множитель Лагранжа $\dot{\lambda}$ в (3.9) является неопределенным. Существуют различные методики определения $\dot{\lambda}$. В частности, для спеченной пористой среды они приведены в работах Р. Дж. Грина, а также А.К. Григорьева и А.И. Рудского. Для неспеченной – обоснованы в работах Ю.И. Рыбина.

В теории пластичности несжимаемых сред нередко используется переход от скоростей деформации к деформациям (деформационная теория). Такой переход допустим, если все компоненты тензора напряжений изменяются пропорционально какому-либо монотонно возрастающему параметру. Этот метод использовался и в ряде работ при уплотнении порошковых материалов, например, для расчета процессов прессования методом конечных элементов. Однако в работах М.Б. Штерна и А.М. Лаптева показано, что для уплотняемого тела, описываемого в рамках моделей эллиптического типа, такой переход практически невозможен.

Одним из наиболее важных свойств модели пластического тела с гладкой и выпуклой поверхностью нагружения является возможность выражения всех компонентов тензора напряжений через скорости деформации. Указанное свойство позволяет формулировать задачу о пластическом уплотнении материалов в кинематических переменных. Поэтому данная модель позволяет получать кинематически замкнутые задачи и в большинстве работ использована связь напряжений и скоростей деформаций (теория течения).

Существующие теории позволяют установить физические уравнения связи для различных модельных представлений о пористой среде. Однако успешное применение этих уравнений для расчета технологических задач зависит от полноты информации о реологических параметрах, входящих в условие пластичности и физические уравнения связи, их экспериментальное определение – важный этап в исследовательском процессе.

3.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА УПЛОТНЕНИЯ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ С ЧАСТИЦАМИ РАЗЛИЧНОГО РАЗМЕРА И ФОРМЫ

В качестве объектов экспериментальных исследований использованы порошковые материалы различных способов получения. В табл.3.1 приведен их гранулометрический состав, а на рис. 3.8 микрофотографии, позволяющие судить о форме частиц исследованных порошковых материалов.

Как следует из приведенных данных, рассматриваемые порошковые материалы представляют собой частицы из компактных материалов (кроме ПЖ-губки), существенными факторами отличия которых являются форма и размер частиц.

В практике порошковой металлургии к основным исходным технологическим характеристикам порошковых материалов относят насыпную плотность ρ_n и плотность утряски ρ_y . Определение этих характеристик регламентировано ГОСТ 19440-74 и ГОСТ 25279-82 соответственно.

Оценкой межчастичного взаимодействия порошковых материалов служит коэффициент межчастичного трения, который является и косвенной оценкой их текучести (сыпучести). Коэффициент межчастичного трения представляет собой тангенс угла внутреннего (межчастичного) трения β_1 . Экспериментальное определение этого угла возможно при помощи не-

сложного приспособления, схема которого изображена на рис. 3.9. Подложка без перегородки (использовалась стальная подложка) этого приспособления позволяет определять и угол внешнего трения β_2 порошкового материала.

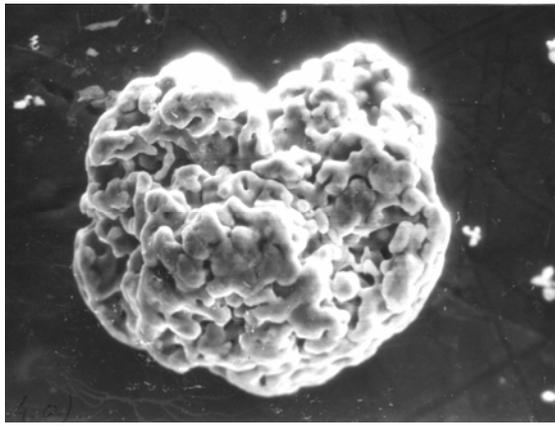
Для определения ρ_n , ρ_y , β_1 и β_2 проводилось по 3÷5 опытов. В табл. 3.2 представлены среднестатистические характеристики исследуемых порошковых материалов, насыпная плотность и плотность утряски приведены как относительные величины, т.е. $\theta_n = \rho_n / \rho_k$, $\theta_y = \rho_y / \rho_k$, где ρ_k – плотность компактного материала.

Т а б л и ц а 3.1

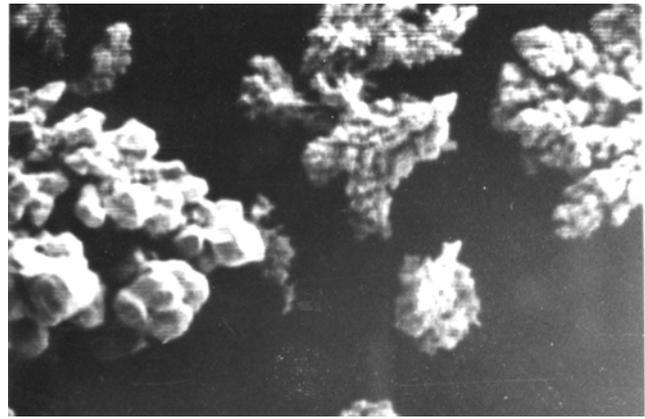
Гранулометрический состав порошковых материалов

Размер фракций	Порошковый материал							
	ПЖ4М2	ПЖ-губка	Fe ₃ O ₄ -1**	Fe ₃ O ₄ -2	ПМС1	ПНК2	САС1	АКД 12
мкм	% содержание фракций							
+ 1000	0,12	2,11	-	-	-	-	-	-
- 1000 + 400	0,33	10,30	-	-	-	-	0,17	0,03
- 400 + 200	0,60	17,10	13,10	2,90	0,07	-	5,12	31,03
- 200 + 160	5,13	25,20	15,0	5,50	0,11	-	9,36	22,14
- 160 + 100	50,54	19,63	12,0	8,80	0,82	-	40,64	19,95
- 100 + 63	28,06	12,81	17,50	10,60	5,47	-	21,33	12,13
- 63 + 50	7,87	6,54	32,34	23,64	11,03	-	10,63	10,05
- 50	7,35	6,31	10,06	48,56	82,50	100,0	12,75	4,67
Основная фракция, мкм:	160-50	400-50	200-50	63-40	63-10	0,1-10	100-40	200-50

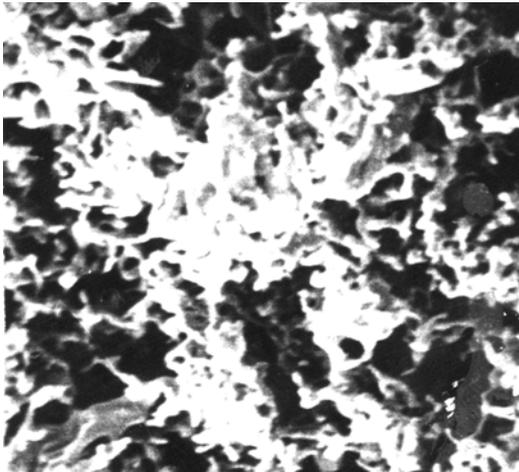
** Fe₃O₄-1 получен из Fe₃O₄-2 частичным отсевом мелкой фракции.



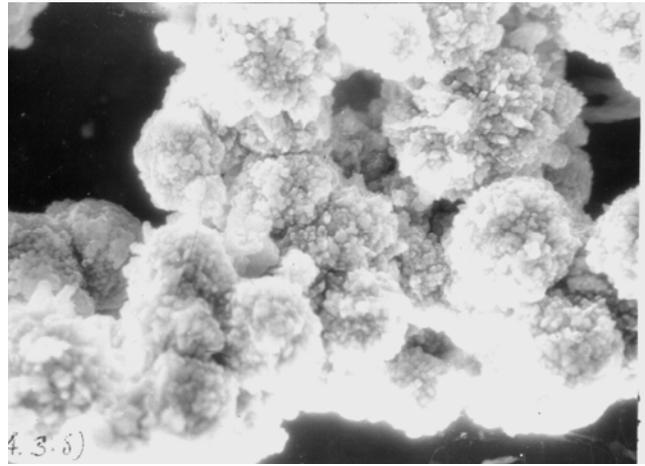
а) ×250



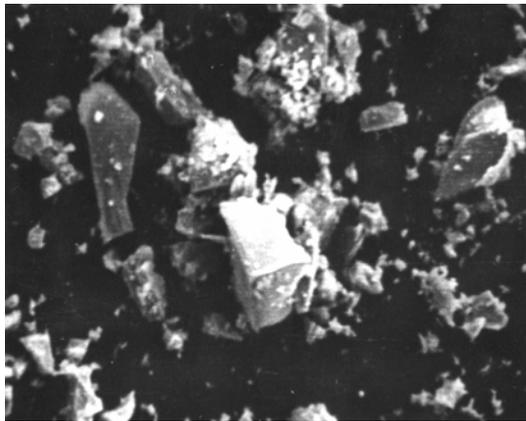
г) ×500



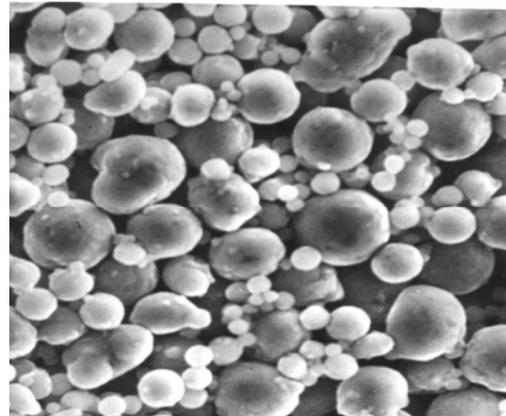
б) ×1000



д) ×1000

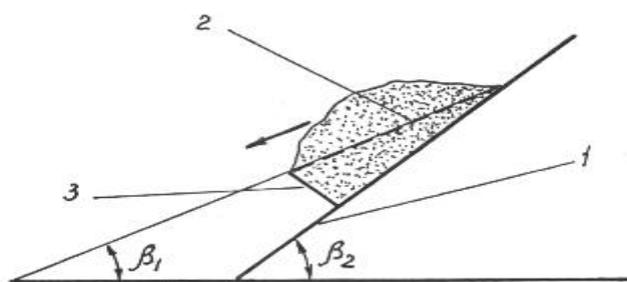


в) ×500



е) ×500

Рис. 3.8. Форма частиц порошковых материалов: а – ПЖ4М2; б – ПЖ-губка; в – Fe_3O_4 ; г – ПМС1; д – ПНК2; е – САС1 и АКД12



1—подложка; 2—плоскость сдвига слоя порошка; 3—перегородка.

Рис. 3.9. Схема приспособления для определения углов β_1 и β_2 порошковых материалов

Формуемость порошковых материалов рассматривается как их способность сохранять форму при уплотнении. Формуемость в соответствии с ГОСТ 25280-82 определяется минимальной плотностью θ_{ϕ} , при которой уплотненный образец при извлечении его из пресс-формы не рассыпается. Значения θ_{ϕ} приведены в табл. 3.2, которые в совокупности с θ_n , θ_y , β_1 и β_2 , представленными в этой же таблице, комплексно характеризуют каждый из рассматриваемых порошковых материалов.

Т а б л и ц а 3.2

Экспериментальные и расчетные характеристики материалов

Порошковый материал	θ_n	θ_y	β_1 град.	β_2 град.	θ_{ϕ}	$\theta_{кр}$	$\Delta\theta_c$	$\Delta\theta_n$
ПЖ4М2	0,35	0,42	36,4	31	0,44	0,58	0,16	0,42
ПЖ-губка	0,12	0,14	49,9	38	0,25	0,86	0,72	0,14
Fe ₃ O ₄ -1	0,44	0,58	42,2	33	0,61	0,58	0	0,42
Fe ₃ O ₄ -2	0,34	0,48	54,2	34	0,52	0,52	0,04	0,48
ПМС1	0,19	0,24	37,5	38	0,30	0,76	0,52	0,24
ПНК2	0,12	0,18	48,4	34	0,25	0,82	0,64	0,18
САС1	0,51	0,60	35,3	43	0,63	0,60	0	0,40
АКД12	0,49	0,52	29,7	35	0,56	0,52	0	0,48

Уплотняемость в качестве технологической оценки свойств определяется по ГОСТ 25280-82 и представляет собой зависимость плотности порошкового материала от величины сжимающей нагрузки. Экспериментально эту зависимость получают при прессовании исследуемого порошкового материала в замкнутой пресс-форме.

На рис. 3.10 приведены кривые уплотнения порошковых материалов, полученные после статистической обработки экспериментальных данных (3÷5 образцов на точку) прессования цилиндрических образцов ($h/d=0,6$) на прессе ПСУ-50. Погрешность экспериментов при доверительной вероятности 0,95 составляла не более $\pm 2\%$. Экспериментальные кривые экстраполированы в точки, соответствующие плотностям утряски исследованных порошковых материалов, и точки их условно компактного состояния.

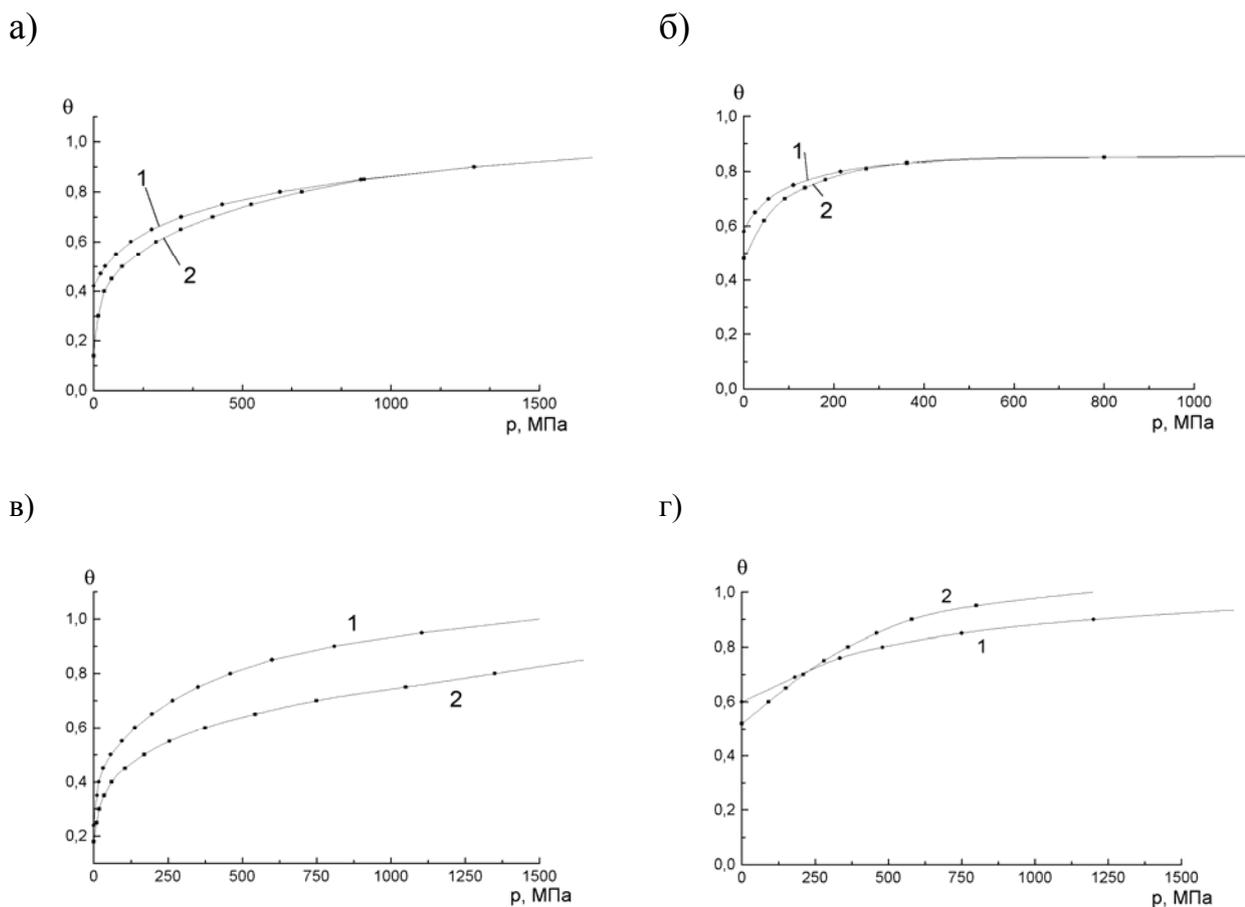
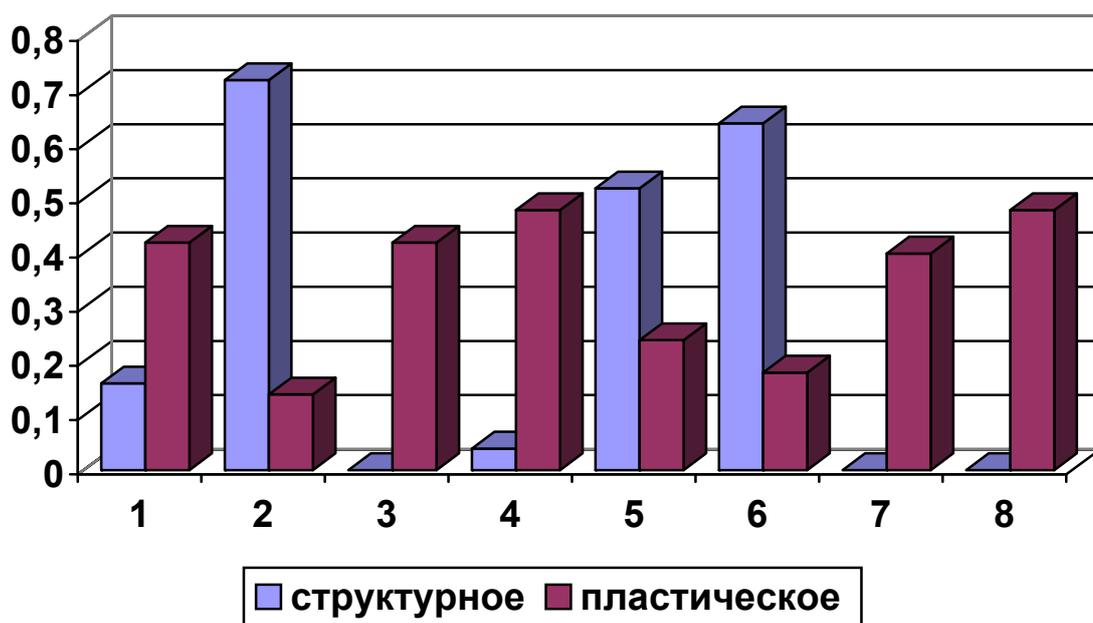


Рис. 3.10. Кривые уплотнения: а – ПЖ4М2 (1) и ПЖ-губки (2); б – Fe_3O_4-1 (1) и Fe_3O_4-2 (2); в) – ПМС1 (1) и ПНК2 (2); г) – САС1 (1) и АКД12 (2)

Как показано в разделе 1.2, переход от этапа структурного к этапу пластического деформирования, а также соответствующие этим этапам интервалы изменения плотности от θ_y до беспористого состояния ($\Delta\theta_c$ и $\Delta\theta_n$) можно оценить, определяя значение критической плотности $\theta_{кр}$. Для рассматриваемых порошковых материалов с $\theta_y < 0,5$ (ПЖ4М2, ПЖ-губка, Fe_3O_4-2 , ПМС1, ПНК2) $\theta_{кр} = 1 - \theta_y$, а процесс уплотнения можно разделить на этапы структурного и пластического деформирования. Тогда $\Delta\theta_c = \theta_{кр} - \theta_y$, а $\Delta\theta_n = 1 - \theta_{кр} = \theta_y$. Для порошковых материалов с $\theta_y \geq 0,5$ (Fe_3O_4-1 , САС1, АКД12) принимаем: $\theta_{кр} = \theta_y$, условно считая началом уплотнения этап пластического деформирования (уплотнение вследствие дробления частиц хрупких материалов рассматриваем как частный случай этапа пластического деформирования). При этом $\Delta\theta_c = 0$, а $\Delta\theta_n = 1 - \theta_y$.



1– ПЖ4М2; 2– ПЖ-губка; 3– Fe_3O_4-1 ; 4– Fe_3O_4-2 ; 5– ПМС1; 6– ПНК2;
7– САС1; 8– АКД12.

Рис. 3.11. Сравнительная диаграмма соотношений интервалов плотности на этапах структурного ($\Delta\theta_c$) и пластического деформирования ($\Delta\theta_n$) для исследованных порошковых материалов

Расчетные значения критической плотности $\theta_{кр}$, интервалов структурного и пластического деформирования ($\Delta\theta_c$ и $\Delta\theta_n$) для всех исследованных порошковых материалов приведены в табл. 3.2, а на рис. 3.11 изображена сравнительная диаграмма, которая дает наглядное представление о соотношении и протяженности этапов структурного и пластического деформирования этих материалов.

Таким образом, размер и форма частиц порошковых материалов оказывают существенное влияние на протяженность этапов структурного и пластического деформирования. Причем из рассмотренных порошковых материалов наибольшему интервалу изменения плотности на этапе структурного деформирования соответствуют более "рыхлые" в состоянии утряски материалы (ПЖ-губка, ПНК2, ПМС1). Этап пластического деформирования протяженнее для более "плотных" в исходном состоянии материалов (САС1, АКД12, Fe_3O_4-1 , Fe_3O_4-2). Порошковый материал ПЖ4М2 по сравнению с остальными занимает промежуточное место.

Различие соотношения плотность–давление при уплотнении порошка ПЖ4М2 и ПЖ-губки (см. рис. 3.10,а) существенно до относительной плотности $\theta=0,86$, что соответствует расчетной критической плотности для ПЖ-губки. Практическое совпадение кривых для более высоких плотностей указывает на идентичность уплотнения (видимо и упрочнения частиц) этих материалов на этапе их пластического деформирования.

Подобная картина наблюдается и при уплотнении порошков Fe_3O_4-1 и Fe_3O_4-2 (см. рис. 3.10,б), для которых кривые различимы до относительной плотности $\theta =0,75$, а далее сливаются практически в одну кривую. Причем увеличение плотности $\theta >0,85$ приводит к существенному повышению давления, так как уплотнение в этих условиях возможно лишь за счет дробления частиц, что требует значительных контактных усилий.

Различие процессов уплотнения порошков ПМС1 и ПНК2 на всем интервале деформирования (см. рис. 3.10,в) связано прежде всего с тем, что

вследствие высокой дисперсности последнего пластические свойства материала частиц не оказывают практического влияния на процесс уплотнения, преобладающим фактором в этом случае является высокая удельная поверхность и значительное внутреннее трение.

Вследствие более плотной исходной укладки сферических частиц порошку САС1 по сравнению с порошком АКД12 в начале процесса деформирования соответствует сравнительно меньшее давление (см. рис.3.10, г). Начиная с плотности $\theta > 0,72$, более пластичный материал частиц АКД12 способствует более интенсивному уплотнению этого порошка по сравнению с материалом САС1.

Проведенное исследование влияния размера частиц в широком интервале их изменения на процесс уплотнения ПЖ-губки, предварительно рассеянного на узкие фракции, выявило следующее. С уменьшением размера частиц увеличивается угол внутреннего трения (β_1) в исходном состоянии порошкового материала, это определяет снижение относительной плотности утряски и способствует расширению этапа структурного деформирования при последующем уплотнении. Причем при уменьшении размера частиц примерно до $150 \div 200$ мкм β_1 увеличивается сравнительно незначительно, так как его значение определяется в первую очередь формой и состоянием поверхности частиц, соответствующих способу получения порошкового материала. При снижении размера частиц менее 150 мкм интенсивность увеличения β_1 существенно возрастает, так как на его значение кроме сил контактного трения оказывают влияние силы аутогезии.

Аутогезия кроме сил механического зацепления обусловлена еще и силами электростатического, магнитного и молекулярного взаимодействия (при соответствующей дисперсности), зависящими от химического состава материала частиц. Эта закономерность подтверждается и для порошковых материалов более широкого гранулометрического состава с частицами различной формы. Изменение угла внутреннего трения при изменении

размера частиц влияет на формирование исходной структуры порошкового тела и соотношение этапов структурного и пластического деформирования.

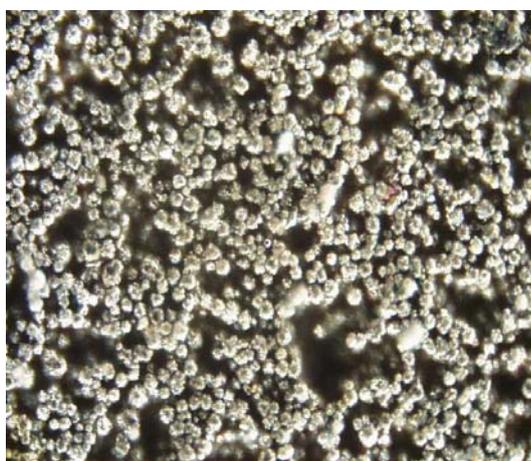
Макроуровень
(I)

Межчастичный
(структурный уровень)
(II)

а)



×65



×500

б)



×65



×500

ПНК2

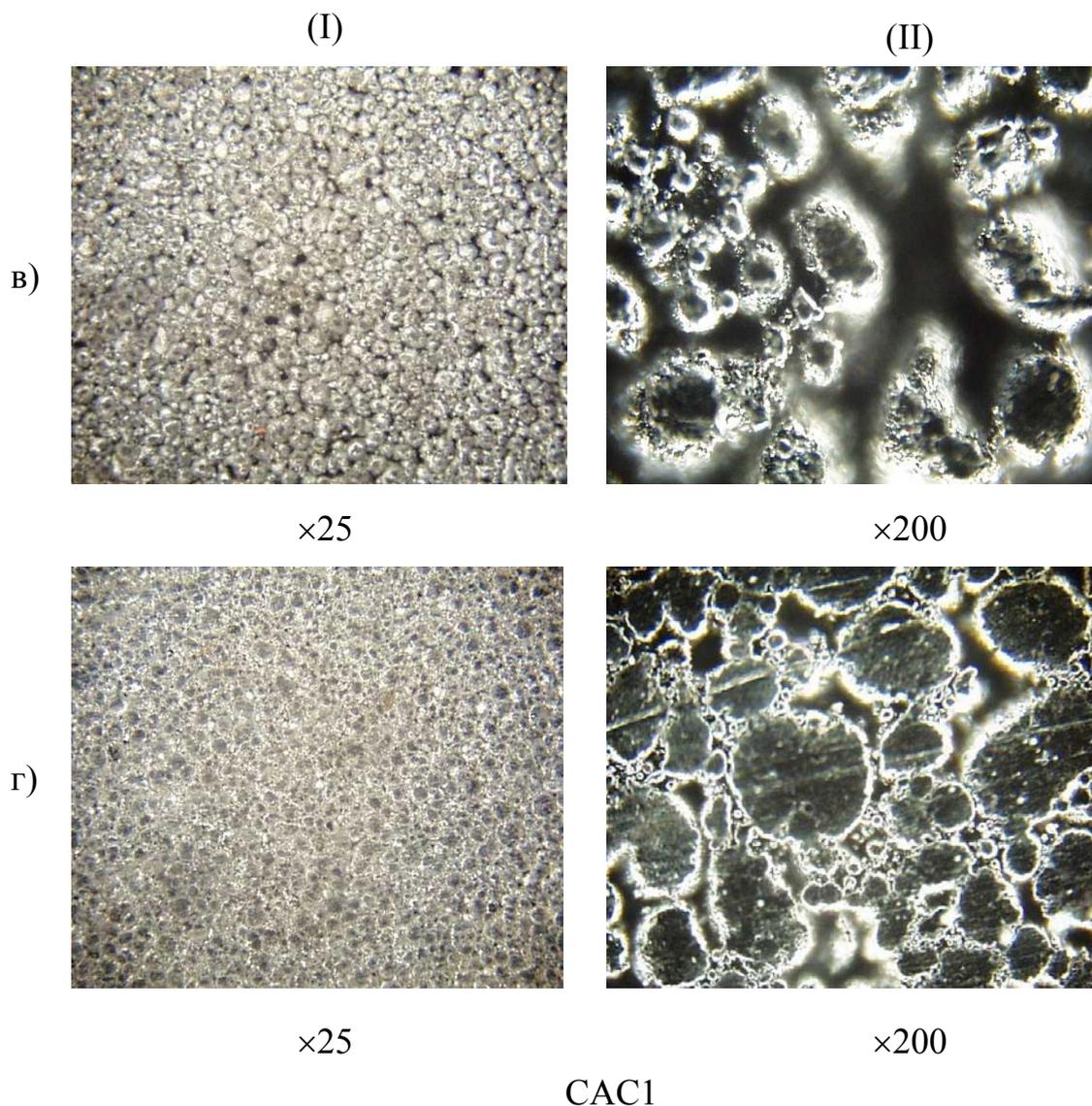


Рис. 3.12. Структуры уплотненных порошковых материалов:

а, в – $\theta = 0,6$; б – $\theta = 0,8$; г – $\theta = 0,9$

В процессе уплотнения формируется структура, соответствующая определенной плотности и зависящая от исходных характеристик порошкового материала. На рис. 3.12 приведены структуры порошковых материалов ПНК2 и САС1 различной плотности. Как следует из приведенных данных, уплотненное порошковое тело при его рассмотрении на макроуровне, т.е. при выделении элемента достаточно большого по сравнению с размером частиц, представляется непрерывно распределенной квазиоднородной средой (рис. 3.12, I). В процессе уплотнения при увеличении плотности

расширяются контактные взаимодействия между частицами, однако, межчастичные границы сохраняются (рис. 3.12,II), что определяет структурную неоднородность на межчастичном уровне.

Процесс уплотнения на этапе структурного деформирования определяется работой против сил межчастичного трения, при этом угол внутреннего трения изменяется с изменением плотности материала. Оценка угла внутреннего трения в исходном состоянии возможна по статическому углу обрушения (схема определения показана на рис. 3.9), который по своему физическому смыслу близок к углу межчастичного трения (для сравнительно крупных и несвязных порошков он ему равен). Его определение в уплотненном состоянии возможно на установках сдвигового типа, в этом случае он определяется как угол между нормальной нагрузкой и равнодействующей нормальной и предельной сдвигающей силы. На этапе пластического деформирования материала частиц оценка внутреннего трения по угловой характеристике теряет всякий смысл. Поэтому представляется целесообразным производить оценку предельного состояния порошкового материала по механическим характеристикам, зависящим от изменения плотности, а не условий внутреннего трения.

Физико–механические характеристики материалов различной плотности формируются на межчастичном уровне. Межчастичной контактной поверхности соответствует определенная структура и относительная плотность – факторы, определяющие механические характеристики неспеченного порошкового тела, их обобщенная оценка может быть проведена при испытании макрообразцов при определенных схемах нагружения.

3.5. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ РАЗЛИЧНОЙ ПЛОТНОСТИ

Механические свойства неспеченного порошкового тела формируются в процессе уплотнения. При анализе самого распространенного способа уплотнения – сжатия порошка в замкнутой матрице, как уже показано ранее, обнаруживаются довольно сложные закономерности поведения порошковой среды под давлением. Сопротивление среды сжатию в этом случае определяется преимущественно силами межчастичного трения и сопротивлением деформации материала частиц порошка. При взаимном трении частиц увеличиваются контактные поверхности их взаимодействия (рис. 3.12,II), возможны разрушения оксидных пленок, что приводит к повышению прочности уплотняемого порошкового тела. Упрочнение материала частиц в процессе их пластической деформации (металлические порошки) также способствует повышению сопротивления уплотнению при увеличении плотности среды. В целом прочностные характеристики уплотненного порошкового тела определяются как плотностью – геометрический фактор, так и степенью упрочнения материала частиц – физический фактор, при этом различные схемы испытаний могут существенным образом влиять на межчастичную прочность неспеченного порошкового тела.

Испытание на сжатие в замкнутой пресс-форме позволяет установить связь между плотностью порошкового материала и прикладываемым давлением, оно не является универсальным, так как получаемая зависимость справедлива в основном для процессов прессования в матрице. Установление связи между плотностью и давлением в процессах, отличающихся механическими схемами деформирования, возможно на основе экспериментальной оценки механических свойств таких материалов.

Для оценки механических свойств неспеченного порошкового тела различной плотности наиболее доступны испытания специальных образ-

цов при простых схемах нагружения. Использование в качестве механических характеристик тела предельной прочности на сжатие σ_c , растяжение σ_p и сдвиг τ_c позволяет всесторонне оценить поведение такого материала при деформировании, а также использовать полученную информацию для моделирования сложных схем нагружения.

Ниже приведены результаты испытаний порошковых материалов на одноосное сжатие, растяжение и срез. Для этих целей специально прессовались образцы различной плотности, форма и размеры которых приведены на рис. 3.13.

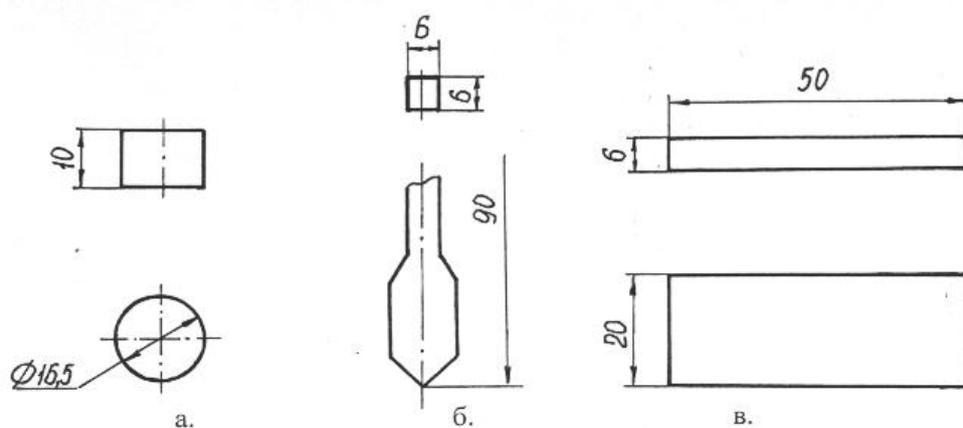


Рис. 3.13. Форма и размеры образцов для испытаний на одноосное сжатие (а), растяжение (б) и срез (в)

Диапазон изменения плотности экспериментальных образцов ограничивался как формуемостью порошковых материалов (нижний предел), так и возможностями оборудования и оснастки (верхний предел). Прессование образцов производилось на прессах с максимальным усилием 50 и 160 т, а их испытание – на разрывных машинах Р-05 и Р-10 с постоянной скоростью нагружения (10 мм/мин) и записью диаграмм нагружения до разрушения. Срез осуществлялся пуансоном в специальной оснастке.

На основании полученных экспериментальных данных после их статистической обработки (3÷5 образцов на точку) были построены диаграм-

мы изменения пределов прочности при сжатии: $\sigma_c = f(\theta)$, растяжении: $\sigma_p = f(\theta)$ и срезе: $\tau_c = f(\theta)$ для всех исследованных порошковых материалов (Fe_3O_4-2 не использовался, поэтому дополнительный индекс в обозначении Fe_3O_4-1 в дальнейшем опускается). Относительная погрешность экспериментальных данных с доверительной вероятностью 0,95 не превышала $\pm 4\%$. Экстраполяцией экспериментальных кривых в точки, соответствующие плотности утряски и плотности условно беспористого неспеченного порошкового тела ($\theta_k = 1$), диапазон изменения σ_c , σ_p и τ_c был распространён на весь теоретически возможный интервал зависимости этих характеристик от плотности исследованных порошковых материалов.

Следует отметить, что экстраполированные точки, соответствующие пределам прочности при сжатии условно беспористых порошковых тел пластичных металлов (ПЖ4М2, ПЖ-губка, ПМС1, ПНК2), практически совпадают с пределами прочности аналогичных по химическому составу литых металлов, продеформированных со степенями деформации около 26%. Сравнение проводилось с экспериментальными зависимостями пределов прочности соответствующих металлов от степени деформации, приведенных в справочной литературе. Поэтому максимальная степень деформации частиц $\varepsilon_{ч \max} = 0,26$ при уплотнении для достижения условно беспористого состояния порошкового материала на этапе пластического деформирования, определенная на идеализированной модели (разд. 1.3), практически соответствует и реальным порошковым материалам. Однако в качестве механических констант материалов удобнее использовать пределы прочности в состоянии максимального уплотнения ($\theta_k = 1$), что позволяет при учете параметров упрочнения среды ограничиваться лишь ее плотностью и не учитывать интенсивность накопленных деформаций материалом частиц порошка. Это дает основание использовать экспериментальные данные без задания закона упрочнения материала основы для количественных расчетов по критериям прочности (пластичности).

На рис. 3.14 представлены графические зависимости σ_c , σ_p и τ_c от относительной плотности, полученные для ПЖ-губки, вид подобных зависимостей для остальных исследованных порошковых материалов качественно идентичный. В табл. 3.3 приведены математические аппроксимации этих зависимостей для всех исследованных порошковых материалов, проведенные с помощью прикладной программы для ПК (Microcal Origin 5.0).

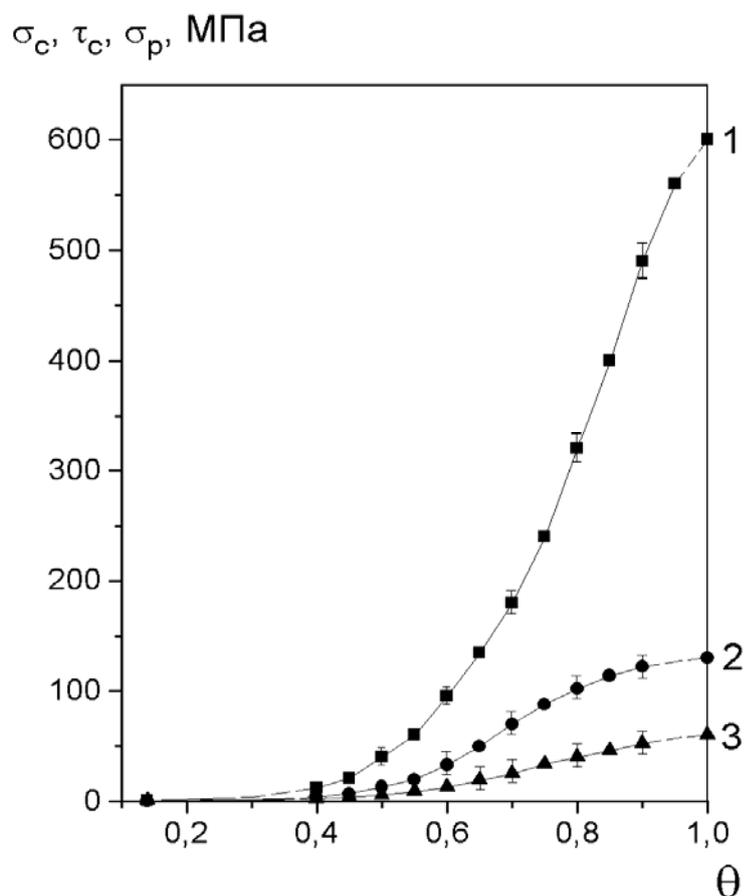


Рис. 3.14. Зависимость предела прочности при сжатии σ_c (1), срезе τ_c (2) и растяжении σ_p (3) от относительной плотности θ для ПЖ-губки

Аппроксимации экстраполированных зависимостей $\sigma_c = f(\theta)$, $\tau_c = f(\theta)$ и $\sigma_p = f(\theta)$ для исследованных порошковых материалов

Материал	Вид испытаний	Интерполяционный полином
ПЖ4М2	Сжатие	$\sigma_c = 995,3 - 4945,9 \theta + 7366,5 \theta^2 - 2806,5 \theta^3$
	Срез	$\tau_c = 400,9 - 2160,6 \theta + 3581,2 \theta^2 - 1688,6 \theta^3$
	Растяжение	$\sigma_p = 101,2 - 572,7 \theta + 987,7 \theta^2 - 466,9 \theta^3$
ПЖ-губка	Сжатие	$\sigma_c = -284,3 + 2869,8 \theta - 9778,8 \theta^2 + 13426,7 \theta^3 - 5622,2 \theta^4$
	Срез	$\tau_c = -33,9 + 456,2 \theta - 2031,9 \theta^2 + 3500,3 \theta^3 - 1763,8 \theta^4$
	Растяжение	$\sigma_p = -20,1 + 235,8 \theta - 905,3 \theta^2 + 1401,6 \theta^3 - 652,3 \theta^4$
Fe ₃ O ₄	Сжатие	$\sigma_c = 603,9 - 2508,7 \theta + 3357,6 \theta^2 - 1423,6 \theta^3$
	Срез	$\tau_c = 163,1 - 840,9 \theta + 1590,9 \theta^2 - 1309,9 \theta^3 + 398,1 \theta^4$
	Растяжение	$\sigma_p = 1,9 - 6,4 \theta + 5,4 \theta^2 - 0,2 \theta^3$
ПМС1	Сжатие	$\sigma_c = 61,8 - 343,9 \theta + 438,1 \theta^2 + 152,5 \theta^3$
	Срез	$\tau_c = -133,2 + 1101,8 \theta - 3239,1 \theta^2 + 3986,1 \theta^3 - 1666,1 \theta^4$
	Растяжение	$\sigma_p = -42,0 + 331,9 \theta - 918,3 \theta^2 + 1066,8 \theta^3 - 425,9 \theta^4$
ПНК2	Сжатие	$\sigma_c = -172,0 + 2092,6 \theta - 8853,4 \theta^2 + 14978,6 \theta^3 - 7407,4 \theta^4$
	Срез	$\tau_c = 65,8 - 484,8 \theta + 1043,7 \theta^2 - 556,8 \theta^3$
	Растяжение	$\sigma_p = 26,9 - 201,9 \theta + 447,5 \theta^2 - 243,8 \theta^3$
САС1	Сжатие	$\sigma_c = 12430,9 - 47962,5 \theta + 60252,9 \theta^2 - 24426,3 \theta^3$
	Срез	$\tau_c = 1218,8 - 4747,7 \theta + 6010,0 \theta^2 - 2446,5 \theta^3$
	Растяжение	$\sigma_p = 110,2 - 385,5 \theta + 416,7 \theta^2 - 127,3 \theta^3$
АКД12	Сжатие	$\sigma_c = 2847,8 - 12877,8 \theta + 18501,9 \theta^2 - 8178,7 \theta^3$
	Срез	$\tau_c = 293,7 - 1242,9 \theta + 1671,1 \theta^2 - 692,2 \theta^3$
	Растяжение	$\sigma_p = -575,9 + 3251,1 \theta - 6781,1 \theta^2 + 6178,2 \theta^3 - 2058,3 \theta^4$

Особенностью полученных зависимостей является их незначительное увеличение в интервале относительных плотностей от θ_y до $\theta = 0,5 \div 0,6$, интенсивное нарастание до $\theta = 0,85 \div 0,90$ и сравнительно плавный подъем до $\theta_k = 1$. Это объясняется увеличением прочности уплотняемого материала как за счет увеличения общей плотности (геометрический фактор), так

и вследствие возрастания контактной (межчастичной) прочности и упрочнения материала частиц с увеличением степени деформации (физический фактор). Причем степень влияния этих факторов при уплотнении материала для различных интервалов различна. Так при сравнительно невысоких плотностях определяющим фактором является геометрический, а при значительном уплотнении преобладает физический.

Т а б л и ц а 3.4

Соотношение σ_p/σ_c и σ_c/τ_c при различных плотностях

θ	ПЖ4М2		ПЖ-губка		Fe_3O_4		ПМС1		ПНК2		САС1		АКД12	
	σ_p/σ_c	σ_c/τ_c												
0,2	–	–	0,83	3,0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
0,3	–	–	0,42	2,5	–	–	0,56	3,0	0,26	3,8	–	–	–	–
0,4	–	–	0,21	3,2	–	–	0,28	3,1	0,08	8,3	–	–	–	–
0,5	0,20	4,2	0,15	3,1	–	–	0,06	8,4	0,08	6,1	–	–	–	–
0,6	0,16	2,7	0,14	2,9	0,20	10,0	0,04	6,4	0,10	4,9	–	–	0,06	36,0
0,7	0,14	2,8	0,14	2,6	0,02	11,1	0,04	5,4	0,07	6,4	0,08	12,0	0,03	18,4
0,8	0,12	3,1	0,13	3,1	0,01	19,0	0,05	3,9	0,06	8,0	0,03	7,3	0,02	14,1
0,9	0,09	3,8	0,11	4,0	0,02	20,8	0,05	4,8	0,05	8,9	0,03	8,5	0,04	11,5
1,0	0,08	4,4	0,10	4,6	0,03	20,3	0,04	6,0	0,05	9,3	0,05	8,6	0,05	10,0

Анализ экспериментальных данных испытаний исследованных порошковых материалов при различных схемах нагружения, показал на существенные количественные различия прочности этих материалов при растяжении и сжатии (табл. 3.4, σ_p/σ_c). Эти различия для неспеченных порошковых материалов обусловлены различным влиянием на прочность контактных межчастичных площадок и наличием контактных дефектов (рис. 3.12,II). При сжатии через контакты осуществляется передача давлений всему пористому каркасу, при этом контакт работает как бездефектный. При растяжении эффективное сечение пористого образца, сопротив-

ляющееся действующим напряжениям, определяется величиной таких контактов, прочность которых во многом зависит от наличия дефектов. Подобная картина имеет место и при сопротивлении неспеченного материала срезу, что отражается на соотношении σ_c/τ_c (см. табл. 3.4).

При испытании на растяжение и срез наблюдалось хрупкое разрушение образцов из всех исследуемых порошковых материалов. Причем при достижении σ_p происходил отрыв образца по поверхности, перпендикулярной направлению прикладываемой нагрузки, а при достижении τ_c плоскости межчастичного сдвига оставались параллельными направлению движения пуансона.

При испытании на сжатие образцы из порошковых материалов Fe_3O_4 , САС1, АКД12 и ПНК2 разрушались хрупко вследствие межчастичного сдвига без заметного пластического течения, причем образцы после разрушения имели вид конусов (для сравнительно высоких плотностей) с углом у основания близким к 45 град. Разрушению образцов из ПЖ4М2, ПЖ-губки и ПМС1 при сравнительно высоких плотностях ($\theta=0,85\div 0,90$) предшествовала пластическая деформация (около $6\div 8\%$). При этом установлено, что в процессе пластической осадки пористых образцов не происходит заметного изменения их плотности практически до разрушения. Коэффициент поперечной деформации для этой схемы испытаний с относительной погрешностью не более 5% при доверительной вероятности 0,95 может быть принят равным 0,5. Экспериментальное наблюдение процесса пластической осадки осуществлялось при стадийном нагружении образцов постоянной массы с фиксированием их геометрических размеров. Нижнюю границу начала пластического течения пористого материала экспериментально установить не удалось, упрочнение в процессе пластического деформирования не зафиксировано.

Таким образом, в практически исследованном диапазоне изменения плотности образцы из исследованных порошковых материалов либо хруп-

ко разрушались без заметных следов пластической деформации, либо пластически деформировались до разрушения без заметного упрочнения. Это позволяет сделать вывод о примерном совпадении для неспеченных порошковых тел пределов текучести и прочности, для соответствующих схем нагружения.

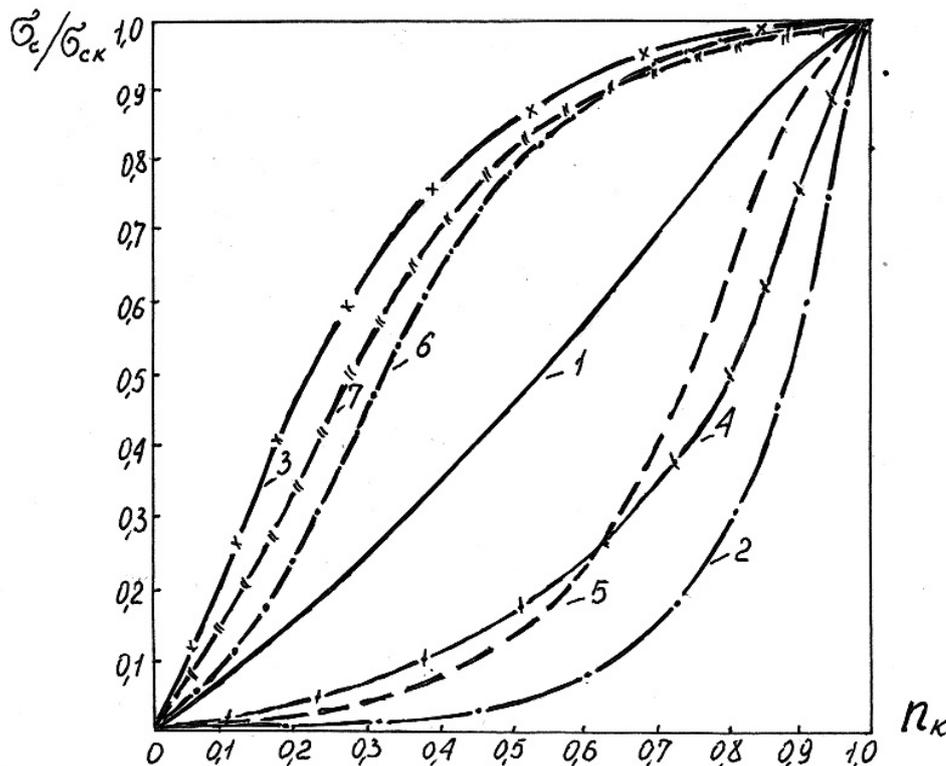


Рис. 3.15. Зависимость относительной прочности порошковых образцов при сжатии от n_k :

1– ПЖ4М2; 2– ПЖ-губка; 3– Fe_3O_4 ; 4– ПМС1; 5– ПНК2; 6– САС1; 7– АКД12

Наряду с общими закономерностями поведения порошковых материалов различных физико–механических свойств в процессах их уплотнения и испытаний при различных схемах нагружения, естественно существуют значительные количественные и некоторые качественные отличия, которые и обусловлены их исходными характеристиками.

Для сравнительного анализа прочностных характеристик при сжатии исследованных порошковых материалов различной плотности на рис. 3.15 приведены зависимости $\sigma/\sigma_{ск}$ от коэффициента контакта n_k , которые дают качественную и количественную оценку его влияния на основные прочностные характеристики этих материалов ($\sigma_{ск}$ – экстраполированные значения прочности при $\theta_k = 1$)

Таким образом, процесс уплотнения в замкнутом объеме сопровождается увеличением плотности и контактными взаимодействиями на структурном уровне, при этом прочностные характеристики порошковых материалов существенно зависят от схемы приложения нагрузки испытаний.

Глава 2. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА УПЛОТНЕНИЯ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦ

2.1. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЧАСТИЦЫ ПОРОШКОВОЙ СРЕДЫ

В процессе уплотнения порошковой среды усилия между частицами передаются через контакты, поэтому анализ их контактного взаимодействия позволяет глубже проникнуть в суть достаточно сложных явлений, сопровождающих этот процесс. В общем случае, как об этом уже сказано в главе 1, уплотнение сыпучей среды сопровождается двумя явлениями: межчастичным смещением (структурной деформацией) и деформацией самих частиц с образованием и ростом зон контактов. Структурная деформация преобладает на начальной стадии уплотнения и может быть достаточно протяженной. Строго говоря, и структурную деформацию при сжатии порошкового материала внешними силами невозможно осуществить без деформации на контактах, величина которой вместе с механическими свойствами материала контактируемых тел в основном характеризует давление уплотнения. Таким образом, давление уплотнения порошковых материалов при определенных условиях может быть рассчитано на основе деформации самих частиц в рамках так называемой дискретно-контактной теории. Эта теория уплотнения основана на всестороннем анализе контактных взаимодействий частиц порошков на различных стадиях деформирования, она успешно реализована для случая деформирования порошковых материалов в замкнутых объемах. Дискретно-контактные представления при описании процессов уплотнения порошковых материалов доминировали над континуальными на начальных этапах развития теории, они широко отражены в работах М.Ю. Бальшина, Г.М. Ждановича, И.Р. Радомысльского, А.В. Степаненко, Н.Н. Павлова и ряда других авто-

ров. Установление количественной зависимости между давлением уплотнения и плотностью порошковой среды в рамках дискретной теории осуществлялось, как правило, на основе рассмотрения идеализированных моделей контактного взаимодействия частиц с использованием условия пластичности Мизеса. При этом для теоретического анализа использовались различные идеализации реальных порошковых сред.

Рассмотрим в качестве идеализированной модели частицы порошковой среды сферическое тело, которое деформируется свободной осадкой, а также в условиях замкнутого объема (рис. 2.1). Материал сферической частицы считаем жесткопластическим, однородным, изотропным, неупрочняющимся.

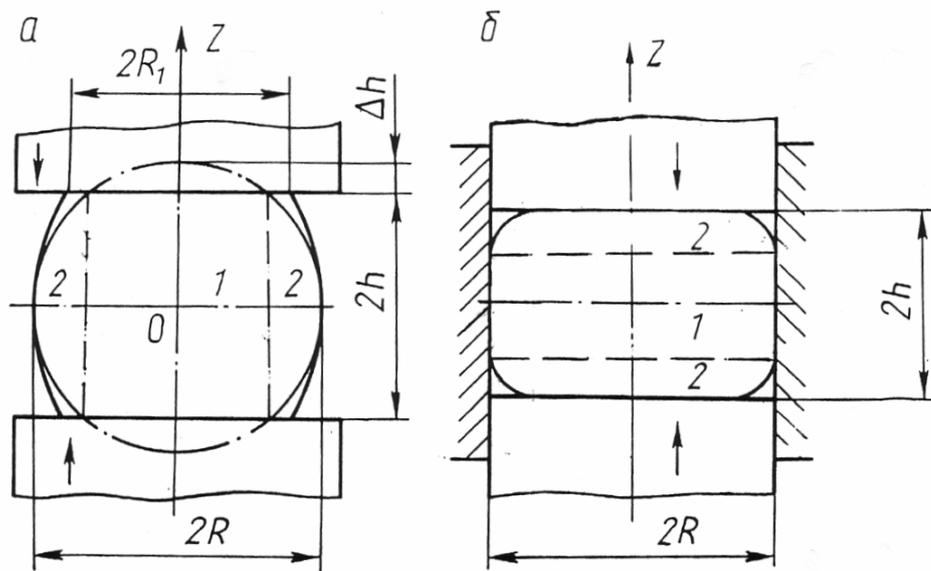


Рис. 2.1. Схема деформации шара при свободной осадке (а) и в замкнутом объеме (б)

Решение такой задачи может быть осуществлено вариационными методами, при этом интегрирование дифференциальных уравнений заменяется задачей отыскания функций, обращающих в минимум или максимум соответствующий функционал. В обработке металлов давлением одним из таких функционалов является полная работа, которую необходимо затра-

тить для того, чтобы сообщить точкам деформируемого тела некоторые перемещения.

В начальный момент деформирования не весь объем шара охвачен пластической деформацией, поэтому на этой стадии моделирования можно рассматривать свободную осадку шара между плоскопараллельными плитами (рис. 2.1, схема а). Влияние бокового подпора на условия деформирования сферического тела можно учесть моделированием процесса осадки шара в цилиндрической и прямоугольной матрицах (рис. 2.1, схема б). При этом схема деформирования шара в цилиндрической матрице по заполненности металлом выделенного элементарного объема близка к объемноцентрированной кубической упаковке. Деформирование шаров при менее плотной кубической упаковке моделируется осадкой в матрице с поперечным квадратным сечением.

По найденным значениям перемещений и компонент тензора деформации может быть определена полная работа, которая складывается из работы деформации в областях 1 и 2, работы сил трения на контакте деформируемого металла с инструментом и работы сил среза на поверхностях раздела областей, т.е.: $A_{\text{п}} = A_{\text{д}} + A_{\text{тр}} + A_{\text{ср}} \rightarrow \min$. Из условия минимума полной работы деформации находятся варьируемые параметры. В рассматриваемом случае они задаются отношением $\Delta h/h$ (рис. 2.1, схема а). В связи с трудностями аналитического решения подобных задач, варьируемые параметры определяются численными методами.

Воспользуемся результатами решения задачи деформирования сферического тела свободной осадкой, в прямоугольной и цилиндрической матрицах, реализованной А.В. Степаненко. Расчеты по модели проведены на шарах из свинца ($\sigma_{\text{T}}=9,3$ МПа) диаметром 10 и 30 мм, коэффициент трения свинца по стали $f=0,26$. Вычисления произведены поэтапно для малых деформаций ($\Delta h/h=0,1$). Результаты расчетов и их экспериментальной проверки приведены на графиках, представленных на рис. 2.2.

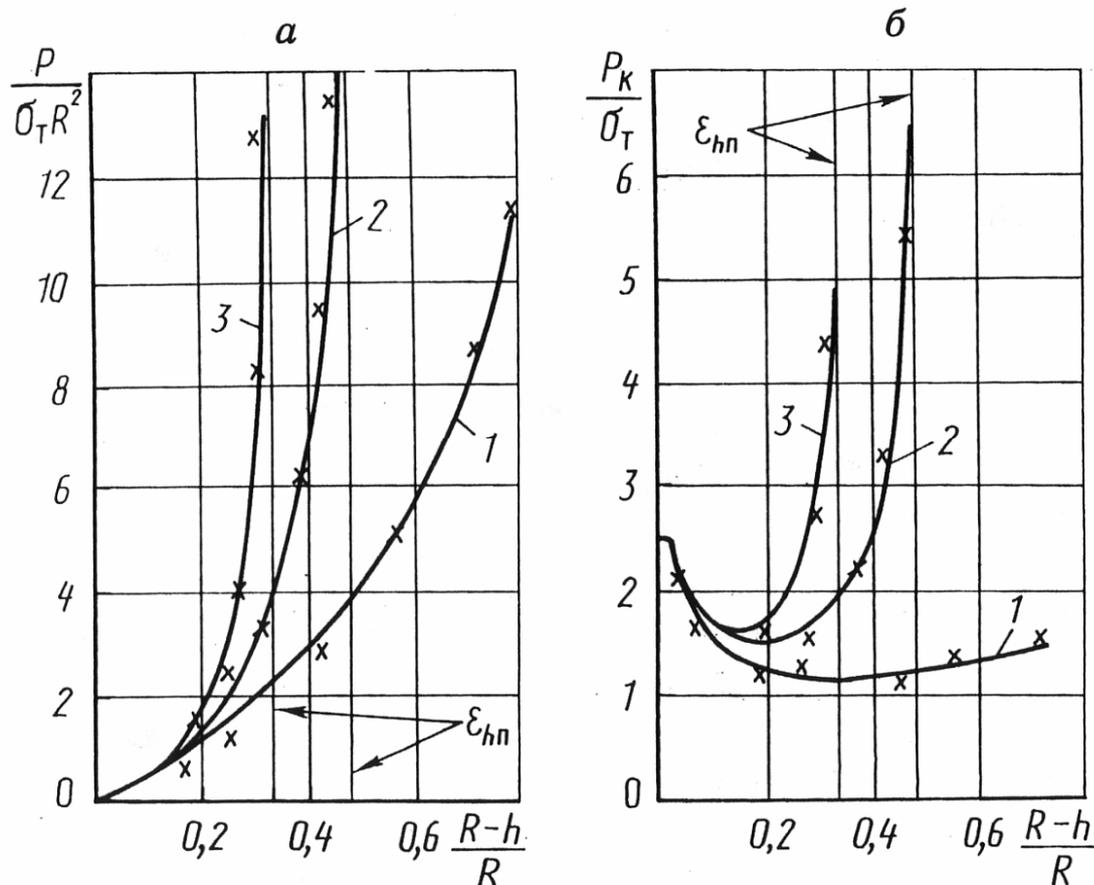


Рис. 2.2. Зависимость усилия (а) и среднего контактного напряжения (б) от относительного хода инструмента при деформировании свинцового шара:

1– свободной осадкой; 2– в прямоугольной матрице; 3– в цилиндрической матрице.

X– экспериментальные точки

Как видно из графиков, при относительном ходе инструмента, не превышающем 0,1, кривые практически совпадают (рис. 2.2,а). Это характеризует отсутствие подпирającego действия боковых стенок матрицы, т. е. на начальном этапе деформирование идентично свободной осадке шара. По мере приближения к предельным деформациям усилие деформирования в замкнутых матрицах нарастает интенсивно, что согласуется с экспериментально наблюдаемым неограниченным увеличением давления при стремлении относительной плотности к единице. Это объясняется увеличением площади контактной поверхности деформируемого тела и, следовательно, возрастающей ролью работы сил контактного трения.

На начальной стадии деформирования, когда вблизи контактной поверхности имеет место трехстороннее неравномерное сжатие, средние контактные напряжения значительно превосходят предел текучести материала деформируемой частицы. Согласно Л. Прандтлю предельное значение среднего контактного напряжения $\sigma_k \leq 2,57\sigma_T$. Оно остается постоянным от начала процесса деформирования до момента, когда отношение диаметра контактной поверхности $2R_1$ к расстоянию между плитами h не превысит 0,12, т.е. $2R_1/h \leq 0,12$.

При свободной осадке шара в достаточно широком интервале хода инструмента среднее значение нормального контактного напряжения изменяется не существенно. При деформировании в замкнутом объеме наблюдается минимум этого напряжения в узком диапазоне значений перемещения инструмента, а далее, существенное увеличение σ_k , вследствие изменения схемы нагружения, в пределе стремящейся к всестороннему равномерному сжатию (гидростатическому сжатию). Это существенно отличает свободную осадку шара от процесса его деформирования в замкнутой матрице. Более однородная деформация наблюдается при значениях относительного хода инструмента, обеспечивающего образование минимума на кривых среднего контактного напряжения. В то же время наличие контактного трения не позволяет достичь значений минимума напряжений, равных пределу текучести деформируемого материала.

2.2. ОБОБЩЕННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ УСИЛИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ШАРА ОТ ПАРАМЕТРОВ ДЕФОРМАЦИИ

Анализ численных расчетов усилия деформирования сферических тел при различных значениях хода инструмента позволил А.В. Степаненко установить математическую зависимость параметров деформирования для случаев свободной осадки и деформации в замкнутом объеме. Она имеет следующий вид:

$$P = \sigma_s R^2 \left[6,36 \varepsilon_h (1 + f) \sqrt{\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_{hn} - \varepsilon_h}} + 0,21(2,5 - f) \sqrt{\varepsilon_h} \right], \quad (2.1)$$

где: σ_s – напряжение текучести; R – радиус частицы; f – коэффициент трения; $\varepsilon_h = 1 - h/R$ – параметр относительного хода инструмента; $\varepsilon_{hn} = 1 - h_n/R$ – предельное значение относительного хода инструмента; h_n – минимально возможная (предельная) высота деформированного тела, которая определяется из условия полного заполнения им пространства замкнутого объема, $h_n=0$ при свободной осадке.

При деформировании шара в цилиндрической матрице из условия постоянства объема следует, что: $h_n = 2/3R$ или $\varepsilon_{hn} = 0,333$.

Для случая деформирования в прямоугольной матрице:

$$h_n = 1/6\pi R; \quad \varepsilon_{hn} = 1 - 1/6\pi = 0,477.$$

В общем случае напряжение текучести металла может изменяться в зависимости от температуры, скорости деформации и степени деформации. Это изменение может быть учтено соответствующими коэффициентами, известными из технологии обработки металлов давлением, а именно:

$$\sigma_s = n_T n_v n_\varepsilon \sigma_T, \quad (2.2)$$

где: σ_T – предел текучести материала шара при стандартных условиях; n_T , n_v , n_ε – температурный, скоростной и деформационный коэффициенты.

Эти коэффициенты легко определяются по зависимостям, приведенным в справочной литературе (в частности: А.В. Третьяков, В.И. Зюзин «Механические свойства металлов и сплавов при обработке давлением»).

Поскольку параметр ε_h не может характеризовать степень деформации вследствие переменного сечения по высоте деформируемого тела (шара), то для ее определения воспользуемся понятием приближенного смещенного объема. В качестве этого объема примем шаровой сегмент высотой $(R - h)$, который смещается в свободную полость матрицы при деформировании сферического тела, т.е. в наших обозначениях:

$$V_{cm} = 1/3\pi(R-h)^2(2R+h).$$

С другой стороны, можно записать, что:

$$V_{см} = 1/2\varepsilon V_{ш},$$

где: $V_{ш}$ – объем шара, ε – степень деформации шара.

Решая совместно оба уравнения относительно ε , определяем уравнение для расчета степени деформации шара:

$$\varepsilon = \varepsilon_h^2(1+h/2R) = \varepsilon_h^2(3/2 - 1/2\varepsilon_h). \quad (2.3)$$

2.3. УПЛОТНЕНИЕ СОВОКУПНОСТИ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ ПРИ ПРЕССОВАНИИ В ЗАМКНУТОЙ МАТРИЦЕ

Дискретную среду можно интерпретировать совокупностью элементарных ячеек, каждая из которых включает материальную частицу и окружающую ее пустоту. При совокупном рассмотрении элементарные ячейки образуют объемно-пространственную структуру. При пластическом деформировании такой структуры (уплотнении) ее объем уменьшается за счет сокращения пустоты в результате формоизменения самих частиц (при условии отсутствия структурной деформации). С практической точки зрения целесообразно связать интенсивность воздействия внешних сил не со степенью деформации, а с плотностью структуры. Плотность в технологических процессах уплотнения порошковых материалов является легко контролируемым параметром.

Чтобы распространить зависимость (2.1) на процесс деформирования совокупности шаров в матрице, установим связь между мерой деформации и относительной плотностью.

Из геометрических соотношений следует, что:

$$\theta_y = V_{ш}/V_{м},$$

где: θ_y – относительная плотность упаковки шаров; $V_{м}$ – объем полости матрицы, приходящийся на один шар.

Случаю деформирования шара в прямоугольной матрице отвечает простая кубическая упаковка (ПК), для которой: $\theta_y = \pi/6 = 0,523$. Текущее значение относительной плотности при этом определяется соотношением:

$$\theta = \frac{\pi R}{6h}. \quad (2.4)$$

Согласно (2.1): $\varepsilon_h = 1 - \frac{h}{R}$ или $\frac{R}{h} = \frac{1}{1 - \varepsilon_h}$.

Тогда в соответствии с (2.4):

$$\theta = \frac{\pi}{6(1 - \varepsilon_h)} = \frac{\theta_y}{(1 - \varepsilon_h)}. \quad (2.5)$$

Поскольку конечное значение относительной плотности $\theta = 1$, то из (2.5) следует, что:

$$\varepsilon_{hn} = 1 - \theta_y. \quad (2.6)$$

Полученные соотношения справедливы и для случая деформирования шара в цилиндрической матрице, только в этом случае $\theta_y = 0,667$ (ОЦК упаковка).

Подставляя полученные соотношения (2.5) и (2.6) в уравнение (2.1) получим следующее уравнение:

$$P = \sigma_s R^2 \left[6,36(1 + f) \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\theta_y}{\theta}\right)^3}{\left(\frac{\theta_y}{\theta} - \theta_y\right)}} + 0,21(2,5 - f) \sqrt{1 - \frac{\theta_y}{\theta}} \right]. \quad (2.7)$$

Для перехода к давлению прессования необходимо определить усилие, переходящее на единицу площади торца пуансона, т.е. разделить (2.7) на $4R^2$. Это справедливо для случаев деформирования шара в прямоугольной и цилиндрической ячейках, так как деформирование шара в цилиндрической ячейке моделирует процесс прессования лишь для другой упаковки частиц.

Тогда уравнение для определения давления прессования совокупности сферических частиц в замкнутой матрице примет следующий вид:

$$p = \sigma_s \left[1,59(1+f) \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\theta_y}{\theta}\right)^3}{\left(\frac{\theta_y}{\theta} - \theta_y\right)}} + (0,13 - 0,05f) \sqrt{1 - \frac{\theta_y}{\theta}} \right]. \quad (2.8)$$

На рис. 2.3 приведены результаты расчетов давления прессования для различных значений текущей плотности совокупности свинцовых шаров ($R = 5\text{мм}$) при их различной исходной упаковке.

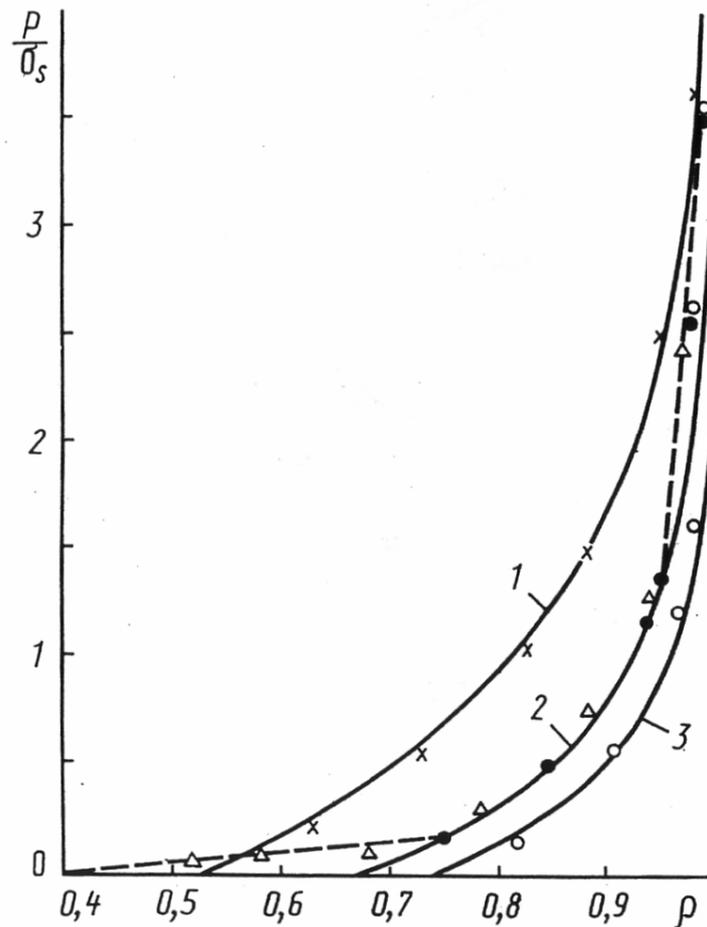


Рис. 2.3. Зависимость относительных значений давлений прессования шаров в замкнутой матрице от плотности при различной начальной упаковке:

1 – ПК; 2 – ОЦК; 3 – ГЦК

Как следует из данных, приведенных на рис. 2.3, с увеличением плотности прессовки давление прессования монотонно нарастает. Наиболее интенсивно этот рост происходит при $\theta > 0,9$. Характерно, что чем выше исходная плотность упаковки, тем ниже значения давления прессования. Это связано с тем, что при более плотной укладке шаров требуется меньшая полная работа деформирования на контактах для достижения одинаковой плотности прессовки.

Участки кривых давления прессования шаров с начальной ОЦК и ГЦК упаковкой, начиная с $\theta = 0,95$, можно аппроксимировать прямой линией до значений, соответствующих давлению прессования сферических частиц с простой кубической упаковкой (ПК) при $\theta \rightarrow 1$.

В процессе уплотнения сферических частиц, произвольно насыпанных в матрицу, меняется число контактов и наступает развитое пластическое течение в частицах в результате стабилизации пространственной структуры при коэффициенте компактности близком к 0,75. Это примерно соответствует ОЦК упаковке. Поэтому на стадии нестабильных пространственных структур связь давления и плотности можно аппроксимировать линейной функцией. Кривая уплотнения сферических частиц с произвольной начальной упаковкой изображена на рис. 2.3 пунктирной линией.

Боковое давление на стенки матрицы можно установить по разности полных работ деформирования шара в замкнутом объеме и при свободной осадке. При одном и том же значении осевой деформации в том и другом случае эта разность, очевидно, должна определять работу, затрачиваемую на образование боковых контактов. Известно, что с повышением гидростатического сжатия усилие деформирования возрастает. Это и проявляется при сопоставлении двух рассматриваемых схем нагружения.

Обратимся к уравнению (2.1). В случае свободной осадки шара предельное значение параметра $\varepsilon_{hn} = 1$. Тогда в соответствии с (2.6) уравнение (2.8) преобразуется к виду:

$$p = \sigma_s \left[1,59(1+f) \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\theta_y}{\theta}\right)^3}{\left(\frac{\theta_y}{\theta}\right)}} + (0,13 - 0,05f) \sqrt[6]{1 - \frac{\theta_y}{\theta}} \right]. \quad (2.9)$$

Предположим, что уплотнение шаров в замкнутом объеме происходит без затраты работы на образование боковых контактов, тогда по уравнению (2.9) можно рассчитать давление прессования соответствующее давлению при свободной осадке шара. Разность давлений прессования, рассчитанных по уравнениям (2.8) и (2.9), очевидно, будет равна боковому давлению. На этом основании вычитом из (2.8) уравнения (2.9) получено уравнение для определения бокового давления:

$$p_{\sigma} = 1,59\sigma_s(1+f)\left(1 - \frac{\theta_y}{\theta}\right) \left[\sqrt{\frac{\theta - \theta_y}{\theta_y(1-\theta)}} - \sqrt{1 - \frac{\theta_y}{\theta}} \right]. \quad (2.10)$$

Сопротивление деформированию уплотняемой среды при горячем прессовании зависит главным образом от температуры и скорости деформации, так как значение обжатия влияет на напряжение текучести одновременно со скоростью. Скорость деформации сферических частиц в условиях одноосного нагружения равна: $e = d\varepsilon/dt$, где t – время прессования.

При равномерном ходе пуансона со скоростью v_n можно записать, что:

$$t = \frac{(h_o - h)}{v_n} = \frac{\varepsilon_h h_o}{v_n} = \left(1 - \frac{\theta_y}{\theta}\right) \frac{h_o}{v_n}. \quad (2.11)$$

Тогда скорость деформации с учетом выражений (2.3), (2.5) и (2.11) запишется в виде:

$$e = 3 \left(1 - \frac{\theta_y}{\theta}\right) \left(1 + \frac{\theta_y}{\theta}\right) \frac{v_n}{2h_o}. \quad (2.12)$$

Зная скорость деформации можно определить по справочным данным поправочный коэффициент n_v при расчете σ_s .

2.4. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦ ПРИ УПЛОТНЕНИИ ПОРОШКОВ

Установление количественной зависимости между давлением уплотнения и плотностью среды в рамках дискретно–контактной теории может быть осуществлено на основе всестороннего анализа силовой схемы взаимодействия частиц в представительном элементе порошковой среды и использования условия пластичности Губера–Мизеса. Рассмотрим один из подходов в рамках этой теории, разработанный Г.М. Ждановичем.

При контактном взаимодействии частиц имеет место самый общий случай нагружения: приложены нормальная и тангенциальная нагрузки (рис. 2.4) с равнодействующими, равными соответственно P_k и F_k . Между ними существует связь:

$$F_k = f_i \cdot P_k, \quad (2.13)$$

где f_i – коэффициент межчастичного трения.

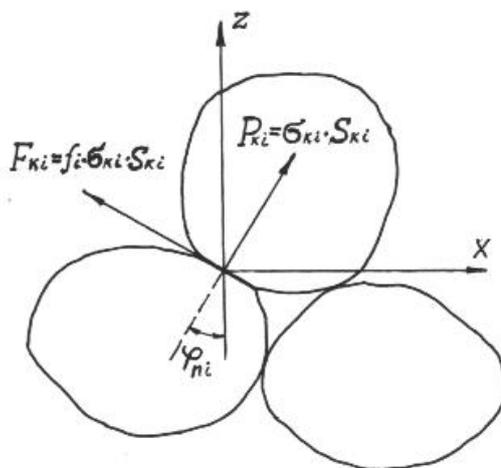


Рис. 2.4. Схема взаимодействия контактов частиц порошкового тела

Г.М. Ждановичем установлено, что наступление и дальнейшее развитие пластических деформаций частиц (хрупкое разрушение рассматривается как частный случай пластических деформаций) определяется величиной сжимающей контактной силы, размером площадки контакта и, следовательно, величиной среднего контактного давления σ_k .

Предполагается, что материал частицы в зоне деформации находится в предельном состоянии, характеризуемым определенной величиной приведенного напряжения σ_n , которое можно назвать обобщенным напряжением или интенсивностью напряжений.

Поверхностный слой частицы в зоне контакта, физические свойства которого могут отличаться от свойств основы материала, способен разрушаться уже при начале обжатий. При сравнительно невысоком давлении уплотнения контактную нагрузку начинает воспринимать основной материал частиц. Поэтому контактные давления зависят от прочностных характеристик основы материала частиц. Так как величины давлений контактного взаимодействия неодинаковы для различных контактов, то рассматривается некоторая приведенная среднестатистическая величина σ_k .

Компоненты напряжений в зоне контакта частицы, материал которой находится в условиях объемного напряженного состояния, для случая действия на контакт комбинированной нагрузки могут быть записаны в виде двух слагаемых:

$$\begin{aligned}\sigma_x = \sigma_y &= -\sigma_k \left(\xi_x + B_x \cdot \frac{n_k}{\theta} \right), & \sigma_z &= -\sigma_k \left(\xi_z + B_z \cdot \frac{n_k}{\theta} \right), \\ \tau_{xy} &= -\sigma_k \left(\xi_{xy} + B_{xy} \frac{n_k}{\theta} \right), & & (2.14) \\ \tau_{yz} &= -\sigma_k \left(\xi_{yz} + B_{yz} \frac{n_k}{\theta} \right), \\ \tau_{zx} &= -\sigma_k \left(\xi_{zx} + B_{zx} \cdot \frac{n_k}{\theta} \right),\end{aligned}$$

где θ – относительная плотность порошкового тела ($\theta = \rho/\rho_k$), n_k – относительная величина контактного сечения уплотняемого тела: $n_k = S_k / S_H$ (S_k и S_H – контактное и номинальное сечения тела).

Первые слагаемые ξ_{ij} в приведенных выражениях представляют собой обобщенные величины компонентов напряжений, возникающих в рассматриваемой точке зоны контакта в результате действия комбинированной контактной нагрузки. Данные коэффициенты могут быть определены на основании использования известных уравнений механики сплошной среды. Вторые слагаемые учитывают дополнительные напряжения, возникающие в рассматриваемой точке зоны контакта в результате силового воздействия всех остальных контактных нагрузок на частицу.

Когда давление прессования p_H приближается к своей критической величине p_k , имеют место следующие краевые условия:

$$\begin{aligned}\theta &= n_k = 1, \\ \sigma_k &= \sigma_{k(max)} = p_k.\end{aligned}$$

В этот момент в любой точке частицы за исключением микропор, вследствие приближения напряженного состояния к гидростатическому, касательные напряжения будут отсутствовать, а нормальные представляют собой объемное напряженное состояние всестороннего равномерного сжатия. Для этих условий:

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} \approx 0, \tag{2.15}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\sigma_{k(max)} = -p_k.$$

Из совместного рассмотрения (1.2) и (1.3) вытекает:

$$B_{xy} = -\xi_{xy}; B_{yz} = -\xi_{yz}; B_{zx} = -\xi_{zx}; \tag{2.16}$$

$$B_x = B_y = 1 - \xi_x; B_z = 1 - \xi_z.$$

Процесс уплотнения сопровождается относительным скольжением контактов частиц, при котором происходит частичное разрушение микро-

неровностей, что приводит к уменьшению механического сопротивления скольжению частиц. Вместе с тем, при увеличении давления сжатия происходит рост площадок взаимных контактов, что в свою очередь приводит к некоторому увеличению интенсивности молекулярного взаимодействия сцепления частиц и, следовательно, к увеличению сопротивления скольжению. Таким образом, вследствие неровности рельефа поверхности частиц в процессе уплотнения происходит сдвиг и срез поверхностного слоя, что свидетельствует о наличии предельного трения. Следовательно, материал в окрестностях поверхности контакта частиц находится в напряженном состоянии, близком к предельному.

В области фиксации контактов эффективная величина межчастичного трения может существенно отличаться от величины коэффициента трения скольжения. Этот коэффициент можно назвать коэффициентом сопротивления сдвигу контактов. В области малых и средних давлений уплотнения приведенный коэффициент контактного трения f_i совпадает с физической константой, характеризующей сопротивление поверхности контакта скольжению. При высоких давлениях контактное трение частиц начинает переходить из области межчастичного в область внутривчастичного трения. В области внутривчастичного трения приведенный коэффициент контактного трения $f_t = \tau_k / \sigma_k$ уменьшается вследствие того, что контактные давления возрастают быстрее, чем сопротивляемость материала частицы сдвигу в окрестностях зоны контакта. При давлениях уплотнения, близких к критическим (p_k), когда $\theta = n_k = 1$, приведенный коэффициент контактного трения f_t стремится к нулю, так как при превращении порошкового тела в монолит эффект трения исчезает с исчезновением тенденции к сдвигу.

Для определения величины давления контактного взаимодействия частиц необходимо дополнительное условие. Так как материал частиц в окрестностях зоны контакта находится в напряженном состоянии, близком к предельному, то в качестве дополнительного условия целесообразно

принять условие предельного состояния. Для рассматриваемой задачи условие предельного напряженного состояния имеет вид:

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 3\tau_n^2 = 1/\nu_3 \sigma_n^2, \quad (2.17)$$

где $\nu_3 = \sigma_{вп}/\sigma_{вс} \leq 1$ – поправочный коэффициент к энергетическому критерию Губера–Мизеса для материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Критерий (2.17) записан для условий: $\sigma_x = \sigma_y$, причем $\tau_n^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2$, ($0 \leq \tau_n \leq \sigma_n/\sqrt{3\nu_3}$), где τ_n – приведенное касательное напряжение; σ_n – приведенное нормальное напряжение.

Механические свойства материала частиц предполагаются изотропными, характеризуемые величинами σ_T и σ_B . Причем для пластичных материалов ($\nu_3 = 1$) $\sigma_n = \sigma_T$, для хрупких материалов ($\nu_3 < 1$) $\sigma_n \approx \sigma_B$.

С помощью приближенного расчетного метода, основанного на оценке напряженного состояния в материале частиц порошка при их контактном взаимодействии, Г.М. Ждановичем установлена зависимость:

$$\sigma_k = \frac{\chi_1 \sigma_n}{\left(1 - \chi_2 \frac{n_k}{\theta}\right)}, \quad (2.18)$$

где χ_1 и χ_2 – коэффициенты, зависящие от физических свойств материала частиц порошка.

Величина контактного давления σ_k возрастает в процессе уплотнения как вследствие упрочнения материала частиц и соответственно увеличения приведенного напряжения σ_n , так и за счет изменения схемы напряженного состояния, которая с увеличением числа контактов и их площади приближается к гидростатической, что приводит к увеличению сопротивления деформации материала зоны контакта. Для наступления и развития пластических деформаций необходимо и достаточно, чтобы в рассматриваемой точке материала приведенное напряжение σ_n достигло предельного значения.

Величину усилия прессования P в рассматриваемый момент процесса Г.М. Жданович определил как сумму проекций опорных контактных сил всех частиц сечения прессовки. При переходе к среднестатистическим величинам она может быть представлена следующим уравнением:

$$P = n_s K_{\alpha}' \sigma_k S_{kc} \cos\varphi_n (1 + f_i \operatorname{tg}\varphi_n), \quad (2.19)$$

где n_s – среднестатистическое число частиц рассматриваемого слоя прессовки; K_{α}' – среднестатистическое число опорных контактов частицы; S_{kc} – среднестатистическая величина контактной площадки; φ_n – угол нормального взаимодействия контактов частиц.

Давление прессования определяется как отношение:

$$p_n = P / S_n \quad (2.20)$$

Учитывая, что $S_k = n_s K_{\alpha}' S_{kc} \cos\varphi_n$, получаем теоретически выведенное на основании дискретно-контактного представления уплотняемой среды уравнение:

$$p_n = (1 + f_i \operatorname{tg}\varphi_n) \sigma_k n_k \quad (2.21)$$

В уравнении (2.21) переменными являются n_k , f_i , а θ фигурирует в неявном виде, что затрудняет его прямое использование для расчетов.

Г.М Жданович, положив в основу теории контактного взаимодействия частиц энергетический подход, показал, что относительную величину контактного сечения уплотняемого тела n_k можно связать с относительной плотностью следующей зависимостью:

$$n_k = \theta^2 \frac{\ln \theta / \theta_0}{\ln 1 / \theta_0} \quad (2.22)$$

Эта зависимость несколько отличается от той, которую предложил М.Ю. Бальшин:

$$n_k = \theta^2 \left(\frac{\theta - \theta_0}{1 - \theta_0} \right)^n, \quad (2.23)$$

где n – параметр, определяемый стадией уплотнения.

Уравнения (2.22) и (2.23) устанавливают взаимосвязь между проекцией суммарной контактной поверхности и плотностью материала. Эта закономерность определяет деформационный механизм уплотнения порошкового тела и наиболее точно выполняется при фиксировании и росте межчастичных контактов, причем для изостатического прессования $p_n/p_k = n_k$. Поэтому уравнение (2.21) с учетом (2.22) и (2.23) можно представить в виде:

$$p_n = p_k \theta^2 \frac{\ln \theta / \theta_0}{\ln 1 / \theta_0} \quad (2.24)$$

$$p_n = p_k \theta^2 \left(\frac{\theta - \theta_0}{1 - \theta_0} \right)^n \quad (2.25)$$

2.5. НАИБОЛЕЕ ИЗВЕСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРЕССОВАНИЯ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Уравнения, полученные на основе дискретно–контактной теории, имеют достаточно ясное физическое обоснование. Однако количественная взаимосвязь между сжимающей контактной силой и размером площадки контакта, а следовательно, давлением уплотнения и плотностью материала устанавливается только при образовании этих контактов. Процесс уплотнения реальных порошковых материалов на начальных этапах деформирования может осуществляться исключительно за счет межчастичного сдвига и разрушения неустойчивых промежуточных пространственных структур (конгломератов частиц). Поэтому такая зависимость в рамках контактной теории корректна лишь на стадии стабильных пространственных структур, образуемых сравнительно крупными однородными по гранулометрическому составу и форме частицами. Причем для фиксирования и роста межчастичных контактов необходима соответствующая схема деформирования, которая практически может быть реализована, в частности, при прессовании в закрытых пресс–формах.

Прессование в закрытых пресс-формах широко применяется при изготовлении изделий методами порошковой металлургии. Кроме того, этот процесс используется для оценки такой важной технологической характеристики, как уплотняемость. Несмотря на то, что зависимость плотности от приложенного давления не универсальна, а определяется видом приложения усилий и кинематическими особенностями движения прессующих элементов, эта зависимость находится в сфере внимания исследователей и позволяет глубже понять сложные процессы, происходящие при уплотнении порошковых материалов.

М.Ю. Бальшин обосновал концепцию стадийности процесса уплотнения порошков в замкнутых объемах. В своих работах он объяснил стадии процесса уплотнения с точки зрения контактного взаимодействия и консолидации уплотняемой среды. Наглядное представление о зависимости плотности от давления прессования дают диаграммы уплотнения (рис. 2.5).

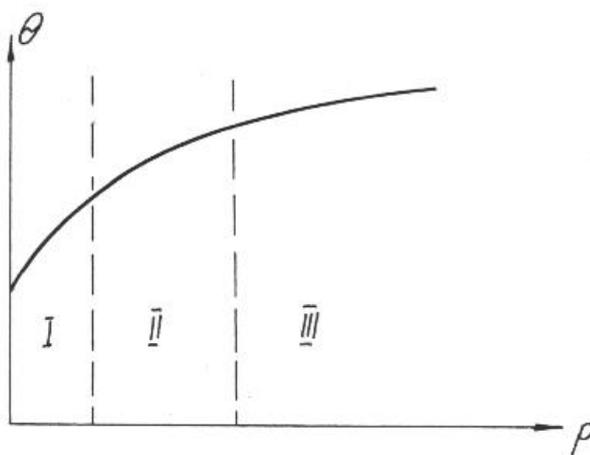


Рис. 2.5. Диаграмма уплотнения порошкового тела в замкнутом объеме

Процесс уплотнения порошковых материалов в соответствии с принципами консолидации М.Ю. Бальшина описывается следующим образом. Первая стадия характеризуется преобладанием автономной, разрушающей контакты деформацией при общем уплотнении и консолидации порошкового тела. На второй стадии наблюдается интенсивный рост контактного

сечения, все большую роль начинают играть неавтономные деформации, сопровождающиеся фиксированием контактов. С момента полного фиксирования контактов имеет место пластическая деформация сформированного материала, характерная для третьей стадии уплотнения. Всестороннее сжатие пористого тела сопровождается только ростом фиксированных контактов вследствие пластической деформации частиц материала.

В общем виде уравнения прессования в соответствии с дискретно–контактными представлениями различных авторов можно записать следующим образом:

$$p = b \sigma_k, \quad (2.26)$$

где σ_k по М.Ю. Бальшину, исходная твердость материала частиц порошка; по Г.М. Ждановичу, давление истечения максимально упрочненного материала. Вместо σ_k различными авторами привлекались и другие параметры, характеризующие прочность: предел прочности и текучести материала частиц, контактную прочность уплотняемого материала и т.д.

Коэффициент b , отражающий влияние дискретности на свойства порошкового материала, ряд авторов связывали с параметрами, которые лишь косвенно характеризуют дискретность материала (относительный объем, относительная плотность, пористость).

Несколько иной подход в рамках дискретно–контактной теории использовали И.Р. Радомысельский и Н.И. Щербань. В качестве модели порошкового материала ими принята совокупность большого числа статистически эквивалентных частиц наиболее вероятного размера и правильной формы. Предположено, что при одинаковых условиях межчастичного скольжения порошковый материал сохраняет одинаковую структуру, которую можно оценивать по наиболее вероятному координационному числу λ_k (числу контактов отдельной частицы с соседями). Пористость Π для выделенного пространства порошкового материала определяется формулой:

$$\Pi = \Pi_0 \exp\left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_*}\right), \quad (2.27)$$

где Π_0 – максимально возможная пористость; λ_* – максимально возможное изменение координационного числа.

В формуле (2.27) коэффициент при Π_0 рассчитывается с позиций геометрического расположения частиц порошка, т.е.: $k = \exp(-\lambda_k/\lambda_*)$.

В работе В.С. Смирнова и И.Н. Целесина коэффициент при Π_0 рассчитывался с позиции теории вероятности:

$$k = \exp\left\{\omega_1 \cdot \int_0^p [m(p) - 1] dp\right\}, \quad (2.28)$$

где ω_1 – вероятность исчезновения объектов в единицу времени (исчезающие объекты – поры); m – количество новых объектов, появляющихся вместо исчезнувших. При этом процесс уплотнения порошковых материалов ими рассматривался с точки зрения двух состояний: как уплотнение дисперсного материала на первой стадии и как уплотнение пористого тела на второй стадии. На стадии пластической деформации пористого тела $m(p) \geq 0$, в диапазоне структурного уплотнения $m(p) < 0$.

В таблице 2.1 приведены некоторые уравнения, которые были получены различными авторами на основе дискретно-контактного подхода, причем каждое из них наиболее точно может отражать лишь определенную стадию уплотнения порошковых материалов.

Помимо дискретно-контактного подхода связь плотности с давлением может быть получена и на основе континуальных представлений. Надежной базой для такого уравнения явилась разработанная В.В. Скороходом концепция среднеквадратичных напряжений и скоростей деформаций, согласно которой:

$$\sigma = \frac{2}{3} \bar{p} \frac{(1 - \theta)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\theta}}, \quad (2.29)$$

где \bar{p} – среднеквадратичное напряжение в материале основы, равное его пределу текучести.

Уравнения прессования порошковых материалов

Уравнение	Пояснения	Автор
$\lg p = \lg p_{\max} - m \lg \beta$	p_{\max} – давление, необходимое для достижения компактного состояния; β – относительный объем; m – коэффициент; p – текущее давление.	М.Ю. Бальшин
$p = A \ln \frac{V_o}{V_p}$	V_p – объем пор при давлении p ; V_o – объем пор при $p=0$; A – коэффициент.	К. Канопицкий
$p = \sigma_{cp} n_k \left(1 + \frac{\mu v s_o}{2F_o} \right)$	σ_{cp} – средний предел текучести; n_k – коэффициент контакта; μ – коэффициент трения; v – коэффициент бокового давления; s_o – поверхность трения порошка о матрицу; F_o – площадь пуансона.	Н.Н. Павлов
$p = 2\sigma_T \ln \frac{\Pi_o}{\Pi}$	σ_T – предел текучести материала порошка; Π_o , Π – исходная и текущая пористость прессовки.	С. Торре
$\rho = \rho_k - \frac{k_o}{\alpha} e^{-\alpha p}$	ρ , ρ_k – текущая и компактная плотность; k_o – начальный коэффициент прессования; α – коэффициент потери сжимаемости; p – давление прессования.	Н.Ф. Кунин Б.Д. Юрченко
$\rho = \rho_o + kp^m$	ρ , ρ_o – текущая и плотность утряски; k , m – постоянные; p – давление прессования.	С. Агте М. Петерлик
$P_x = P_o e^{-2, \mu v \frac{H_o - x}{r}}$	P_x – усилие прессования на расстоянии x от пуансона; P_o – усилие на пуансоне; μ – коэффициент трения; v – коэффициент бокового давления; H_o – высота прессовки; r – радиус прессовки.	Г.И. Аксенов
$p = \sigma_s C \ln \frac{\theta}{1 - \theta}$	θ – относительная плотность; σ_s – предел текучести материала; C – коэффициент.	А.Н. Николаев

В работе И.Ф. Мартыновой и М.Б. Штерна данная зависимость, полученная для пористых тел, была распространена на стадию пластической деформации порошков пластичных металлов. Известные преимущества приведенной зависимости (2.29) обусловлены тем, что теория среднеквадратичных напряжений и скоростей деформаций основывается на представ-

лениях микронеоднородного континуума. Поэтому зависимость содержит единственную константу, имеющую ясный физический смысл.

Теоретические модели, приводящие к практически любому из известных уравнений прессования, основаны на определенной идеализации процесса уплотнения в замкнутом объеме. Все подобного рода зависимости следует рассматривать как различные аналитические аппроксимации экспериментальных кривых. Причем в связи с существенным различием механизмов уплотнения порошковых материалов на различных стадиях деформирования физического уравнения, описывающего единой зависимостью плотность среды от давления и основанного на контактном взаимодействии частиц, получить не представляется возможным. Поэтому проблематичным остается установление связи между плотностью и приложенным давлением на стадиях неустойчивых пространственных структур и объемного течения материала (особенно в незамкнутых объемах).

Эти недостатки менее проблематичны для континуальных теорий уплотнения, изучающих деформацию достаточно больших совокупностей частиц. Тем не менее, дальнейшие исследования характера дискретного взаимодействия между частицами порошков в зависимости от свойств материала, их формы, размеров и гранулометрического состава позволяют более точно описать физический процесс уплотнения при разработке континуальных моделей деформирования порошковой среды с учетом ее структуры.

дельными частицами, а также изменяется физико–механическая схема развития контактного взаимодействия. Эти факторы способствуют увеличению сопротивления уплотнению среды в целом, с одной стороны, с другой – обеспечивают определенную прочность уплотненного порошкового тела.

Прочностные характеристики уплотненных порошковых материалов, как правило, определяют на основе испытаний макрообразцов при определенных схемах нагружения. При этом оценка истинных напряжений возможна на основе учета истинной поверхности, к которой соотносится полная нагрузка испытания.

Н.Н. Павловым предложен коэффициент контакта в виде отношения фактической поверхности контакта между частицами к сечению материала в беспористом состоянии, а его связь с относительной деформацией порошкового тела при уплотнении определяется следующим уравнением:

$$n_k = \left(\frac{\varepsilon_n}{P_y} \right)^{2+\eta_0} . \quad (1.13)$$

Коэффициент контакта изменяется по мере уплотнения от нуля (состояние утряски) до единицы (беспористое состояние), причем интенсивность его изменения на разных этапах деформирования учитывается показателем степени. Коэффициент контакта служит количественной оценкой физико–механических процессов консолидации, происходящих на межчастичном (структурном) уровне при уплотнении порошковых тел. Его можно использовать для расчета фактической поверхности, определяя истинные напряжения при механических испытаниях образцов. Уравнение (1.13) позволяет учесть контактные взаимодействия при переходе от структурного к пластическому этапу деформирования.

Таким образом, рассматривая уплотнение порошкового материала как процесс последовательной реализации различных механизмов деформирования на соответствующих уровнях, можно в макроконтинуальной модели отразить структурную неоднородность среды.

УДК 621.762.

Р е ц е н з е н т ы:

д-р техн. наук, профессор Санкт-Петербургского инженерно-экономического университета В.Д. Дурнев, д-р техн. наук, профессор Санкт-Петербургского политехнического университета Г.С. Казакевич

Цеменко В.Н. **Процессы порошковой металлургии. Теория и физические основы уплотнения порошковых материалов:** Учеб. Пособие СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2005. 115 с.

Соответствует государственному общеобразовательному стандарту дисциплины «Процессы порошковой металлургии» подготовки бакалавров по направлениям 150100 «Металлургия» и 150600 «Материаловедение и технология новых материалов», а также подготовки инженеров по специальностям 150108 «Порошковая металлургия, композиционные материалы, покрытия», 150106 «Обработка металлов давлением».

Изложены физические основы уплотнения порошкового материала в процессах деформирования при рассмотрении среды на базе дискретных и континуальных представлений.

В рамках детерминированной модели уплотнения при условном выделении этапов структурного и пластического деформирования произведена оценка влияния формы, размера и гранулометрического состава (структурных параметров) реальных порошковых материалов на процесс их уплотнения. Приведены зависимости прочности ряда порошковых материалов при сжатии, растяжении и сдвиге от относительной плотности.

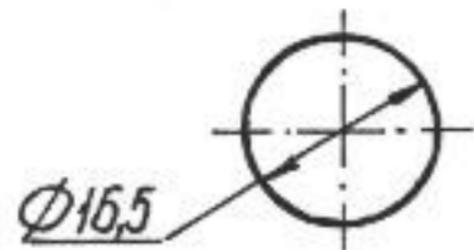
Дан анализ общих свойств предельных поверхностей и приведена методика построения кривых предельного состояния, использующая результаты испытаний порошковых материалов различной плотности для частных схем нагружения.

Табл. 12. Ил. 25. Библиогр.: 11 назв.

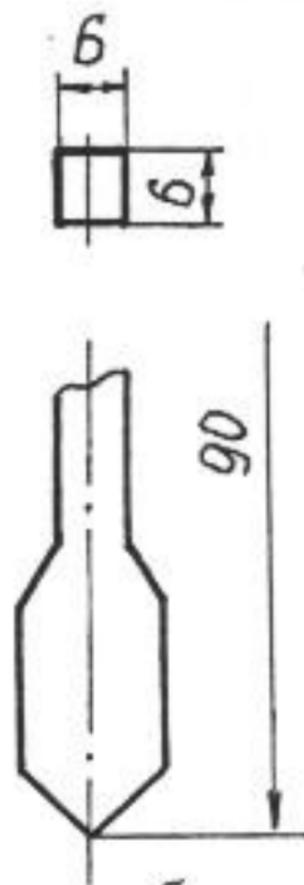
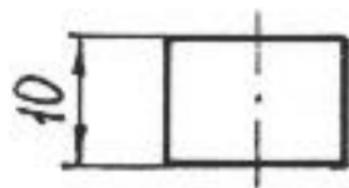
Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Цеменко В.Н., 2005

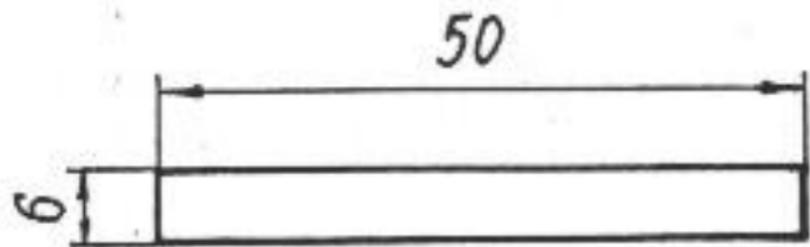
© Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2005



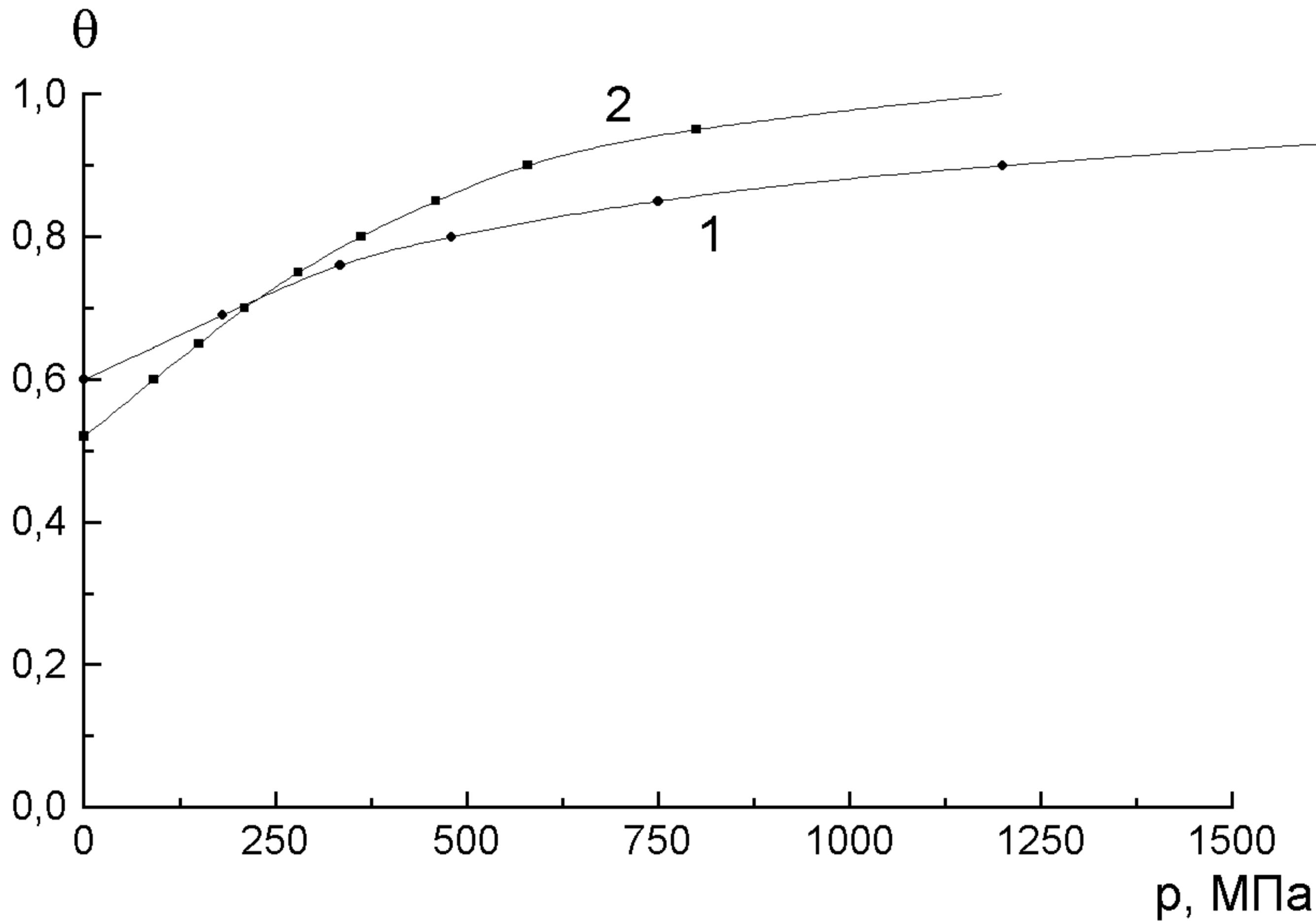
a.

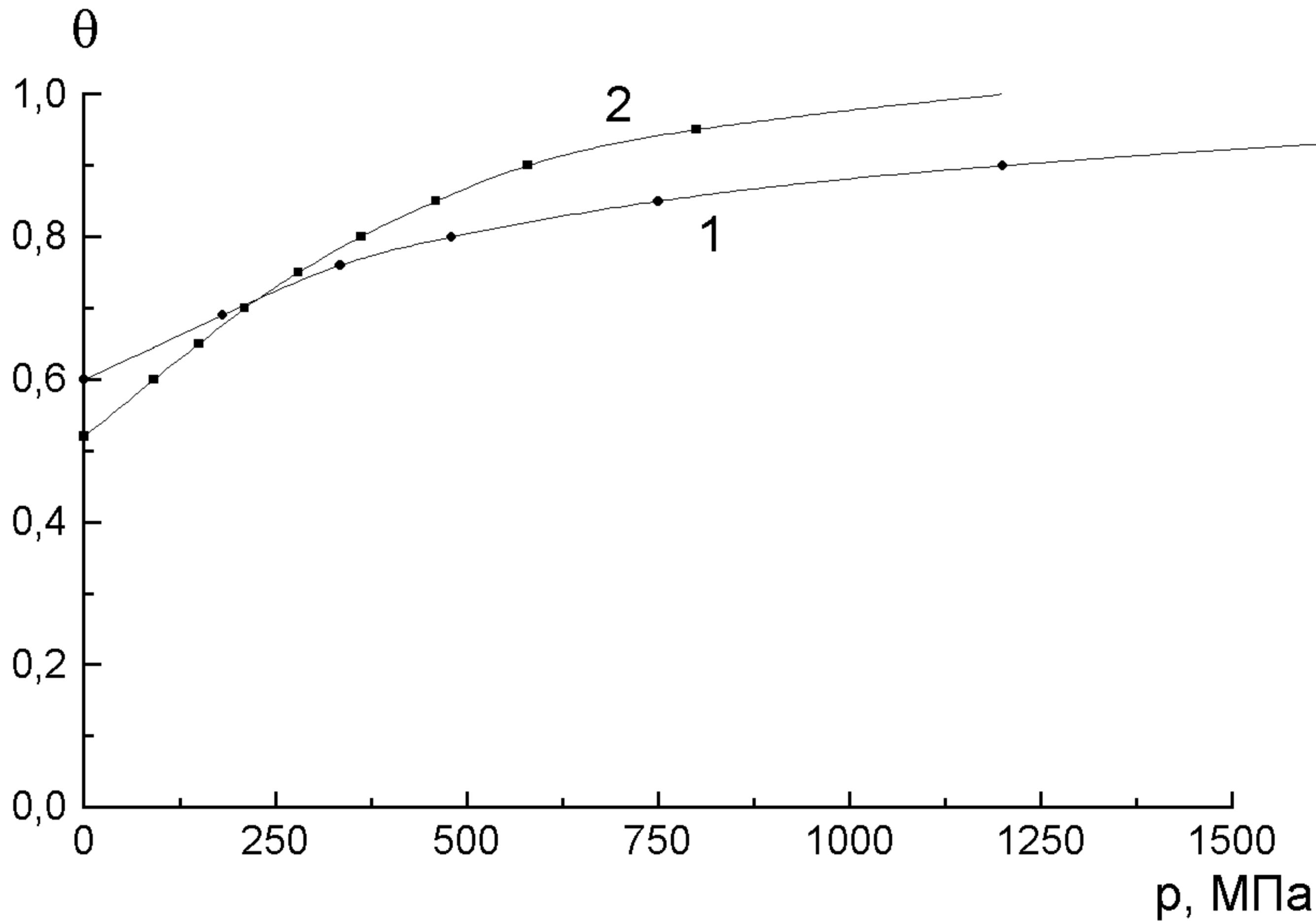


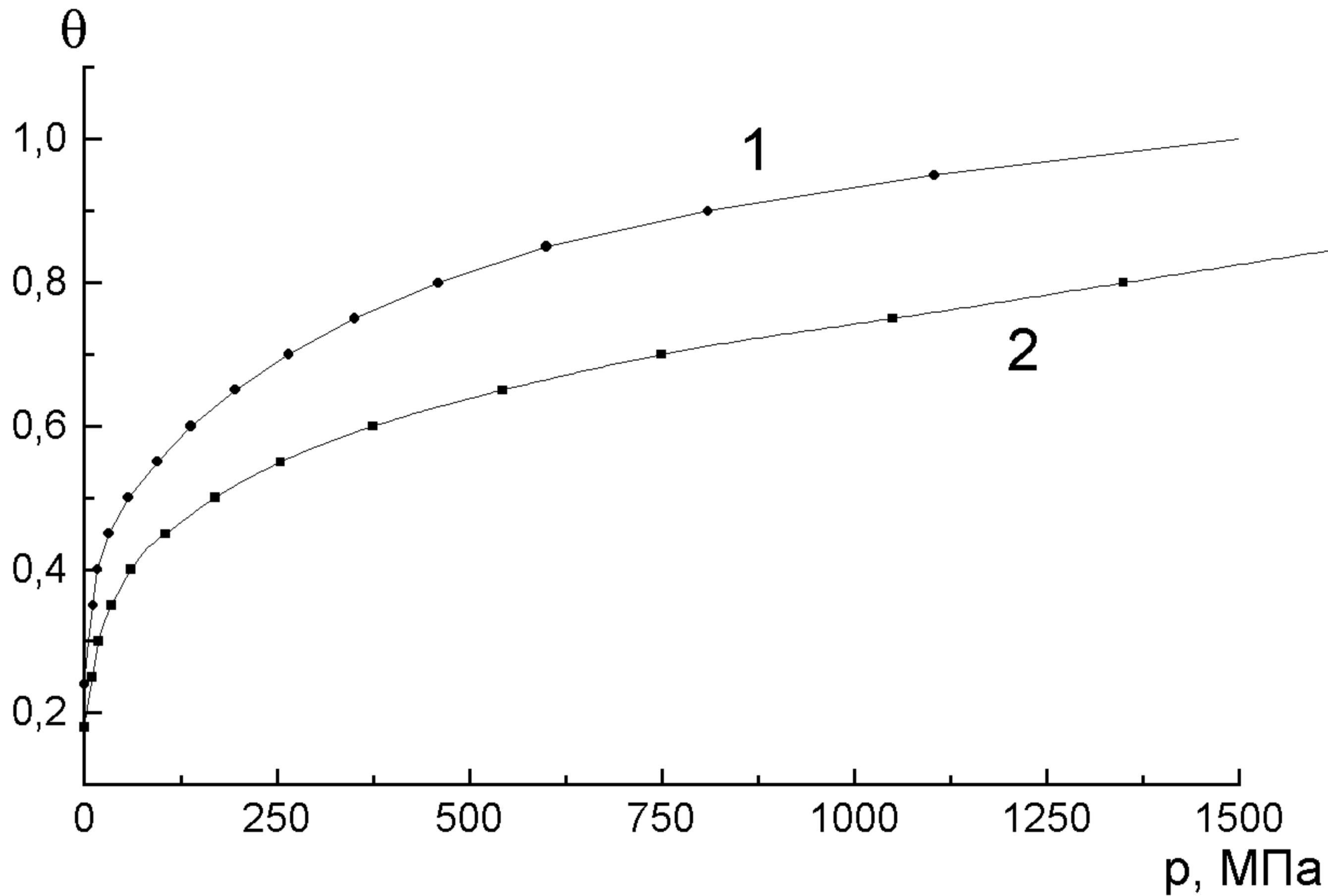
б.

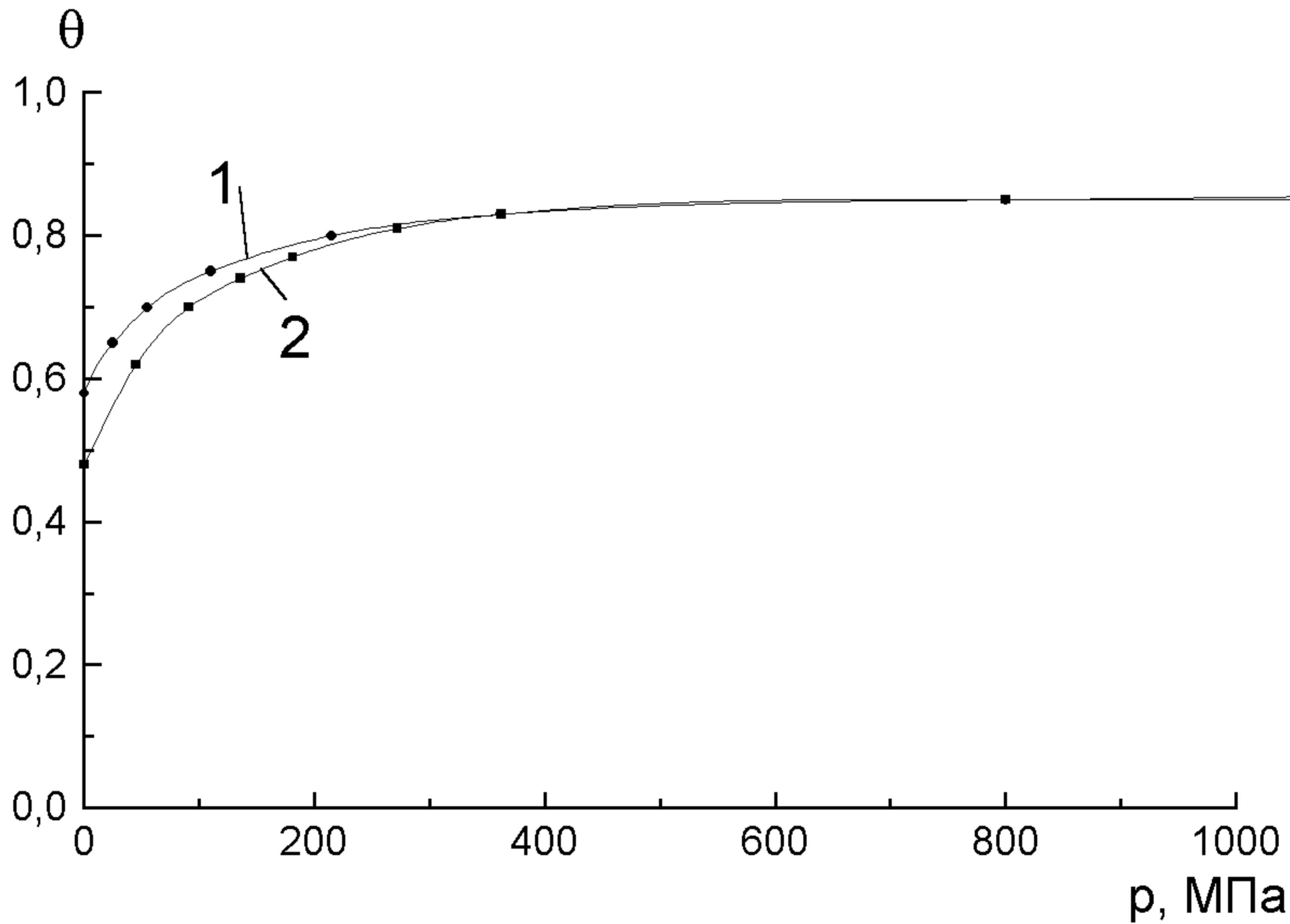


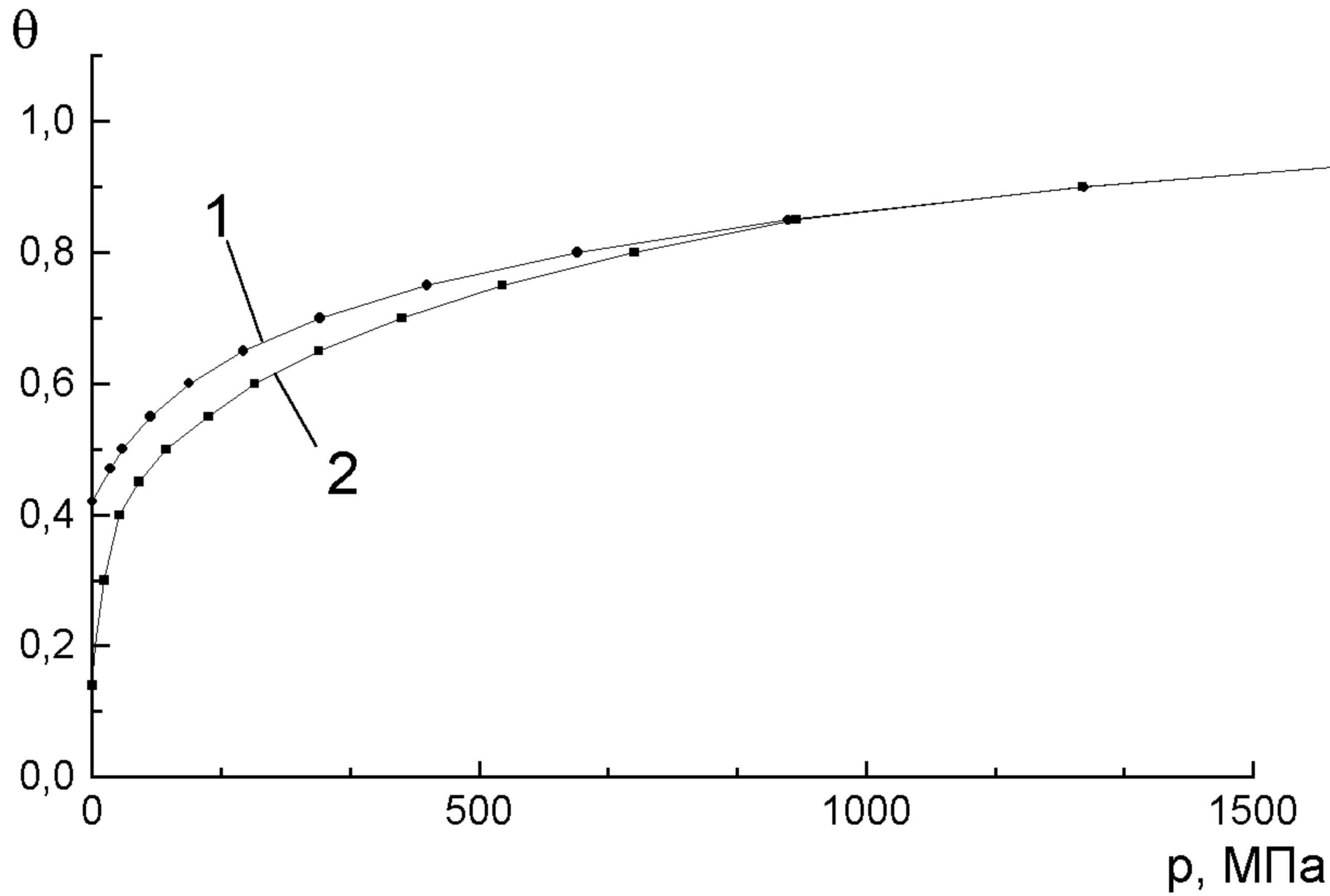
в.

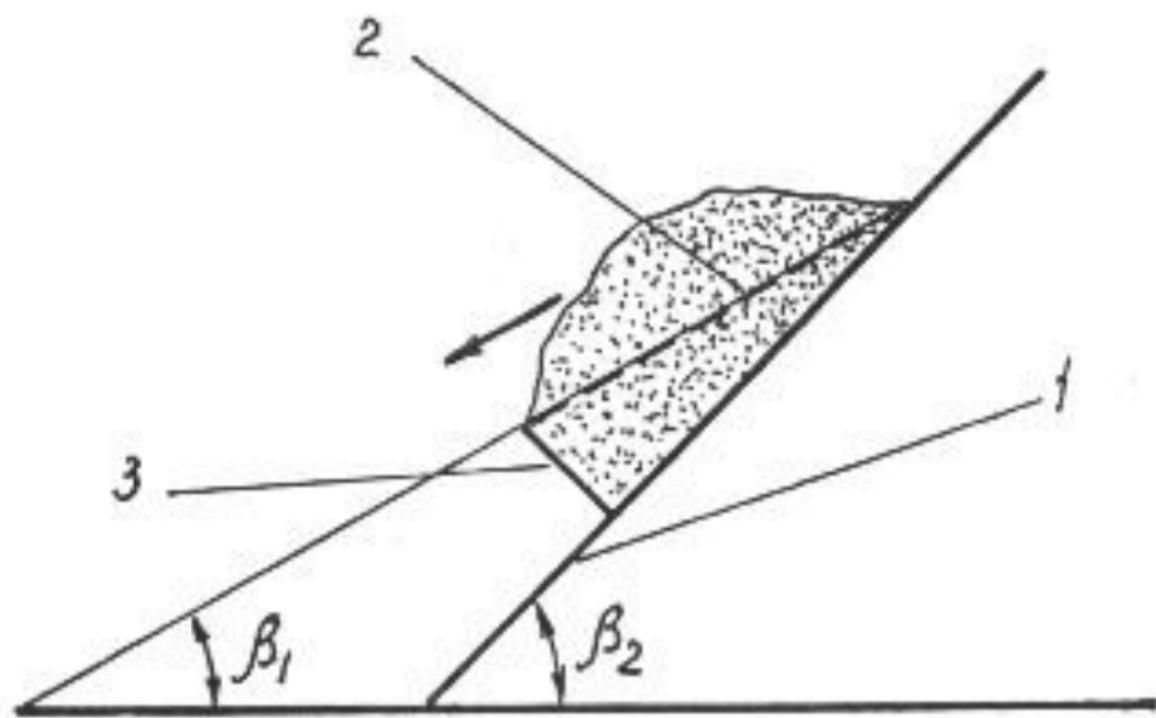


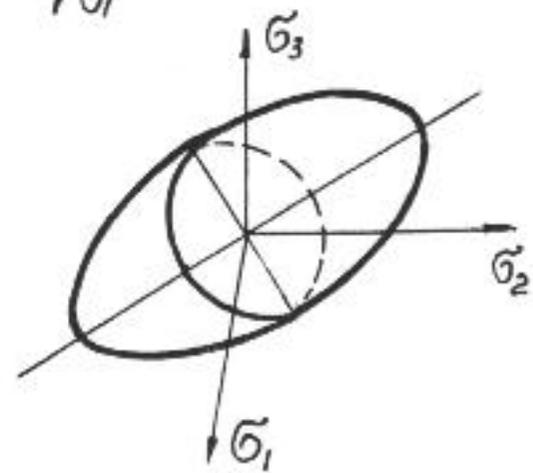
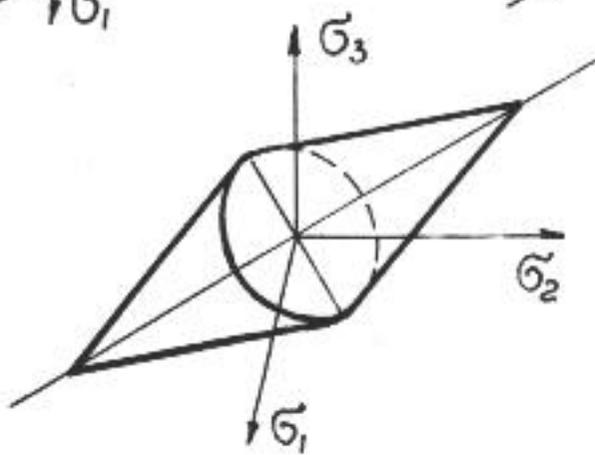
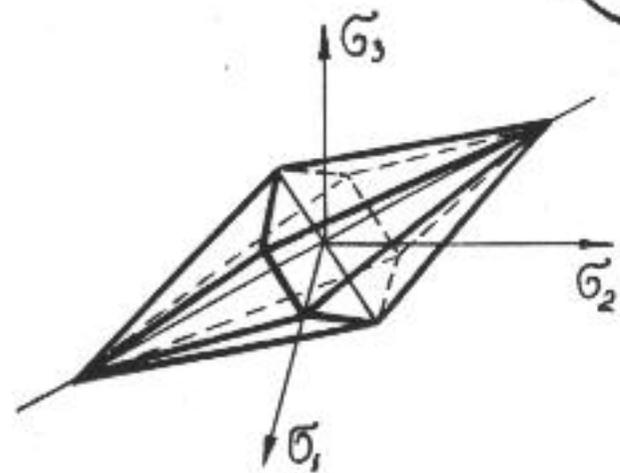
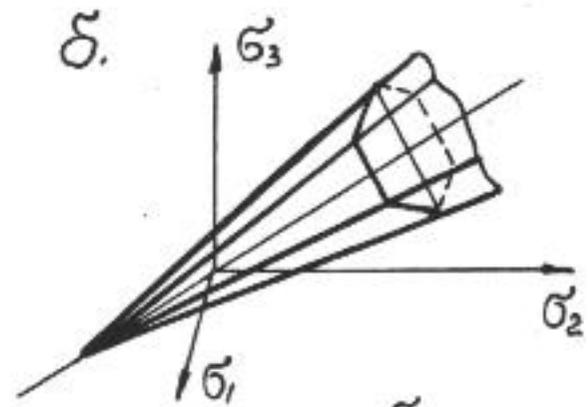
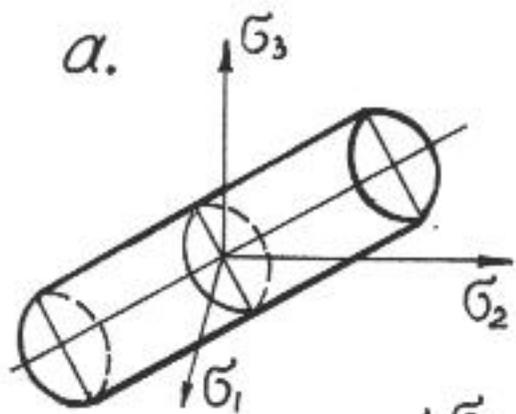








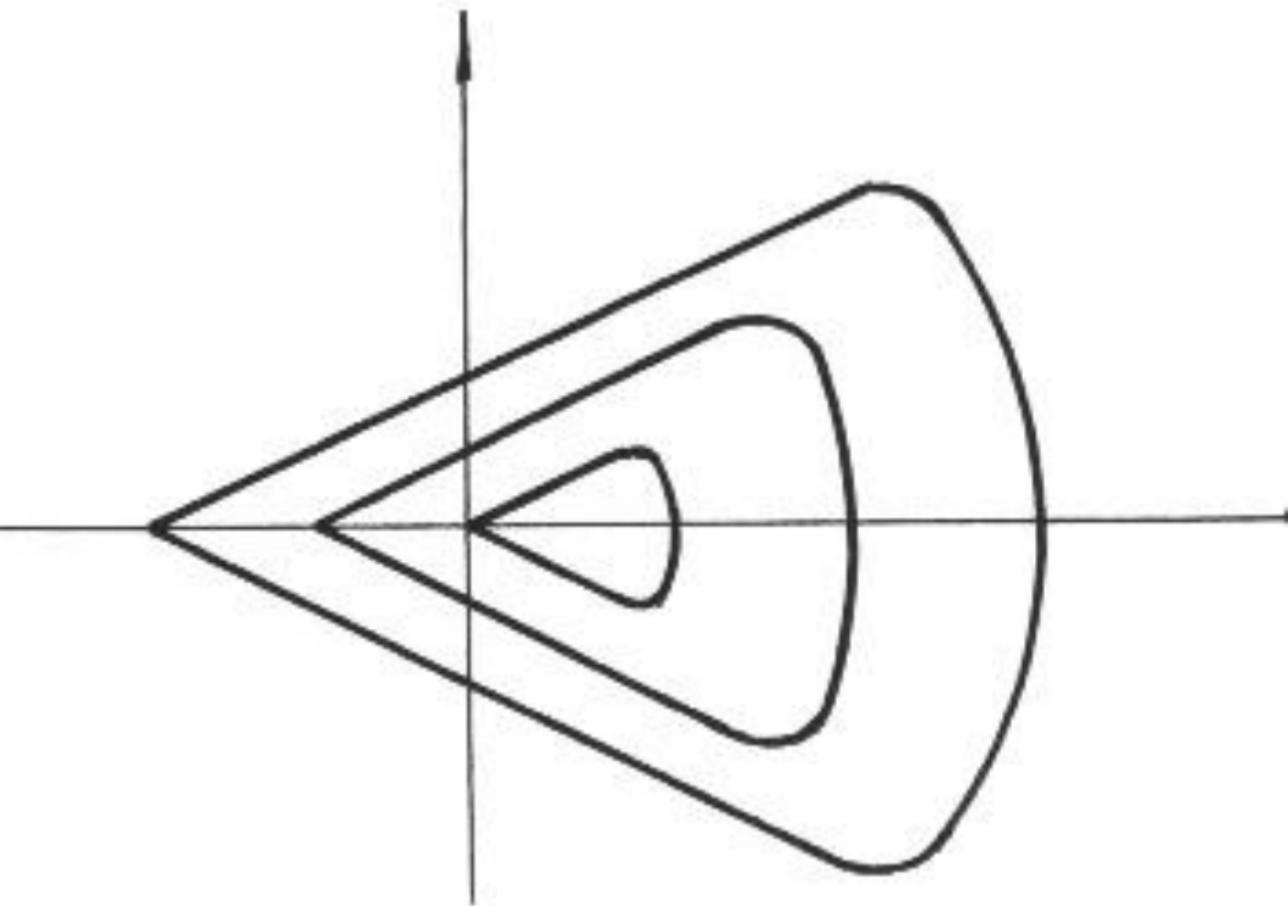


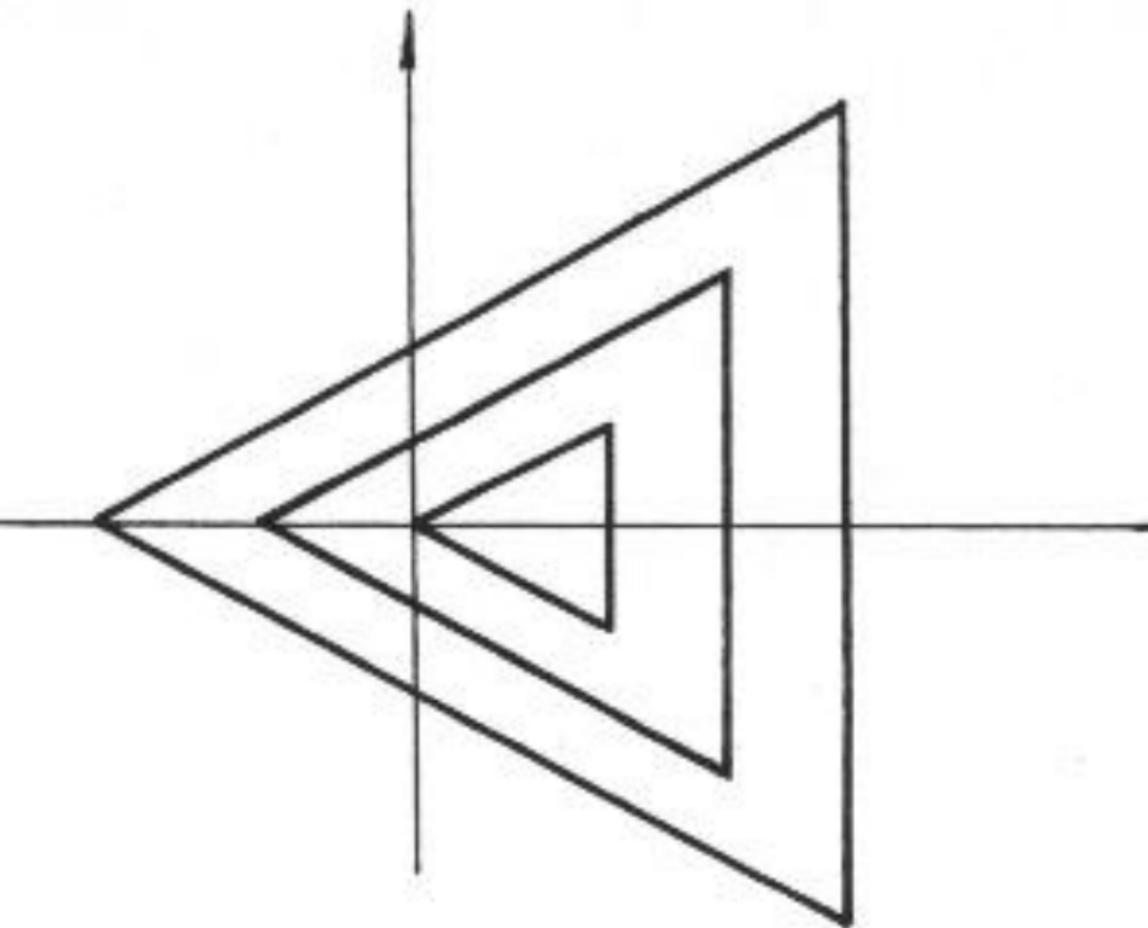


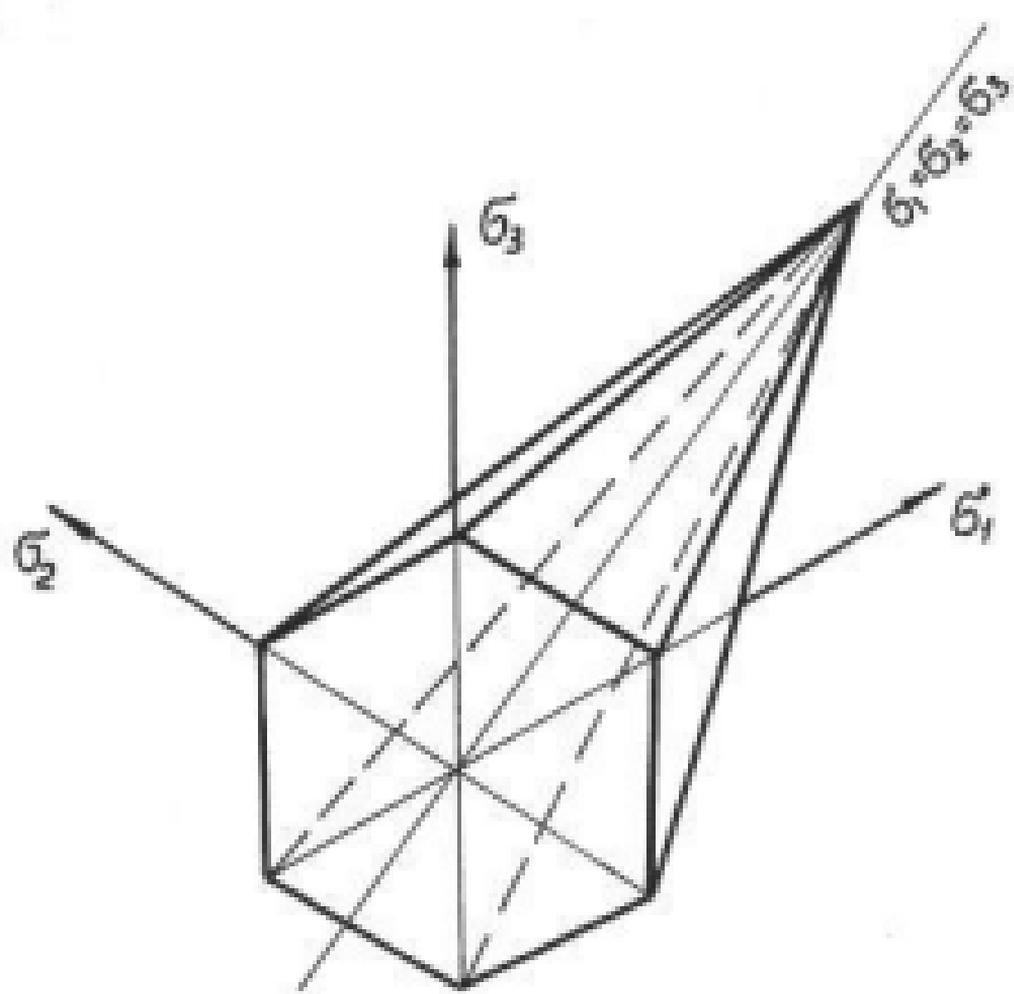
в.

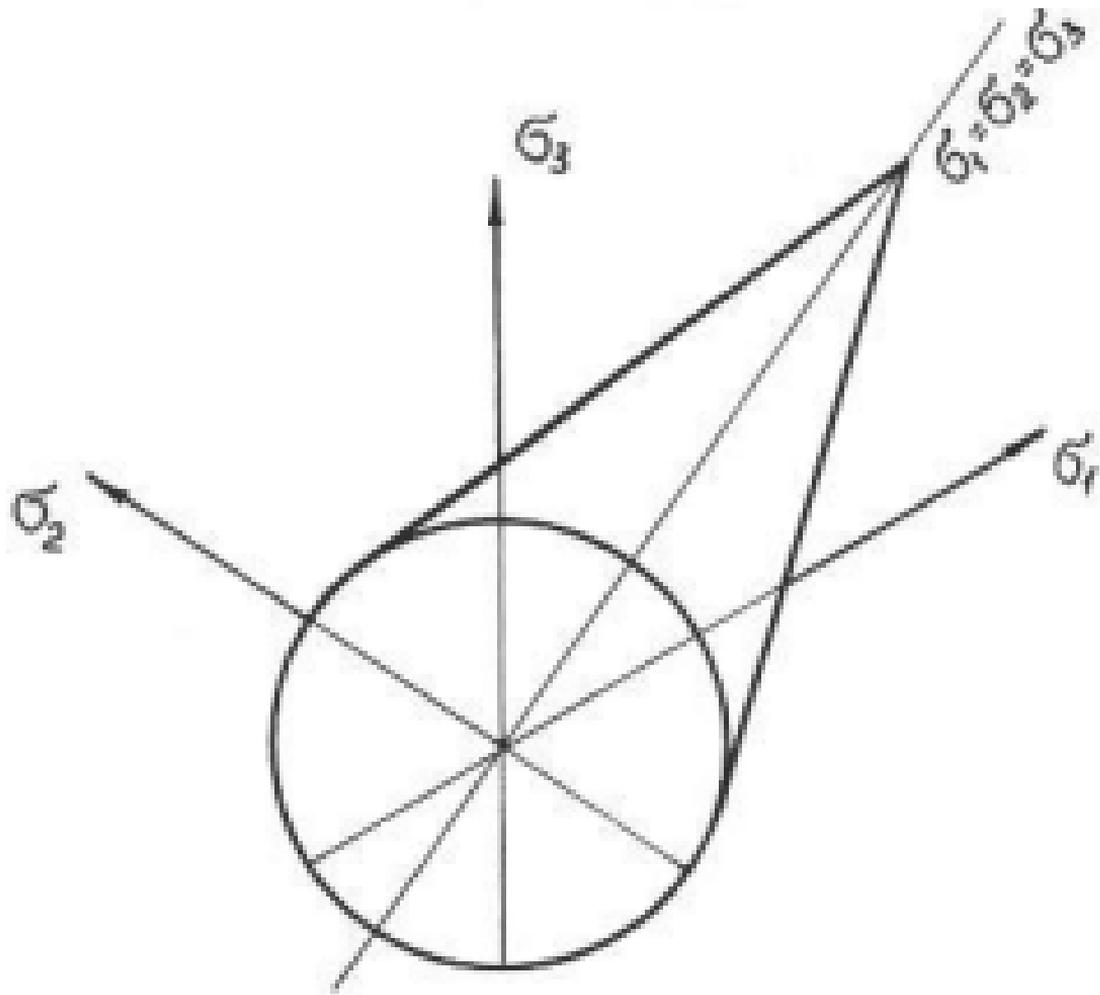
г.

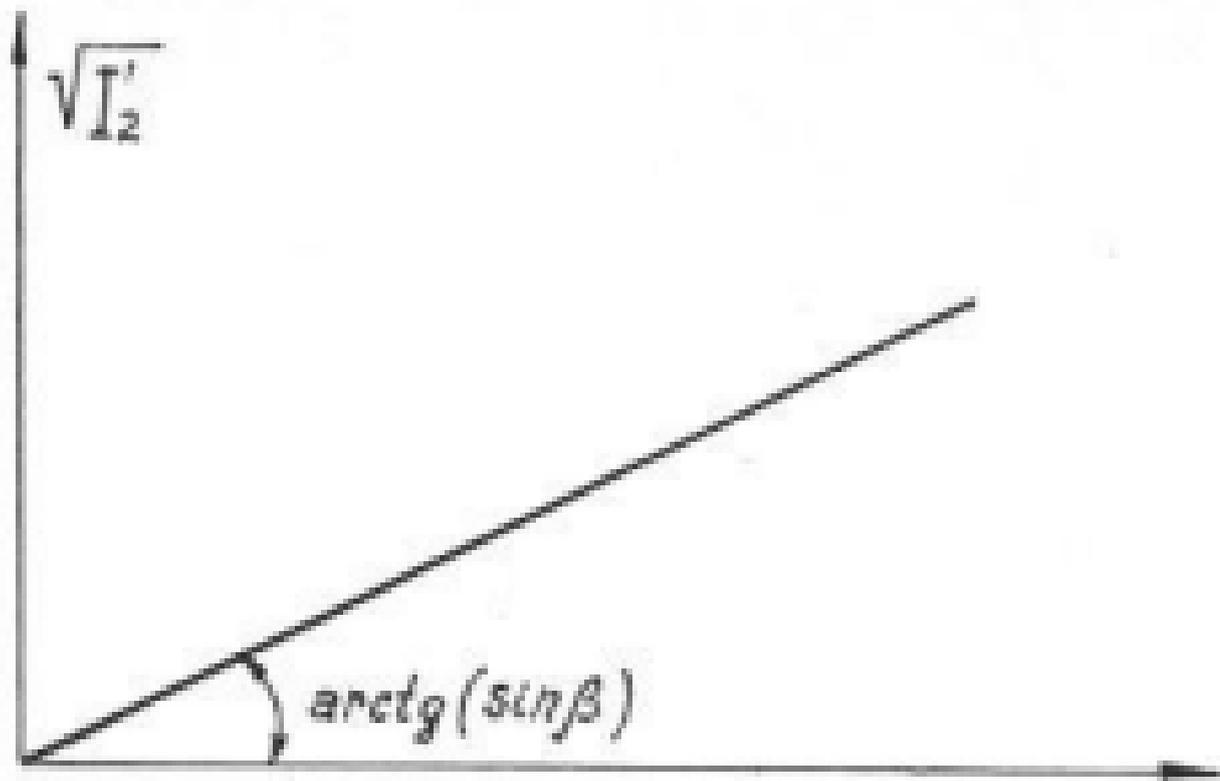
д.



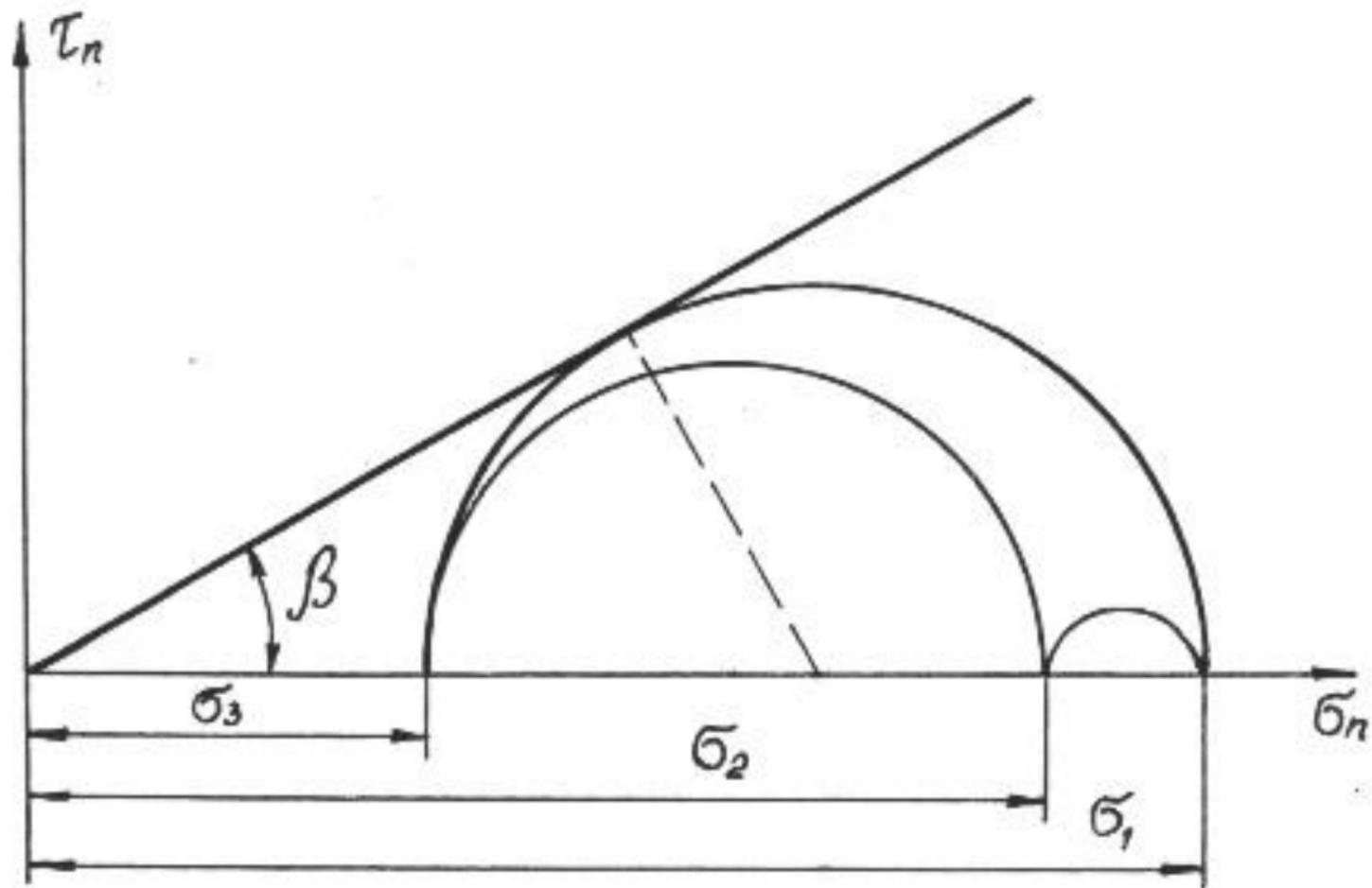








$$\rho = -\frac{1}{2} I_1$$



Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Подписано в печать . Объем в п.л. .
Тираж . Заказ № .

Отпечатано с готового оригинал-макета
в Издательстве СПбГУ
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29